

TARTU ÜLIKOOL
LOODUS- JA TÄPPISTEADUSTE VALDKOND
MATEMAATIKA JA STATISTIKA INSTITUUT

Markus Rene Pae
Perioodiliste kuupsplainidega histopoleerimine
Matemaatika
Bakalaureusetöö (9 EAP)

Juhendajad: PhD Evely Kirsiaed, PhD Peeter Oja

TARTU 2021

PERIOODILISTE KUUPSPLAINIDEGA HISTOPOLEERIMINE

Bakalaureusetöö
Markus Rene Pae

Lühikokkuvõte

Bakalaureusetöös uuritakse perioodilisi kuupsplaine, mis on määratud võrgul, kus on paarisarv osalõike. Lahendatakse histopolatsiooniülesannet: otsitakse paarisarvulise osalõikude arvuga histogrammile vastavat splaini, kus igal osalõigul määratud kuuppolünoomi graafikualune pindala võrduks histogrammi vastava tulba pindalaga. Histogrammi osalõikude pikkused ei pea olema võrdsed. Varasemast on teada, et kuupsplainidega histopolatsiooniülesanne on üheselt lahenduv, kui histogrammi osalõikude arv on paaris. Samuti on teada, et kui osalõike on kaks, siis ülesanne ei ole üheselt lahenduv. Bakalaureusetöös uuritakse üldisemat ülesannet, kui histogrammi osalõike on paarisarv.

CERCS teaduseriala: P170 Arvutiteadus, arvutusmeetodid, süsteemid, juhtimine (automaatjuhtimisteooria).

Märksõnad: Histopoleerimine, kuupsplainid, perioodilised splainid.

PERIODIC CUBIC SPLINE HISTOPOLATION

Bachelor thesis
Markus Rene Pae

Abstract

The objective of this thesis is to examine periodic cubic splines that are defined on a grid with an even number of subsections. More specifically, it is attempted to study a wide class of histopolation problems: for given histogram would there exist a periodic cubic histopolating spline. The widths of the subsections do not have to be equal. It is previously known that the solution exists and is unique whenever the number of subsections is odd. If there are only two subsections, then the solution to the histopolation problem is not unique. In this thesis we try to obtain a more general result: for even number of subsections the histopolation problem is not uniquely solvable.

CERCS research specialisation: P170 Computer science, numerical analysis, systems, control.

Key Words: Histopolation, cubic splines, periodic splines.

Sisukord

1 Kuupsplainid	3
1.1 Kuupsplaini definitsioon	3
1.2 Histopoleerimisülesanne	3
2 Kuupsplaini esitusviisid	5
2.1 Kuupsplaini esitus läbi sõlmväärtuste ja esimeste momentide	5
2.1.1 Kuupsplaini sisevõrrandid	5
2.2 Kuupsplaini alternatiivne esitus	6
2.2.1 Kuupsplaini sisevõrrandid	7
3 Histopoleerimisülesande lahendamine	9
3.1 Sisevõrrandite uurimine	10
3.2 Võrrandisüsteemi koostamine	11
3.3 Näide võrrandisüsteemist ja selle maatriksist	11
4 Võrrandisüsteemi maatriksi determinant	13
4.1 Näited	13
4.1.1 Juhu $n = 4$ uurimine	13
4.1.2 Juhu $n = 6$ uurimine	14
4.1.3 Juhu $n = 8$ uurimine	15
Kasutatud kirjandus	16

1 Kuupsplainid

1.1 Kuupsplaini definitsioon

Olgu antud lõik $[a, b]$, kus $a, b \in \mathbb{R}$ ning $a < b$. Kui sellel lõigul määrata sõlmed x_i , saame võrgu Δ_n :

$$\Delta_n = \{x_0, x_1, \dots, x_n : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}.$$

See võrk koosneb n osalõigust, mida tähistame edaspidi $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$. Võrgu järjestikuste sõlmede vahekaugust nimetatakse osalõigu pikkuseks $h_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, \dots, n$.

Definitsioon. Funktsiooni $S : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ nimetatakse splineiks, mille aste on m ja defekt k , kui on täidetud järgmised tingimused:

1. $S \in P^m [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$, ehk igal osalõigul on S ülimalt m astme polünoom,
2. $S \in C^{m-k} [a, b]$ ehk S on lõigul $[a, b]$ $m - k$ korda pidevalt diferentseeruv.

Käesolevas bakalaureusetöös vaadeldakse suvalisel võrgul Δ_n määratud kuupsplaine ehk splaine, mille aste $m = 3$ ning defekt $k = 1$. Vastavalt splinei definitsiooni esimesele punktile peab vaatlusalune spline olema igal osalõigul ülimalt 3. astme polünoom. Definitsiooni teisest poolest saame, et nii S , S' kui ka S'' peavad olema kõigis sõlmpunktides pidevad.

Definitsioon. Kuupsplaine nimetatakse perioodiliseks, kui võrgu otspunktides kehtib $S(a) = S(b)$, $S'(a) = S'(b)$ ning $S''(a) = S''(b)$.

Perioodilise splinei puhul saab käsitleda võrgu otspunkte samamoodi nagu splinei sisesõlmi. Sagedi tuleb ette situatsioon, kus mõni indeks k on nullist väiksem või n -st suurem. Sellisel juhul mõeldakse indeksi all vähimat mittenegatiivset täisarvu, mis on kongruentne arvuga k mooduli n järgi.

