TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL

E. JÜRIMÄE

KOMPLEKSMUUTUJA FUNKTSIOONIDE TEOORIA

I

ELEMENTAARFUNKTSIOONID

TARTU 1970

TRÜ rotaprint 1969. 20000. T. 135.

TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL
MATEMAATILISE ANALÜÜSI KATEEDER

E. JÜRIMÄE

KOMPLEKSMUUTUJA FUNKTSIOONIDE TEOORIA

I

ELEMENTAARFUNKTSIOONID

Teine trükk

TARTU 1970

S i s s e j u h a t u s .

Käesolev loengukonspekt on mõeldud eeskätt TRÜ matemaatikaosakonna üliõpilastele vastava kursuse omandamiseks. Kompleksmuutuja funktsioonide teooria kursus jaguneb õppeplaani kohaselt kahele semestrile (5. ja 6.sem.). Käesolevasse väljaandesse on koondatud materjal, mis on mõeldud õppimiseks 5.semestril ning mis tutvustab peamiselt elementaarfunktsioone ja vastavaid geomeetrilisi teisendusi. Et koos elementaarfunktsioonide tutvustamisega uurida ka vastavaid geomeetrilisi teisendusi, selleks on konformse kujutamise teooria põhiküsimused kantud kursuse algusse. Sellisel viisil on võimalik koos üksikute funktsioonide ja nende omaduste vaatlemisega lahendada ka hulgaliselt ülesandeid ning seega kinnistada ja illustreerida teoreetilist materjali.

Sellisel materjali paigutusel on küll ka omad puudused - see ei võimalda tõestada konformse kujutamisega seotud üldisi teoreeme, kuid autori arvates mitmed positiivsed momendid korvavad selle puudujäägi. Nende positiivsete momentidena võiks mainida järgmisi: 1) näitliku materjali suurem valik, 2) rohke ülesannete valik ning 3) mõningate kordamiste vältimine. Pealegi jääks programmi kohaselt tõestuseta ikkagi üldine Riemanni teoreem konformse kujutamise põhiülesande lahendi olemasolu kohta, samuti ka mitmed teised üldised teoreemid, mis on ette nähtud ilma tõestuseta. Et ärajäänud tõestuste kohta saada informatsiooni, selleks on teksti paigutatud küllaltki rohked viited kirjandusele.

Põhirõhk üksikute elementaarfunktsioonide esitamisel on asetatud nende geomeetrilistele omadustele, täpsemalt öeldes, vastavatele geomeetrilistele teisendustele. Parema ülevaatlikkuse mõttes on konspekt varustatud lisaga, mis jooniste abil püüab selgitada üksikute funktsioonidega teostatavaid kujutusi. Selline lisa on võetud raamatust [2].

Numbriga nurksulgudes on viidatud konspekti lõpus esitatud kirjanduse loetelule. Sellist viitamist on kasutatud mitmetel juhtudel, peamiselt sel juhul, kui teatav ainelõik on konspektis esitatud ilma tõestuseta. Nende viidete kõrval on kasutatud ka sisemisi viiteid, näiteks (vt.§ 2.1). Siinjuures tähistab esimene number peatükki ning teine vastavat paragrahvi. Viited valemitele on esitatud paragrahvisisestena. Kui üksikutel juhtudel on tegemist viidetega teise paragrahvi teatavale valemile, siis on see tekstis märgitud.

Pea-aegu iga paragrahvi lõpus esineb teatav hulk ülesandeid, mida on soovitatav lahendada aine sügavama omandamise eesmärgil. Üksikutel ülesannetel on tähtsus ka edasise teoreetilise materjali esitamise seisukohalt. Vajalikul kohal on neile ka sel juhul viidatud. Enamik ülesandeid on antud koos vastustega. Viimased puuduvad vaid üksikutel lihtsamatel ülesannetel.

Aine parema omandamise eesmärki peavad teenima ka paragrahvide lõpus esinevad küsimused. Neid on kahte liiki.

Ühed on niisugused, mis sunnivad tagasi pöörduma oluliselt tähtsate mõistete juurde, mida on vaja kindlalt meelde jätta. Nendele võib vastuse leida vastava paragrahvi tekstist. Teised, mõnevõrra raskemad küsimused aga nõuavad enam juurdlemist vastavate mõistete kallal ning seetõttu peaksid aitama kaasa aine sisulisele omandamisele.

Konspektis puuduvad olulisemad ajaloolised märkused. Lugejal, kes tahab tutvuda kompleksmuutuja funktsioonide teooria ajalooga, on soovitatav tutvuda eriraamatuga [10].

Lugejale, kes soovib jõudu katsuda suurema hulga ja ka tõsisemate ülesannetega, on soovitatav kasutada ülesannete kogu [4], mis on ainulaadseks kogu maailma kirjanduses.

Autor peab oma meeldivaks kohuseks avaldada südamlikku tänu prof. H.Keresele ja dots. Ü.Kaasikule retsenseerimisel tehtud märkuste eest. Sügavaim tänu L.Karule suure töö eest käsikirja vormistamisel.

25. märtsil 1966.

Autor.

E e s s õ n a 2. v ä l j a a n d e l e.

Käesolevas väljaandes ei ole olulisi muudatusi võrreldes esimese trükiga. Parandatud on vaid mõningad trükivead, mis autoril õnnestus avastada.

21.aprillil 1970.

Autor.

I peatükk.

KOMPLEKSARVUD.

§ 1. Kompleksarvud ja tehted nendega.

Kompleksarvudeks nimetatakse järjestatud reaalarvude paare

$$(1) \qquad z = (x, y),$$

millega teataval kindlal viisil defineeritakse aritmeetilised tehted ning võrdus. Olgu antud kaks kompleksarvu $z_1 = (x_1, y_1)$ ja $z_2 = (x_2, y_2)$. Nende võrdus, summa ja korrutis defineeritakse järgmiselt:

1° $z_1 = z_2$, kui $x_1 = x_2$ ja $y_1 = y_2$;

2° $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, \; y_1 + y_2)$;

3° $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, \; x_1 y_2 + x_2 y_1)$.

Antud definitsioonidest lähtudes saab näidata, et iga $z = (x, y)$ puhul kehtib võrdus

$$(2) \qquad z = (x, y) = (x, 0) + (0, 1)(y, 0).$$

Sellest avaldisest paneme tähele, et eriline osa on kompleksarvul $i = (0,1)$ ning kõigil neil kompleksarvudel, millele vastavas paaris teine arv võrdub nulliga. Kui defineerida veel kahe kompleksarvu vahe kui summa pöördoperatsioon ning jagatis kui korrutise pöördoperatsioon, siis osutub, et defineeritud tehete suhtes käitub paar $(x, 0)$ nagu reaalarv x. Seetõttu võime identifitseerida nad omavahel, s.t. $x = (x, 0)$.

Sel viisil saame, et kompleksarvude hulk sisaldab reaalarvude hulga, kusjuures 0 = (0,0).

Seda kõike arvestades võime võrduse (2) üles kirjutada kujul

$$z = (x,y) = x + iy.$$

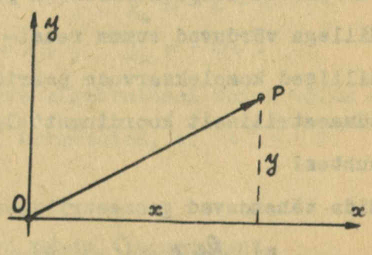
Saadud võrdust nimetatakse kompleksarvu <u>algebraliseks kujuks</u>.

Reaalarve

$$x = \mathrm{Re}\, z = \mathrm{Re}(x,y) \text{ ja } y = \mathrm{Im}\, z = \mathrm{Im}\,(x,y)$$

nimetatakse vastavalt kompleksarvu z <u>reaal</u>- ja <u>imaginaarosaks</u>. Kui $\mathrm{Re}\, z = 0$,siis kompleksarvu z nimetatakse <u>puhtimaginaararvuks</u>.

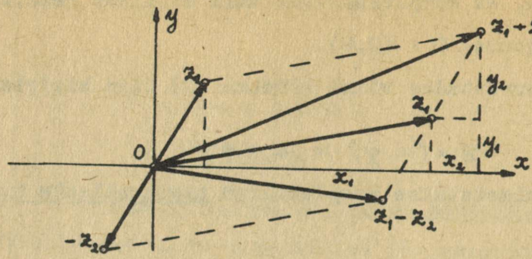
Et ka iga tasandi punkt P (ehk siis tema kohavektor $\overrightarrow{OP}$) (joon.1) on määratud järjestatud reaalarvude paariga (oma koordinaatidega), siis saame korraldada üksühese vastavuse kompleksarvude ja tasandi punktide vahel. Teisiti



Joon.1.

öeldes: me võime kõik kompleksarvud kujutada koordinaattasandil. Niisugust tasandit nimetatakse siis <u>kompleks-tasandiks</u>. Seejuures nimetatakse x-telge <u>reaalteljeks</u> ning y-telge <u>imaginaarteljeks</u>.

Seades kompleksarvule z vastavusse tema kohavektori $\overrightarrow{OP}$, saame anda kompleksarvude liitmisele ja lahutamisele geomeetrilise interpretatsiooni. Kompleksarve liidetakse ja lahutatakse nagu vastavaid vektoreid (joon.2).



Joon.2.

K ü s i m u s e d .

1. Defineerida kompleksarvude vahe ja jagatis.
2. Kus asuvad komplekstasandil reaalarvud?
3. Kus asuvad komplekstasandil puhtimaginaararvud?
4. Millega võrduvad summa reaal- ja imaginaarosa?
5. Millised kompleksarvude paarid asuvad komplekstasandil sümmeetriliselt koordinaattelgede (koordinaatide alguse) suhtes?
6. Mida tähendavad geomeetrilised võrratused

   a) $\mathcal{R}e\, z \geq 0$, b) $\mathcal{I}m\, z \geq 0$?
7. Milliste punktide geomeetriline koht on määratud seosega

$$\mathcal{R}e\, z + \mathcal{I}m\, z = 0 \ ?$$

Ü l e s a n d e d.

1. Tõestada, et a) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ (summa kommutatiivsus);

   b) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ (summa assotsiatiivsus);

   c) $z_1 z_2 = z_2 z_1$ (korrutise kommutatiivsus);

   d) $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$ (korrutise assotsiatiivsus);

   e) $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$ (distributiivsus).
2. Näidata, et $i^2 = (0,1)(0,1) = (-1,0)$, s.t. $i^2 = -1$.

3. Näidata, et vahe $z_1 - z_2$ on üheselt määratud mistahes kompleksarvude z_1 ja z_2 puhul.

4. Leida $\frac{z_1}{z_2}$. Veenduda, et selline jagatis on üheselt määratud iga $z_2 \neq 0$ korral.

5. Näidata, et $\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2}$.

6. Tõestada, et kahe kompleksarvu korrutis on null parajasti siis, kui vähemalt üks tegureist on võrdne nulliga.

7. Tõestada, et $(1 + z)^2 = 1 + 2z + z^2$

8. Leida graafiliselt $z_1 + z_2$ ja $z_1 - z_2$, kui

a) $z_1 = 2 + i$, $z_2 = 1 + 2i$;

b) $z_1 = -3 + i$, $z_2 = 1 + 4i$;

c) $z_1 = 3i$, $z_2 = -2 - i$;

d) $z_1 = -2 + 2i$, $z_2 = -3i$.

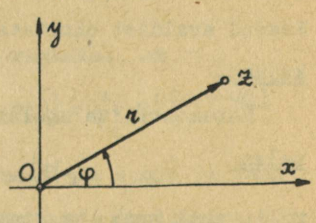
9. Näidata, et kompleksarve algebralisel kujul võime korrutada kui kaksliikmeid, arvestades, et $i^2 = -1$.

§ 2. Kompleksarvu moodul ja argument.

Et punkti tasandil saab määrata ka polaarkoordinaatides, kusjuures

(1) $x = r\cos\varphi$ ja $y = r\sin\varphi$

siis kompleksarvu z määrab ka reaalarvude paar (r, φ), milles esimest arvu nimetatakse kompleksarvu z <u>mooduliks</u> ning teist <u>argumendiks.</u>



Joon.3.

Neid tähistatakse vastavalt $|z|$ ja $Arg\, z$. Vahetult geomeetrilisest pildist on selge, et kompleksarvu moodul on üheselt määratud, kuid argument mitte. Kui φ on kompleks-

2.

arvu argumendiks, siis on ka seda iga arv $\varphi + 2k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$. Kompleksarvu z sellist argumendi väärtust φ, mis rahuldab võrratusi

$$-\pi < \varphi \leq \pi,$$

nimetatakse argumendi peaväärtuseks ning tähistatakse $\arg z$. Puhtgeomeetrilistest kaalutlustest on selge, et argument on määratud iga kompleksarvu $z \neq 0$ puhul. Kompleksarvul $z = 0$ aga pole argumenti. Arv $z = 0$ on määratud sellega, et tema moodul võrdub nulliga.

Võrdustest (1) saame, et

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\text{(2)} \quad \arg z = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x}, \text{kui } x > 0, \\ \pi + \arctan \frac{y}{x}, \text{kui } x < 0 \text{ ja } y \geq 0, \\ \pi - \arctan \frac{y}{x}, \text{kui } x < 0 \text{ ja } y < 0. \end{cases}$$

Asendades kompleksarvu algebralises kujus suurused x ja y valemite(1) põhjal, saame, et

$$\text{(3)} \qquad z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Saadud avaldist nimetatakse kompleksarvu trigonomeetriliseks kujuks.

Matemaatilise analüusi kursuses tõestatakse nn. Euleri valem

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi,$$

mille abil saame võrdusest (3) kompleksarvu z eksponentkuju

$$z = re^{i\varphi}.$$

Mitmesugustes arvutustes on kasulik rakendada just kompleksarvu eksponentkuju tema kompaktsuse tõttu.

Vaatleme kompleksarvude korrutamist trigonomeetrilisel kujul. Olgu $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ ja $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. Sel juhul saame, et

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \\ &= r_1 r_2 [(\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2) + \\ &\quad + i(\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 + \sin\varphi_2 \cos\varphi_1)] = \\ &= r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)] = \\ &= r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} \end{aligned}$$

ehk siit

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}.$$

Täieliku induktsiooni meetodi abil võiksime üldistada saadud valemi mistahes lõpliku arvu tegurite juhule. Kui seejärel võtta kõik tegurid võrdseina, saaksime nn. Moivre'i valemi

$$z^n = r^n e^{in\varphi},$$

kus n on naturaalarv.

Analoogiliselt korrutise juhuga saaksime, et

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)] = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

Kui nüüd pöörduda tagasi kompleksarvude summa ja vahe juurde, siis puhtgeomeetriliste kaalutluste (kolmnurga küljede vahekorra) põhjal

$$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|,$$

$$|z_1 - z_2| \le \big||z_1| - |z_2|\big|.$$

Edaspidiseks on aga eriti oluline märkida, et suurus $|z_1 - z_2|$

on võrdne komplekstasandi punktide z_1 ja z_2 vahelise kaugusega (vt. joon.2).

K ü s i m u s e d .

1. Sõnastada korrutamise reegel, kui kompleksarvud on antud mooduli ja argumendi kaudu.
2. Sama jagatise puhul.
3. Sama astendamise puhul.
4. Milline on võrrandiga $|z - z_0| = R$ (z_0 = const) määratud punktide geomeetriline koht?
5. Milliste punktide geomeetriline koht on määratud seosega
$$|z| < 1 \ ?$$
6. Mida tähendab geomeetriliselt võrratus $|z - 1| \geq 1$?
7. Millised punktid on määratud võrrandiga
$$\arg z = \frac{\pi}{2} \ ?$$
8. Milline on positiivsete (negatiivsete) arvude argument?
9. Milline on puhtimaginaararvude argument ?
10. Milliste punktide geomeetrilise koha määrab võrrand
$$\arg z = \alpha \ ?$$
11. Kuidas kirjeldada ülemise pooltasandi ($\operatorname{Im} z > 0$) punkte argumendi mõiste abil?
12. Kus asuvad komplekstasandil punktid
$$e^{i\frac{\pi}{2}},\ e^{i\pi},\ e^{-i\pi},\ e^{-i\frac{\pi}{2}},\ e^{i\frac{\pi}{4}},\ e^{i2\pi} \ ?$$

Ü l e s a n d e d .

1. Tõestada võrdused (2).
2. Näidata, et $\frac{1}{e^{i\varphi}} = e^{-i\varphi}$.

3. Kirjutada järgmised kompleksarvud trigonomeetrilisel ja eksponentkujul:

a) $3i$, e) $1+i$, i) $3+5i$,

b) $-i$, f) $-1-i$, j) $-3+5i$,

c) 2, g) $\sqrt{3}-i$, k) $2-5i$,

d) -2, h) $1-i\sqrt{3}$, l) $-2-5i$.

4. Leida $\arg z$, kui

a) $z=\frac{-2}{1+i\sqrt{3}}$, d) $z=z_1 z_2$,

b) $z=\frac{i}{-2-2i}$, e) $z=z_1^n$,

c) $z=(\sqrt{3}-i)^6$ f) $z=\frac{z_1}{z_2}$.

5. Olgu z_0 mingi kompleksarv ning R positiivne reaalarv. Näidata, et kui z asub punkti $-z_0$ ümbritseval ringjoonel raadiusega R, siis ta rahuldab võrrandeid

a) $|z+z_0|=R$,

b) $z=-z_0+Re^{i\varphi}$.

6. Milliste punktide geomeetriline koht on määratud seostega:

a) $|z-i|<3$, e) $|z-i|=|z+2|$,

b) $|z+2i|\geqslant 2$, f) $\left|\frac{z-3}{z-2}\right|\geq 1$,

c) $|z-3-4i|=5$, g) $\arg(z+i)=-\frac{\pi}{4}$,

d) $|z+2|+|z-2|=5$, h) $\frac{\pi}{3}<\arg(z-i)<\frac{3\pi}{4}$.

§ 3. <u>Kaaskompleksarvud.</u>

Iga kompleksarvu $z=(x,y)$ puhul nimetame tema <u>kaaskomp-</u>

leksarvuks arvu $\bar{z} = (x, -y)$. Sellest definitsioonist järeldub, et kompleksarvu $\bar{z}$ kaaskompleksiks on z , s.t. $\overline{(\bar{z})} = z$. Samuti märkame, et (vt.joon.4)

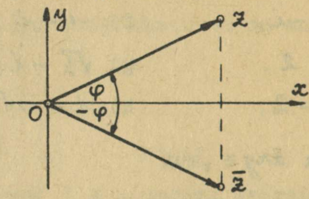
$$\arg \bar{z} = -\arg z$$

ning

$$|\bar{z}| = |z|$$

Seega

$$\bar{z} = \overline{(re^{i\varphi})} = re^{-i\varphi}.$$



Joon.4.

Vahetul kontrollimisel võime veenduda, et

$$
\begin{aligned}
\overline{z_1 + z_2} &= \bar{z}_1 + \bar{z}_2 ,\\
\overline{z_1 - z_2} &= \bar{z}_1 - \bar{z}_2 ,\\
\overline{z_1 \cdot z_2} &= \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 ,\\
\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} &= \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} .
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Osutub, et korrutis $z \cdot \bar{z}$ on alati reaalne. Tõepoolest,

$$z \cdot \bar{z} = (x, y)(x, -y) = x^2 + y^2 = |z|^2,$$

s.t.

$$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} .$$

Seda arvestades saame kergesti anda järgmise eeskirja kompleksarvude jagamiseks algebralisel kujul:

Jagatise $\frac{z_1}{z_2}$ algebralise kuju leidmiseks tuleb selle murru lugejat ja nimetajat korrutada nimetaja kaaskompleksiga.

Tõepoolest,kui $z_1 = (x_1, y_1)$ ja $z_2 = (x_2, y_2)$,siis

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{x_2^2 + y_2^2} =$$

$$= \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2} =$$

$$= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

K ü s i m u s e d .

1. Kuidas asetsevad z ja $\bar{z}$ komplekstasandil?

2. Millised kompleksarvud võrduvad oma kaaskompleksidega?

3. Millised on kompleksarvude $1+i$, $-i$, $4-3i$ kaaskompleksid?

4. Milline on kompleksarvu z vastandarvu $-z$ kaaskompleks?

5. Millisel juhul $\bar{z} = \overline{(-z)}$?

6. Sõnastada võrdused (1).

Ü l e s a n d e d .

1. Näidata, et

$$\mathcal{Re}\, z = \frac{1}{2}(z+\bar{z}) \text{ ja } \mathcal{Im}\, z = -\frac{i}{2}(z-\bar{z}).$$

2. Kirjuta kompleksksujul võrrandid

   a) $x^2 + 2x + y^2 - y = 1$,

   b) $x^2 - y^2 = 1$.

   Vastus: a) $z\bar{z} + (1+\frac{i}{2})z + (1-\frac{i}{2})\bar{z} = 1$,

   b) $z^2 + \bar{z}^2 = 2$.

3. Tõestada võrdused (1).

4. Näidata, et ringjoone $|z-z_0| = R$ punktid rahuldavad võrrandit $z\bar{z} - \bar{z}_0 z - z_0\bar{z} + z_0\bar{z}_0 = R^2$.

5. Millisel juhul on võrrand

$$a z\bar{z} + \bar{A}z + A\bar{z} + b = 0,$$

kus a ja b on reaalarvud ning A—kompleksarv, ringjoone võrrandiks?

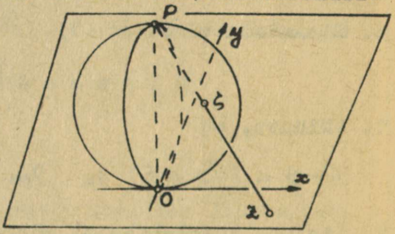
Vastus: $|A|^2 - ab > 0$.

6. Milline on sirge võrrand komplekskujul?

Vastus: $\bar{A}z + A\bar{z} + b = 0$.

§ 4. Stereograafiline projektsioon.

Eelnevas veendusime, et kompleksarvude hulga ja tasandi punktide vahel saab korraldada üks-ühest vastavust. Näitame järgnevas, et ka sfääri punktid ja kompleksarvud võib seada üks-ühesesse vastavusse. Selleks asetame komplekstasandile mingi sfääri, mis toetub komplekstasandile nullpunktis (vt. joon.5). Kui nüüd ühendame komplekstasandi punkti z diameetri OP otspunktiga P, siis vastav sirge lõikab sfääri mingis punktis ζ. Sel viisil saamegi üks-ühese vastavuse komplekstasandi ja antud sfääri punktide vahel. Teostatud vastavusse seadmist nimetatakse stereograafiliseks projektsiooniks. Vaadeldud kerapinda nimetame kompleksarvude sfääriks.



Joon.5.

Kui $|z| \to \infty$, siis ζ läheneb punktile P. Siinjuures on täiesti ükskõik, millises suunas z kaugeneb nullpunktist. Sellest lähtudes toome sisse uue "kompleksarvu" $z = \infty$, mida nimetame lõpmatuspunktiks ning mis vastab sfääri punktile P. Kompleksarvude sfääril paneme tähele lõpmatuspunkti (punkt P) ühesust. Kui vaadelda kompleksarvude kujutamist tasandil, siis võiks tekkida mulje, et on lõpmata palju lõpmatuspunkte[1]. Osutub aga, et edaspidi on lõpmatuspunkti ühesuse nõue küllaltki oluline.

Lisades komplekstasandile lõpmatuspunkti, nimetame saadud hulka <u>kinniseks</u> ehk <u>täielikuks</u> tasandiks. Vastasel juhul aga kõneleme <u>lahtisest</u> ehk <u>lõplikust</u> tasandist. Niisiis on mõiste "lõplik tasand" identne mõistega "komplekstasand" ning mõiste " kinnine tasand" on ekvivalentne mõistega "kompleksarvude sfäär."

Täielikul tasandil võime defineerida ka

$$\frac{a}{0} = \infty \quad \text{ja} \quad \frac{a}{\infty} = 0 \quad (a \neq 0, a \neq \infty).$$

§ 5. <u>Piirkonnad</u>.

Komplekstasandi punkti z_0 <u>ümbruseks</u> (täpsemalt ε-ümbruseks) nimetatakse nende punktide z hulka, mis rahuldavad võrratust

$$|z - z_0| < \varepsilon .$$

Ümbruseks on seega ring keskpunktiga vaadeldavas punktis. <u>Lõpmatuspunkti ümbruseks</u> nimetatakse hulka

$$|z| > \varepsilon .$$

<u>Piirkonnaks</u> lõplikul või siis täielikul tasandil nimetatakse punktide hulka $\mathcal{D}$,mis rahuldab järgmisi tingimusi:

a) koos punktiga z kuulub hulka $\mathcal{D}$ ka mingi selle punkti ümbrus (lahtisuse omadus);

[1] Reaalarvude puhul vaadeldaksegi kahte lõpmatust $+\infty$ ja $-\infty$.

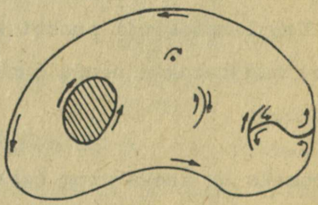
b) igat kaht punkti z_1 ja z_2 hulgast $\mathcal{D}$ on võimalik ühendada pideva joonega, mis täielikult kuulub hulka $\mathcal{D}$ (sidususe omadus).

