Lehrbuch

der

Planimetrie

von

A. Paulson,

Hofrath und Ritter, Oberlehrer der Mathematik am Gymnasium zu Dorpat.

Zweite umgearbeitete und vermehrte Auflage.

Dorpat.

Druck und Verlag von Schnakenburg's litho- und typogr. Anstalt.

1876.

Von der Censur gestattet. — Dorpat, den 10. Januar 1876.

Vorwort.

Bei Beginn meiner Lehrthätigkeit hatte ich dem geometrischen Unterrichte das damals hier allgemein gebrauchte Lehrbuch von Legendre zu Grunde gelegt. Es wollte mir aber nicht gelingen eine eben so allgemeine und freudige Theilnahme für diesen Unterricht zu erregen, wie für den arithmetischen. Die oft im Unmuth an mich gerichteten Fragen: Wozu dient denn eigentlich die Geometrie? was nützt dieser oder jener Satz? was habe ich von dem Erlernen dieses oder jenes schweren Beweises? — ließen mich den Grund für die Abneigung so mancher Schüler die Geometrie zu erlernen in der gangbaren Lehrmethode erkennen, welche dem Schüler ein Chaos zusammenhangloser Sätze darbietet, das weder Zweck noch Ziel erkennen läßt und daher auch nicht geeignet ist sein Interesse zu erregen. In Folge der planlosen Zusammenstellung der Sätze erscheinen die einzelnen Beweise derselben als eben so willkürliche wie gekünstelte Combinationen vorangegangener zerstreuter Lehrsätze, so daß sie den Schüler eben so wenig zu einer productiven Thätigkeit veranlassen und befähigen können, als der Lehrgang selbst es vermag. Zudem werden die Beweise meist (und namentlich bei Legendre) in einer Darstellung vorgeführt, die selbst die Uebersicht des Ganges und damit auch das Behalten des Beweises ungemein erschwert. — In Folge dieser Erwägungen war es mir erklärlich, daß das Erlernen der Geometrie vielen Schülern zur wahren Tortur werden konnte, und ich entschloß mich daher die alte Euklidische Lehrmethode ganz aufzugeben und auch in der Geometrie den Gang einer wissenschaftlichen Untersuchung einzuschlagen, wie ich es schon früher in der Arithmetik gethan hatte: Jede Raumform unterwarf ich einer Erörterung in vierfacher Hinsicht, in Hinsicht der Lage, der Form, der Größe und der Abhängigkeit von ihren Elementen. Für die bei den Erörterungen gewonnenen allgemeinen Erkenntnisse wurde die Begründung ebenfalls gemeinsam angestrebt und gefunden, und so erschienen denn auch die Beweise dem Schüler nicht mehr als aufgedrungene Künsteleien, sondern als natürliche und nothwendige Errungenschaften seines eigenen Nachdenkens zur Feststellung der empirisch gefundenen Wahrheiten. Zur Belebung der productiven Thätigkeit erhielten die Schüler am Schlusse eines jeden Abschnittes leichte, nicht unmittelbar zum Systeme gehörige Lehrsätze, für die sie den Beweis selbständig zu suchen hatten: Nicht jeder fand den Beweis, doch immer einige, die dann als Lehrer der Schwächeren, meist in den Zwischenminuten, auftraten und nicht wenig zur Förderung der Sache beitrugen. — Ich hatte bald die Genugthuung, daß nicht nur die früheren so ostensiblen Fragen nach Zweck und Nutzen der Geometrie verstummten, sondern daß auch die Schüler sich willig und gern der zeitraubenden Bearbeitung des Vortrages unterwarfen (denn ich hatte nur die Lehrsätze dictirt). — Da aber in den späteren Abschriften der so entstandenen Hefte sich vielfältig Lücken und Fehler zeigten, so entschloß ich mich, den Bitten meiner Schüler willfahrend, mein Manuscript drucken zu lassen. So erschien denn die jetzt vollständig vergriffene erste Auflage dieses Buches ohne Pretension auf weitere Verbreitung, daher ohne Vorwort und im Selbstverlage.

Inwischen habe ich bei ausgebreiteterer Bekanntschaft mit der pädagogischen Literatur gefunden, daß auch viele namhafte Lehrer Deutschlands, seitdem die Mathematik in den classischen Gymnasien als ein wesentliches Bildungselement mehr und mehr Anerkennung gefunden hat, die alte Euklidische Lehrform aufgegeben und mit mir ähnliche Bahnen eingeschlagen haben um den gesteigerten Anforderungen zu genügen. — So glaube ich mich denn berechtigt das im vorliegenden Lehrbuche niedergelegte System als im Principe anerkannt zu betrachten, und es bleibt mir nur der Wunsch übrig, es möge mir auch die Darstellung in so weit gelungen sein, daß das Büchlein in der neuen Bearbeitung einer freundlichen Berücksichtigung meiner Fachgenossen werth und somit zur Förderung und Hebung des geometrischen Unterrichtes beizutragen geeignet sei.

Da das Lehrbuch zugleich und vornehmlich ein Handbuch für Schüler sein soll, so hat die Entwickelung des Ganges nicht durchweg zur Darstellung gelangen können, indem eine vollständig durchgeführte Analyse (die ja die Sätze erst in umgekehrter Reihenfolge zu Tage fördert) dem Schüler die Recapitulation erschweren würde, während die hier und gelegentlich im Texte gemachten Andeutungen genügen werden um den Lehrer in Betreff des beim Unterrichte einzuschlagenden Weges zu instruiren. — Auch bei den Beweisen habe ich mich meist darauf beschränkt ihnen eine Darstellung zu geben, welche die Uebersicht des Ganges möglichst erleichtert, während ich es für durchaus geboten erachte, daß bei dem Unterrichte jedem Beweise eine Analyse desselben vorangehe. Bei Sätzen, die mehrere Fälle involviren, habe ich die Beweisform stets so gewählt, daß derselbe Beweis für alle Fälle und Lagen paßt, und ich erlaube mir besonders auf die Beweisform für die Gleichheit zweier Verhältnisse aufmerksam zu machen, welche einmal erfaßt in jedem besonderen Falle leicht Anwendung findet. Ist schon die Trennung des incommensurablen Falles von dem commensurablen an sich mißlich, so erheischt der für den ersten Fall angestrebte indirecte Beweis jedesmal einen besonderen Kunstgriff um den Widerspruch hervorzubringen, und der Beweis läßt daher als eine Künstelei nicht nur unbefriedigt, sondern wird auch leicht vergessen und dann schwerlich je von dem Schüler reproducirt.

Daß der Schüler auch durch Lösung geometrischer Aufgaben zur productiven Thätigkeit veranlaßt und befähigt werden müsse, ist wohl allgemein anerkannt. Aus der Zahl guter und reichhaltiger Aufgabensammlungen dürfte jedoch den Schülern nur Wöckel's Geometrie der Alten allgemeiner zugänglich sein; die Art aber wie hier die Lösungen angedeutet sind, verleitet die Schüler zu einem planlosen Tatonniren, indem sie nur durch Gewöhnung an eine ordentliche Analyse zur Selbständigkeit gelangen können. — Daher habe ich es angemessen gefunden dem Lehrbuche einen Anhang mit vollständig gelösten Aufgaben beizufügen, als Anleitung und Muster für die Schüler.

In Bezug auf die gebräuchlichen Zeichen und Abkürzungen scheint es mir wünschenswerth, daß auch für den Logarithmus eben so wie für alle übrigen algebraischen Functionen ein einfaches Zeichen allgemein eingeführt werde. So gut man die Gleichung $a^n = b$ in a auflöst, indem man $a = \sqrt[n]{b}$ schreibt, so kann man sie in n auflösen, indem man $n = {}_{a}\!\wedge\!\underline{\,b\,}$ setzt. Das Zeichen empfiehlt sich einmal als umgekehrtes Wurzelzeichen und dann, weil es eben so gut an ein L erinnert, wie das Wurzelzeichen an ein r. In Ermangelung geeigneter Typen ist im Anhange statt des gebräuchlichen log. das Zeichen $\wedge\!\underline{\;\;}$ gebraucht worden.

Schließlich halte ich mich für verpflichtet der Verlagshandlung für die sorgfältige und saubere Ausstattung des Werkes meinen Dank auszusprechen

der Verfasser.

Dorpat, im Januar 1876.

Inhalts-Verzeichniß.

Einleitung.

Geometrische Vorbegriffe.

I. „Die Geometrie handelt von den Gebilden des Raumes."

Der Begriff der Ausdehnung und des Ausgedehnten, des Raumes, entsteht in uns durch Bewegung.

Wenngleich die Definition der Bewegung den Begriff des Raumes voraussetzt, so ist doch der letztere Begriff der ursprüngliche, da wir uns der Bewegung unserer Gliedmaßen unmittelbar bewußt werden, und die Netzhautbilder erst durch Vermittelung des Tastsinnes — also durch Bewegung — als aus außer uns befindlichen Ursachen stammend, d. h. als räumlich erkennen.

Im Raume ist nach allen Richtungen Bewegung möglich: „Der Raum ist das allseitig Ausgedehnte." — Die Ausdehnungen des Raumes sind endlos, grenzenlos. — „Der Raum ist unendlich." — Im unendlichen Raume giebt es endliche, begrenzte Räume, die wir Körper nennen. —

II. So wie wir zur Vorstellung des Raumes überhaupt, so gelangen wir auch zur Vorstellung der verschiedenen Raumgebilde durch Bewegung. — Das sich Bewegende aber ist Körper — denn ein Nichtseiendes können wir uns überhaupt nicht, geschweige denn in Bewegung denken. — Richten wir aber unsere ganze Aufmerksamkeit auf die Bewegung, so sehen wir unwillkürlich ganz ab — wir abstrahiren*) — von den Dimensionen des sich Bewegenden, und in so fern wir das thuen, nennen wir es einen **Punkt****).

Der Namen Punkt fordert uns also stets auf ganz abzusehen von den Dimensionen des betreffenden Körpers, und nur daran zu denken, daß er eine Stelle im Raume einnimmt.

---

*) Abstrahiren heißt nicht leugnen, sondern abstreifen, absehen, also doch von etwas wirklich Vorhandenem.

**) Der Astronom nennt die Erde einen Punkt, wenn er die Eigenschaften ihrer Bahn beschreibt.

III. Der Punkt in Bewegung erzeugt die Vorstellung, der wir den Namen **Linie** geben. — Die Art der Bewegung bedingt die Form der Linie; die Größe des Fortschrittes aber die Länge derselben. — Erfolgt die Bewegung eines Punktes nach einem bestimmten Gesetze, oder genügt sie einer gegebenen Bedingung, so nennen wir die Linie auch den geometrischen **Ort** des Punktes. — Der geometrische Ort eines Punktes, welcher in seiner Bewegung stetig auf ein Ziel (auf einen zweiten Punkt) hin strebt, heißt die **gerade Linie.**

Grundsatz. **Die gerade Linie ist durch zwei Punkte unzweideutig bestimmt.**

Folgerung. Zwei Gerade können daher höchstens einen Punkt gemein haben, denn haben sie zwei gemein, so bilden sie nur ein Gerade.

Zwei Punkte haben einen bestimmten Abstand. — Die Gerade allein ist durch zwei Punkte bestimmt, daher ist die gerade Linie der Ausdruck des Abstandes. — Das Streben auf ein Ziel hin nennen wir Richtung; die gerade Linie ist daher auch der Ausdruck der Richtung. Faßt man die Gerade als Ausdruck der Richtung, so ist sie unbegrenzt, unendlich zu denken; faßt man sie als Ausdruck des Abstandes, so bilden die sie bestimmenden Punkte zugleich ihre End- oder Grenzpunkte. — Aendert der sich bewegende Punkt stetig seine Richtung, so beschreibt er eine stetig gekrümmte Linie; ändert er die Richtung sprungweise, so entsteht eine gebrochene Linie.

IV. Die Bewegung einer Linie erzeugt im Allgemeinen die Vorstellung der **Fläche.** Die Bewegung einer geraden Linie kann man sich als eine zweifache denken: Entweder verläßt die Gerade ihre ursprüngliche Lage so, daß alle Punkte zugleich heraustreten und eine fortschreitende Bewegung ausführen, oder die Gerade bewegt sich um einen festen Punkt. Erstere Bewegung nennen wir eine parallelfortschreitende, letztere eine drehende Bewegung. — Die parallelfortschreitende Bewegung einer Geraden erzeugt die Vorstellung einer durchweg geraden Fläche, welche **Ebene** genannt wird. — Auch durch drehende Bewegung wird die Vorstellung einer Ebene erzeugt, wenn man nehmlich die sich drehende Linie zugleich längs einer zweiten Geraden gleiten läßt.

In der Folge werden alle Gebilde als in der Ebene liegend vorausgesetzt, daher die Bezeichnung Planimetrie.

V. An den durch Bewegung erzeugten einfachen Vorstellungen des Raumes hat die Geometrie zu betrachten:

1) Die Größe der Ausdehnung, oder kurz — die Größe.

2) Die Art der Ausdehnung, oder die Form.

Sowohl nach Größe als nach Form kann eine Raumform durch andere, einfachere, bestimmt sein. Man nennt die letzteren die Elemente der ersteren, und es hat die Geometrie daher noch zu betrachten:

3) Die Abhängigkeit von den Elementen.

4) Die Lage.

Aus diesen Betrachtungen ergeben sich neue Gebilde, die dann denselben Erörterungen unterliegen.

Eine aus dem aufgestellten Begriffe sich unmittelbar ergebende Wahrheit wird ein Grundsatz oder Axiom genannt. Alle weiteren Erkenntnisse werden als Lehrsätze hingestellt; ihre Giltigkeit wird durch einen s. g. Beweis erhärtet. Der Beweis hat durch Schließen oder Folgern zu zeigen, daß der betreffende Satz eine nothwendige Folge bereits anerkannter Wahrheiten ist. — Ist ein Satz in dem Beweise eines anderen Satzes mit bewiesen, so wird er als Zusatz dem ersteren beigefügt. — Ist dagegen ein Satz bloß das Resume einer vorangegangenen Betrachtung, oder eine unmittelbare Folge eines anderen Satzes, so habe ich ihn eine Folgerung genannt.

Die Formen des Schließens sind:

1) $\begin{array}{c} \varphi(a) \geqq b \\ a = c \\ \hline \varphi(c) \geqq b \end{array}$ 2) $\begin{array}{c} a = c \\ b = c \\ \hline a = b \end{array}$ 3) $\begin{array}{c} a = c \\ b = d \\ \hline a + b = c + d \end{array}$ 4) $\begin{array}{c} a = c \\ b = d \\ \hline a - b = c - d \end{array}$

5) $\begin{array}{c} a = c \\ b = d \\ \hline a \times b = c \times d \end{array}$ 6) $\begin{array}{c} a = c \\ b = d \\ \hline a : b = c : d \end{array}$ 7) $\begin{array}{c} a > b \\ b > c \\ \hline a > c \end{array}$ 8) $\begin{array}{c} a > b \\ c = d \\ \hline a + c > b + d \end{array}$

9) $\begin{array}{c} a > b \\ c = d \\ \hline a - c > b - d \end{array}$ 10) $\begin{array}{c} a > b \\ c = d \\ \hline a \times c > b \times d \end{array}$ 11) $\begin{array}{c} a > b \\ c = d \\ \hline a : c > b : d \end{array}$ 12) $\begin{array}{c} a = b \\ c > d \\ \hline a + c > b + d \end{array}$

13) $\begin{array}{c} a = b \\ c > d \\ \hline a - c < b - d \end{array}$ 14) $\begin{array}{c} a = b \\ c > d \\ \hline a \times c > b \times d \end{array}$ 15) $\begin{array}{c} a = b \\ c > d \\ \hline a : c < b : d \end{array}$ 16) $\begin{array}{c} a > b \\ c < d \\ \hline a - c > b - d \end{array}$

Zur Erklärung der hier und im Lehrbuche gebrauchten Symbole diene die Bemerkung: Zwei gleichlaufende Striche drücken Gleichheit aus, und zwar horizontal gestellt, Gleichheit der Größe; vertikal gestellt, Gleichheit der Richtung. — Zwei ungleichlaufende Striche drücken Verschiedenheit aus, und zwar steht das Kleinere nach der Seite der Converganz. — Ein Strich unter zwei Gleichungen bedeutet folglich d. h. das unter dem Strich stehende ist wahr, wenn das drüber Stehende wahr ist.

Merkt man sich noch, daß φ (a) eine jede Abhängigkeit von a bezeichnet, so lassen obige Formen sich leicht in Worte kleiden*):

1) Statt einer Größe kann man stets eine ihr gleiche Größe setzen.
2) Zwei Größen, die einer dritten gleich sind, sind auch einander gleich.
3) Gleiche Größen geben auch gleiche Summen.

rc.

*) Es ist bei den Geometern üblich diese Formen des Schließens, in Worte gekleidet, allgemeine Grundsätze zu nennen, was ein Mißgriff ist: Sie entsprechen vollkommen den logischen Figuren, die kein Logiker Grundsätze nennt.

Erster Abschnitt.

Die Größe und Lage der Linien in der Ebene.

Cap. I.

Die Größe.

§ 1. Die Größe der Linien bei gemeinsamen Endpunkten.

1. **Definition.** Linien sind gleich groß, wenn sie bei gemeinsamen Endpunkten sich decken.

2. **Folgerung.** Gerade Linien mit gemeinsamen Endpunkten sind gleich.

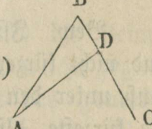
3. **Grundsatz.** Bei gemeinschaftlichen Endpunkten ist die gerade Linie unter allen die kürzeste.

4. **Lehrsatz.** Von zwei einmal gebrochenen Linien mit gemeinschaftlichen Endpunkten ist die umschlossene stets kleiner als die umschließende.

1. Fall. Der mittlere Punkt (D) der umschlossenen Linie (ADC) liegt auf der umschließenden (ABC). [Fig. 1.]

Bew. Hier haben die beiden gebrochenen Linien (ABC und ADC) das Stück DC gemein. Von dem nicht gemeinschaftlichen ist aber das Stück ABD, der umschließenden Linie, größer als das Stück AD der umschlossenen (3.). Mithin ist auch die ganze umschließende Linie größer als die umschlossene.

Fig. 1.



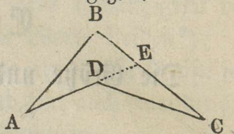
$$\begin{array}{rl} & ABD > AD \text{ (s. 3.)} \\ & DC = DC \\ \hline & ABD + DC > AD + DC \text{ (S. F. 8.)} \\ \text{d. h.} & ABC > ADC \end{array}$$

2. Fall. Der mittlere Punkt der umschlossenen Linie liegt nicht auf der umschließenden. [Fig. 2.]

Bew. Weil hier die beiden gebrochenen Linien (ABC und ADC) kein Stück gemein haben, so lassen sie sich auch nicht unmittelbar mit einander vergleichen. Man muß daher eine dritte Linie suchen, mit welcher sich beide vergleichen lassen.. Diese dritte Linie erhält man, wenn man den einen Theil der umschlossenen verlängert, bis die Ver=

längerung die umschließende Linie (in dem Punkte E) trifft. Alsdann hat man zwischen den beiden Endpunkten A und C drei gebrochene Linien: ABC, AEC und ADC, und es ist nach dem vorigen Falle:

Fig. 2.

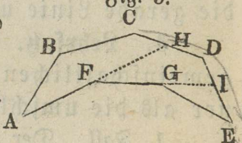


ABC > AEC
AEC > ADC
um so mehr ABC > ADC. (S. F. 7.)

5. **Lehrsatz.** Von zwei mehrmals gebrochenen Linien einfacher Krümmung ist die umschlossene kürzer als die umschließende.

Bew. Ist ABCDE die umschließende, AFGE die umschlossene, mehrmals gebrochene Linie, so verlängere man die einzelnen Theile der umschlossenen Linie, bis die Verlängerungen die umschließende treffen (in den Punkten H und J); alsdann ist:

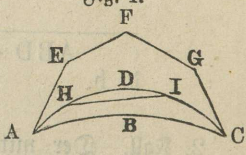
Fig. 3.



ABCDE > AHDE { Beide haben HDE gemein und ABCH > AH (s. 3)
AHDE > AFJE { Beide haben AF u. JE gemein und FHDJ > FJ (s. 3.)
ABCDE > AFJE (S. F. 7.)
AFJE > AFGE { Sie haben AFG gemein und GJE > GE (s. 3.).
ABCDE > AFGE. (S. F. 7.)

6. **Lehrsatz.** Unter allen Linien einfacher Krümmung zwischen denselben Endpunkten ist die umschlossene die kürzeste. [Fig. 4.]

Fig. 4.



Bew. Ist ABC die umschlossene Linie und nicht kürzer als die sie umschließenden, so muß unter den letzteren doch eine sein, welche die kürzeste, also auch kürzer als ABC oder ihr höchstens gleich, ist. — Es sei nun ADC diese kürzeste Linie, so kann man auf ihr immer zwei Punkte (H und J) so wählen, daß die gerade Linie (HJ) zwischen denselben, die Linie ABC nicht schneidet. — Dann ist aber HJ als gerade Linie kürzer als HDJ, mithin auch AHJC kürzer als ADC, und umschließt zugleich ABC. Also kann ADC nicht die kürzeste sein, sondern alle umschließenden Linien sind länger als ABC.

Bemerkung. Wird die eine von zwei krummen Linien, mit gemeinschaftlichen Endpunkten, nicht von der anderen umschlossen, so läßt sich über ihr Größenverhältniß auch nichts Bestimmtes sagen. Nur über das Größenverhältniß ihrer Theile läßt sich noch folgender Satz aufstellen:

7. **Lehrsatz.** Wenn zwei einmal gebrochene Linien mit gemeinschaftlichen Endpunkten sich schneiden, so sind die sich schneidenden Theile zusammen größer, als die sich nicht schneidenden Theile. [Fig. 5.]

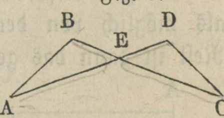
Bew. Schneiden sich die gebrochenen Linien ABC und ADC in E, so werden die sich schneidenden Theile in je zwei Theile zerlegt und es sind nun die beiden Theile AE und BE zusammen größer als AB, die Theile DE und CE zusammen größer als DC. Folglich sind die vier Theile, d. h. die beiden sich schneidenden Theile AD und BC zusammen größer als die sich nicht schneidenden AB und DC.

$$\left.\begin{array}{l} AE + EB > AB \\ DE + EC > DC \end{array}\right\} \text{(s. 3.)}$$

$$\overline{(AE + DE) + (EB + EC) > AB + DC,}$$

d. h. $AD + BC > AB + DC.$

Fig. 5.



§ 2. Die Ausmessung und das Verhältniß gerader Linien.

Läßt sich eine Linie mehrmals von einer anderen Linie abschneiden, so daß kein Rest bleibt, so heißt sie ein Maß der anderen, — letztere ein Vielfaches der ersteren. — Die Zahl aber, welche angiebt, wie oft das Maß in der vorgelegten Linie enthalten ist, heißt die Maßzahl dieser Linie.

Ist z. B. die Linie CD vier Mal in der Linie AB enthalten, so ist AB das Vierfache der Linie CD und man schreibt $AB = 4 . CD$, oder auch $\frac{AB}{DC} = 4$, d. h. AB gemessen durch CD giebt 4.

Läßt die größere von zwei geraden Linien, durch die kleinere gemessen, einen Rest, so ist eine dritte Linie denkbar, welche zugleich ein Maß beider Linien ist. Diese dritte Linie heißt das gemeinschaftliche Maß beider Linien. — Das Verhältniß der Maßzahlen bestimmt dann zugleich das Größenverhältniß der beiden Linien.

Bezeichnen wir das gemeinschaftliche Maß der beiden Linien a und b durch m, und sind α und β die respectiven Maßzahlen, so ist:

$$\begin{array}{c} a = \alpha . m \\ b = \beta . m \\ \hline a : b = \alpha . m : \beta . m = \alpha : \beta . \end{array}$$

(Gelesen: Die Linie a verhält sich zur Linie b, wie α zu β.)

Ist aber $b = \beta \cdot m$, so ist m der βte Theil der Linie b; — ist nun zugleich $a = \alpha \cdot m$, so kann man sagen: der βte Theil der Linie b giebt αmal gesetzt (addirt) die Linie a, was man also in Zeichen ausdrückt:

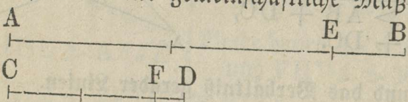
$$a = \frac{\alpha}{\beta} \cdot b.$$

Im weiteren Sinne nennt man nun auch den Bruch $\frac{\alpha}{\beta}$ Maßzahl der Linie a, indem man b als Maßeinheit setzt.

In diesem Sinne sagen wir z. B. eine Linie ist $^3/_4$ Zoll lang.

8. **Aufgabe.** Es soll das gemeinschaftliche Maß zweier Linien ermittelt werden.

Lösung. Sind AB und CD die gegebenen Linien, so schneidet man die kleinere (CD) so oft als möglich von der größeren (AB) ab, den Rest (EB) ebenfalls so oft als möglich von der kleineren (CD), den abermaligen Rest von dem vorigen u. s. f., den jedesmaligen Rest so oft als möglich von dem vorhergehenden, bis kein Rest bleibt. Der letzte Rest ist dann das gemeinschaftliche Maß beider Linien:



1) $AB = 2 \cdot CD + EB$
2) $CD = 2 \cdot EB + FD$
3) $EB = 2 \cdot FD.$

Die Maßzahlen der Linien (AB und CD) hat man nun nicht durch eine neue Messung zu ermitteln, sondern sie ergeben sich durch Rechnung aus den Gleichungen, welche die Resultate der jedesmaligen Messung ausdrücken. Zu dem Zwecke beginnt man mit der letzten Gleichung und bestimmt, aufwärts gehend, das Verhältniß der einzelnen Linien zu dem gemeinschaftlichen Maße (FD) wie folgt:

$$EB = 2 \cdot FD$$
$$CD = 2 \cdot EB + FD = 4\,FD + FD = 5 \cdot FD.$$
$$AB = 2 \cdot CD + EB = 2 \cdot 5\,FD + 2\,FD = 12 \cdot FD$$

$AB : CD = 12 : 5$ (d. h. AB verhält sich zu CD, wie 12 zu 5), oder .... $AB = {}^{12}/_5 \cdot CD$ (d. h. der 5te Theil von CD giebt 12 mal gesetzt die Linien AB).

Wenn nun auch eine jede, in obiger Weise ausgeführte Messung in Wirklichkeit stets ein Ende erreichen wird, indem der Rest, wenn ja einer bleibt, schließlich so klein wird, daß er nicht mehr aufgefaßt werden kann, — so ist es doch denkbar (und auch theoretisch nachweisbar), daß es Linien giebt, die kein gemeinschaftliches Maß haben. Solche Linien nennt man **incommensurabel** und ihr Verhältniß **irrational** während im entgegengesetzten Falle die Linien **commensurabel** und ihr Verhältniß **rational** heißt. Das Verhältniß incommensurabler Linien kann durch keine bestimmte Zahl angegeben werden, man kann sich demselben aber durch Grenzen so weit nähern als man will (oder, bei einer Bestimmung durch Messung, so weit die Mittel es erlauben).

Die Grenzen für das Verhältniß incommensurabler Linien findet man, wenn man in den Gleichungen, welche die Resultate der Messung ausdrücken, den jedesmaligen Rest zuerst = 0, dann gleich dem Maße setzt.

Haben sich z. B. für die Linien a und b durch Messung folgende Gleichungen ergeben:

$$\begin{aligned} a &= 2b + r_1 \\ b &= 3r_1 + r_2 \\ r_1 &= 2 \,.\, r_2 + r_3 \\ r_2 &= 3 \,.\, r_3 + r_4 \\ &\;\;.\qquad .\qquad . \\ &\;\;.\qquad .\qquad . \end{aligned}$$

so setzt man:

$$1 \begin{cases} r_1 = 0 \text{ und erhält } a = 2b \text{ oder } \dfrac{a}{b} = 2 \\[2ex] r_1 = b \quad \text{〃} \quad \text{〃} \quad a = 3b \quad \text{〃} \quad \dfrac{a}{b} = 3 \end{cases}$$

$$2 \begin{cases} r_2 = 0 \text{ und erhält } \begin{cases} b = 3r_1 \\ a = 7r_1 \end{cases} \text{oder } \dfrac{a}{b} = {}^7/_3 = 2\,{}^1/_3 \\[3ex] r_2 = r_1 \quad \text{〃} \quad \text{〃} \quad \begin{cases} b = 4r_1 \\ a = 9r_1 \end{cases} \quad \text{〃} \quad \dfrac{a}{b} = {}^9/_4 = 2\,{}^1/_4 \end{cases}$$

$$3 \begin{cases} r_3 = 0 \quad \text{〃} \quad \text{〃} \quad \begin{cases} b = 7r_2 \\ a = 16r_2 \end{cases} \quad \text{〃} \quad \dfrac{a}{b} = {}^{16}/_7 = 2\,{}^2/_7 \\[3ex] r_3 = r_2 \quad \text{〃} \quad \text{〃} \quad \begin{cases} b = 10r_2 \\ a = 23r_2 \end{cases} \quad \text{〃} \quad \dfrac{a}{b} = {}^{23}/_{10} = 2\,{}^3/_{10} \end{cases}$$

$$4 \begin{cases} r_4 = 0 \quad \text{〃} \quad \text{〃} \quad \begin{cases} b = 24r_2 \\ a = 55r_3 \end{cases} \quad \text{〃} \quad \dfrac{a}{b} = {}^{55}/_{44} = 2\,{}^7/_{24} \\[3ex] r_4 = r_3 \quad \text{〃} \quad \text{〃} \quad \begin{cases} b = 31r_3 \\ a = 71r_3 \end{cases} \quad \text{〃} \quad \dfrac{a}{b} = {}^{71}/_{31} = 2\,{}^9/_{31}. \end{cases}$$

$$.\qquad .\qquad .\qquad .\qquad .\qquad .\qquad .$$
$$.\qquad .\qquad .\qquad .\qquad .\qquad .\qquad .$$

Woraus sich successive die Grenzen ergeben:

$$2 < \frac{a}{b} < 3 \qquad \text{Differenz} = 1$$

$$2\,{}^1/_4 < \frac{a}{b} < 2\,{}^1/_3 \qquad \text{〃} \qquad = {}^1/_{12}$$

$$2^2/_7 < \frac{a}{b} < 2^3/_{10} \quad " \quad = 1/_{70}$$

$$2^9/_{31} < \frac{a}{b} < 2^7/_{24} \quad " \quad = 1/_{744}.$$

. . . .

. . .

Setzt man nun den einen der beiden letzten Grenzwerthe, oder noch besser das arithmetische Mittel aus beiden, als wahren Werth des Verhältnisses, so begeht man einen Fehler, der jedenfalls kleiner ist als die Differenz der beiden Grenzen (hier $< 1/_{744}$ der Linie b).

Cap. II.

Die Lage.

§ 1. Bestimmung der Lage eines Punktes in der Ebene.

Für einen Punkt ist jede Lage gleichgiltig, kommt aber ein zweiter Punkt hinzu, so muß er in einem bestimmten Abstande vom ersteren gedacht werden, sein Ort heißt die **Kreislinie.**

9. **Definition.** Die Kreislinie ist der Ort eines Punktes, welcher einen constanten Abstand von einem festen Punkte hat. — Der constante Abstand heißt der **Radius,** der feste Punkt der **Mittelpunkt** des Kreises*). — Der Abstand zweier Punkte der Kreislinie heißt **Sehne** (Chorde); ein Stück der Kreislinie **Bogen.**

10. **Folgerung.** Der Kreis ist bestimmt durch den Mittelpunkt und den Radius.

Da durch zwei Punkte zugleich eine Gerade gegeben ist (III Grd.), so denken wir uns, indem wir zu einem Punkte einen zweiten hinzutreten lassen, zugleich unzählig viele Gerade (Strahlen) einen s. g. Strahlenbüschel, für welchen der erstere Punkt den Mittelpunkt (Strahlungspunkt) bildet.

11. **Folgerung.** Durch einen Punkt sind unzählig viele Gerade denkbar.

Sind zwei Punkte gegeben, und es tritt ein dritter hinzu, so muß er von jedem der gegebenen Punkte einen bestimmten Abstand haben, d. h. er muß zugleich in zwei Kreislinien liegend gedacht werden. —

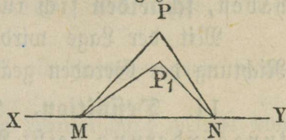
---

*) Die Namen Kreis und Kreislinie werden oft gleichbedeutend gebraucht. In Sonderheit versteht man unter Kreis die von der Kreislinie umgrenzte Ebenen; die Kreislinie heißt dann auch Peripherie des Kreises.

Hiermit ist aber seine Lage noch zweideutig, aber auch nur zweideutig bestimmt:

12. **Lehrsatz.** Sind auf einer Geraden (XY) zwei Punkte (M und N) gegeben, so können auf derselben Seite dieser Geraden nicht zwei Punkte (P und P_1) in gleichen Abständen von jedem der gegebenen Punkte gedacht werden.

Fig. 6.



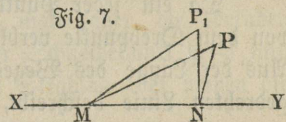
Bew. Denn wäre 1) (Fig. 6)

$$PM = P_1M$$
$$PN = P_1N$$

so wäre auch $PM + PN = P_1M + P_1N$

was mit Lehrsatz 4 in Widerspruch steht.

Fig. 7.



Wäre 2) Fig. 7. $PM = P_1M$

$$P_1N = PN$$

so wäre auch $PM + P_1N = P_1M + PN$ was Lehrsatz 7 widerspricht.

Eine dritte Lage ist aber nicht denkbar.

1. Zusatz. Zwei Kreislinien können nicht mehr als zwei Punkte gemein haben, und diese liegen nach entgegengesetzter Seite der Centrallinie*).

2. Zusatz. Durch die Sehne ist auch der zugehörige Bogen bestimmt. — Mit anderen Worten: Zu gleichen Sehnen in einem Kreise gehören auch gleiche Bogen oder Winkel.

Zur Bestimmung der Lage eines Punktes in der Ebene müssen hiernach zwei Punkte gegeben sein. Kennt man dann die Abstände eines Punktes von den gegebenen und auch die Seite nach welcher er von der, durch die gegebenen Punkte bestimmten Geraden liegt, so ist seine Lage unzweideutig bestimmt.

§ 2. Von der Veränderung der Lage einer Geraden durch drehende Bewegung oder vom Winkel.

Um alles was die Lage einer Geraden in der Ebene betrifft zu ermitteln, müssen wir sie aus einer Lage in eine andere überführen. Die erstere bleibt uns dann als Axe oder Richtlinie in Erinnerung. — Hierbei sind nur zwei Arten der Bewegung denkbar: Nur ein Punkt verharrt in ursprünglicher Lage, oder alle Punkte treten

*) Centrallinie heißt die Gerade, welche durch die Mittelpunkte zweier Kreise geht.

zugleich heraus. Die erstere Bewegung nennen wir eine drehende, letztere eine parallel fortschreitende. — Bei der drehenden Bewegung müssen die Punkte, welche vom Drehpunkte nach entgegengesetzter Seite liegen auch von der Richtlinie nach entgegengesetzten Seiten hin sich bewegen.

13. **Folgerung.** Zwei Gerade die einen Punkt gemein haben, **schneiden** sich in diesem Punkte.

Mit der Lage wird durch die drehende Bewegung zugleich die Richtung der Geraden geändert.

14. **Definition.** Die Größe der Drehung oder Richtungsänderung heißt **Winkel.**

Da ein jeder Punkt der gedrehten Linie in constantem Abstande von dem Drehpunkte verbleibt, so beschreibt er einen Kreisbogen. — Aus der Länge des Weges — des Kreisbogens — den ein Punkt der gedrehten Linie beschreibt, beurtheilen wir die Größe des Winkels. — Nach 12 Zus. 2 ist der Bogen durch die Sehne bestimmt, daher ist der Winkel auch durch die Gerade bestimmbar.

15. **Aufgabe.** Einen Winkel gleich einem gegebenen Winkel zu construiren.

Lösung. S. Prop. I. § 37.

Ist die Gerade also auch jeder Punkt derselben, bei fortgesetzter Drehung in ihre ursprüngliche Lage zurückgekehrt, so hat sie eine Umdrehung vollendet; es ist ein **completer** Winkel entstanden, und jeder Punkt der gedrehten Linie hat eine volle Kreislinie beschrieben.

Der complete Winkel oder der Kreis ist die Maßeinheit des Winkels. — Er wird getheilt in 360 Grade, der Grad in 60 Minuten, die Minute in 60 Secunden.

Außerdem heißt die Hälfte des completen Winkels ein flacher oder gestreckter, der vierte Theil desselben ein rechter Winkel: Der gestreckte Winkel hat 180°, der rechte 90°. — Ein Winkel der kleiner ist als ein Gestreckter ($<180^{\circ}$) heißt ein concaver; ist er größer als ein Gestreckter (<180) so heißt er ein covexer. — Ist der concave Winkel kleiner als der rechte ($<90^{\circ}$), so heißt er ein spitzer; ist er größer als der rechte, ($>90^{\circ}$) ein stumpfer Winkel.

Eine Gerade kann durch Drehung in doppeltem Sinne aus einer Lage in eine andere gebracht werden: Durch eine Drehung rechtsherum oder linksherum. Beide entgegengesetzte Drehnngen ergänzen sich zu einer halben Umdrehung: Zwei Gerade bilden mit einander zwei

Winkel, die sich zu einem Gestreckten ergänzen; der eine heißt der Neben- oder Supplementwinkel des anderen.

Wächst ein Winkel, so nimmt sein Nebenwinkel ab, es muß also eine bestimmte Lage geben, in welcher der Winkel seinem Nebenwinkel gleich ist diese Lage heißt die **normale** Lage.

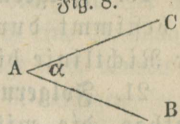
16. **Definition.** Zwei Gerade stehen normal zu einander, wenn sie den copleten Winkel viertheilen, oder rechte Winkel mit einander bilden.

Man pflegt daher den rechten Winkel meist als denjenigen zu definiren, welcher seinem Nebenwinkel gleich ist.

Zwei sich schneidende Gerade stellen zwei Winkel dar; welcher von beiden gemeint ist, kann dem Gebilde nicht unmittelbar angesehen werden. Um Zweideutigkeiten zu vermeiden nimmt man daher die Geraden im Schneidepunkte einseitig begrenzt. — Der Schneidepunkt heißt nun der Scheitel die vom Scheitel ausgehenden Strahlen aber heißen die Schenkel des Winkels.

Zur Bezeichnung des Winkels setzt man einen Buchstaben an den Scheitel und je einen an jede Schenkelspitze; beim Ansagen nimmt man den Buchstaben am Scheitel in die Mitte. — Häufig aber bezeichnet man den Winkel nur durch einen (griechischen) Buchstaben, den man zwischen die Schenkel in die Nähe des Scheitels stellt. Ist kein Mißverständniß zu befürchten, so giebt man den Winkel auch bloß durch den Buchstaben am Scheitel an: der Winlel Fig. 8 heißt also CAB oder auch α, — unter Umständen auch A.

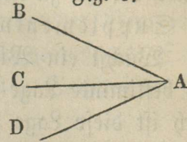
Fig. 8.



Bei der Erzeugung des Winkels durch Drehung ist es hiernach genügend nur das eine Ende der gedrehten Linie zu berücksichtigen, — welches Ende ist an sich gleichgiltig. Für manche Zwecke aber ist es bequem die gleichzeitige Drehung der entgegengesetzten Enden, als besondere Winkel erzeugend aufzufassen, die dann Scheitelwinkel genannt werden.