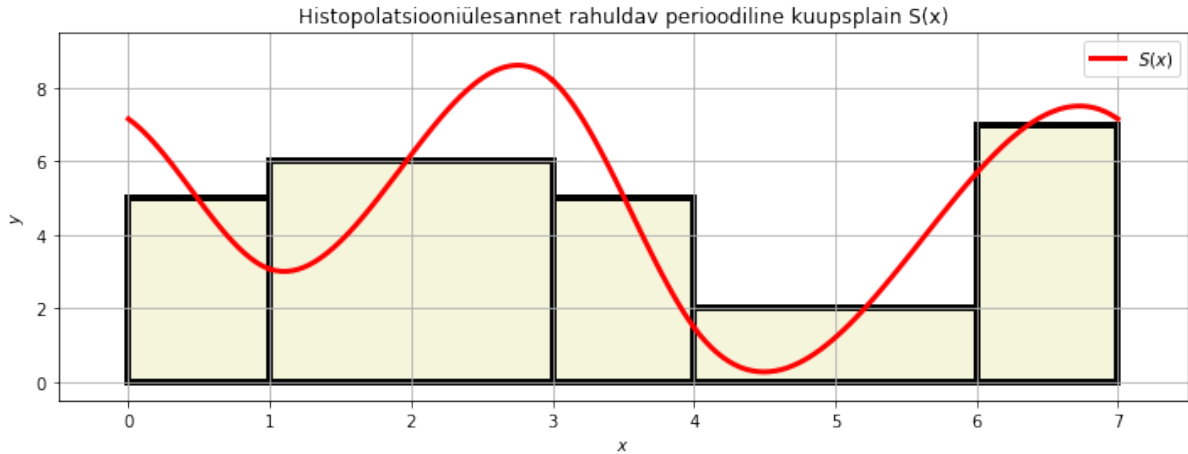
Edaspidi nimetame sõlmedele vastavaid funktsiooni väärtusi $S(x_i)$, $i = 0, \dots, n$, sõlmväärtusteks ning tähistame kui f_i , $i = 0, \dots, n$. Splinei esimesi ja teisi tuletisi sõlmpunktides nimetame vastavalt splinei esimesteks ja teisteks momentideks. Esimesed momendid on tähistatud kui m_i ja teised momendid on tähistatud kui M_i , kus $i = 0, \dots, n$.

1.2 Histopoleerimisülesanne

Olgu antud võrk Δ_n ning arvud z_i , $i = 1, \dots, n$. Histopoleerimisülesandega otsitakse sellist funktsiooni S , mille korral funktsiooni keskmine väärtus igal i -ndal osalõigul oleks võrdne arvuga z_i . Geomeetriselt tähendab see seda, et otsitava funktsiooni graafiku joonealune pindala peab igal osalõigul võrduma sellise ristküliku pindalaga, mille kõrgus on z_i ning laius h_i . Integraalkujul:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} S(x) dx = z_i h_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.1)$$

Käesolevas bakalaureusetöös otsime perioodiliste kuupsplainide ruumist kuupsplaine, mis rahuldab tingimust (1.1). Järgneval joonisel on toodud näide ebahühtlasest võrgust, kus igale osalõigule on joonestatud ristkülik kõrgusega z_i . Punase joonega on toodud antud histopolatsiooniülesande lahend, mis kuulub perioodiliste kuupsplainide ruumi.



Joonis 1: Näide histopolatsiooniülesande lahendist.

Varasemast on teada, et teatud tingimustel on histopoleerimisülesanne perioodiliste splineidega lahenduv, teatud tingimustel mitte. Järgnevas tabelis on horisontaalteljel osalõikude arv n ning vertikaalteljel splaini järk m . Kui histopoleerimisülesanne on igasuguse võrgu korral üheselt lahenduv, siis on see märgitud tabelis plussiga. Kui ülesanne ei ole üheselt lahenduv, siis on see märgitud miinusega. Küsimärkidega on tähistatud tabelis need lahtrid, mille puhul on lahenduvuse küsimus lahtine.

Tabel 1: Histopolatsiooniülesande lahenduvus erinevate osalõikude arvu n ja splaini järkude m korral. [2]

$m \backslash n$	1	2	3	4	5	6	...
1	+	-	+	-	+	-	
2	+	+	+	+	+	+	
3	+	-	+	?	+	?	
4	+	+	+	+	+	+	
5	+	-	+	?	+	?	
...							

Lisaks on [2] põhjal teada, et kui histopolatsiooniülesannet lahendada võrgul, kus kõigi osalõikude pikkused on võrdsed, siis tabelis olevate küsimärkide asemel on miinused ehk, teisisõnu, histopolatsiooniülesanne ei ole üheselt lahenduv. Selle põhjal saab püstitada hüpoteesi, et suvalisel võrgul Δ_n ei ole ülesanne (1.1) üheselt lahenduv parajasti siis, kui osalõikude arv n on paarisarv ning splaini järk m on paaritu arv. Käesoleva bakalaureusetöö eesmärk on uurida juhtu, kus histopoleerimisülesannet lahendatakse perioodilise kuupsplainiga ning osalõikude arv on suvaline paarisarv.

2 Kuupsplaini esitusviisid

Kuupsplaine on võimalik esitada mitmel erineval viisil. Käesolevas peatükis on kirja pandud kaks erinevat kuupsplaini esitusviisi ning ühtlasi on kirja pandud tingimused, mis tagavad nii splaini pidevuse kui ka vajaliku sileduse. Punktis 2.2 on toodud selline esitusviis, mille alusel uuritakse histopolatsiooniülesande lahenduvust.

2.1 Kuupsplaini esitus läbi sõlmväärtuste ja esimeste momentide

Esitame osalõigul $[x_{i-1}, x_i]$ kuuppolünoomi järgneval kujul

$$S(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3 \quad x \in [x_{i-1}, x_i]. \quad (2.1)$$

Määrame kordajad a_i, b_i, c_i, d_i , kasutades sõlmväärtusi $f_{i-1} = S(x_{i-1})$, $f_i = S(x_i)$ ning esimesi momente $m_{i-1} = S'(x_{i-1})$, $m_i = S'(x_i)$. Selleks on vaja lahendada võrrandisüsteem

$$\begin{cases} S(x_{i-1}) = a_i = f_{i-1} \\ S(x_i) = a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 = f_i \\ S'(x_{i-1}) = b_i = m_{i-1} \\ S'(x_i) = b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2 = m_i. \end{cases}$$

On lihtne näha, et $a_i = f_{i-1}$ ning $b_i = m_{i-1}$. Ülejäänud kordajad avalduvad kujul

$$c_i = \frac{3(f_i - f_{i-1})}{h_i^2} - \frac{m_i + 2m_{i-1}}{h_i},$$
$$d_i = \frac{2(f_{i-1} - f_i)}{h_i^3} + \frac{m_i + m_{i-1}}{h_i^2}.$$