Kui koos punktiga kuulub vaadeldavasse hulka ka mingi selle punkti ümbrus, siis nimetatakse seda punkti antud hulga sisepunktiks. Hulka, mis koosneb vaid sisepunktidest, nimetatakse lahtiseks. Piirkond on seega lahtine hulk.

Hulga rajapunktiks nimetatakse punkte, mille iga ümbrus sisaldab nii vaadeldavasse hulka kuuluvaid kui ka mittekuuluvaid punkte. Rajapunktide hulka nimetatakse rajaks. Piirkonda koos oma rajaga nimetatakse kinniseks piirkonnaks.

Piirkonna raja sidusate osade arv määrab piirkonna sidususe järgu. Nii nimetame piirkonda $|z-1|<1$ üheli sidusaks ning piirkonda $1<|z-i|<2$ (rõngas) kaheli sidusaks. Joonisel 6 on esitatud neljali sidus piirkond.

Kui piirkonna raja koosneb enam kui ühest sidusast osast, siis nimetatakse piirkonda mitmeli sidusaks.



Joon.6.

Piirkonna raja puhul määratakse ka kindel ümberkäigu suund. Positiivseks ümberkäigu suunaks loetakse seda, kus vaadeldav piirkond jääb liikumisel vasakule. Seejuures määratakse ka rajapunktide kordsus. Öeldakse, et punkt A on n-kordseks rajapunktiks, kui raja täielikul läbimisel punkt A läbitakse n korda.

Piirkonda nimetatakse lõpmatuks, kui vähemalt tema raja sisaldab lõpmatuspunkti. Vastasel korral kõneleme <u>tõkestatud piirkonnast</u>.

K ü s i m u s i .

1. Tuua näiteid lõplike piirkondade kohta.
2. Kas reaalarvude hulk moodustab piirkonna?
3. Kas lõplik hulk võib moodustada piirkonda?
4. Tuua 4 näidet hulkadest, mis ei moodusta piirkonda.
5. Millised järgmised antud hulkadest moodustavad piirkonna või siis kinnise piirkonna:

a) $\mathrm{Re}\, z < 2$, e) $1 \leq |z + i| < 2$,

b) $|\mathrm{Im}\, z| > 1$, f) $2 \leq |z| < 3$,

c) $|\mathrm{Re}(z-1)| < 2$, g) $-\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{\pi}{3}$,

d) $|z - 3| > 2$, h) $0 \leq \arg z < \frac{\pi}{4}$?

6. Millise kordusega punkte on joonisel 6 esitatud piirkonna rajal?
7. Leida ülesandes 1 antud hulkade rajad.
8. Milline sidususe järk on ülesandes 1 esitatud piikondadel?
9. Millised ülesandes 1 antud piirkondadest on lõpmatud?

Ü l e s a n d e d .

1. Kirjeldada geomeetriliselt järgmisi piirkondi:

a) $-\pi < \arg z < \pi$, $|z| < 2$;

b) $1 < |z - 2i| < 2$, $\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{3\pi}{4}$;

c) $|2z + 3| > 4$;

d) $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) < \frac{1}{2}$;

e) $|z + 4| > |z|$;

f) $\mathrm{Im}\,(z-1)^2 > 0$; g) $\left|\frac{z+1}{z-2}\right| > 2$.

II peatukk.

FUNKTSIOON JA TEMA TULETIS.

§ 1. Funktsiooni mõiste.

Vaatleme mingit kompleksarvude hulka $\mathcal{D}$. Kui z tähistab mingit suvalist arvu hulgast $\mathcal{D}$, siis öeldakse, et z on kompleksarvuliste väärtustega muutuv suurus ehk kompleksmuutuja. Igat kompleksarvu $z\in\mathcal{D}$ nimetatakse seejuures kompleksmuutuja väärtuseks.

Definitsioon. Kui kompleksmuutuja z igale väärtusele $z\in\mathcal{D}$ vastab mingi kindel kompleksarv w, siis öeldakse, et w on kompleksmuutuja z funktsioon hulgal $\mathcal{D}$, ning tähistatakse

$$w = f(z).$$

Muutujat z nimetatakse funktsiooni $w=f(z)$ argumendiks. Argumendi z igat väärtust nimetatakse ka originaaliks. Igat kompleksarvu $w=f(z)$ nimetatakse funktsiooni väärtuseks ehk kujutiseks. Viimased moodustavad hulga, mida nimetatakse funktsiooni väärtuste hulgaks.

Kui igale originaalile vastab ainult üks kujutis, siis nimetatakse funktsiooni üheseks, vastupidisel korral - mitmeseks. Kui aga igale kujutisele vastab ainult üks originaal, siis nimetatakse funktsiooni üheleheliseks, vastasel korral - mitmeleheliseks. Seega esitab ühene ja üheleheline funktsioon üks-ühest vastavust.

Kui meil on üks-ühene vastavus kahe hulga $\mathcal{D}$ ja $\mathcal{D}_1$ vahel, siis on meil sellega määratud kaks funktsiooni $w = f(z)$ ja $z = g(w)$, kus $z = g[f(z)]$ ning $w = f[g(w)]$. Neid funktsioone nimetatakse üksteise suhtes pöördfunktsioonideks. Niisiis on igal funktsioonil, mis teostab üks-ühese kujutuse, pöördfunktsioon.

Kui hulgaks $\mathscr{D}$ on naturaalarvude hulk, siis nimetatakse funktsiooni jadaks, mida tähistatakse $\{z_n\}$.

Kui hulgaks $\mathscr{D}$ on mingi reaalarvude hulk, siis saame nn. reaalse argumendi kompleksmuutuja funktsiooni

$$z = f(t) = x(t) + iy(t).$$

Selline funktsioon ei paku oluliselt uut võrreldes analüüsis vaadeldud funktsioonidega, sest $f(t)$ avaldub siin kahe reaalmuutuja funktsiooni lineaarse kombinatsioonina. Seetõttu on funktsiooni $f(t)$ omadused täielikult sarnased funktsioonide $x(t)$ ja $y(t)$ omadega.

Omaduste poolest hoopis erinevamad funktsioonid saame sel juhul, kus nii originaalide kui ka kujutiste hulkadeks on teatavad piirkonnad. Edaspidi vaatlemegi funktsioone, kus originaalide hulgaks on piirkond. Viimast nimetatakse antud funktsiooni määramispiirkonnaks ehk originaalide piirkonnaks. Kujutiste hulka nimetatakse kujutispiirkonnaks ehk funktsiooni muutumispiirkonnaks.

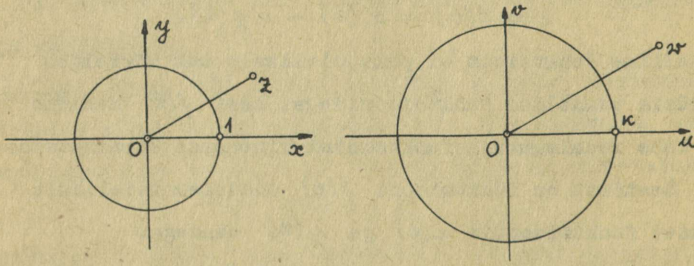
Kui me reaalmuutuja funktsiooni puhul kasutame piltlikkuse saavutamiseks funktsiooni graafikut (seal on see kahedimensionaalse ruumi objekt), siis kompleksmuutuja funktsiooni korral pole see mõeldav. Siin on graafikuks neljadimensionaalse ruumi objekt. Geomeetrilise pildi saamiseks kasutame kahte tasandit: ühele (z-tasand) kanname originaalid, teisele (w-tasand) kujutised. Seda silmas pidades ütlemegi, et antud funktsioon kujutab z-tasandi mingi piirkonna w-tasandi piirkonnaks.

Näide 1. Vaatleme funktsiooni

$$w = kz,$$

kus k on positiivne reaalarv. Olgu $z = re^{i\varphi}$ ja $w = \rho e^{i\theta}$, siis seosest $w = kz$ saame, et

$$\rho = kr \quad \text{ja} \quad \theta = \varphi + 2n\pi .$$



Joon.7.

Viimastest võrdustest näeme, et vastavate punktide z ja w polaarnurgad on võrdsed, kuid kujutise polaarkaugus on suurem (kui $k > 1$) või väiksem (kui $k < 1$) originaali omast (vt. joon.7). Teisiti öeldes: toimub teguri k-kordne mastaabi muutus.

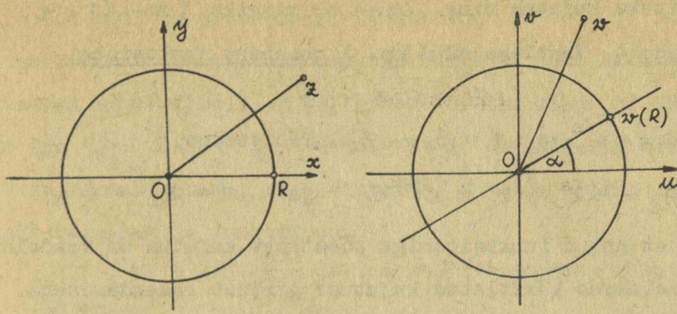
Näide 2. Olgu

$$w = e^{i\alpha} z \quad \text{,kus } \alpha \text{ on mingi reaalarv.}$$

Siit saame seosed:

$$\rho = r \quad \text{ning} \quad \theta = \varphi + \alpha + 2n\pi .$$

Nendest seostest näeme, et vaadeldava kujutamise puhul pöördub iga ring $|z| = R$ nurga α võrra (vt.joon.8).



Joon.8.

Eri juhul, kui $\alpha = \frac{\pi}{2}$, s.t. $w = iz$, saame tasandi pöörde täisnurga võrra, kui aga $\alpha = \pi$, s.t. $w = -z$, siis saame tasandi pöörde sirgnurga võrra.

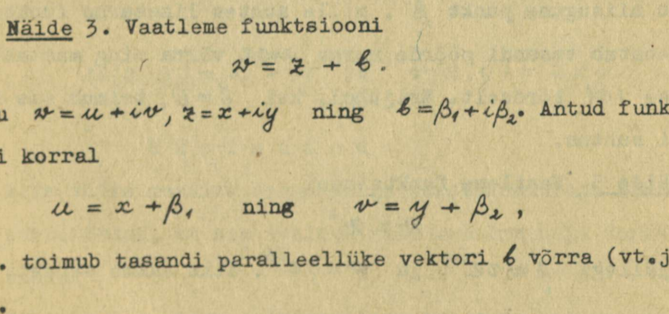
Näide 3. Vaatleme funktsiooni

$$w = z + b.$$

Olgu $w = u + iv$, $z = x + iy$ ning $b = \beta_1 + i\beta_2$. Antud funktsiooni korral

$$u = x + \beta_1 \quad \text{ning} \quad v = y + \beta_2 ,$$

s.t. toimub tasandi paralleellüke vektori b võrra (vt. joon. 9).



Joon.9.

Nii näiteks kujutub ring $|z| < r$ ringiks $|w - b| < r$.

Näide 4. Vaatleme nüüd nn. lineaarset funktsiooni

$$w = az + b.$$

Olgu $a = ke^{i\alpha}$ ja $b = \beta_1 + i\beta_2$. Tähistades

$$z_1 = kz \;, \; z_2 = e^{i\alpha} z_1 \quad \text{ja} \quad w = z_2 + b\;,$$

saame, et antud funktsiooniga toestatav kujutus on vaadeldav kolme eelnevas käsitletud kujutuse järjest rakendamisena. Kui $a \neq 1$, siis saame funktsiooni

$$w = az + b$$

esitada kujul

$$w - \beta = a(z - \beta),$$

kus $\beta = \frac{b}{1-a}$. Saadud seosest järeldub, et $a \neq 1$ korral leidub niisugune punkt β, mille suhtes lineaarne funktsioon teostab tasandi pöörde nurga $\arg a$ võrra ning mastaabi muutuse $|a|$ kordselt. Erijuhul, kui $b = 0$, toimub see nullpunkti suhtes.

Näide 5. Vaatleme funktsiooni

$$w = z^2.$$

Olgu jällegi $z = re^{i\varphi}$ ja $w = \rho e^{i\theta}$. Siin saame seosed:

$$\rho = r^2 \quad \text{ja} \quad \theta = 2\varphi + 2n\pi\,.$$

Nendest seostest selgub, et z-tasandi punktid, mille moodulid on võrdsed ning argumendid erinevad suuruse π poolest, kujutuvad w-tasandile üheks ja samaks punktiks. Siit järeldub, et piirkond $0 < \arg z < \pi$ kujutub piirkonnaks $0 < \arg w < 2\pi$, s.t. kogu w-tasandiks, välja arvatud reaaltelje positiivne osa.

Kui meil on antud mingi funktsioon $w=f(z)$ hulgal $\mathcal{D}$, siis tähendab see seda, et igale piirkonda $\mathcal{D}$ kuuluvale argumendi z väärtusele on vastavusse seatud mingi w väärtus. Et aga $z=x+iy$ ja $w=u+iv$ on määratud oma reaal- ja imaginaarosadega, siis vastavus $w=f(z)$ määrab meile kaks kahemuutuja funktsiooni

$$u=u(x,y) \text{ ja } v=v(x,y).$$

Seega

$$w=u+iv=f(z)=u(x,y)+iv(x,y).$$

Funktsioone $u(x,y)$ ja $v(x,y)$ nimetatakse kompleksmuutuja funktsiooni $f(z)$ reaal- ja imaginaarosaks.

Näide. Kui $w=z^2$, siis

$$w=z^2=(x+iy)^2=(x^2-y^2)+i2xy,$$

s.t.

$$u(x,y)=x^2-y^2 \text{ ja } v(x,y)=2xy.$$

K ü s i m u s e d .

1. Miks võime reaalse argumendiga kompleksmuutuja funktsiooni puhul öelda, et see avaldub kahe reaalmuutuja funktsiooni kaudu?
2. Milliste punktide geomeetrilise koha võrrandiks on

   $$z(t)=x(t)+iy(t), \text{kus } t\in[a,b],$$

   kui $x(t)$ ja $y(t)$ on lõigul $[a,b]$ pidevad funktsioonid.
3. Miks võtsime näites 1 seose $\theta=\varphi+2n\pi$, aga mitte lihtsalt $\theta=\varphi$?
4. Millised näidetes vaadeldud funktsioonidest on ühesed, millised ühelehelised?

Ülesanded.

1. Leida funktsiooni

$$f(z) = \frac{y}{x} + i\frac{1}{1-x}$$

määramispiirkond.

2. Leida sirgete $y=\alpha\ (\alpha>0)$ ja poolsirgete $x=\beta\ (y>0)$ kujutised funktsiooni $w=z^2$ puhul.

3. Milliseid jooni esitavad võrrandid:

a) $z = t(1+i)$,

b) $z = a\cos t + ib\sin t$,

c) $z = t + \frac{i}{t}$,

d) $z = t^2 + \frac{i}{t^2}$,

e) $z = \alpha e^{it} + \beta e^{-it}$ (α ja β reaalarvud)?

4. Leida järgmiste funktsioonide reaal- ja imaginaarosad:

a) $w = \frac{1}{z}$,

b) $w = z + 2\bar{z}$,

c) $w = z^3$,

d) $w = \frac{1}{z^2}$,

e) $w = \frac{z-1}{z}$,

f) $w = \frac{1}{z-i}$.

§ 2. Piirväärtus.

Järgnevas vaatleme kompleksarvuliste väärtustega järjestatud suurusi. Viimaste all mõistame niisuguseid muutuvaid suurusi w, mille korral vähemalt osa w väärtuste w_1, w_2 puhul on kindlaks määratud, kumb väärtustest w_1 või w_2 järgneb teisele. Selle järgnevuse puhul nõuame transitiivsust ja suunatust.[1] Viimast arvestades kõneleme ka, et suu-

[1] G.Kangro, Matemaatiline analüüs I, Tallinn 1965, lk.75.

rus w muutub "suunatud protsessis".

Et matemaatilise analüüsi kursusest on tuttav reaalarvuliste väärtustega järjestatud suuruse piirväärtuse mõiste, siis seame endale ülesandeks taandada kompleksarvuliste väärtustega järjestatud suuruse piirväärtusega seotud mõisted ja vastavad teoreemid analoogilistele mõistetele ja teoreemidele reaalarvuliste suuruste korral. Aluse selleks annavad kompleksarvu definitsioon ning kauguse mõiste komplekstasandil. Nende põhjal saame alljärgneva seose (1), mis võimaldabki meil lahendada oma ülesande.

Järjestatud suuruste näidetena mainiksime järgmisi:

$$w = z_n \ (n \to \infty),\ w = z(t)\ (t \to 0) \text{ ja } w = f(z)\ (z \to a),$$

millega tuleb meil sageli kohtuda järgnevates paragrahvides. Et need kompleksarvuliste väärtustega suurused on tõepoolest järjestatud suurused, selle fakti tõestuse jätame lugejale. Siinkohal märgime vaid seda, et selle tõestuseks on vaja kontrollida nende järgnevuste puhul transitiivsust ja suunatust.

Me nimetame kompleksset muutuvat suurust w <u>lõpmata väikeseks</u> vaadeldavas protsessis, kui selles protsessis on reaalarvuliste väärtustega suurus $|w|$ lõpmata väike, s.t.

$$\lim |w| = 0 .$$

Kompleksarvu $A = a + ib$ nimetame muutuva suuruse $w = u + iv$ <u>piirväärtuseks</u> vaadeldavas suunatud protsessis, kui selles protsessis vahe $w - A$ on lõpmata väike. Et A on suuruse w piirväärtuseks, seda märgime järgmiselt:

$$\lim w = A .$$

Teoreem. Muutuva suuruse $v = u + iv$ piirväärtuseks on konstant $A = a + ib$ parajasti siis, kui vaadeldavas protsessis $\lim u = a$ ning $\lim v = b$.

Tõestus. Teoreemi väide järeldub vahetult võrratustest

$$\left.\begin{matrix} |u-a| \\ |v-b| \end{matrix}\right\} \leq |v - A| \leq |u-a| + |v-b|, \tag{1}$$

kui peame silmas äsjatoodud piirväärtuse definitsiooni ning vastavat definitsiooni reaalarvuliste muutuvate suuruste korral. Toodud võrratuste ahela parem pool annab meile teoreemi tingimuste piisavuse ning vasak pool - tarvilikkuse.

Rakendustes on sageli otstarbekas kasutada piirväärtuse definitsiooni mõnevõrra teisel kujul, mis aga sisuliselt on samaväärne eelnevas toodud definitsiooniga.

Definitsioon. Konstanti A nimetatakse muutuva suuruse v piirväärtuseks, kui vastavalt positiivsele arvule ε leidub vaadeldavas protsessis niisugune koht, millest alates kehtib võrratus

$$|v - A| < \varepsilon.$$

Vaatleme nüüd jada $\{z_n\}$ piirväärtust ning rakendame selle puhul äsja esitatud üldist piirväärtuse definitsiooni. Jada puhul on protsess iseloomustatud jada indeksi kasvamisega. Koha määrab siin indeks, s.t. mingi naturaalarv. Seega:

punkt A on jada $\{z_n\}$ piirväärtuseks, kui vastavalt arvule $\varepsilon > 0$ leidub selline naturaalarv $N(\varepsilon)$, et iga $n > N(\varepsilon)$ puhul

$$|z_n - A| < \varepsilon.$$

Jada, millel on piirväärtus, nimetatakse koonduvaks. Eelnevas vaadeldud teoreemi abil saame kompleksliikmetega jadadele üle kanda Cauchy kriteeriumi, mida tunneme reaalarvuliste jadade puhul.

Cauchy kriteerium. Jada $\{z_n\}$ on koonduv parajasti siis, kui vastavalt reaalarvule $\varepsilon>0$ leidub naturaalarv $N(\varepsilon)$ selliselt, et iga $n>N(\varepsilon)$ ning iga naturaalarvu p korral kehtib võrratus

$$|z_{n+p} - z_n| < \varepsilon .$$

Teise konkreetse rakendusena vaatleme funktsiooni $f(z)$ piirväärtust punktis a, s.t. funktsiooni $f(z)$ piirväärtust protsessis $z \to a$. Märgime seda

$$\lim_{z\to a} f(z) .$$

Siinjuures eeldame, et $f(z)$ on määratud punkti a mingis ümbruses (välja arvatud võib-olla punktis a endas). Selles protsessis on koht määratud punkti z kaugusega punktist a. Toodud piirväärtuse üldise definitsiooni rakendamisel saame:

kompleksarv A on funktsiooni $f(z)$ piirväärtuseks punktis a, kui vastavalt arvule $\varepsilon>0$ leidub selline $\delta(\varepsilon)>0$, et iga võrratusi

$$0 < |z-a| < \delta(\varepsilon)$$

rahuldava z puhul kehtib võrratus

$$|f(z) - A| < \varepsilon .$$

Näide 1. Tõestada, et $\lim_{z\to i} |z| = 1 .$

Äsjaesitatud definitsiooni põhjal tuleb meil näidata, et $\varepsilon>0$ puhul leidub niisugune $\delta(\varepsilon) > 0$, et $|z-i|<\delta(\varepsilon)$

korral kehtib võrratus

$$\big||z| - 1\big| < \varepsilon .$$

Et aga (vt.I ptk.§2)

$$\big||z| - 1\big| = \big||z| - |i|\big| \leq |z - i| ,$$

siis võib võtta $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$.

Näide 2. Näitame, et ei eksisteeri $\lim\limits_{z \to 0} \frac{\bar{z}}{z}$.

Selle näitamiseks läheneme punktile 0 kahte erinevat teed pidi ning näitame, et sel puhul saame erinevad piirväärtused. See ütlebki, et vaadeldaval funktsioonil pole piirväärtust punktis 0.

1) Olgu $z = x + iy$. Läheneme nullile piki reaaltelge, s.t. $y = 0$. Sel juhul $z = \bar{z} = x$ ning seega $\lim \frac{\bar{z}}{z} = 1$.

2) Kui aga läheneme nullile piki imaginaartelge, s.t. $x = 0$, siis $z = iy$ ning $\bar{z} = -iy$, mistõttu $\lim \frac{\bar{z}}{z} = -1$.

K ü s i m u s i .

1. Rakendada antud teoreemi $\lim\limits_{n \to \infty} z_n$ ja $\lim\limits_{z \to a} f(z)$ puhul.
2. Kuidas iseloomustada kohta protsessides $z \to \infty$, $t \to +\infty$ ja $t \to -\infty$ (z - kompleksarv, t - reaalarv)?
3. Mida tähendab geomeetriliselt $z \to z_0$?
4. Kuidas saaksime sümbolites kirjeldada protsessi: z kuulub ringi $|z| < 1$ ja läheneb arvule 1 ?
5. Muutuvat suurust v nimetame antud protsessis <u>tõkestatuks</u>, kui selles protsessis leidub koht, millest alates mingi $M > 0$ puhul kehtib võrratus

$$|v| \leq M .$$

Mida tähendab see geomeetriliselt?

6. Veenduda esitatud kahe piirväärtuse definitsiooni samaväärsuses.

Ülesandeid.

1. Näidata, et punkt A ($|A| \neq 0$ ning $\arg A \neq \pi$) on muutuva suuruse w piirväärtuseks parajasti siis, kui $\lim |w| = |A|$ ja $\lim \arg w = \arg A$.
2. Tõestada, et

a) $\lim\limits_{z \to z_0} c = c$,

b) $\lim\limits_{z \to z_0} (az + b) = az_0 + b$,

c) $\lim\limits_{z \to z_0} (z^2 + c) = z_0^2 + c$,

d) $\lim\limits_{z \to z_0} \operatorname{Re} z = \operatorname{Re} z_0$,

e) $\lim\limits_{z \to z_0} \bar{z} = \bar{z}_0$,

f) $\lim\limits_{z \to 1-i} [x + i(2x + y)] = 1 + i$.

3. Tõestatud teoreemi abil näidata, et kompleksete muutuvate suuruste korral kehtivad aritmeetiliste tehete puhul samasugused teoreemid nagu reaalarvuliste suuruste puhul.
4. Näidata, et iga suurus, millel on piirväärtus, on tõkestatud.
5. Näidata, et ka kompleksarvuliste jadade puhul kehtib Bolzano-Weierstrassi teoreem.

§ 3. Funktsiooni pidevus.

Edasises teoorias on eriline tähtsus funktsiooni pidevuse mõistel, millel me peatume käesolevas paragrahvis.

Definitsioon. Funktsiooni $f(z)$ nimetatakse pidevaks punktis $z_0 \in \mathcal{D}$, kui[1]

1° eksisteerib $f(z_0)$,

2° eksisteerib $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$,

3° $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Sellest definitsioonist lähtudes saame, et funktsioon $f(z)$ on pidev punktis z_0 parajasti siis, kui vastavalt $\varepsilon > 0$ leidub selline $\delta(\varepsilon) > 0$, et $|z - z_0| < \delta(\varepsilon)$ puhul

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon .$$

Piirväärtuse omadustest saame vahetu järeldusena, et pidevate funktsioonide summa, vahe, korrutis ja jagatis on pidevad funktsioonid (viimase puhul ei tohi jagaja väärtus vaadeldavas punktis võrduda nulliga).