17. **Folgerung.** Scheitelwinkel sind einander gleich. Gehen von einem Punkte aus drei Strahlen, so haben wir auch drei Winkel, von welchen je zwei einen Schenkel gemein haben. Der Winkel von den dreien, welcher den gemeinsamen Schenkel der beiden anderen zwischen seinen Schenkeln hat heißt die Summe dieser beiden. Hat der Winkel den gemeinsamen Schenkel nicht zwischen seinen Schenkeln, so heißt er die Differenz.

Fig. 9.



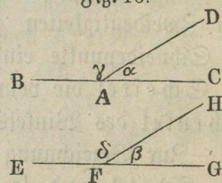
$$\text{Fig. 9.}\left\{\begin{array}{l}\angle BAD = \angle BAC + \angle CAD \\ \angle BAC = \angle BAD - \angle CAD \\ \angle CAD = \angle DAB - \angle CAB\end{array}\right.$$

18. **Folgerung.** Die Summe zweier Nebenwinkel ist ein Gestreckter (oder = 2 R)*).

Zus. Die Summe der Winkel über einer Geraden beträgt einen Gestreckten.

19. **Lehrsatz.** Sind zwei Winkel gleich, so sind auch ihre Nebenwinkel gleich.

Fig. 10.



Vorauss. BAC und EFG sind gerade Linien, und $\angle \alpha = \angle \beta$

Behauptung. $\underline{\angle \gamma = \angle \delta}$

$$\begin{array}{ll} \text{Bew.} & \angle \alpha + \angle \gamma = 2\,R \quad (\text{s. } 18) \\ & \underline{\angle \beta + \angle \delta = 2\,R} \\ & \angle \alpha + \angle \gamma = \angle \beta + \angle \delta \quad (\text{S. F. } 2.) \\ & \underline{\angle \alpha = \angle \beta \quad (\text{Vorauss.})} \\ & \angle \alpha = \angle \delta \quad (\text{S. F. } 4). \end{array}$$

In Bezug auf die Lage einer Geraden in der Ebene entnehmen wir aus dem Obigen als Resume:

20. **Folgerung.** Die Lage einer Geraden in der Ebene ist bestimmt durch einen Punkt und den Winkel, den sie mit der Richtlinie bildet. — Oder in anderer Fassung:

21. **Folgerung.** Durch einen Punkt ist nur eine Gerade denkbar, die mit einer gegebenen Geraden einen bestimmten Winkel in bestimmten Sinne bildet.

§ 3. Die Veränderung der Lage einer Geraden durch fortschreitende Bewegung, oder die Paralleltheorie.

Da jede Richtungsänderung eine drehende Bewegung um einen festen Punkt voraussetzt, so ist eine Fortschreitende Bewegung einer Geraden nur denkbar, wenn eine Bewegung derselben ohne Richtungsänderung möglich ist. — Nach 21 ist die Richtung einer Geraden allein durch den Winkel bestimmt, den sie mit der Richtlinie bildet: Eine Gerade wird also nur dann eine fortschreitende Bewegung in der Ebene machen, wenn sie den Winkel mit der Richtlinie bei ihrer Bewegungnicht ändert.

---

*) Der Satz 17 kann leicht aus 18 abgeleitet werden, und die Ableitung bietet Anfängern ein gutes Beispiel zur Uebung im Schließen dar. Nach dem obigen Begriff des Winkels hat es aber keinen Sinn diesen Satz als einen Lehrsatz hinzustellen.

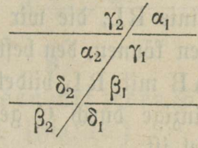
× auf gleichgelegenen Halbebenen

22. **Lehrsatz.** Zwei Gerade, die mit der Richtlinie **gleiche** Winkel in **gleichem** Sinne bilden haben **keinen** Punkt gemein.

Richtungsunterschiede bilden, haben gleiche Richtung mit einander, so keinen Neigungsunterschied mit einander keinen Durchschnitt.

Bew. Ist $\angle \alpha = \beta$, so ist nach 20 auch $\angle \gamma = \delta$, und daher vollkommene Symmetrie auf beiden Seiten der Richtlinie:

$$\angle \alpha_1 = \angle \beta_2$$
$$\angle \gamma_1 = \angle \delta_2$$
$$\angle \beta_1 = \angle \alpha_2$$
$$\angle \delta_1 = \angle \gamma_2$$



Es ist daher nicht abzusehen auf welcher Seite die Linien sich schneiden sollen. Schnitten sie sich rechts, so müßten sie sich auch links schneiden. Da aber (nach III Folger.) zwei Gerade sich nicht zweimal schneiden können, so können Gerade, die mit der Richtlinie gleiche Winkel in gleichem Sinne bilden, sich gar nicht schneiden. — (Verg. Prop. S. 40 Anm.).

Hat die Gerade den Winkel zur Richtlinie geändert, so hat sie ihre Richtung geändert und es ist ein Punkt in ursprünglicher Lage geblieben, um den sie sich gedreht hat:

23. **Folgerung.** Zwei Gerade, die mit der Richtlinie in gleichem Sinne **ungleiche** Winkel bilden, haben nothwendig **einen** Punkt gemein.

Winkel in gleichem Sinne, d. h. Winkel die von zwei oder auch mehreren Geraden von der Richtlinie ausgehend durch eine Drehung in gleichem Sinne um je einen besonderen Punkt erzeugt sind, nennen wir **correspondirende** Winkel. Die durch eine Drehung in entgegengesetztem Sinne von mehreren Geraden mit der Richtlinie gebildeten Winkel sollen **Gegenwinkel** heißen. — Sind bei der Drehung die entgegengesetzten Enden berücksichtigt, d. h. liegen die Winkel des Paares nach entgegengesetzter Seite der Richtlinie, so werden die Winkel als wechselnd bezeichnet. Wechselnde correspondirende Winkel nennt man kurz Wechselwinkel; wechselnde Gegenwinkel aber Gegenwechselwinkel. — Liegen die Winkel des Paares beide zwischen den Geraden, so heißen sie innere, liegen sie nicht zwischen — äußere Winkel.

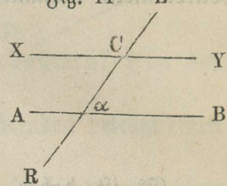
24. **Definition.** Bilden zwei Gerade mit einer dritten gleiche correspondirende Winkel, so nennt man sie Linien gleicher Richtung oder **Parallellinien.**

25. **Folgerung.** Zwei Gerade die in einer Ebene liegend keinen Punkt gemein haben sind parallel. — (Vergl. 23)

26. **Lehrsatz.** Durch einen Punkt giebt es nur **eine** Gerade, die einer gegebenen Geraden parallel ist. (Fig. 11.)

Bew. Ist XY eine Gerade die durch den Punkt C geht, und zugleich parallel AB ist, so muß sie mit der Richtlinie RL, die wir beliebig, also auch durch C legen können, den bestimmten Winkel α bilden, den AB mit RL bildet, folglich ist sie nach 21 die einzige durch C gehende Gerade, die AB parallel ist.

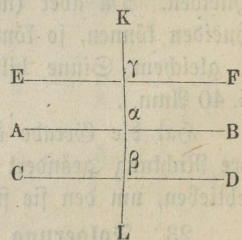
Fig. 11



27. **Lehrsatz.** Ist eine Gerade parallel der einen von zwei parallelen Geraden, so ist sie auch der anderen parallel

Vorauss. 1. $AB \parallel CD$
2. $EF \parallel AB$

Behaupt. $EF \parallel CD$



Bew. Ist RL die Richtlinie so ist:

$\angle \alpha = \angle \beta$ (Vorauss. 1)

$\angle \alpha = \angle \gamma$ (Vorauss. 2)

$\angle \beta = \angle \gamma$ (S. F. 2.)

28. **Lehrsatz.** Schneidet eine Gerade die eine von zwei Parallellinien, so schneidet sie auch die andern.

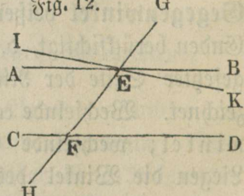
Bew. Schnitte die Gerade die zweite Parallele nicht, so wäre sie (nach 25) ihr parallel, und dann auch (nach 27) der ersteren parallel, was der Voraussetzung widerspricht.

29. **Lehrsatz.** Parallele Gerade bilden mit jeder Schneidenden gleiche correspondirende Winkel. (Fig. 12.)

Vorauss. Die Parallelen AB und CD werden von GH geschnitten, und bilden mit ihr die Winkel GEB und GFD

Behaupt. $\angle GEB = \angle GFD$

Fig. 12.



Beweise. Ist der Winkel GEB nicht $= \angle GFD$, so kann man durch E jedenfalls eine Gerade IK so legen daß $\angle GEK = \angle GFD$; als dann wäre aber (nach 24) $IK \parallel CD$, was dem Satze 26 widerspricht.

30. **Lehrsatz.** Parallele Gerade bilden mit jeder Schneidenden auch gleiche **Wechselwinkel.** (Fig. 13.)

Vorauss. Die Parallelen AB und CD werden durch GH geschnitten.

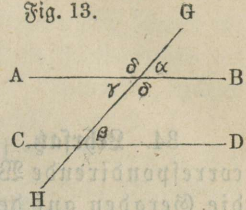


Fig. 13.

Behaupt. $\underbrace{\angle\gamma = \angle\beta}$

Bew. $\angle\alpha = \angle\beta$ (s. 29)
$\angle\alpha = \angle\gamma$ (s. 17)
$\angle\gamma = \angle\beta$ (S. F. 2.)

31. **Lehrsatz.** Parallele Gerade bilden mit jeder Schneidenden Gegenwinkel, deren Summe $= 2\,R$ ist. [Fig. 13.]

Voraus s. Die Parallelen AB und CD werden durch GH geschnitten.

Behaupt. $\angle\beta + \angle\delta = 2\,R$

Bew. $\angle\alpha + \angle\delta = 2\,R$ (s. 18)
$\angle\alpha = \angle\beta$ (s. 29)
$\angle\beta + \angle\delta = 2\,R$ (S. F. 1.)

Anm. Satz 30 ist eigentlich nur ein Zusatz zu 29. — Es bieten aber die Sätze 30 und 31 dem Anfänger vortreffliche Gelegenheit dar zur Anwendung der einfachen Formen des Schließens, daher gehe man mit ihnen alle Paare von Wechsel- und Gegenwinkel durch.

32. **Lehrsatz.** Bilden zwei Gerade mit der Schneidenden gleiche Wechselwinkel, so sind sie parallel.

Voraus s. AB und CD werden von GH durchschnitten und es ist $\angle\gamma = \angle\beta$ (Fig. 13.)

Behaupt. AB || CD

Bew. $\angle\gamma = \angle\beta$ (Voraus s.)
$\angle\gamma = \angle\alpha$ (s. 17.)
$\angle\alpha = \angle\beta$ (S. F. 2)
AB || CD (s. 24)

33. **Lehrsatz.** Bilden zwei Gerade mit der Schneidenden Gegenwinkel, deren Summe $= 2\,R$ ist, so sind die Linien parallel. (Fig. 13.)

Voraus s. AB und CD werden von GH durchschnitten und es ist $\angle\delta + \angle\beta = 2\,R$

Behaupt. AB || CD

Bew. $\angle\delta + \angle\beta = 2\,R$ (Voraus s.)
$\angle\delta + \angle\alpha = 2\,R$ (s. 18)

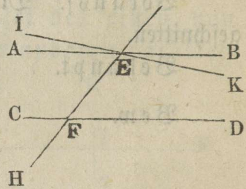
$$\angle\delta + \angle\beta = \angle\delta + \alpha \quad (\text{S. F. } 2.)$$

$$\angle\beta = \angle\alpha \quad (\text{S. F. } 4.)$$

$$AB \,||\, CD \quad (\text{s. } 24.)$$

34. **Lehrsatz.** Bilden zwei Gerade mit der Schneidenden correspondirende Winkel die nicht gleich sind, so schneiden sich die Geraden auf der Seite der Schneidenden, auf welcher die Summe der inneren Gegenwinkel kleiner als zwei Rechte ist.

Fig. 12.



Bew. Werden IK und CD von GH geschnitten, und ist $\angle GEK > \angle GFD$, so müssen die Geraden IK und CD (nach 23) sich schneiden. Ziehen wir nun durch E die Gerade AB || CD, so ist

$$\angle GEB = \angle GFD \quad (\text{s. } 29)$$

$$\angle GEK > \angle GFD \quad (\text{Vorauss}).$$

$$\angle GEK > \angle GEB$$

d. h. die Gerade IK und CD convergiren rechts von GH.

Ferner ist: $\angle GFD < \angle GEK$ (Vorauss.)

$$\angle FEK = \angle FEK$$

$$\angle GFD + \angle FEK < \angle GEK + \angle FEK \quad (\text{S. F. } 8)$$

$$\angle GEK + \angle FEK = 2\,R \quad (\text{s. } 18)$$

$$\angle GFD + \angle FEK < 2\,R \quad (\text{S. F. } 1)$$

d. h. die inneren Gegenwinkel deren Summe < 2 R ist, liegen ebenfalls rechts von der Schneidenden GH.

Uebungsstoff.

1. Stehen zwei Gerade normal auf den Schenkeln eines Winkels, der kein Gestreckter ist, so schneiden sich diese Geraden.

2. Sind die Schenkel eines Winkels parallel den Schenkeln eines anderen so sind die Winkel einander gleich, (oder ergänzen sich zu 2 R)

3. Durch einen gegebenen Punkt außerhalb einer gegebenen Geraden, eine Gerade zu ziehen, die ~~dar~~gegebenen parallel ist. (s. Propäd. I. § 47).

Zweiter Abschnitt.

Von den geradlinien Figuren.

Drei Gerade in verschiedener Richtung schneiden sich gegenseitig und umgrenzen bereits ein Stück Ebene. — Eine von Linien rings umgrenzte Ebene heißt Figur in engerem Sinne. Sind die umgrenzenden Linien sämmtlich gerade Linien, so heißt die Figur eine geradlinie Figur oder ein Vieleck (Polygon). Die Schneidepunkte der geraden Grenzlinien heißen Ecken, die Grenzlinien selbst, von Ecke zu Ecke aber Seiten des Vielecks. Je zwei in einer Ecke zusammenstoßenden Seiten bilden einen Innenwinkel, eine Seite mit der Verlängerung der Anderen einen Außenwinkel. Seiten und Winkel bilden die Elemente des Vieleckes. — Eine Gerade die, ohne Seite zu sein, zwei Ecken verbindet heißt Diagonale; durchschneidet die Gerade die Figur überhaupt, so heißt sie eine Secante, unter Umständen auch Transversale. — Je nachdem die Figur von 3, 4, 5 2c. Geraden umgrenzt wird, oder 3, 4, 5 2c. Ecken hat, heißt sie ein Dreieck, Viereck, Fünfeck .... Vieleck. Hat das Vieleck eine ungerade Zahl von Ecken, so liegt jeder Ecke eine Seite und jeder Seite eine Ecke gegenüber; hat das Vieleck eine gerade Seitenzahl, so liegt einer Ecke auch wieder eine Ecke; einer Seite wieder eine Seite gegenüber. — Sind alle Seiten unter sich, und auch alle Winkel unter sich gleich, so heißt das Vieleck ein regelmäßiges.

Cap. I.

Die Innen- und Außenwinkel der Vielecke.

§ 1. Die Winkel des Dreiecks.

35. **Lehrsatz.** Die Summe der Innenwinkel eines Dreiecks beträgt zwei Rechte.*)

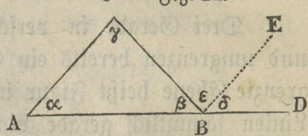
Um den Satz zu beweisen muß man eine Hilfslinie so legen, daß man Winkel erhält von denen es bereits bekannt ist, daß ihre Summe einen gestreckten bildet, und die sich dann als den Innenwinkeln des Dreiecks gleich erweisen lassen. Nach dem Obigen beträgt die Summe

*) Vergleiche Propäd. S. 30 § 51.

der Winkel über einer Geraden einen Gestreckten, desgleichen die Summe der Gegenwinkel an Parallellinien. Beide Sätze können hier in Anwendung kommen.

1. Bew. Man verlängert die eine Seite (AB) über die eine Ecke (B) hinaus, und zieht von dieser Ecke aus eine Gerade (BE) parallel der gegenüberliegenden Seite, alsdann ist: (Fig. 14)

Fig. 14.



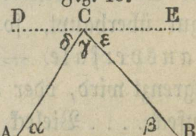
$$\angle\delta + \angle\varepsilon + \angle\beta = 2\,R \text{ (s. 18 Zus.)}$$
$$\angle\delta = \alpha \text{ (s. 29)}$$
$$\angle\varepsilon = \gamma \text{ (s. 30)}$$
$$\overline{\angle\alpha + \angle\gamma + \angle\beta = 2\,R \text{ (S. F. 1)}}$$

1. **Zusatz.** Der Außenwinkel eines Dreiecks ist gleich der Summe der beiden ihm **nicht** anliegenden Innenwinkel.

2. **Zusatz.** Der Außenwinkel eines Dreiecks ist größer als jeder der ihm **nicht** anliegenden Innenwinkel.

2. Bew. Man zieht durch die eine Ecke (C) des Dreieckes eine Gerade (DE) parallel der gegenüberliegenden Seite; als dann ist: (Fig. 15)

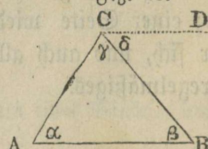
Fig. 15.



$$\angle\delta + \angle\gamma + \angle\varepsilon = 2\,R \text{ (s. 18. Zus.)}$$
$$\left.\begin{array}{l}\angle\delta = \angle\alpha\\ \angle\varepsilon = \angle\beta\end{array}\right\} \text{ (s. 30)}$$
$$\overline{\angle\alpha + \angle\gamma + \angle\beta = 2\,R \text{ (S. F. 1).}}$$

3. Bew. Man zieht von einer Ecke (C) aus eine Gerade (CD) parallel der gegenüberliegenden Seite, alsdann ist: (Fig. 16).

Fig. 16.

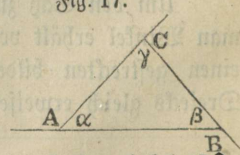


$$\angle\alpha + \angle\gamma + \angle\delta = 2\,R \text{ (s. 31)}$$
$$\angle\delta = \angle\beta$$
$$\overline{\angle\alpha + \angle\gamma + \angle\beta = 2\,R}$$

Anm. Diese Beweisform ist bemerkenswerth, weil hier dieser Satz sich als eine bloße Erweiterung des Satzes 31 darstellt. In allgemeiner Fassung würde der Satz lauten: Werden zwei Gerade von einer dritten geschnitten, so beträgt stets die Summe der Innenwinkel einen Gestreckten.

36. **Lehrsatz.** Die Summe der Außenwinkel eines Dreieckes ist gleich vier Rechten. (Fig. 17.)

Fig. 17.



Bew. Jeder Außenwinkel macht mit seinem anliegenden Innenwinkel zwei rechte, folglich ist die Summe aller Außen- und Innenwinkel gleich $3 \times 2R = 6R$. Zieht man die Summe der Innenwinkel gleich $2R$ ab, so bleibt für die Summe der Außenwinkel $4R$.

$$\left.\begin{array}{r} A + \alpha = 2R \\ B + \beta = 2R \\ C + \gamma = 2R \end{array}\right\} \text{(s. 25.)}$$

$$\begin{array}{r} A + B + C + \alpha + \beta + \gamma = 6R \ (10) \\ \alpha + \beta + \gamma = 2R \ (49) \\ \hline A + B + C = 4R \ (13). \end{array}$$

Zusätze.

1) Durch zwei Winkel eines Dreieckes ist auch der dritte gegeben.

2) In einem Dreiecke kann nur ein Winkel ein rechter sein. Ein Dreieck mit einem rechten Winkel heißt ein rechtwinkliges.

3) In einem Dreiecke kann nur ein Winkel ein stumpfer sein. Ein Dreieck mit einem stumpfen Winkel heißt ein stumpfwinkliges.

Uebungsstoff.

1. Zu zwei gegebenen Winkeln eines Dreieckes den dritten zu finden a) durch Rechnung, b) durch Construction.

2. Die Größe der Winkel eines Dreiecks in Graden, Minuten und Secunden anzugeben, wenn ihr Verhältniß gegeben ist.

3. Stehen die Schenkel eines Winkels normal zu denen eines anderen, so sind die Winkel gleich.

4. Ist die Summe zweier Winkel eines Dreiecks gleich dem dritten Winkel so ist dieser dritte Winkel ein Rechter.

5. Ist die Summe zweier Winkel eines Dreiecks kleiner als der dritte, so ist dieser dritte Winkel ein stumpfer Winkel.

6. Ist die Summe der beiden kleineren Winkel des Dreieckes größer als der Dritte so ist dieser dritte Winkel ein spitzer.

§ 2. Die Winkel des Viereckes.

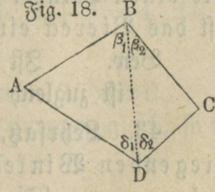
a) Das Viereck im Allgemeinen.

37. **Lehrsatz.** Die Summe der Innenwinkel eines Viereckes beträgt 4R.

Bew. Durch die Diagonale BD wird das Viereck in zwei Dreiecke zerlegt, und es ist:

$$\begin{array}{r} \angle A + \angle \beta_1 + \angle \delta_1 = 2R \ \text{(s. 35)} \\ \angle C + \angle \beta_2 + \angle \delta_2 = 2R \\ \hline \angle A + \angle C + \angle \beta_1 + \angle \beta_2 + \angle \delta_1 + \angle \delta_2 = 4R \ \text{(S. F. 3)} \\ \angle \beta_1 + \angle \beta_2 = \angle B \\ \angle \delta_1 + \angle \delta_2 = \angle D \\ \hline \angle A + \angle C + \angle B + \angle D = 4R \ \text{(S. F. 1.)} \end{array}$$

Fig. 18.



38. **Lehrsatz.** Die Summe der Außenwinkel eines Viereckes beträgt ebenfalls vier Rechte.

Bew. Jeder Außenwinkel macht mit dem anliegenden Innenwinkel 2R, also alle vier Außenwinkel mit allen vier Innenwinkeln $4 \times 2R = 8R$. — Zieht man die Summe der Innenwinkel $= 4R$ ab, so bleibt für die Summe der Außenwinkel auch 4R.

b) Das Viereck im Besonderen.

Sind zwei gegenüberliegende Seiten eines Viereckes parallel, so heißt das Viereck ein Parallelogramm. — Ist nur ein Paar gegenüberliegender Seiten parallel, so heißt das Viereck ein Trapetz.

39. **Lehrsatz.** In einem Parallelogramme ist die Summe der, an einer Seite liegenden Winkel gleich zwei Rechten.

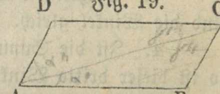
Bew. Je zwei, an einer Seite eines Parallelogrammes liegenden Winkel sind Gegenwinkel an Parallel-Linien.

40. **Lehrsatz.** In einem Parallelogramme sind die gegenüberliegenden Winkel einander gleich. (Fig. 19.)

Bew. Jeder von zwei gegenüberliegenden Winkeln ergänzt einen anliegenden Winkel zu zwei Rechten, also sind sie unter sich gleich.

$$\begin{array}{l} \angle A + \angle B = 2R \\ \angle C + \angle B = 2R \\ \hline \angle A = \angle C. \end{array} \;(31) \qquad \begin{array}{l} \angle A + \angle B = 2R \\ \angle A + \angle D = 2R \\ \hline \angle B = \angle D. \end{array} \;(31)$$

Fig. 19.



Zusatz. Ist der eine Winkel eines Parallelogrammes ein Rechter, so sind alle Winkel desselben Rechte. Ein solches Parallelogramm heißt ein Rechteck.

41. **Lehrsatz.** In einem Trapetze ist die Summe der beiden Winkel die an einer Convergenten liegen, gleich zwei Rechten.

Bew. Die an einer Convergenten liegenden Winkel sind Gegenwinkel an Parallel-Linien.

Schen=

42. **Lehrsatz.** Wenn in einem Vierecke zwei Paar Winkel, die einen Winkel gemein haben, gleich zwei Rechten sind, so ist das Viereck ein Parallelogramm. (Fig. 19)

Bew. Ist $\angle A + \angle B = 2R$, so ist $AD \,||\, BC$
ist zugleich $\angle A + \angle D = 2R$, so ist $AB \,||\, CD$

43. **Lehrsatz.** Wenn in einem Vierecke die gegenüberliegenden Winkel gleich sind, so ist das Viereck ein Parallelogramm. [Fig. 19.]

Bew. Ist $\angle A = \angle C$
und $\angle B = \angle D$

so ist $\angle A + \angle B = \angle C + \angle D$ (S. F. 3.) $= 2R$

aber $\angle A + \angle B + \angle C + D = 4R$ (37.)

$A + B + A + B = 4R$ (S. F. 1.)

d. h. $2.(A + B) = 4R$

$\angle A + \angle B = 2R$

$AD \parallel BC$ (33.)

(Fig. 19.) Ist $\angle A = \angle C$
und $\angle D = \angle B$

so ist $\angle A + \angle D = \angle C + \angle B$ (S. F. 3.)

$\angle A + \angle D + \angle C + \angle B = 4R$ (s. 37.)

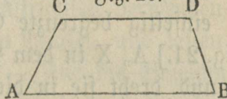
$\angle A + \angle D = 2R$

$AB \parallel CD$ (s. 33.)

44. **Lehrsatz.** Ist die Summe von zwei an einer Seite eines Viereckes liegenden Winkel gleich zwei Rechten, so ist das Viereck ein Trapez. [Fig. 20.]

Bew. Ist $A + C = 2R$,
so ist $AB \parallel CD$ (s. 33.)

Fig. 20.



§ 3. Die Winkel des Vielecks.

45. **Lehrsatz.** Die Summe der Innenwinkel eines n Eckes ist gleich $(n - 2) . 2R = (2n - 4) R$.

Bew. Setzt man an die eine Seite eines Polygones ein Dreieck an, so kommt zum Polygone eine Ecke, zur Winkelsumme aber kommen 2 Rechte hinzu, — Geht man nun von einem Dreiecke aus, so erhält man folgende Resultate:

Die Summe der Innenwinkel eines 3 Eckes $= 1 . 2R$
" " " " " 4 " $= 1 . 2 + 2 = 2 . 2R$
" " " " " 5 " $= 2 . 2 + 2 = 3 . 2R$
" " " " " 6 " $= 3 . 2 + 2 = 4 . 2R$
⋮
" " " " " n " $= (n - 2) \times 2R$.

Zusatz. Sind die Winkel eines n Eckes alle einander gleich, so ist ein jeder $= \frac{2n - 4}{n} R$.

46. **Lehrsatz.** Die Summe der Außenwinkel eines Vieleckes ist gleich vier Rechten.

Bew. Bezeichnet man die Innenwinkel eines Polygones mit A_1, A_2, A_3, ... A_n; die Außenwinkel respective mit a_1, a_2, a_3, ... a_n, so ist:

$$\left.\begin{aligned} A_1 + a_1 &= 2R \\ A_2 + a_2 &= 2R \\ A_3 + a_3 &= 2R \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ A_n + a_n &= 2R \end{aligned}\right\} \text{ſ. 18.}$$

$$A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = 2nR \quad (\text{S. F. 3})$$
$$A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n = 2nR - 4R \quad (45)$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = 4R \quad (\text{S. F. 4.})$$

Bemerkung. Faßt man das Polygon als eine mehrmals gebrochene geschlossene Linie auf, so ergiebt sich der Satz über Außenwinkel unmittelbar, indem man das Polygon nach und nach durch Brechung einer geraden Linie entstehen läßt.

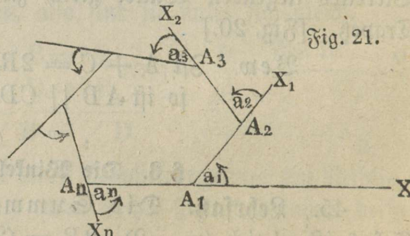


Fig. 21.

Bricht man nehmlich die in A_n einseitig begrenzte Gerade [Fig. 21.] $A_n X$ in dem Punkte A_1 und dreht sie in die Lage $A_1 X_1$, so ist bei A_1 eine Ecke und ein Außenwinkel a_1 entstanden. Bricht man die Linie bei A_2 zum zweiten Male und giebt ihr die Richtung $A_2 X_2$, so ist eine zweite Ecke und ein zweiter Außenwinkel a_2 gebildet. Setzt man die Brechung in dieser Weise fort und führt schließlich die Linie durch den Punkt A_n, so ist das Polygon vollendet. Bricht man nun noch die Linie in A_n und dreht sie in ihre ursprüngliche Lage zurück, so hat die Linie in Summa eine volle Drehung gemacht, zugleich sind nach und nach die sämmtlichen Außenwinkel gebildet, deren Summe also einem completen Winkel oder vier Rechten gleich ist. Da nun die sämmtlichen Innenwinkel mit den sämmtlichen Außenwinkeln zusammen 2nR betragen, so beträgt also die Summe der Innenwinkel allein 2nR — 4R.

Cap. II.

Abhängigkeit von den Elementen und der Elemente von einander.

Es ist an sich klar, daß eine Figur durch ihre Elemente — Seiten und Winkel — bestimmt ist, so daß zwei Figuren, die aus denselben Elementen, in derselben Reihenfolge zusammengesetzt sind, gehörig auf einander gelegt, vollkommen zusammenfallen, sich decken oder congruent sind. (Das Zeichen für die Congruenz ist $\cong$.)

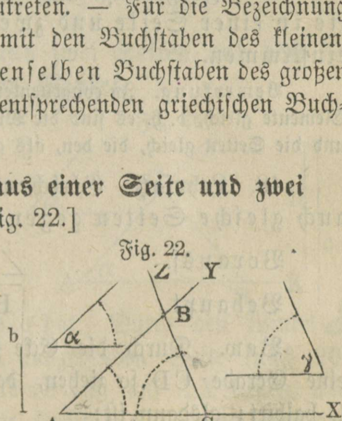
Nun sind aber die Elemente einer Figur offenbar nicht alle willkürlich oder von einander unabhängig. — Durch zwei Winkel eines Dreieckes z. B. ist auch schon der dritte gegeben (36. Zus. 1), woraus hervorgeht, daß zur Bestimmung einer Figur nicht alle ihre Elemente erforderlich sind, und es ist daher von Interesse zu ermitteln, durch wie viele und welche ihrer Elemente die Figur bestimmt sei. — Wir erfahren es, wenn wir die Figur aus ihren Elementen also herstellen, daß wir dieselben nach und nach zur Construction verwenden. — Wir beginnen mit dem Dreiecke, als der einfachsten Figur.

§ 1. Das Dreieck.

Das Dreieck hat sechs Elemente, drei Seiten und drei Winkel. In welcher Reihenfolge wir dieselben zur Construction verwenden, ist an sich gleichgiltig. — Wir beginnen mit einem Winkel, und lassen die anderen in jeder möglichen Folge hinzutreten. — Für die Bezeichnung wollen wir feststellen, das die Seiten mit den Buchstaben des kleinen, die gegenüberliegenden Ecken mit denselben Buchstaben des großen Alphabetes, die Winkel aber mit den entsprechenden griechischen Buchstaben bezeichnet werden.

1. Bestimmung des Dreieckes aus einer Seite und zwei Winkeln. [Fig. 22.]

Fig. 22.



a. Soll α der eine Winkel des geforderten Dreieckes sein, so bestimmen wir den Punkt A als die eine Ecke und die Linie A X als die Richtung der einen Seite willkürlich (da die Lage des Dreieckes gleichgiltig ist). — Darnach construiren wir den Winkel Y A X = Winkel α (s. 15), und haben somit auch die Richtung der zweiten Seite, aber noch kein Dreieck; — wir können noch ein zweites Element willkürlich wählen. — Den zweiten Winkel aber und die dem Winkel α gegen=

überliegende Seite können wir nicht brauchen, da wir sie nicht anbringen können. — Wir wählen daher die Linie b als die eine, dem Winkel α anliegende Seite, und schneiden von AX das Stück $AC = b$ ab, so haben wir in C die zweite Ecke des Dreieckes. — Die Lage der dritten Ecke auf der Linie AY ist aber noch unbekannt, und wir können daher noch über die Größe eines dritten Elementes willkürlich verfügen, und zwar können wir wählen 1) den zweiten Winkel, 2) die zweite, anliegende Seite, 3) die dem Winkel α gegenüberliegende Seite. — Ueber die Größe des zweiten Winkels können wir nicht ganz willkürlich verfügen, denn da die Summe aller Winkel eines Dreieckes gleich einem Gestreckten ist, so muß er offenbar kleiner sein, als der Nebenwinkel zu α. — Erfüllt nun der Winkel γ diese Bedingung und wir construiren den Winkel $ACZ = \gamma$, so muß der Schenkel CZ den Schenkel AY in einem Punkte B schneiden, und es ist das Dreieck ACB entstanden.

Hätten wir statt γ den Winkel β als drittes Element gewählt, so hätten wir den zwar nicht direct anbringen können, aber das Dreieck wäre doch bestimmt, da (nach 36. Zus. 1.) dann auch γ bekannt ist. — Wir ziehen hieraus den Schluß: Durch eine Seite und zwei Winkel sind auch die übrigen Elemente des Dreieckes, und somit das Dreieck selbst bestimmt.

47. **Folgerung.** Zwei Dreiecke sind congruent, wenn sie in einer Seite und zwei gleichliegenden Winkeln übereinstimmen.

Bemerkung. In congruenten Dreiecken sind die homologen (gleichliegenden) Elemente gleich, d. h. es sind die Winkel gleich, die den als gleich gegebenen Seiten, und die Seiten gleich, die den, als gleich gegebenen Winkeln gegenüber liegen.

48. **Lehrsatz.** Gleichen Winkeln liegen in einem Dreiecke auch gleiche Seiten gegenüber. [Fig. 23.]

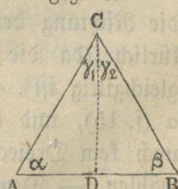
Voraussſ. $\angle\alpha = \angle\beta$

Behaupt. $BC = AC$

Bew. Durch die Ecke C läßt sich jedenfalls eine Gerade CD so ziehen, daß sie den Winkel bei C halbirt; alsdann ist:

$$\angle\alpha = \angle\beta \text{ (Vorauss.)}$$
$$\angle\gamma_1 = \angle\gamma_2 \text{ (Gemacht)}$$
$$CD = CD$$
$$\overline{AC = BC} \text{ (s. 47 Bem.)}$$

Fig. 23.



1) **Zusatz.** Sind in einem Dreiecke zwei Winkel gleich, so halbirt die Gerade, welche den dritten Winkel halbirt zugleich die Grundlinie und steht auf ihr normal.

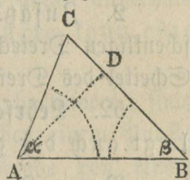
2) **Folgerung.** Hat das Dreieck zwei gleiche Winkel, so hat es auch zwei gleiche Seiten, und heißt ein gleichschenkliges; die dritte Seite aber heißt die Grundlinie. — Hat das Dreieck drei gleiche Winkel, so hat es auch drei gleiche Seiten, und heißt ein gleichseitiges Dreieck.

49. **Lehrsatz.** Dem größeren Winkel in einem Dreiecke liegt auch die größere Seite gegenüber.

Vorauss. $\angle \alpha > \angle \beta$

Behaupt. $CB > CA$

Fig. 24.

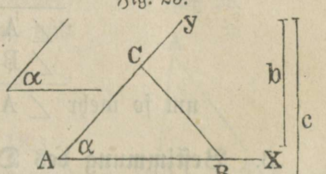


Bew. Macht man den Winkel $DAB = \beta$, so fällt nach der Voraussetzung AD zwischen AC und AB, also der Punkt D zwischen C und B, und es ist:

$$AD + DC > AC \quad (\text{s. } 3)$$
$$AD = BD \quad (\text{s. } 48)$$
$$\overline{BD + DC > AC \quad (\text{S. F. } 1)}$$
$$BD + DC = BC$$
$$\overline{BC > AC \quad (\text{S. F. } 1)}$$

2. Bestimmung des Dreieckes aus zwei Seiten und dem dazwischenliegenden Winkel.

Fig. 25.



Hat man den Punkt A als die eine Ecke und die Gerade AX als die Richtung der einen Seite, willkürlich gesetzt, so ist durch die gegebene Seite c die zweite Ecke B bestimmt, da es auf AX nur einen Punkt geben kann, welcher von A den bestimmten Abstand c hat. Durch den Winkel α ist die Richtung AY der zweiten von A ausgehenden Seite (nach 20) unzweideutig bestimmt. Die dritte Ecke C muß auf AY liegen, und da ihr Abstand von A (= b) gegeben ist, so ist auch sie, und somit das ganze Dreieck bestimmt.

50. **Folgerung.** Zwei Dreiecke sind congruent, wenn sie in zwei Seiten und dem zwischenliegenden Winkel übereinstimmen.

51. **Lehrsatz.** Gleichen Seiten liegen in einem Dreiecke auch gleiche Winkel gegenüber. — (Fig. 23.)

Vorauss. $\quad AC = BC$

Behaupt. $\quad \angle \beta = \angle \alpha$

Bew. Man lege durch die Ecke C die Gerade CD so, daß sie den Winkel ACB halbirt, so ist:

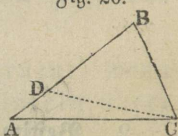
$$AC = BC \text{ (Vorauss.)}$$
$$\angle \gamma_1 = \angle \gamma_2$$
$$CD = CD$$
$$\overline{\angle \alpha = \angle \beta \text{ (s. 50 und Bem. zu 47).}}$$

1. Zusatz. Halbirt man in einem gleichschenkligen Dreiecke den Winkel am Scheitel, so steht die halbirende Gerade normal zur Basis, und sie halbirt auch die Basis.

2. Zusatz. Errichtet man in der Mitte der Basis, eines gleichschenkligen Dreieckes eine Normale zur Basis, so geht diese durch den Scheitel des Dreieckes.

52. **Lehrsatz.** Der größeren Seite in einem Dreiecke liegt auch der größere Winkel gegenüber. [Fig. 26.]

Fig. 26.

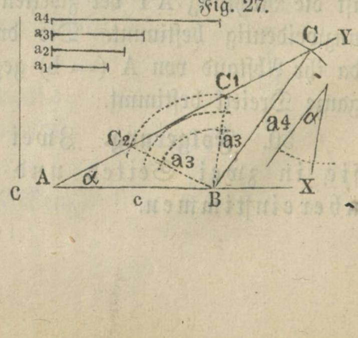


Bew. Ist in dem Dreiecke ABC die Seite $AB > BC$, so kann man von ihr das Stück $BD = BC$ abschneiden, und es wird dann die Verbindungslinie DC nothwendig zwischen AC und BC fallen, folglich ist:

$$\angle ACB > \angle DCB$$
$$\angle DCB = \angle BDC \text{ (s. 51.)}$$
$$\overline{\angle ACB > \angle BDC \text{ (S. F. 1.)}}$$
$$\angle BDC > \angle BAC \text{ (s. 35 Zus. 2.)}$$
$$\overline{\text{um so mehr } \angle ACB > \angle BAC. \text{ (S. F. 7.)}}$$

3. Bestimmung des Dreieckes aus einem Winkel, einer anliegenden und einer gegenüberliegenden Seite.

Fig. 27.