Asetades leitud kordajad a_i, b_i, c_i, d_i avaldisse (2.1) ning korrastades seda, saame splaini esituse:

$$S(x) = \frac{(x_i - x)^2}{h_i^2} (3f_{i-1} + h_i m_{i-1}) - \frac{(x_i - x)^3}{h_i^3} (2f_{i-1} + h_i m_{i-1}) +$$
$$+ \frac{(x - x_{i-1})^2}{h_i^2} (3f_i - h_i m_i) - \frac{(x - x_{i-1})^3}{h_i^3} (2f_i - h_i m_i), \quad x \in [x_{i-1}, x_i]. \quad (2.2)$$

2.1.1 Kuupsplaini sisevõrrandid

Kui igas osalõiguses defineerida kuuppolünoom kujul (2.2), siis on tagatud splaini S pidevus sisesõlmedes. Ühtlasi on tagatud ka esimese tuletise pidevus. Uuritav splain kuulub ruumi $C^2[a, b]$ parajasti siis, kui kõigele eelnevale lisaks on täidetud tingimus

$$\lim_{x \rightarrow x_i^-} S''(x) = \lim_{x \rightarrow x_i^+} S''(x), \quad i = 1, \dots, n-1. \quad (2.3)$$

Funktsiooni (2.1) teine tuletis on $x \in (x_{i-1}, x_i)$ korral

$$S''(x) = 2c_i + 6d_i(x - x_{i-1}). \quad (2.4)$$

Kuna S'' on vahemikus (x_{i-1}, x_i) kujul (2.4), siis

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_i^-} S''(x) &= \lim_{x \rightarrow x_i^-} [2c_i + 6d_i(x - x_{i-1})] = 2c_i + 6d_i h_i = \\ &= \frac{2m_{i-1}}{h_i} + \frac{4m_i}{h_i} + \frac{6(f_{i-1} - f_i)}{h_i^2}, \quad i = 1, \dots, n-1.\end{aligned}$$

Kirjutades võrduse (2.4) välja vahemikus (x_i, x_{i+1}) , saame

$$S''(x) = 2c_{i+1} + 6d_{i+1}(x - x_i).$$

Järelikult

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_i^+} S''(x) &= \lim_{x \rightarrow x_i^+} [2c_{i+1} + 6d_{i+1}(x - x_i)] = 2c_{i+1} = \\ &= -\frac{4m_i}{h_{i+1}} - \frac{2m_{i+1}}{h_{i+1}} - \frac{6(f_i - f_{i+1})}{h_{i+1}^2}, \quad i = 1, \dots, n-1,\end{aligned}$$

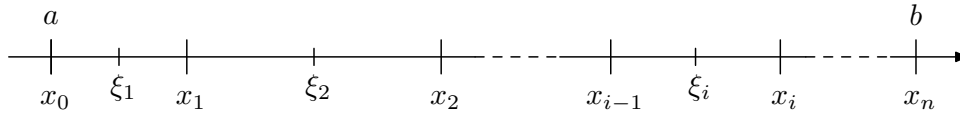
ning võrdus (2.3) saab teisendamise järel kuju

$$\frac{2}{h_i} m_{i-1} + \frac{4(h_i + h_{i+1})}{h_1 h_{i+1}} m_i + \frac{2}{h_{i+1}} m_{i+1} = -\frac{6}{h_i^2} f_{i-1} + \frac{6(h_{i+1}^2 - h_i^2)}{h_i^2 h_{i+1}^2} f_i + \frac{6}{h_{i+1}^2} f_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Neid võrrandeid nimetatakse splaini sisevõrranditeks.

2.2 Kuupsplaini alternatiivne esitus

Olgu $\xi_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$, kus $i \in \mathbb{Z}$, võrgu Δ_n osalõikude keskpunktid.



Joonis 2: Ebahütlaste vahedega võrk ning osalõikude keskpunktid ξ_i .

Lisaks olgu kasutuses järgmised tähised

$$\begin{aligned}M_i &= S''(x_i), & m_i &= S'(\xi_i), \\ \sigma_i &= \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} S(x) dx, & S_i &= S(\xi_i).\end{aligned}$$

Esitame polünoomi S Taylori polünoomina lõigu keskpunktis

$$S(x) = S(\xi_i) + S'(\xi_i)(x - \xi_i) + \frac{S''(\xi_i)}{2}(x - \xi_i)^2 + \frac{S'''(\xi_i)}{6}(x - \xi_i)^3, \quad x \in [x_{i-1}, x_i]. \quad (2.5)$$

Sellest

$$\begin{aligned}S''(x) &= S''(\xi_i) + S'''(\xi_i)(x - \xi_i), \\ S''(x_{i-1}) &= S''(\xi_i) - \frac{h_i}{2} S'''(\xi_i) = M_{i-1}, \\ S''(x_i) &= S''(\xi_i) + \frac{h_i}{2} S'''(\xi_i) = M_i.\end{aligned}$$

Viimase kahe võrduse liitmisel saame, et

$$S''(\xi_i) = \frac{M_{i-1} + M_i}{2}$$

ning lahutamisel

$$S'''(\xi_i) = \frac{M_i - M_{i-1}}{h_i}.$$

Asetades leitud kordajad avaldisse (2.5), saame kuuppolünoomi esituse, mis sõltub väärtusest osalõigu keskpunktis, esimesest momendist osalõigu keskpunktis ning teistest momentidest osalõigu otspunktides:

$$S(x) = S_i + m_i(x - \xi_i) + \frac{M_{i-1} + M_i}{4}(x - \xi_i)^2 + \frac{M_i - M_{i-1}}{6h_i}(x - \xi_i)^3, \quad x \in [x_{i-1}, x_i]. \quad (2.6)$$

Esitust (2.6) on üsna mugav integreerida ning sellest saame splaini keskväärtused σ_i igal osalõigul:

$$\begin{aligned} \sigma_i &= \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} S(x) dx = \frac{1}{h_i} \left[S_i x + m_i \frac{(x - \xi_i)^2}{2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{M_{i-1} + M_i}{12}(x - \xi_i)^3 + \frac{M_i - M_{i-1}}{24h_i}(x - \xi_i)^4 \right]_{x_{i-1}}^{x_i} = \\ &= S_i + \frac{M_{i-1} + M_i}{48} h_i^2, \end{aligned}$$

millest omakorda

$$S_i = \sigma_i - \frac{M_{i-1} + M_i}{48} h_i^2.$$

Splaini (2.5) saab osalõigul $[x_{i-1}, x_i]$ esitada kujul

$$S(x) = \sigma_i - \frac{M_{i-1} + M_i}{48} h_i^2 + m_i(x - \xi_i) + \frac{M_{i-1} + M_i}{4}(x - \xi_i)^2 + \frac{M_i - M_{i-1}}{6h_i}(x - \xi_i)^3. \quad (2.7)$$

Järelikult sellisel kujul esitatud splain on igal osalõigul määratud parajasti siis, kui on määratud esimene moment osalõigu keskpunktis m_i , teised momendid osalõigu otspunktides M_{i-1} ja M_i ning splaini keskväärtused σ_i igal osalõigul.