Vaatleme mingit argumendi väärtust z ning temale lähedased argumendi väärtused kirjutame kujul $z + \Delta z$. Suurust Δz nimetatakse <u>argumendi kasvuks</u>. Et funktsioon $f(z)$ oleks pidev punktis z , selleks peab

$$\lim_{\Delta z \to 0} f(z + \Delta z) = f(z)$$

ehk teisiti

$$\lim_{\Delta z \to 0} [f(z + \Delta z) - f(z)] = 0.$$

Vahet $f(z+\Delta z) - f(z)$ nimetatakse <u>funktsiooni</u> $f(z)$ <u>kasvuks</u> punktis z . Meie tõestasime sellega, et funktsioon $f(z)$ on pidev punktis z parajasti siis, kui selles punktis lõpmata väikesele argumendi kasvule vastab lõpmata väike funktsiooni kasv.

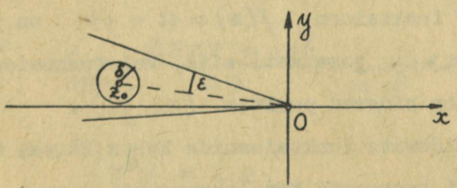
---

[1] Funktsiooni väärtust ja piirväärtust vaatleme ikka lõplikena.

Kui funktsioon $f(z)$ on pidev piirkonna $\mathcal{D}$ igas punktis, siis nimetatakse seda funktsiooni <u>pidevaks piirkonnas $\mathcal{D}$</u>.

<u>Näide</u>. Näitame, et $\arg z$ on pidev igas punktis z, mis ei asu reaaltelje negatiivsel osal.

Et $z=0$ ja $z=\infty$ puhul pole $\arg z$ määratud, siis loomulikult vaatleme vaid neid z väärtusi, mille korral $z\neq 0$ ning $z\neq\infty$. Olgu nüüd z_0 punkt, mis ei asu reaaltelje negatiivsel osal. Võtame mingi $\varepsilon>0$. Tähistame sümboliga δ sellise ringi raadiuse, mille keskpunkt asub punktis z_0, mis ei sisalda reaaltelje negatiivse osa punkte ning asub sektoris $\arg z_0-\varepsilon<\varphi<\arg z_0+\varepsilon$. Sel juhul järeldub võrratusest $|z-z_0|<\delta$ võrratus $|\arg z-\arg z_0|<\varepsilon$. Et z_0 ja ε olid suvalised, siis olemegi tõestanud oma väite.



Joon.10.

Selle tõestuse juures on oluline tähele panna, et vastavalt arvule $\varepsilon>0$ konstrueeritud δ sõltus punkti z_0 valikust. Kui aga sellist sõltuvust ei esine, siis saame nn. ühtlase pidevuse.

Funktsiooni nimetatakse <u>ühtlaselt pidevaks</u> piirkonnas $\mathcal{D}$, kui vastavalt arvule $\varepsilon>0$ leidub selline $\delta(\varepsilon)>0$, et piirkonna $\mathfrak{D}$ iga kahe punkti z_1 ja z_2 puhul kehtib võrratus

$$|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon ,$$

kui $|z_1 - z_2| < \delta(\varepsilon)$.

K ü s i m u s i .

1. Kuidas defineerida funktsiooni pidevus mingil joonel C ?
2. Milline vahe on mõistetel:

   a) funktsioon on pidev kompleksitasandil;

   b) funktsioon on pidev kompleksarvude sfääril?
3. Kumb mõiste on rangem, kas pidevus piirkonnas $\mathfrak{D}$ või ühtlane pidevus piirkonnas $\mathfrak{D}$?
4. Mida tähendab geomeetriliselt funktsiooni pidevus?

Ü l e s a n d e d .

1. Näidata, et funktsioon $f(z) = u + iv$ on pidev punktis $z_0 = x_0 + iy_0$ parajasti siis, kui funktsioonid $u(x,y)$ ja $v(x,y)$ on pidevad punktis (x_0, y_0).
2. Sõnastada pidevate funktsioonide kohta käivad Cantori ja Weierstrassi teoreemid kompleksmuutuja korral. Tõestada need analoogid.
3. Tõestada, et pidevate funktsioonide superpositsioon on pidev funktsioon.
4. Näidata, et funktsioonid $w = z + i$, $w = \frac{1}{z}$ ja $w = z^2$ on pidevad punktis $z = i$.

§ 4. Diferentseeruvad funktsioonid.

Vaatleme mingis piirkonnas $\mathcal{D}$ defineeritud funktsiooni $w = f(z)$. Tähistame:

$$\Delta w = f(z + \Delta z) - f(z).$$

Definitsioon. Kui eksisteerib piirväärtus $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$, siis nimetatakse funktsiooni $f(z)$ diferentseeruvaks punktis z. Seda piirväärtust nimetatakse funktsiooni $f(z)$ tuletiseks punktis z ning tähistatakse

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}.$$

Näide 1. Olgu $w = z^2$. Sel juhul

$$\Delta w = (z + \Delta z)^2 - z^2 = z^2 + 2z\Delta z + \Delta z^2 - z^2 =$$
$$= 2z\Delta z + \Delta z^2$$

ning siit

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{2z\Delta z + \Delta z^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} (2z + \Delta z) = 2z.$$

Seega

$$(z^2)' = 2z.$$

Näide 2. Olgu $w = |z|^2 = z\bar{z}$. Siin

$$\Delta w = (z + \Delta z)\overline{(z + \Delta z)} - z\bar{z} = (z + \Delta z)(\bar{z} + \overline{\Delta z}) - z\bar{z} =$$
$$= z\bar{z} + z\overline{\Delta z} + \bar{z}\Delta z + \Delta z\overline{\Delta z} - z\bar{z} =$$
$$= z\overline{\Delta z} + \bar{z}\Delta z + \Delta z\overline{\Delta z},$$

millest

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = z\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} + \bar{z} + \overline{\Delta z}.$$

Saadud summa piirväärtus aga ei eksisteeri, kuna vastavalt antud peatüki §2 näitele 2 ei eksisteeri esimese liidetava piirväärtus. Seega pole antud funktsioon diferentseeruv üheski punktis peale punkti $z = 0$.

Antud näite põhjal veendusime, et leidub küllaltki lihtsaid kompleksmuutuja funktsioone, mis pole üldiselt diferentseeruvad. Kui vaadelda sama funktsiooni $y = |x|^2 = x^2$ reaalmuutuja korral, siis seal on ta diferentseeruv igas punktis. Sellest järeldub, et kompleksmuutuja puhul on diferentseeruvuse nõue hoopiski rangem võrreldes samasuguse nõudega reaalmuutuja puhul, kuigi formaalselt on diferentseeruvus defineeritud mõlemal juhul ühel ja samal viisil. Selle tõsiasja sisulise tähendusega tutvume mõnevõrra hiljem, kui vaatleme kõrgemat järku tuletisi.

Olgu funktsioon $w = f(z)$ diferentseeruv punktis z. Vastavalt piirväärtuse ja diferentseeruvuse definitsioonile on suurus

$$\eta = \frac{\Delta w}{\Delta z} - f'(z)$$

diferentseeruva funktsiooni puhul lõpmata väike protsessis $\Delta z \to 0$. Viimasest võrdusest saame, et

$$\Delta w = f'(z)\Delta z + \eta\Delta z . \tag{1}$$

Saadud võrduse paremal poolel on esimene liidetav madalamat järku lõpmata väike[1] teise liidetavaga võrreldes (kui $f'(z) \neq 0$).

[1] Lõpmata väikesi suurusi võrreldakse kompleksmuutuja puhul täpselt samuti kui reaalmuutuja korral.

Nagu reaalmuutuja funktsioonide puhul, nii nimetatakse ka siin suurust $f'(z)\Delta z$ funktsiooni kasvu peaosaks. Et selline suurus sõltub lineaarselt argumendi kasvust Δz ,siis nimetatakse teda funktsiooni <u>diferentsiaaliks</u> ja tähistatakse

$$dw = f'(z)\Delta z .$$

Kui võtta $w = z$,siis $w' = 1$ ning $dw = dz = \Delta z$.
Seega võime kirjutada

$$dw = f'(z)dz ,$$

millest saame

$$f'(z) = \frac{dw}{dz} .$$

Et formaalselt on funktsiooni diferentseerimine defineeritud nii nagu reaalmuutuja funktsiooni korral, siis on diferentseerimise reeglid kompleksmuutuja funktsioonide puhul samasugused, nagu neid tunneme matemaatilise analüüsi kursusest. Vaatleme siinkohal vaid liitfunktsiooni diferentseerimise reeglit.

Olgu antud funktsioonid $w=f(\zeta)$ ja $\zeta = g(z)$ kus z ja ζ kuuluvad vastavalt piirkondadesse $\mathcal{D}$ ja $\mathcal{D}_1$,s.t. esimese funktsiooni määramispiirkond sisaldab teise funktsiooni kujutispiirkonna. Eeldame, et funktsioon $g(z)$ on diferentseeruv punktis z ,s.t.

$$\Delta \zeta = g'(z)\Delta z + \alpha \Delta z , \tag{2}$$

kus $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \alpha = 0$. Olgu veel funktsioon $f(\zeta)$ diferentseeruv punktis $\zeta = g(z)$. Sel juhul

$$\Delta w = f'(\zeta)\Delta\zeta + \beta\Delta\zeta , \tag{3}$$

kus $\lim\limits_{\Delta\zeta\to 0}\beta = 0$. Et aga $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\Delta\zeta = 0$, siis ka $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\beta = 0$. Seoste (2) ja (3) põhjal saame, et

$$\Delta w = f'(\zeta)[g'(z)\Delta z + \alpha\Delta z] + \beta[g'(z)\Delta z + \alpha\Delta z] =$$

$$= f'(\zeta)g'(z)\Delta z + [\alpha f'(\zeta) + \beta g'(z) + \alpha\beta]\Delta z =$$

$$= f'(\zeta)g'(z)\Delta z + \gamma\Delta z,$$

kus $\gamma = \alpha f'(\zeta) + \beta g'(z) + \alpha\beta$. Et $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\gamma = 0$, siis saamegi siit matemaatilise analüüsi kursusest tuntud valemi

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{dw}{dz} = f'(\zeta)g'(z) = \frac{dw}{d\zeta}\cdot\frac{d\zeta}{dz}.$$

Toome lõpuks paar järgneva jaoks olulist mõistet. Funktsiooni, mis on piirkonna $\mathcal{D}$ igas punktis ühene ja diferentseeruv, nimetatakse <u>regulaarseks piirkonnas $\mathcal{D}$</u>. Funktsiooni nimetatakse <u>regulaarseks punktis z</u>, kui sellel punktil leidub selline ümbrus, kus $f(z)$ on regulaarne.

Kui vaatleme diferentseeruvuse ja regulaarsuse nõuet piirkonna puhul, siis üheste funktsioonide korral need ühtivad. Regulaarsuse nõue punktis on aga rangem kui diferentseeruvuse nõue. Nii on näites 2 vaadeldud funktsioon diferentseeruv punktis $z = 0$, kuid ei ole seal regulaarne.

K ü s i m u s i .

1. Veenduda, et punktis z diferentseeruv funktsioon on selles punktis pidev.
2. Veenduda, et näites 2 toodud funktsioon on diferentseeruv punktis $z = 0$.

Ü l e s a n d e d .

1. Näidata, et võrduse (1) paremal poolel on teine liige kõrgemat järku lõpmata väike võrreldes esimesega.

2. Näidata, et funktsioon $f(z)$ on punktis z diferentseeruv parajasti siis, kui funktsiooni kasv selles punktis avaldub kujul

$$\Delta w = A\Delta z + \alpha ,$$

kus α on kõrgemat järku lõpmata väike suurus võrreldes argumendi kasvuga Δz ning A ei sõltu suurusest Δz.

3. Tõestada valemid:

a) $(w + \omega)' = w' + \omega'$,

b) $(cw)' = cw'$,

c) $(w\omega)' = w'\omega + w\omega'$,

d) $\left(\frac{w}{\omega}\right)' = \frac{w'\omega - \omega' w}{\omega^2}$.

4. Leida tuletised funktsioonidest

a) $w = (2z + i)^4$, c) $w = 3z^2 - 4z + i$,

b) $w = \frac{z - i}{z}$, d) $w = \frac{2i}{z-1}$.

Vastus: a) $w = 8(2z + i)^3$, b) $w' = \frac{i}{z^2}$,

c) $w' = 6z - 4$, d) $w' = -\frac{2i}{(z-i)^3}$.

5. Näidata, et funktsioonid $w = \operatorname{Re} z$, $w = \operatorname{Im} z$, $w = \bar{z}$ pole diferentseeruvad.

6. Leida funktsiooni $w = (2+i)z^2$ diferentsiaal punktides $z = 2 - i$, $z = \frac{1}{2}$ ja $z = -i$.

Vastus: $12\Delta z$, $2(2+i)\Delta z$ ja $4(1-2i)\Delta z$.

§ 5. Cauchy-Riemanni võrrandid.

Eelmises paragrahvis nägime, et suhteliselt lihtsad pidevad kompleksmuutuja funktsioonid ei osutu diferentseeruvaiks. Seoses sellega tekib probleem niisuguste tingimuste leidmisest, mille järgi saaks otsustada funktsiooni diferentseeruvuse üle. Käesolevas paragrahvis lahendamegi selle probleemi. Olgu antud funktsioon

$$w = f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y).$$

Eeldame, et see funktsioon on diferentseeruv punktis z ,s.t. eksisteerib piirväärtus

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}.$$

Siinjuures on oluline tähele panna seda, et piirväärtuse definitsiooni kohaselt ei sõltu vastav piirväärtus sellest, millisel viisil Δz läheneb nullile. Teisiti öeldes, kui teame, et piirväärtus $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$ eksisteerib, siis piisab tema leidmiseks vaadelda vaid teatavat kindlat suuruse Δz nullile lähenemise viisi (näiteks piki mingit sirget).

Lähenegu $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ nullile selliselt, et $\Delta y = 0$, s.t. punkt $z + \Delta z$ ligineb punktile z paralleelselt reaalteljega. Sel juhul

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(u+\Delta u) + i(v+\Delta v) - (u+iv)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x} + i\frac{\Delta v}{\Delta x}\right) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Kui aga Δz läheneb nullile nii, et $\Delta x = 0$,siis saame

$$f'(z)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta u+i\Delta v}{i\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\left(\frac{\Delta v}{\Delta y}-i\frac{\Delta u}{\Delta y}\right)=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Eelduse kohaselt oli funktsioon diferentseeruv. Seetõttu peavad kahel erineval lähenemisel saadud tulemused olema võrdsed, s.t.

$$\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Seega funktsiooni $f(z)$ diferentseeruvuse korral:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Saadud võrrandeid nimetatakse <u>Cauchy-Riemanni võrrandeiks.</u>[1]

Järgnevas näitame, et Cauchy-Riemanni võrrandite täidetus osutub ka funktsiooni diferentseeruvuse piisavaks tingimuseks, kui eeldada lisaks kahemuutuja funktsioonide $u(x,y)$ ja $v(x,y)$ diferentseeruvust. Viimane asjaolu tähendab seda, et

$$(1)\quad \begin{aligned}\Delta u&=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+\eta_1|\Delta z|,\\ \Delta v&=\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y+\eta_2|\Delta z|,\end{aligned}$$

kus $\Delta z=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ ning η_1, η_2 lähenevad nullile, kui $\Delta z\to 0$. Seoste (1) ja Cauchy-Riemanni võrrandite abil saame

$$\frac{\Delta w}{\Delta z}=\frac{\Delta u+i\Delta v}{\Delta x+i\Delta y}=$$

$$=\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y\right)+i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y\right)+(\eta_1+i\eta_2)|\Delta z|}{\Delta x+i\Delta y}=$$

---

[1] Mõningas osas kirjanduses nimetatakse neid ka d'Alembert-Euleri võrrandeiks.

$$= \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta x + i\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} + (\eta_1 + i\eta_2)\frac{|\Delta z|}{\Delta z} =$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} + (\eta_1 + i\eta_2)\frac{|\Delta z|}{\Delta z} .$$

Saadud tulemuse põhjal

$$\left|\frac{\Delta w}{\Delta z} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right| = |\eta_1 + i\eta_2| \to 0 \quad \text{,kui } \Delta z \to 0.$$

Seega funktsioon $w = f(z)$ on diferentseeruv ning

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} .$$

Näide. Näitame, et funktsioon $w = \frac{1}{z}$ on diferentseeruv igas nullist erinevas punktis.

Et

$$w = \frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i\frac{-y}{x^2 + y^2},$$

siis tuleb meil veenduda, et funktsioonide

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad \text{ja} \quad v = \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

puhul on rahuldatud Cauchy-Riemanni võrrandid. Arvutades saame, et

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} .$$

Siit näemegi, et Cauchy-Riemanni võrrandid on täidetud, s.t. funktsioon $\frac{1}{z}$ on diferentseeruv.

Ülesanded.

1. Arvestades, et $x = r\cos\varphi$ ja $y = r\sin\varphi$, näidata, et polaarkoordinaatide puhul avalduvad Cauchy-Riemanni võrrandid kujul

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi}, \quad \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\frac{\partial v}{\partial r}.$$

2. Eelmist ülesannet kasutades tõesta, et funktsioon $w = z^n$ (n täisarv) on diferentseeruv.

3. Veenduda, et järgmised funktsioonid pole diferentseeruvad:

   a) $z - \bar{z}$, c) $e^x(\cos y - i\sin y)$,

   b) $2x + xy^2 i$, d) $x^2\sin y - iy\cos x$.

4. Millistes punktides eksisteerivad järgmiste funktsioonide tuletised:

   a) $f(z) = \frac{1}{z}$, b) $f(z) = x^2 + iy^2$,

   c) $f(z) = z\,\mathrm{Im}\,z$?

   Leida nende tuletised neis punktides, kus nad eksisteerivad.

5. Kui $f(z) = x^3 - i(y-1)^3$,siis $\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = 3x^2$. Miks $3x^2$ osutub antud funktsiooni tuletiseks ainult punktis $z = i$?

§ 6. Harmoonilised funktsioonid.

Kui eeldada, et funktsioonidel u ja v eksisteerivad teist järku osatuletised, siis Cauchy-Riemanni võrrandite diferentseerimise tulemusena saame ,et

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}.$$

Siit järeldub, et funktsioon u rahuldab nn. <u>Laplace'i võrrandit</u>

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Funktsiooni, mis rahuldab mingi piirkonna $\mathcal{D}$ punktide puhul Laplace'i võrrandit, nimetatakse selles piirkonnas <u>harmooniliseks funktsiooniks</u>.

Me tõestasime, et teatud eeldustel (teist järku osatuletiste olemasolu korral)[1] on diferentseeruva kompleksmuutuja funktsiooni reaalosa harmooniline funktsioon. Analoogilisel viisil saab sama näidata imaginaarosa kohta.

Funktsioone u ja v, mis rahuldavad peale Laplace'i võrrandi veel Cauchy-Riemanni võrrandeid, nimetatakse <u>kaasharmoonilisteks</u>. Osutub, et igale harmoonilisele funktsioonile saab leida kaasharmoonilise. Selle fakti tõestuse juures me käesolevas ei peatu. Piirdume vaid näidetega.

<u>Näide 1</u>. Leida kaasharmooniline funktsioonile $u = x^2 - y^2$.

Et v oleks kaasharmooniline, peab ta täitma tingimusi (Cauchy-Riemanni võrrandid)

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 2x.$$

Esimesest seosest saame, et

$$v = \int -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \varphi(y) = \int 2y dx + \varphi(y) = 2xy + \varphi(y).$$

[1] Hiljem näeme, et tehtud eeldus on alati täidetud.

Teise seose põhjal

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 2x + \varphi'(y) = 2x,$$

s.t. $\varphi'(y) = 0$ .Seega $\varphi(y) = const$ ning siit

$$v = 2xy + C.$$

<u>Näide 2.</u> Leida diferentseeruv kompleksmuutuja funktsioon $f(z) = u + iv$,kui $v = e^x \sin y$.

Leiame

$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y \quad \text{ja} \quad \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y .$$

Vastavalt Cauchy-Riemanni võrrandeile saame

$$u = \int e^x \cos y \, dx + \varphi(y) = e^x \cos y + \varphi(y),$$

millest

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -e^x \sin y + \varphi'(y) = -e^x \sin y.$$

Siit tuleneb, et $\varphi'(y) = 0$,s.t. $\varphi(y) = const$.Seega

$$f(z) = u + iv = e^x \cos y + C + i e^x \sin y =$$
$$= e^x(\cos y + i \sin y) + C.$$

Ü l e s a n d e d .

1. Funktsiooni $f(z) = z^n = (x + iy)^n$ reaal- ja imaginaarosi nimetatakse n-astme <u>harmoonilisteks polünoomideks</u>.Leida kõik harmoonilised polünoomid kuni 5. astmeni.
2. Leida diferentseeruv funktsioon $f(z) = u + iv$,kui

   a) $u = x^2 - y^2 + 2x$, c) $u = \dfrac{x}{x^2+y^2} - 2y$,

   b) $u = \dfrac{x}{x^2+y^2}$, d) $v = -\dfrac{y}{(x+1)^2+y^2}$,

e) $v = 2xy + 3x$, f) $v = \arctan \frac{y}{x}$, $x > 0$.

Vastus:

a) $z^2 + 2z + Ci$, d) $\frac{1}{z+1} + C$,

b) $\frac{1}{z} + Ci$, e) $z^2 + 3iz + C$,

c) $\frac{1}{z} + 2iz + Ci$, f) $f(z) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + i \arctan \frac{y}{x} + C$.

3. Tõestada, et piirkonnas $\mathcal{D}$ diferentseeruv ja reaalarvuliste väärtustega funktsioon on selles piirkonnas konstantne.

4. Olgu $f'(z) = 0$ piirkonnas $\mathcal{D}$. Näidata, et $f(z) = \mathrm{const.}$

III p e a t ü k k.

KONFORMNE KUJUTAMINE.

§ 1. Tuletise geomeetriline tähendus.

Käesolevas paragrahvis uurime diferentseeruva funktsiooniga teostatava kujutuse geomeetrilisi omadusi. Selle uurimise aluseks on meil II peatükis § 1 vaadeldud näited 1 ja 2, mille põhjal võime väita, et funktsioon

$$w = az$$

teostab teisenduse, kus kujutisvektor w on originaaliga z võrreldes pöördunud nurga $\alpha = \arg a$ võrra ning tema pikkus on muutunud $|a|$ kordselt.

Sellest järeldub, et teisenduse

$$w - w_0 = a(z - z_0)$$

puhul kujutavad punktist z_0 punkti z suunduvad vektorid punktist w_0 punkti w suunduvateks vektoriteks, kusjuures kujutisvektor on originaaliga võrreldes pöördunud nurga $\alpha = \arg a$ võrra ning tema pikkus on muutunud $|a|$ kordselt.

Olgu meil nüüd diferentseeruv funktsioon $w = f(z)$. Vaatleme punkte, milles $f'(z) \neq 0$. Sel juhul

$$\Delta w = f'(z)\Delta z + \beta,$$

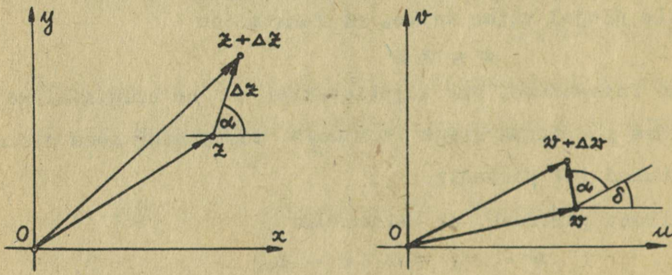
kus β on esimese liidetavaga võrreldes kõrgemat järku lõpmata väike suurus. Küllalt väikese Δz puhul kehtib seega ligikaudne võrdus

$$\Delta w = f'(z)\Delta z. \tag{1}$$

Seosest (1) näeme, et vektor Δw on võrreldes vektoriga

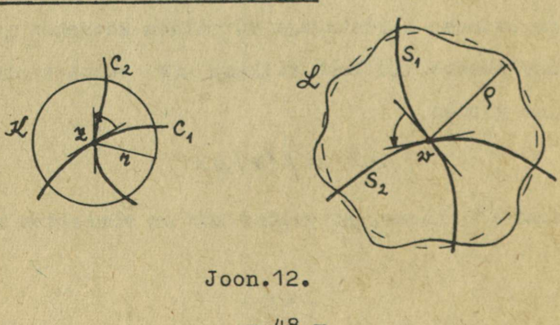
Δz pöördunud nurga $\arg f'(z)$ võrra ning tema pikkus on muutunud Δz pikkusega võrreldes suuruse $|f'(z)|$ kordselt. Et see kehtib igasuguse küllalt väikese Δz ja temale vastava Δw korral, siis saame siit järeldusena järgmise fakti:

kujutamisel diferentseeruva funktsiooniga $f(z)$ toimub neis punktides, kus $f'(z) \neq 0$, tasandi pööre nurga $\delta = \arg f'(z)$ võrra ning mastaabi muutus $|f'(z)|$ kordselt (vt. joon.11).