Hat man die Ecke A, und die Richtung (AX) der Seite c willkürlich gewählt, so ist die Ecke B durch die Seite c bestimmt, desgleichen die Richtung (AY) der zweiten von A ausgehenden Seite durch den Winkel α. — Die Dritte Ecke (C) muß nun einmal auf der Geraden AY liegen, und da ihr Abstand von der Ecke B (= a) gegeben ist, so muß sie zugleich auf der Peripherie des Kreises liegen, den man mit dem Radius a um B schlägt. Diese Kreislinie kann aber mit der Geraden AY vielleicht mehrere oder gar keinen Punkt gemein haben, wie ein Blick auf die Fig. 27 zeigt. — Wir erhalten daher zunächst ein bloß negatives Resultat:

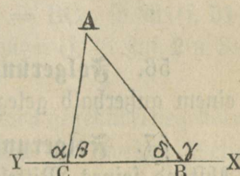
Zwei Seiten und der **nicht** zwischen liegende Winkel sind zur Bestimmung des Dreieckes ohne weiteres **nicht** ausreichend.

Der großen Bedeutung wegen, welche die s. g. Congruenz-Sätze für die Geometrie haben, ist es nothwendig, daß wir auch hier ein positives Resultat zu erzielen suchen. — Zu dem Zwecke haben wir zu untersuchen: Unter welchen Bedingungen wird eine Gerade von einer Kreislinie geschnitten, die um einen Punkt außerhalb der Geraden geschlagen wird, und wie viele Punkte kann eine Kreislinie mit einer Geraden gemein haben?

Es ist leicht einzusehen, daß beide Fragen leicht beantwortet sind, sobald festgestellt ist, welches die kürzeste Linie zwischen einem Punkte und einer Geraden ist, und wie viele gleich lange Gerade von einem Punkte zur Geraden gezogen werden können. — Hierüber belehren uns folgende Sätze:

53. **Lehrsatz.** Die Strecke von einem Punkte zu einer Geraden hin ist um so kürzer, je kleiner die Differenz der Winkel ist, die sie mit der Geraden bildet. [Fig. 28.]

Fig. 28.



Vorauss. XY sei die gegebene Gerade, A der gegebene Punkt außerhalb derselben, und

$\angle\alpha - \angle\beta < \angle\gamma - \angle\delta$

Behaupt. $AC < AB$

Bew. $\angle\alpha + \angle\beta = \angle\gamma + \angle\delta$ (s. 18.)

$\angle\alpha - \angle\beta < \angle\gamma - \angle\delta$ (Vorauss.)

Durch Subtraction: $2\beta > 2\delta$ (S. F. 13.)

$\beta > \delta$ (S. F. 11.)

$AB > AC$ (s. 49.)

Zusatz. Die kürzeste Strecke von einem Punkte nach einer Geraden hin ist die **Normale** von diesem Punkte zur Geraden. — Die Normale heißt daher auch der Abstand des Punktes von der Geraden.

54. **Lehrsatz.** Von einem Punkte nach einer Geraden hin sind die Strecken gleich, deren Fußpunkte gleich weit vom Fußpunkte der Normalen sind. [Fig. 29.]

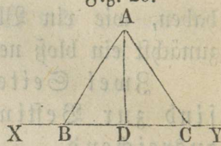
Vorauss. 1. $AD \perp XY$
2. $DB = DC$

Behaupt. $AB = AC$

Bew. $DB = DC$ (Vorauss. 2.)
$\angle ADB = \angle ADC$ (Vorauss. 1.)
$AD = AD$

$AB = AC$

Fig. 29.



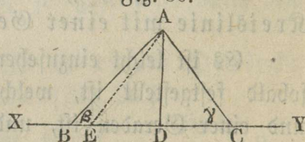
55. **Lehrsatz.** Unter zwei Strecken, von einem Punkte nach einer Geraden hin, ist diejenige die längere, deren Fußpunkt vom Fußpunkte der Normalen weiter absteht. [Fig. 30.]

Vorauss. 1. $AD \perp XY$
2. $DB > DC$

Behaupt. $AB > AC$

Bew. Macht man $DE = DC$, so fällt E zwischen B und D, und daher ist

Fig. 30.



$\angle BAD > \angle EAD$
$\angle EAD = \angle CAD$ (s. 50)

$\angle BAD > \angle CAD$ (S. F. 1.)
$\angle BAD + \beta = \angle CAD + \gamma$ (s. 35.)

$\angle \beta < \angle \gamma$ (S. F. 13.)

$AC < AB$ (s. 49.)

56. **Folgerung.** Nur zwei Punkte einer Geraden können von einem außerhalb gelegenen Punkte einen gleichen Abstand haben.

57. **Folgerung.** Ist der Radius eines Kreises kürzer als der Abstand seines Mittelpunktes von einer Geraden, so hat die Kreislinie mit der Geraden keinen Punkt gemein, sondern diese liegt ganz außerhalb des Kreises.

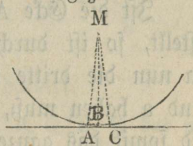
58. **Folgerung.** Ist der Radius eines Kreises gleich dem Abstande seines Mittelpunktes von einer Geraden, so geht die Kreislinie durch den Endpunkt der Normalen, und hat daher mit der Geraden diesen einen Punkt gemein, und nicht mehr. Denn nach 53 Zus. ist der Abstand aller übrigen Punkte der Geraden vom Mittelpunkte des

Kreises größer als der Radius, sie liegen also sämmtlich außerhalb der Kreislinie.

59. **Folgerung.** Ist der Radius eines Kreises länger als der Abstand seines Mittelpunktes von einer Geraden, so liegen einige Punkte der Geraden innerhalb der Kreislinie, und die Gerade wird von der Kreislinie mindestens in zwei Punkten geschnitten.

60. **Lehrsatz.** Eine Kreislinie kann mit einer Geraden nicht mehr als zwei Punkte gemein haben.

Fig. 31.



Bew. Liegen die drei Punkte A, B, C auf der Kreislinie, so sind ihre Abstände vom Mittelpunkte, MA, MB, MC, einander gleich (s. 9.) — Dieselben drei Punkte können daher nicht zugleich auf einer Geraden liegen (wie es hier scheint, wo der Radius sehr nahe der Normalen gleich ist), da nach 56 nur zwei Punkte einer Geraden von einem Punkte außerhalb derselben einen gleichen Abstand haben können.

In Bezug auf die vorliegende Aufgabe entnehmen wir nun aus dem Obigen folgenden Bescheid:

Ist die dem gegebenen Winkel α (Fig. 27) gegenüberliegende Seite a ($= a_3$) größer als die Normale von der Ecke B auf die Richtung AY der gegenüberliegenden Seite, aber kleiner als die zweite gegebene Seite c, so schneidet die mit a_3 um B geschlagene Kreislinie die Gerade AY zweimal, und nicht mehr (s. 60). Es entstehen daher zwei Dreiecke, AC_1B und AC_2B, die zwar nicht congruent, aber leicht zu unterscheiden sind, indem das eine einen spitzen, das andere einen stumpfen Winkel c gegenüberliegend haben muß: Denn da $BC_1 = BC_2$, so ist (s. 51) $\angle BC_1C_2 = \angle BC_2C_1$, also jeder von ihnen ein spitzer (s. 36 Zus. 2 u. 3), und daher $\angle AC_2B$ ein stumpfer (s. 35 Zus. 2).

61. **Folgerung.** Durch zwei Seiten und einen gegenüberliegenden Winkel ist das Dreieck bestimmt, sobald die Art des der zweiten Seite gegenüberliegenden Winkel bestimmt ist.

Ist die dem gegebenen Winkel α gegenüberliegende Seite a ($= a_1$) größer als die anliegende c, so liegt die Ecke A innerhalb der mit dem Radius a_1 und B geschlagenen Kreislinie, und diese schneidet die in A einseitig begrenzte Gerade AY nur einmal, in dem Punkte C, und es entsteht daher nur ein bestimmtes Dreieck:

62. **Folgerung.** Durch zwei Seiten und den der größeren Seite gegenüberliegenden Winkel ist das Dreieck unzweideutig bestimmt.

Beide Folgerungen lassen sich in den dritten Congruenz-Satz zusammen fassen:

63. **Folgerung.** Wenn zwei Dreiecke in zwei Seiten und einem gegenüberliegen Winkel übereinstimmen, so sind die Dreiecke congruent, sobald der zweite gegenüberliegende Winkel in beiden Dreiecken gleichartig ist, oder so bald der gleiche Winkel der größeren Seite gegenüber liegt.

4. Bestimmung des Dreieckes durch seine drei Seiten.

Ist die Ecke A und die Richtung (AX) der Seite c beliebig hingestellt, so ist durch die Seite c die Ecke B unzweideutig bestimmt. Da nun die dritte Ecke C von A den Abstand b und von B den Abstand a haben muß, so ist auch sie nach Satz 12 unzweideutig bestimmt, und somit das ganze Dreieck.

64. **Folgerung.** Zwei Dreiecke sind congruent, wenn sie in ihren drei Seiten übereinstimmen.

5. Einige geometrische Oerter und merkwürdige Punkte im Dreiecke.

65. **Lehrsatz.** Der Ort eines Punktes welcher von zwei festen Punkten einen gleichen Abstand hat, ist eine Gerade die auf der Verbindungslinie der Punkte normal steht.

Bew. Punkte die von zwei festen Punkten je gleiche Abstände haben können als die Scheitel von gleichschenkligen Dreiecken betrachtet werden, welche den Abstand der Punkte zur gemeinsamen Basis haben, sie liegen also (nach 51 Zus. 2) alle in der Geraden welche, durch die Mitte der Basis gehend, auf derselben normal steht. — (Vergl. Propäd. S. 50. Anhang).

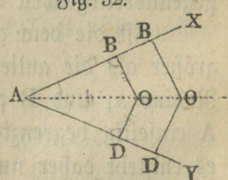
66. **Lehrsatz.** Der Ort eines Punktes, welcher von den Schenkeln eines Winkels gleiche Abstände hat, ist die Gerade, die den Winkel halbirt.

Bew. Ist $OB \perp AX$
$OD \perp AY$
$OD = OB$

$$\left.\begin{array}{r} \text{So ist } \triangle OAB \cong OAD \\ \hline \angle OAX = \angle OAY \end{array}\right\} \quad \left\{\begin{array}{l} OA = OA \\ OB = OD \\ \angle OBA = \angle ODA \text{ als Rechter} \end{array}\right.$$

(s. 63.)

Fig. 32.

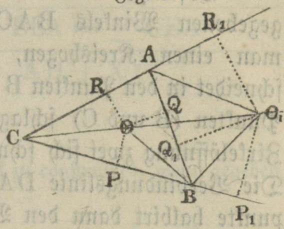


67. **Lehrsatz.** Die drei Geraden, welche die drei Innenwinkel, oder einen Innenwinkel und die beiden ihm nicht

anliegenden Außenwinkel eines Dreieckes halbiren, schneiden sich in einem Punkte, welcher von den drei Seiten gleiche Abstände hat.

Bew. Halbirt man den Winkel C durch OC und $\angle$ B durch OB, und fällt von dem Schneidepunkte O die Normalen OP, OQ und OR auf die drei Seiten, so ist:

Fig. 33.



$$\left.\begin{array}{ll} \triangle\, OCP \cong OCR \text{ und} & OBP \cong OBQ \\ \hline 1)\ OP = OR & 2)\ OP = OQ \end{array}\right\} (\text{s. } 47.)$$

$$\overline{}$$

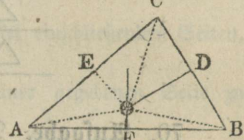
OR = OQ Es liegt also (nach 66) der Punkt O auf der Geraden die den Winkel A halbirt.

Anmerkung. Setzt man O_1, P_1, Q_1, R_1, statt O, P, Q, R, so hat man den Beweis des zweiten Theiles der Behauptung.

68. **Lehrsatz.** Errichtet man in den Mitten der drei Seiten eines Dreieckes Normalen zu den Seiten, so schneiden sich die Normalen in einem Punkte.

Bew. Sind F, D, E die Mitten der drei Seiten des Dreieckes ABC, und man errichtet in zweien derselben, (in F und D) Normalen, so schneiden sich dieselben (da $\angle B < 2R$) in einem Punkte (O). Verbindet man den Schneidepunkt O mit den drei Ecken, so ist:

Fig. 34.



$$\triangle\, AFO \cong \triangle\, BFO \left\{\begin{array}{c} AF = BF \\ FO = FO \\ \angle AFO = \angle BFO \end{array}\right\} (\text{s. } 50.)$$

$$1)\quad OA = OB$$

$$\triangle\, BDO \cong CDO \left\{\begin{array}{c} BD = CD \\ OD = OD \\ \angle BDO = \angle CDO \end{array}\right\} (\text{s. } 50.)$$

$$2)\quad OC = OB$$

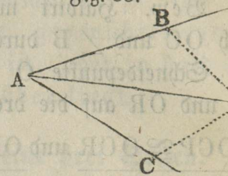
$$OA = OC \ (\text{S. F. } 2.)$$

Da hiernach AOC ein gleichschenkliges Dreieck ist, so muß (nach 51. Zus. 2) der Scheitel O in der Normalen liegen, die in der Mitte (E) der Basis errichtet ist.

6. Aufgaben, deren Lösung im Vorhergehenden als möglich vorausgesetzt ist.

69. **Aufgabe.** Einen gegebenen Winkel zu halbiren.

Fig. 35.



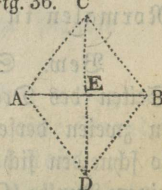
Lösung. Um den Scheitelpunkt A des gegebenen Winkels BAC [Fig. 35.] schlage man einen Kreisbogen, der die Schenkel schneidet in den Punkten B und C. Aus diesen Punkten (B und C) schlage man mit gleicher Zirkelöffnung zwei sich schneidende Kreisbogen. Die Verbindungslinie DA des Durchschnittspunktes mit dem Scheitelpunkte halbirt dann den Winkel BAC.

Der Beweis folgt aus 64.

69a. **Aufgabe.** Eine gegebene Strecke zu halbiren.

Lösung. Aus den Endpunkten A und B der gegebenen Strecke AB [Fig. 36.] schlage man mit gleicher Zirkelöffnung nach oben und unten zwei sich schneidende Kreisbogen. Die Verbindungslinie CD dieser Durchschnittspunkte halbirt die Linie AB in E.

Fig. 36.



Bew.

$$\frac{\triangle ACD \cong BCD \ (64.)}{\angle ACD = \angle BCD}$$

$$\frac{\triangle ACE \cong BCE \ (50.)}{AE = BE}$$

70. **Aufgabe.** Durch einen gegebenen Punkt eine Gerade normal zu einer gegebenen Geraden zu ziehen.

Lösung. Um den gegebenen Punkt A [Fig. 37.] ,welcher entweder in der gegebenen Linie XY liegt oder außerhalb derselben, schlage man einen Kreisbogen, der die Linie XY in zwei Punkten B und C schneidet; Um diese Punkte (B und C) schlage man dann mit gleichem Radius zwei sich schneidende Kreisbogen und verbinde den Durchschnittspunkt D dieser Kreisbogen mit dem gegebenen Punkte A. Diese Verbindungslinie DA steht dann senkrecht zu XY.

Fig. 37a.

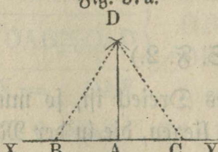
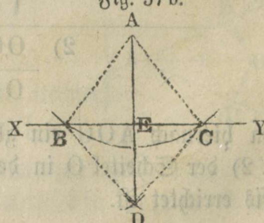


Fig. 37b.



Bew. $\triangle DAB \cong DAC$ (64.)

$\angle DAB = \angle DAC$

[Fig. 37a.] $DA \perp XY$ [Fig. 37b.] $\triangle BEA \cong CEA$ (50.)

$\angle BEA = \angle CEA$

$AD \perp XY$

Uebungsstoff.

1. Aufgabe. Das gleichschenklige Dreieck zu construiren, wenn gegeben sind:

1) Die Basis und der eine Schenkel.
2) Die Basis und der anliegende Winkel.
3) Die Basis und der gegenüberliegende Winkel.
4) Der eine Schenkel und der Winkel an der Basis.
5) Der eine Schenkel und der Winkel am Scheitel.

2. Aufgabe. Ein rechtwinkliges Dreieck zu construiren, wenn gegeben sind:

1) Die eine Cathete und ein spitzer Winkel. (Zwei Fälle.)
2) Die Hypotenuse und ein spitzer Winkel.
3) Die beiden Catheten.
4) Die Hypotenuse und eine Cathete.

Bemerk. Catheten heißen die den rechten Winkel einschließenden Seiten, Hypotenuse, die ihm gegenüberliegende Seite.

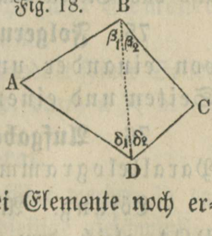
3. Aufgabe. Das gleichseitige Dreieck aus einer gegebenen Seite zu construiren.

§ 2. Das Viereck.

a) Das Viereck im Allgemeinen.

Die Construction des Vierecks läßt sich auf die des Dreieckes zurückführen.

Fig. 18.



Zieht man in dem Vierecke ABCD [Fig. 18] die Diagonale DB, so ist das eine Dreieck (ADB) durch drei, von einander unabhängige Elemente bestimmt. Durch dieses eine Dreieck ist zugleich ein Element des zweiten Dreieckes mit bestimmt — nehmlich die Diagonale DB — und es sind somit zur Bestimmung dieses zweiten Dreieckes bloß zwei Elemente noch erforderlich. Hieraus geht hervor:

Das Viereck im Allgemeinen ist durch fünf von einander unabhängige Elemente bestimmt.

b) Das Viereck im Besonderen.

1. Das Parallelogramm.

71. **Lehrsatz.** Die Diagonale theilt das Parallelogramm in zwei congruente Dreiecke. [Fig. 38.]

Bew. Zieht man in dem Parallelogramme ABCD die Diagonale CB, so ist:

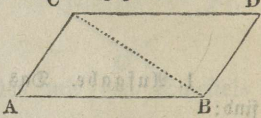
$CB = CB$

$\angle ABC = \angle DCB$ } Als Wechselwinkel an

$\angle ACB = \angle DBC$ } Parallellinien.

$\triangle ABC \cong DCB$ (s. 47.)

Fig. 38.



72. **Folgerung.** In einem Parallelogramme sind die gegenüberliegenden Seiten einander gleich.

73. **Lehrsatz.** Sind in einem Vierecke die gegenüberliegenden Seiten gleich, so ist das Viereck ein Parallelogramm.

Bew. Ist in dem Vierecke ABCD [Fig. 38.] die Seite $AB = CD$ und $AC = BD$, so wird dasselbe durch die Diagonale in zwei Dreiecke zerlegt, welche in ihren drei Seiten übereinstimmen, also congruent sind. Folglich:

$\angle ABC = \angle DCB$ desgl. $\angle ACB = \angle DBC$ (als homologe Winkel.)

$AB \parallel CD$ (s. 32.) $AC \parallel DB$ (s. 32.)

74. **Lehrsatz.** Sind in einem Vierecke zwei gegenüberliegende Seiten gleich und parallel, so ist das Viereck ein Parallelogramm. [Fig. 38.]

Bew. Ist in dem Vierecke ABCD die Seite $AB = \parallel CD$ so wird dasselbe durch die Diagonale CB in zwei Dreiecke zerlegt, welche in zwei Seiten und dem zwischenliegenden Winkel übereinstimmen, folglich sind auch (nach 50) die homologen Seiten AC und BD gleich, also das Viereck (nach 73) ein Parallelogramm*).

75. **Folgerung.** Das Parallelelogramm ist durch drei, von einander unabhängige Elemente (nehmlich durch zwei Seiten und einen Winkel) bestimmt.

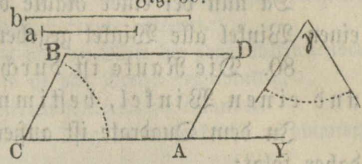
76. **Aufgabe.** Aus zwei Seiten und einem Winkel ein Parallelogramm zu construiren. [Fig. 39.]

Lösung. An der Unbegrenzten XY construirt man den Winkel BCA gleich dem gegebenen Winkel γ und schneidet von dem einen

*) Die Schüler haben die Beweise der Sätze 72 bis 74 regelrecht in Gleichungen auszuführen.

Schenkel desselben das Stück CA gleich der einen gegebenen Seite b und von dem anderen Schenkel das Stück CB gleich der anderen gegebenen Seite a ab. Von B aus construirt man dann BD || CA, und

Fig. 39.

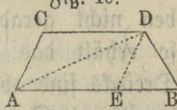


von A aus AD || CB, oder man schlägt um B mit b und um A mit a als Radius Kreisbogen und verbindet den Durchschnittspunkt D derselben mit B und mit A, so ist in jedem Falle ACBD ein Parallelogramm. (Die erstere Construction stützt sich auf die Definition, die letztere auf 73)

2. Das Trapez.

Das Trapez (ABCD) [Fig. 40.] kann entweder durch eine Diagonale (AD) in zwei Dreiecke, oder durch eine parallele Transversale (DE) in ein Dreieck und ein Parallelogramm zerlegt werden. Aus jeder Zerlegung folgt gleich einfach:

Fig. 40.



77. Das Trapez ist durch vier von einander unabhängige Elemente bestimmt.

78. **Aufgabe.** Ein Trapez aus je vier, von einander unabhängige Elemente zu construiren.

Bemerk. Ob man das Trapez aus zwei Dreiecken oder aus einem Dreiecke und einem Parallelogramme zu construiren habe, erkennt man leicht, wenn man sich zuvor ein beliebiges Trapez zeichnet und an demselben die gegebenen Elemente bemerkt.

3. Das Rechteck.

Da in einem Rechtecke alle Winkel als Rechte gegeben, die gegenüberliegenden Seiten aber gleich sind, so folgt ohne Weiteres:

79. **Folgerung.** Das Rechteck ist durch zwei Elemente, namentlich durch seine beiden Seiten bestimmt.

Bem. Man nennt daher das Rechteck ein Product seiner Seiten, und bezeichnet es, wenn a und b seine Seiten sind, durch $a \times b$. / Das Dreieck nennt man daher ein Product seiner drei/2 Seiten

4. Die Raute und das Quadrat.

Als besondere Vierecke müssen hier noch angeführt werden 1) das gleichseitige Viereck oder die Raute, 2) das gleichseitige gleichwinklige Viereck oder das Quadrat. — Beide Vierecke sind (nach 73) zugleich Parallelogramme.

Da nun bei einer Raute durch eine Seite alle Seiten, und durch einen Winkel alle Winkel gegeben sind, so folgt:

80. Die Raute ist durch zwei Elemente, durch eine Seite und einen Winkel, bestimmt.

In dem Quadrate ist außerdem der Winkel als Rechter gegeben, daher folgt:

81. Das Quadrat ist durch ein Element, nehmlich durch seine Seite, bestimmt.

Bem. Ist a die Seite des Quadrates, so bezeichnet man das Quadrat durch $a\,\square = a^2$.

§ 3. Das Vieleck.

Setzt man an ein Polygon ein Dreieck an (so daß die Seiten desselben nicht geradlinige Verlängerungen der Seiten des Polygones sind), so erhält das Polygon eine Ecke mehr. — Zur Bestimmung dieses Dreiecks sind aber bloß zwei Elemente erforderlich, weil die eine Seite bereits, als Seite des ursprünglichen Polygones, gegeben ist. Aus dieser Bemerkung kann man leicht die Anzahl der Elemente, die zur Bestimmung eines Polygones im Allgemeinen nöthig sind, ableiten:

Zur Bestimmung eines Dreieckes sind erforderlich 3 Elem.
" " Viereckes " " $3+2=3+1.2$ "
" " Fünfeckes " " $3+1.2+2=3+2.2$ "
" " Sechseckes " " $3+2.2+2=3+3.2$ "
" " Siebeneckes " " $3+3.2+2=3+4.2$ "
⋮ ⋮ ⋮
" " n Eckes " " $3+(n-3).2=2n-3$ "

Der Winkel eines regelmäßigen Polygones ist (nach 45 Zus.) $= \frac{2n-4}{n} R$, also bekannt; da nun auch die Seiten unter sich gleich sind, so folgt:

82. Das regelmäßige Polygon ist durch ein Element, und zwar durch eine Seite, bestimmt.

Uebungsstoff.

1. In einem Parallelogramme halbiren sich die Diagonalen.
2. Ein Viereck, in welchem sich die Diagonalen halbiren, ist ein Parallelogramm.
3. In einem Rechtecke sind die beiden Diagonalen gleich.
4. Ein Parallelogramm, in welchem die Diagonalen gleich sind, ist ein Rechteck.

5. In einem rechtwinkligen Dreiecke ist der Scheitel des rechten Winkels von der Mitte der Hypotenuse um die halbe Hypotenuse entfernt.

6. Ist in einem Dreiecke die eine Ecke von der Mitte der gegenüberliegenden Seite, um die Hälfte dieser Seite entfernt, so ist das Dreieck rechtwinklig.

7. In einer Raute stehen die Diagonalen senkrecht zu einander.

8. Ein Parallelogramm, in welchem die Diagonalen senkrecht zu einander stehen, ist eine Raute.

9. In einem Quadrate sind die Diagonalen gleich und schneiden sich unter rechten Winkeln.

10. Sind in einem Parallelogramme die Diagonalen gleich und stehen senkrecht zu einander, so ist das Parallelogramm ein Quadrat.

Cap. III.

Die Größe.

Jede geschlossene Figur umgrenzt ein Flächenstück von bestimmter allseitiger Ausdehnung, von der man sich eine bildliche Vorstellung machen kann. Diese anschauliche Auffassung der Größe einer umgrenzten Fläche ist hier von keinem Interesse. Wir haben die Flächen ihrer Größe nach mit einander zu *vergleichen*. — Nun lassen sich aber die Flächen von verschiedener Form nicht leicht mit einander vergleichen, und wir haben daher zunächst die Aufgabe, *den Flächen eine Form zu geben, die für den Vergleich geeignet ist*, zu welcher Forderung uns die Bemerkung berechtigt, daß gleich große Flächen von verschiedener Form sehr wohl denkbar sind. — Dieses Capitel zerfällt daher in zwei Abschnitte:

§ 1. Verwandlung der Form.

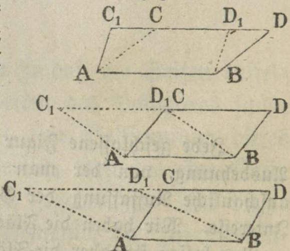
Um hier nicht im Dunklen zu tappen, müssen wir erwägen, welche Form für den Vergleich die geeignetste ist. Es ist offenbar die Form, bei welcher die Größe der Fläche durch ihre beiden Dimensionen bestimmt ist, d. h. die Form des *Rechteckes*. Zur Rechtfertigung dieser Behauptung diene folgende Erörterung:

Der Ausdruck einer Dimension ist die gerade Linie. Die beiden Dimensionen einer Ebene werden also durch zwei, zu einander in bestimmter Lage befindliche, d. h. zu einander normal stehende Geraden bestimmt. In der Ebene selbst können sie aber jede beliebige Lage einnehmen, da in einer unbegrenzten Ebene keine besonders ausgezeichnete Linie gegeben ist. — Anders gestaltet es sich bei begrenzten Flächen, wo die Dimensionen eine bestimmte, in verschiedener Richtung verschiedene, Größe haben. Nehmen wir z. B. ein Parallelogramm, so sind alle Linien, die der einen Seite parallel sind (als Parallelen zwischen Parallelen), dieser Seite selbst gleich. Es eignet sich daher die eine Seite selbst zum Ausdruck der einen Dimension. Wir nennen diese Seite die *Grundlinie* — und wählen als solche gewöhnlich die horizontale Seite. — Alle Normalen aber zwischen der Grundlinie und der ihr parallelen Seite sind ebenfalls (als Parallelen zwischen Parallelen) einander gleich. — Nennen wir daher die Normale, von einem Punkte der gegenüberliegenden Seite auf die Grundlinie gefällt, die Höhe des

Parallelogrammes, so erhalten wir den Satz: Die Dimensionen eines Parallelogrammes werden durch die Grundlinie und Höhe bestimmt. — Bei einem Rechtecke aber stehen die beiden Seiten senkrecht zu einander. Nimmt man die eine als Grundlinie, so ist die andere die Höhe, und da nun das Rechteck (nach 79) durch seine beiden Seiten bestimmt ist, so ist obige Behauptung gerechtfertigt.

Mag nun auch für den Vergleich die Form des Rechteckes genügen, für die anschauliche Auffassung ist jedenfalls die Form geeigneter, in welcher die beiden Dimensionen gleich sind, das ist die Form des Quadrates. — Somit ist unser Ziel bekannt: Wir haben zu ermitteln ob sich ein beliebiges Polygon zunächst in ein Rechteck und dann weiter in ein Quadrat verwandeln läßt.

Fig. 41.



Da das Rechteck ein Parallelogramm mit einem bestimmten Winkel ist, so haben wir die Aufgabe zu lösen: Ein Parallelogramm in ein anderes mit einem vorgeschriebenen Winkel zu verwandeln. — Aendert man nun den Winkel CAB [Fig. 41.] des Parallelogrammes ABCD, ohne seine Dimensionen zu ändern, so kommt es nach und nach in die drei besonderen Lagen der bezeichneten Figur. — Durch die Bewegung der Seite BD ist das ursprüngliche Parallelogramm um das Dreieck D_1BD verkleinert; durch die gleichzeitige Bewegung der Seite A ist es aber um das Dreieck C_1AC vergrößert. Da nun beide Dreiecke stets in zwei Seiten und dem zwischen liegenden Winkel übereinstimmen, also congruent sind, so ist durch eine solche Aenderung des Winkels die Größe des Parallelogrammes nicht geändert. — Das Resultat läßt sich folgendermaßen in einen Satz fassen:

83. **Lehrsatz.** Zwei Parallelogramme, die gleiche Dimensionen, d. h. gleiche Grundlinie und Höhe haben, sind gleich groß. [Fig. 41.]

$$\triangle C_1AC \cong \triangle D_1BD \left\{ \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} C_1A = D_1B \\ CA = DB \end{array} \right\} \text{(s. 72.)} \\ \angle C_1AC = \angle D_1BD \text{ (Abs. I. Übst. 2.)} \end{array} \right.$$

$$ABC_1D - \triangle C_1AC = ABC_1D - \triangle D_1BD \text{ (S. F. 4.)}$$

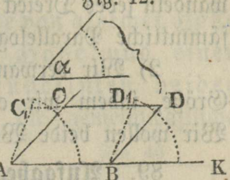
d. h. $\qquad ABCD = ABC_1D_1$

Anmerk. Sind die Parallelogramme getrennt, so denke man sich das eine beweglich und trage es so auf das andere, daß die gleichen Grundlinien in ihren Endpunkten (also auch überhaupt) zusammenfallen. Da nun die Gegenseiten der gemeinschaftlichen Grundlinie parallel sind und von ihr in allen Punkten gleiche Abstände haben, so müssen sie nothwendig beide in eine, der Grundlinie parallele Linie fallen, und wir erhalten so eine der drei obigen Lagen.

Mit diesem Satze ist nun auch die Lösung der obigen Aufgabe gegeben.

84. **Aufgabe.** Ein Parallelogramm in ein anderes von gleicher Größe und einem vorgeschriebenen Winkel zu verwandeln. [Fig. 42.]

Fig. 42.



Lösung. Ist ABCD das gegebene Parallelogramm und α der gegebene Winkel, so construire man an der Grundlinie (oder deren Verlängerung), in jedem Endpunkte einen, dem Winkel α gleichen Winkel ($C_1AB = D_1BK = \alpha$) und verlängere die Schenkel, bis sie die Gegenseite (oder deren Verlängerung) in C_1 und D_1 schneiden, so ist C_1ABD_1 das verlangte Parallelogramm. — Will man das Parallelogramm in ein Rechteck verwandeln, so braucht man nur in den Endpunkten der Grundlinie rechte Winkel an dieselbe zu setzen, oder, was dasselbe ist, man errichtet in jedem Endpunkte der Grundlinie eine Normale zu derselben und verlängert die Normalen bis zum Durchschnitt mit der Gegenseite.

85. **Folgerung.** Jedes Parallelogramm läßt sich in ein Rechteck von gleicher Größe verwandeln.

Gehen wir jetzt zu der Verwandlung des Dreieckes über, da das Dreieck das einfachste der Polygone ist.

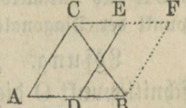
Aus Lehrs. 71 ersehen wir, daß die Diagonale ein Parallelogramm in zwei congruente, also auch gleiche, Dreiecke zerlegt. Mit Hinzuziehung von Lehrs. 83 ergiebt sich hieraus sogleich:

86. **Lehrsatz.** Das Dreieck ist die Hälfte des Parallelogrammes von gleicher Grundlinie und Höhe.

Zusatz. Dreiecke von gleicher Grundlinie und Höhe sind gleich.

87. **Aufgabe.** Ein Dreieck in ein Parallelogramm zu verwandeln. [Fig. 43.]

Fig. 43.



Lösung. Man halbirt die Grundlinie AB des Dreieckes ABC in D, zieht DE || AC und CE || AD so ist das Parallelogramm ADEC = $\triangle$ ABC. — Denn ergänzt man das Dreieck ABC zum Parallelogramm ABCF, so ist sowohl das Dreieck ABC als auch das Parallelogramm ADCE gleich der Hälfte von ABCF.

Da nun jedes Parallelogramm in ein Rechteck von gleicher Größe verwandelt werden kann, so folgt:

88. **Folgerung.** Jedes Dreieck kann in ein Rechteck von gleicher Größe verwandelt werden.

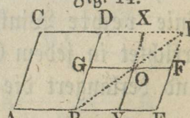
Um ein Polygon in ein Rechteck zu verwandeln, können wir jetzt zwei Wege einschlagen:

1) Wir zerlegen das Polygon durch Diagonalen in Dreiecke, verwandeln jedes Dreieck in ein Parallelogramm, und vereinigen, wo möglich, sämmtliche Parallelogramme in ein Parallelogramm.

2) Wir verwandeln das Polygon direct in ein Dreieck von gleicher Größe, indem wir eine Ecke nach der anderen verschwinden lassen. — Wir wollen beide Wege versuchen.

89. **Aufgabe.** Es soll ein Parallelogramm construirt werden, welches gleich der Summe zweier Parallelogramme ist. [Fig. 44.]

Fig. 44.



Analyse. Da wir (nach 84.) den Winkel eines Parallelogrammes beliebig ändern können, so sind wir berechtigt, die beiden Parallelogramme als gleichwinklig vorauszusetzen. Zwei gleichwinklige Parallelogramme können wir aber immer so an einander setzen, daß ihre Grundlinien eine Gerade bilden. — Sind nun ABCD und BGFE die beiden also aneinander gesetzten Parallelogramme, und wir ergänzen die ganze Figur AEFGDC zu einem Parallelogramme AEHC, so ist dasselbe um das Parallelogramm GFHD größer als die Summe der gegebenen Parallelogramme, und wir haben also von demselben ein Stück = GFHD so abzuschneiden, daß das Uebrigbleibende ein Parallelogramm ist. — Zu dem Zwecke suchen wir in der Linie GF einen Punkt O so zu bestimmen, daß eine durch diesen Punkt parallel der Seite BD gezogene Linie XY ein Parallelogramm XYHE = GDHF oder, da XOFH beiden gemein ist, YOFE = GOXD abschneidet. — Verbinden wir nun den Punkt O mit den Punkten B und H, so ist:

$$\left.\begin{array}{l} BOY = BOG \\ HOF = HOX \end{array}\right\} 71.$$

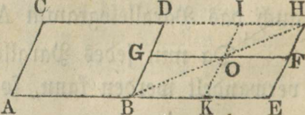
$$YOFE = GOXD \text{ (Annahme.)}$$

$$BOY + HOF + YOFE = BOG + HOX + GOXD \text{ (S. F. 3.)}$$

Hieraus folgt, daß der Punkt O so gewählt werden muß, daß die Linie BOH das Parallelogramm BEHD halbirt, d. h. der Punkt O ist der Durchschnittspunkt der Diagonale BH mit der Seite GF.

Lösung. Ziehen wir die Diagonale BH und durch den Durchschnittspunkt O die Linie IK || DB, so ist: [Fig. 45.]

Fig. 45.



$$\left.\begin{array}{l} \triangle BHE \cong BHD \\ \triangle BOK \cong BOG \\ \triangle OHF \cong OHI \end{array}\right\} 71$$

$$BHE - (BOK + OHF) = BHD - (BOG + OHI) \text{ (S. F. 3 und 4)}$$

$$\text{d. h. } OKEF = OIDG$$

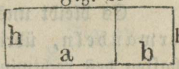
$$BKOG + OKEF = BKOG + OJDG \text{ (S. F. 3.)}$$
$$\text{d. h. } BEGF = BKDI$$

$$ABCD + BEGF = ABCD + BKDI = AKCI \text{ (S. F. 3.)}$$

1. Zusatz. Die Summe zweier Rechtecke von gleicher Höhe ist gleich einem Rechtecke von derselben Höhe und einer Grundlinie, gleich der Summe der Grundlinien beider Rechtecke. Sind die Grundlinien a und b, die gemeinschaftliche Höhe h, so ist:

$$a \times h + b \times h = (a + b) \times h. \text{ [Fig. 46.]}$$

Fig. 46



2. Zusatz Zieht man durch einen Punkt der Diagonale eines Parallelogrammes zwei den Seiten parallele Linien, so wird das Parallelogramm in vier Parallelogramme getheilt, von welchen die zwei einander gleich sind, durch welche die Diagonale nicht geht.

Uebungsstoff.

1. Ein Parallelogramm zu construiren, welches einem gegebenen Parallelogramme gleich ist, und eine vorgeschriebene Seite hat.
2. Ein beliebiges Viereck oder Fünfeck in ein Parallelogramm von gleicher Größe zu verwandeln.
3. Ein Parallelogramm zu construiren, welches der Differenz zweier Parallelogramme gleich ist.
4. Den geometrischen Ort der Scheitel aller Dreiecke zu bestimmen, die über derselben Grundlinie gezeichnet einander gleich sind.

Können wir nun zwei Parallelogramme, so können wir auch beliebig viele in ein Parallelogramm vereinigen, und die Verwandlung eines Polygones in ein Parallelogramm, — also auch in ein Rechteck — ist auf dem ersten Wege möglich — aber weitläufig. — Versuchen wir daher auch den zweiten Weg.

90. **Aufgabe.** Ein Polygon in ein anderes, von gleicher Größe zu verwandeln, welches eine Ecke weniger hat. [Fig. 47.]

Fig. 47.

Lösung. Wollen wir die eine Ecke des gegebenen Polygones ABCD .... N, etwa die Ecke B verschwinden lassen, so schneiden wir durch die Diagonale NB das Dreieck NAB ab und ersetzen es durch ein anderes von gleicher Größe, dessen Scheitel aber in der Verlängerung der Seite BC liegt, was (nach 86 Zus.) leicht ausführbar ist: Wir verlängern also CB über B hinaus, ziehen durch A die Linie $AA_1 \parallel NB$ und verbinden den Durchschnittspunkt A_1 (dieser Parallelen mit der Verlängerung von CB) mit N, so ist $\triangle NA_1B = NAB$ (86 Zus.), also auch $A_1CD\ldots N = ABCD\ldots N$. — Zugleich hat das Polygon $A_1CD\ldots N$ eine Ecke (die bei B) weniger als das ursprüngliche.