2.2.1 Kuupsplaini sisevõrrandid

Kui esitada splain kujul (2.7), siis pole garanteeritud selle pidevus ja pidevalt diferentseeruvus sõlmpunktides. Selleks peavad kehtima võrdused

$$\lim_{x \rightarrow x_i^-} S(x) = \lim_{x \rightarrow x_i^+} S(x) \quad (2.8)$$

ja

$$\lim_{x \rightarrow x_i^-} S'(x) = \lim_{x \rightarrow x_i^+} S'(x). \quad (2.9)$$

Nendest piirväärtustest saadavaid võrrandeid nimetame kõnealuse splaini esitusviisi sisevõrranditeks. Võrdusest (2.8) saame, et

$$\begin{aligned} \sigma_i - \frac{M_{i-1} + M_i}{48} h_i^2 + \frac{m_i h_i}{2} + \frac{M_{i-1} + M_i}{16} h_i^2 + \frac{M_i - M_{i-1}}{48} h_i^2 &= \\ = \sigma_{i+1} - \frac{M_i + M_{i+1}}{48} h_{i+1}^2 - \frac{m_{i+1} h_{i+1}}{2} + \frac{M_i + M_{i+1}}{16} h_{i+1}^2 - \frac{M_{i+1} - M_i}{48} h_{i+1}^2. \end{aligned}$$

Viimasest saamegi lihtsustatud sisevõrrandi, mis tagab splaini pidevuse sisesõlmedes

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(m_i h_i + m_{i+1} h_{i+1}) &= \sigma_{i+1} - \sigma_i - M_{i-1} \frac{h_i^2}{48} + \\ &+ M_i \left(\frac{h_{i+1}^2}{16} - \frac{h_i^2}{16} \right) + M_{i+1} \frac{h_{i+1}^2}{48}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Võrdusest (2.9) saame, et

$$\begin{aligned} m_i + \frac{M_{i-1} + M_i}{4} h_i + \frac{M_i - M_{i-1}}{8} h_i^2 &= \\ = m_{i+1} - \frac{M_i + M_{i+1}}{4} h_{i+1} + \frac{M_{i+1} - M_i}{8} h_{i+1}^2, \end{aligned}$$

mille teisendamisel saame sisevõrrandi, mis tagab splaini esimese tuletise pidevuse sisesõlmedes

$$\frac{h_i}{h_i + h_{i+1}} M_{i-1} + 3M_i + \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}} M_{i+1} = \frac{8}{h_i + h_{i+1}} (m_{i+1} - m_i). \quad (2.11)$$

Sisevõrrandite juures sai toonitatud, et need tagavad splaini ja selle esimese tuletise pidevuse sisesõlmedes. See tähendab seda, et sisevõrrandite puhul $i = 1, \dots, n-1$. Kuna bakalaureusetöö fookuses on perioodilised kuupsplainid, siis on tarvis, et sisevõrrandid kehtiks ka $i = 0$ (ühtlasi ka $i = n$) korral. See tagab, et $S(a) = S(b)$, $S'(a) = S'(b)$ ja $S''(a) = S''(b)$.

3 Histopolatsiooniülesande lahendamine

Käesolevas peatükis võetakse aluseks splaini esitusviis (2.6) ning selle sisevõrrandid (2.10) ja (2.11), kus $i = 1, \dots, n$. Eesmärk on koostada histopolatsiooniülesandele vastav võrrandisüsteem üldisel juhul. Tuuakse näide süsteemi maatriksist juhul, kui osalõikude arv $n = 4$. Võrrandisüsteemi lahenduvust uuritakse järgmises peatükis.

Enne histopolatsiooniülesande lahendamise alustamist olgu toodud üks definitsioon ja üks lemma, mille rakendamine osutub kasulikuks.

Definitsioon. Maatriks A on ridade kaupa domineeriva (pea)diagonaaliga, kui

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|, \quad i = 1, \dots, n.$$

Lemma 1. Kui maatriks A on ridade kaupa domineeriva peadiagonaaliga, siis maatriks A on pööratav.

Tõestus. Eeldame vastuväiteliselt, et ruumis \mathbb{R}^n leidub selline nullvektorist erinev vektor x , et $Ax = 0$. Sellest järeldub, et $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$. Olgu x_k suurima absoluutväärtusega komponent vektoris x . Muidugi $x_k \neq 0$, sest $x \neq 0$. Siis

$$\sum_{j=1}^n a_{kj}x_j = 0 \implies a_{kk}x_k = -\sum_{j \neq k} a_{kj}x_j \implies a_{kk} = -\sum_{j \neq k} a_{kj} \frac{x_j}{x_k}.$$

Võttes viimases võrduses mõlemast poolest absoluutväärtuse, saame

$$|a_{kk}| = \left| \sum_{j \neq k} a_{kj} \frac{x_j}{x_k} \right|.$$

Kuna x_k on vektori x suurima absoluutväärtusega komponent, siis $\left| \frac{x_j}{x_k} \right| \leq 1$ iga indeksi j korral. Sellest aga saame mitterange võrratuste ahela

$$\left| \sum_{j \neq k} a_{kj} \frac{x_j}{x_k} \right| \leq \sum_{j \neq k} |a_{kj}| \left| \frac{x_j}{x_k} \right| \leq \sum_{j \neq k} |a_{kj}|$$

ja

$$|a_{kk}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |a_{kj}|.$$

Viimane on aga vastuolus eeldusega, et A on ridade kaupa domineeriva diagonaaliga maatriks. See aga tähendab, et 0 ei ole maatriksi omaväärtus, millest omakorda järeldub maatriksi A regulaarsus ja seega A on pööratav. [1]

3.1 Sisevõrrandite uurimine

Järgnevas peame silmas, et võrk on perioodiliselt laiendatud, st $h_{i+n} = h_i$, samuti $M_{i+n} = M_i$ ja $m_{i+n} = m_i$ iga i korral. See võimaldab mõista järgnevaid võrduseid, mis sisaldavad h_i , M_i ja m_i , kus võib olla $i > n$ või $i < 1$.