Joon.11.

Et kõigi vektorite Δz kujutised on pööratud oma originaalide suhtes ühe ja sama nurga δ võrra, siis on kahe punkti z läbiva joone C_1 ja C_2 vaheline nurk võrdne (nii suuruse kui ka suuna poolest) vastavate kujutisjoonte S_1 ja S_2 vahelise nurgaga (vt. joon.12). Selles väljendub nn. <u>nurkade säilivuse omadus.</u>



Joon.12.

Teiselt poolt, nagu nägime, muutub vektori Δz pikkus igas suunas ühte viisi, s.t. lõpmata väikeste raadiustega ringjooned $\mathcal{K}$ (keskpunktiga punktis z) teisenevad joonteks $\mathcal{L}$, mis erinevad ringjoontest (keskpunktiga punktis w) suurusega ρ võrreldes kõrgemat järku lõpmata väikeste suuruste võrra. Selles väljendub nn. lõpmata väikeste ringjoonte invariantsuse omadus.

Kujutust, millel on kaks eespool mainitud omadust, nimetatakse konformseks kujutuseks. Niisiis, iga diferentseeruv kompleksmuutuja funktsioon teostab konformse kujutamise (s.t. säilitab nurgad nii suuruse kui ka suuna poolest ning muudab mastaapi igas suunas ühte viisi) kõigis punktides, kus tuletis on nullist erinev.

Meie nägime eelnevas, et kui originaaliks on lõpmata väike ring pindalaga πr^2, siis on kujutuseks piirkond, mis on ligilähedaselt ring pindalaga $|f'(z)|^2 \pi r^2$, s.t. pindala muutub $|f'(z)|^2$ kordselt. Selline tulemus on matemaatilise analüüsi kursusest hästi tuntud. Seal näidati, et muutuja vahetuse $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$, s.t. teisenduse $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ puhul muutub pindala jakobiaani

(2) $$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}$$

kordselt. Arvestades aga Cauchy-Riemanni võrrandeid, võrdub see jakobiaan avaldisega

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = |f'(z)|^2.$$

Siit saime teise geomeetrilise tähenduse funktsiooni tuletise moodulile.

Et jakobiaan (2) on nullist erinev, siis võime matemaatilise analüüsi kursusest teada oleva tulemuse põhjal öelda, et teisendusel $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ eksisteerib vaadeldavas punktis ühene pöördteisendus $x = x(u,v)$ ja $y = y(u,v)$. Kui seda tulemust interpreteerida kompleksmuutuja funktsiooni seisukohalt, siis saame, et nende punktide ümbruses, kus $f'(z) \neq 0$, eksisteerib funktsioonil $w = f(z)$ ühene pöördfunktsioon

$$z = g(w) = x(u,v) + i\,y(u,v).$$

K ü s i m u s e d .

1. Milline on tuletise argumendi geomeetriline tähendus?
2. Milline on tuletise mooduli geomeetriline tähendus?
3. Kuidas määrata nende punktide hulka, kus funktsioon teostab ühesuguse mastaabi muutuse?
4. Milline võrrand iseloomustab nende punktide hulka, kus kujutamisel funktsiooniga $w = f(z)$ pöördub tasand nurga α võrra?
5. Milliste z-tasandi punktide ümbruses toimub tasandi kokkusurumine (kujutispunktid on üksteisele lähemal kui originaalid) kujutamisel diferentseeruva funktsiooniga $w = f(z)$?
6. Milliste punktide puhul ei muutu mastaap kujutamisel diferentseeruva funktsiooniga $w = f(z)$?

Ü l e s a n d e d .

1. Leida tasandi pööre ja mastaabi muutus kujutamisel funktsiooniga $w = z^2$ punktides:

a) $z = 1$, d) $z = 1 + i$,

b) $z = \frac{1}{2}$, e) $z = \sqrt{3} - i$,

c) $z = -\frac{1}{4}$, f) $z = 2i$.

Vastus: a) 0 ja 2, d) $\frac{\pi}{4}$ ja $2\sqrt{2}$,

b) 0 ja 1, e) $-\frac{\pi}{6}$ ja 4,

c) π ja $\frac{1}{2}$ f) $-\frac{\pi}{2}$ ja 4.

2. Sama funktsiooni $w = z^3$ puhul.

Vastus: a) 0 ja 3, d) $\frac{\pi}{2}$ ja 6,

b) 0 ja $\frac{3}{4}$, e) $-\frac{\pi}{3}$ ja 12,

c) 0 ja $\frac{3}{16}$, f) $-\pi$ ja 12.

3. Milline z - tasandi osa surutakse kokku, milline venitatakse välja järgmiste funktsioonidega kujutamisel:

a) $w = z^2$, c) $w = z^2 + 2z$,

b) $w = \frac{1}{z}$, d) $f(z) = e^x(\cos y + i \sin y)$.

Vastus: Kokku surutakse

a) $|z| < \frac{1}{2}$, c) $|z + 1| < \frac{1}{2}$,

b) $|z| > 1$, d) $x = \operatorname{Re} z < 0$.

Välja venitatakse:

a) $|z| > \frac{1}{2}$, c) $|z + 1| > \frac{1}{2}$,

b) $0 < |z| < 1$, d) $\operatorname{Re} z > 0$.

4. Näidata, et ainult lineaarne funktsioon muudab mastaapi

igas punktis ühte viisi ning pöörab tasandit igas punktis ühe ja sama nurga võrra.

5. Milline funktsioon teostab igas punktis tasandi pöörde nurga π võrra?

Vastus: $f(z) = -az + A$, kus a on suvaline positiivne reaalarv ning A — kompleksarv.

6. Millistes punktides teostab funktsioon $w = \frac{1}{z}$ tasandi pöörde nurga $\frac{\pi}{2}$ võrra?

Vastus: $\arg z = \frac{\pi}{4}$.

§ 2. Dirichlet' ülesanne.

Mitmesugused väljateooria ja hüdromehhaanika probleemid taanduvad järgmisele matemaatilisele ülesandele:

leida piirkonnas D harmooniline funktsioon $h(x,y)$, mis selle piirkonna rajal C omandab etteantud väärtused.[1]

Sellist ülesannet nimetatakse Dirichlet' ülesandeks. Mitmete piirkondade jaoks saab lihtsasti anda Dirichlet' ülesande lahendi. Üheks selliseks piirkonnaks on näiteks ühikring $|z| < 1$, mille puhul Dirichlet' ülesande lahend avaldub nn. Poisson' integraali abil, mille anname V peatükis paragrahvis 6 nn. Cauchy valemi rakendusena.

Käesolevas näitame, kuidas konformse kujutamise mõistet kasutades tekib võimalus Dirichlet' ülesannet keerulisema

[1] Harmoonilise funktsiooni $h(x,y)$ väärtustena rajapunktis (x_0,y_0) mõistame piirväärtust $\lim\limits_{\substack{z\to z_0\\ z\in D}} h(x,y)$, kus $z = x + iy$ ja $z_0 = x_0 + iy_0$.

piirkonna puhul taandada Poisson' integraalile.

Olgu teada mingi funktsioon $w = f(z)$, mis kujutab konformselt piirkonna $\mathcal{D}$ ühikringiks $|w| < 1$. Et meil $z = x + iy$, siis märgime järgnevas $h(x,y) = h(z)$. Olgu antud, et raja C punktides (tähistame viimased tähega ζ)

(1) $$h(\zeta) = \varphi(\zeta).$$

Et $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ teisendab piirkonna $\mathcal{D}$ ühikringiks, siis teisenevad rajapunktid ζ ringjoone $|\omega| = 1$ punktideks. Teisenduse konformsuse tõttu $f'(z) \neq 0$. Seega eksisteerib pöördfunktsioon $z = f^{-1}(w)$ (vt. eelmine paragrahv).

Olgu teada Dirichlet' ülesande lahend $T(u,v) = T(w)$ piirkonna $|w| < 1$ jaoks rajaväärtustega

$$\psi(\omega) = \varphi[f^{-1}(\omega)].$$

Näitame, et sel juhul osutub funktsioon

$$H(z) = T[f(z)]$$

Dirichlet' ülesande lahendiks piirkonna $\mathcal{D}$ jaoks rajaväärtuste (1) puhul. Selleks veendume kõigepealt, et $H(z)$ on harmooniline funktsioon. Leiame $T(u,v)$ kaasharmoonilise $S(u,v)$ ja moodustame diferentseeruva funktsiooni

$$w_1 = T(u,v) + i\,S(u,v) = F(w).$$

Et aga $w = f(z)$ on diferentseeruv, siis on seda ka liitfunktsioon

$$w_1 = F[f(z)],$$

mille reaalosa

$$H(z) = T[f(z)]$$

on seega harmooniline.

Näitame nüüd, et ka tingimus (1) on täidetud.

Tõepoolest,

$$H(\zeta)=T[f(\zeta)]=T(\omega)=\psi(\omega)=\varphi[f^{-1}(\omega)]=\varphi(\zeta).$$

Nii olemegi leidnud Dirichlet' ülesande lahendi piirkonna $\mathscr{D}$ jaoks rajaväärtuste (1) korral. Selle lahendi leidmise taandasime niisuguse funktsiooni $w=f(z)$ leidmisele, mis teostaks piirkonna $\mathscr{D}$ konformse kujutamise ühikringiks. Selle nn. konformse kujutamise põhiülesande lahenduvusega seotud küsimusi vaatleme kahes järgnevas paragrahvis.

§ 3. Konformse kujutamise põhiülesanne.

Juba eelmises paragrahvis tutvusime konformse kujutamise põhiülesandega: leida diferentseeruv kompleksmuutuja funktsioon, mis antud piirkonna $\mathscr{D}$ kujutab konformselt teiseks piirkonnaks $\mathscr{D}_1$. Esimene küsimus, mis tekib seoses selle ülesandega, on tema lahendi olemasolu küsimus. On selge, et igal konkreetsel juhul pole selline ülesanne lahenduv. Nii ei saa mitmeli sidusat piirkonda kujutada konformselt üheli sidusaks piirkonnaks. Tõepoolest, kui $\mathscr{D}$ on mitmeli sidus, siis võib temas valida kinnise joone C, mis hõlmab ka piirkonda $\mathscr{D}$ mittekuuluvaid punkte. Kui $\mathscr{D}_1$ on üheli sidus, siis on joone C kujutis selles piirkonnas kinnine joon C_1, mis hõlmab ainult piirkonna $\mathscr{D}_1$ punkte. Deformeerime kõverat C_1 nii, et ta kogu aeg jääb piirkonda $\mathscr{D}_1$ ning lõpuks taandub üheks punktiks. Kui nüüd kujutus oleks konformne, siis on nii tema kui ka tema pöördteisendus pidevad ning seetõttu peaks ka kõver C taanduma üheks punktiks, kuid sealjuures nii, et ta ei väljuks piirkonnast $\mathcal{D}$. See on aga võimatu.

Sellest näeme, et on oluline leida tingimused, mis määraksid konformse kujutamise põhiülesande lahenduvuse. Sellised tingimused on antud nn. Riemanni teoreemiga, mille käesolevas esitame ilma tõestuseta, sest viimane nõuaks spetsiaalse aparatuuri sissetoomist. Selle teoreemi tõestuse võib leida näiteks raamatutest [3] (vt. VIII ptk.), [5] (vt. IX ptk.), [13] (vt. I osa V ptk.) või siis [11] (vt. XII ptk.).

Riemanni teoreem. Igat üheli sidusat piirkonda, mille raja sisaldab vähemalt kaks punkti, on võimalik konformselt kujutada ühikringile.

Märkus. Riemanni teoreemis esineva ühikringi asemel võiks olla mistahes üheli sidus piirkond, mille rajal on samuti vähemalt kaks punkti. Tõepoolest, sellist piirkonda oleks äsjasõnastatud teoreemi abil võimalik kujutada konformselt ühikringile. Pöördteisendus oleks samuti konformne ning teisendaks ühikringi vaadeldavale piirkonnale. Et kahe konformse kujutamise järjest rakendamine on jällegi konformne kujutus, siis saamegi siit Riemanni teoreemi näiliselt üldisema sõnastuse.

On selge, et kui leidub üks konformne kujutus, mis teisendab piirkonna $\mathcal{D}$ ühikringiks, siis leidub niisuguseid kujutusi lõpmata palju. Tõepoolest, iga teisendus, mis erineb vaadeldavast konformsest teisendusest mingi pöörde (ümber nullpunkti) võrra, on samuti konformne.

Et sellisel Riemanni teoreemil on suur teoreetiline tähtsus, nähtub kasvõi sellestki, kui rakendada teda Dirichlet' ülesande lahenduvuse küsimuse selgitamisel. Eelmise paragrahvi arutlusi aluseks võttes võime öelda, et Dirichlet' ülesanne on lahenduv igasuguse piirkonna puhul ,mis rahuldab Riemanni teoreemi tingimusi. Et niisuguste piirkondade klass on väga lai, siis võime sama öelda nende piirkondade kohta, mille puhul Dirichlet' ülesanne on lahenduv.

Samasugune arutelu on rakendatav ka teiste rajaülesannete puhul, mis on seotud Laplace'i võrrandiga. Seetõttu on mõistetav ühelt poolt Riemanni teoreemi,teiselt poolt aga kogu konformse kujutamise suur tähtsus nii lahendi olemasolu kui ka lahendi leidmise seisukohalt.

Küsimused.

1. Miks on konformne kujutus ning tema pöördkujutus pidevad?
2. Miks on kahe konformse teisenduse järjest rakendamine konformne teisendus?

§ 4. Üldisi küsimusi seoses konformse kujutamisega.

Vaadeldes konformse kujutamise põhiülesannet, märkisime eelmises paragrahvis, et see on lahenduv väga laia piirkondade klassi puhul. Tekib küsimus, milliseid lisatingimusi võib seada konformse kujutamise põhiülesandele, et lahend oleks üheselt määratud. Vastuse sellele küsimusele annab järgmine konformse kujutamise ainsuse teoreem:

Leidub üks ja ainult üks funktsioon $w = f(z)$, mis kujutab etteantud üheli sidusa piirkonna $\mathcal{D}$, mille rajal on vähemalt kaks punkti, ühikringiks $|w|<1$ ning täidab tingimusi

(1) $$\boxed{f(z_0) = w_0 \quad \text{ja} \quad \arg f'(z_0) = \alpha ,}$$

kus $z_0 \in \mathcal{D}$ ja $|w_0| < 1$.

Teor.

Selle teoreemi tõestust me käesolevas ei esita. See tõestus nõuab enam teadmisi kompleksmuutuja funktsioonide teooriast, kui me senini oleme omandanud (vt. [8], lk. 294 või [6], lk. 103).

Tingimusi (1), mis määravad üheselt konformset kujutamist teostava funktsiooni, nimetatakse normeerivateks tingimusteks. Kui vaadelda neid normeerivaid tingimusi (1), siis märkame, et need sisaldavad kolm reaalset parameetrit (w_0 - reaal- ja imaginaarosad ning α). Osutub, et tingimuste (1) asemel võib vaadelda ka teisi tingimusi, mis samuti sisaldavad kolm reaalset parameetrit ning normeerivad konformse kujutamise. Näiteks, anname ette ühe sisepunkti ja ühe rajapunkti kujutise:

$$\boxed{f(z_0) = w_0 \ , \quad f(z_1) = w_1}$$

($z_0 \in \mathcal{D}$ ja $|w_0|<1$, $z_1 \in C$ ning $|w_1|=1$). Konformne kujutus on üheselt määratud ka siis, kui fikseerida kolme rajapunkti teisendused:

$$\boxed{f(z_k) = w_k} \quad (k = 1,2,3).$$

Konformse kujutamise põhiülesande puhul on meil tegemist ühe piirkonna kujutamisega teiseks piirkonnaks. Et piirkond on lahtine hulk, siis ei ütle ei Riemanni teoreem ega ka äsjavaadeldud ühesuse teoreem meile midagi selle kohta, milline on kujutis vaadeldava piirkonna rajapunktides. Vastuse sellele annab nn. teoreem rajade vastavusest:

Kui funktsioon $f(z)$ teostab piirkonna $\mathcal{D}$ konformse ja üks-ühese kujutamise piirkonnaks $\mathcal{D}_1$, siis

1) leiab aset üks-ühene ning pidev vastavus nende piirkondade rajapunktide vahel, kui piirkonna $\mathcal{D}_1$ raja ei sisalda lõpmatuspunkti ning igat raja punkti lugeda niimitu korda, kui suur on tema kordsus;

2) funktsioonil $f(z)$ on rajal C pidev tuletis, kui piirkondade $\mathcal{D}$ ja $\mathcal{D}_1$ rajadel on igas punktis pidev kõverus ning need rajad ei sisalda lõpmatuid harusid.

Funktsiooni $w=f(z)$ tuletiseks rajal C nimetatakse piirväärtust

$$w'(s) = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{f(s+\Delta s) - f(s)}{\Delta s},$$

kus s on raja kui joone kaare pikkus, mida mõõdetakse selle raja mingist fikseeritud punktist alates.

Kui järgnevates paragrahvides vaatleme üksikute konkreetsete funktsioonidega teostatavaid kujutusi ning lahendame vastavaid ülesandeid, siis kasutame sageli nn. rajade vastavuse printsiipi:

1 р.

Olgu antud kaks üheli sidusat piirkonda $\mathcal{D}$ ja $\mathcal{D}_1$ rajadega C ja C_1 , kusjuures piirkond $\mathcal{D}_1$ on tõkestatud. Kui funktsioon $w=f(z)$ on regulaarne piirkonnas $\mathcal{D}$, pidev ka selle rajal C ning teostab raja C üks-ühese kujutamise rajaks C_1, kusjuures säilib raja ümberkäigu suund, siis teostab see funktsioon ka piirkonna $\mathcal{D}$ konformse ja üks-ühese kujutamise piirkonnaks $\mathcal{D}_1$.

Märgime lõpuks veel ühe tähtsa tulemuse, mida kasutatakse konformse kujutamise puhul. Nimelt, kui konstandist erinev funktsioon $w = f(z)$ on regulaarne piirkonnas $\mathcal{D}$, siis nende punktide hulk $\mathcal{D}_1$, milleks teisendab antud funktsioon piirkonna $\mathcal{D}$, moodustab piirkonna, kusjuures säilib raja läbimise suund. Teisiti öeldes: kui piirkonna $\mathcal{D}$ raja läbitakse nii, et piirkond $\mathcal{D}$ jääb vasakule, siis analoogilisel viisil läbib vastav kujutispunkt ka piirkonna $\mathcal{D}_1$ raja. Sellist tõsiasja tuntakse piirkonna säilivuse printsiibi nime all.

Käesolevas paragrahvis vaatlesime mõningaid olulisi küsimusi seoses konformse kujutamisega. Need tulemused on toodud tõestuseta, sest paljude nende tõestused väljuksid käesoleva kursuse raamidest. Lugejale, kes tahab nende küsimustega põhjalikumalt tutvuda, soovitame pöörduda vastava kirjanduse poole, näiteks [3] (vt. VIII ptk.), [5] (vt. V ja IX ptk.), [6] (vt. II ptk.) ning [11] (vt. XII ptk.).

K ü s i m u s e d .

1. Miks me võime öelda, et mingi piirkonna rajapunkt on määra l ühe reaalse parameetriga?
2. Missugune on raja läbimise positiivne suund ?
3. Milles seisneb põhimõtteline erinevus teoreemil rajade

vastavusest, võrreldes rajade vastavuse printsiibiga ?

4. Miks on piirkonna säilivuse printsiibi puhul nõutud, et funktsioon oleks erinev konstandist? Kas see nõue on oluline?

IV peatükk.

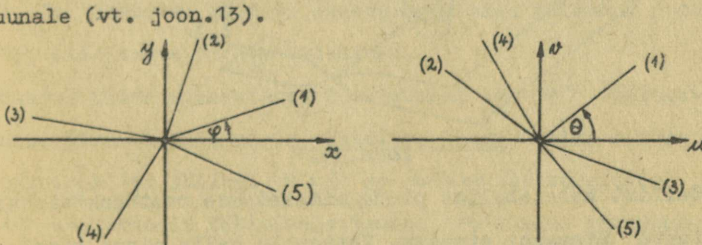
ELEMENTAARFUNKTSIOONID.

§ 1. Astmefunktsioon.

Eelnevas juba selgitasime, mida mõista astmena z^n, kus n on positiivne täisarv. Järgnevas tutvume nn. astmefunktsiooni $w = z^n$ mõningate lihtsamate omadustega. Et selline funktsioon on diferentseeruv, seda saab kõige lihtsamini kontrollida Moivre'i valemi ning Cauchy-Riemanni võrrandite (polaarkoordinaatides) abil.

Asudes uurima astmefunktsiooni omadusi, võtame lihtsuse mõttes kõigepealt vaatluse alla ruutfunktsiooni.

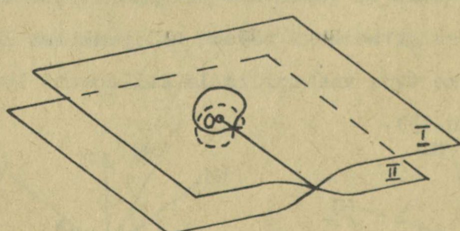
a) F u n k t s i o o n $w = z^2$. Eelnevas juba nägime (vt. näide 5 § 2.1), et selline funktsioon pole üheleheline, s.t. igale kujutisele ei vasta üks originaal. Sellise vastavuse lähemaks selgitamiseks võtame nullpunktist lähtuva kiire ning pöörame teda vastupidiselt kellaosuti liikumise suunale (vt. joon.13).



Joon.13.

Kiirele z-tasandil vastab kiir w-tasandil (vt. näide 5 § 2.1),, kusjuures polaarnurk w-tasandil kasvab poole kiiremini vastavast polaarnurgast z-tasandil. Liigutava kiire kujutis katab seega kogu w-tasandi juba siis, kui z-tasandi kiir katab vaid ülemise pooltasandi. Kui nüüd läbime oma z-tasandi kiirega ka alumise pooltasandi, siis katab kujutiskiir w-tasandil teistkordselt kogu tasandi.

Et saada üks-ühest vastavust kujutiste ja originaalide vahel, selleks võtame vaatluse alla kaks eksemplari kujutiste tasandit. Seejuures olgu z-tasandi ülemisele poolele vastavad kujutised w-tasandi esimesel eksemplaril ning alumisele poolele vastavad kujutised teisel. Need tasandid ühendame nii, et saavutaksime kujutiskiire pideva liikumise, kui liigutatav kiir originaalide tasandil teostab täispöörde. Selleks lõikame mõlemad tasandid läbi piki reaaltelje positiivset osa, ühendame esimese tasandi lõike ülemise serva teise tasandi lõike alumise servaga ning vastupidi (vt. joon.14).



Joon.14.

Sellist kahelehelist pinda nimetatakse ruutfunktsiooni väärtuste <u>Riemanni pinnaks</u>. Vastavalt selle pinna konstruktsioonile võime öelda, et funktsioon $w = z^2$ kujutab kogu z-tasandi pidevalt ja üks-üheselt oma väärtuste Riemanni pinnale. Saadud pind on <u>kaheleheline,</u> kusjuures iga punkti w, välja arvatud $w=0$ ja $w=\infty$, kohal asub kaks Riemanni pinna punkti.

Kui läbime nullpunkti ümbritseva ringjoone $|z|=r$ ühel korral, siis läbib vastav punkt Riemanni pinnal nullpunkti ümbritseva ringjoone $|w|=r^2$ kahel korral. Sama märkame ka siis, kui nullpunkti asemel vaadelda lõpmatuspunkti. See annab põhjuse nimetada neid punkte vaadeldava Riemanni pinna <u>teist järku harunemispunktideks.</u> Need on punktid, kus on seotud vaadeldava pinna üksikud lehed.

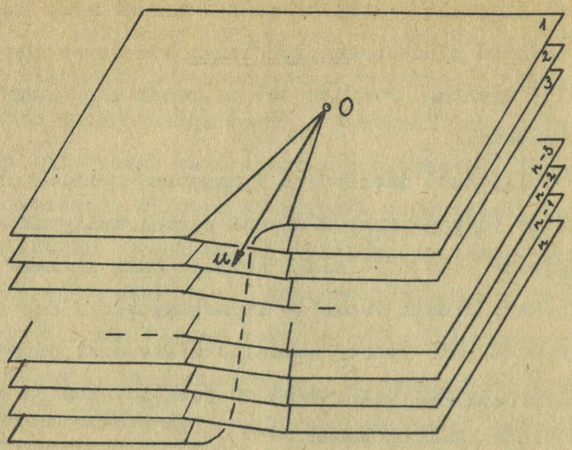
b) F u n k t s i o o n $w=z^n$. Kui tähistame siin $z=re^{i\varphi}$ ja $w=\rho e^{i\theta}$, siis saame

$$\rho=r^n \quad \text{ja} \quad \theta=n\varphi+2k\pi .$$

Sellest näeme, et nullpunktist lähtuva kiire kujutiseks antud funktsiooni puhul on jällegi nullpunktist lähtuv kiir, millel aga polaarnurk on n korda suurem originaali omast.