Lassen wir in dieser Weise eine Ecke nach der anderen verschwinden, so müssen wir endlich auf ein Dreieck kommen, das dem ursprünglichen Polygone gleich ist und (nach 87) in ein Rechteck verwandelt werden kann.

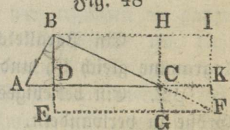
91. **Folgerung.** Jedes Polygon kann in ein Rechteck verwandelt werden.

Es bleibt uns nun noch die Aufgabe, ein Rechteck in ein Quadrat zu verwandeln, übrig. — Zur Lösung dieser Aufgabe verhelfen uns zwei Eigenschaften des rechtwinkligen Dreieckes, welche hier sogleich, ohne vorhergehende Motivirung, hingestellt werden:

92. **Lehrsatz.** Fällt man in einem rechtwinkligen Dreiecke, vom Scheitel des rechten Winkels, eine Normale auf die Hypotenuse, so ist das Quadrat dieser Normalen gleich dem Rechtecke aus den beiden Abschnitten der Hypotenuse. [Fig. 48.]

$h^2 = x.y$

Fig. 48



Voraussf. $\angle ABC = 1R$
$BD \perp AC$

Behaupt. $BD\square = AD \times DC$.

Bew. Man verlängere die Normale BD und mache die Verlängerung $DE = DA$. Ziehe durch E die Linie $EF \parallel AC$ und durch den Punkt F, in welchem sie die Verlängerung von BC schneidet, die Linie $FI \parallel BE$; ferner $BI \parallel AC$, und endlich durch C die Linie $HG \parallel BD$. Dann verlängere man noch AC bis sie IF in K schneidet. — Alsdann ist DCEG das Rechteck aus DC und AD, und nach 89 Zus. 2 gleich dem Rechteck HCIK, dessen eine Seite $HC = BD$ ist. Wir haben also bloß zu zeigen, daß auch die zweite Seite $CK = BD$ ist, welches sich sogleich aus der Congruenz der Dreiecke CKF und BDA ergiebt, denn es ist:

$FK = AD$ (weil beide $= DE$)
$\angle CKF = \angle BDA$ (beide sind Rechte.)
$\angle KCF = \angle DBA$ (beide machen mit $\angle DBC$ einen Rechten.)

$\triangle CKF \cong BDA$ (s. 47.)

$CK = BD$

$CKHI = BD\square$
$CKHI = DCEG$ (89 Zus. 2.)

$$\begin{array}{l} BD\square = DCFG \text{ (S. F. 2.)} \\ DCEG = DC \times DA \\ \hline BD\square = DC \times DA \text{ (S. F. 2.)} \end{array}$$

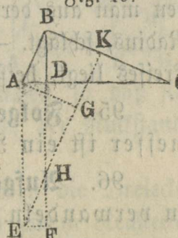
93. **Lehrsatz.** Fällt man in einem rechtwinkligen Dreiecke eine Normale vom Scheitel des rechten Winkels auf die Hypotenuse, so ist das Quadrat der Kathete gleich dem Rechtecke aus der Hypotenuse und dem, der Kathete anliegenden Abschnitte. [Fig. 49.]

$c^2 = a . x$

Voraussf. $\angle ABC = 1R$
$BD \perp AC$

Behaupt. $AB\square = AC \times AD.$

Fig. 49.



Bew. Man verlängert die Normale BD und macht die Verlängerung $DF = AC$; zieht $AE \parallel DF$ und $FE \parallel AD$; darnach $EK \parallel AB$ und $AG \parallel BC$. — Alsdann ist $ADEF = AC \times AD$; wir haben nachzuweisen, daß $ABKG = AB\square$ und dann, daß $ABKG = ADEF$ ist:

$\triangle ABC \cong AGE$ $\left\{ \begin{array}{l} AC = AE \text{ gemacht} \\ \angle ABC = AGE, \text{ als Rechte} \\ \angle BAC = \angle GAE \text{ beide ergänzen GAC zum Rechten.} \end{array} \right.$

$AB = AG$

Da nun auch alle Winkel in ABKG Rechte sind, so ist:

$$\begin{array}{l} ABKG = AB\square \\ \text{nun ist } ABKG = ABHE \text{ (83.)} \\ \hline AB\square = ABHE \text{ (S. F. 2.)} \\ ABHE = ADFE \text{ (83.)} \\ \hline AB\square = ADFE = AC \times AD \text{ (S. F. 2.)} \end{array}$$

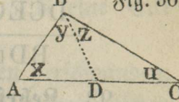
Welchen der beiden Sätze man nun auch zur Verwandlung eines Rechteckes in ein Quadrat mag anwenden wollen, jedenfalls muß man zuvor noch die Aufgabe lösen: Ueber einer Geraden ein rechtwinkliges Dreieck zu construiren, so daß der Scheitel in eine auf der gegebenen Linie errichtete Normale fällt. — Zur Lösung dieser Aufgabe verhilft uns der, im Uebungsstoffe zum vorigen Cap. angeführte Satz:

94. **Lehrsatz.** Ist die eine Ecke eines Dreieckes von der Mitte der gegenüberliegenden Seite um die Hälfte dieser Gegenseite entfernt, so ist das Dreieck rechtwinklig. [Fig. 50.]

Vorauss. $AD = DB = DC$

Behaup. $\angle ABC = 1R$

Fig. 50.



Bew. $\angle x = \angle y$ (weil $AD = BD$) } (s. 51.)
$\angle u = \angle z$ (weil $DB = DC$) }

$\angle x + u = \angle y + z = \angle ABC$ (S. F. 3.)

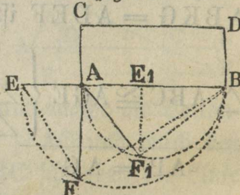
$\angle ABC = 1R$ (s. 35 und Uebst. 4.)

Der im Lehrsatze 94 ausgesprochenen Bedingung genügen nun alle Dreiecke, deren Scheitelpunkt in der Peripherie eines Kreises liegen, den man aus der Mitte der Grundlinie, mit der halben Grundlinie als Radius, schlägt. — Der Winkel dessen Scheitel in der Peripherie eines Kreises liegt, heißt ein Peripheriewinkel.

95. **Folgerung.** Der Peripheriewinkel über dem Durchmesser ist ein Rechter.

96. **Aufgabe.** Ein gegebenes Rechteck in ein Quadrat zu verwandeln. [Fig. 51.]

Fig. 51.



1. Lösung. Man verlängere die Grundlinie AB des gegebenen Rechteckes ABCD, und mache die Verlängerung $AE =$ der zweiten Seite AC des Rechtecks; schlage dann über EB als Durchmesser einen Halbkreis und verlängere CA bis zur Peripherie, so ist AF die Seite des Quadrates, welches gleich dem Rechtecke ABCD ist. — Denn verbindet man die Punkte E und B mit F, so ist $\angle EFB = 1R$ (95), folgl. $AF\square = AB \times AE = ABCD$ [92.]

2. Lösung. Von der Grundlinie AB schneidet man $AE_1 = AC$ ab, schlägt über AB als Durchmesser einen Halbkreis, errichtet in E_1 die Normale $E_1 F_1$ zu AB und verbindet den Durchschnittspunkt F_1 dieser Normalen und der Peripherie mit dem Endpunkte A der Grundlinie, von welchem aus die zweite Seite abgeschnitten wurde, so ist diese Linie AF_1 die Seite des verlangten Quadrates. — Denn verbindet man den Punkt F_1 auch mit B, so ist $\angle AF_1B = 1R$ (95), folgl. $AF_1\square = AB \times AE_1 = ABCD$ [93.]

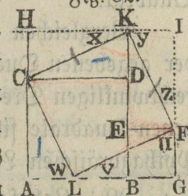
97. **Folgerung.** Jedes Polygon läßt sich in ein Quadrat verwandeln. (s. 91 und 96.)

Noch eine Methode, ein Polygon in ein Quadrat zu verwandeln, ist denkbar: Man zerlegt das Polygon durch Diagonalen in Dreiecke, verwandelt die einzelnen

Dreiecke in Quadrate und vereinigt die Quadrate, wo möglich, direct in ein Quadrat. — Wenn diese Methode vor der vorigen auch keinen Vorzug verdient, so ist jedenfalls die Lösung der Aufgabe, zwei Quadrate direct in ein Quadrat zu vereinigen, von Interesse.

98. **Aufgabe.** Ein Quadrat zu construiren, welches gleich der Summe zweier gegebenen Quadrate ist. [Fig. 52.]

Fig. 52.



Lösung. Wir setzen die gegebenen Quadrate so aneinander, daß die Grundlinien eine gr. Linie bilden, und ergänzen die also entstandene Figur ACDEFG zu einem Quadrate AHIG. — Verlängern wir nun die Seite BD bis K, so ist das Quadrat AHIG um die beiden Rechtecke CHKD und EKIF größer als die Summe der gegebenen Quadrate, und wir müssen also von diesem Quadrate Flächenstücke abzuschneiden suchen, so daß sie zusammen den genannten beiden Rechtecken gleich sind, der Rückstand aber ein Quadrat ist.

Durch die beiden Diagonalen CK und KF werden die Dreiecke CHK und KIF abgeschnitten, welche zusammen gleich einem Rechtecke sind. Ziehen wir daher FL || KC und verbinden C mit L. Läßt sich nun beweisen daß die zuletzt abgeschnittenen Dreiecke den vorigen gleich sind, das Viereck CKLF aber ein Quadrat ist, so ist die Aufgabe so richtig gelöst:

Bew. I. $\triangle HCK \cong IKF \begin{cases} \left.\begin{array}{l} CH = KI \\ KH = FI \end{array}\right\} \text{Nach der Construction} \\ \angle CHK = \angle KIF, \text{ als Rechte.} \end{cases}$

1) CK = KF (s. 50.)

2) $\angle CKF = 1R \begin{cases} \angle x = z \text{ aus I} \\ \angle z + y = 1R, \text{ weil } \angle I = 1R \\ \hline \angle x + y = 1R \end{cases}$

3) $\angle KFL = 1R$ (da FL || KC gezogen wurde.)

II. $\triangle LFG \cong FKI \begin{cases} FG = KI \\ \angle G = \angle I, \text{ als Rechte} \\ \angle u = \angle y \ \{\text{beide ergänzen z zu 1 R.}\} \end{cases}$

4) FL = KF

5) CK = LF (aus 1 und 4.)

Da nun auch CK || LF ist, so folgt, wenn man zugleich 1, 2 und Lehrsatz 74 berücksichtigt, daß CKFL ein Quadrat ist. — Nun ist endlich auch

III. $\triangle CAL \cong \triangle LGF \left\{ \begin{array}{l} CL = LF \\ \angle A = \angle G \text{ als Rechte} \\ \angle w = \angle u \text{ beide erg. v zum Rechten.} \end{array} \right.$

Es sind also die vier abgeschnittenen Dreiecke unter sich gleich, und zusammen gleich den beiden Rechtecken. Folglich ist CKFL das verlangte Quadrat.

Vergleichen wir aber die Seite dieses Quadrates mit den Seiten der gegebenen Quadrate, so sehen wir, daß dieselbe die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes ist, dessen Katheten die Seiten der beiden gegebenen Quadrate sind. — So sind wir dann hiermit auf den berühmten Pythagoräischen Lehrsatz geführt:

99. **Lehrsatz.** In einem rechtwinkligen Dreiecke ist das Quadrat der Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate beider Katheten. [Fig. 53.]

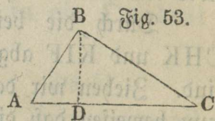


Fig. 53.

Bew. Der Beweis folgt unmittelbar aus Lehrsatz 93. — Ist nehmlich ABC ein bei B rechtwinkliges Dreieck und $BD \perp AC$, so ist:

$$\left. \begin{array}{l} AB\square = AC \times AD \\ BC\square = AC \times DC \end{array} \right\} \text{(s. 93.)}$$

$$AB\square + BC\square = AC \times AD + AC \times DC = AC \times (AD + DC)$$
$$= AC \times AC = AC\square. \quad \text{[89 Zus. 1.]}$$

Bemerkung. Aus diesem Satze ergiebt sich nun eine viel einfachere Lösung der Aufgabe 98: Man setzt die Seiten der gegebenen Quadrate rechtwinklig an einander und zieht die Hypotenuse, so ist diese die Seite des gewünschten Quadrates.

Anhang.

1. **Lehrsatz.** Das Quadrat über der Summe zweier Linien besteht aus der Summe der Quadrate und dem doppelten Rechtecke beider Linien.

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab.$$

Setzt man in der Figur 52, $AB = a$ und $BG = b$, so zeigt ein bloßer Anblick der Figur die Wahrheit.

2. **Lehrsatz.** Das Quadrat über der Differenz zweier Linien ist gleich der Summe der Quadrate beider Linien, vermindert um das doppelte Rechteck aus denselben.

Bew. Ist (Fig. 54) $AE = a$; $EB = b$; $AEFG = a^2$; $ICGH = b^2$; $ACBD = (a-b)^2$, so ist: $ACBD = AEGF + ICHG - (BKFE + IDKH)$, d. h. $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2 \times ab$.

Fig. 54.

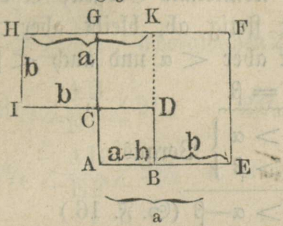
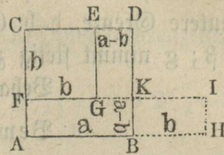


Fig. 55.



3. **Lehrsatz.** Die Differenz der Quadrate zweier Linien ist gleich dem Rechtecke aus der Summe und der Differenz der Linien

Bew. Ist Fig. 55 AB = a; BH = CF = b; ABCD = a□; CFEG = b□, so ist: ABCD — CFEG = AHFI (da BKIH = GEDK), d. h. $a^2 - b^2 = (a + b) \times (a - b)$.

4. **Aufgabe.** Ein Quadrat zu construiren, welches gleich dem Unterschiede von zwei gegeben Quadraten ist.

Lösung. Man construirt ein rechtwinkliges Dreieck, in welchem die Hypotenuse gleich der Seite des größern, die eine Kathete gleich der Seite des kleineren Quadrates ist. Die zweite Kathete ist dann die Seite des verlangten Quadrates.

5. **Aufgabe.** Ein Quadrat zu construiren, welches ein beliebiges Vielfache eines gegebenen Quadrates ist.

Lösung. Mit Anwendung des Pythagoräischen Lehrsatzes kann die Seite des verlangten Quadrates bald als Hypotenuse, bald als Kathete eines rechtwinkligen Dreieckes construirt werden.

§ 2. Reduction von Flächenverhältnissen auf Linienverhältnisse.

Die oben gelehrte Verwandlung der Form läßt sich wohl im Kleinen, auf dem Papiere, nicht aber auf dem freien Felde mit einem ganzen Grundstücke ausführen. — Eben so ist die directe Quadrirung eines Grundstückes oder eines Landes praktisch unmöglich, und daher hat die theoretische Geometrie noch die Aufgabe zu lösen: Die Flächenmessung auf eine Linienmessung zurückzuführen, oder das Verhältniß zweier Flächen durch das Verhältniß zweier Linien zu ersetzen. — Da hierbei die Gleichheit zweier Verhältnisse nachzuweisen ist, — Verhältnisse aber im Allgemeinen irrational sind, so liegt vor allem die Frage vor: Woraus erkennt man die Gleichheit irrationaler Größen? Diese Frage findet in folgendem Lehrsatze Erledigung.

100. **Lehrsatz.** Zwei irrationale Größen sind gleich, wenn sie stets zwischen denselben Grenzen bleiben, auch wenn die Differenz der Grenzen sich grenzenlos der Null nähert.

Voraussſ. α und β ſind zwei irrationale Größen; G die obere, g die untere Grenze, d. h. G nimmt ſtetig ab, bleibt aber $> \alpha$ und auch $> \beta$; g nimmt ſtetig zu, bleibt aber $< \alpha$ und auch $< \beta$.

Behaupt. $\alpha = \beta$

Bew. $\left.\begin{array}{l} G > \alpha \\ g < \beta \end{array}\right\}$ Voraussſ.

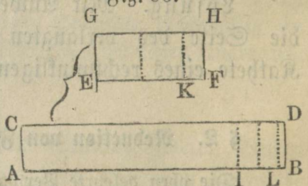
$G - g > \alpha - \beta$ (S. F. 16.)

Da nun bei ſtetiger Abnahme von G, und gleichzeitigem Wachſen von g die Differenz $G - g$ ſich grenzenlos der Null nähert, und doch $> \alpha - \beta$ bleibt, ſo muß $\alpha - \beta = 0$, d. h. es muß $\alpha = \beta$ ſein.

Um hiernach die Gleichheit zweier Verhältniſſe zu erweiſen, genügt es nicht etwa zu zeigen, daß für beide Verhältniſſe die Grenzen um ſo weiter dieſelben bleiben, je ſorgfältiger die Meſſung ausgeführt wird, denn das würde höchſtens die fragliche Gleichheit als wahrſcheinlich richtig darthun. — Man muß vielmehr zu erkennen ſuchen, weshalb die Grenzen für beide Verhältniſſe dieſelben ſein und bleiben müſſen, man mag ſie beſtimmen können oder nicht. — Dieſe Erkenntniß wird bei Raumgrößen meiſt dadurch gewommen, daß man zeigt, daß bei Ermittlung der Grenzen für das eine Verhältniß die Grenzen für das andere Verhältniß zugleich mit erhalten werden.

101. **Lehrſatz.** Das Verhältniß zweier Rechtecke, die eine gleiche Seite haben, iſt gleich dem Verhältniſſe ihrer ungleichen Seiten.

Fig. 56.



Bew. Sind ABCD und EFGH (Fig. 56) zwei Rechtecke, die eine Seite gleich haben (AC = EG) und die wir kurz durch AD und EH bezeichnen wollen, ſo würde man das Verhältniß ihrer ungleichen Seiten (nach 8) finden, indem man die kleinere von der größeren ſo oft als möglich abträgk, den Reſt von der kleineren ꝛc. Denken wir uns das ausgeführt und in den Theilpunkten gleichzeitig Normalen errichtet, ſo ſchneiden dieſe Normalen jedesmal ſo viele dem kleineren Rechtecke congruente Rechtecke ab, als die gemeſſene Seite Abſchnitte hat, woraus hervorgeht, daß in der That die Rechtecke mit den Seiten zugleich gemeſſen worden:

Iſt 1)	$AB = 2 \times EF + IB$	ſo iſt nothwendig	$AD = 2 \times EH + ID$
2)	$EF = 2 \times IB + KF$	„ „ „	$EH = 2 \times ID + KH$
3)	$IB = 2 \times KF + LB$	„ „ „	$ID = 2 \times KH + LD$
⋮	⋮	⋮	⋮

Bestimmen wir hieraus die Grenzen, so erhalten wir:

aus 1) .. $2 \angle \frac{AB}{FE} \angle 3$ desgleichen $2 \angle \frac{AD}{EH} \angle 3$ (Differ. d. Grenzen: $3-2=1$)

" 2) .. $2^1/_3 \angle \frac{AB}{EF} \angle 2^1/_2$ " $2^1/_3 \angle \frac{AD}{EH} \angle 2^1/_2$ (" " " $2^1/_2 - 2^1/_3 = {}^1/_6$)

" 3) $2^2/_5 \angle \frac{AB}{EF} \angle 2^3/_7$ " $2^2/_5 \angle \frac{AD}{EH} \angle 2^3/_7$ (" " " $2^3/_7 - 2^2/_5 = {}^1/_{35}$)

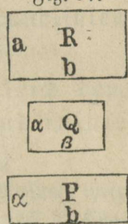
⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮

Mag nun die Messung der Grundlinien richtig ausgeführt sein oder nicht, mag sie weiter fortgesetzt werden können oder nicht, — es ist gleichgiltig; wir wissen jedenfalls, daß für das Verhältniß der Rechtecke die Grenzen stets dieselben sein müssen, die man für das Verhältniß ihrer ungleichen Seiten erhält, und daß der Unterschied dieser Grenzen je mehr und mehr, und grenzenlos sich der Null nähert. — Beide Verhältnisse sind also nach Lehrs. 100 nothwendig einander gleich:

$$AD : EH = AB : EF.$$

102. **Lehrsatz.** Das Verhältniß von zwei beliebigen Rechtecken ist gleich dem Producte aus den Verhältnissen ihrer entsprechenden beiden Seiten.

Fig. 57.



Voraussf. R und Q (Fig. 57) sind zwei beliebige Rechtecke; a und α, b und β ihre entsprechenden beiden Seiten.

Behaupt. $R : Q = \frac{a}{\alpha} \times \frac{b}{\beta}$

Bew. Um den Satz auf den vorigen zurückzuführen construiren wir ein Hilfsrechteck P so, daß dasselbe mit R die eine Seite (b), mit Q die andere (α) gleich hat.

Aus 101 folgt alsdann:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ R : P = a : \alpha \text{ oder } R = \frac{a}{\alpha} \times P \\ 2)\ P : Q = b : \beta \text{ oder } P = \frac{b}{\beta} \times Q \end{array}\right\} \text{Vergl. Abs. I Cap. 1. § 2.}$$

$$R = \frac{a}{\alpha} \times \frac{b}{\beta} \times Q \text{ (S. F. 1)}$$

$$\text{oder } R : Q = \frac{a}{\alpha} \times \frac{b}{\beta} \text{ (Abs. I Cap. 1. § 2.)}$$

Zusatz. Das Verhältniß von zwei Parallelogrammen, oder von zwei Dreiecken ist gleich dem Producte aus dem Verhältnisse ihrer Grundinien und dem Verhältnisse ihrer Höhen.

Anm. Da ein jedes Vieleck sich in ein Rechteck verwandeln läßt, so ist mit diesem Satze die Aufgabe des Paragraphen gelöst. Im Anhange fügen wir noch ein Paar an sich bemerkenswerthe und für die Anwendung bequeme Sätze hinzu.

Anhang.

1. **Lehrsatz.** Das Quadrat der Hypotenuse verhält sich zum Quadrate der Kathete wie die Hypotenuse zur Projection*) der Kathete auf der Hypotenuse.

Bew. Bezeichnet a die Hypotenuse, b die eine Kathete, p ihre Projection auf der Hypotenuse, so ist:

$$a^{\square} = a \times a \text{ (s. 79 Bem.)}$$
$$b^{\square} = a \times p \text{ (s. 93)}$$
$$\overline{a^{\square} : b^{\square} = a \times a : a \times p \text{ (S. F. 6)}}$$
$$a \times a : a \times p = a : p \text{ (s. 101)}$$
$$\overline{a^{\square} : b^{\square} = a : p \text{ (S. F. 2.)}}$$

2. **Lehrsatz.** Die Quadrate der Katheten verhalten sich zu einander, wie ihre Projectionen auf der Hypotenuse.

Bew. Sind b und c die Katheten, p und q respective ihre Projectionen auf der der Hypotenuse, so ist

$$\left.\begin{array}{l} b^{\square} = a \times p \\ c^{\square} = a \times q \end{array}\right\} \text{(s. 93.)}$$
$$\overline{b^{\square} : c^{\square} = a \times p : a \times q \text{ (S. F. 6)}}$$
$$a \times p : a \times q = p : q \text{ (s. 101)}$$
$$\overline{b^{\square} : c^{\square} = p : q \text{ (S. F. 2.)}}$$

§ 3. Der Flächeninhalt.

Unter § 1 fanden wir als die geeignetste Form für das Flächenmaß die Form des Quadrates. — Da aber die Ausmessung der Fläche auf die Messung von Linien reducirt werden muß, so ist es nothwendig, daß die Flächeneinheit aus der Längeneinheit abgeleitet werde: Als Flächeneinheit dient daher stets das Quadrat der bei der Messung gebrauchten Längeneinheit.

103. **Definition.** Das Verhältniß einer begrenzten Fläche (einer Figur) zur Flächeneinheit heißt die **Maßzahl** der Fläche. — Die auf die Flächeneinheit bezogene Maßzahl der Fläche bildet den **Inhalt** der Fläche.

*) Fällt man von den Endpunkten einer Strecke Normalen auf eine Gerade, so heißt die Strecke zwischen den Fußpunkten der Normalen die Projection der ersteren Strecke.

Folgerung. Sind zwei Flächen gleich, so sind auch ihre auf dieselbe Einheit bezogenen Maßzahlen gleich.

104. **Lehrsatz.** Die Maßzahl eines Rechteckes ist gleich dem Producte aus den Maßzahlen seiner beiden Seiten.

Bew. Sind R und Q zwei Rechtecke; a und b die Seiten von R; α und β die Seiten von Q, so ist nach 102:

$$R : Q = \frac{a}{\alpha} \times \frac{b}{\beta}$$

Bezeichnen wir nun mit m die Längeneinheit, und setzen $\alpha = \beta = m$, so ist $Q = m^{\square}$, welches, in die obige Gleichung gesetzt, uns giebt:

$$R : m^{\square} = \frac{a}{m} \times \frac{b}{m}$$

Nach 103 ist $R : m^{\square}$ die Maßzahl des Rechteckes R; $\frac{a}{m}$ und $\frac{b}{m}$ aber sind die Maßzahlen seiner Seiten (s. Abs. I. Cap. 1. § 2). Hiermit ist also der vorliegende Satz bewiesen.

1. **Zusatz.** Der Inhalt eines Rechteckes ist das Product aus den Maßzahlen seiner beiden Seiten, bezogen auf die Flächeneinheit*).

2. **Zusatz.** Der Inhalt eines Parallelogrammes ist gleich dem Producte aus den Maßzahlen seiner Grundlinien und Höhe, bezogen auf die Flächeneinheit. (s. 83.)

3. **Zusatz.** Der Inhalt eines Dreieckes ist gleich dem halben Producte aus den Maßzahlen seiner Grundlininie und Höhe, bezogen auf die Flächeneinheit. (s. 86.)

Hiermit wäre nun zwar die Ausmessung der Fläche auf die Messung ihrer Dimensionen zurückgeführt. Dennoch setzt das Verfahren mindestens noch die Construction von Normalen voraus, welche manche practische Schwierigkeiten darbietet, und es ist daher nicht bloß theoretisch von Interesse den Inhalt einer Fläche, wo möglich, aus ihren Elementen selbst abzuleiten. Da ein jedes Polygon durch Diagonalen in Dreiecke zerlegt werden kann, so können wir uns füglich auf das

---

*) Ist die eine Seite des Rechteckes 7 Fuß, die andere 4 Fuß lang, so läßt sich das Rechteck in 7×4 Quadrate zerlegen, deren Seite ein Fuß lang ist, d. h. die Maßzahl des Rechteckes ist $4 \times 7 = 28$, und sein Inhalt beträgt 28 Quadratfuß. — Der Unterschied zwischen Fläche und Flächeninhalt besteht darin, daß man unter letzterem Ausdrucke die in Quadrate der Längeneinheit zerlegte Fläche sich vorzustellen hat. — Löst man die zweite Gleichung unter 104 algebraisch in R auf, schreibt also $R = \frac{a}{m} \times \frac{b}{m} \cdot m^{\square}$, so steht links die Fläche, rechts die in Quadrate zerlegte Fläche oder der Flächeninhalt.

Dreieck beschränken. — Nun ist zwar das Dreieck durch je drei von einander unabhängige Elemente bestimmt; da aber Winkel und Seiten, als ungleichartige Größen, sich nicht unmittelbar vergleichen lassen, und wir somit (vorläufig wenigstens) kein Mittel besitzen, um die Abhängigkeit der Winkel von den Seiten in Zahlen auszudrücken, so können hier bei der Berechnung des Inhaltes eines Dreieckes aus seinen Elementen die Winkel nicht in Betracht kommen.

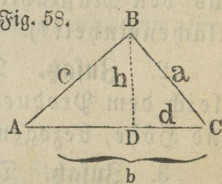
105. **Aufgabe.** Es soll eine Formel entwickelt werden zur Berechnung des Flächeninhaltes eines Dreieckes aus den Maßzahlen seiner drei Seiten.

Lösung. Bezeichnen wir die Maßzahlen der drei Seiten des Dreieckes ABC (Fig. 58) respective mit a, b, c; die Maßzahl der Höhe (BD) mit h, und die des Inhaltes mit i, so ist nach 104 Zus. 3:

$$1)\ i = \tfrac{1}{2}\, b \times h$$

und wir haben daher h durch die Maßzahlen der Seiten zu ersetzen. Bezeichnen wir zu dem Zwecke mit d die Maßzahl der Projection der Kathete a auf der Hypotenuse, so erhalten wir aus Satz 99 mit Berücksichtigung der Folgerung unter 103 für die Bestimmungen von h die beiden Gleichungen.

Fig. 58.



$$2)\ h^2 = a^2 - d^2$$
$$3)\ h^2 = c^2 - (b-d)^2$$

$$c^2 - (b-d)^2 = a^2 - d^2 \text{ (S. F. 2)}$$
$$(b-d)^2 = b^2 + d^2 - 2bd \text{ (S. 48 Lehrs. 2)}$$

$$c^2 - (b^2 + d^2 - 2bd) = a^2 - d^2$$
$$\text{oder } c^2 - b^2 - d^2 + 2bd = a^2 - d^2$$
$$-c^2 + b^2 + d_2 \qquad = -c^2 + b^2 + d^2 \text{ addirt (Arithm. S. 79, 2.)}$$

$$2bd = a^2 + b^2 - c^2$$

durch 2 b div. . . . . 4) $d = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2b}$; dieser Werth in 2 substituirt giebt:

$$5)\ h^2 = a^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b}\right)^2$$

Zwar ist hiermit h durch die Maßzahlen der drei Seiten ausgedrückt, doch ist die Form für die Rechnung unbequem, und wir haben dieselbe noch zu reduciren:

$$h^2 = \left(a + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b}\right) \times \left(a - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b}\right)$$

(Arithm. S. 69, 3 und Anhang Satz 3)

$$= \frac{2ab + a^2 + b^2 - c^2}{2b} \times \frac{2ab - a^2 - b^2 + c^2}{2b}$$

$$=\frac{(a+b)^2-c^2}{2b}\times\frac{c^2-(a-b)^2}{2b}\quad[\text{denn } 2ab-a^2-b^2=-(a-b)^2]$$

$$=\frac{(a+b+c)\,(a+b-c)}{2b}\times\frac{(c+a-b\,.\,(c-a+b)}{2b}$$

$$\text{folglich}\ldots h=\sqrt{\frac{(a+b+c)\,(a+b-c)\,(a+c-b)\,(b+c-a)}{4b^2}}$$

Setzen wir nun diesen Ausdruck für h in 1, so erhalten wir:

$$i=\tfrac{1}{2}b\,.\sqrt{\frac{(a+b+c)\,(b+c-a)\,(a+c-b)\,(a+b-c)}{4b^2}}$$

Bringt man noch $\frac{1}{2}$ b unter die Wurzel:

$$i=\sqrt{\frac{(a+b+c)\,(b+c-a)\,(a+c-b)\,(a+b-a)}{16}}$$

Dieser Ausdruck erhält eine noch elegantere und für die Rechnung bequemere Form, wenn wir die Summe der Maßzahlen

$a+b+c=s$ setzen, so ist

$b+c-a=s-2a$

$a+c-b=s-2b$

$a+b-c=s-2c$

$a+b+c = 2s$
$b+c-a = 2s-2a$
$a+c-b = 2s-2b$
$a+b-c = 2s-2c$

$$i=\sqrt{\frac{s}{2}\cdot\frac{s-2a}{2}\cdot\frac{s-2b}{2}\cdot\frac{s-2c}{2}}$$

$i=\sqrt{s.(s-a)(s-b)(s-c)}$

$$\text{oder}\qquad i=\sqrt{\frac{s}{2}\cdot\left(\frac{s}{2}-a\right)\cdot\left(\frac{s}{2}-b\right)\cdot\left(\frac{s}{2}-c\right)}$$

Cap. IV.

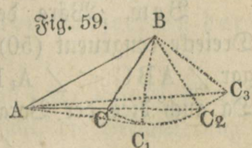
Gegenseitige Abhängigkeit der Seiten und Winkel eines Dreieckes.

Daß an eine vollständige Lösung dieser Aufgabe hier nicht gedacht werden kann, ist schon oben bemerkt worden. — Nur einige allgemeine Beziehungen zwischen den Seiten und den Winkeln, sollen hervorgehoben werden.

106. **Lehrsatz.** Wird der eine Winkel eines Dreieckes geändert so erleidet die gegenüberliegende Seite eine entsprechende Aenderung.

Bew. Lassen wir in dem Dreiecke ABC [Fig. 59] den Winkel bei B wachsen, so daß der Schenkel BC (ohne seine Länge zu ändern) nach und nach die drei Lagen BC_1; BC_2; BC_3 einnimmt, so ist:

Fig. 59.

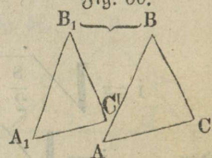


in der 1. Lage $BC_1 + C_1A > BC + CA$ (s. 4)
$$B_1C = BC$$
$$1)\ C_1A > CA \text{ (S. F. 9)}$$
in der 2. Lage (wo C auf die Verlängerung von AC fällt):
$$AC_2 + BC_1 > BC_2 + AC_1 \text{ (s. 7)}$$
$$BC_1 = BC_2$$
$$AC_2 > AC_1 \text{ (S. F. 9)}$$
in der 3. Lage: $AC_3 + BC_2 > BC_3 + AC_2$ (s. 7)
$$BC_2 = BC_3$$
$$AC_3 > AC_2 \text{ (S. F. 9)}$$

Es ist also $AC_3 > AC_2 > AC_1 > AC$, d. h. wächst in einem Dreiecke der eine Winkel, so wächst auch die gegenüberliegende Seite. — Das Resultat läßt sich auch also aussprechen:

107. **Lehrsatz.** Stimmen zwei Dreiecke in zwei Seiten überein, nicht aber in dem zwischenliegenden Winkel, so liegt auch dem größeren eingeschlossenen Winkel die größere dritte Seite gegenüber. [Fig. 60.]

Fig. 60.



Vorauss. $AB = A_1B_1$
$$BC = B_1C_1$$
$$\angle ABC > \angle A_1B_1C_1$$
Behaupt. $AC > A_1C_1$

Bew. Deckt man das eine Dreieck $A_1B_1C_1$ so auf das andere ABC, daß die eine gleiche Seite A_1B_1 auf AB fällt, so muß das erste Dreieck zu letzterem in eine der drei Lagen kommen, welche die Dreiecke ABC_1; ABC_2; ABC_3; zu ABC in der Fig. 59 einnehmen.

108. **Lehrsatz.** Stimmen zwei Dreiecke in zwei Seiten überein, nicht aber auch in der dritten, so liegt der größeren dritten Seite auch der größere Winkel gegenüber. [Fig. 60.]

Vorauss. $AB = A_1B_1$
$$BC = B_1C_1$$
$$AC > A_1C_1$$
Behaupt. $\angle ABC > A_1B_1C_1$

Bew. Wäre der Winkel $ABC = \angle A_1B_1C_1$, so wären die Dreiecke congruent (50), also könnte nicht $AC > A_1C_1$ sein; wäre aber gar $\angle ABC < \angle A_1B_1C_1$, so müßte nach 107 auch $AC < A_1C_1$ sein. Da auch dies der Voraussetzung widerspricht, so kann nur
$$\angle ABC > \angle A_1B_1C_1 \text{ sein.}$$

109. **Lehrsatz.** Ist das Quadrat der einen Seite eines Dreieckes gleich der Summe der Quadrate der beiden andern Seiten, so liegt der ersteren Seite ein rechter Winkel gegenüber. [Fig. 61]

Voraussetzung. $AB^{\square} = AC^{\square} + BC^{\square}$

Behauptung. $\angle ACB = 1 . R$

Bew. Wir construiren $CD \perp AC$; machen $CD = CB$ und verbinden D mit A, so ist:

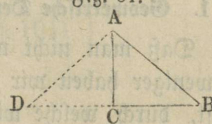
$AD^{\square} = AC^{\square} + DC^{\square}$ (s. 99.)

$AB^{\square} = AC^{\square} + CB^{\square}$ (Voraussetzung)

$AD^{\square} = AB^{\square}$ (S. F. 2, da $DC^{\square} = CB^{\square}$)

$AD = AB$

Fig. 61.



Es stimmen also die beiden Dreiecke ACD und ACB in ihren drei Seiten überein, folglich sind auch die homologen Winkel in ihnen gleich, also: $\angle ACB = \angle ACD = 1 . R.$

110. **Lehrsatz.** Das Quadrat der Seite eines Dreieckes, welche einem spitzen Winkel gegenüber liegt, ist gleich der Summe der Quadrate der beiden anderen Seiten, vermindert um das doppelte Rechteck aus der einen und der Projection der anderen auf diese.

Bew. Ist in dem Dreiecke ABC [Fig. 58.] der Winkel C ein spitzer, so fällt das Loth BD (von B auf AC gefällt) in das Dreieck, und es ist DC ($= d$) die Projection von a auf b. — Nun ist:

$$\left.\begin{array}{l} c^2 = h^2 + (b - d)^2 \,.\,. \\ h^2 = a^2 - d^2 \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. \end{array}\right\} \text{(s. 99.)}$$

$$c^2 = a^2 - d^2 + (b - d)^2 \text{ (S. F. 1)}$$
$$= a^2 - d^2 + b^2 + d^2 - 2\,bd \text{ (S. 48 Satz 2)}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \,.\, bd$$

111. **Lehrsatz.** Das Quadrat der Seite eines Dreieckes, welche einem stumpfen Winkel gegenüber liegt, ist gleich der Summe der Quadrate der beiden anderen Seiten, plus dem doppelten Rechtecke aus der einen und der Projection der anderen auf diese.

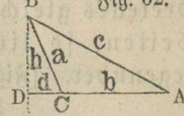
Bew. Ist in dem Dreiecke ABC [Fig. 62.] der Winkel C ein stumpfer, so trifft die Normale, von B auf AC gefällt, die Verlängerung von AC und es ist CD ($= d$) die Projection von a auf b. — Nun ist:

$$\left.\begin{aligned} c^2 &= h^2 + (b + d)^2 \\ h^2 &= a^2 - d^2 \end{aligned}\right\}\ (\text{s. } 99.)$$

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 - d^2 + (b + d)^2 \ (\text{S. F. } 1.) \\ &= a^2 - d^2 + b^2 + d^2 + 2\,bd \ (\text{S. } 48, \text{ Satz } 1.) \end{aligned}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2\,bd$$

Fig. 62.



Cap. V.

Anwendung der Arithmetik auf die Geometrie.

§ 1. Geometrische Deutung und Construction arithmetischer Symbole.

Daß man nicht mit Linien rechnen kann, ist an sich klar; nichts destoweniger haben wir in Obigem Linien durch dieselben Symbole verknüpft, durch welche wir in der Arithmetik die Zahlformen ausdrücken, deren Werthe respective durch die Addition, Subtraction, Multiplication und Division gefunden werden. — Der Sinn ist folgender: Sobald die Maßzahl eines Raumgebildes durch eine bestimmte arithmetische Operation aus den Maßzahlen der dieses Raumgebilde bestimmenden Linien ermittelt wird, so verknüpfen wir die Linien selbst durch das gleiche Operationszeichen.

Bezeichnen wir mit a, b, c, d .... beliebige Strecken und mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ... respective die Maßzahlen derselben, so daß

$$a = \alpha\,.\,m;\ b = \beta\,.\,m;\ c = \gamma\,.\,m;\ d = \delta\,.\,m....$$

so erhalten wir folgende Definitionen:

112. **Definition.** $a + b$ bezeichnet eine Strecke;

Denn construiren wir $c = a + b$ (s. Propäd. § 8.)

so ist in der That auch $\gamma = \alpha + \beta$

113. **Definition.** $a - b$ bezeichnet eine Strecke;

Denn construiren wir $c = a - b$ (s. Propäd. § 9)

so ist in der That ... $\gamma = \alpha - \beta$

114. **Definition.** $a \times b$ bezeichnet ein **Rechteck** mit den Seiten a und b.