Kui esitame splaini kujul (2.7), siis kasutame esimesi momente osalõigu keskpunktis m_i ning teisi momente osalõigu otspunktides M_{i-1} ja M_i . Olgu meil esimestest ja teistest momentidest moodustatud vektorid, vastavalt m ja M :

$$\begin{aligned} m &= (m_1, m_2, \dots, m_n) \\ M &= (M_1, M_2, \dots, M_n) \end{aligned}$$

Võttes sisevõrrandites (2.11) indeksid $i = 1, \dots, n$, saame võrrandisüsteemi kirja panna kui $AM = Bm$, kus maatriksi A elementideks on need arvud, mis on kõnealustes sisevõrrandites teiste momentide ees olevad kordajad. Maatriksi B elemendid on esimeste momentide ees olevad kordajad.

Maatriksi A elementide puhul tasub tähele panna, et selle peadiagonaalil olevad elemendid on $a_{ii} = 3$. Samas ülejäänud elemendid igas reas on $\frac{h_i}{h_i + h_{i+1}}$ ja $\frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}}$, mille summa on võrdne 1-ga. Sellest tulenevalt on maatriks A ridade kaupa domineeriva diagonaaliga ja seega pööratav.

Maatriksi B igas reas on täpselt kaks elementi, mis on nullist erinevad ning mille väärtused absoluutväärtuselt võrdsed. Seejuures i -ndas reas on vastava elemendi väärtused $-\frac{8}{h_i + h_{i+1}}$ ja $\frac{8}{h_i + h_{i+1}}$. Esimene neist asub maatriksi peadiagonaalil ning teine asub peadiagonaalist vahetult paremal – välja arvatud maatriksi viimasel real, kus üks element on maatriksi esimeses veerus ja teine element viimasel veerus.

Maatriksi B mõõtmed on $n \times n$, millest tulenevalt maatriksi veerud on lineaarselt sõltuvad. Piisab sellest, kui võtta iga veeru kordajaks arv 1. Kuna veerud on lineaarselt sõltuvad, siis järelikult B ei ole pööratav. Maatriksi A pööratavusest saame järeldada, et kui $m = 0$, siis $M = 0$.

Sisevõrrandid (2.11) saab viia kujule

$$\frac{h_i}{8} M_{i-1} + \frac{3}{8} (h_i + h_{i+1}) M_i + \frac{h_{i+1}}{8} M_{i+1} = m_{i+1} - m_i. \quad (3.1)$$

Sisevõrrandid (2.10) saab viia kujule

$$-\frac{h_i^2}{24} M_{i-1} + \frac{h_{i+1}^2 - h_i^2}{8} M_i + \frac{h_{i+1}^2}{24} M_{i+1} = m_i h_i + m_{i+1} h_{i+1}. \quad (3.2)$$

Korrutades võrrandit (3.1) teguriga $-h_{i+1}$ ning liites tulemusele võrrandi (3.2), saame

$$m_i = -\frac{1}{24} \frac{h_i (h_i + 3h_{i+1})}{h_i + h_{i+1}} M_{i-1} - \frac{1}{8} (h_i + 2h_{i+1}) M_i - \frac{1}{12} \frac{h_{i+1}^2}{h_i + h_{i+1}} M_{i+1}. \quad (3.3)$$

Viimasest järeldub, et kui $M = 0$, siis $m = 0$.

3.2 Võrrandisüsteemi koostamine

Võrrandid (3.3) (kus $i = 1, \dots, n$) maatrikskujul kirjutatuna on $m = \bar{A}M$, kus maatriksi \bar{A} elemendid on võrrandites tundmatute M_i ees olevad kordajad. Asetades selle võrrandisse $AM = Bm$, saame

$$AM = B\bar{A}M \implies (A - B\bar{A})M = 0. \quad (3.4)$$

Maatriksi $A - B\bar{A}$ kordajate leidmiseks võtame võtame võrdused (3.3) ning teeme nende abil võrrandi (3.1) paremas pooles asendused. Selle tulemusena jõuame võrranditeni

$$\begin{aligned} & \frac{h_i}{8}M_{i-1} + \frac{3}{8}(h_i + h_{i+1})M_i + \frac{h_{i+1}}{8}M_{i+1} = \\ & = -\frac{1}{24} \frac{h_{i+i}(h_{i+1} + 3h_{i+2})}{h_{i+1} + h_{i+2}}M_i - \frac{1}{8}(h_{i+1} + 2h_{i+2})M_{i+1} - \frac{1}{12} \frac{h_{i+2}^2}{h_{i+1} + h_{i+2}}M_{i+2} + \\ & + \frac{1}{24} \frac{h_i(h_i + 3h_{i+1})}{h_i + h_{i+1}}M_{i-1} + \frac{1}{8}(h_i + 2h_{i+1})M_i + \frac{1}{12} \frac{h_{i+1}^2}{h_i + h_{i+1}}M_{i+1}. \end{aligned}$$

Tuues kõik liikmed vasakule poole võrdusmärgi, saame leida maatriksi $A - B\bar{A}$ kordajad. Need on järgnevad:

- M_{i-1} kordaja:

$$\frac{h_i}{8} - \frac{1}{24} \frac{h_i(h_i + 3h_{i+1})}{h_i + h_{i+1}} = \frac{1}{12} \frac{h_i^2}{h_i + h_{i+1}},$$