Toimides nii nagu ruutfunktsiooni puhul, saame üks-ühese vastavuse z-tasandi ja w-tasandi n eksemplari vahel. Kui ühendame need n eksemplari, nagu näidatud joonisel 15, siis saame pideva vastavuse.

Saadud pinda nimetatakse funktsiooni $w=z^n$ väärtuste Riemanni pinnaks. See on <u>n-leheline pind,</u> mille harunemispunktideks on jällegi $w=0$ ja $w=\infty$. Et ringjoone $|z|=r$ ühekordsele läbimisele vastab n-kordne ringjoone $|w|=r^n$ läbimine, siis nimetatakse punkte $w=0$ ja $w=\infty$



Joon.15.

n-järku harunemispunktideks.

K ü s i m u s i .

1. Miks ruutfunktsiooni väärtuste Riemanni pinna lehed on ühendatud piki reaaltelje positiivset osa?
2. Millise funktsiooni puhul on nullpunkt selle funktsiooni väärtuste pinna neljakordseks harunemispunktiks?
3. Mitmeleheline on funktsiooni $w=z^5$ väärtuste Riemannni pind?
4. Millised on funktsiooni $w=(z+1)^2$ väärtuste pinna harunemispunktid?

Ü l e s a n d e d .

1. Leida ruudu $0<Re\,z<1$, $0<Im\,z<1$ kujutis, selle pindala ning rajajoone pikkus kujutamisel funktsiooniga $w = z^2$.

Vastus: $S = \frac{8}{3}$, $l = 2\ln(1+\sqrt{2}) + 2(1+\sqrt{2})$.

2. Leida jooned, kus funktsioon $w = z^2$ teostab võrdse mastaabi muutuse, ning jooned, kus ta teostab ühe ja samasuguse tasandi pöörde.

   Vastus: a) $|z| =$ vonst. b) $\arg z =$ const.

3. On antud funktsioon $w = z^2$:

   a) leida joonte $x = y$, $|z| = R$, $\arg z = \alpha$ kujutised ja selgitada, millised neist joontest kujutuvad üks-üheselt;

   b) leida joonte $u = C$, $v = C$ $(w = u + iv)$ originaalid.

   Vastus: a) $u = 0$ $(v \geq 0)$, $|w| = R^2$, $\arg z = 2\alpha$.

   Ainult viimane kujutub üks-üheselt.

   b) $x^2 - y^2 = C$ (kui $C = 0$, siis sirgete paar),

   $xy = \frac{C}{2}$ (kui $C = 0$, siis sirgete paar).

4. Leida funktsioon, mis teisendab piirkonna $|\arg(z+3)| < \frac{\pi}{6}$ ülemisele pooltasandile.

   Vastus: $w = i(z+3)^3$.

5. Konstrueerida funktsiooni $w = (z-i)^2$ väärtuste Riemanni pind.

§ 2. Juurfunktsioon.

Me nimetame n astme juureks kompleksarvust z kompleksarvu $w = \sqrt[n]{z}$, mille puhul

(1) $$w^n = z.$$

Kui tähistada $z = re^{i\varphi}$ ja $w = \rho e^{i\theta}$, siis saame võrdusest (1), et

$$\rho^n = r \quad \text{ja} \quad n\theta = \operatorname{Arg} z = \varphi + 2k\pi ,$$

millest

$$(2) \qquad \rho = \sqrt[n]{r} \quad \text{ja} \quad \theta = \frac{\operatorname{Arg} z}{n} = \frac{\varphi + 2k\pi}{n} .$$

Võrdustest (2) selgub, et saame n oluliselt erinevat θ väärtust, mis vastavad k väärtustele 0,1,..., $n-1$. Tähistame need vastavalt $\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_{n-1}$. Kui aga $k = n$, siis saame

$$\theta_n = \frac{\varphi}{n} + 2\pi = \theta_0 + 2\pi .$$

Selline polaarnurk koos polaarkaugusega $\sqrt[n]{r}$ aga määrab w-tasandil sama punkti, mille määrab θ_0. Seega on juurel $\sqrt[n]{z}$ erinevaid väärtusi n .

Juurfunktsioon $w = \sqrt[n]{z}$ on seega mitmene funktsioon.

Nii rakenduslikust kui ka teoreetilisest seisukohast on aga oluline funktsiooni ühesuse nõue. On isegi autoreid, kes üldse ei tunnusta niisugust mõistet nagu mitmene funktsioon. Üheks viisiks, kuidas saame muuta vaadeldava mitmese funktsiooni üheseks, on see, et argumendi muutumise piirkonnana vaatleme mitte komplekstasandit, vaid teatud mitmelehelist Riemanni pinda. Me juba saime eelmises paragrahvis niisuguse pinna, mille puhul astmefunktsioon $w = z^n$ seab üks-ühese vastavuse z-tasandi ja vaadeldava Riemanni pinna punktide vahel. Et juurfunktsioon $w = \sqrt[n]{z}$ on astmefunktsiooni pöördfunktsiooniks, siis tõepoolest seab ta igale astmefunktsiooni väärtuste Riemanni pinna punktile vastavusse parajasti komplekstasandi ühe punkti ning selline vastavus on üks-ühene. Seda pinda nimetatakse juurfunktsiooni Riemanni pinnaks. Niisiis on astmefunktsiooni väärtuste Riemanni pind selle funktsiooni pöördfunktsiooni — juurfunktsiooni Riemanni pinnaks.

Mitmesuguste rakenduste seisukohalt on aga oluline, et saaksime niisuguse ühese funktsiooni, kus ka argumendid muutuvad tavalisel komplekstasandil. Teisiti öeldes, me otsime niisuguseid piirkondi z-tasandil, kus saame antud mitmest funktsiooni vaadelda ühesena. Sellise olukorrani jõuaksime, kui eraldaksime kõik vaadeldava funktsiooni Riemanni pinna lehed. Funktsiooni $w = \sqrt[n]{z}$ Riemanni pinna üksikud lehed saaksime eraldada näiteks sel viisil, et lõikaksime selle pinna kõik lehed läbi piki reaaltelje negatiivset osa. Sel juhul ei oleks meil enam võimalik liikuda ühelt lehelt teisele (lõikejoon jääb ette). Me saavutame olukorra, kus igale lehele vastavad kindlad juure väärtused. Nii on I lehe puhul $-\pi < \operatorname{Arg} z < \pi$ ning seega $\theta \in (-\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{n})$, II lehe puhul aga $\pi < \operatorname{Arg} z < 3\pi$ ning $\theta \in (\frac{\pi}{n}, \frac{3\pi}{n})$ jne.jne. Viimase lehe puhul $(2n-3)\pi < \operatorname{Arg} z < (2n-1)\pi$ ja $\theta \in (\frac{2n-3}{n}\pi, \frac{2n-1}{n}\pi)$.

Sel viisil saame mitmesest funktsioonist $w = \sqrt[n]{z}$ kokku n erinevat ühest funktsiooni:

$$w = \sqrt[n]{z}, \quad \frac{2k-1}{n}\pi < \operatorname{Arg} z < \frac{2k+1}{n} \quad (k = 0, 1, 2, \dots n-1).$$

Neid funktsioone nimetatakse antud mitmese funktsiooni üheseks harudeks. Esimest neist $(k=0)$ nimetatakse juurfunktsiooni peaharuks. Punkte, millel leidub niisugune ümbrus, kus ümber selle punkti liikudes mööda mistahes kinnist kõverat jõuame mitmese funktsiooni ühe haru juurest teise juurde, nimetatakse selle funktsiooni harunemispunktideks. Funktsioonil $w = \sqrt[n]{z}$ on need 0 ja ∞.

K ü s i m u s e d .

1. Veenduda, et $\sqrt[n]{z}$ väärtused asuvad korrapärase n-nurga tippudes, mille keskpunkt asub koordinaatide alguses.
2. Mitu harunemispunkti on juurfunktsioonil?
3. Kus asuvad juurfunktsiooni peaharu väärtused ?
4. Mitmeleheline on funktsiooni $w = \sqrt[3]{z}$ Riemanni pind ?
5. Kuidas on seotud omavahel mitmese funktsiooni harunemispunktid ning tema Riemanni pinna harunemispunktid?
6. Millised on funktsiooni $w = \sqrt{z^2 - 1}$ harunemispunktid ?

Ü l e s a n d e d.

1. Leida mitmese funktsiooni $w = \sqrt[4]{z - 1}$ see haru, mille puhul $w(2) = -1$.
2. Konstrueerida funktsiooni $w = \sqrt{z(z+1)}$ Riemanni pind.
3. Milleks teisendab joonega $y = 2(1 + \cos\varphi)\sin\varphi$,

   $x = 2(1 + \cos\varphi)\cos\varphi$ piiratud piirkonna funktsiooni $w = \sqrt{z}$ see haru, mille väärtused x-telje positiivses osas on positiivsed ?

   Vastus: $u^2 + v^2 < 2u$.
4. Arvutada funktsiooni $w = \sqrt[6]{z - i}$ kõikide harude väärtused punktides

$$z_1 = 32 + i\ ,\quad z_2 = -1 + i\ ,\quad z_3 = 1\ .$$

§ 3. Eksponentfunktsioon.

Vastavalt matemaatilise analüüsi kursusest tuntud Euleri valemile

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y .$$

Reaalarvude puhul tuntud eksponentfunktsiooni omadusi arvestades on loomulik defineerida

(1) $$e^{z} = e^{x} \cdot e^{iy},$$

sest $z = x + iy$.

Võrdusest (1) saame, et

$$|e^{z}| = e^{x} \quad \text{ning} \quad \operatorname{Arg} e^{z} = y + 2k\pi .$$

Sellest tuleneb, et $e^{z_1} = e^{z_2}$, kui $\operatorname{Im} z_1 - \operatorname{Im} z_2 = 2k\pi$, s.t. e^{z} on perioodiline perioodiga $2\pi i$.

Kui vaatleme funktsiooni

$$w = e^{z},$$

mida nimetatakse eksponentfunktsiooniks, siis järeldub eelmisest märkusest, et see funktsioon pole üheleheline. Niisiis tekib ka eksponentfunktsiooni puhul küsimus tema väärtuste Riemanni pinna konstrueerimisest. Enne selle juurde asumist aga näitame, et eksponentfunktsioon on diferentseeruv. Selleks leiame võrdustest

$$w = u + iv = e^{z} = e^{x}(\cos y + i \sin y),$$

et

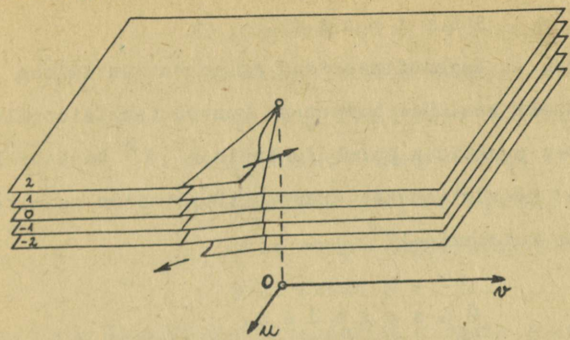
$$u = e^{x} \cos y \quad \text{ja} \quad v = e^{x} \sin y .$$

Vahetu kontroll näitab, et Cauchy-Riemanni võrrandid on rahuldatud iga x ja y korral, s.t. eksponentfunktsioon on kõikjal diferentseeruv.

Konstrueerime nüüd eksponentfunktsiooni väärtsuste Riemanni pinna. Selleks paneme tähele, et x-telg teiseneb u-telje positiivseks osaks. Tõepoolest, x-telje punktide puhul $y = 0$,s.t. $\arg w = 0$, ning $-\infty < x < \infty$, s.t. $0 < |w| = e^{x} < \infty$. Iga x-teljega paralleelse sirge kujutiseks on aga w-tasandi nullpunktist lähtuv kiir, mille polaarnurk võrdub selle sirge kaugusega x-teljest.

Kui nihutame z-tasandil sirget paralleelselt x-teljega ülespoole, siis pöördub vastavaks kujutiseks olev kiir vastupidi kellaosuti liikumisele. Selline kiir katab kogu w-tasandi, kui sirge z-tasandil katab riba laiusega 2π. Kui sirge katab järgmise riba laiusega 2π , siis katab kujutiskiir uuesti kogu w-tasandi jne.jne. Kui me aga liiguksime sirgega z-tasandil allapoole, siis liiguks kujutiskiir ainult kellaosuti liikumise suunas, kuid muus osas analoogiliselt eelnevaga.

Sellest arutelust saame, et eksponentfunktsiooni väärtuste Riemanni pind peab olema lõpmatuleheline. Need lehed peavad olema ühendatud nii, et x-teljega paralleelse sirge pidevale liikumisele vastaks kujutiskiire pidev liikumine mööda vastavat Riemanni pinda. Selle saavutamiseks võtame lõpmata palju w-tasandi eksemplare, lõikame nad läbi piki reaaltelje positiivset osa. Iga eksemplari lõike alumise serva ühendame järgmise eksemplari lõike ülemise servaga ning ülemise serva eelmise eksemplari alumise servaga (vt. joon. 16).



Joon. 16.

Kui kujutleda seda Riemanni pinda $\mathcal{R}$ asetsevana mingi w-tasandi kohal, siis asub iga w-tasandi punkti kohal lõpmata palju pinna $\mathcal{R}$ punkte. Erandeiks on vaid $w = 0$ ja $w = \infty$, mille kohal on vaid üks pinna $\mathcal{R}$ punkt.

Kui läbida z-tasandi sirge $x = a$, siis pinnal $\mathcal{R}$ vastab sellele liikumine ümber punkti $w = 0$ (lõpmata palju kordi), kusjuures liigutakse pinna $\mathcal{R}$ ühelt lehelt teisele. Seda liikumist võime aga vaadelda ka liikumisena ümber punkti $w = \infty$. Seetõttu nimetatakse punkte $w = 0$ ja $w = \infty$ vaadeldava pinna $\mathcal{R}$ lõpmata järku harunemispunktideks.

Vaadeldes funktsiooniga $w = e^z$ teostatavat kujutust konformsuse seisukohalt, näeme, et see funktsioon teostab igas punktis konformse kujutise, sest $(e^z)' = e^z \neq 0$ iga z puhul. Selle kujutuse puhul, nagu nägime, kujutub riba $0 < \operatorname{Im} z < \pi$ ülemisele pooltasandile ning riba $0 < \operatorname{Im} z < 2\pi$ kogu tasandiks väljalõikega piki reaaltelje positiivset osa.

K ü s i m u s i .

1. Veenduda, et äsjadefineeritud eksponentfunktsioon e^z on üldistuseks analüüsi kursusest tuntud funktsioonile e^x.
2. Millistes punktides surub funktsioon e^z tasandi kokku?
3. Millise pöörde teostab eksponentfunktsioon reaaltelje punktide kujutamisel?

Ü l e s a n d e d.

1. Näidata, et $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$.
2. Milleks teisenevad kujutamisel funktsiooniga $w = e^z$
   a) jooned $x = C$, $y = C$;
   b) sirged $y = kx + b$;
   c) riba $\alpha < y < \beta$ $(0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi)$;
   d) sirgete $y = x$ ja $y = x + 2\pi$ vahel asuv riba;
   e) poolriba $x < 0$, $0 < y < \alpha \leq 2\pi$;
   f) poolriba $x > 0$, $0 < y < \alpha \leq 2\pi$;
   g) ristkülik $\alpha < x < \beta$, $\gamma < y < \delta$ $(\delta - \gamma \leq 2\pi)$.

   Vastus: a) $\rho =$ const, $\theta =$ const;
   b) spiraal $e^{\frac{\theta - b}{k}}$, kui $k \neq 0$,
   kiir $\theta = b$, kui $k = 0$;
   c) nurk $\alpha < \theta < \beta$ (kui $\alpha = 0$ ja $\beta = 2\pi$, siis kogu tasand, lõikega piki reaaltelje positiivset osa);
   d) kogu tasand, lõikega mööda spiraali $\rho = e^\theta$;
   e) sektor $\rho < 1$, $0 < \theta < \alpha$ (kui $\alpha = 2\pi$, siis

ühikring, lõikega piki punkte 0 ja 1 ühendavat raadiust);

f) piirkond $\rho>1, 0<\theta<\alpha$ (kui $\alpha=2\pi$, siis ühikringi väline piirkond, lõikega piki reaaltelje positiivset osa punktist 1 kuni $+\infty$);

g) piirkond $e^{\alpha}<\rho<e^{\beta}, \gamma<\theta<\delta$ (kui $\delta-\gamma=2\pi$, siis rõngas ümber nullpunkti lõikega piki kiirt $\theta=\gamma$).

3. Kujutada ülemisele pooltasandile sirgete $y=x$ ja $y=x+h$ vaheline piirkond.

Vastus: $w=e^{\frac{\pi(1-i)z}{h}}$.

4. Milleks teisendab funktsioon $w=e^{z}$ riba $0<\operatorname{Im} z<\pi$, lõikega piki punkte 0 ja $\frac{\pi}{2}i$ ühendavat sirglõiku ?

Vastus: Ülemine pooltasand, millest on välja jäetud ühikringjoone esimese veerandi osa.

§ 4. Logaritmfunktsioon.

Kompleksarvu z logaritmiks $\operatorname{Ln} z$ nimetatakse kompleksarvu w, mille puhul $z=e^{w}$. Olgu $z=re^{i\varphi}$ ning $w=u+iv$. Sel juhul

$$re^{i\varphi}=e^{u}\cdot e^{iv},$$

s.t. $e^{u}=r$ ning $v=\varphi+2k\pi$. Sellest saame, et

(1) $$w=\operatorname{Ln} z=u+iv=\ln r+i(\varphi+2k\pi),$$

ehk teisiti

$$(2) \qquad \mathcal{L}n\, z = \ln|z| + i\,(\arg z + 2k\pi).$$

Seega näeme, et kompleksarvude vallas on logaritmil lõpmata palju väärtusi. Teiselt poolt: seosest (2) ilmneb, et kompleksarvude puhul eksisteerib logaritm igasugusest arvust z, välja arvatud vaid 0 ja ∞.

Funktsiooni $w = \mathcal{L}n\, z$ nimetatakse logaritmfunktsiooniks. Viimane osutub eksponentfunktsiooni pöördfunktsiooniks, kusjuures kehtivad seosed

$$e^{\mathcal{L}n\, z} = z \quad \text{ning} \quad \mathcal{L}n\, e^{z} = z + 2k\pi i.$$

Et logaritmfunktsioon on eksponentfunktsiooni pöördfunktsiooniks, siis kujutab see viimase väärtuste Riemanni pinna (vt. joon.14) üks-üheselt komplekstasandile. Seda pinda nimetatakse samuti logaritmfunktsiooni Riemanni pinnaks. Punktid $z = 0$ ja $z = \infty$ on selle pinna harunemispunktideks. Neid nimetatakse <u>logaritmilisteks harunemispunktideks</u>.

Osutub, et logaritmfunktsioonil on oma Riemanni pinna igas punktis (välja arvatud $z = 0$ ja $z = \infty$) tuletis. Seda võib kergesti kontrollida Cauchy-Riemanni võrrandite (polaarkoordinaatides) abil, kui arvestada seost (1).

Et logaritmfunktsioon (vaadelduna komplekstasandil) on lõpmata mitmene, siis huvitab meid ka siin tema regulaarsete (s.t. üheste ja diferentseeruvate) harude eraldamine. Nende harude analüütilised avaldised saame seosest (2) kordaja k erinevate väärtuste puhul. Haru, mille saame $k = 0$ puhul, nimetatakse <u>logaritmfunktsiooni peaharuks</u> ning tähistatakse

(3) $$\ln z = \ln|z| + i \arg z.$$

Rakendustes kasutatakse enamikus seda.

Logaritmfunktsiooni analüütilisest avaldisest (2) on kerge näha, et'tema harude eraldamine on võimalik nendes piirkondades, kus on eraldatavad $\operatorname{Arg} z$ üksikud väärtused. See on aga võimalik z-tasandil, millest on välja lõigatud reaaltelje negatiivne osa. Kui vaatleme logaritmi harude eraldamist tema Riemanni pinnal, siis toimub see täiesti analoogiliselt juurfunktsiooni juhuga. Ka siin lõikame Riemanni pinna lehed läbi piki reaaltelje negatiivset osa. Sellega on lehed üksteisest eraldatud, sest ei ole võimalik liikuda ühelt lehelt teisele ilma lõiget ületamata.

Peaharule vastab sel juhul Riemanni pinna see osa, mis asub lehe 0 ülemisel poolel ning lehe (-1) alumisel poolel (vt. joon.14). Need kaks osa moodustavad tasandi, millest on vaid välja lõigatud reaaltelje negatiivne osa. Seega võime öelda, et funktsioon (3) kujutab kogu z-tasandi, lõikega piki reaaltelje negatiivset osa, ribaks $-\pi < \operatorname{Im} w < \pi$ ning ülemise pooltasandi ribaks $0 < \operatorname{Im} w < \pi$. Selline kujutus on konformne, kuna iga z puhul $(\ln z)' = \frac{1}{z} \neq 0$.

K ü s i m u s i .

1. Milliste z väärtuste korral on $\ln z$ puhtimaginaarne ?
2. Millised on negatiivsete arvude logaritmid ?
3. Millises omavahelises seoses on logaritmfunktsiooni üksi-

kute harude tuletised?

4. Millistes punktides teostab logaritmi peaharu tasandi pöörde nurga π võrra ?

5. Millistes punktides surub logaritmfunktsioon tasandi kokku?

6. Millistel tingimustel kehtivad seosed:

a) $\ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2$,

b) $\ln \frac{z_1}{z_2} = \ln z_1 - \ln z_2$,

c) $\ln z^n = n \ln z$.

Ü l e s a n d e d .

1. Arvutada logaritm ja tema peaväärtus järgmistest avaldistest:

a) $(1+i)^6$, c) $(-1+i)(-1+i\sqrt{3})$,

b) $(1-i\sqrt{3})^4$, d) $\frac{1-i}{(3+i\sqrt{3})^2}$.

Vastus: Peaväärtused: a) $3\ln 2 - i\frac{\pi}{2}$,

b) $4\ln 2 + i\frac{2\pi}{3}$,

c) $\frac{3}{2}\ln 2 - i\frac{5\pi}{12}$,

d) $\frac{1}{2}\ln 2 - \ln 12 - i\frac{7\pi}{12}$.

2. Tõestada seosed:

a) $\operatorname{Ln}(z_1 z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2$,

b) $\operatorname{Ln} \frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2$,

c) $\operatorname{Ln} e^z = z + 2k\pi i$.

3. Milleks teisendab funktsioon $w = \ln z$

a) jooned $|z| = R$;

b) jooned $\arg z = \varphi$;

c) nurga $0 < \arg z < \alpha \leq 2\pi$;

d) sektori $|z| < 1$, $0 < \arg z < \alpha \leq 2\pi$;

e) rõnga $r_1 < |z| < r_2$, lõikega piki lõiku $[r_1, r_2]$.

Vastus: a) $u = C$;

b) $v = C$;

c) riba $0 < v < \alpha$;

d) poolriba $u < 0$, $0 < v < \alpha$;

e) ristkülik $\ln r_1 < u < \ln r_2$, $0 < v < 2\pi$.

4. Konstrueerida funktsiooni $w = \mathrm{Ln}\, z(z-1)$ Riemanni pind.

§ 5. Üldine astmefunktsioon.

Üldiseks astmefunktsiooniks nimetatakse funktsiooni

(1) $$w = z^a = e^{a \,\mathrm{Ln}\, z},$$

kus $a = \alpha + i\beta$. Kui arvestame logaritmi avaldist, siis saame seosest (1), et

(2) $$z^a = e^{(\alpha + i\beta)\mathrm{Ln}\, z} = e^{\alpha \ln r - \beta(\varphi + 2k\pi)} \cdot e^{i[\alpha(\varphi + 2k\pi) + \beta \ln r]},$$

kus $r = |z|$ ja $\varphi = \arg z$.

Seosest (2) selgub, et $\beta \neq 0$ puhul on z^a lõpmata mitmene funktsioon. Kui aga $\beta = 0$,siis

(3) $$w = z^a = z^\alpha = e^{\alpha \ln r} \cdot e^{i\alpha(\varphi + 2k\pi)}.$$

Võrdusest (3) selgub, et

$$|w| = r^{\alpha} \quad \text{ning} \quad (\arg w)_k = \alpha(\varphi + 2k\pi) + 2p\pi .$$

Saadud tulemustest näeme, et ainult täisarvulise α korral on funktsioon z^{α} ühene, sest ainult sel juhul saame kõigi naturaalarvude k ja p puhul ühe ning sama kompleksarvu argumendiga $\alpha\varphi = \alpha\varphi$.