Denn bezeichnen wir die Fläche desselben mit R, so ist nach 104:

$$\frac{R}{m^{\square}} = \alpha\,.\,\beta$$

115. **Definition.** $a : b = \frac{a}{b}$ bezeichnet eine Zahl (s. Abs. I. Cap. 1. § 2)

116. **Definition.** $\frac{a\,.\,b}{c}$ bezeichnet die **Seite** eines **Rechteckes**, welches gleich dem Rechtecke $a \times b$ ist und zur Seite c hat.

Denn setzen wir 1) $\frac{ab}{c} = x$ und construiren

2) $cx = ab$ (s. unter 89 Uebungsst. 1)

so erhalten wir durch Substitution der obigen Werthe für a, b und c:

$$\gamma . m . x = \alpha . m \times \beta . m = \alpha\beta . m^{\square} \text{ (104 Zus. 1)}$$

$$\text{oder} \quad \gamma . \frac{mx}{m^{\square}} = \alpha\beta$$

$$\frac{mx}{m^{\square}} = \frac{\alpha\beta}{\gamma}$$

$$\text{oder} \quad 3) \frac{x}{m} = \frac{\alpha\beta}{\gamma} \quad \left\{ \text{da } \frac{mx}{m^{\square}} = \frac{x}{m} \text{ (s. 101)} \right\}$$

1. Zusatz. $\frac{a . b}{b} = a.$

2. Zusatz. $\frac{a . b}{c} = \frac{a}{c} . b$; denn setzen wir $\frac{a}{c} = \mu$ und substituiren in die Gleichung 2) $a = \mu . c$, so folgt:

$$cx = \mu . cb$$

$$\text{nach (101)} \quad x = \mu b \text{ d. h. } \frac{ab}{c} = \mu . b = \frac{a}{c} . b$$

117. **Definition.** $\frac{ab}{cd}$ bezeichnet als Verhältniß zweier Rechtecke eine **Zahl** und läßt sich immer auf das Verhältniß zweier Linien zurückführen. Denn construiren wir (nach 89 Uebst. 1).

$$1) \; cx = ab$$

$$\text{so ist } 2) \; \frac{ab}{cd} = \frac{cx}{cd} = \frac{x}{d} = \mu \text{ (101.)}$$

Anmerkung. Da ab ein Rechteck bedeutet, desgleichen cd, so ist nach 102:

$$\frac{ab}{cd} = \frac{a}{c} \times \frac{b}{d}$$

Die geometrische Deutung des Symboles ist also mit der algebraischen im Einklange.

118. **Definition.** $\sqrt{ab}$ bezeichnet die **Seite** eines **Quadrates**, welches gleich dem Rechtecke $a \times b$ ist.

Denn construiren wir (nach 96)

$$c^{\square} = a \times b$$

und substituiren $a = \alpha . m$; $b = \beta . m$; $c = \gamma . m$; so ist:

$$(\gamma . m)^{\square} = \alpha m . \beta m$$

$$\text{oder } \gamma^2 \times m^{\square} = \alpha\beta . m^{\square}$$

$$\text{d. h. } \gamma^2 = \alpha\beta$$

$$\gamma = \sqrt{\alpha\beta}$$

119. **Definition.** $\sqrt{a^2+b^2}$ bezeichnet die **Hypotenuse** eines rechtwinkligen Dreieckes, dessen Katheten a und b sind.

Denn bezeichnen wir die Hypotenuse mit c, so ist:

$$c^{\square} = a^{\square} + b^{\square} \quad (99)$$

$a = \alpha m$; $b = \beta m$; $c = \gamma m$ substituirt:

$$\frac{\gamma^2 . m^{\square} = \alpha^2 m^{\square} + \beta^2 m^{\square}}{\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2}$$

also $\qquad \gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$

120. **Definition.** $\sqrt{a^2-b^2}$ bezeichnet die **Kathete** eines rechtwinkligen Dreieckes, in welchem a die Hypotenusé, b die eine Kathete ist.

Denn bezeichnen wir die Kathete mit c, so ist

$$c^{\square} = a^{\square} - b^{\square} \quad (99)$$

$a = \alpha . m$; $b = \beta . m$ und $c = \gamma . m$ substituirt:

$$\frac{\gamma^2 . m^{\square} = \alpha^2 . m^{\square} - \beta^2 . m^{\square}}{\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2}$$

also $\qquad \gamma = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$

§ 2. Das Vielfache einer geraden Linie.

Im Vorhergehenden ist öfter eine Linie als möglich vorausgesetzt, welche ein beliebiges Vielfache einer gegebenen Linie ist. — Wir haben hier zu untersuchen, in wie weit die Construction einer solchen Linie ausführbar ist.

Ist α eine beliebige rationale oder irrationale Zahl, a eine beliebige Linie, so hat die Aufgabe, eine Linie $x = \alpha . a$ zu construiren keine Schwierigkeit, wenn α eine ganze Zahl ist (s. Prop. I. § 14). — Ist aber α ein Bruch und etwa $= \frac{m}{n}$, so haben wir den n-ten Theil der Linie m-mal zu setzen; wir haben also vor Allem die Aufgabe zu lösen:

121. **Aufgabe.** Eine begrenzte gerade Linie in eine beliebige Anzahl gleicher Theile zu theilen.

Lösung. Ist AB [Fig. 63] die gegebene Strecke, so ziehe man durch den einen Endpunkt A die Gerade AX in beliebiger Neigung zu AB; schneide von dieser Geraden, von A aus, beliebige, aber unter sich gleiche Stücke in der gewünschten Anzahl ab; verbinde den letzten Theilpunkt A_n mit dem zweiten Endpunkte B der gegebenen Linie, und ziehe endlich durch die übrigen Theilpunkte Linien parallel der Linie

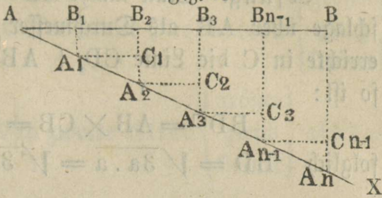


Fig. 63.

A_n B, so theilen diese die Linie AB in die gewünschte Anzahl gleicher Theile. — Denn ziehen wir die Linien $A_1 C_1$; $A_2 C_2$; $A_3 C_3$ . . . A_{n-1} C_{n-1} alle parallel der Linie AB, so sind die Dreiecke $AA_1 B_1$; $A_1 A_2 C_1$; $A_2 A_3 C_2$ . . . . A_{n-1} A_n C_{n-1} unter sich congruent, da sie in einer Seite und zwei anliegenden Winkeln (die als Correspondirende an Parallelen gleich sind) übereinstimmen. Folglich ist:

$$AB_1 = A_1 C_1 = A_2 C_2 = \ldots . = A_{n-1} C_{n-1}; \text{ es ist aber auch}$$
$$A_1 C_1 = B_1 B_2$$
$$A_2 C_2 = B_2 B_3$$
$$\vdots$$
$$A_{n-1} C_{n-1} = B_{n-1} B \text{ (s. 72)}$$

$$AB_1 = B_1 B_2 = B_2 B_3 = \ldots\ldots = B_{n-1} B \text{ (S. F. 1.)}$$

Zusatz. Schneidet man auf dem einen Schenkel eines Winkels gleiche Stücke ab, und zieht durch die Theilungspunkte Parallellinien, so werden durch diese auch auf dem anderen Schenkel gleiche Stücke abgeschnitten.

122. **Aufgabe.** Eine Linie $x = \alpha . a$ zu construiren, wenn α als eine beliebige rationale oder irrationale Zahl, a als eine begrenzte gerade Linie gegeben ist.

Lösung.

1. Ist α eine ganze Zahl, so trägt man die Linie a so oft auf eine unbegrenzte Gerade als α Einheiten hat. (s. Prop. I. § 14.)

2. Ist α ein rationaler Bruch $= \frac{m}{n}$; so theilt man die Linie a (nach 121) in n gleiche Theile und trägt einen solchen Theil so oft auf eine unbegrenzte Gerade, als m Einheiten hat.

3. Ist α eine irrationale Zahl und $= \sqrt{\beta}$; so ist

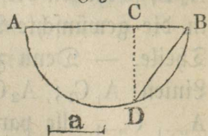
$$x = \sqrt{\beta} . a = \sqrt{\beta . a^{\square}} = \sqrt{\beta a . a}$$

d. h. x die Seite eines Quadrates, welches gleich dem Rechtecke $\beta a \times a$ ist. (s. 118.)

Beispiel. Es sei $x = \sqrt{3} . a$ zu construiren. [Fig. 64.]

Lösung. Man mache AB = 3a, BC = a; schlage über AB als Durchmesser einen Halbkreis, errichte in C die Linie CD $\perp$ AB und ziehe BD, so ist:

Fig. 64.



$$BD^{\square} = AB \times CB = 3a \times a$$

folglich $BD = \sqrt{3a \, . \, a} = \sqrt{3} \, . \, a = x$

§ 3. Die Proportion.

1. Die Verbindung zweier Verhältnisse durch das Gleichheitszeichen heißt eine Proportion.

Man schreibt: $a : b = c : d$ oder $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

und liest: a verhält sich zu b, wie sich c zu d verhält,

oder $a \left\{\begin{matrix}\text{gemessen}\\ \text{dividirt}\end{matrix}\right\}$ durch b giebt dieselbe Zahl als c $\left\{\begin{matrix}\text{gemessen}\\ \text{dividirt}\end{matrix}\right\}$ durch d.

2. Die zur Proportion vereinigten Größen heißen Glieder der Proportion und werden der Reihe nach gezählt. — Das erste und vierte Glied heißen die *äußeren*, das zweite und dritte Glied die *inneren* Glieder. — Die Glieder des ersten Verhältnisses heißen die *vordern*, die des zweiten die *hinteren* Glieder. Das erste und dritte Glied heißen die *Antecedenten*, das zweite und vierte die *Consequenten*.

3. Jede der vier zu einer Proportion vereinigten Größen ist durch die drei übrigen bestimmt und heißt die *vierte Proportionale* zu denselben.

4. Sind die inneren Glieder einer Proportion gleich, so heißt die Proportion eine *stetige*, und das gleiche Mittelglied heißt die *mittlere Proportionale* oder das *geometrische Mittel* aus den ungleichen Gliedern. — Ein jedes der ungleichen Glieder aber heißt die *dritte Proportionale* zu den beiden übrigen.

123. **Lehrsatz.** Ist das **erste** Glied einer Proportion $\left\{\begin{matrix}\text{größer}\\ \text{gleich}\\ \text{kleiner}\end{matrix}\right\}$ als das **zweite** Glied, so ist auch das **dritte** Glied $\left\{\begin{matrix}\text{größer}\\ \text{gleich}\\ \text{kleiner}\end{matrix}\right\}$ als das **vierte** Glied.

Bew. Ist $a : b = c : d$ und $a \gtreqless b$, so ist $a : b \gtreqless 1$ und daher auch $c : d \gtreqless 1$ d. h. $c \gtreqless d$.

124. **Lehrsatz.** Ist das **erste** Glied einer Proportion $\left\{\begin{matrix}\text{größer}\\ \text{gleich}\\ \text{kleiner}\end{matrix}\right\}$ als das **dritte** Glied, so ist auch das **zweite** Glied $\left\{\begin{matrix}\text{größer}\\ \text{gleich}\\ \text{kleiner}\end{matrix}\right\}$ als das **vierte** Glied.

$$\begin{array}{ll} \text{Voraussetzung.} & 1)\ a : b = c : d \\ & 2)\quad a \gtreqless c \\ \hline \text{Behauptung.} & \quad b \gtreqless d \end{array}$$

Bew. Setzen wir $a : b = e$ so ist auch $c : d = e$ (Vorauss. 1.)

$$\begin{array}{l} \text{Da nun} \begin{cases} a = eb \\ c = ed \end{cases} \\ \text{und}\quad a \gtreqless c \\ \hline \text{so ist}\quad eb \gtreqless ed \text{ (S. F. 1.)} \\ \hline \qquad b \gtreqless d \text{ (S. F. 6 und 11.)} \end{array}$$

125. **Lehrsatz.** Stimmen zwei Proportionen in **drei** gleichstelligen Gliedern überein, so stimmen sie auch im **vierten** überein.

$$\begin{array}{ll} \text{Bew.} & \left.\begin{array}{l} a : b = c : d \\ a : b = c : k \end{array}\right\} \text{Voraussetzung} \\ \hline & c : d = c : k \text{ (S. F. 2.)} \\ \hline & \quad d = k \text{ (s. 124)} \end{array}$$

126. **Lehrsatz.** Sind zwei Producte gleich, so sind die Factoren umgekehrt proportionirt. (Die Factoren des einen Productes bilden die inneren, die des anderen die äußeren Glieder der Proportion).

$$\begin{array}{ll} \text{Vorauss.} & ab = cd \\ \hline \text{Behaupt.} & a : c = d : b \\ \hline \text{Bew.} & ab = cd \text{ (Vorauss.)} \\ & cb = cb \\ \hline & \frac{ab}{cb} = \frac{cd}{cb} \text{ (S. F. 6.)} \\ \hline & \frac{a}{c} = \frac{d}{b} \left\{ 101 \right\} \\ \text{oder} & a : c = d : b \end{array}$$

Zusatz. In zwei gleichen Rechtecken verhalten sich die Grundlinien umgekehrt wie die Höhen.

Sind b und h Grundlinie und Höhe des einen Rechteckes
b_1 = h_1 = = = anderen =
so ist wenn $b \times h = b_1 \times h_1$
auch $b : b_1 = h_1 : h$

127. **Lehrsatz.** In einer richtigen Proportion ist das Product der inneren Glieder gleich dem Producte der äußeren Glieder.

Vorauss. $a : b = c : d$

Behaupt. $b \times c = a \times d$

Bew. Setzen wir $b \times c = a \times k$, so ist nach 123
$a : b = c : k$
Nach der Vorauss. ist $a : b = c : d$
$k = d$

128. **Lehrsatz.** Aus einer richtigen Proportion erhält man durch Umkehr der **inneren** oder **äußeren** Glieder, so wie durch die Umkehr der **Vorder-** und **Hinterglieder** wieder eine richtige Proportion.

Ist $a : b = c : d$, so ist nach 127 auch $b . c = a . d$, woraus man nach 126 ableiten kann:

1) $a : c = b : d$
2) $d : b = c : a$
3) $b : a = d : c$

129. **Lehrsatz.** In jeder richtigen Proportion verhält sich die **Summe** und die **Differenz** der **Vorderglieder** zu **einem Vordergliede**, wie die **Summe** und die **Differenz** der **Hinterglieder** zum entsprechenden **Hintergliede.**

Vorauss. $a : b = c : d$

Behaupt. $\frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}$

Bew. Setzt man $a : b = e$, so ist auch $c : d = e$; nun ist:

$$\frac{a \pm b}{b} = \frac{a}{b} \pm \frac{b}{b} = e \pm 1$$

$$\frac{c \pm d}{d} = \frac{c}{d} \pm \frac{d}{d} = e \pm 1$$

$$\frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d} \quad \text{(S. F. 2.)}$$

Zusatz. In jeder richtigen Proportion verhält sich die Summe und die Differenz der Vorderglieder zur Summe und Differenz der Hinterglieder, wie ein Vorderglied zum entsprechenden Hintergliede.

129a. **Lehrsatz.** In einer richtigen Proportion verhält sich die Summe der Vorderglieder zur Differenz der Vorderglieder, wie die Summe der Hinterglieder zur Differenz der Hinterglieder.

Vorauss. $a : b = c : d$

Behaupt. $(a + b) : (a - b) = (c + d) : (c - d)$

Bew.
$$\left.\begin{aligned}(a + b) : (c + d) &= b : d\\ (a - b) : (c - d) &= b : d\end{aligned}\right\}\text{ s. 129. Zus.}$$
$$(a + b) : (c + d) = (a - b) : (c - d) \quad \{ \text{ S. F. 2)}$$
oder
$$(a + b) : (a - b) = (c + d) : (c - d) \quad \{ \text{ s. 128, 1)}$$

Bemerkung. Sind mehrere Verhältnisse einander gleich: $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}$, so vereinigt man sämmtliche Glieder in die zusammengesetzte Proportion:

$$a_1 : a_2 : a_3 : \ldots : a_n = b_1 : b_2 : b_3 : \ldots : b_n$$

in welcher je zwei Glieder der einen Seite zwei entsprechenden der anderen Seite proportionirt sind.

130. **Lehrsatz.** In einer zusammengesetzten Proportion verhält sich die Summe der Vorderglieder zur Summe der Hinterglieder, wie ein Vorderglied zu dem entsprechenden Hintergliede.

Vorauss. $a_1 : a_2 : a_3 : . a_k . : a_n = b_1 : b_2 : b_3 : . b_k . : b_n$

Behaupt. $\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n} = \frac{a_n}{b_n}$

Bew. Aus der Voraussetzung folgt:

$$\begin{aligned}
a_1 : b_1 &= a_k : b_k \text{ oder } a_1 = \frac{a_k}{b_k} . b_1\\
a_2 : b_2 &= a_k : b_k \quad " \quad a_2 = \frac{a_k}{b_k} . b_3\\
a_3 : b_3 &= a_k : b_k \quad " \quad a_3 = \frac{a_k}{b_k} . b_3\\
&\vdots\\
a_n : b_n &= a_k : b_k \quad " \quad a_n = \frac{a_k}{b_k} . b_n
\end{aligned}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \frac{a_k}{b_k} . (b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n)$$

oder
$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n} = \frac{a_k}{b_k}$$

Cap. VI.

Die Form.

Die Form einer Figur hängt nicht von der absoluten, sondern von der verhältnißmäßigen Größe ihrer Elemente ab. — Die Formelemente sind also Seitenverhältnisse und Winkelverhältnisse.

Wir nennen zwei Polygone ähnlich, wenn sie in ihren Winkelverhältnissen und Seitenverhältnissen übereinstimmen. — Das Zeichen für die Aehnlichkeit ist: $\sim$.

131. **Lehrsatz.** Stimmen zwei Polygone von gleicher Seitenzahl in ihren Winkelverhältnissen überein, so stimmen sie in ihren Winkeln selbst überein.

Bew. Der Satz gründet sich darauf, daß die Winkelsumme eines Polygones bloß abhängig ist von der Anzahl der Seiten (s. 45). — Denn bezeichnen wir die Winkel des einen Polygones durch A_1; A_2; A_3; ... A_n; die des zweiten von gleicher Seitenzahl durch B_1; B_2; B_3; ... B_n und ist die Voraussetzung $A_1 : A_2 : A_3 : \ldots : A_n = B_1 : B_2 : B_3 : \ldots B_n$; so folgt aus 130:

$$\frac{A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n}{B_1 + B_2 + B_3 + \ldots + B_n} = \frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} = \ldots = \frac{A_n}{B_n}$$

Da nun $A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n = B_1 + B_2 + B_3 + \ldots + B_n = (2n - 4)\, R$ (s. 45) ist, so ist auch:

$$A_1 = B_1;\ A_2 = B_2;\ \ldots\ A_n = B_n \text{ (s. 123.)}$$

Die obige Definition reducirt sich also dahin:

132. **Definition.** Zwei Polygone von gleicher Seitenzahl heißen ähnlich, wenn sie in ihren Seitenverhältnissen und in ihren Winkeln übereinstimmen.

§ 1. Das Dreieck.

Die Elemente eines Dreieckes sind drei Seiten und drei Winkel; wir hätten somit als Formelemente drei Seitenverhältnisse und drei Winkel. — Durch zwei Seitenverhältnisse eines Dreieckes ist aber auch das dritte gegeben. Denn ist

$$1)\ \frac{a}{b} = m$$

$$2)\ \frac{c}{b} = n$$

$$3)\ \frac{a}{c} = \frac{m}{n}$$

Da nun auch durch zwei Winkel eines Dreieckes der dritte gegeben ist, so bleiben als formbestimmende Elemente eines Dreiecks zwei Seitenverhältnisse und zwei Winkel übrig.

Um nun die Abhängigkeit der Form eines Dreieckes von diesen Formelementen zu ermitteln, müssen wir das Dreieck aus denselben zu construiren suchen. — Wir beginnen wieder mit den Winkeln:

1. Die Form des Dreieckes durch zwei Winkel bestimmt.

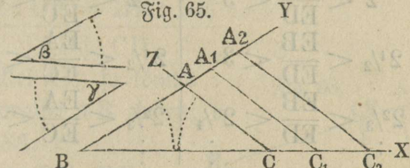


Fig. 65.

In dem Endpunkte B einer einseitig begrenzten Geraden BX [Fig. 65] construiren wir den Winkel YBX gleich dem gegebenen Winkel β, nehmen auf BX ein beliebiges Stück BC als die eine Seite*) x_a und construiren in dem Punkte C den Winkel BCZ = dem zweiten gegebenen Winkel γ. Ist nun $\angle\ \beta + \gamma < 2\,R$, so schneiden sich die Schenkel BY und CZ in einem Punkte A und es ist ein Dreieck BCA mit bestimmten Seitenverhältnissen entstanden.

Wir haben nun noch nachzuweisen, daß all die Dreiecke BCA; BC_1A_1; BC_2A_2 . ., — welche in gleicher Weise entstehen, wenn wir für x_a successiv die Strecke BC; BC_1; BC_2; . . . auf BX nehmen, und von denen wir wissen, daß sie in ihren Winkeln übereinstimmen, — auch in ihren Seitenverhältnissen übereinstimmen. — Da nun die Linien AC; A_1C_1; A_2C_2; A_3C_3; . . . unter sich parallel sind, so haben wir also folgende Sätze zu erweisen:

133. **Lehrsatz.** Die Schenkel eines Winkels werden durch Parallellinien proportional geschnitten; d. h. die Abschnitte des einen Schenkels verhalten sich zu einander wie die entsprechenden Abschnitte auf dem anderen Schenkel. [Fig. 66.]

Vorauss. AB || CD

Behaupt. EB : ED = EA : EC

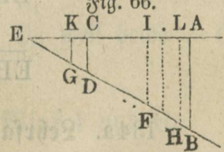


Fig. 66.

Bew. Mißt man die Linie EB durch ED und zieht durch die Theilungspunkte Linien parallel den gegebenen Parallelen, so wird (nach 121, Zusatz) zugleich EA durch EC gemessen und wir erhalten also —

*) Die den Winkeln α, β, γ gegenüberliegenden Seiten sind hier beziehungsweise Xa, Xb, Xc bezeichnet. — Durch X wird das Unbestimmte der Länge, durch den Index die Lage der Seiten bezeichnet.

wie bei 101 – zur Bestimmung der Grenzwerthe beider Verhältnisse dieselben Gleichungen, also auch dieselben Grenzen für beide Verhältnisse, daher sind die Verhältnisse gleich. (s. 100.)

$$\begin{array}{ll|l}
\text{(Fig. 66)} & EB = 2 \times ED + FB & EA = 2 \times EC + IA \\
& ED = 1 \times FB + GD & EC = 1 \times IA + KC \\
& FB = 2 \times GD + HB & IA = 2 \times KC + LA \\
& \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots & \vdots \qquad \vdots
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|l}
2 < \frac{EB}{ED} < 3 & 2 < \frac{EA}{EC} < 3 \text{ (Differenz der Grenzen: } 3-2=1) \\
2\frac{1}{2} < \frac{EB}{ED} < 3 & 2\frac{1}{2} < \frac{EA}{EC} < 3 \text{ (\quad " \quad " \quad " } 3-2\frac{1}{2}=\frac{1}{2}) \\
2\frac{2}{3} < \frac{EB}{ED} < 2\frac{3}{4} & 2\frac{2}{3} < \frac{EA}{EC} < 2\frac{3}{4} \text{ (\quad " \quad " \quad " } 2\frac{3}{4}-2\frac{2}{3}=\frac{1}{12}) \\
\vdots \qquad \vdots & \vdots \qquad \vdots \qquad \qquad \vdots \quad \vdots \quad \vdots
\end{array}$$

folglich $EB : ED = EA : EC$ (s. 100.)

Zusatz. Ist 1) $EB : ED = EA : EC$, so folgt aus 129:

$(EB - ED) : ED = (EA - EC) : EC$

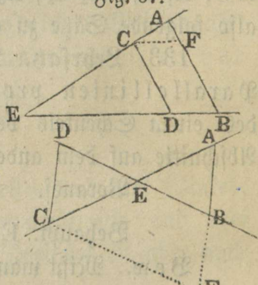
d. h. 2) $DB : ED = CA : EC$

also auch 3) $EB : DB = EA : CA$

Wie lassen sich die drei Proportionen in Worten ausdrücken?

134. **Lehrsatz.** Werden die Schenkel eines Winkels durch Parallellinien geschnitten, so verhalten sich die Abschnitte der Schenkel (vom Scheitelpunkte aus genommen) wie die parallelen Transversalen. [Fig. 67.]

Fig. 67.



Vorauss. $AB \parallel CD$

Behaupt. $EA : EC = AB : CD$

Bew. Man ziehe $CF \parallel ED$; so ist

$EA : EC = AB : FB$ (133,3)

$FB = CD$ (s. 72.)

$EB : EC = AB : CD$

134a. **Lehrsatz.** Sind zwei Strecken (AB und CD Fig. 67) parallel und es liegt ein Punkt (E) auf der Geraden, die durch je einen Endpunkt (A und C) dieser Strecken so geht, daß seine Abstände von diesen Endpunkten sich verhalten wie die parallelen Strecken, so liegt dieser Punkt (E) auch mit den beiden anderen Endpunkten (B und D) in einer Geraden.

Bew. Die Gerade BE muß die Parallele DC jedenfalls schneiden. Hieße dieser Schneidepunkt D_1, so wäre:

$EA : EC = AB : CD_1$ (da ECA eine Gerade und $CD \parallel AB$).

Nach der Vorauss. ist $\underline{EA : EC = AB : CD}$

$CD_1 = CD$ d. h. die Gerade EB geht durch D.

135. **Lehrsatz.** Werden die Schenkel eines Winkels durch zwei Gerade proportional geschnitten, so sind die Geraden parallel. [Fig. 68.]

Vorauss. $\underline{AE : CE = BE : DE}$

Behaupt. $AB \parallel CD$

Bew. Ist DC nicht parallel AB, so könnte man doch durch D eine Gerade parallel AB ziehen; es sei diese EF, so wäre nach 133:

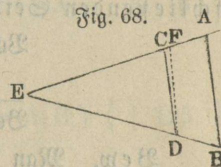


Fig. 68.

$AE : FE = BE : DE$

Nach der Vorauss. war $\underline{AE : CE = BE : DE}$

$FE = CE$ (s. 125)

also muß der Punkt F auf C fallen, d. h. CD ist $\parallel AB$.

136. **Lehrsatz.** Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in zwei Winkeln übereinstimmen. [Fig. 69.]

Vorauss. $\left\{ \begin{array}{l} \angle A = \angle A_1 \\ \angle C = \angle C_1 \end{array} \right.$

Behaupt. $ABC \sim A_1 B_1 C_1$

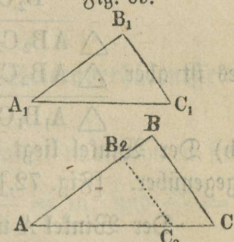


Fig. 69.

Bew. Man mache $AC_2 = A_1 C_1$

und ziehe $\underline{C_2 B_2 \parallel CB}$

so folgt: $AC_2 : AC = AB_2 : AB$ (133.)

$\underline{AC_2 : AC = C_2 B_2 : CB}$ (134.)

$\triangle AC_2B_2 \sim ACB$

nun ist $\triangle AC_2B_2 \cong A_1 C_1 B_1 \left\{ \begin{array}{l} AC_2 = A_1 C_1 \\ \angle A = \angle A_1 \\ \angle C_2 = \angle C_1, \text{ weil beide } = C \end{array} \right.$

$\triangle A_1 C_1 B_1 \sim ACB$ (S. F 1.)

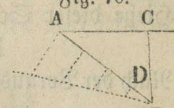
2. Die Form des Dreieckes durch einen Winkel und ein Seitenverhältniß bestimmt.

Lassen wir jetzt den einen Winkel fallen und nehmen statt dessen ein Seitenverhältniß, so sind zwei Fälle zu unterscheiden:

a) Der Winkel wird von den proportionirten Seiten eingeschlossen. [Fig. 70.]

Gegeben: Der Winkel α und $\frac{x_b}{x_c} = n$ (= 3/4).

Fig. 70.



Schneiden wir von dem einen Schenkel des gegebenen Winkels α ein beliebiges Stück AB als x_c ab, construiren sodann (nach 122) $x_b = n \cdot x_c$; (hier also AD = 3/4 AB), und schneiden diese Linie von dem zweiten Schenkel ab, (machen also AC = AD); verbinden die Endpunkte C und B, so haben wir in ACB ein der Form nach bestimmtes Dreieck.

137. **Lehrsatz.** Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in einem Winkel und in dem Verhältniß der den Winkel einschließenden Seiten übereinstimmen. [Fig. 71.]

Vorausſ. 1) $\angle A_1 = \angle A$

2) $B_1A_1 : A_1C_1 = BA : AC$

Behaupt. $A_1B_1C_1 \sim ABC$

Bew. Man mache $AC_2 = A_1C_1$

" " $AB_2 = A_1B_1$, so folgt, wenn man die Werthe in der Vorausſ. 2 substituirt:

$AB_2 : AC_2 = BA : AC$

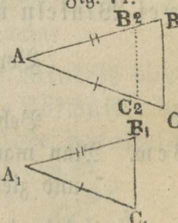
$B_2C_2 \,||\, BC$ (ſ. 135)

$\triangle AB_2C_2 \sim ABC$ (ſ. 136)

es ist aber $\triangle AB_2C_2 \cong A_1B_1C_1$ (ſ. 50)

$\triangle A_1B_1C_1 \sim ABC$

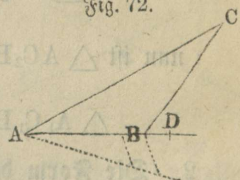
Fig. 71.



b) Der Winkel liegt einer der proportionirten Seiten gegenüber. [Fig. 72.]

Der Winkel A und das Verhältniß der Seiten $\frac{x_a}{x_c} = n$ (= 6/5) ist gegeben. Wir schneiden von dem einen Schenkel des gegebenen Winkels A ein beliebiges Stück AB für x_c ab; construiren darnach $x_a = n \cdot x_c$ (AD = 6/5 AB) und schlagen mit x_a (= AD) um B einen Kreis. Ist nun $n > 1$ so ist $x_a > x_c$ (AD > AB), und es schneidet der Kreis den zweiten Schenkel in einem Punkte C (ſ. 62_a). — Verbinden wir den Punkt C mit B, so haben wir in ABC ein der Form nach bestimmtes Dreieck.

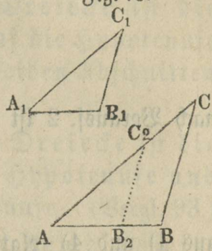
Fig. 72.



Durch ein Seitenverhältniß und den nicht eingeschlossenen Winkel ist nur dann das Dreieck der Form nach bestimmt, wenn der Winkel der größeren proportionirten Seite gegenüber liegt.

138. **Lehrsatz.** Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in einem Seitenverhältniß und dem Winkel, welcher der größeren proportionirten Seite gegenüber liegt, übereinstimmen. [Fig. 73.]

Fig. 73.



Vorauss. 1) $\angle A = \angle A_1$
2) $CB : AB = C_1B_1 : A_1B_1$
3) $CB > AB$ und $C_1B_1 > A_1B_1$

Behaupt. $\triangle ABC \sim A_1B_1C_1$

Bew. Man mache $AB_2 = A_1B_1$
und ziehe $B_2C_2 \parallel BC$

so ist 1) .. $\triangle ABC \sim AB_2C_2$
2) .. $CB : AB = C_2B_2 : AB_2$,
Nach der Vorauss. war $CB : AB = C_1B_1 : A_1B_1$

3) ..... $C_2B_2 = C_1B_1$ (da $AB_2 = A_1B_1$) { s. 125. }
4) $\triangle AB_2C_2 \cong A_1B_1C_1$ (s. 63.)

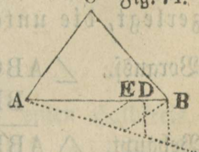
aus 1) und 4) folgt $\triangle ABC \sim A_1B_1C_1$

Anmerkung. Auch wenn der gleiche Winkel der kleineren proportionirten Seite gegenüber liegt, sind die Dreiecke ähnlich, sobald sich nachweisen läßt, daß der Winkel, welcher der zweiten proportionirten Seite gegenüber liegt, in beiden Dreiecken gleichartig ist. (Vergl. 61.)

3. Die Form des Dreieckes durch zwei Seitenverhältnisse bestimmt.

Lassen wir nun auch den zweiten Winkel fallen und nehmen statt dessen ein zweites Seitenverhältniß. — Ist nun $\frac{x_a}{x_c} = m$; und $\frac{x_b}{x_c} = n$ gegeben, (z. B. $m = {}^5/_6$; $n = {}^3/_4$), so nehmen wir die Seite x_c beliebig ($= AB$) [Fig. 74] und construiren $x_a = m \,.\, x_c$ ($AD = {}^5/_6\, AB$); $x_b = n \,.\, x_c$ ($AE = {}^3/_4\, AB$). — Das Dreieck ist jetzt aus drei Seiten zu construiren, also jedenfalls bestimmt, wenn möglich.

Fig. 74.



139. **Lehrsatz.** Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in zwei Seitenverhältnissen übereinstimmen. [Fig. 73.]

Vorauss. 1) $AB : AC = A_1B_1 : A_1C_1$
3) $AB : BC = A_1B_1 : B_1C_1$

Behaupt. $\triangle ABC \sim A_1B_1C_1$

Bew. Man mache ... $AB_2 = A_1 B_1$

" " $AC_2 = A_1 C_1$, so folgt, wenn man diese Werthe in d. Voraus. 1 subst. $AB : AC = AB_2 : AC_2$

$B_2 C_2 \,||\, BC$ (s. 135)

1) $\triangle ABC \sim AB_2 C_2$

2) $AB : BC = AB_2 : B_2 C_2$

nach Voraus. 2 ist .. $AB : BC = A_1 B_1 : B_1 C_1$

3) $B_2 C_2 = B_1 C_1$ (da $AB_2 = A_1 B_1$) {s. 125}

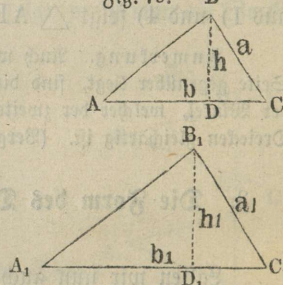
4) $\triangle AB_2 C_2 \cong A_1 B_1 C_1$ (s. 64)

aus 1) und 4) folgt: $\triangle ABC \sim A_1 B_1 C_1$

4. Anhang.

140. **Lehrsatz.** In ähnlichen Dreiecken ist das Verhältniß ihrer Grundlinien gleich dem Verhältnisse ihrer Höhen. [Fig. 75.]

Fig. 75.



Voraus. $ABC \sim A_1 B_1 C_1$

b und b_1 die Grundlinien, h und h_1 die Höhen.

Behaupt. $b : b_1 = h : h_1$

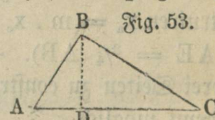
Bew. $b : b_1 = a : a_1$ (Voraus.)

$h : h_1 = a : a_1$ {$BDC \sim B_1 D_1 C_1$ (s. 136)}

$b : b_1 = h : h_1$ (S. F. 2.)

141. **Lehrsatz.** Fällt man in einem rechtwinkligen Dreiecke eine Normale vom Scheitel des rechten Winkels auf die Hypotenuse, so wird das gegebene Dreieck in zwei Dreiecke zerlegt, die unter sich und dem ganzen ähnlich sind. [Fig. 53.]

Fig. 53.



Voraus. $\angle ABC = 1 . R$

$BD \perp AC$

Behaupt. $\triangle ABD \sim \triangle BCD \sim \triangle ACB$

Bew. $\angle ADB = \angle BDC$ (als Rechte)

$\angle ABD = \angle BCD$ (weil beide DBC zu $1\,R$ ergänzen

1) $\triangle ABD \sim \triangle BCD$ (s. 136)

$\angle CAB = \angle BAD$

$\angle CBA = \angle BDA$ (als Rechte)

2) $\triangle$ ABC $\sim$ ADB (s. 136)

Aus 1) folgt: AD : DB = DB : DC

" 2) " AC : AB = AB : AD, d. h.

1. **Zusatz.** In einem rechtwinkligen Dreiecke ist die Normale, vom Scheitel des rechten Winkels auf die Hypotenuse gefällt, die mittlere Proportionale zu den beiden Abschnitten der Hypotenuse. (Vergl. 92.)

2. **Zusatz.** In einem rechtwinkligen Dreiecke ist die Kathete die mittlere Proportionale zu der Hypotenuse und der Projection der Kathete auf der Hypotenuse. (Vergl. 93.)

142. **Aufgabe.** Zu drei gegebenen Strecken die vierte Proportionale zu construiren. [Fig. 76.]

Forderung. a : b = c : x

Lösung. Sind a, b, c die gegebenen Strecken, so schneidet man von den Schenkeln eines beliebigen Winkels

AB = a

AC = b

AD = c

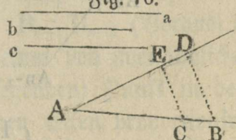
ab, verbindet B mit D und zieht CE || BD, so ist:

AB : AC = AD : AE (s. 133)

d. h. a : b = c : AE (Vergl. S. 43. Übst. 1.)

AE = x

Fig. 76.

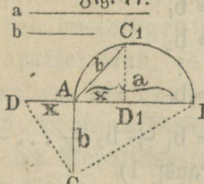


143. **Aufgabe.** Zu zwei gegebenen Linien die dritte Proportionale zu construiren. [Fig. 76.]

Forderung. a : b = b : x

Lösung. Ergiebt sich aus 142, wenn man c = b setzt, oder aus 140 Zus. 1 und 2. Hiernach macht man [Fig. 77.]

Fig. 77.



AB = a

AC $\perp$ AB

AC = b

DC $\perp$ CB

und verlängert BA bis D, so ist:

AB : AC = AC : AD (1. Zus.)

d. h. a : b = b : AD

AD = x

AB = a

schlägt über AB einen Halbkreis, trägt von A aus b = AC_1 als Sehne ein, zieht $C_1D_1 \perp$ AB, so ist

AB : AC_1 = AC_1 : AD_1 (2 Zus.)

d. h. a : b = b : AD_1

AD_1 = x

144. **Aufgabe.** Zu zwei gegebenen Linien die mittlere Proportionale zu construiren.

Forderung. $a : x = x : b$

Lösung. Da aus der Proportion $a : x = x : b$ nach 127 folgt:

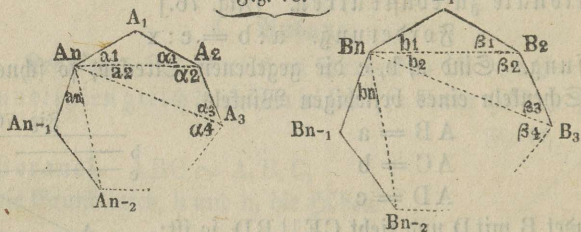
$$x^2 = ab$$

so ist die Aufgabe bloß eine andere Form der Aufg. 96 und also nach dieser zu lösen.