- M_i kordaja:

$$\begin{aligned} & \frac{3}{8}(h_i + h_{i+1}) + \frac{1}{24} \frac{h_{i+i}(h_{i+1} + 3h_{i+2})}{h_{i+1} + h_{i+2}} - \frac{1}{8}(h_i + 2h_{i+1}) = \\ & = \frac{1}{12} \frac{3h_i h_{i+1} + 2h_{i+1}^2 + 3h_i h_{i+2} + 3h_{i+1} h_{i+2}}{h_{i+1} + h_{i+2}}, \end{aligned}$$

- M_{i+1} kordaja:

$$\frac{h_{i+1}}{8} + \frac{1}{8}(h_{i+1} + 2h_{i+2}) - \frac{1}{12} \frac{h_{i+1}^2}{h_i + h_{i+1}} = \frac{1}{12} \frac{3h_i h_{i+1} + 2h_{i+1}^2 + 3h_i h_{i+2} + 3h_{i+1} h_{i+2}}{h_i + h_{i+1}},$$

- M_{i+2} kordaja:

$$\frac{1}{12} \frac{h_{i+2}^2}{h_{i+1} + h_{i+2}}.$$

Seega võrrandisüsteemi (3.4) maatriks $A - B\bar{A}$ on neljadiagonaalne maatriks, st igas reas ja veerus on neli nullist erinevat elementi. Kui selle maatriksi determinant on nullist erinev, siis võrrandisüsteem on üheselt lahenduv. Ühtlasi tasub tähele panna, et iga kordaja ees on tegurina $\frac{1}{12}$. Kuna võrrandisüsteemi lahend ei muutu, kui kõiki tegureid ühe ja sama teguriga läbi korrutada, siis võime äsjaleitud $M_{i-1}, M_i, M_{i+1}, M_{i+2}$ kordajad arvuga 12 läbi korrutada.

3.3 Näide võrrandisüsteemist ja selle maatriksist

Kui tähistada $H = A - B\bar{A}$, siis lahendatav võrrandisüsteem (3.4) on kujul $HM = 0$. Kui histopolatsiooniülesandes on osalõikude arv $n = 4$, siis vastav võrrandisüsteemi maatriks H

näeb välja järgnev:

$$\begin{pmatrix} \frac{h_1^2}{h_1+h_2} & \frac{3h_1h_2+2h_2^2+3h_1h_3+3h_2h_3}{h_2+h_3} & \frac{3h_1h_2+2h_2^2+3h_1h_3+3h_2h_3}{h_1+h_2} & \frac{h_3^2}{h_3+h_3} \\ \frac{h_4^2}{h_3+h_4} & \frac{h_2^2}{h_2+h_3} & \frac{3h_2h_3+2h_3^2+3h_2h_4+3h_3h_4}{h_3+h_4} & \frac{3h_2h_3+2h_3^2+3h_2h_4+3h_3h_4}{h_2+h_3} \\ \frac{3h_3h_4+2h_4^2+3h_1h_3+3h_1h_4}{h_3+h_4} & \frac{h_1^2}{h_1+h_4} & \frac{h_3^2}{h_3+h_4} & \frac{3h_3h_4+2h_4^2+3h_1h_3+3h_1h_4}{h_1+h_4} \\ \frac{3h_1h_4+2h_1^2+3h_2h_4+3h_1h_2}{h_1+h_2} & \frac{3h_1h_4+2h_1^2+3h_2h_4+3h_1h_2}{h_1+h_4} & \frac{h_2^2}{h_1+h_2} & \frac{h_4^2}{h_1+h_4} \end{pmatrix}$$

Nagu näha, siis selle maatriksi kirjepilt on üsna pikk ja kohmakas. Seetõttu on mugav defineerida abimuutujad a_i , b_i ja c_i järgnevalt:

$$\begin{aligned} a_i &= h_i^2, \\ b_i &= 3h_i h_{i+1} + 2h_{i+1}^2 + 3h_i h_{i+2} + 3h_{i+1} h_{i+2}, \\ c_i &= h_i + h_{i+1}. \end{aligned}$$

Abimuutujate abil saame võrrandisüsteemi $HM = 0$ veidi kompaktsemalt kirja panna:

$$\begin{pmatrix} \frac{a_1}{c_1} & \frac{b_1}{c_2} & \frac{b_1}{c_1} & \frac{a_3}{c_2} \\ \frac{a_4}{c_3} & \frac{a_2}{c_2} & \frac{b_2}{c_3} & \frac{b_2}{c_2} \\ \frac{b_3}{c_3} & \frac{a_1}{c_4} & \frac{a_3}{c_3} & \frac{b_3}{c_4} \\ \frac{b_4}{c_1} & \frac{b_4}{c_4} & \frac{a_2}{c_1} & \frac{a_4}{c_4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{pmatrix} = 0$$

Järgmises peatükis uuritakse selle võrrandisüsteemi lahenduvust nii $n = 4$ kui ka $n = 6$ ja $n = 8$ korral.

4 Võrrandisüsteemi maatriksi determinant

Teatavasti on $n \times n$ võrrandisüsteem üheselt lahenduv parajasti siis, kui süsteemi maatriks on regulaarne ehk kui selle determinant on nullist erinev. Kui determinant on null, siis on süsteemi maatriksi veerud lineaarselt sõltuvad. Arvutuste käigus ilmneb, et kui $n = 4$ või $n = 6$, siis süsteemi maatriksi determinant on võrdne nulliga ning seega saame määrata veergudevahelise lineaarse sõltuvuse kordajaid. Kordajate määramiseks käesoleva histopolatsiooniülesande kontekstis on käesoleva töö autor loonud SymPy põhise sümbolarvutuse programmi, mille lähtekood on leitav bakalaureusetöö lõpust (vt Lisa 1).

Ainus muudetav parameeter selles lähtekoodis on 5. real olev osalõikude arv n . Programmilõik koostab võrrandisüsteemile vastava maatriksi ning leiab veergude lineaarse sõltuvuse kordajad. Käesolevas punktis on näidatud juhtudele $n = 4$, $n = 6$ ja $n = 8$ vastavad süsteemi maatriksid ning välja kirjutatud lineaarse sõltuvuse kordajad $n = 4$ ja $n = 6$ juhul.