Ratsionaalarvulise $\alpha = \frac{m}{n}$ puhul saame n oluliselt erinevat argumendi väärtust:

$$\theta_0 = \varphi, \ \theta_1 = \alpha\varphi + \frac{m}{n}2\pi, \ \ldots, \ \theta_{n-1} = \alpha\varphi + \frac{m}{n}(n-1)2\pi .$$

Kui α on irratsionaalarv, siis saame iga k puhul oluliselt erineva argumendi väärtuse, sest siis kehtib iga täisarvu n puhul järgmine seos:

(4) $$\alpha(\varphi + 2k_1\pi) - \alpha(\varphi + 2k_2\pi) \neq 2n\pi .$$

Üldise astmefunktsiooni definitsiooni põhjal saame, et selle funktsiooni üheseid harusid võib eraldada samas piirkonnas, kus see oli võimalik logaritmfunktsiooni puhul. Niisiis $w = z^{\alpha}$ on regulaarne komplekstasandil, millest on välja lõigatud reaaltelje negatiivne osa.

Kui üldise astmefunktsiooni avaldises võtame logaritmi peaharu, siis saame ühese funktsiooni, mida nimetatakse üldise astmefunktsiooni peaharuks:

(5) $$w = z^{\alpha} = e^{\alpha \ln z} .$$

Sel korral saame liitfunktsiooni diferentseerimise reegli kohaselt

$$\frac{dw}{dz} = \frac{d}{dz} z^{a} = \frac{d}{dz} e^{a \ln z} = e^{a \ln z} \cdot \frac{a}{z} = a z^{a-1}.$$

Siit näeme, et vaadeldav funktsioon teostab konformse kujutamise oma regulaarsuse piirkonna igas punktis (punktid $z=0$ ja $z=\infty$ kuuluvad väljalõikele). Millist laadi on see konformne kujutus ? Selle määramiseks kasutame seost (5), mille kohaselt (olgu konkreetsuse mõttes $a>0$)

$$w = e^{z_2}, \text{kus } z_2 = a z_1 \quad \text{ning} \quad z_1 = \ln z .$$

Vaatleme, milline piirkond teiseneb w-tasandi ülemiseks pooleks. Eksponentfunktsiooni omaduste tõttu on selleks z_2-tasandi riba $0 < \operatorname{Im} z_2 < \pi$. Viimase originaaliks z_1-tasandil on riba $0 < \operatorname{Im} z_1 < \frac{\pi}{a}$. Selle riba originaaliks z-tasandil on aga nurk $0 < \arg z < \frac{\pi}{a}$. Seega saimegi piirkonna, mis teiseneb funktsiooniga $w = z^{a}\ (a>0)$ ülemiseks pooltasandiks.

K ü s i m u s i .

1. Kuidas defineerida üldine eksponentfunktsioon a^{z}, kasutades analoogiat üldise astmefunktsiooniga? Kas see funktsioon on ühene või mitmene ?
2. Kas $\beta \neq 0$ korral on üldine astmefunktsioon lõpmata mitmene?

Ü l e s a n d e d.

1. Milline on ülemise pooltasandi originaal kujutamisel funktsiooni $w = z^{a} (a>0)$ peaharuga ?

   Vastus: $\frac{\pi}{a} < \arg z < 0$.

2. Milline on ülemise pooltasandi originaal kujutamisel funktsiooni $w = z^a$ ($a = \alpha + i\beta$ mistahes kompleksarv) peaharuga ?

Vastus: $0 < \beta \ln|z| + \alpha \arg z < \pi$.

3. Tõestada seos (4), kui a on irratsionaalarv.

§ 6. Lineaarne funktsioon.

Juba II peatüki näidetes uurisime lineaarse funktsiooniga

(1) $$w = az + b$$

teostatava kujutise iseloomu. Teeme siinkohal veel mõned märkmed selles suunas. On loomulik eeldada, et $a \neq 0$,s.t. $w' = a \neq 0$. Sellest aga järeldub, et lineaarne funktsioon teostab kõikjal konformse kujutamise.

Märgime veel, et lineaarne funktsioon kujutab iga ringjoone jälle ringjooneks. Tõepoolest, kui meil on ringjoon

$$|z - z_0| = r ,$$

siis seose (1) põhjal saame, et kujutispunktid rahuldavad võrrandit

$$\left| \frac{w - b}{a} - z_0 \right| = r$$

ehk siit

$$|w - w_0| = |a| r ,$$

kus $w_0 = az_0 + b$. Sellest arutelust järeldub, et ringjoone keskpunkt teiseneb kujutisringjoone keskpunktiks ning raadius muutub teguri $|a|$ kordselt.

Näitame veel, et iga sirge teiseneb sirgeks, kusjuures lähtesirge suhtes sümmeetrilised punktid teisenevad kujutissirge suhtes sümmeetrilisteks punktideks. Olgu meil mingi sirge suhtes kaks sümmeetrilist punkti z_1 ja z_2. Sel juhul on see sirge määratud võrrandiga

$$(2) \qquad |z - z_1| = |z - z_2| .$$

Asendades selles võrrandis z seose (1) põhjal, saame võrduse

$$\left| \frac{w-b}{a} - z_1 \right| = \left| \frac{w-b}{a} - z_2 \right| ,$$

millest

$$(3) \qquad |w - w_1| = |w - w_2| ,$$

kus $w_1 = az_1 + b$ ja $w_2 = az_2 + b$. Võrrandist (3) järeldub, et sirge (2) teiseneb sirgeks, kusjuures punktide z_1 ja z_2 kujutispunktid w_1 ja w_2 on sümmeetrilised sirge (3) suhtes.

Mõnevõrra hiljem näitame, et ka ringjoone suhtes sümmeetrilised punktid teisenevad kujutisringjoone suhtes sümmeetrilisteks punktideks. Selle saame järeldusena murdlineaarse funktsiooni vastavast omadusest.

K ü s i m u s i .

1. Millise mastaabi muutuse ja millise tasandi pöörde teostab lineaarne funktsioon ?
2. Milline lineaarne funktsioon jätab mastaabi muutumatuks? Millise korral on tasandi pööre võrdne nulliga igas punk-

tis ?

3. Milline lineaarne funktsioon teisendab nullpunkti suhtes kontsentrilised ringjooned jälle nullpunkti suhtes kontsentrilisteks ringjoonteks ?

Ülesanded.

1. Leida lineaarne funktsioon, mis jätab paigale punkti $1+2i$ ning punkti i teisendab punktiks $-i$.

   Vastus: $w = (2+i)z + 1 - 3i$.

2. Leida üldine kuju niisugusele lineaarsele funktsioonile, mis täidab ühte järgmistest tingimustest:

   a) kujutab ülemise pooltasandi iseendaks;

   b) kujutab alumise pooltasandi ülemiseks pooltasandiks;

   c) kujutab ülemise pooltasandi parempoolseks pooltasandiks;

   Vastus: a) $w = az + b$, b) $w = -az + b$,

   c) $w = -i(az+b)$, kus a ja b on reaalarvud ning $a>0$.

3. Leida lineaarne funktsioon, mis

   a) teisendab riba $0<x<1$ iseendaks;

   b) teisendab riba $-2<y<1$ iseendaks.

   Vastus: a) $w = z + bi$ või $w = -z + 1 + bi$;

   b) $w = z + b$ või $w = -z - i + b$.

4. Leida lineaarne funktsioon, mis teisendab ühikringi ringiks $|w - w_0| < R$ selliselt, et horisontaalne diameeter teiseneks diameetriks, mis moodustab reaalteljega nurga α.

Vastus: $w = e^{i\alpha}Rz + w_0$, $w = e^{-i\alpha}R\bar{z} + w_0$,

$w = -e^{i\alpha}Rz + w_0$ või $w = -e^{-i\alpha}R\bar{z} + w_0$.

§ 7. Funktsioon $w = \frac{1}{z}$.

Vaatleme järgnevalt funktsiooni $w = \frac{1}{z}$, mis on määratud iga nullpunktist erineva z puhul. Kui aga vaadelda laiendatud komplekstasandit, siis võime öelda, et funktsioon $w = \frac{1}{z}$ on määratud igas punktis (sel juhul $\frac{1}{0} = \infty$). Et $w' = -\frac{1}{z^2} \neq 0$, siis teostab vaadeldav funktsioon igas punktis konformse kujutuse. Vaatleme, millist laadi on see kujutus. On selge, et siin iga sirge ei teisene sirgeks. Tõepoolest, iga sirge läbib lõpmatuspunkti. Lõpmatuspunktiks aga teiseneb nullpunkt. Seega võib sirgeks teiseneda ainult niisugune joon, mis läbib nullpunkti.

Osutub aga, et vaadeldav funktsioon teisendab iga ringjoone ja sirge jälle ringjooneks või sirgeks, kusjuures sirge võib teiseneda ringjooneks ning vastupidi. Selle tõestuseks lähtume sirgete ja ringjoonte ühisest võrrandist (vt. § 1.3, ülesanded 5 ja 6)

(1) $$a z\bar{z} + \bar{A}z + A\bar{z} + b = 0,$$

kus A on kompleksarv, a ja b – reaalarvud, ning on täidetud võrratus

(2) $$|A|^2 - ab > 0.$$

Antud funktsiooni korral $z = \frac{1}{w}$, mistõttu võrrandist (1) saame, et

$$b w\bar{w} + \bar{A}\bar{w} + Aw - a = 0 .$$

Ka see on ringjoone või sirge võrrand, sest tingimus (2) on selle puhul täidetud.

Arvestades, et ringjoonte ja sirgete ühisest hulgast ainult viimased läbivad lõpmatuspunkti, saame, et sirgeteks teisenevad funktsiooniga $w = \frac{1}{z}$ kõik need, ja ainult need sirged ning ringjooned, mis läbivad nullpunkti.

Kui uurida lähemalt funktsiooniga $w = \frac{1}{z}$ teostatava kujutuse iseloomu, siis paneme tähele, et ühikring jääb selle kujutuse puhul paigale. Paigale jäävad ka punktid $z = 1$ ja $z = -1$. Viimaseid nimetatakse antud funktsiooni <u>püsipunktideks</u>. Ühikringi iga sisepunkt teiseneb välispunktiks ning vastupidi, kusjuures

$$\arg w = -\arg z .$$

K ü s i m u s i .

1. Millised jooned teisenevad funktsiooniga $w = \frac{1}{z}$ nullpunkti läbivateks joonteks?
2. Millistes punktides ei pöördu tasand kujutamisel funktsiooniga $w = \frac{1}{z}$? Millistes punktides ei muutu mastaap?
3. Kas funktsiooniga $w = \frac{1}{z}$ teostatav kujutus on üks-ühene?

Ü l e s a n d e d.

1. Milleks teisendab funktsioon $w = \frac{1}{z}$

   a) ringjoonte $x^2 + y^2 = ax$ pere;

b) ringjoonte $x^2+y^2=by$ pere;

c) sirged $y = x + b$;

d) sirged $y = mx$;

e) punkti $z_0 \neq 0$ läbivad sirged;

f) parabooli $y = x^2$.

Vastus: a) sirged $u = \frac{1}{a}$, b) sirged $v = -\frac{1}{b}$,

c) ringjooned $b(u^2+v^2)+u+v=0$,

d) sirged $v = -mu$,

e) punkte $w_0 = \frac{1}{z_0}$ ja $w=0$ läbivate ringjoonte pere,

f) $u^2 = \frac{v^3}{v+1}$.

§ 8. Murdlineaarne funktsioon.

Järgnevas vaatleme nn. murdlineaarset funktsiooni

$$w = \frac{az+b}{cz+d}, \tag{1}$$

millel on kompleksmuutuja funktsioonide teoorias küllaltki oluline koht. See seletub ühelt poolt tema huvitavate geomeetriliste omadustega, teiselt poolt aga mitmesuguste praktiliste rakendustega. Osutub nimelt, et seda funktsiooni saab kasutada väga mitmete oluliste konformsete kujutuste teostamiseks. Meie juba märkisime eelnevas, et üheks oluliseks piirkonnaks, millele kujutatakse teisi piirkondi, on ühikring. Käesolevas näeme, et igasugune ühikringi konformne kujutus iseendale on teostatav murdlineaarse funktsiooniga. Kui funktsiooni (1) avaldises teostada jagamine, siis saame

$$(2) \qquad w = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c(cz+d)} .$$

Viimasest avaldisest ilmneb, et on mõtet vaadelda vaid niisuguseid murdlineaarseid funktsioone, mille puhul $bc-ad \neq 0$. Samuti saame võrdusest (2), et funktsiooni (1) võib vaadelda järgmiste funktsioonide superpositsioonina:

$$z_1 = cz + d ,$$

$$z_2 = \frac{1}{z_1} ,$$

$$w = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c} z_2 .$$

Arvestades kahe eelmise paragrahvi tulemusi, võime öelda, et funktsioon (1) teostab igas punktis konformse kujutuse,mille suhtes ringjoonte ja sirgete ühine hulk on invariantne, s.t. iga sirge ja ringjoon teiseneb jälle kas ringjooneks või sirgeks. Et ainult punkt $z_1 = 0$, s.t. $z = -\frac{d}{c}$, teiseneb lõpmatuspunktiks, siis sirgeteks teisenevad vaid niisugused sirged ja ringjooned, mis läbivad punkti $z = -\frac{d}{c}$ .Viimast nimetatakse murdlineaarse funktsiooni (1) pooluseks.

Märgime ka, et iga sirge kujutis peab läbima punkti $w = \frac{a}{c}$, sest viimane on lõpmatuspunkti kujutiseks, nagu see kergesti järeldub seosest (2).

Et ka murdlineaarse funktsiooni pöördfunktsioon on murdlineaarne, siis võib iga sirge ja ringjoon olla vaid sirge või ringjoone kujutiseks.

Kui vaadelda murdlineaarse funktsiooni avaldist, siis märkame, et selles on kolm sõltumatut kordajat (neljandaga võime murru lugeja ja nimetaja läbi jagada). Nende kolme kordaja, s.t. murdlineaarse funktsiooni määramiseks on vaja ette anda kolme punkti kujutised. Et aga kolm punkti määravad ringjoone, siis võime öelda, et murdlineaarne funktsioon on määratud ühe ringjoone kujutise etteandmisega. Niisiis määravad murdlineaarse funktsiooni seosed:

$$(3)\quad w_1 = \frac{az_1 + b}{cz_1 + d}, \quad w_2 = \frac{az_2 + b}{cz_2 + d}, \quad w_3 = \frac{az_3 + b}{cz_3 + d}.$$

Seostest (1) ja (3) järeldub, et

$$(4)\qquad \frac{w - w_1}{w - w_2} : \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} = \frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}.$$

Selle võrduse vasakul ja paremal pool seisvat avaldist nimetatakse nelja punkti liitsuhteks. Seos (4) ütleb, et nelja punkti liitsuhe on murdlineaarse teisenduse invariant. Et seda kontrollida, tuleb võrduste (1) ja (3) põhjal asendada võrduse (4) vasakul poolel w, w_1, w_2 ja w_3. Peale lihtsustamist saamegi võrduse (4) parema poole.

Seose (4) põhjal on hea leida sellist murdlineaarset funktsiooni, mis fikseeritud kolm punkti kujutab etteantud kolmeks punktiks. Kui mõni vaadeldavatest punktidest on ∞, siis asendame seda punkti sisaldava liikme arvuga 1.

Näide 1. Leida murdlineaarne funktsioon, mis punktid 2,1 ja ∞ teisendab vastavalt punktideks ∞, i ja 0.

Asendades antud arvu võrdusse (4), saame

$$\frac{1}{w - i} : \frac{1}{0 - i} = \frac{z - 2}{z - 1} : \frac{1}{1},$$

millest

$$\frac{-i}{w-i} = \frac{z-2}{z-1} .$$

Avaldades w ,saame

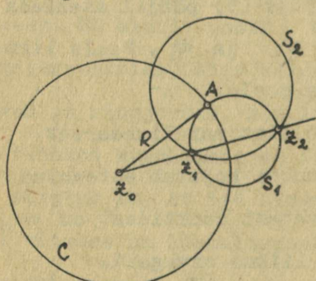
$$w = \frac{z-1}{i(z-2)} + i$$

ehk siit

$$w = -\frac{i}{z-2} .$$

Järgnevas näitame, et murdlineaarse funktsiooni puhul teisenevad ringjoone (või sirge) suhtes sümmeetrilised punktid kujutisjoone suhtes sümmeetrilisteks punktideks.

Meenutame, et punkte z_1 ja z_2 nimetatakse ringjoone $|z-z_0|=R$ suhtes <u>sümmeetrilisteks</u>, kui nad asuvad mingil keskpunktist lähtuval kiirel ning $|z_1-z_0|\cdot|z_2-z_0|=R^2$ (vt. joon. 17). Ülalmainitud murdlineaarse funktsiooni omadus järeldub kergesti järgmisest teoreemist.



Joon. 17.

<u>Teoreem</u>.Punktid on ringjoone suhtes sümmeetrilised parajasti siis, kui nad asuvad selle ringjoonega ortogonaalsete ringjoonte kimbu tippudes.

<u>Tarvilikkus</u>. Olgu punktid z_1 ja z_2 sümmeetrilised ringjoone C suhtes (vt. joon.17), s.t.

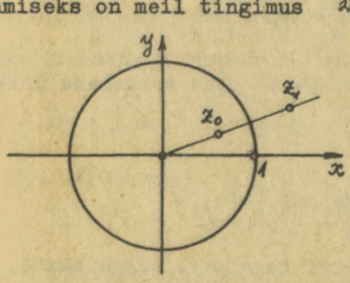
$$(5) \qquad |z_1-z_0|\cdot|z_2-z_0| = R^2 = |A-z_0|^2 .$$

Elementaargeomeetriast tuntud teoreemi (ringjoone puutuja ja lõikaja lõikude kohta) põhjal saame, et lõik Az_0 on ringjoone S_1 puutujaks, s.t. ringjooned C ja S_1 on omavahel risti .

Piisavus. Olgu ringjooned S_1 ja S_2 risti ringjoonega C . Ringjoonte S_1 ja S_2 lõikepunktidega z_1 ja z_2 määratud sirge (kimbu telg) on risti ringjoonega C ning läbib seega ringjoone C keskpunkti z_0 . Ülalmärgitud elementaargeomeetria teoreemi kohaselt saame nüüd, et on rahuldatud seos (5). Seega on punktid z_1 ja z_2 sümmeetrilised ringjoone C suhtes.

Näide 2. Leida funktsioon, mis kujutab ühikringi konformselt iseendaks, kusjuures punkt z_0 $(|z_0|<1)$ teiseneb nullpunktiks.

Et siin ringjoon peab teisenema ringjooneks (rajade vastavus), siis otsime vastavat funktsiooni murdlineaarsete funktsioonide hulgast. Selle murdlineaarse funktsiooni määramiseks on meil tingimus $w(z_0) = 0$. Et aga nullpunktile sümmeetriliseks punktiks ühikringjoone suhtes on ∞, siis peab punktiga z_0 sümmeetriline punkt z_1 (vt. joon.18) teisenema lõpmatuspunktiks, s.t. $w(z_1)=\infty$. Milline punkt on punktile z_0 sümmeetriline? Et antud juhul $|z_0|\cdot|z_1| = 1$,millest $|z_1| = \frac{1}{|z_0|}$, ning $\arg z_0=\arg z_1$,siis $z_1= \frac{1}{\bar{z}_0}$ .Seega



Joon. 18.

12.

Saadud kahe punkti z_0 ja $\frac{1}{\bar{z}_0}$ teisenduste järgi püüame määrata otsitavat murdlineaarset funktsiooni

(6) $$w = \frac{az+b}{cz+d}.$$

Vastavalt konformse kujutamise ühesuse teoreemile võime öelda, et otsitava funktsiooni puhul peab jääma määramatuks üks reaalne parameeter, sest meil ei ole fikseeritud pöörde suurus punktis z_0. Niisiis: me peame saama määrata murdlineaarse funktsiooni, milles esineb vaid üks reaalne parameeter.

Seosest

$$w(z_0) = \frac{az_0+b}{cz_0+d} = 0$$

saame, et $az_0+b=0$, s.t. $b=-az_0$. Teiselt poolt,

$$w\left(\frac{1}{\bar{z}_0}\right) = \frac{a\frac{1}{\bar{z}_0}+b}{c\frac{1}{\bar{z}_0}+d} = \frac{a+b\bar{z}_0}{c+d\bar{z}_0} = \infty,$$

s.t. $c+d\bar{z}_0=0$, millest $c=-d\bar{z}_0$. Asendamisel seosesse (6) saame, et

$$w = \frac{az-az_0}{-d\bar{z}_0 z+d} = \frac{a}{d}\,\frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}.$$

Et aga ühikringjoone punkt $z=1$ peab teisenema ühikringjoone punktiks, siis

$$|w(1)| = \left|\frac{a}{d}\right|\left|\frac{1-z_0}{1-\bar{z}_0}\right| = \left|\frac{a}{d}\right| = 1,$$

s.t. $\frac{a}{d}=e^{i\alpha}$, kus α on mingi reaalarv. Seega saame, et otsitavaks funktsiooniks on

(7) $$w = e^{i\alpha}\frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}.$$

Leides saadud funktsiooni tuletise punktis

$$w_0' = e^{i\alpha}\frac{1 - z_0\bar{z}_0}{(1 - \bar{z}_0 z)^2}\Bigg|_{z=z_0} = e^{i\alpha}\frac{1}{1 - |z_0|^2},$$

näeme, et $\arg w_0' = \alpha$, s.t. parameetri α määrab tasandi pööre punktis z_0.

Kui avaldada seosest (7) muutuja z, siis saame antud teisenduse pöördteisenduse, s.t. funktsiooni, mis teisendab ühikringi ühikringiks, kusjuures nullpunkt kujutub etteantud punktiks z_0 $(|z_0| < 1)$.

Näide 3. Kujutada ülemine pooltasand $\operatorname{Im} z > 0$ ühikringile $|w| < 1$ selliselt, et punkt z_0 $(\operatorname{Im} z_0 > 0)$ kujutub nullpunktiks.

Otsime seda funktsiooni jällegi murdlineaarsete funktsioonide hulgast, sest rajaks olev sirge peab teisenema ringjooneks. Et sel juhul rajade suhtes sümmeetrilised punktid peavad teisenema sümmeetrilisteks punktideks, siis

$$w(z_0) = 0 \quad \text{ning} \quad w(\bar{z}_0) = \infty .$$

Kui tähistame

$$w = \frac{az + b}{cz + d},$$

siis eelnevate tingimuste põhjal saame, et

$$az_0 + b = 0 \quad \text{ning} \quad c\bar{z}_0 + d = 0,$$

millest

$$w = \frac{a}{c} \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0} .$$

Et punkt $z = 0$ on originaalide piirkonna rajapunkt,siis peab tema kujutispunkt asuma ühikringjoonel. Seega saame,nagu eelmisegi näite puhul, et $\frac{a}{c} = e^{i\alpha}$,kus α on reaalne parameeter. Kokkuvõttes võime kirjutada, et otsitav funktsioon avaldub kujul

(8) $$w = e^{i\alpha} \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0} .$$

Leides selle funktsiooni pöördfunktsiooni, saame funktsiooni, mis teisendab ühikringi ülemiseks pooltasandiks, kusjuures $w(0) = z_0$ $(\operatorname{Im} z_0 > 0)$.

Näide 4. Leida funktsioon, mis teisendab konformselt ülemise pooltasandi iseendaks.

Sellise murdlineaarse funktsiooni saame, kui võtame valemis (4) z_k ja w_k $(k = 1, 2, 3)$ reaalseina. Peale vajalikke lihtsustusi saame, et

(9) $$w = \frac{az + b}{cz + d} ,$$

kus a, b, c, d on reaalarvud. Siinjuures teiseneb reaaltelg tõesti reaalteljeks. Ka ülemine pooltasand teiseneb ülemiseks pooltasandiks, kui punktidel z_k ning w_k on ühesugune järjestus (raja suund peab säilima!).

Vastupidi: kui kordajad a, b, c, d on reaalsed, siis teiseneb reaaltelg reaalteljeks. Et ka reaaltelje suund jääks püsima (siis teiseneb ülemine pooltasand ülemiseks pooltasandiks), selleks peab funktsiooni ϑ tuletise argument võrduma nulliga iga reaalarvulise z puhul, s.t. tuletis peab olema neis punktides positiivne.

Leides vastava tuletise, saame tingimusena, et

$$\vartheta' = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2} > 0$$

millest

$$ad - bc > 0. \tag{10}$$

Seega: ülemise pooltasandi iseendaks teisendab niisugune murdlineaarne funktsioon (9), mille kordajad on reaalsed ning täidavad tingimust (10).

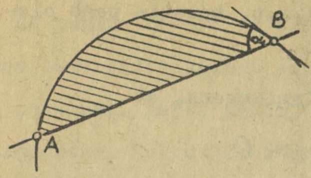
<u>Märkus:</u> Kuigi funktsiooni (9) avaldises on näiliselt 4 parameetrit – a, b, c ja d, on neist vaid 3 sõltumatut, sest ühega neist võiksime jagada nii murru lugejat kui ka nimetajat.

Arvestades sirgete ja ringjoonte invariantsust murdlineaarse funktsiooni puhul ning rajade vastavuse printsiipi, saab murdlineaarse funktsiooni kaasabil konformselt kujutada ülemisele pooltasandile (sealt edasi ka ühikringile) mitmesuguseid niisuguseid piirkondi, mis on piiratud sirgete ja ringjoontega. Illustreerime seda kahe järgneva näitega.