§ 2. Das Polygon.

145. **Lehrsatz.** Zwei Polygone von gleicher Seitenzahl sind ähnlich, wenn sie durch Diagonalen — aus entsprechenden Ecke gezogen — in ähnliche Dreiecke zerlegt werden. [Fig. 78.]

Fig. 78.



$$\text{Vorauss.}\left\{\begin{array}{ll} 1) & \triangle A_nA_1A_2 \sim B_nB_1B_2 \\ 2) & \triangle A_nA_2A_3 \sim B_nB_2B_3 \\ & \vdots \qquad\qquad \vdots \\ n-2) & \triangle A_nA_{n-2}A_{n-1} \sim B_nB_{n-2}B_{n-1} \end{array}\right.$$

Behaupt. $A_1A_2A_3A_4 \ldots A_n \sim B_1B_2B_3B_4 \ldots B_n$

$$\text{Bew. I}\left\{\begin{array}{ll} 1) \ \angle A_1 = \angle B_1 & (\text{Vorauss.}) \\ 2) \ \angle A_2 = \angle B_2 & \left\{\begin{array}{l} \angle \alpha_1 = \beta_1 \ (\text{Vorauss. 1.}) \\ \angle \alpha_2 = \beta_2 \ (\text{Vorauss. 2.}) \\ \hline \alpha_1 + \alpha_2 = \beta_1 + \beta_2 \end{array}\right. \\ \quad\ \vdots \qquad\quad \vdots & \\ n) \ \angle A_n = \angle B_n & \left\{\begin{array}{l} \angle a_1 = b_1 \\ \angle a_2 = b_2 \\ \ \ \vdots \qquad \vdots \\ \angle a_n = b_n \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$$

$$\text{II}\left\{\begin{array}{ll} 1) \ A_nA_1 : A_1A_2 = B_nB_1 : B_1B_2 & (\text{Vorauss. 1}) \\ 2) \ A_1A_2 : A_2A_3 = B_1B_2 : B_2B_3 & \left\{\begin{array}{l} A_1A_2 : B_1B_2 = A_nA_2 : B_nB_2 \ (\text{V. 1}) \\ A_2A_3 : B_2B_3 = A_nA_2 : B_nB_2 \ (\text{V. 2}) \\ \hline A_1A_2 : B_1B_2 = A_2A_3 : B_2B_3 \end{array}\right. \\ \quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots & \\ n-1) \ A_nA_{n-1} : A_{n-1}A_{n-2} = B_nB_{n-1} : B_{n-1}B_{n-2} & (\text{Vorauss. } n-2) \end{array}\right.$$

Aus I und II folgt: $A_1A_2A_3 \; A_n \sim B_1B_2B_3 - B_n$ (Vergl. 132)

Zusatz. Regelmäßige Polygone von gleicher Seitenzahl sind ähnlich.

146. **Lehrsatz.** Aehnliche Polygone werden durch Diagonalen — aus entsprechenden Ecken gezogen — in ähnliche Dreiecke zerlegt. [Fig. 78.]

$$\text{I. } \triangle A_nA_1A_2 \sim B_nB_1B_2 \begin{cases} \angle A_1 = \angle B_1 \\ A_nA_1 : A_1A_2 = B_nB_1 : B_1B_2 \end{cases} \text{Vorauss.}$$

$$\text{II. } \triangle A_nA_2A_3 \sim B_nB_2B_3 \begin{cases} \angle A_2 = B_2 \text{ (Vorauss.)} \\ \angle \alpha_1 = \angle \beta_1 \text{ (aus I)} \\ \hline 1)\ \alpha_2 = \beta_2 \text{ (S. F. 3)} \\ \quad A_1A_2 : B_1B_2 = A_nA_2 : B_nB_2 \text{ (aus I)} \\ \quad A_1A_2 : B_1B_2 = A_2A_3 : B_2B_3 \text{ (Vor.)} \\ \hline 2)\ A_nA_2 : B_nB_2 = A_2A_3 : B_2B_3 \end{cases} (137)$$

$$N-2)\ \triangle A_nA_{n-1}A_{n-2} \sim B_nB_{n-1}B_{n-2} \begin{cases} \angle A_{n-1} = \angle B_{n-1} \text{ (Vorauss.)} \\ A_nA_{n-1} : A_{n-1}A_{n-2} = B_nB_{n-1} : \\ \qquad B_{n-1}B_{n-2} \text{ (Vorauss.)} \end{cases}$$

Zusatz. Zu jedem Punkte in der Ebene eines von zwei ähnlichen Polygonen giebt es einen homologen (gleichliegenden) Punkt in dem anderen, so daß diese Punkte von den homologen Ecken proportionirte Abstände haben und die Eckstrahlen mit je zwei homologen Seiten ähnliche Dreiecke bilden.

Bemerk. Um den homologen Punkt zu finden, verbindet man den gegebenen Punkt mit den Endpunkten einer beliebigen Seite des Polygones und construirt über der entsprechenden Seite des anderen Polygones ein dem so entstandenen Dreiecke ähnliches Dreieck. Der Scheitel dieses Dreieckes ist der homologe Punkt.

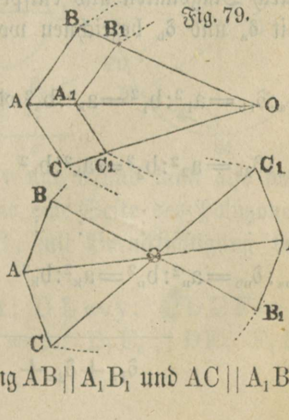


Fig. 79.

147. **Lehrsatz.** Liegen **zwei** ähnliche Polygone so, daß zwei Seiten des einen den homologen Seiten des anderen parallel sind, so schneiden sich die Geraden, die durch homologe Ecken gehen, in **einem** Punkte. Dieser Punkt heiß der **Aehnlichkeitspunkt** der Polygone für diese Lage.

Bew. Sind AB und AC zwei von einer Ecke ausgehende Seiten des einen, A_1B_1 und A_1C_1 die entsprechenden des anderen Polygones, so ist nach der Voraussetzung $AB \parallel A_1B_1$ und $AC \parallel A_1B_1$.

Ist nun O der Schneidepunkt der Geraden AA_1 und BB_1, so ist

$$OA : OA_1 = AB : A_1B_1 \text{ (s. 134.)}$$
$$AC : A_1C_1 = AB : A_1B_1 \text{ (Vorauss.)}$$

Folglich liegt (nach 134 a) der Punkt O in der Geraden CC_1. — So geht man von Ecke zu Ecke weiter, denn sind zwei Seiten eines Polygones parallel den homologen Seiten eines ihm ähnlichen Polygones, so müssen wegen der Gleichheit der entsprechenden Winkel alle homologen Seiten einander parallel sein.

§ 3. Größenverhältnisse an ähnlichen Polygonen.

148. **Lehrsatz.** Aehnliche Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate homologer Seiten. [Fig. 75.]

Vorauss. $ABC \sim A_1B_1C_1$

Behaupt. $ABC : A_1B_1C_1 = a^2 : a_1{}^2$

Bew. $\left.\begin{aligned} ABC &= \tfrac{1}{2}\, b \,.\, h \\ A_1B_1C_1 &= \tfrac{1}{2}\, b_1 h_1 \end{aligned}\right\}$ s. 86.

$$ABC : A_1B_1C_1 = \tfrac{1}{2}\, bh : \tfrac{1}{2}\, b_1 h_1 \text{ (S. F. 6).}$$

oder $\dfrac{ABC}{A_1B_1C_1} = \dfrac{bh}{b_1h_1} = \dfrac{b}{b_1} \times \dfrac{h}{h_1}$ (s. 117 Anm.)

$$\frac{b}{b_1} = \frac{h}{h_1} = \frac{a}{a_1} \Big\{ \text{s. 140} \Big\}$$

$$\frac{ABC}{A_1B_1C_1} = \frac{a}{a_1} \times \frac{a}{a_1} = \frac{a^2}{a_1{}^2} \Big\{ \text{S. F. 1.} \Big\}$$

149. **Lehrsatz.** Aehnliche Polygone verhalten sich wie die Quadrate ihrer homologen Seiten. [Fig. 80.]

Bew. Sind $A_1 A_2 \ldots A_n$ und $B_1 B_2 \ldots B_n$ die ähnlichen Polygone, die wir respectiv mit P_a und P_b bezeichnen, und zerlegen wir sie durch Diagonalen aus entsprechenden Ecken in Dreiecke, die wir respectiv mit δ_a und δ_b bezeichnen wollen, — so ist:

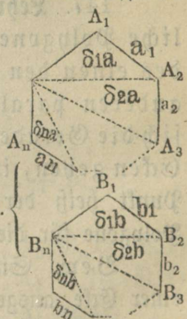
$$\delta_{1a} : \delta_{1b} = a_1{}^2 : b_1{}^2 = a_k{}^2 : b_k{}^2 \text{ oder } \delta_{1a} = \frac{a_k{}^2}{b_k{}^2} \times \delta_{1b}$$

$$\delta_{2a} : \delta_{2b} = a_2{}^2 : b_2{}^2 = a_k{}^2 : b_k{}^2 \quad " \quad \delta_{2a} = \frac{a_k{}^2}{b_k{}^2} \times \delta_{2b}$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \qquad \vdots \quad \vdots$$

$$\delta_{na} : \delta_{nb} = a_n{}^2 : b_n{}^2 = a_k{}^2 : b_k{}^2 \quad " \quad \delta_{na} = \frac{a_k{}^2}{b_k{}^2} \times \delta_{nb}$$

Fig. 80.



$$\delta_{1a} + \delta_{2a} + \ldots + \delta_{na} = \frac{a_k{}^2}{b_k{}^2} \times (\delta_{1b} + \delta_{2b} + \ldots + \delta_{nb}\, b)$$

also $\frac{\mathfrak{d}_{1a} + \mathfrak{d}_{2a} + \ldots + \mathfrak{d}_{na}}{\mathfrak{d}_{1b} + \mathfrak{d}_{2b} + \ldots + \mathfrak{d}_{nb}} = \frac{a_k^2}{b_k^2}$ d. h.

$$\frac{P_a}{P_b} = \frac{a_k^2}{b_k^2}$$

150. **Lehrsatz.** Die Umfänge ähnlicher Polygone verhalten sich wie ihre homologen Seiten.

Bew. Bezeichnen wir die Seiten der ähnlichen Polygone mit a_1; a_2; .... a_a und b_1; b_2; b_3; ... b_n; die Umfänge respectiv mit U_a und U_b, so ist nach der Voraussetzung:

$$a_1 : a_2 : a_3 : . : a_k . : a_n = b_1 : b_2 : b_3 : . : b_k . : b_n$$

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n} = \frac{a_k}{b_k} \text{ (s. 130.)}$$

d. h. .... $\frac{U_a}{U_b} = \frac{a_k}{b_k}$

150 b. **Aufgabe.** Es soll ein Polygon gezeichnet werden, welches einem gegebenen Polygone gleich, einem anderen gegebenen Polygone aber ähnlich ist.

Lösung. Sind A und B [Fig. 81] die gegebenen Polygone und bezeichnen wir das gesuchte Polygon mit X, so ist

die Forderung 1) $X \sim B$
2) $X = A$

Bezeichnen wir nun die eine Seite des gesuchten Polygones, welches einer bestimmten Seite a des Polygones B entspricht, mit x, so muß nach 148, um der ersten Forderung zu genügen,

$X : B = x^2 : a^2$ sein;

da nun nach Ford. 2) .. $X = A$ ist,

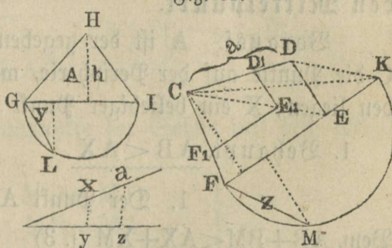
so folgt: $A : B = x^2 : a^2$

Verwandelt man die Polygone A und B in Quadrate, so daß $A = y^2$; $B = z^2$ wird, so ist:

$$y^2 : z^2 = x^2 : a^2$$

also auch $y : z = x : a$

Fig. 81.



d. h. x ist die vierte Proportionale zu a, y und z und kann also nach 142 construirt werden. — Hat man aber die eine Seite des Polygones, so ist die Construction des Polygones selbst, mit Berücksichtigung von 145, leicht ausgeführt.

In beistehender Figur ist $GHI = A$; $GL = y$; $CDEF = B = \triangle CKF$; $FM = z$; $CD = a$; $CD_1 = x$; $D_1E_1 \parallel DE$; $E_1F_1 \parallel EF$; $CD_1E_1F_1 = X$.

Dritter Abschnitt.

Der Kreis in seinen Beziehungen zu Punkten, Linien und Figuren.

Cap. I.

Der Kreis und ein Punkt.

Aus dem bereits unter 9 festgestellten Begriffe der Kreislinie entnehmen wir in Bezug auf die Lage eines Punktes zur Kreislinie ohne weiteres:

151. **Folgerung.** Ist der Abstand eines Punktes vom Mittelpunkte eines Kreises $\left\{\begin{matrix}\text{größer}\\ \text{gleich}\\ \text{kleiner}\end{matrix}\right\}$ als der Radius, so liegt der Punkt $\left\{\begin{matrix}\text{außerhalb}\\ \text{auf}\\ \text{innerhalb}\end{matrix}\right\}$ der Kreislinie. —

152. **Lehrsatz.** Der **kleinste** und der **größte** Abstand eines Punktes von der Peripherie eines Kreises führt durch den **Mittelpunkt**.

Voraussſ. A ist der gegebene Punkt, M der Mittelpunkt, B und C die Punkte auf der Peripherie, welche mit M und A in einer Geraden liegen; X ein beliebiger Punkt auf der Peripherie.

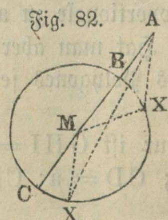
1. Behaupt. $\underline{AB < AX}$ 2. Behaupt. $\underline{AC > AX}$

1. Der Punkt A liegt außerhalb

Bew. $AB + BM < AX + XM$ (s. 3)
$BM = XM$
$AB < AX$ (S.F.9)

Bew. $AM + MX > AX$ (s. 3)
$MX = MC$
$AM + MC > AX$ (S.F.1)
$AM + MC = AC$
$AC > AX$ (S.F.1)

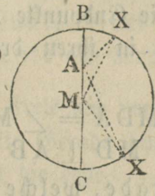
Fig. 82.



2. Der Punkt A liegt innerhalb

Bew. $MX < MA + AX$ (s. 3)
$\underline{MX = MA + AB}$
$\underline{MA + AB < MA + AX}$ (S.F.2)
$AB < AX$ (S.F.9)

Fig. 83.



Bew. $AM + MX > AX$ (S.F.1)
$\underline{MX = MC}$
$AM + MC > AX$ (S.F.1)
$\underline{AM + MC = AC}$
$AC > AX$ (S.F.1)

Cap. II.

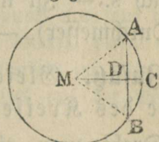
Der Kreis und die gerade Linie.

§ 1. Der Kreis und eine gerade Linie.

Kommt zum Kreise eine Gerade hinzu, so schneidet sie die Kreislinie entweder in zwei Punkten (60) und heißt dann Secante, oder sie hat mit ihr nur einen Punkt gemein und ist eine Tangente am Kreise (58). Das Stück, welches die Kreislinie von einer Secante abschneidet, ist eine Sehne. Geht die Sehne durch den Mittelpunkt, so heißt sie ein Durchmesser.

153. **Lehrsatz.** Der Radius, welcher auf einer Sehne normal steht, halbirt die Sehne und den zugehörigen Bogen. [Fig. 84.]

Fig. 84.



Voraussetzung. $MC \perp AB$

Behaupt. $\begin{cases} BD = AD \\ \text{Bog. } BC = \text{Bog. } AC \end{cases}$

Bew. Verbindet man die Endpunkte der Sehne mit dem Mittelpunkte des Kreises, so ist:

$$\triangle MDB \cong MDA \left\{ \begin{array}{c} MD = MD \\ MB = MA \\ \angle MDB = \angle MDA \end{array} \right\} 63.$$

1) . . . $BD = AD$

2) $\angle BMC = \angle AMC$ oder Bog. BC = Bog. AC

154. **Lehrsatz.** Die gerade Linie, welche den Halbirungspunkt der Sehne mit dem Mittelpunkte des Kreises verbindet, steht normal auf der Sehne. [Fig. 84.]

Bew. Ist D der Halbirungspunkt der Sehne AB, so stimmen die Dreiecke MDA und MDB, welche entstehen, wenn man diesen Halbirungspunkt D, so wie die Endpunkte A und B der Sehne mit dem Mittelpunkte M verbindet, in ihren drei Seiten überein; sind also congruent, folglich ist auch

$$\angle MDA = \angle MDB$$

$$\text{d. h.} \quad MD \perp AB$$

Zusatz. Eine Gerade, welche im Halbirungspunkte der Sehne normal zur Sehne errichtet wird, geht durch den Mittelpunkt des Kreises.

155. **Lehrsatz.** Je größer der Abstand einer Sehne vom Mittelpunkte ist, desto kürzer ist die Sehne. (Fig. 84.)

Bew. Bezeichnen wir die Sehne AB mit s, die Normale MD mit h und den Radius des Kreises mit r, so ist:

$$AD^{\square} = MA^{\square} - MD^{\square} \text{ (s. 99.)}$$

$$\left(\frac{s}{2}\right)^2 = r^2 - h^2$$

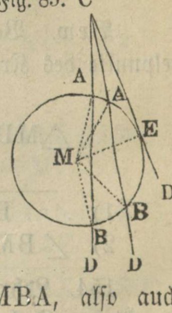
$$\frac{s}{2} = \sqrt{r^2 - h^2}$$

$$\text{also } s = 2\sqrt{r^2 - h^2}$$

Je größer nun h wird, desto kleiner wird $r^2 - h^2$; desto kleiner wird also auch s. — Ist $h = o$, so hat s seinen größten Werth $= 2r$ (gleich dem Durchmesser). — Ist $h = r$, so ist $s = o$.

Zusatz. Gleiche Sehnen stehen gleich weit vom Mittelpunkte des Kreises ab, die kleinere aber ist weiter.

Fig. 85.



Dreht man eine Secante CD [Fig. 85] um einen ihrer Punkte (C), der außerhalb des Kreises liegt, so daß sie sich vom Mittelpunkte immer mehr und mehr entfernt, so wird die Sehne (AB) nach dem Vorigen immer kürzer, d. h. die Durchschnittspunkte A und B nähern sich immer mehr und mehr und fallen endlich — wenn der Abstand der Secante vom Mittelpunkte = dem Radius = r wird — in einem Punkte (E) zusammen: — Die Secante ist eine Tangente geworden. — Da hierbei stets $\angle MAB = \angle MBA$, also auch $\angle MAC = \angle MBD$ bleibt, so muß auch schließlich $\angle MEC = \angle MED$ sein, d. h.

156. **Lehrsatz.** Die Tangente steht normal auf dem Radius, der durch den Berührungspunkt geht; und umgekehrt: Eine Gerade, die im Endpunkte eines Radius normal auf demselben steht, ist eine Tagente am Kreise. (Vergl. 58.)

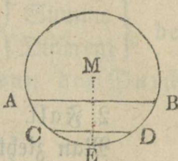
§ 2. Der Kreis und zwei Gerade.

Kommt noch eine zweite Gerade hinzu, so kann sie der ersten parallel sein oder sie schneidet die erste.

A. Kreis und zwei Parallellinien.

157. **Lehrsatz.** Zwischen zwei parallelen Secanten liegen gleiche Bogen. [Fig. 86.]

Fig. 86.



Voraussf. $AB \,||\, CD$

Behaupt. Bog. AC = Bog. BD

Bew. Man ziehe $ME \perp AB$, so ist auch $ME \perp CD$ und es ist:

1) Bog. AE = Bog. BE
2) Bog. CE = Bog. DE } (f. 153.)

2 von 1 subtrahirt: Bog. AC = Bog. BD

B. Kreis und zwei sich schneidende Gerade.

Kommen zu einem Kreise zwei sich schneidende Gerade hinzu, so hat man ihre Lage nach der Lage des Schneidepunktes zu beurtheilen, und es sind drei Fälle denkbar: Der Schneidepunkt fällt auf den Mittelpunkt, er fällt auf die Peripherie, oder drittens, er fällt weder auf den Mittelpunkt noch auf die Peripherie. Zwei sich schneidende Gerade bilden ferner einen Winkel, dessen Scheitelpunkt der Schneidepunkt ist. Liegt der Scheitel eines Winkels im Mittelpunkte, so heißt der Winkel ein Centriwinkel, liegt der Scheitel auf der Peripherie, ein Peripheriewinkel.

I. Der Schneidepunkt liegt im Mittelpunkte.

Fällt der Schneidepunkt der Geraden mit dem Mittelpunkte zusammen, so ist der Winkel, den sie bilden, ein Centriwinkel, und wir entnehmen aus 14 u. f. unmittelbar den Satz:

158. **Folgerung.** Der Centriwinkel hat den Bogen zwischen seinen Schenkeln zum Maße.

II. Der Schneidepunkt liegt auf der Peripherie.

159. **Lehrsatz.** Der Peripheriewinkel ist halb so groß, als der Centriwinkel auf gleichem Bogen, oder der Peripheriewinkel hat den halben Bogen zwischen seinen Schenkeln zum Maße.

Ist ABC der Peripheriewinkel, AMC der Centriwinkel auf gleichem Bogen und enthält $\angle ABC = x$ Winkelgrade, der zugehörige Bogen $AC = n$ Bogengrade, so ist die

Behaupt. $\angle ABC = \frac{1}{2} \angle AMC$

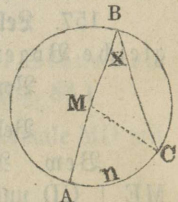
oder $x = \frac{1}{2} n$

Bew. 1. Fall. Der eine Schenkel AB geht durch den Mittelpunkt. [Fig. 87.]

Man ziehe den Radius MC, so ist:

$$\angle ABC + \angle BCM = \angle AMC \text{ (35, Zus. 1)}$$
$$\angle ABC = \angle BCM \text{ (§. 51)}$$
$$2 \angle ABC = \angle AMC \text{ (S. F. 1)}$$
$$\text{also } \angle ABC = \tfrac{1}{2} \angle AMC$$
$$\angle AMC = n^0 \text{ (§. 157)}$$
$$\angle ABC = \tfrac{1}{2} n^0$$
$$\text{oder } x = \tfrac{1}{2} n$$

Fig. 87.

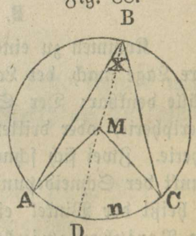


2. Fall. Der Mittelpunkt liegt zwischen den Schenkeln. [Fig. 88.]

Man zieht den Durchmesser BD und die Radien MA und MC; so ist:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \angle ABD = \tfrac{1}{2} \angle AMD \\ 2)\ \angle CBC = \tfrac{1}{2} \angle CMD \end{array}\right\} \text{1. Fall.}$$
$$\text{1 u. 2 addirt. } \angle ABC = \tfrac{1}{2} \angle AMC$$
$$\angle ABC = \tfrac{1}{2} n^0$$
$$\text{oder } x = \tfrac{1}{2} n$$

Fig. 88.

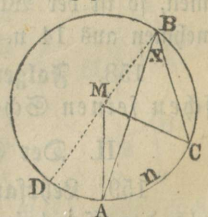


3. Fall. Der Mittelpunkt liegt außerhalb der Schenkel. [Fig. 89.]

Man zieht wieder den Durchmesser BD und die Radien MA und MC, so ist:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \angle CBD = \tfrac{1}{2} \angle CMD \\ 2)\ \angle ABD = \tfrac{1}{2} \angle AMD \end{array}\right\} \text{1. Fall.}$$
$$\text{2 von 1 subtrah... } \angle ABC = \tfrac{1}{2} \angle AMC$$
$$x = \tfrac{1}{2} n$$

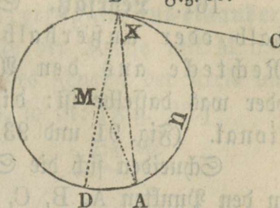
Fig. 89.



4. Fall. Der eine Schenkel BC ist eine Tangente. [Fig. 90.]

Man zieht wieder den Durchmesser BD und den Radius MA, so ist:

Fig. 90.



1) $\angle DBC = \frac{1}{2} \angle DMB$ (s. 156)
2) $\angle DBA = \frac{1}{2} \angle DMA$ (1. Fall)

2 von 1 subtr. . . $\angle ABC = \frac{1}{2} \angle AMB$
$\angle ABC = \frac{1}{2} n^0$ (Bog. $AB = n^0$)
oder $x = \frac{1}{2} n$

1. Zusatz. Peripheriewinkel auf gleichem Bogen sind gleich.
2. Zusatz. Der Peripheriewinkel im Halbkreise ist ein Rechter.

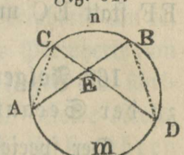
III. Der Schneidepunkt liegt innerhalb oder außerhalb des Kreises.

160. **Lehrsatz.** Der Winkel, den zwei sich schneidende Secanten bilden, hat zum Maße die halbe $\left\{\begin{matrix}\text{Summe}\\ \text{Differenz}\end{matrix}\right\}$ der zwischen den Schenkeln liegenden Bogen, wenn der Durchschnittspunkt $\left\{\begin{matrix}\text{innerhalb}\\ \text{außerhalb}\end{matrix}\right\}$ des Kreises liegt.

Bew. Sind A, B, C, D die Durchschnittspunkte der Secanten mit der Kreislinie, ist E der Durchschnittspunkt der Secanten unter sich, und enthält der Bogen $AD = m^0$; der Bogen $BC = n^0$, so ist: [Fig. 91.]

1. Behaupt. $\angle AED = \frac{1}{2}(m + n)^0$; $\left\{\begin{matrix}\text{wenn E innerhalb des Krei-}\\ \text{ses liegt.}\end{matrix}\right.$

Fig. 91.

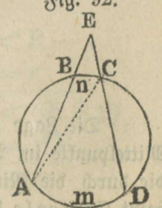


Bew. Zieht man die Sehne AC, so ist:
1) $\angle AED = \angle ACD + \angle BAC$ (35, Zus. 1)
2) $\angle ACD = \frac{1}{2} m^0$
3) $\angle BAC = \frac{1}{2} n^0$ } 159.

aus 2 und 3 in 1 substituirt: $\angle AED = \frac{1}{2} m^0 + \frac{1}{2} n^0 = \frac{1}{2}(m + n)^0$

2. Behaupt. $\angle AED = \frac{1}{2}(m - n)^0$ $\left\{\begin{matrix}\text{wenn E außerhalb des Krei-}\\ \text{ses liegt. [Fig. 92.]}\end{matrix}\right.$

Fig. 92.



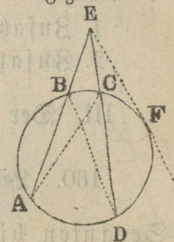
Bew. Man zieht wiederum die Sehne AC, so ist:
1) $\angle AED = \angle ACD - \angle EAC$ (35, Zus. 1)
2) $\angle ACD = \frac{1}{2} m^0$
3) $\angle BAC = \frac{1}{2} n^0$ } 159)

aus 2 u. 3 i. 1 subst. $\angle AED = \frac{1}{2}(m - n)^0$

161. **Lehrsatz.** Schneiden sich zwei Secanten innerhalb oder außerhalb eines Kreises, so sind die beiden Rechtecke aus den Abschnitten je einer Secante gleich, oder was dasselbe ist: die Abschnitte sind umgekehrt proportional. (Fig. 91 und 93.]

Schneiden sich die Secanten in E und werden von der Kreislinie in den Punkten A, B, C, D geschnitten, so ist die

Fig. 93.



Behaupt. $AE \times EB = DE \times EC$

oder $AE : EC = DE : EB$

$\angle AEC = \angle DEB$

$\angle EAC = \angle EDB$ (159 Zus. 1.)

$\triangle AEC \sim DEB$ (s. 136).

$AE : EC = DE : EB$

also auch $AE \times EB = DE \times EC$

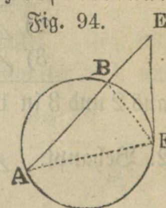
Zusatz. Zieht man durch einen Punkt in der Ebene eines Kreises eine Secante, so hat das Product aus den Abschnitten der Secante (Sehne), zwischen dem Punkte und der Kreislinie, eine **constante** Größe, und heißt die **Potenz** des Punktes in Beziehung auf jenen Kreis.

Bemerkung. Dreht man die Secante ED [Fig. 93] um den außerhalb des Kreises fallenden Durchschnittspunkt E, bis sie eine Tangente wird, so fallen die Durchschnittspunkte C und D in einem Punkte F zusammen, und es ist EC = ED = EF geworden. Substituiren wir aber EF statt EC und ED in die obige Proportion, so erhalten wir:

$AE : EF = EF : EB$ d. h.

162. **Folgerung.** Die Tangente ist die mittlere Proportionale zu der Secante und ihrem oberen Abschnitte.

Fig. 94.



Der specielle Beweis für diesen Satz ergiebt sich aus dem allgemeinen (für 161), wenn man statt der Buchstaben C und D den Buchstaben F setzt. Fig. 93 geht dann über in Fig. 94.

Cap. III.

Zwei Kreise.

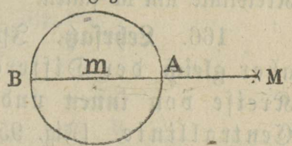
§ 1. Gegenseitige Lage zweier Kreise.

Die Lage zweier Kreise zu einander ist abhängig von dem Abstande ihrer Mittelpunkte im Verhältnisse zur Summe und Differenz der Radien. Eine Gerade, die durch die Mittelpunkte zweier Kreise geht, heißt Centrallinie; insonderheit heißt Centrale der Abstand der Mittelpunkte.

163. **Lehrsatz.** Ist die Centrale **größer** als die Summe der Radien zweier Kreise, so liegen die Kreise ganz **aus einander.**

Bew. Bezeichnen wir die Mittelpunkte der Kreise mit M und m; die Radien respective mit R und r, und es schneide der Kreis um m die Centrallinie in den Punkten A und B, so ist: [Fig. 95.]

Fig. 95.



$$\begin{array}{l} Mm > R + r \text{ (Vorauss.)} \\ mA = r \\ \hline AM - mA > R \text{ (S. F. 9)} \\ Mm - mA = MA \\ \hline MA > R \text{ (S. F. 1)} \end{array}$$

Der Punkt A liegt also nach 151 außerhalb der Kreislinie um M. Da nun nach 152 unter allen Punkten auf der Peripherie um m der Punkt A den kleinsten Abstand von M hat, so liegen um so mehr die übrigen Punkte der Peripherie um m außerhalb der Kreislinie um M, d. h. die Kreise liegen ganz aus einander.

164. **Lehrsatz.** Ist die Centrale **gleich** der Summe der Radien, so **berühren** sich die Kreise und der **Berührungspunkt** liegt **auf** der Centrallinie. [Fig. 95.]

$$\begin{array}{l} \text{Bew. } Mm = R + r \text{ (Vorauss.)} \\ mA = r \\ \hline Mm - mA = R \text{ (S. F. 4)} \\ Mm - mA = MA \\ \hline MA = R \text{ (S. F. 2)} \end{array}$$

Nach 151 liegt also jetzt der Punkt A auf der Peripherie um M, und da zugleich (nach 152), unter den Punkten auf der Peripherie um m, der Punkt A den kleinsten Abstand von M hat, so liegen alle übrigen Punkte der Kreislinie um m außerhalb der um M. Beide Kreislinien haben also nur den einen Punkt A gemein, d. h. sie berühren sich und der Berührungspunkt (A) liegt auf der Centrallinie.

165. **Lehrsatz.** Ist die Centrale **kleiner** als die **Summe** und auch **kleiner** als die **Differenz** der Radien, so liegen die Kreise ganz **in einander.** [Fig. 95.]

Bew. 1. Vorauss.
$$\begin{array}{l} Mm < R + r \\ mA = r \\ \hline Mm - mA < R \text{ (S.F.9)} \\ Mm - mA = MA \\ \hline MA < R \text{ (S.F.1)} \end{array}$$

2. Vorauss.
$$\begin{array}{l} Mm < R - r \\ mB = r \\ \hline Mm + mB < \text{ (S.F.8)} \\ Mm + mB = MB \\ \hline MB < R \end{array}$$

Aus der ersten Voraussetzung folgt also (mit Berücksichtigung von 151), daß der Punkt A **innerhalb**, aus der zweiten, daß auch B **innerhalb** der Kreislinie und M liegen muß. Da nun (nach 152) unter allen Punkten auf der Kreislinie um m der Punkt B den größten Abstand von M hat, so muß der ganze Kreis um m innerhalb der Kreislinie um M fallen.

166. **Lehrsatz.** Ist die Centrale **kleiner** als die **Summe**, aber **gleich** der Differenz der Radien, so **berühren** sich die Kreise von **innen** und der **Berührungspunkt** liegt auf der Centrallinie. [Fig. 95.]

Bew. Da die erste Voraussetzung dieselbe ist wie unter 165, so ist auch die Folge dieselbe: Der Punkt A fällt auch hier innerhalb der Kreislinie um M.

$$\begin{array}{rl} \text{2. Vorauss.} & Mm = R - r \\ & mB = r \\ \hline & Mm + mB = R \text{ (S. F. 3)} \\ & Mm + mB = MB \\ \hline & MB = R \text{ (S. F. 2.)} \end{array}$$

Aus der 2. Voraussetzung folgt also, daß der Punkt B auf die Kreislinie um M fällt (s. 151). — Da aber B unter allen Punkten der Kreislinie um m den größten Abstand von M hat, so liegen alle übrigen Punkte innerhalb der Kreislinie um M, d. h. die Kreislinien haben nur den einen Punkt B gemein, welcher auf der Centrallinie liegt.

167. **Lehrsatz.** Ist die Centrale kleiner als die Summe, aber größer als die Differenz der Radien, so schneiden sich die Kreislinien. (Fig. 95.)

Bew. Aus der ersten Voraussetzung folgt wiederum, daß der Punkt A innerhalb der Kreislinie um M fallen muß.

$$\begin{array}{rl} \text{2. Vorauss.} & Mm < R - r \\ & mB = r \\ \hline & Mm + mB > R \text{ (S. F. 8.)} \\ & Mm + mB = MB \\ \hline & MB > R \text{ (S. F. 1)} \end{array}$$

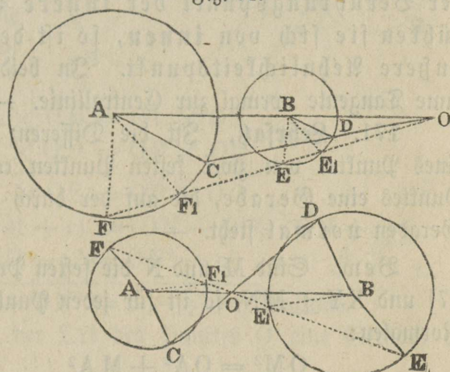
Mit Berücksichtigung von 152 folgt hier aus der zweiten Voraussetzung, daß der Punkt B außerhalb der Kreislinie um M fallen muß. — Da nun A innerhalb, B außerhalb der Kreislinie um M liegt, so müssen sich die Kreise schneiden.

Anm. Daß zwei Kreislinien sich in zwei Punkten schneiden, und daß diese Punkte nach entgegengesetzter Seite der Centrallinien liegen, ist bereits unter 12 gezeigt.

§ 2. Kreise, Punkte und Geraden.

168. **Lehrsatz.** Alle Geraden, welche durch die Endpunkte gleichliegend paralleler Radien zweier Kreise gehen, treffen die Centrallinien in **demselben** Punkte.

Fig. 96.



Bew. Ist $AC \parallel BD$ und schneidet die Gerade CD die Centrallinie in O, so ist:

$OB : OA = BD : AC$ (134)

also auch $OB : OA = BE : AF$

Ist nun $BE \parallel AF$ so liegen (nach 134 Zus.) die Punkte F_1 E_1 O in einer Geraden.

169. **Definition.** Der Punkt, in welchem die Centrallinie zweier Kreise von einer Geraden geschnitten wird, die durch die Endpunkte von zwei parallelen Radien gezogen ist, heißt der **Aehnlichkeitspunkt** beider Kreise. — Liegen die parallelen Radien auf einerlei Seite der Centrallinie, so bestimmt die durch ihre Endpunkte gezogene Gerade den äußeren Aehnlichkeitspunkt, liegen sie nach verschiedener Seite der Centrallinie, so geht die gedachte Gerade durch den inneren Aehnlichkeitspunkt.

Folgerung. Die Abstände eines Aehnlichkeitspunktes von den Mittelpunkten der Kreise verhalten sich wie die Radien dieser Kreise.

170. **Lehrsatz.** Zieht man durch den Aehnlichkeitspunkt zweier Kreise eine Secante, so sind die Radien zu den Schneidepunkten der Secante und der Kreislinie paarweise parallel.

Bew. Ist (Fig. 96) O der Aehnlichkeitspunkt, sind F, F_1, E, E_1 die Schneidepunkte einer durch O gehenden Secante, so ist (nach 138 Anm):

$$\triangle\ OAF \sim OBE \text{ desgleichen } OAF_1 \sim OBE_1$$

denn die Dreiecke haben den Winkel O gemein, ferner ist $OA : OB = AF : BE$; ebenso $OA : OB = AF_1 : BE$, und die Winkel bei F und E, ebenso die bei F_1 und E_1 sind gleichartig.

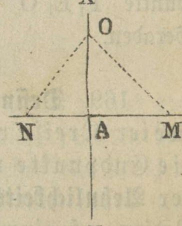
1. **Zusatz.** Die gemeinsame Tangente zweier Kreise geht durch den Aehnlichkeitspunkt, und umgekehrt: Zieht man von einem außerhalb eines Kreises liegenden Aehnlichkeitspunkt eine Tangente an den einen Kreis, so ist diese zugleich Tangente an dem anderen Kreise. —

2. **Zusatz.** Berühren sich zwei Kreise von **außen**, so ist der Berührungspunkt der **innere** Aehnlichkeitspunkt; berühren sie sich von **innen**, so ist der Berührungspunkt der äußere Aehnlichkeitspunkt. In beiden Fällen steht die gemeinsame Tangente normal zur Centrallinie. —

171. **Lehrsatz.** Ist die Differenz der Quadrate der Abstände eines Punktes von zwei festen Punkten constant, so ist der Ort des Punktes eine Gerade, die auf der durch die festen Punkte bestimmten Geraden normal steht. —

Bew. Sind M und N die festen Punkte [Fig. 97] und $XY \perp MN$, so ist für jeden Punkt O dieser Normalen:

Fig. 97.



$$OM^2 = OA^2 + MA^2$$
$$ON^2 = OA^2 + NA^2$$
$$\overline{OM^2 - ON^2 = MA^2 - NA^2 = \text{Constans.}}$$

Anmerkung. Ist die Constante $= c^2$ gegeben, so läßt sich der Punkt (A), in welchem der Ort die Verbindungslinie der festen Punkte schneidet, (also auch der Ort selbst) leicht durch Construction bestimmen:

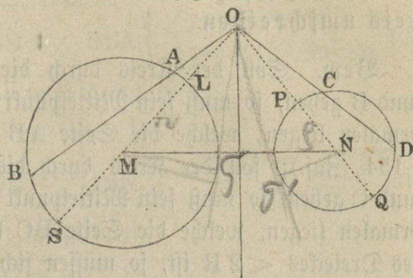
$$(MA^2 - NA^2 = c^2$$
$$(MA + NA)(MA - NA) = c^2$$
$$MA + NA = MN$$
$$MN . (MA - NA) = c^2$$
$$\text{oder } MA - NA = \frac{c^2}{MN}$$
$$MA + NA = MN$$
$$\text{durch Addition: } 2\,MA = \frac{c^2}{MN} + MN$$
$$MA = \frac{c^2 + MN^2}{2 . MN}$$

Bei der Construction wendet man erst 119, dann 143 an.