4.1 Näited

Definitsioon. Maatriksi H veerud on lineaarselt sõltuvad, kui selle veeruvektorite $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ korral leiduvad sellised kordajad $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, mis pole kõik nullid, ning

$$\lambda_1 \xi_1 + \lambda_2 \xi_2 + \dots + \lambda_n \xi_n = 0.$$

Sümbolarvutusprogrammi abil ilmneb, et $n = 4$ ja $n = 6$ korral on võrrandisüsteemi veerud lineaarselt sõltuvad ning sellest järelduvalt ei ole nendel juhtudel histopolatsiooniülesanne üheselt lahenduv. Järgnevates alapeatükkides on kirja pandud süsteemimaatriksi H veergude lineaarse sõltuvuse kordajad λ_i , kus $i = 1, \dots, n$.

4.1.1 Juhu $n = 4$ uurimine

Võrrandisüsteemi maatriks H on järgnev:

$$H = \begin{pmatrix} \frac{a_1}{c_1} & \frac{b_1}{c_2} & \frac{b_1}{c_1} & \frac{a_3}{c_2} \\ \frac{a_4}{c_3} & \frac{a_2}{c_2} & \frac{b_2}{c_3} & \frac{b_2}{c_2} \\ \frac{b_3}{c_3} & \frac{a_1}{c_4} & \frac{a_3}{c_3} & \frac{b_3}{c_4} \\ \frac{b_4}{c_1} & \frac{b_4}{c_4} & \frac{a_2}{c_1} & \frac{a_4}{c_4} \end{pmatrix}.$$

Selle maatriksi veerud on lineaarselt sõltuvad, kusjuures lineaarse sõltuvuse kordajad on

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -3h_1h_2h_3 - 3h_1h_2h_4 - 3h_2h_3h_4 - 3h_1h_3h_4 - \\ &\quad - 2h_2^2h_3 - 2h_2^2h_4 - 2h_2h_3^2 - 2h_1h_3^2 \\ \lambda_2 &= 3h_1h_2h_3 + 3h_1h_2h_4 + 3h_2h_3h_4 + 3h_1h_3h_4 + \\ &\quad + 2h_1h_3^2 + 2h_2h_4^2 + 2h_3^2h_4 + 2h_3h_4^2 \\ \lambda_3 &= -3h_1h_3h_4 - 3h_2h_3h_4 - 3h_1h_2h_3 - 3h_1h_2h_4 - \\ &\quad - 2h_1^2h_3 - 2h_1h_4^2 - 2h_1^2h_4 - 2h_2h_4^2 \\ \lambda_4 &= 3h_1h_2h_3 + 3h_1h_2h_4 + 3h_1h_3h_4 + 3h_2h_3h_4 + \\ &\quad + 2h_1^2h_2 + 2h_1^2h_3 + 2h_1h_2^2 + 2h_2^2h_4. \end{aligned} \tag{4.1}$$

On teada, et süsteemi maatriksi astak on n või $n - 1$ [1]. Seetõttu piisab ühe nullist erineva kordaja fikseerimisest.

4.1.2 Juhu $n = 6$ uurimine

Võrrandisüsteemi maatriks H on järgnev:

$$H = \begin{pmatrix} \frac{a_1}{c_1} & \frac{b_1}{c_2} & \frac{b_1}{c_1} & \frac{a_3}{c_2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a_2}{c_2} & \frac{b_2}{c_3} & \frac{b_2}{c_2} & \frac{a_4}{c_3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a_3}{c_3} & \frac{b_3}{c_4} & \frac{b_3}{c_3} & \frac{a_5}{c_4} \\ \frac{a_6}{c_5} & 0 & 0 & \frac{a_4}{c_4} & \frac{b_4}{c_5} & \frac{b_4}{c_4} \\ \frac{b_5}{c_5} & \frac{a_1}{c_6} & 0 & 0 & \frac{a_5}{c_5} & \frac{b_5}{c_6} \\ \frac{b_6}{c_1} & \frac{b_6}{c_6} & \frac{a_2}{c_1} & 0 & 0 & \frac{a_6}{c_6} \end{pmatrix}.$$

Selle maatriksi veerud on lineaarselt sõltuvad, kusjuures lineaarse sõltuvuse kordajad on

$$\begin{aligned} \lambda_i = (-1)^i \cdot & (9h_i h_{i+1} h_{i+2} h_{i+3} h_{i+4} + 9h_i h_{i+1} h_{i+2} h_{i+3} h_{i+5} + 6h_i h_{i+1} h_{i+2} h_{i+4}^2 + \\ & + 9h_i h_{i+1} h_{i+2} h_{i+4} h_{i+5} + 6h_i h_{i+1} h_{i+3}^2 h_{i+4} + 6h_i h_{i+1} h_{i+3}^2 h_{i+5} + \\ & + 6h_i h_{i+1} h_{i+3} h_{i+4}^2 + 9h_i h_{i+1} h_{i+3} h_{i+4} h_{i+5} + 6h_i h_{i+2}^2 h_{i+3} h_{i+4} + \\ & + 6h_i h_{i+2}^2 h_{i+3} h_{i+5} + 4h_i h_{i+2}^2 h_{i+4}^2 + 6h_i h_{i+2}^2 h_{i+4} h_{i+5} + \\ & + 6h_i h_{i+2} h_{i+3}^2 h_{i+4} + 6h_i h_{i+2} h_{i+3}^2 h_{i+5} + 6h_i h_{i+2} h_{i+3} h_{i+4}^2 + \\ & + 9h_i h_{i+2} h_{i+3} h_{i+4} h_{i+5} + 6h_{i+1}^2 h_{i+2} h_{i+3} h_{i+4} + 6h_{i+1}^2 h_{i+2} h_{i+3} h_{i+5} + \\ & + 4h_{i+1}^2 h_{i+2} h_{i+4}^2 + 6h_{i+1}^2 h_{i+2} h_{i+4} h_{i+5} + 4h_{i+1}^2 h_{i+3}^2 h_{i+4} + \\ & + 4h_{i+1}^2 h_{i+3}^2 h_{i+5} + 4h_{i+1}^2 h_{i+3} h_{i+4}^2 + 6h_{i+1}^2 h_{i+3} h_{i+4} h_{i+5} + \\ & + 6h_{i+1} h_{i+2}^2 h_{i+3} h_{i+4} + 6h_{i+1} h_{i+2}^2 h_{i+3} h_{i+5} + 4h_{i+1} h_{i+2}^2 h_{i+4}^2 + \\ & + 6h_{i+1} h_{i+2}^2 h_{i+4} h_{i+5} + 6h_{i+1} h_{i+2} h_{i+3}^2 h_{i+4} + 6h_{i+1} h_{i+2} h_{i+3}^2 h_{i+5} + \\ & + 6h_{i+1} h_{i+2} h_{i+3} h_{i+4}^2 + 9h_{i+1} h_{i+2} h_{i+3} h_{i+4} h_{i+5}). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Kui mõni indeks on suurem kui osalõikude arv n , siis käsitletakse indeksina vähimat positiivset täisarvu, mis on selle indeksiga kongruentne mooduli n järgi.