<u>Näide 5.</u> Leida funktsioon, mis kujutab kaksnurga ülemisele pooltasandile.

Kaksnurgaks nimetatakse piirkonda, mis on piiratud kahe lõikuva ringjoonega või siis ringjoone ja seda lõikava sirgega (vt. joon.19). Võtame kõigepealt funktsiooni

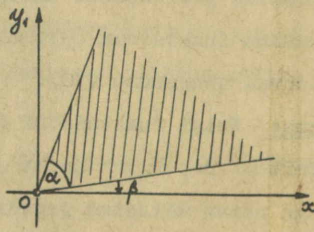
$$z_1 = \frac{z - A}{z - B}.$$



Joon.19.

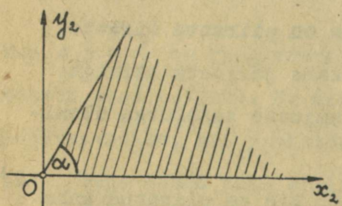
See funktsioon teisendab kaksnurka piiravad jooned nullpunkti (punkti A kujutist) läbivateks sirgeteks (vt. joon.20), kusjuures nende sirgete vaheline nurk on võrdne kaksnurga nurgaga α.

Järgnevalt pöörame tasandit ümber nullpunkti nurga β võrra nii, et selle nurga üks haaradest asuks reaaltelje positiivsel osal ning sellest kui lähtehaarast mõõdetuna oleks nurk positiivne (vt. joon. 21). Selleks võtame



Joon.20.

$$z_2 = e^{i\beta} z_1.$$



Joon.21.

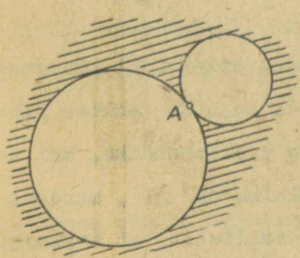
Nüüd rakendame üldist astmefunktsiooni ning kujutame saadud nurga ülemiseks pooltasandiks. On selge (vt. § 5 lõpp), et vajaliku astmefunktsiooni astendaja on $\frac{\pi}{\alpha}$.

Seega saimegi soovitud funktsiooni

$$v = z_2^{\frac{\pi}{\alpha}} = e^{i\frac{\beta\pi}{\alpha}}\left(\frac{z-A}{z-B}\right)^{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

Märkus. Et siin ei olnud antud normeerivaid tingimusi, siis ei ole see loomulikult ainus funktsioon, mis teostab vajaliku konformse kujutamise. On selge, et kui me kujutaksime veel ülemise pooltasandi iseendaks funktsiooniga $\omega = f(v)$, siis funktsiooni $f(v)$ muutmisega saaksime iga võimaliku funktsiooni, mis antud kaksnurga teisendab konformselt ω-tasandi ülemiseks pooleks. Et aga funktsioon $f(v)$ sisaldab kolme reaalset parameetrit, nagu nägime eelmises näites, siis näeme jällegi, et konformse teisenduse normeerimine tähendab kolme vaba reaalse parameetri määramist.

Näide 6. Kujutada ülemisele pooltasandile piirkond, mis on piiratud kahe puutuva ringjoonega (vt. joon.22).



Joon.22.

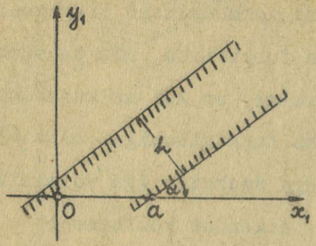
Selle funktsiooni leidmiseks kujutame vaadeldava piirkonna kõigepealt funktsiooniga

$$z_1 = \frac{1}{z-A}$$

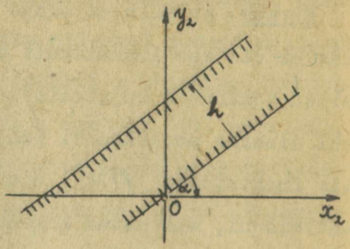
kahe paralleelse sirge vaheliseks ribaks (vt. joon. 23). Antud piirkonna kujutis z_1-tasandil on tõepoolest riba, sest selle kujutispiirkonna rajaks on nende ringjoonte kujutised – sirged, mille ainsaks ühiseks punktiks on punkti A kujutis – lõpmatuspunkt.

Edasi teostame paralleellükke, viies ühe riba piiravatest sirgetest nullpunkti läbivaks (vt. joon. 24). Seda saame teha funktsiooniga

$$z_2 = z_1 - a .$$



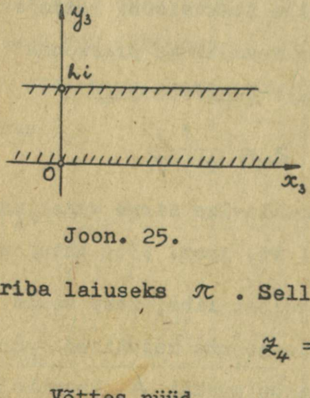
Joon. 23.



Joon. 24.

Järgnevalt pöörame tasandit nii, et riba üks serv asuks reaalteljel ning riba ise ülemises pooltasandis (vt. joon. 25). Selleks võtame

$$z_3 = e^{i\alpha} z_2 .$$



Joon. 25.

Pidades silmas, et eksponentfunktsioon kujutab taolise riba ülemiseks pooltasandiks, kui selle riba laius on π , muudame mastaapi selliselt, et saaksime riba laiuseks π . Selleks võtame

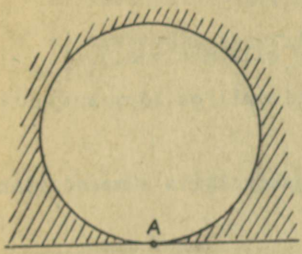
$$z_4 = \frac{\pi}{h} z_3 .$$

Võttes nüüd

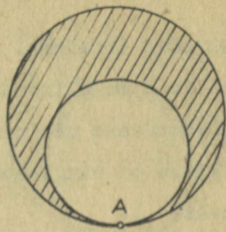
$$w = e^{z_4} ,$$

saamegi funktsiooni, mis meie etteantud piirkonna kujutab ülemiseks pooltasandiks.

Märkus 1. Ka siin nagu eelmiseski näites võib üks ringjoontest olla sirge (vt. joon. 26). Täpselt samasuguse skee-



Joon. 26.



Joon. 27.

mi alusel toimub ka joonisel 27 antud piirkonna kujutamine ülemisele pooltasandile.

Märkus 2. Ka siin ei olnud antud normeerivaid tingimusi, mistõttu saadud funktsioon ei ole ainus võimalikest. Nagu eelmise näite puhul, nii saame ka siin, et varieeruda võivad kolm reaalset parameetrit.

K ü s i m u s e d.

1. Mitme punkti kujutise etteandmisega on määratud murdlineaarne funktsioon ?
2. Millist punkti läbivad kõikide sirgete originaalid murdlineaarse teisenduse puhul ?
3. Millist punkti läbivad kõikide sirgete kujutised murdlineaarse teisenduse puhul ?
4. Punkti nimetatakse antud teisenduse püsipunktiks, kui ta jääb selle teisenduse puhul paigale. Veenduda, et igal

murdlineaarsel teisendusel on kaks püsipunkti, s.t. võrrandi

$$\frac{az+b}{cz+d} = z$$

lahendit (Erijuhul võivad need olla ühtivad.).

5. Millisel murdlineaarsel funktsioonil on lõpmatuspunkt kahekordseks püsipunktiks?
6. Milline on ringjoone suhtes keskpunktile sümmeetriline punkt?
7. Milline murdlineaarse funktsiooni kordajaist ei võrdu kindlasti nulliga, kui mingi ringjoon teiseneb sirgeks?
8. Mida võib öelda murdlineaarse funktsiooni kordajate kohta, kui nullpunkt on püsipunktiks?
9. Milles seisneb ringjoonte ja sirgete invariantsuse omadus murdlineaarse teisenduse puhul ?
10. Milline on parameetri α geomeetriline tähendus valemis (8)?

Ü l e s a n d e d .

1. Tõestada võrdus (4).
2. Näidata, et iga murdlineaarse funktsiooniga teostatav kujutus on igas punktis konformne.
3. Tõestada, et ringjoone suhtes sümmeetriliste punktide definitsioon on üldistuseks sirge suhtes sümmeetriale, kui sirget vaadelda lõpmatult suure raadiusega ringjoonena.
4. Leida murdlineaarne funktsioon, mis kujutab punktid 1 ,

∞, i

a) vastavalt punktideks $i, 1, 1+i$;

b) vastavalt punktideks $\infty, i, 1$;

c) vastavalt punktideks $0, \infty, 1$.

Vastus: a) $$w = \frac{(1+i)z + 1 + 3i}{(1+i)z + 3 + i},$$

b) $$w = \frac{iz + 2 + i}{z + 1},$$

c) $$w = \frac{1-i}{2}(z+1).$$

5. Leida ülemise pooltasandi kujutus iseendaks, kui

a) $w(0) = 1$, $w(1) = 2$ ja $w(2) = \infty$;

b) $w(0) = 1$, $w(i) = 2i$.

Vastus: a) $w = \dfrac{2}{2-z}$, b) $w = -2\dfrac{2z+1}{z-2}$.

6. Kujutada ühikring iseendale selliselt, et

a) $w(\frac{1}{2}) = 0$ ja $\arg w'(\frac{1}{2}) = 0$;

b) $w(\frac{i}{2}) = 0$ ja $\arg w'(\frac{i}{2}) = \frac{\pi}{2}$;

c) $w(0) = 0$ ja $\arg w'(0) = -\frac{\pi}{2}$;

d) $w(a) = a$ ja $\arg w'(a) = \alpha$.

Vastus: a) $w = \dfrac{2z-1}{2-z}$, b) $w = \dfrac{2iz+1}{2+iz}$,

c) $w = -iz$, d) $\dfrac{w-a}{1-\bar{a}w} = e^{i\alpha}\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}$.

7. Kujutada ülemine pooltasand ühikringiks selliselt, et

a) $w(i)=0$ ja $\arg w'(i) = -\frac{\pi}{2}$,

b) $w(2i)=0$ ja $\arg w'(2i) = 0$.

Vastus: a) $w = \dfrac{z-i}{z+i}$ b) $w = i\,\dfrac{z-2i}{z+2i}$.

8. Milleks teisendab funktsioon $w = \dfrac{2z-i}{2+iz}$ kompleksta- sandi esimese veerandi?

Vastus: ühikringi alumine pool.

9. Milleks teisendab funktsioon $w = \dfrac{z}{z-1}$ nurga $0<\arg z<\frac{\pi}{4}$?

Vastus: alumine pooltasand, millest on välja lõigatud ring $\left|w - \frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right| < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

10. Milleks teisendab funktsioon $w=-i\,\dfrac{z-1}{z+1}$ ühikringi ülemise poole?

Vastus: komplekstasandi esimene veerand.

11. Leida funktsioonid, mis teisendavad järgmised piirkonnad ülemisele pooltasandile:

a) $|z|<1$, $|z-i|<1$;

b) $|z|>2$, $|z-\sqrt{2}|<\sqrt{2}$;

c) $\operatorname{Im} z>1$, $|z|<2$;

d) $|z|<2$, $0<\arg z<\frac{\pi}{4}$;

e) $|z|>2$, $0<\operatorname{Arg} z<\frac{3}{2}\pi$;

f) kogu tasand, millest on välja lõigatud punkte $1+i$ ja $2+2i$ ühendav lõik;

g) $|z|<2$, $|z-1|>1$;

h) $|z|>2$, $|z-3|>1$;

i) ühikring, lõikega piki raadiust $[0,1]$;

j) ülemine pooltasand, lõikega piki lõiku $[0,ih]$ $(h>0)$;

k) kogu tasand, lõigetega piki poolsirgeid $(-\infty,-R]$ ja $[R,+\infty)$ $(R>0)$.

Vastus: a) $w=-\left(\frac{2z+\sqrt{3}-i}{2z-\sqrt{3}-i}\right)^{\frac{3}{2}}$;

b) $w=\left[\frac{z-\sqrt{2}(1-i)}{z-\sqrt{2}(1+i)}\right]^4$;

c) $w=-\left(\frac{z+\sqrt{3}-i}{z-\sqrt{3}-i}\right)^3$;

d) $w=\left(\frac{z^4+16}{z^4-16}\right)^2$;

e) $w=\left(\frac{\sqrt[3]{z}+\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{z}-\sqrt[3]{4}}\right)^2$;

f) $w=\left(\frac{z-1-i}{2+2i-z}\right)^{\frac{1}{2}}$;

g) $w=e^{2\pi i\frac{z}{z-2}}$;

h) $w=e^{\frac{2}{3}\pi i\frac{z-4}{z-2}}$;

i) $w = \left(\dfrac{\sqrt{z}+1}{\sqrt{z}-1}\right)^2$;

j) $w = \sqrt{z^2 + h^2}$;

k) $w = \left(\dfrac{z+R}{z-R}\right)^{\frac{1}{2}}$.

12. Teisendada piirkond $|z-a|<1$ $(a>1)$, $\operatorname{Re} z > 0$ konformselt rõngaks $1<|w|<2$. Millise a puhul on see võimalik ?

Vastus: $a = \dfrac{5}{4}$, $w = 2e^{i\alpha}\dfrac{4z-3}{4z+3}$ või

$w = e^{i\alpha}\dfrac{4z+3}{4z-3}$.

13. Teisendada piirkond $|z-3|>9, |z-8|<16$ konformselt rõngaks $r<|w|<1$. Millise r puhul on see võimalik ?

Vastus: $r = \frac{2}{3}$, $w = e^{i\alpha}\dfrac{2z}{z+24}$ või $w = e^{i\alpha}\dfrac{z+24}{3z}$.

§ 9. Žukovski funktsioon.

Selliselt nimetatakse funktsiooni

$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right). \tag{1}$$

Seda funktsiooni kasutas N.J.Žukovski (1847-1921) oma aerodünaamika-alastes uurimustes. Tema oli esimene, kes hakkas laialdaselt kasutama kompleksmuutuja funktsioonide teooria meetodeid hüdro- ja aeromehhaanikas. Tema tööd panid aluse lennuki tiiva ehituse teoreetilistele uurimustele. Käesolevas ei ole meil võimalik vastavate küsimuste juures isegi mitte põgusalt peatuda. Asjast huvitatu võib nendega esimest tutvust teha kasvõi raamatute [14] (vt. § 38), [7] (vt.ptk. VIII § 6 ning ptk. IX § 5) ja [15] (vt. ptk. III ja ptk. IV) põhjal.

Kui diferentseerida Žukovski funktsiooni, siis selgub, et ta teostab kõikides punktides konformse kujutamise (välja arvatud punktid $z = \pm 1$). Funktsioon (1) aga ei teosta üksühest kujutist, sest seos

$$z_1 + \frac{1}{z_1} = z_2 + \frac{1}{z_2}$$

on rahuldatud kahel juhul : $z_1 = z_2$ ning $z_1 = \frac{1}{z_2}$ .Seega teisenevad punktid z ja $\frac{1}{z}$ üheks ja samaks punktiks, s.t. meil on tegemist kahelehelise funktsiooniga. Et määrata piirkonda $\mathcal{D}$,kus Žukovski funktsioon teostab üks-ühese kujutise, peame valima piirkonna, mille kaks mistahes punkti ei rahulda seost $z_1 \cdot z_2 = 1$. Sellisteks piirkondadeks on $|z|<1$ ja $|z|>1$.

Selgitame, milleks teisendab Žukovski funktsioon piirkonna $|z|<1$. Samaks piirkonnaks teiseneb siis ka $|z|>1$, sest nende kahe piirkonna punktide vahel määrab seos $z_1 z_2 = 1$ üks-ühese vastavuse. Ringi $|z|<1$ kujutispiirkonna määramiseks vaatleme ringjoonte $|z| = r$ $(r<1)$ ning nende raadiuste $\arg z = \varphi$ $(0<r<1)$ kujutisi. Olgu $z = re^{i\varphi}$ ning $w = u + iv$, siis seosest (1) saame, et

$$u = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\varphi, \quad v = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\varphi. \tag{2}$$

Nende seoste põhjal võime öelda, et ringjoone $|z| = r$ kujutiseks on ellips pooltelgedega

$$a_r = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right) \quad \text{ja} \quad b_r = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r} - r\right).$$

Selle ellipsi fookused asuvad punktides $z = \pm 1$. Kui $r \to 0$, siis $a_r \to \infty$ ning $b_r \to \infty$. Kui aga $r \to 1$, siis $a_r \to 1$ ning $b_r \to 0$. Seega on ühikringjoone $|z| = 1$ kujutiseks kahekordne lõik $[-1, 1]$ (ühikringjoone ülemine pool kujutub lõiguks $[-1,1]$ ning samuti alumine pool).

Kui läbime ringjoone $|z| = r$ positiivses suunas lähtudes x-telje punktist $z = r$, siis läbitakse vastav ellips negatiivses suunas. Tõepoolest, kuna $r - \frac{1}{r} < 0$, siis $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ puhul $v < 0$. Sellest järeldub, et ühikringi ülemine pool teiseneb alumiseks pooltasandiks ning alumine pool ülemiseks.

Seega võime öelda, et piirkond $|z|<1$ teiseneb kogu tasandiks, millest on välja lõigatud lõik $[-1,1]$.

Kui vaatleme raadiuse $\arg z = \varphi$ kujutist, siis saame seoste (2) põhjal (elimineerides suuruse r), et selle määrab

$$\frac{u^2}{\cos^2\varphi} - \frac{v^2}{\sin^2\varphi} = 1 .$$

Saadud võrrand esitab hüperbooli, kusjuures ka selle hüperbooli fookused asuvad punktides $z = \pm 1$. Osutub aga, et raadius ei teisene mitte kogu hüperbooliks, vaid ainult selle teatavaks osaks. Tõepoolest, kui $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, siis saame seoste (2) põhjal, et $u > 0$ ning $v < 0$. Seega on esimeses veerandis asuva raadiuse kujutiseks neljandas veerandis asuv hüperbooli haru. Kui aga võtame sama raadiuse pikenduse kolmandas veerandis, s.t. φ asemel nurga $\varphi - \pi$, siis on selle kujutiseks teises veerandis asuv hüperbooli haru. Kui φ asemel võtta $-\varphi$ ning $\pi - \varphi$, siis saame vastavalt sama hüperbooli harud I ning III veerandis.

Me nägime, et punktid z_1 ja z_2 kujutuvad üheks ja samaks punktiks, kui $z_1 z_2 = 1$, s.t. $\arg z_1 = - \arg z_2$. Seega asub üheks ja samaks punktiks teisenevatest punktidest üks ülemises, teine alumises pooltasandis.

Eelnevas nägime, et ühikringi alumine pool teiseneb ülemiseks pooltasandiks ning ülemine pool alumiseks. Seda arvestades võime nüüd väita, et ülemise pooltasandi osa väljaspool ühikringi teiseneb kogu ülemiseks pooltasandiks ning alumise pooltasandi vastav osa kogu alumiseks pooltasandiks.

Kui tahame konstrueerida niisugust Riemanni pinda, millele Žukovski funktsioon teisendaks kogu z-tasandi üks-üheselt, siis tuleb võtta kaks w-tasandi eksemplari, lõigata nad lä-

14.

bi piki lõiku [-1, 1] ning ühendada lõigete servad nii, et ühe tasandi alumiselt poolelt liiguksime teise tasandi ülemisele poolele ja vastupidi. See on vajalik seetõttu, et ühikringjoon teiseneb lõiguks [-1 , 1] , kusjuures lähenemisele ühikringjoone ülemisele osale seestpoolt vastab kujutispunkti lähenemine lõigule [-1 , 1] altpoolt, väljastpoolt lähenemisele aga ülaltpoolt lähenemine. Ühikringjoone alumisele poolele lähenemisel on olukord vastupidine. Niisiis tuleb esimese tasandi lõike alumine serv ühendada teise tasandi lõike ülemise servaga ning vastupidi.

K ü s i m u s e d.

1. Milline on Žukovski funktsiooni pöördfunktsioon ?
2. Mitmene on Žukovski funktsiooni pöördfunktsioon ?
3. Millised on Žukovski funktsiooni pöördfunktsiooni harunemispunktid? Millist liiki need on ?
4. Milleks teisendab Žukovski funktsioon komplekstasandi esimese veerandi ?
5. Milleks teiseneb Žukovski funktsiooniga nullpunkti läbiv sirge ?

Ü l e s a n d e d .

1. Milleks kujutab Žukovski funktsioon

   a) piirkonna $1 < |z| < R$, $\operatorname{Im} z > 0$;

   b) piirkonna $R < |z| < 1$, $\operatorname{Im} z > 0$;

   c) piirkonna $\frac{1}{R} < |z| < R$, $\operatorname{Im} z > 0$, $\operatorname{Re} z > 0$;

   d) nurga $\frac{\pi}{2} - \alpha < \arg z < \frac{\pi}{2} + \alpha$ $(0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$.

Vastus: a) ülemine osa ellipsi

$$\frac{4u^2}{(R+R^{-1})^2}+\frac{4v^2}{(R-R^{-1})^2}=1$$ sisepiirkonnast;

b) alumine osa sama ellipsi sisepiirkonnast;

c) parempoolne osa sama ellipsi sisepiirkonnast, lõikega piki lõiku $[1, \frac{1}{2}(R+R^{-1})]$;

d) hüperbooli $\frac{u^2}{\sin^2\alpha}-\frac{v^2}{\cos^2\alpha}=1$ harudevaheline osa.

2. Kujutada ülemisele pooltasandile piirkonnad:

a) ühikring, lõikega piki lõiku $[\frac{1}{2}, 1]$;

b) ühikring, lõigetega piki raadiust $[-1, 0]$ ja lõiku $[\alpha, 1]$ $(0<\alpha<1)$;

c) ühikringi ülemine pool, lõikega piki lõiku $[0, \alpha i]$ $(0<\alpha<1)$;

d) ühikringi ülemine pool, lõikega piki lõiku $[\alpha i, i]$ $(0<\alpha<1)$.

Vastus: a) $w=\left[\frac{1+\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})}{\frac{5}{4}-\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})}\right]^{\frac{1}{2}}$;

b) $w=\left\{\frac{1}{2}\left[(a+\frac{1}{a})-(z+\frac{1}{z})\right]\right\}^{\frac{1}{2}}$;

c) $w=\frac{\left[(z^2+\frac{1}{z^2})+(\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2})\right]^{\frac{1}{2}}}{z+\frac{1}{z}}$;

d) $w=\left\{\frac{1}{2}\left[(\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2})+(z^2+\frac{1}{z^2})\right]\right\}^{\frac{1}{2}}$.

§ 10. Trigonomeetrilised ja hüperboolsed funktsioonid.

Euleri valemist

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

saame (kui x asemele võtame $-x$), et

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x .$$

Nende kahe seose põhjal

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \quad \text{ning} \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

Soovides laiendada funktsioonide "siinus" ja "koosinus" määramispiirkonda kompleksarvude juhule, on seda loomulik teha äsja saadud võrduste abil. Selleks asendame seal vaid reaalse muutuja x komplekse muutujaga z. Niisiis, defineerime funktsioonid "siinus" ja "koosinus" kompleksse argumendi korral võrdustega:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad \text{ning} \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} .$$

Olles selliselt defineerinud funktsioonid $\sin z$ ja $\cos z$, võime vahetult kontrollida, et nende funktsioonide puhul kehtivad järgmised omadused:

1° reaalse argumendi korral langevad need funktsioonid kokku keskkooli kursusest tuntud siinuse ja koosinusega;

2° nad on kõikjal kompleksastasandil regulaarsed, kusjuures

$$(\sin z)' = \cos z \quad \text{ning} \quad (\cos z)' = -\sin z \ ;$$

3° nende perioodiks on reaalarv 2π;

4° kehtivad tuttavad trigonomeetrilised seosed:

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1 \ , \ \sin 2z = 2\sin z \cos z \text{ jne.};$$

5° $\sin z$ on paaritu, $\cos z$ aga paarisfunktsioon.