172. **Lehrsatz.** Der Ort eines Punktes, der in Beziehung auf zwei Kreise **gleiche Potenzen** hat, ist eine Gerade. — Diese Gerade heißt Potenzlinie, Chordale (auch Radical-Achse) der beiden Kreise.

Bew. Sind M und N die Mittelpunkte zweier Kreise, deren Radien respective r und ρ; und ist O ein Punkt, für welchen $OA \times OB = OC \times OD$ ist, so ziehe man noch die Secanten OS und OQ durch die Kreismittelpunkte und es ist nun:

Fig. 98.



$$OA \times OB = OL \times OS$$
$$OC \times OD = OP \times OQ$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$
$$OL \times OS = OP \times OQ$$

oder $(OM - r) \times (OM + r) = (ON - \rho) \times (ON + \rho)$

d. h. $OM^2 - r^2 = ON^2 - \rho^2$

$$\overline{OM^2 - ON^2 = r^2 - \rho^2 = \text{Constans}.}$$

Folglich ist nach 171 der Ort des Punktes O eine Gerade, die auf MN normal steht. —

1. **Zusatz.** Die Chordale zweier Kreise steht auf der Centrallinie der Kreise **normal.**

2. **Zusatz.** Schneiden sich zwei Kreislinien, so geht ihre Chordale durch ihre beiden Schneidepunkte.

3. **Zusatz.** Berühren sich zwei Kreise, so ist ihre gemeinsame Tangente zugleich ihre Chordale.

4. **Zusatz.** Werden zwei Kreislinien von einer dritten geschnitten, so ist der Schneidepunkt der beiden Secanten, die durch die Durchschnittspunkte je eines der beiden Kreise mit dem dritten gehen, ein Punkt der Chordalen beider Kreise.

Anm. Mit Hülfe dieses Satzes ist es leicht, für zwei Kreislinien, die keinen Punkt gemein haben, die Chordale zu construiren.

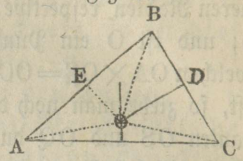
Cap. IV.

Kreis und Vieleck.

Sind die Seiten eines Vielecks sämmtlich Sehnen, so heißt das Vieleck ein Sehnenvieleck. Die Ecken eines Sehnenvieleckes liegen auf der Peripherie, und daher heißt das Vieleck dem Kreise eingeschrieben, der Kreis dem Vielecke umschrieben. Sind die Seiten eines Vieleckes sämmtlich Tangenten, so heißt es ein Tangentenvieleck, und ist dem Kreise umschrieben, während der Kreis ihm eingeschrieben ist.

173. **Lehrsatz.** Einem jeden Dreiecke läßt sich ein Kreis umschreiben.

Fig. 34.



Bew. Soll der Kreis durch die Ecken A und B gehen, so muß sein Mittelpunkt in der Normalen liegen, welche die Seite AB halbirt (s. 154, Zus.); soll der Kreis durch die Ecken B und C gehen, so muß sein Mittelpunkt in der Normalen liegen, welche die Seite BC halbirt. Da nun jeder Winkel eines Dreieckes < 2 R ist, so müssen sich die beiden Normalen schneiden (s. I. Uebst. 1), und sie schneiden sich nur in einem Punkte (O), welcher also der Mittelpunkt der einzigen durch die drei Ecken des Dreieckes gehenden Kreislinie ist. (Vergl. 68.)

Zusatz. Der Kreis ist durch drei Punkte, die nicht in gerader Linie liegen, bestimmt. —

174. **Lehrsatz.** Einem jeden Dreiecke läßt sich ein Kreis einschreiben. —

Bew. Es ist bereits unter 67 bewiesen, daß der Schneidepunkt der winkelhalbirenden Transversalen von den drei Seiten gleiche Abstände hat. Dieser Punkt ist daher der Mittelpunkt des dem Dreiecke eingeschriebenen Kreises, da eine Kreislinie, mit einer der Normalen als Radius geschlagen, durch die drei Fußpunkte der Normalen geht und (nach 156) die Seiten als Tangenten hat. —

175. **Lehrsatz.** In einem dem Kreise eingeschriebenen Vierecke ergänzen sich die gegenüberliegenden Winkel zu zwei Rechten. [Fig. 99.]

Bew. Ist ABCD ein Sehnenviereck, so hat der Winkel ABC (s. 159) den halben Bogen ADC, der Winkel ADC den halben Bogen ABC zum Mäße; die Summe der gegenüberliegenden Winkel ABC und ADC hat also die halbe Peripherie zum Maße, d. h. sie ist gleich zwei Rechten.

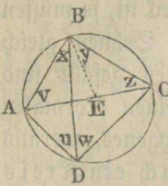
176. **Lehrsatz.** In einem dem Kreise eingeschriebenen Vierecke ist das Rechteck aus den Diagonalen gleich der Summe der beiden Rechtecke aus den gegenüberliegenden Seiten.

Ist ABCD [Fig. 99] ein Sehnenviereck, sind AC und BD die Diagonalen, so ist

die Behaupt. $AC \times BD = BC \times AD + AB \times CD$

Bew. Man mache $\angle CBE = \angle ABD$

Fig. 99.



$$\text{so ist 1) } \triangle CBE \sim \triangle DBA \left\{ \begin{array}{l} \angle y = x \text{ gemacht} \\ \angle z = u \text{ (159, Zus. 1)} \end{array} \right\} 136.$$

$$CB : CE = DB : DA \text{ also}$$

$$\text{I. } CE \times DB = CB \times DA$$

$$\text{2) } \triangle ABE \sim \triangle DBC \left\{ \begin{array}{l} \angle ABE = \angle DBC \\ \angle v = w \end{array} \right.$$

$$AB : AE = DB : DC$$

$$\text{II. } AE \times DB = AB \times DC$$

$$\text{I. u. II. addirt } (CE + AE) \times DB = CB \times DA + AB \times DC$$

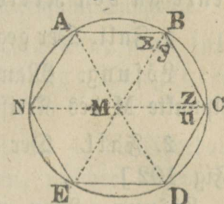
$$\text{d. h. } AC \times DB = DB \times DA + AB \times DC$$

177. **Lehrsatz.** Einem jeden regelmäßigen Vielecke läßt sich ein Kreis um- und einschreiben, d. h. es ist zugleich Sehnen- und Tangentenvieleck.

Bew. Ist ABCD ... N [Fig. 100] ein regelmäßiges Polygon, so kann man zunächst (nach 173) den Mittelpunkt eines Kreises finden, der durch drei auf einander folgende Ecken, A, B und C geht. Verbindet man nun den Punkt M mit den Ecken des Polygones, so ist:

$$\triangle AMB \cong \triangle CMB \ (64)$$

Fig. 100.



$$\angle y = \angle x$$

$$\text{d. h. } \angle y = \tfrac{1}{2} \angle ABC$$

$$\angle y = z \ (51)$$

$$\angle z = \tfrac{1}{2} \angle ABC$$

$$\angle ABC = \angle BCD$$

$$\angle z = \tfrac{1}{2} \angle BCD$$

$$\text{d. h. } \angle z = \angle u$$

$$\triangle BMC \cong \triangle DMC \left\{ \begin{array}{l} CB = CD \\ \angle z = \angle u \\ MC = MC \end{array} \right\} 50.$$

$$MD = MC = MB$$

d. h. der Kreis, der durch die drei Ecken ABC geht, geht auch durch die folgende vierte Ecke D des regelmäßigen Polygons. — Da nun der Kreis durch die drei B, C, D geht, so folgt in gleicher Weise, daß er auch durch die folgende Ecke E geht u. s. f. — Kurz, wir erhalten den Schluß: Der Kreis, welcher durch drei auf einander folgende Ecken eines regelmäßigen Polygons geht, geht zugleich durch alle Ecken. Da nun aber (nach 173) durch drei auf einander folgende Eckpunkte stets ein Kreis möglich ist, so folgt weiter: Jedem regelmäßigen Polygone läßt sich ein Kreis umschreiben.

Da hiernach das Polygon ABC...N ein Sehnenvieleck ist, so müssen die Seiten desselben vom Mittelpunkte M als gleiche Sehnen gleich entfernt sein; d. h. die Normalen von M auf die Seiten gefällt sind unter sich gleich. Ein Kreis also, der um M mit der einen Normalen als Radius geschlagen wird, berührt alle Seiten des Polygones, woraus folgt: Jedem regelmäßigen Polygone läßt sich auch ein Kreis einschreiben und der Mittelpunkt des umschriebenen ist auch der Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises.

Cap. V.

Aufgaben zum vierten Abschnitte.

178. **Aufgabe.** Zu einer gegebenen Kreislinie oder einem Kreisbogen den Mittelpunkt zu finden.

Lösung. Man halbirt zwei beliebige Sehnen durch Normale; der Schneidepunkt dieser Normalen ist der verlangte Mittelpunkt (s. 154, Zus.).

179. **Aufgabe.** Durch einen gegebenen Punkt eine Tangente an den Kreis zu ziehen.

1. Fall. Der gegebene Punkt A liegt auf der Peripherie: [Fig. 101.]

Lösung. Man verbindet den gegebenen Punkt A mit dem Mittelpunkte M des Kreises und zieht durch A die Linie XY ⊥ MA.

2. Fall. Der gegebene Punkt A liegt außerhalb des Kreises. [Fig. 102.]

Lösung. Man verbindet den gegebenen Punkt A mit dem Mittelpunkte M des Kreises, schlägt über MA als Durchmesser einen Halbkreis und zieht von A durch den Durchschnittspunkt B beider Kreislinien die Linie AX, so ist diese eine Tangente am Kreise; denn verbindet man B mit M, so ist ∠ MBA = 1 R. (159, Zus. 2.)

Fig. 101.

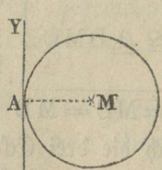
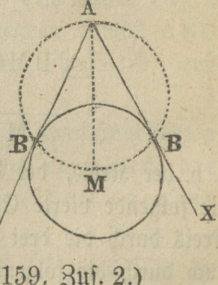


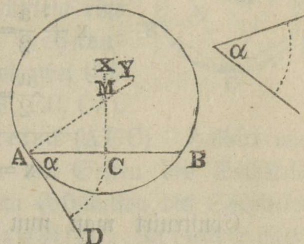
Fig. 102.



Anm. Von einem Punkte außerhalb des Kreises kann man zwei Tangenten an den Kreis ziehen, und diese sind gleich lang.

180. **Aufgabe.** Ueber einer gegebenen Strecke soll ein Kreisabschnitt beschrieben werden, welcher einen gegebenen Winkel als Peripheriewinkel faßt. — [Fig. 103.]

Fig. 103.



Lösung. Da die gegebene Strecke AB eine Sehne des Kreises sein soll, so muß der Mittelpunkt des Kreises in der Normalen CX liegen, die man in der Mitte (C) der Sehne zur Sehne errichtet (s. 154, Zus.). Construirt man am Endpunkte (A) der gegebenen Geraden den Winkel BAD gleich dem gegebenen Winkel α, so muß (s. 159, Fll. 4) AD eine Tangente des Kreises werden, also muß der Mittelpunkt auch in der zu AD in A errichteten Normalen liegen (s. 156). Der Durchschnittspunkt M beider Normalen ist daher der Mittelpunkt des gefällten Kreises.

181. **Aufgabe.** An zwei gegebene Kreise die gemeinsamen Tangenten zu ziehen.

Lösung. Man construire zu beiden Kreisen die Aehnlichkeitspunkte und dann nach 179 vom Aehnlichkeitspunkte eine Tangente an den einen Kreis (vergl. 170, Zus. 1 und 2). — Liegen die Kreise aus einander, so giebt es eine innere und eine äußere gemeinsame Tangente.

182. **Aufgabe.** Es sind zwei Kreise gegeben; man soll die Punkte bestimmen, von welchen gleich lange Tangenten an beide Kreise gezogen werden können.

Lösung. Man construirt (nach 172, Zus. 1 bis 4) die Chordale zu beiden Kreisen. — Jeder Punkt der Chordalen, welcher außerhalb der Kreise liegt, genügt der Forderung.

183. **Aufgabe.** Es soll eine begrenzte gerade Linie durch den s. g. goldenen Schnitt stetig getheilt werden, d. h. so, daß der größere Abschnitt die mittlere Proportionale zu der ganzen Linie und dem kleineren Abschnitte ist.

1) Analytische Lösung. Ist a die gegebene Linie, x der gesuchte größere Abschnitt derselben, so ist nach der Forderung:

$$a : x = x : (a - x)$$

$$x^2 = a^2 - ax \quad (\text{s. } 127)$$

$$ax = ax \quad \text{addirt}$$

$$x^2 + ax = a^2$$

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \text{ addirt}$$

$$x^2 + ax + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2, \text{ daraus die Wurzel gezogen:}$$

$$x + \frac{a}{2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

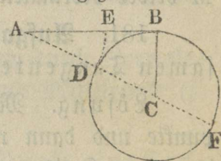
$$\frac{a}{2} = \frac{a}{2} \text{ subtrahirt}$$

$$x = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} - \frac{a}{2}$$

Construirt man nun das rechtwinklige Dreieck ABC [Fig. 104.] mit den Katheten a und $\frac{a}{2}$, so ist die Hypotenuse

$$AC = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} \quad (\text{s. } 119)$$

Fig. 104.



Schneidet man von dieser Hypotenuse das Stück $CD = \frac{a}{2}$ ab, so ist der Rest $AD = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} - \frac{a}{2} = x$. — Schneidet man ferner von der gegebenen Linie a das Stück AE = AD ab, so ist dieselbe in E stetig getheilt.

2) Synthetische Lösung. [Fig. 104.] In dem Endpunkte B der gegebenen Linie AB errichtet man das Loth BC = ½ AB, schlägt um den Punkt C mit dem Radius CB einen Kreis, zieht von dem zweiten Endpunkte A aus durch den Mittelpunkt C die Secante AF und schlägt endlich mit dem äußeren Abschnitte AD als Radius einen Kreis; dieser schneidet die Linie AB in E, und der goldene Schnitt ist geschehen:

Bew. AF : AB = AB : AD (s. 162.)

AB : (AF — AB) = AD : (AB — AD) (s. 129.)

AF — AB = AD = AE (da DF = AB)

AB — AD = EB

AB : AE = AE : EB

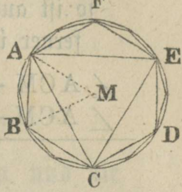
184. **Aufgabe.** Es soll einem Kreise ein regelmäßiges Dreieck, Sechseck .... 3×2^n Eck eingeschrieben werden.

Lösung. Trägt man den Radius als Sehne in den Kreis und verbindet die Endpunkte (A und B) [Fig. 105.] mit dem Mittelpunkte

Die Seite eines 6ecks ist = dem Radius des umschriebenen Kreises

(M), so ist das entstandene Dreieck (AMB) gleichseitig, also auch gleichwinklig, und folglich der Winkel (AMB) am Mittelpunkt = $^2/_3$ R, d. h. der 6te Theil von einem Completen. — Es läßt sich also der Radius sechsmal als Sehne in den Kreis tragen und es entsteht eine geschlossene Figur, ein regelmäßiges Sehnensechseck. Verbindet man aufeinanderfolgend zwei Eckpunkte des Sechseckes durch Diagonalen (AE, EC, CA), so entsteht ein regelmäßiges Sehnendreieck (AEC). Halbirt man aber die Bogen (AF, FE, ED ...) über den Seiten des Sechseckes und verbindet die Halbirungspunkte mit den Eckpunkten des Sechseckes, so erhält man ein regelmäßiges Sehnenzwölfeck. In gleicher Weise erhält man, durch Halbiren der Bogen, aus dem Zwölfeck ein Vierundzwanzigeck .. ꝛc.

Fig. 105.



185. **Aufgabe.** Ein regelmäßiges Viereck, Achteck ... $4 . 2^n$ Eck in den Kreis zu beschreiben.

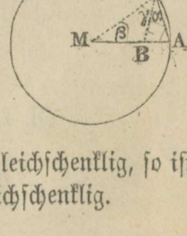
Lösung. Der Winkel am Mittelpunkte eines Sehnenviereckes ist der 4te Theil von einem Completen, also ein Rechter. — Zieht man daher zwei senkrechte Durchmesser und verbindet die Endpunkte derselben durch Sehnen, so erhält man ein regelmäßiges Sehnenviereck. — Durch fortgesetzte Halbirung der zugehörigen Bogen erhält man neue regelmäßige Polygone jedesmal von der doppelten Seitenzahl.

186. **Aufgabe.** Ein regelmäßiges Fünfeck, Zehneck ... $5 . 2^n$ Eck in den Kreis zu beschreiben. [Fig. 106.]

Lösung. Theilt man den Radius durch den goldenen Schnitt, so ist der größere Abschnitt die Seite des dem Kreise eingeschriebenen regelmäßigen Zehneckes.

Bew. Ist AM : MB = MB : BA und trägt man MB = AC als Sehne in den Kreis, verbindet C mit M und B, so ist:

Fig. 106.



$\triangle ACB \sim \triangle AMC$ $\left\{ \begin{array}{l} MA : AC = AC : AB \\ \angle MAC = \angle CAB \end{array} \right.$

1) $\angle \alpha = \angle \beta$

und CB = AC = BM $\left\{ \begin{array}{l} \text{Da } \triangle \text{ AMC gleichschenklig, so ist} \\ \text{auch ACB gleichschenklig.} \end{array} \right.$

2) $\angle \gamma = \angle \beta$

aus 1 und 2 folgt $\angle ACM = 2\beta$. Da nun $\angle MAC = \angle MCA$,

so ist auch $\angle MAC = 2\beta$

ferner ist $\angle AMC = 1\beta$

$$\angle ACM + \angle MAC + \angle AMC = 5\beta$$
$$\angle ACM + \angle MAC + \angle AMC = 2R$$

$$5\beta = 2R$$
$$10\beta = 4R$$

Da nun der Centriwinkel AMC 10mal herum getragen einen completen Winkel giebt, so läßt sich auch der größere Abschnitt MB des Radius 10mal als Sehne eintragen und giebt eine geschlossene Figur, ein regelmäßiges Sehnenzehneck.

Wie man aus dem Zehnecke ein 5Eck, 20Eck, 40Eck ... zu bilden habe, ist aus dem Vorhergehenden klar.

187. **Aufgabe.** Ein regelmäßiges Fünfzehneck, Dreißigeck ... $15 \cdot 2^n$ Eck in einen Kreis zu beschreiben.

Lösung. Subtrahirt man vom Centriwinkel des Sechseckes $= \frac{2}{3}$ R den Centriwinkel des Zehneckes $= \frac{2}{5}$ R, so erhält man $(\frac{2}{3} - \frac{2}{5})$ R $= \frac{4}{15}$ R $= \frac{1}{15}$ vom Completen, also den Centriwinkel des regelmäßigen Sehnenfünfzehneckes; die dem Winkel gegenüberliegende Sehne ist die Seite desselben.

Bemerkung. Diese Polygone sind die einzigen regelmäßigen Polygone, welche sich auf elementarem Wege aus dem Radius construiren lassen. — Zieht man durch die Eckpunkte eines regelmäßigen Sehnenvieleckes Tangenten, so bilden diese ein regelmäßiges Tangentenvieleck von gleicher Seitenzahl.

Vierter Abschnitt.

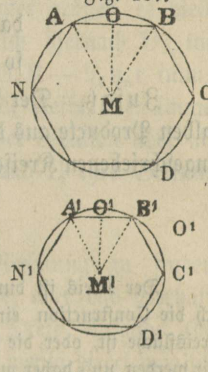
Größenverhältnisse an regelmäßigen Vielecken und die Kreismessung.

Cap. I.

Abhängigkeit der Größe regelmäßiger Polygone von den Radien der ein- und umschriebenen Kreise.

188. **Lehrsatz.** Die Umfänge regelmäßiger Polygone von gleicher Seitenzahl verhalten sich wie die Radien der ein- und umschriebenen Kreise, die Flächen aber wie die Quardrate dieser Radien.

Fig. 107.



Sind ABCD . . . N und $A_1B_1C_1D_1$ . . . N_1 [Fig. 107.] zwei regelmäßige Polygone von gleicher Seitenzahl, und bezeichnen wir ihre Flächen respective mit I und I_1, ihre Umfänge mit U und U_1, ihre Seiten mit s und s_1, die Radien der umschriebenen Kreise mit R und R_1, die Radien der eingeschriebenen Kreise mit r und r_1; so ist:

1. Behaupt. $U : U_1 = R : R_1 = r : r_1$

Bew. Ziehen wir von den Mittelpunkten M und M_1 aus die Radien der eingeschriebenen Kreise $MO \perp AB$; $M_1O_1 \perp A_1B_1$; ferner die Radien MA, MB, M_1A_1, M_1B_1 der umschriebenen Kreise, so ist:

$\triangle AMB \sim \triangle A_1M_1B_1 \left\{ \begin{array}{l} \angle MAB = \angle M_1A_1B_1 \\ \angle MBA = \angle M_1B_1A_1 \end{array} \right\}$ Als Hälften gleicher Polygonwinkel.

$AB : A_1B_1 = AM : A_1M_1$

d. h. 1) $s : s_1 = R : R_1$

$\triangle AMO \sim \triangle A_1M_1O_1 \left\{ \begin{array}{l} \angle MAO = \angle M_1A_1O_1 \\ \angle MOA = \angle M_1O_1A_1 \quad (= 1\ R) \end{array} \right.$

$MA : M_1A_1 = MO : M_1O_1$

d. h. 2) $R : R_1 = r : r_1$ da nun nach 145 Zus. und 150

3) $U : U_1 = s : s_1$, so folgt aus 1 und 2

$U : U_1 = R : R_1 = r : r_1$

2. Behaupt. $I : I_1 = R^2 : R_1{}^2 = r^2 : r_1{}^2$

Bew. $I : I_1 = s^2 : s_1{}^2$ (s. 149)

aus 1 und 2 folgt $s^2 : s_1{}^2 = R^2 : R_1{}^2 = r^2 : r_1{}^2$

$$I : I_1 = R^2 : R_1{}^2 = r^2 : r_1{}^2$$

189. **Lehrsatz.** Ein regelmäßiges Polygon ist halb so groß als das Rechteck (oder gleich dem halben Producte) aus seinem Umfange und dem Radius des eingeschriebenen Kreises.

Behaupt. $I = \frac{1}{2}\, ur$

Bew. Zieht man vom Mittelpunkte nach allen Ecken hin gerade Linien, so theilen diese das Polygon in so viele unter sich congruente Dreiecke, als das Polygon Seiten hat. Nimmt man nun die Seite des Polygones als Grundlinie eines solchen Dreieckes, so ist der Radius des eingeschriebenen Kreises seine Höhe, also der Inhalt

$$\triangle = \frac{1}{2}\, r \,.\, s \text{ (s. 86.)}$$

Hat das Polygon nun n Seiten, so ist seine Fläche

$$I = \frac{1}{2}\, rs \,.\, n$$

da aber $ns = u$

so folgt $I = \frac{1}{2}\, ru$

Zusatz. Der Inhalt eines regelmäßigen Polygones ist gleich dem halben Producte aus den Maßzahlen seines Umfanges und dem Radius des eingeschriebenen Kreises, bezogen auf die Flächeneinheit. (Vergl. 104 Zus. 1).

Cap. II.

Ausmessung des Kreises.

Der Kreis ist durch seinen Radius vollkommen bestimmt. — Trotzdem hat sich die Construction eines Quadrates aus dem Radius, dessen Fläche gleich der Kreisfläche ist, oder die sogen. Quadratur des Zirkels, als unmöglich erwiesen, und wir werden uns daher mit einer annähernden Berechnung des Kreisinhaltes begnügen müssen. Bedenken wir nun, daß ein regelmäßiges Vieleck sich immer mehr dem Kreise nähert, je mehr Seiten wir demselben geben, daß sein Inhalt aber stets gleich dem halben Producte aus den Maßzahlen seines Umfanges und des Radius des ihm eingeschriebenen Kreises ist, so werden wir zunächst auf den Satz geführt:

190. **Lehrsatz.** Der Kreis ist gleich dem halben Producte (Rechtecke) aus seinem Umfange und seinem Radius.

Beschreiben wir um und in den Kreis regelmäßige Vielecke von gleicher Seitenzahl und bezeichnen:

die Fläche des Kreises . . . . mit I_k

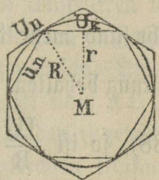
die Peripherie . . . . „ U_k

den Radius . . . . „ R

die Fläche des dem Kreise umschriebenen regelmäßigen n Eckes mit I_n
den Umfang " " " " " " U_n
die Fläche " " " eingeschriebenen " " " i_n
den Umfang " " " " " " " u_n
den Radius des dem eingeschrieb. n Ecke eingeschriebenen Kreises " r
so ist:

Behaupt. $I_k = \frac{1}{2} U_k . R$

Fig. 108.



Bew. Es ist (nach 189) 1) $I_n = \frac{1}{2} U_n . R$

2) $i_n = \frac{1}{2} u_n . R$

Ferner ist: 3) $I_n > I_k > i_n$

I. $\frac{1}{2} U_n R > I_k > \frac{1}{2} u_n . r$ (S. F. 1)

Nach Satz 6 ist aber $U_n > U_k > u_n$

II. $\frac{1}{2} U_n R > \frac{1}{2} U_k R > \frac{1}{2} u_n r$ (da auch $R > r$) (S. F. 10.)

Verdoppeln wir nun fortlaufend die Seitenzahl der Sehnen- und Tangentenvielecke, so wird U_n immer kleiner, u_n immer größer, es bleibt aber stets $U_n > U_k$ und $u_n < U_k$. — Indem sich hiernach U_n und u_n fortwährend nähern, wird auch die Differenz $\frac{1}{2} U_n R - \frac{1}{2} u_n r$ immer kleiner und kleiner (denn auch r wächst fortwährend, bleibt aber immer $< R$) und nähert sich unendlich der Null. — Dabei behalten aber alle obigen Gleichungen, also auch die Gleichungen I und II ihre Geltung. Folglich ist:

$$I_k = \frac{1}{2} U_k R \text{ (s. 100)}$$

Um daher den Inhalt des Kreises durch Rechnung zu finden, brauchen wir bloß noch die Maßzahl der Peripherie, oder das Verhältniß der Peripherie zum Radius zu bestimmen. Diese Aufgabe (die sogen. Rectification der Kreislinie) ist aber eben so wenig direct möglich, als die Quadratur des Zirkels, da die Kreislinie, als eine stetig gekrümmte Linie, sich nicht unmittelbar durch eine gr. Linie messen läßt. — Beweisen wir zunächst, daß das Verhältniß der Peripherie eines Kreises zum Radius in der That ein constantes ist, und suchen dann eine Formel für die annähernde Berechnung dieses Verhältnisses zu ermitteln.

191. **Lehrsatz.** Die Peripherieen zweier Kreise verhalten sich wie ihre Radien. [Fig. 109.]

Beschreiben wir einem jeden der beiden Kreise regelmäßige Polygone von gleicher Seitenzahl ein und um, und behalten die Bezeichnungsweise unter 190 bei, indem wir die Buchstaben für den zweiten Kreis durch angehängte Striche unterscheiden, so ist:

Behaupt. $U_k : U'_k = R : R'$ oder $U_k : R = U_k : R'$

Bew. $U_n > U_k > u_n$ (s. 6) | $U'_n > U_k > u'_n$

I. $\frac{U_n}{R} > \frac{U_k}{R} > \frac{u_k}{R}$ | II. $\frac{U'_n}{R'} > \frac{U'_k}{R'} > \frac{u'_n}{R'}$

Vermehren wir nun die Seitenzahl der Sehnen- und Tangentenvielecke durch fortlaufende Verdoppelung, so nähern sich ihre Umfänge fortwährend, und es nähern sich auch die Differenzen $\frac{U_n}{R} - \frac{u_n}{R}$ und $\frac{U'_n}{R'} - \frac{u'_n}{R'}$ mehr und mehr der Null, während die obigen Gleichungen stets ihre Geltung behalten. Da nun hierbei stets $\frac{U_n}{R} = \frac{U'_n}{R'}$ und $\frac{u_n}{R} = \frac{u'_n}{R'}$ bleibt (188), so ist $\frac{U_n}{R} = \frac{U'_k}{R'}$ (s. 100).

192. **Lehrsatz.** Die Flächen der Kreise verhalten sich wie die Quadrate ihrer Radien. [Fig. 109.]

Da (nach 190) $I_k = \frac{1}{2} U_k R$

$I'_k = \frac{1}{2} U'_k R'$

so ist 1) $I_k : I'_k = U_k R : U'_k R'$

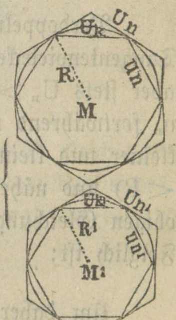
nun ist $U_k : U'_k = R : R'$ (s. 191)

$R : R' = R : R'$

2) $U_k R : U'_k R' = R^2 : R'^2$ (S. F. 5 u. 117)

aus 1 und 2 folgt $I_k : I'_k = R^2 : R'^2$

Fig. 109.

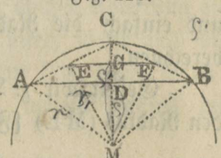


193. **Aufgabe.** Das Verhältniß der Peripherie eines Kreises zum Durchmesser oder die sogen. Ludolph'sche Zahl — welche durch π bezeichnet wird — zu bestimmen.

Lösung. Können wir aus einem regelmäßigen n Ecke ein 2 n Eck von gleichem Umfange construiren, so können wir auch Formeln ableiten, nach welchen wir aus den in Zahlen gegebenen Radien des n Eckes die Radien für das 2 n Eck berechnen können. Es ist aber der Radius des dem 2 n Eck umschriebenen Kreises kleiner, der Radius des ihm eingeschriebenen Kreises größer als der des n Eckes von gleichem Umfange; setzt man daher die Verdoppelung der Seitenzahl, bei constant bleibendem Umfange, immer weiter fort: so müssen sich die beiden Radien immer mehr und mehr ausgleichen und endlich bis auf eine bestimmte Anzahl Decimalstellen übereinstimmen. — Ist aber der Radius des einem regelmäßigen Polygone eingeschriebenen Kreises gleich dem Radius des ihm umschriebenen Kreises geworden, so müssen auch beide Kreisperipherieen zusammengefallen, das zwischenliegende Polygon selbst muß ein Kreis geworden sein.

Können wir also die Verwandlung eines regelmäßigen Polygons in ein anderes von gleichem Umfange und der doppelten Seitenzahl ausführen, so brauchen wir nur von einem der regelmäßigen Polygone auszugehen, die wir nach Abschnitt IV Cap. V aus dem Radius construiren und von welchen wir also sowohl den Umfang, als auch die Radien in Zahlen ausdrücken können, um die Zahlen π bis auf jede gewünschte Anzahl Decimalstellen genau durch Rechnung zu erhalten. — Ist nun AB die Seite eines regelmäßigen nEckes [Fig. 110.], $\angle$ AMB der zugehörige Centriwinkel, so muß die Seite des 2n Eckes von gleichem Umfange offenbar die Hälfte von AB sein. Zugleich muß aber auch der zugehörige Centriwinkel die Hälfte vom $\angle$ AMB sein, und wir müssen daher die Hälfte der Linie AB in eine solche Lage zum Mittelpunkte M bringen, daß ihre Endpunkte von demselben gleiche Entfernung haben und der zugehörige Centriwinkel = $\frac{1}{2}$ AMB wird. — Schlagen wir zu dem Zwecke mit dem Radius AM (= MB) einen Kreis, halbiren den Winkel AMB durch den Radius MC, ziehen die Sehnen AC und BC, fällen ME $\perp$ AC, MF $\perp$ BC und verbinden endlich E mit F, so ist:

Fig. 110.



$\rho' = \frac{\rho + r}{2}$

$r_1 = \sqrt{r \cdot \rho'}$

1) EM = FM (155, Zus.)

$$\left.\begin{array}{l}\angle EMC = \frac{1}{2}\angle AMC \\ \angle FMC = \frac{1}{2}\angle BMC\end{array}\right\}\text{ s. 153.}$$

2) $\angle$ EMF = $\frac{1}{2}\angle$ AMB (s. F. 3)

$$\triangle CEF \sim \triangle CAB \left\{\begin{array}{l} CE:CA = CF:CB \\ \angle ECF = \angle ACB \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Da } CE = \frac{1}{2}CA \\ \text{und } CF = \frac{1}{2}CB\end{array}$$

EF : AB = CE : CA

da nun CE = $\frac{1}{2}$ CA (s. 153)

3) EF = $\frac{1}{2}$ AB

Es ist also die Linie EF die Seite des 2nEckes von gleichem Umfange mit dem nEcke in der richtigen Lage zum Mittelpunkte, so daß EM der Radius des ihm umschriebenen, GM der Radius des ihm eingeschriebenen Kreises ist. Wir haben nur noch die Abhängigkeit dieser Radien von den Radien (AM und DM) des nEckes zu bestimmen.

Bezeichnen wir die Maßzahl des Radius MA durch r
" " " " " " MD " ρ
" " " " " " ME " r_1
" " " " " " MG " ρ_1
so ist:

$$\begin{array}{l} MG = MD + DG \\ DG = GC \text{ (da } \triangle CEG \sim CAD \text{ und } CE = EA) \\ \hline MG = MD + GC \text{ (s. F. 1)} \\ GC = CM - GM \\ \hline MG = MD + CM - GM \text{ (S. F. 1)} \end{array}$$

d. h. $\rho_1 = \rho + r - \rho_1$

~~$\rho_1 = \rho_1$ addirt~~

$$2\rho_1 = \rho + r$$

also I. $\rho_1 = \dfrac{\rho + r}{2}$

Es ist ferner $\triangle AME \sim \triangle EMG \left\{ \begin{array}{l} \angle AME = \angle EMG \text{ (s. 153).} \\ \angle MEA = \angle MGE \text{ } (= 1 R) \end{array} \right.$

$$AM : ME = ME : MG$$

d. h. $r : r_1 = r_1 : \rho_1$

$$r_1^2 = r \cdot \rho_1$$

also II. $r_1 = \sqrt{r \cdot \rho_1}$

Mit Hülfe der beiden Formeln I und II können wir nun leicht und einfach die Radien für das 2n Eck aus den Radien des n Eckes berechnen.

Gehen wir z. B. von einem Quadrate (ABCD) aus und nehmen den Radius (ME) [Fig. 111] des demselben eingeschriebenen Kreises als Maßeinheit, so ist die Maßzahl dieses Radius $\frac{ME}{ME}$ oder

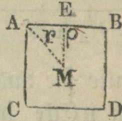
1) $\rho = 1$

Ferner ist $MA^2 = ME^2 + AE^2 = 2 \cdot ME^2$ (da $ME = EA$)

$$\frac{MA^2}{ME^2} = 2$$

also $\dfrac{MA}{ME} = \sqrt{2}$

Fig. 111.



d. h. 2) $r = \sqrt{2} = 1{,}41421$

Hieraus erhalten wir die Radien für das Achteck von gleichem Umfange, nämlich

$$\rho_1 = \frac{1 + 1{,}41421}{2} = 1{,}20710$$

$$r_1 = \sqrt{1{,}41421 \times 1{,}20710} = 1{,}30655$$

Setzen wir nun das Achteck als das n Eck, so daß seine Radien r und ρ sind, so erhalten wir in gleicher Weise aus den obigen Formeln die Radien für das Sechszehneck u. s. f., wie sie in der folgenden Tafel verzeichnet sind.

Eck.	ρ	r
4	1,00000	1,41421
8	1,20711	1,30656
16	1,25683	1,28146
32	1,26915	1,27533
64	1,27224	1,27378
128	1,27301	1,27339
256	1,27320	1,27330
512	1,27325	1,27327
1024	1,27326	1,27326

Ein regelmäßiges Polygon von 1024 Ecken ist also so wenig von einem Kreise verschieden, daß der Radius des ihm umschriebenen Kreises nicht um $^1/_{100000}$ größer ist als der des eingeschriebenen Kreises. Da nun der Umfang des Quadrates 8mal so lang ist als der Radius des eingeschriebenen Kreises, dieser Radius aber bei der obigen Ableitung als Einheit gesetzt wurde, und der Umfang constant blieb, so ist auch die Maßzahl des Umfanges vom 1024 Eck = 8. — Man kann daher sagen: die Maßzahl der Peripherie des Kreises ist = 8, dessen Radius die Maßzahl 1,27326 hat. — Folglich ist

$$\pi = \frac{U_k}{2R} = \frac{8}{2 \times 1{,}27326} = 3{,}14156$$

welche Zahl das Verhältniß der Peripherie zum Durchmesser auf Zehntausendstel genau angiebt (die letzte Stelle ist fehlerhaft); eine Genauigkeit, die meist hinreichend ist. — Der genauere Werth ist:

$$\pi = 3{,}1415926.$$

Für die Berechnung des Kreises merken wir uns jetzt noch die beiden Formeln:

1) $U_k = 2\,\pi\,R$

2) $I_k = {}^1/_2\,U_k\,.\,R = \pi\,R^2.$

$$\rho_1 = \frac{1 + 1{,}41421}{2} = 1{,}20710$$

$$r_1 = \sqrt{1{,}41421 \times 1{,}20710} = 1{,}30655$$

Setzen wir nun das Achteck als das n Eck, so daß seine Radien r und ρ sind, so erhalten wir in gleicher Weise aus den obigen Formeln die Radien für das Sechzehneck u. s. f., wie sie in der folgenden Tafel verzeichnet sind.

Eck.	ρ	r
4	1,00000	1,41421
8	1,20711	1,30656
16	1,25683	1,28146
32	1,26915	1,27533
64	1,27224	1,27378
128	1,27301	1,27339
256	1,27320	1,27330
512	1,27325	1,27327
1024	1,27326	1,27326

Ein regelmäßiges Polygon von 1024 Ecken ist also so wenig von einem Kreise verschieden, daß der Radius des ihm umschriebenen Kreises nicht um $\frac{1}{100000}$ größer ist als der des eingeschriebenen Kreises. Da nun der Umfang des Quadrates 8mal so lang ist als der Radius des eingeschriebenen Kreises, dieser Radius aber bei der obigen Ableitung als Einheit gesetzt wurde, und der Umfang constant blieb, so ist auch die Maßzahl des Umfanges vom 1024 Eck = 8. — Man kann daher sagen: die Maßzahl der Peripherie des Kreises ist = 8, dessen Radius die Maßzahl 1,27326 hat. — Folglich ist

$$\pi = \frac{U}{2R} = \frac{8}{2 \times 1{,}27326} = 3{,}14156$$

welche Zahl das Verhältniß der Peripherie zum Durchmesser auf Zehntausendtel genau angiebt (die letzte Stelle ist fehlerhaft); eine Genauigkeit, die meist hinreichend ist. — Der genauere Werth ist:

$$\pi = 3{,}1415926.$$

Für die Berechnung des Kreises merken wir uns jetzt noch die beiden Formeln:

1) $U = 2\pi R$
2) $I = \frac{1}{2} U . R = \pi R^2$.

Anhang.

Anleitung zur Lösung geometrischer Aufgaben.