4.1.3 Juhu $n = 8$ uurimine

Võrrandisüsteemi maatriks H on järgnev:

$$H = \begin{pmatrix} \frac{a_1}{c_1} & \frac{b_1}{c_2} & \frac{b_1}{c_1} & \frac{a_3}{c_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a_2}{c_2} & \frac{b_2}{c_3} & \frac{b_2}{c_2} & \frac{a_4}{c_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a_3}{c_3} & \frac{b_3}{c_4} & \frac{b_3}{c_3} & \frac{a_5}{c_4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{a_4}{c_4} & \frac{b_4}{c_5} & \frac{b_4}{c_4} & \frac{a_6}{c_5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{a_5}{c_5} & \frac{b_5}{c_6} & \frac{b_5}{c_5} & \frac{a_7}{c_6} \\ \frac{a_8}{c_7} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{a_6}{c_6} & \frac{b_6}{c_7} & \frac{b_6}{c_6} \\ \frac{b_7}{c_7} & \frac{a_1}{c_8} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{a_7}{c_7} & \frac{b_7}{c_8} \\ \frac{b_8}{c_1} & \frac{b_8}{c_8} & \frac{a_2}{c_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{a_8}{c_8} \end{pmatrix}.$$

Kui asendame abimuutujad vastavate avaldistega, mis sisaldavad vaid osalõikude pikkuseid, siis sümbolarvutusprogrammi väitel on maatriksi determinant samaselt null. Paraku ei õnnestunud töö autoril saada veergude lineaarse sõltuvuse kordajaid, sest sattus silmitsi kahe probleemiga: programmi töösükkel võtab palju aega ning kasutatav vaba mälu sai otsa. Viimase kohta andis Python eraldi veateate.

Punkti 4.1 tulemusi reprodutseerides tuleb silmas pidada, et $n = 4$ juhul kulus töö autoril lineaarse sõltuvuse kordajate leidmiseks umbes 5 minutit ning $n = 6$ juhul kulus selleks pisut vähem kui üks tund. $n = 8$ juhul töötab programm ligi kaks päeva, kuniks andis teate sellest, et kogu kasutatav programmimälu on otsa saanud.

Märgime kokkuvõtteks, et saadud tulemused on tugevaks toetuseks töös [2] esitatud hüpoteesile: paarisarvu n korral ei ole suvalise võrgu juhul perioodiliste kuupsplainidega histopoleerimisülesanne üheselt lahenduv.

Kasutatud kirjandus

- [1] Завьялов, Ю., С., Квасов, Б., И., Мирошниченко В., Л. *Методы сплайн-функций*. 1980, lk. 333.
- [2] P. Oja ja G. W. Shah. “*Periodic polynomial spline histopolation*”. *Proceedings of the Estonian Academy of Sciences Publications* 67 (2018), lk. 246–251.

LISA 1. Sümbolarvutusprogrammi kood

Järgnevat programmilõik sai loodud sümbolarvutuste tegemiseks SymPy abil. Koodilõigus koostatakse võrrandisüsteemile vastav maatriks ning tehakse kindlaks ridade lineaarse kombinatsiooni kordajad. Koodilõigu 5. real saab määrata osalõikude arvu n .

```
1 import numpy as np
2 import sympy as sp
3 from sympy import *
4
5 n=4 # osalõikude arv
6
7 h=sp.symbols('h1:%d'%(n+1))
8 matlst = []
9 for i in range(n):
10     lst = [0] * n
11     firstind = i
12     secondind = (i+1)%n
13     thirdind = (i+2)%n
14     lst[i] = h[firstind]**2/(h[firstind]+h[secondind])
15     lst[(i+1)%n] = (3*h[firstind]*h[secondind]+2*h[secondind]**2
16                   +3*h[firstind]*h[thirdind]
17                   +3*h[secondind]*h[thirdind])/(h[secondind]+h[thirdind])
18     lst[(i+2)%n] = (3*h[firstind]*h[secondind]+2*h[secondind]**2
19                   +3*h[firstind]*h[thirdind]
20                   +3*h[secondind]*h[thirdind])/(h[firstind]+h[secondind])
21     lst[(i+3)%n] = h[thirdind]**2/(h[secondind]+h[thirdind])
22     matlst.append(lst)
23
24 matlst = np.asarray(matlst)
25 A = sp.Matrix(matlst)
26
27 result = A.nullspace()
28
29 for rida in result[0]:
30     print(rida.simplify())
```

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Markus Rene Pae,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) minu loodud teose Perioodiliste kuupsplai- nidega histopoleerimine, mille juhendajad on Evely Kirsiaed ja Peeter Oja, reprodutsee- rimiseks eesmärgiga seda säilitada, sealhulgas lisada digitaalarhiivi DSpace kuni autoriõi- guse kehtivuse lõppemiseni.
2. Annan Tartu Ülikoolile loa teha punktis 1 nimetatud teos üldsusele kättesaadavaks Tar- tu Ülikooli veebikeskkonna, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace kaudu Creative Commonsi litsentsiga CC BY NC ND 3.0, mis lubab autorile viidates teost reprodutseerida, levitada ja üldsusele suunata ning keelab luua tuletatud teost ja kasutada teost ärieesmärgil, kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.
3. Olen teadlik, et punktides 1 ja 2 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.
4. Kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei riku ma teiste isikute intellektuaalomandi ega isi- kuandmete kaitse õigusaktidest tulenevaid õigusi.

Markus Rene Pae

18. mai 2021