Ei saa aga öelda, et kõik need trigonomeetriliste funktsioonide omadused säiliksid komplekse argumendi korral, mida me tunneme vastavatel funktsioonidel reaalse argumendi juhul. Nii teame, et iga reaalarvu x korral

$$|\sin x| \le 1 \quad \text{ja} \quad |\cos x| \le 1 .$$

See omadus ei ole aga kehtiv komplekse argumendi puhul. Nii näiteks,

$$\cos i = \frac{e + e^{-1}}{2} \approx 1{,}54 \quad \text{ning} \quad \sin i = \frac{e - e^{-1}}{2i} \approx -1{,}17 i \ .$$

Funktsioonidega $\cos z$ ja $\sin z$ teostatavate geomeetriliste teisenduste uurimiseks taandame need funktsioonid juba tuntud funktsioonide superpositsioonideks. Vastavalt funktsiooni $w = \cos z$ definitsioonile saame, et teda võib vaadelda järgmiste funktsioonide superpositsioonina:

$$(1) \quad z_1 = iz \ , \quad z_2 = e^{z_1} \quad \text{ja} \quad w = \frac{1}{2}\left(z_2 + \frac{1}{z_2}\right).$$

Funktsiooni $w = \sin z$ puhul saame vastavalt:

$$(2) \quad z_1 = iz \ , \quad z_2 = e^{z_1} \ , \quad z_3 = -i z_2 \quad \text{ja} \quad w = \frac{1}{2}\left(z_3 + \frac{1}{z_3}\right).$$

Selgitame nüüd, millise piirkonna teisendab funktsioon $w = \cos z$ kogu w-tasandiks. Kasutame selleks seoseid (1) tagant ettepoole. Viimasest seosest (Žukovski funktsioon) järeldub, et z_2-tasandi ühikring teiseneb kogu w-tasandiks, millest on välja lõigatud vaid lõik $[-1, 1]$. Edasi tuleb selgitada, millise piirkonna teisendab funktsioon $z_2 = e^{z_1}$ ühikringiks. Eelnevast teame, et niisugust piirkonda pole. Küll aga teisendab vaadeldav funktsioon poolriba $\operatorname{Re} z_1 < 0$, $-\pi < \operatorname{Im} z_1 < \pi$ ühikringiks, lõikega piki raadiust $[-1, 0]$. Seega ei saa me ka w-tasandil z_2-tasandi lõigu $[-1, 0]$ kujutist, s.t. u-telje osa $(-\infty, -1]$. Jääb veel selgitada, millise piirkonna teisendab funktsioon $z_1 = iz$ ülalmärgitud poolribaks. Et funktsioon $z_1 = iz$ teostab vaid tasandi pöörde ümber nullpunkti nurga $\frac{\pi}{2}$ võrra, siis on otsitavaks piirkonnaks poolriba $-\pi < \operatorname{Re} z < \pi$, $\operatorname{Im} z > 0$. Niisiis: funktsioon $w = \cos z$ teisendab poolriba $-\pi < \operatorname{Re} z < \pi$, $\operatorname{Im} z > 0$ kogu w-tasandiks, lõikega piki reaaltelje osa $(-\infty, 1]$.

Ülejäänud kaks trigonomeetrilist funktsiooni $\tan z$ ja $\cot z$ defineerime võrdustega:

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = -i\,\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} = -i\,\frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1},$$

$$\cot z = \frac{\cos z}{\sin z} = i\,\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}} = i\,\frac{e^{2iz} + 1}{e^{2iz} - 1}.$$

Nende funktsioonidega teostatavaid kujutisi võime vaadelda kui lineaarsete, murdlineaarsete ja eksponentfunktsioonidega teostatavate kujutiste superpositsioone.

Analoogiliselt trigonomeetriliste funktsioonidega defineeritakse vastavad <u>hüperboolsed funktsioonid</u>, nimelt

$$sh\, z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}, \quad ch\, z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2},$$

$$th\, z = \frac{sh\, z}{ch\, z}, \quad cth\, z = \frac{ch\, z}{sh\, z}.$$

Võrreldes neid funktsioone trigonomeetriliste funktsioonidega, näeme, et

(3) $sh\, z = -i \sin iz$, $ch\, z = \cos iz$, $th\, z = -i \tan iz$, $cth\, z = i \cot iz$.

K ü s i m u s e d.

1. Millised trigonomeetrilistest funktsioonidest on paaris-, millised paaritud funktsioonid ?
2. Millised hüperboolsetest funktsioonidest on paaris-, millised paaritud funktsioonid ?
3. Milline on funktsioonide $\tan z$ ja $\cot z$ periood?
4. Kas trigonomeetrilised funktsioonid on ühesed ja ühelehelised ?
5. Sama hüperboolsete funktsioonide kohta ?
6. Kuidas lahutada $\tan z$ ja $\cot z$ juba tuntud funktsioonide superpositsiooniks ?
7. Kuidas lahutada hüperboolsed funktsioonid juba tuntud funktsioonide superpositsiooniks ?

Ü l e s a n d e d .

1. Tõestada omadused 2°, 4° ja 5° .

2. Tõestada seosed 3°.

3. Millistes punktides on funktsioon $\sin z$ reaalne, millistes puhtimaginaarne ?

Vastus: reaalne — sirgetel $x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ ja $y=0$,
puhtimaginaarne — sirgetel $x = n\pi$.

4. Sama funktsiooni $\cos z$ puhul.

Vastus: reaalne — sirgetel $x = n\pi$ ja $y = 0$,
puhtimaginaarne — sirgetel $x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$.

5. Milleks teisendab funktsioon $w = \cos z$ järgmised piirkonnad:

a) $0 < x < \pi$, $y < 0$;

b) $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $y > 0$;

c) $0 < x < \pi$, $-h < y < h$ $(h > 0)$.

Vastus: a) ülemine pooltasand, b) neljas veerand,
c) ellipsi $\frac{u^2}{ch^2 h} + \frac{v^2}{sh^2 h} = 1$ sisemine osa, lõigetega $[-ch\,h, -1]$ ja $[1, ch\,h]$.

6. Milleks teisendab funktsioon $w = ch\,z$ järgmised piirkonnad:

a) $0 < y < \pi$;

b) $x > 0$, $0 < y < \pi$.

Vastus: a) kogu tasand, lõigetega $(-\infty, -1]$ ja $[1, \infty)$;
b) ülemine pooltasand.

7. Milleks teisendab funktsioon $w = \tan z$ järgmised piirkonnad:

a) $0 < x < \pi$, $y > 0$;

b) $0 < x < \frac{\pi}{4}$;

c) $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$.

Vastus: a) ülemine pooltasand, lõikega $[0, i]$;

b) ühikringi ülemine pool;

c) ühikring.

8. Teisendada ülemisele pooltasandile järgmised piirkonnad:

a) $|z - 1| > 1$, $|z + 1| > 1$, $\operatorname{Im} z > 0$;

b) poolriba $0 < x < \pi, y > 0$, lõikega piki lõiku $x = \frac{\pi}{2}$, $0 \leq y \leq h$.

Vastus: a) $w = \cos \frac{\pi(z+2)}{2z}$;

b) $w = \sqrt{\cos 2z + \operatorname{ch} 2h}$.

9. Teisendada piirkond $|z| > 1$, $\operatorname{Im} z < 1$ ühikringiks selliselt, et

$$w(-3i) = 0 \quad \text{ja} \quad \arg w'(-3i) = \frac{\pi}{3} .$$

Vastus: $w = -\frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \operatorname{th} \frac{\pi i (z + 3i)}{4(z - i)}$.

§ 11. Arkus- ja areafunktsioonid.

Trigonomeetriliste funktsioonide pöördfunktsioone nimetatakse arkusfunktsioonideks. Neid tähistatakse vastavalt:

$$w = \operatorname{Arcsin} z , \quad w = \operatorname{Arccos} z , \quad w = \operatorname{Arctan} z , \quad w = \operatorname{Arccot} z.$$

15.

Osutub ,et arkusfunktsioone saab avaldada logaritmfunktsiooni kaudu. Teeme seda näiteks funktsiooni $w = \operatorname{Arccos} z$ puhul. Et vastavalt definitsioonile $z = \cos w$,siis

$$z = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2} = \frac{e^{2iw} + 1}{2e^{iw}} .$$

Meid huvitab avaldada w muutuja z kaudu. Selleks paneme tähele, et

$$e^{2iw} - 2ze^{iw} + 1 = 0 ,$$

millest saame

$$e^{iw} = z \pm \sqrt{z^2 - 1}$$

ning seega

$$(1) \qquad w = \operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln} (z \pm \sqrt{z^2 - 1}).$$

Et aga

$$(2) \qquad \frac{1}{z + \sqrt{z^2 - 1}} = z - \sqrt{z^2 - 1} ,$$

siis võime valemis (1) miinusmärgid juure ja logaritmi eest ära jätta. Tõepoolest, juure eest võib märk " - " ära jääda, kuna ruutjuur on kahene funktsioon. Seos (2) ütleb , et ka logaritmi eest võib märk " - " ära jaada. Seega

$$w = \operatorname{Arccos} z = i \operatorname{Ln} (z + \sqrt{z^2 - 1}).$$

Eelnevas paragrahvis nägime, et funktsioon $w = \cos z$ kujutab poolriba $-\pi < \operatorname{Re} z < \pi$, $\operatorname{Im} z < 0$ kogu w-tasandiks, millest on välja lõigatud vaid poolsirge $-\infty < \operatorname{Re} w < 1$. Sellest järeldub, et vaadeldavas w-tasandi piirkonnas saab eraldada funktsiooni $w = \operatorname{Arccos} z$ regulaarse haru.

Funktsiooni $w = \operatorname{Arccos} z$ sellist regulaarset haru, mis teisendab kogu z-tasandi, väljalõikega piki poolsirget $-\infty < \operatorname{Re} z < 1$, poolribaks $-\pi < \operatorname{Re} w < \pi$, $\operatorname{Im} w < 0$, nimetatakse arkuskoosinuse peaharuks ning tähistatakse

$$w = \arccos z .$$

Ka teiste trigonomeetriliste funktsioonide pöördfunktsioonid võib avaldada logaritmfunktsiooni kaudu. Kehtivad valemid:

$$\operatorname{Arcsin} z = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arccos} z = \frac{\pi}{2} i \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}),$$
(3)
$$\operatorname{Arctan} z = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arccot} z = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \frac{i - z}{i + z} .$$

Analoogiliselt eelnevaga saame ka kõikide nende mitmeste funktsioonide puhul eraldada nende üksikud harud.

Hüperboolsete funktsioonide pöördfunktsioone nimetatakse areafunktsioonideks ning tähistatakse vastavalt $\operatorname{Arsh} z$, $\operatorname{Arch} z$, $\operatorname{Arth} z$ ja $\operatorname{Arcth} z$. Areafunktsioonide puhul kehtivad järgmised valemid:

$$\operatorname{Arsh} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 + 1}), \quad \operatorname{Arch} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}),$$
(4)
$$\operatorname{Arth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1 + z}{1 - z}, \quad \operatorname{Arcth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{z + 1}{z - 1} .$$

On ilmne, et ka kõik areafunktsioonid on mitmesed funktsioonid.

K ü s i m u s e d.

1. Kui palju harusid on arkus- ja areafunktsioonidel ?
2. Millised on arkus- ja areafunktsioonide tuletised ?

3. Milliste z väärtuste korral on arkusfunktsioonid reaalsed ?

4. Sama areafunktsioonide kohta.

Ülesanded.

1. Tõestada seosed (3) ja (4) .

2. Selgitada, milleks kujutab funktsioon $w = \arcsin z$

   a) ülemise pooltasandi,

   b) kogu tasandi, lõigetega $(-\infty, -1]$ ja $[1, \infty)$,

   c) esimese veerandi.

   Vastus: a) $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$, $v > 0$;

   b) $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$;

   c) $0 < u < \frac{\pi}{2}$, $v > 0$.

3. Selgitada, milleks teisendab funktsioon

$$w = \operatorname{Arsh} z$$

   a) kogu tasandi, lõigetega piki imaginaartelge $1 \leq y < \infty$ ja $-\infty < y \leq -1$;

   b) esimese veerandi.

   Vastus: a) $-\frac{\pi}{2} < v < \frac{\pi}{2}$;

   b) $0 < v < \frac{\pi}{2}$, $u > 0$.

Aineregister.

L i s a

TEISENDUSTE TABEL

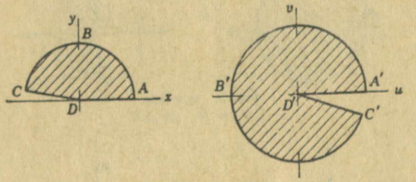


FIG. 1. $w = z^2$.

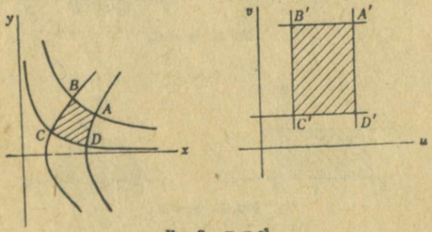


FIG. 2. $w = z^2$.

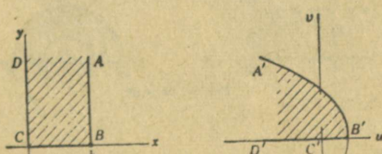


FIG. 3. $w = z^2$; $A'B' : \rho = \frac{2k^2}{1 + \cos \phi}$.

16.

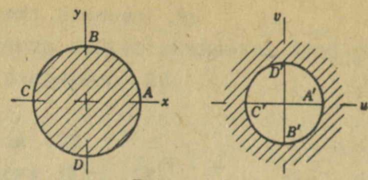


Fig. 4. $w = 1/z$.

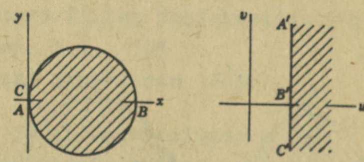


Fig. 5. $w = 1/z$.

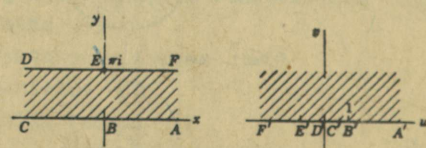


Fig. 6. $w = e^z$.

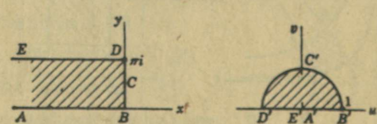


Fig. 7. $w = e^z$.

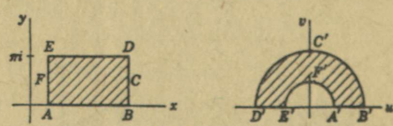


Fig. 8. $w = e^z$.

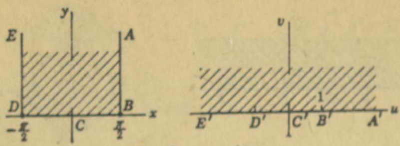


FIG. 9. $w = \sin z$.

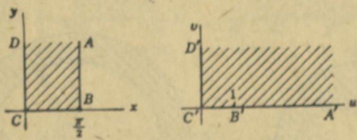


FIG. 10. $w = \sin z$.

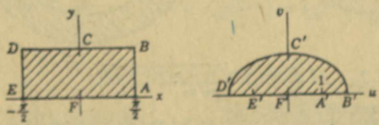


FIG. 11. $w = \sin z$; BCD: $y = k$, $B'C'D'$: $\left(\frac{u}{\cosh k}\right)^2 + \left(\frac{v}{\sinh k}\right)^2 = 1$.

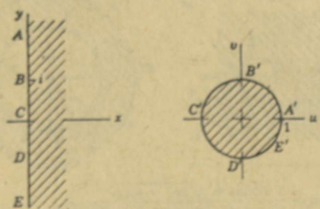


FIG. 12. $w = \frac{z - 1}{z + 1}$

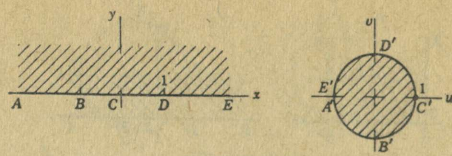


FIG. 13. $w = \dfrac{i - z}{i + z}$.

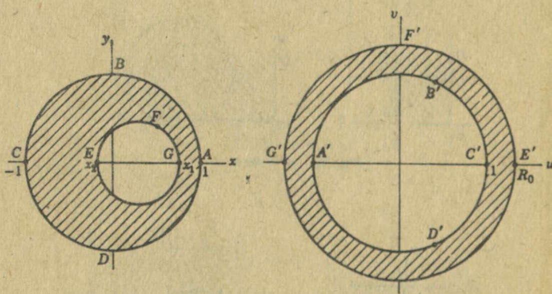


FIG. 14. $w = \dfrac{z - a}{az - 1}$; $a = \dfrac{1 + x_1x_2 + \sqrt{(1 - x_1^2)(1 - x_2^2)}}{x_1 + x_2}$;

$R_0 = \dfrac{1 - x_1x_2 + \sqrt{(1 - x_1^2)(1 - x_2^2)}}{x_1 - x_2}$, ($a > 1$ and $R_0 > 1$ when $-1 < x_2 < x_1 < 1$).

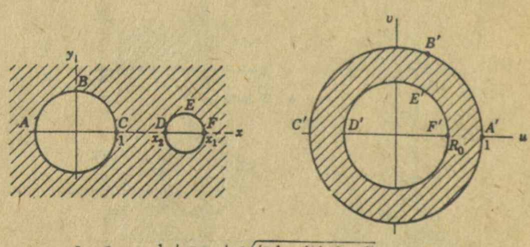


FIG. 15. $w = \dfrac{z - a}{az - 1}$; $a = \dfrac{1 + x_1x_2 + \sqrt{(x_1^2 - 1)(x_2^2 - 1)}}{x_1 + x_2}$,

$R_0 = \dfrac{x_1x_2 - 1 - \sqrt{(x_1^2 - 1)(x_2^2 - 1)}}{x_1 - x_2}$, ($x_2 < a < x_1$ and $0 < R_0 < 1$ when $1 < x_2 < x_1$).

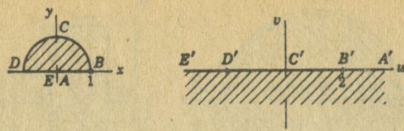


FIG. 16. $w = z + 1/z$.

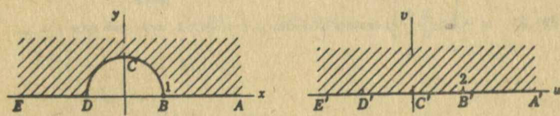


FIG. 17. $w = z + 1/z$.

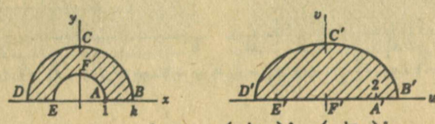


FIG. 18. $w = z + \frac{1}{z}$; $B'C'D'$: $\left(\frac{ku}{k^2+1}\right)^2 + \left(\frac{kv}{k^2-1}\right)^2 = 1$.

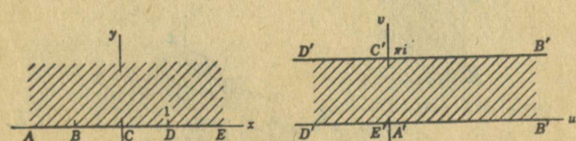


FIG. 19. $w = \text{Log}\,\frac{z-1}{z+1} = \text{Log}\,\frac{r_1}{r_2} + i(\theta_1 - \theta_2)$; $z = -\coth\frac{w}{2}$.

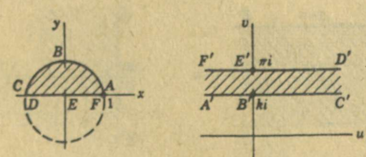


FIG. 20. $w = \text{Log}\,\frac{z-1}{z+1}$; ABC: $x^2 + y^2 - 2y \cot k = 1$.

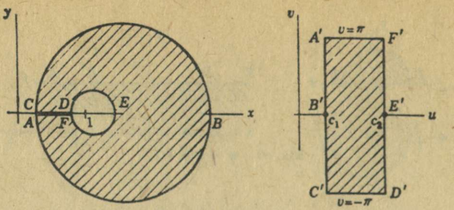


Fig. 21. $w = \operatorname{Log}\dfrac{z+1}{z-1}$; centers of circles at $z = \coth c_n$, radii: $\operatorname{csch} c_n$ $(n = 1, 2)$.

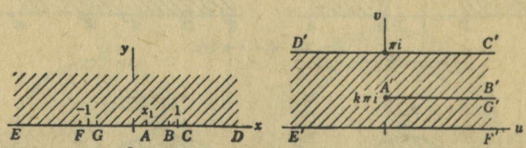


Fig. 22. $w = k \operatorname{Log}\dfrac{k}{1-k} + \operatorname{Log} 2(1-k) + i\pi - k \operatorname{Log}(z+1) - (1-k)\operatorname{Log}(z-1)$; $x_1 = 2k - 1$.

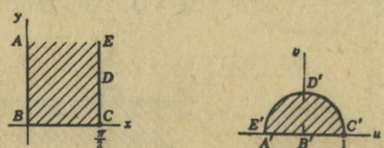


Fig. 23. $w = \tan^2\dfrac{z}{2} = \dfrac{1-\cos z}{1+\cos z}$.

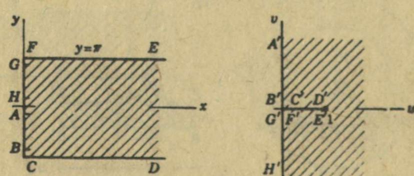


Fig. 24. $w = \coth\dfrac{z}{2} = \dfrac{e^z+1}{e^z-1}$.

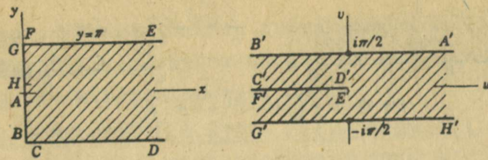


Fig. 25. $w = \text{Log} \coth \frac{z}{2}$.

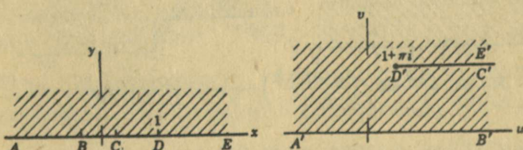


Fig. 26. $w = \pi i + z - \text{Log } z$.

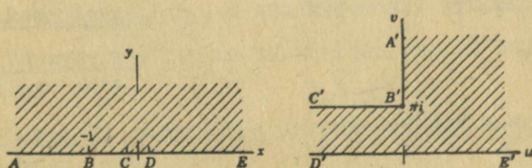


Fig. 27. $w = 2(z+1)^{\frac{1}{2}} + \text{Log} \frac{(z+1)^{\frac{1}{2}} - 1}{(z+1)^{\frac{1}{2}} + 1}$.

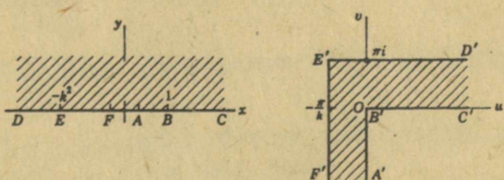


Fig. 28. $w = \frac{i}{k} \text{Log} \frac{1 + ikt}{1 - ikt} + \text{Log} \frac{1 + t}{1 - t}; \; t = \left(\frac{z - 1}{z + k^2}\right)^{\frac{1}{2}}$.

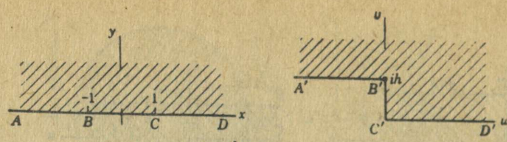


FIG. 29. $w = \frac{h}{\pi}\left[(z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} + \cosh^{-1} z\right]$.*

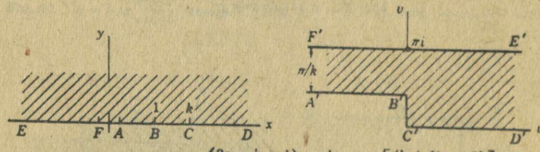


FIG. 30. $w = \cosh^{-1}\left(\frac{2z - k - 1}{k - 1}\right) - \frac{1}{k}\cosh^{-1}\left[\frac{(k + 1)z - 2k}{(k - 1)z}\right]$.

Kirjandus.

1. H.Keres , Matemaatilise füüsika meetodid, 1964.
2. R.V.Churchill , Complex variables and applications,1960.
3. F.Rühs, Funktionentheorie, 1962.
4. Л.И.Волковыский, Г.Л.Лунц, И.Г.Араманович, Сборник задач по теории функций комплексного переменного, 1961.
5. М.А.Евграфов, Аналитические функции, 1965.
6. М.А.Лаврентьев, Б.В. Шабат, Методы теории функций комплексного переменного, 1965.
7. Г.Л.Лунц, Л.Э.Эльсгольц, Функции комплексного переменного с элементами операционного исчисления, 1958.
8. А.И.Маркушевич, Краткий курс теории аналитических функций, 1957.
9. А.И.Маркушевич, Теория аналитических функций, 1950.
10. А.И.Маркушевич, Очерки по истории теории аналитических функций, 1951.
11. И.И.Привалов, Введение в теорию функций комплексного переменного, 1954.
12. В.И.Смирнов, Курс высшей математики, т. Ш, ч. 2, 1956.
13. С.Стойлов, Теория функций комплексного переменного, т. I, 1962.
14. П.Ф.Фильчаков, Приближенные методы конформных отображений, 1964.
15. Б.А.Фукс, Б.В.Шабат, Функции комплексного переменного и некоторые их приложения, 1964.

Sisukord

Э. Юримяэ
ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО
I
(Элементарные функции)
Издание второе
На эстонском языке
Тартуский государственный университет
ЭССР, г. Тарту, ул. Юликооли, 18

Vastutav toimetaja T. Sõrmus
Korrektor E. Oja
==
TRÜ rotaprint 1970. Paljundamisele antud 28. I 1970.
Trükipoognaid 8,25. Tingtrükipoognaid 7,67. Arvestuspoognaid 6,95. Trükiarv 500. Paber 30 x 42. 1/4.
MB 03870. Tell. nr. 299.
Hind 30 kop.

Hind 30 kop.