Cap. I.

Geometrische Rechenaufgaben.

§ 1. Das rechtwinklige Dreieck aus je zwei Elementen zu berechnen.

1. **Aufgabe.** Die Katheten eines rechtwinkligen Dreieckes sind gegeben; es sollen die übrigen Elemente und der Inhalt berechnet werden.

Auflösung. Es sei a die Hypotenuse, b und c seien die Katheten, p die Projection der Kathete b, q die Projection der Kathete c, i der Inhalt und h die Höhe, so ist:

1) $a = \sqrt{b^2 + c^2}$ (s. 99)

$$i = \tfrac{1}{2}\, bc$$
$$i = \tfrac{1}{2}\, ah$$
$$\tfrac{1}{2}\, ah = \tfrac{1}{2}\, bc$$

3) $h = \frac{bc}{a} = \frac{bc}{\sqrt{b^2 + c^2}}$

2) $i = \tfrac{1}{2}\, bc$ (s. 104 Zus. 3)

$$ap = b^2 \text{ (s. 93)}$$

4) $p = \frac{b^2}{a} = \frac{b^2}{\sqrt{b^2 + c^2}}$

5) $q = \frac{c^2}{a} = \frac{c^2}{\sqrt{b^2 + c^2}}$

Beispiel: $b = 9{,}36^m$, $c = 7{,}57^m$ gegeben.

1) $a = 12{,}038^m$
2) $i = 35{,}428^{\square m}$
3) $h = 5{,}886^m$
4) $p = 7{,}278^m$
5) $q = 4{,}760^m$

2. **Aufgabe.** Die Hypotenuse ($a = 13{,}45^m$) und die eine Kathete ($b = 7{,}28^m$) sind gegeben; es sollen die übrigen Elemente und der Inhalt berechnet werden.

Auflösung.

1) $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{(a+b)(a-b)} = 11{,}3095^m$

2) $i = \tfrac{1}{2}\, bc = \tfrac{1}{2}\, b \,.\, \sqrt{(a+b)(a-b)} = 41{,}1665^{\square m}$

3) $p = \frac{b^2}{a} = 3{,}9404^m$

4) $q = \frac{c^2}{a} = \frac{a^2 - b^2}{a} = \frac{(a+b)(a-b)}{a} = 9{,}5096^m$

5) $h = \sqrt{p\,.\,q} = \sqrt{\frac{b^2}{a} \,.\, \frac{(a+b)(a-b)}{a}} = \frac{b}{a}\sqrt{(a+b)(a-b)} = 6{,}1214^m$

3. **Aufgabe.** Die Hypotenuse ($a = 27{,}57^m$) und die Höhe ($h = 9{,}84^m$) sind gegeben; es sollen die übrigen Elemente und der Inhalt berechnet werden.

Auflösung.

$$bc = ah$$
$$b^2 + c^2 = a^2$$
$$b^2 + 2bc + c^2 = a^2 + 2ah$$
$$b^2 - 2bc + c^2 = a^2 - 2ah$$
$$b + c = \sqrt{a(a + 2h)} = 36{,}093$$
$$b - c = \sqrt{a(a - 2h)} = 14{,}749$$

1) $b = 25{,}421^m$

2) $c = 10{,}672^m$

3) $i = \frac{1}{2}ah = 135{,}647\square^m$

4) $p = \dfrac{b^2}{a} = 23{,}44^m$

5) $q = \dfrac{c^2}{a} = 4{,}13^m$

4. **Aufgabe.** Die Hypotenuse ($a = 25^m$) und die Projection der einen Kathete ($p = 7{,}8^m$) sind gegeben; es sollen die übrigen Elemente und der Inhalt berechnet werden.

Auflösung. 1) $b = \sqrt{ap} = 13{,}9642^m$

2) $q = a - p = 17{,}2^m$

3) $c = \sqrt{aq} = 20{,}7364^m$

4) $h = \sqrt{p.q} = 11{,}5827^m$

5) $i = \frac{1}{2}ah = 144{,}7843\square^m$

5. **Aufgabe.** Die Hypotenuse ($a = 25^m$) und der Inhalt ($i = 100\square^m$) sind gegeben; es sollen die übrigen Elemente berechnet werden.

Auflösung. 1) $h = \dfrac{2.i}{a} = 8^m$

Hiermit ist die Lösung auf die der Aufgabe 3 zurückgeführt; man findet:

2) $b = 23{,}5078^m$

3) $c = 8{,}5078^m$

4) $p = 22{,}1046^m$

5) $q = 2{,}8954^m$

Anmerkung. Die Aufgabe ist nur lösbar, wenn a nicht kleiner als $2.\sqrt{i}$ gegeben ist.

6. **Aufgabe.** Die Projectionen beider Katheten auf der Hypotenuse sind gegeben ($p = 0{,}97^m$; $q = 2{,}05^m$); es sollen die übrigen Elemente und der Inhalt berechnet werden.

Auflösung. 1) $a = p + q = 3{,}02^m$

Hiermit ist die Aufgabe auf die Aufgabe 4 reducirt, und man findet darnach:

2) $h = 1{,}4101^m$
3) $b = 1{,}7116^m$
4) $c = 2{,}4882^m$
5) $i = 2{,}1293^{\square m}$

7. **Aufgabe.** Die eine Kathete ($b = 15{,}112^m$) und der Inhalt ($i = 294{,}07^{\square m}$) sind gegeben; es sollen die übrigen Elemente berechnet werden.

Auflösung. Aus der Gleichung $i = \frac{1}{2} bc$ findet man 1) $c = \frac{2 \cdot i}{b} = 38{,}919^m$, womit die Aufgabe auf die erste Aufgabe reducirt ist, und man findet darnach:

2) $a = 41{,}75^m$ 4) $q = 36{,}28^m$
3) $p = 5{,}47^m$ 5) $h = 14{,}087^m$

8. **Aufgabe.** Die Höhe ($h = 10^m$) und der Inhalt ($i = 100^{\square m}$ eines rechtwinkligen Dreieckes sind gegeben; es sollen die übrigen Elemente berechnet werden.

Auflösung. Aus der Gleichung $i = \frac{1}{2} ah$ findet man 1) $a = \frac{2 \cdot i}{h} = 20^m$, womit die Aufgabe auf die dritte Aufgabe reducirt ist; oder man berechnet p aus der Gleichung: $h^2 = p\,(a - p)$, und erhält:

2) $p = 10^m$ 4) $b = 10\sqrt{2} = 14{,}1421^m$
3) $q = 10^m$ 5) $c = 10\sqrt{2} = 14{,}1421^m$

a	b	c	h
8,602324	5,000000	7,000000	4,068667
6,200000	4,658324	4,091453	3,074085

i	p	q
17,500000	2,906190	5,696134
9,529663	3,500000	2,700000

§ 2. Berechnung des schiefwinkligen, gleichschenkligen und gleichseitigen Dreieckes und des Trapezes.

9. **Aufgabe.** Die drei Seiten eines Dreieckes sind gegeben ($a = 42{,}7^m$; $b = 38{,}4^m$; $c = 27{,}9^m$); es soll der Inhalt (i) desselben berechnet werden.

Auflösung. Nach 105 ist: $i = \sqrt{\frac{s}{2}\left(\frac{s}{2} - a\right)\left(\frac{s}{2} - b\right)\left(\frac{s}{2} - c\right)}$

Berechnung. $a = 42{,}7$	$\frac{s}{2} - a = 11{,}8$	$\wedge \underline{\tfrac{s}{2}} = 1{,}73640$
$b = 38{,}4$	$\frac{s}{2} - b = 16{,}1$	$\wedge \underline{\tfrac{s}{2} - a} = 1{,}07188$
$c = 27{,}9$	$\frac{s}{2} - c = 26{,}6$	$\wedge \underline{\tfrac{s}{2} - b} = 1{,}20683$
$s = 10{,}9$		$\wedge \underline{\tfrac{s}{2} - c} = 1{,}42488$
$\frac{s}{2} = 54{,}5$		$\wedge \underline{i} = 5{,}43999 : 2 = 2{,}71999$

$$i = 524{,}80\,\square^m$$

10. **Aufgabe.** Von einem gleichschenkligen Dreiecke ist gegeben die Basis ($b = 11{,}75^m$) und die Höhe ($h = 7{,}92^m$); es soll der Schenkel (a) und der Inhalt berechnet werden.

Auflösung. 1) $a = \sqrt{h^2 + (\tfrac{1}{2}\, b)^2}$ (s. 99) 2) $i = \tfrac{1}{2}\, b \,.\, h$

Berechnung.

$2 \times \wedge \underline{h} = 1{,}79746$	$h^2 = 62{,}727$	$\wedge \underline{a} = \tfrac{1}{2} \wedge \underline{h^2 + (\tfrac{b}{2})^2} = 0{,}99393$
$2 \times \wedge \underline{\tfrac{b}{2}} = 1{,}53805$	$\left(\frac{b}{2}\right)^2 = 34{,}516$	1) $a = 9{,}8613^m$

$$h^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = 97{,}243$$

$$\wedge \underline{b} = 1{,}07004$$
$$\wedge \underline{h} = 0{,}80873$$
$$\wedge \underline{b} + \wedge \underline{h} = 1{,}96877$$
$$\wedge \underline{2} = 0{,}30103$$
$$\wedge \underline{i} = 1{,}66774$$

2) $i = 46{,}531\,\square^m$

11. **Aufgabe.** Von einem gleichseitigen Dreiecke ist die Seite ($s = 25{,}5^m$) gegeben; es soll der Inhalt (i) berechnet werden.

Auflösung. Nach dem Pythagoräischen Lehrsatze ist:

$$h^2 = s^2 - \tfrac{1}{4}\, s^2 = \tfrac{3}{4}\, s^2$$

$$h = \tfrac{1}{2}\, s \sqrt{3}$$

$$i = \tfrac{1}{2}\, s \,.\, \tfrac{1}{2}\, s \sqrt{3} = \tfrac{1}{4}\, s^2 \sqrt{3}$$

Berechnung:

$$\wedge \underline{0{,}25} = 0{,}39794 - 1$$
$$2 \,.\, \wedge \underline{s} = 2{,}81308$$
$$\tfrac{1}{2} \wedge \underline{3} = 0{,}23856$$
$$\wedge \underline{i} = 2{,}44958$$
$$i = 281{,}57\,\square^m$$

12. **Aufgabe.** Wie lang ist die Seite (s) eines gleichseitigen Dreieckes, dessen Inhalt ($i = 25^{\square m}$) gegeben ist?

Auflösung. Aus der obigen Gleichung $i = \frac{1}{4} s^2 \sqrt{3}$ folgt:

$$s = \sqrt{\frac{4 \,.\, i}{\sqrt{3}}} = 2 \,.\, \sqrt{\frac{i}{\sqrt{3}}} = 7{,}5984^{m}$$

13. **Aufgabe.** Es soll der Inhalt eines Paralleltrapezes aus seinen vier Seiten berechnet werden.

Auflösung. Bezeichnen wir die parallelen Seiten mit p und q, die Convergenten mit a und b und ziehen (Fig. 1) die Gerade BE || AC, so finden wir für die Höhe des Dreieckes EBD (welche zugleich die Höhe des Paralleltrapezes ist) aus 105.

$$1)\quad h = \frac{1}{2\,c} \sqrt{s\,.\,(s - 2\,a)\,.\,(s - 2\,b)\,.\,(s - 2\,c.)}$$

Da nun das Trapez durch die Diagonale in zwei Dreiecke zerfällt, deren Inhalte durch $\frac{1}{2}$ p h und $\frac{1}{2}$ q h ausgedrückt sind, so finden wir für den Inhalt (i) des Trapezes:

$$2)\quad i = \tfrac{1}{2}\,(p + q)\,.\,h$$

Substituirt man jetzt aus 1 den Werth für h, indem man zugleich $c = p - q$ setzt, in die Gleichung 2, so ist:

$$i = \tfrac{1}{2}\,(p + q)\,.\,\frac{1}{2\,(p - q)} \sqrt{s\,(s - 2\,a)\,(s - 2\,b)\,[s - 2\,.\,(p - q)]} \text{ oder}$$

$$i = \frac{p + q}{p - q} \,.\, \sqrt{\frac{s}{2} \,.\, \left(\frac{s}{2} - a\right)\left(\frac{s}{2} - b\right)\left(\frac{s}{2} - [p - q]\right)}$$

Beispiel. $p = 36{,}7^{m}$; $q = 27{,}6^{m}$; $a = 11{,}5^{m}$; $b = 9{,}8^{m}$ giebt $i = 304{,}12^{\square m}$

§ 3. Berechnung der regelmäßigen Polygone und des Kreises.

14. **Aufgabe.** Die Seite (S) eines dem Kreise eingeschriebenen n Eckes und der Radius des Kreises sind gegeben; es soll die Seite (s) des demselben Kreise eingeschriebenen 2 n Eckes berechnet werden.

Auflösung. Es sei $AB = S$ die Seite des eingeschriebenen n Ecks (Fig. 2), und $MC \perp AB$, so ist $AC = s$ die Seite des eingeschriebenen 2 n Ecks, $MC = r$ der Radius des Kreises, und wir erhalten:

$$AC^2 = DC \times EC \text{ (s. 93) oder } s^2 = 2\,r\,.\,EC$$

ferner ist: $EC = MC - ME = MC - \sqrt{MA^2 - AE^2} = r - \sqrt{r^2 - \frac{1}{4}\,S^2}$

$$s^2 = 2\,r\,.\,(r - \sqrt{r^2 - \tfrac{1}{4}\,S^2})$$

oder $s^2 = 2r.\left[r - \frac{1}{2}r\sqrt{4-\frac{S^2}{r^2}}\right] = r^2\left[2-\sqrt{\left(2-\frac{S}{r}\right)\left(2+\frac{S}{r}\right)}\right]$

$$s = r\sqrt{2-\sqrt{\left(2-\frac{S}{r}\right)\left(2+\frac{S}{r}\right)}}$$

15. **Aufgabe.** Die Seite (s) eines dem Kreise eingeschriebenen 2nEckes und der Radius des Kreises sind gegeben; es soll die Seite (S) des demselben Kreise eingeschriebenen nEckes berechnet werden.

Auflösung. Unter 14 erhielten wir die Gleichung:

$$s^2 = 2r\,(r - \sqrt{r^2 - \frac{1}{4}S^2}),$$

welche wir hier bloß in S aufzulösen haben:

$$\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}S^2} = r - \frac{s^2}{2r}$$

$$r^2 - \frac{1}{4}S^2 = r^2 - s^2 + \frac{s^4}{4r^2}$$

$$\frac{1}{4}S^2 = s^2 - \frac{s^4}{4r^2}$$

$$S^2 = \frac{4r^2s^2 - s^4}{r^2} = \frac{s^2}{r^2}(4r^2 - s^2)$$

$$S = \frac{s}{r}\sqrt{(2r+s).(2r-s)}$$

16. **Aufgabe.** Es soll die Seite eines dem Kreise eingeschriebenen regelmäßigen Fünfeckes aus den Seiten des demselben Kreise eingeschriebenen regelmäßigen Sechseckes und Zehneckes bestimmt werden.

Auflösung. Bezeichnet f die Fünfecksseite, z die Zehnecksseite und r die Sechsecksseite, so ist nach der vorletzten Gleichung in der vorhergehenden Aufgabe:

$$1)\ f^2 = \frac{4r^2z^2 - z^4}{r^2} = \frac{z^2(4r^2 - z^2)}{r^2}$$

Nach 186 ist aber: $r : z = z : (r - z)$

$$2)\ z^2 = r^2 - rz$$

$$3)\ f^2 = \frac{(r^2 - rz)(4r^2 - r^2 + rz)}{r^2}\ \{\text{durch Subst. aus 2 in 1}\}$$

$$4)\ f^2 = (r - z)(3r + z)\ \{\text{durch Vereinfachung aus 3}\}$$

$$5)\ f^2 = 3r^2 - 2rz - z^2 = r^2 + 2(r^2 - rz) - z^2$$

$$f^2 = r^2 + 2z^2 - z^2\ \{\text{durch Substitution aus 2 in 3}\}$$

$$f^2 = r^2 + z^2$$

17. **Aufgabe.** Die Seite und den Inhalt eines regelmäßigen Dreieckes aus dem Radius des umschriebenen Kreises zu berechnen.

Auflösung. [Fig. 3.] Es sei die Seite AB des gleichseitigen Dreieckes ABC = S, der Radius MA des umschriebenen Kreises = r, so ist, da das Dreieck AMD gleichseitig ist, $AE = \frac{1}{2} r \sqrt{3}$ (s. 11), und da $AB = 2 \times AE$, so ist

$$1)\ S = r \cdot \sqrt{3}\text{*} = 1{,}7320508 \times r$$

Und da nach Aufg. 11 der Inhalt $i_3 = \frac{1}{4} S^2 \sqrt{3}$ ist, so erhalten wir

$$2)\ i_3 = \frac{3}{4} r^2 \cdot \sqrt{3} = 1{,}2990381 \times r^2$$

18. **Aufgabe.** Die Seite und den Inhalt eines regelmäßigen Viereckes aus dem Radius des umschriebenen Kreises zu berechnen.

Auflösung. [Fig. 4.] Ist ABCD das regelmäßige Viereck (Quadrat), AC und BD die Diagonalen, die sich im Mittelpunkte O schneiden, so ist $\angle BOA = 1R$ und $AO = BO = r$, also:

$$AB^2 = AO^2 + BO^2 \text{ oder } S^2 = 2 \cdot r^2 \text{ folglich}$$

$$1)\ S = r \cdot \sqrt{2}$$

und da AB^2 auch zugleich der Inhalt i_4 des Viereckes ABCD ist, so ist

$$2)\ i_4 = 2 \cdot r^2$$

19. **Aufgabe.** Die Seite und den Inhalt eines regelmäßigen Fünfeckes aus dem Radius des umschriebenen Kreises zu berechnen.

Auflösung. Bezeichnen wir die Seite des Fünfeckes mit f, die des Zehneckes mit z, den Radius des umschriebenen Kreises mit r, den des eingeschriebenen mit ρ, so ist:

$$r : z = z : (r - z) \text{ oder } z^2 + rz = r^2$$

$$\text{also } z = -\frac{r}{2} + \sqrt{r^2 + \frac{1}{4} r^2} = -\frac{r}{2} + \frac{r}{2}\sqrt{5}$$

$$z = r \times \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \text{ also } z^2 = r^2 \times \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

Nach Aufg. 16 ist $f^2 = r^2 + z^2$

Substituirt man hier den oben gefundenen Ausdruck für z^2, so erhält man:

$$f^2 = r^2 + r^2 \cdot \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \text{ oder}$$

$$f^2 = r^2 \cdot \frac{5 - \sqrt{5}}{2} \text{ folglich}$$

$$1)\ f = r \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}} = 1{,}175557 \times r$$

*) Resultirt auch aus der Endformel zu Aufg. 15, wenn man s = r setzt.

Da nun der Inhalt eines regelmäßigen Polygones gleich ist dem halben Producte aus seinem Umfange und dem Radius des eingeschriebenen Kreises, so haben wir noch ρ durch r auszudrücken: Es ist aber

$$\rho^2 = r^2 - \tfrac{1}{4} f^2 = r^2 - \frac{r^2(5-\sqrt{5})}{8} = \frac{8r^2 - 5r^2 + r^2\sqrt{5}}{8} = \frac{3r^2 + r^2\sqrt{5}}{8}$$

$$\rho = \frac{r^2}{2}\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$$

Folglich ist der Inhalt $\frac{5f \times \rho}{2} = \frac{5r}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} \cdot \frac{r}{2}\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$ oder

$$2)\; i_5 = \tfrac{5}{4}\, r^2 \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} = 2{,}377641 \times r^2$$

Anmerkung. Ist statt des Radius r die Seite f des Fünfeckes gegeben, so findet man zunächst aus obiger Gleichung 1:

$$r = \frac{f}{\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}} = \frac{f}{\sqrt{\frac{(5-\sqrt{5})(5+\sqrt{5})}{2(5+\sqrt{5})}}} = \frac{f}{\sqrt{\frac{10}{2(5+\sqrt{5})}}}$$

$$\text{oder } r = f \cdot \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$$

und wenn man diesen Ausdruck für r in die Gleichung 2 substituirt:

$$i = \tfrac{5}{4} f^2 \times \frac{5+\sqrt{5}}{10}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} = \tfrac{5}{4} f^2 \sqrt{\frac{(5+\sqrt{5})^2(5+\sqrt{5})}{200}}$$

$$\text{oder } i_5 = f^2 \times \frac{\sqrt{25 \times 10\sqrt{5}}}{4} = 1{,}720477 \times f^2$$

20. **Aufgabe.** Die Seite und den Inhalt eines regelmäßigen Sechseckes aus dem Radius des umschriebenen Kreises zu berechnen.

Auflösung. Bekanntlich ist die Seite des regelmäßigen Sechseckes gleich dem Radius des umschriebenen Kreises; also

$$1)\; s = r$$

Zieht man von dem Mittelpunkte des Sechseckes Radien in alle Ecken, so theilen dieselben das Rechteck in sechs gleichseitige Dreiecke mit der Seite $s = r$, deren Inhalt also nach Aufg. 11 gleich $\tfrac{1}{4} r^2 \sqrt{3}$ ist. Es ist somit der Inhalt i_6 des Sechseckes $= 6 \times \tfrac{1}{4} r^2 \sqrt{3}$ oder

$$2)\; i_6 = \frac{3}{2} r^2 \sqrt{3} \text{ oder auch } i_6 = \frac{3}{2} s_2 \sqrt{3}$$

21. **Aufgabe.** Die Seite und den Inhalt eines regelmäßigen Zehneckes aus dem Radius des umschriebenen Kreises zu berechnen.

Auflösung. Aus Aufg. 19 entnehmen wir für die Zehneckseite z die Gleichung:

$$1)\quad z = r \times \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} = 0{,}618034 \times r$$

Bezeichnen wir den Radius des dem Zehnecke eingeschriebenen Kreises mit ρ, so ist

$$\rho^2 = r^2 - \tfrac{1}{4} z^2$$

und da $$r = \frac{z}{2}(1 + \sqrt{5})$$

so ist $$\rho^2 = \frac{z^2}{4}(1 + \sqrt{5})^2 - \tfrac{1}{4} z^2 = \tfrac{1}{4} z^2 (5 + 2\sqrt{5})$$

$$\rho^2 = \tfrac{1}{2} z \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$$

Da nun der Inhalt gleich ist dem halben Producte aus dem Umfange und dem Radius des eingeschriebenen Kreises, so erhalten wir:

$$i_{10} = \tfrac{1}{2} \,.\, 10 \,.\, z \,.\, \tfrac{1}{2} z \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$$

oder $$2)\quad i_{10} = \tfrac{5}{2} z^2 \sqrt{5 + 2\sqrt{5}} = 7{,}69431 \times z^2$$

Substituiren wir für z den Werth aus 1, so ist:

$$3)\quad i_{10} = \tfrac{5}{2} r^2 \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}} = 2{,}9389265 \times r^2$$

22. **Aufgabe.** Die Länge des Kreisumfanges und eines Kreisbogens aus dem Radius zu berechnen, (Rectification des Kreisbogens).

Auflösung. Ist der Radius des Kreises r, so ist nach 193, 1):

Der Umfang oder $360° = 2\pi r = 6{,}2831853 \times r$

Der Halbkreis oder $180° = \pi r = 3{,}1415926 \times r$

Der Bogen von $1° = \frac{\pi}{180} \times r = 0{,}0174533 \times r$

" " " $1' = \frac{\pi}{180 \times 60} \times r = 0{,}0002909 \times r$

" " " $1'' = \frac{\pi}{180 \times 60 \times 60} \times r = 0{,}0000048 \times r$

Ein Bogen von

$$75°\, 29'\, 13{,}''42 = 271753{,}42'' = \frac{271753{,}42}{180 \times 60 \times 60} \cdot \pi r = 1{,}317498 \,.\, r$$

Oder: Der Bogen von $75° = 75 \times 0{,}0174533 \times r = 1{,}3089969 \times r$

" " " " $29' = 29 \times 0{,}0002909 \times r = 0{,}0084357 \times r$

" " " $13{,}42 = 13{,}42 \times 0{,}0000048 \times r = 0{,}0000651 \times r$

" " $75° 29' 13{,}'' 42 = \qquad 1{,}3174977 \times r$

23. **Aufgabe.** Aus der Lage eines Kreisbogens und dem zugehörigen Radius soll die Zahl der Grade berechnet werden, die der Bogen enthält.

Auflösung. Ist die Bogenlänge p, der Radius r und α die Zahl der Grade die p enthält, so ist

$$\alpha^\circ : 360^\circ = p : 2\pi r$$

$$\alpha = \frac{p}{2\pi r} \times 360^\circ = \frac{p}{\pi r} \times 180^\circ$$

Ist $p = r$, so ist $\alpha = \frac{1}{\pi} \times 180^\circ = 57^\circ\, 17'\, 44,''78 = 206264,''78$

24. **Aufgabe.** Den Inhalt eines Kreissectors aus der Länge des zugehörigen Bogens und dem Radius zu berechnen.

Auflösung. Ist p der Bogen, r der Radius und i_s der Inhalt des Sectors, so ist:

$$i_s : \pi r^2 = p : 2\pi r$$

$$\text{also } 1)\ i_s = \frac{\pi r^2}{2\pi r} . p = \frac{r}{2} \times p$$

Ist p in Graden gegeben, so findet man aus 23:

$$p = \frac{\alpha}{180} . \pi r$$

welches in 1 substituirt uns giebt:

$$2)\ i_s = \frac{r}{2} \times \frac{\alpha}{180} . \pi r = \frac{\alpha . \pi}{360} \times r^2$$

Cap. II.

Anwendung der Algebra auf die Geometrie.

§ 1. Construction zusammengesetzter Zahlformen.

25. **Aufgabe.** Es seien a, b, c, d, e fünf gegebene Strecken; man soll eine sechste $x = \frac{abc}{de}$ construiren.

Analyse. Man construire $y = \frac{ab}{d}$ nach 142 als vierte Proportionale, so ist $x = \frac{yc}{e}$ ebenfalls eine vierte Proportionale.

Construction. [Fig. 5.]

Man mache $\begin{cases} AB = a \\ AC = b \\ AD = d \end{cases}$

Ziehe $CE \,||\, DB$, so ist

$$AE : AB = AC : AD$$

oder $AE : a = b : d$

$$AE = \frac{ab}{d} = y$$

Hiernach mache man $AF = c$

$$AG = e$$

Ziehe $EH \,||\, GF$, so ist

$$AH : AF = AE : AG$$

oder $AH : c = y : e$

$$AH = \frac{yc}{e} = x$$

25. **Aufgabe.** Es soll eine Strecke $x = \frac{ab + c^2}{d}$ construirt werden.

1. Analyse. Man construire $y^2 = ab$, so ist $x = \frac{y^2 + c^2}{d}$; hiernach construire man $z^2 = y^2 + c^2$, so ist $x = \frac{z^2}{d}$, also ist x die dritte Proportionale zu z und d.

Construction. [Fig. 6.] Man mache $AB = b$, $AC = a$, schlage über AB einen Halbkreis und errichte $CD \perp AB$; so ist $AD = y$. — Hiernach $DE \perp AD$, $ED = c$; so ist $AE = z$. — Endlich $AF = d$, $AG = z$ und $EH \,||\, FG$; so ist $AH = x$.

2. Analyse. Es ist $\frac{ab + c^2}{d} = \frac{ab}{d} + \frac{c^2}{d}$; construirt man daher $y = \frac{ab}{d}$ und $z = \frac{c^2}{d}$, so ist $x = y + z$.

27. **Aufgabe.** Es soll eine Strecke $x = \sqrt{ab - c^2}$ construirt werden.

Analyse. Man construirt y als mittlere Proportionale zu a und b, so ist $a : y = y : b$ also $y^2 = ab$. Hiernach ist x die Kathete eines rechtwinkligen Dreieckes, dessen Hypotenuse y und dessen Kathete c ist, denn es ist nach der Substitution $x = \sqrt{y^2 - c^2}$.

Anm. Die Aufgabe ist nur lösbar, wenn $ab > c^2$ ist.

28. **Aufgabe.** Es soll eine Strecke $x = \sqrt{\frac{a^2 b + abc}{d}}$ construirt werden.

Analyse. Da $a^2 b + abc = ab(a + c)$ ist, so ist $x = \sqrt{\frac{ab(a+c)}{d}}$ oder $x = \sqrt{\frac{ab}{d}(a + c)}$. — Man construire also zunächst $y = \frac{ab}{d}$ und darnach $x = \sqrt{y(a + c)}$ als mittlere Proportionale zu y und $a + c$.

29. **Aufgabe.** Es soll eine Strecke $x = \sqrt{\frac{a^3 + b^2 c}{d}}$ construirt werden.

Analyse. Man schreibt $\frac{a^3 + b^2 c}{d} = \frac{a^3}{d} + \frac{b^2 c}{d} = \frac{a^2}{d} \times a + \frac{b^2}{d} \times c$; so ist $x = \sqrt{\frac{a^2}{d} a + \frac{b^2}{d} . c}$. Construirt man jetzt $y = \frac{a^2}{d}$ und $z = \frac{b^2}{d}$, so ist $x = \sqrt{ya + zc}$. Construirt man ferner $v^2 = ya$ und $u^2 = zc$, so ist $x = \sqrt{v^2 + u^2}$, also die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes, dessen Katheten v und u sind.

30. **Aufgabe.** Es soll eine Strecke $x = \frac{a^3 b + a^2 c^2 + b^2 c d}{a^3 + b^3}$ construirt werden.

Analyse. Man dividirt den Zähler und Nenner des gegebenen Ausdruckes durch a^2, so wird

$$x = \frac{ab + c^2 + \frac{b^2}{a} \times \frac{dc}{a}}{a + \frac{b^2}{a} \times \frac{b}{a}}$$

Construirt man nun $ab = y^2$

$$\left.\begin{matrix} \frac{b^2}{a} = z \\ \frac{dc}{a} = u \end{matrix}\right\} \frac{b^2}{a} \times \frac{dc}{a} = z . u = v^2$$

$$\frac{b^2}{a} . \frac{b}{a} = \frac{u . b}{a} = w$$

$$\text{so ist } x = \frac{y^2 + c^2 + v^2}{a + w} = \frac{t^2}{r}$$

Anmerkung. Die obigen Aufgaben werden zur Genüge darthun, daß eine jede zusammengesetzte Form durch eine geeignete Umformung sich als eine Verbindung der im Abschnitte II, Cap. V, § 1 aufgeführten einfachen Formen darstellen läßt, so daß die Construction auch der zusammengesetztesten Formen stets mit Hilfe der dort gelehrten Elementarconstructionen ausgeführt werden kann. — Soll aber die Construction ohne Anwendung des Maßes möglich sein, so muß der Ausdruck durchweg homogen sein, d. h. seine Glieder müssen, nachdem sie von ihren Nennern und etwaigen Wurzelzeichen befreit sind, alle aus gleichviel Factoren bestehen. — Schließlich sei bemerkt, daß die Schärfe und Eleganz der Construction wesentlich erhöht wird, wenn die Construction, wo möglich, an einer Figur ausgeführt wird, so daß die vermittelnden Strecken in ihren Lagen verbleiben.

§ 2. Algebraische Lösung geometrischer Aufgaben.

31. **Aufgabe.** Man soll ein gegebenes Dreieck durch eine der einen Seite (Grundlinie) parallele Gerade so durchschneiden, daß der obere Abschnitt der einen Seite gleich dem unteren der anderen Seite werde.

Analyse. [Fig. 7.] Soll die Schneidende der Seite AB des gegebenen Dreieckes parallel laufen, so genügt es offenbar zur Lösung, die Lage des Schneidepunktes auf dem einen Schenkel, d. h. seinen Abstand vom Scheitelpunkte zu kennen. Es sei nun X der fragliche Punkt, XY die gewünschte Linie, so wäre, da XY || AB sein soll:

$$CX : CA = CY : CB$$

Setzen wir den gesuchten Abstand $CX = x$, die gegebene Seite $AC = b$ und $BC = a$, so muß nach der Bedingung der Aufgabe auch $BY = x$, also $CY = a - x$ sein; diese Werthe, in die obige Proportion eingesetzt, geben uns:

$$x : b = (a - x) : a$$

Hiermit ist uns die Abhängigkeit der gesuchten Strecke x von den gegebenen a und b in implicirter Form gegeben, und wir haben die Gleichung nur noch in x aufzulösen und den resultirenden Ausdruck für x nach den Regeln des vorigen Paragraphen zu construiren.

Nach 127 ist $\quad ax = ab - bx$

$$ax + bx = ab$$

$$x = \frac{ab}{a + b}$$

Construction. [Fig. 8.] Man verlängere die Seite CB und schneide von der Verlängerung die Strecke $BD = AC$ ab; verbinde A mit D und ziehe BE || AD, so ist E der verlangte Punkt; denn es ist:

$$CE : CA = CB : CD$$

$$\text{oder } CE : a = b : (a + b)$$

$$CE = \frac{a \,.\, b}{a + b} = x$$

Bew. Da EF || AB, so ist $CA : CE = CB : CF$

" EB || AD, " $CA : CE = CD : CB$

$$CD : CB = CB : CF$$

$$CD - CB : CB - CF = CB : CF \text{ (s. 129. Zus.)}$$

$$\begin{array}{r}
CD - CB = BD \\
CB - CF = FB \\
\hline
BD : FB = CB : CF \\
CB : CF = CA : CE \\
\hline
BD : FB = CA : CE \\
BD = CA \text{ gemacht} \\
\hline
FB = CE \text{ (s. 124.)}
\end{array}$$

32. **Aufgabe.** Es soll ein Dreieck in eine beliebige Anzahl gleicher Theile getheilt werden durch Transversalen, die der einen Seite (Grundlinie) parallel laufen.

Analyse. [Fig. 9.] Ist ABC das gegebene Dreieck, $XY \parallel AB$; so ist $\triangle XBY \sim ABC$ und daher

$$XBY : ABC = XB^2 : AB^2 = x^2 : c^2$$

Ist nun $XBY = \frac{1}{n} ABC$, so ist auch

$$1)\ x^2 = \frac{1}{n} c^2$$

oder $\frac{1}{n} c : x = x : c$

Ist ferner $XBY = \frac{2}{n} ABC$, so ist

$$2)\ x^2 = \frac{2}{n} c^2$$

oder $\frac{2}{n} c : x = x : c$

Soll also die Parallele XY von dem Dreiecke einen bestimmten Theil etwa $\frac{m}{n}$ abschneiden, so ist der Abschnitt x auf dem Schenkel (c) die mittlere Proportionale zu c und $\frac{m}{n}$ c.

Lösung. [Fig. 10.] Man theile die eine Seite AB (nach 121) in n (= 3) gleiche Theile, schlage über dieser Seite einen Halbkreis, errichte in allen Theilpunkten Normalen zur Seite und verlängere sie bis zur Peripherie. Verbindet man die Endpunkte (D_1, D_2) mit dem Scheitel B des Dreieckes, so sind diese Sehnen die gewünschten mittleren Proportionalen. Nimmt man daher auf der Seite AB die Strecken $BH_1 = BD_1$; $BH_2 = BD_2$ und zieht durch die Punkte H_1, H_2 die Geraden H_1K_1, H_2K_2 parallel AC, so ist die verlangte Theilung geschehen.

Bew. $\triangle H_1BK_1 : \triangle H_2BK_2 : \triangle ABC = H_1B^2 : H_2B^2 : AB^2$

$$\begin{array}{r}
H_1B^2 = D_1B^2 = F_1B \times AB = \frac{1}{3} AB \times AB = \frac{1}{3} AB^2 \\
H_2B^2 = D_2B^2 = F_2B \times AB = \frac{2}{3} AB \times AB = \frac{2}{3} AB^2 \\
\hline
\triangle H_1BK_1 : \triangle H_2BK_2 : \triangle ABC = \frac{1}{3} AB^2 : \frac{2}{3} AB^2 : AB = 1:2:3
\end{array}$$

Anmerkung. Hat man sich überzeugt, daß die Gleichung richtig angesetzt und gelöst ist, so ist der synthetische Beweis nicht durchaus nothwendig, jedoch bildet er für den Schüler eine gute Vorlage zur Uebung im Beweisen.

33. **Aufgabe.** Gegeben sind zwei sich schneidende Gerade und ein Punkt. Man soll durch den Punkt eine dritte Gerade so legen, daß ein Dreieck entsteht, welches einem gegebenen Quadrate gleich ist.

Analyse. [Fig. 11.] Sind SS_1 und TT_1 die in A sich schneidenden Geraden, P der gegebene Punkt, PB die gewünschte Gerade und q die Seite des gegebenen Quadrates, so kennen wir den Abstand ($PD = a$) dieses Punktes von der einen Geraden SS_1 so wie die Strecke ($AC = c$), welche die durch den gegebenen Punkt P parallel der zweiten Geraden (TT_1) gezogene Gerade PC von der ersten abschneidet. — Kennen wir nun den Abstand des Punktes (B), in welchem die erste Gerade XX_1 von der gewünschten geschnitten wird, von dem gegebenen Schneidepunkte A, so ist die Aufgabe gelöst. — Wir setzen daher diesen Abstand $AB = x$ und erhalten, da jetzt $\triangle AEB \sim \triangle CPB$ ist:

$$AB : CB = EF : PD$$

oder, wenn wir $EF = y$ setzen:

$$1)\quad x : (x + c) = y : a$$

Zur Elimination der zweiten Unbekannten (y), die wir genöthigt waren einzuführen, erhalten wir die erforderliche zweite Gleichung aus der Bedingung, daß das abgeschnittene Dreieck (AEB) dem Quadrate der gegebenen Strecke q gleich sein soll, denn es ist der Inhalt des Dreieckes $AEB = \frac{1}{2}\, xy$ und daher:

$$2)\quad \tfrac{1}{2}\, xy = q^2$$

Substituiren wir den hieraus sich ergebenden Werth für $y = \frac{2q^2}{x}$ in die erste Gleichung, so ist

$$x : (x + c) = \frac{2q^2}{x} : a$$

$$ax = 2q^2 + \frac{2q^2c}{x}$$

$$\text{oder } ax^2 = 2q^2x + 2q^2c$$

$$x^2 - \frac{2q^2}{a}x = \frac{2q^2c}{a}$$

$$\text{und } x = \frac{q^2}{a} \pm \sqrt{\frac{q^4}{a^2} + \frac{2q^2c}{a}}$$

$$\text{oder } x = \frac{q}{a}\left(q \pm \sqrt{q^2 + 2ac}\right)$$

Construction. (Fig. 12.) Man mache $CE = AC = c$, so ist $AE = 2c$; ferner mache man $AF = a$; $FZ \perp AE$ und ziehe AZ, so ist $AZ^2 = 2ac$. — Hiernach construire man $ZG \perp AZ$ und mache $ZG = q$, ziehe AG, so ist $AG = \sqrt{q^2 + 2ac}$. — Schneidet man nun GU und $GU_1 = q$ ab, so ist $AU = q + \sqrt{q^2 + 2ac}$ und $AU_1 = \sqrt{q^2 + 2ac} - q = -(q - \sqrt{q^2 + 2ac})$. Schneiden wir endlich $AQ = q$ ab und ziehen $QX \parallel FU$ und $QX_1 \parallel FU_1$, so ist:

$$AX = \frac{q}{a}(q + \sqrt{q^2 + 2ac}) = x_1 \text{ und } AX_1 = -\frac{q}{a}(q - \sqrt{q^2 + 2ac}) = -x_2$$

Macht man daher $AI = AX$ und $AI_1 = AX_1$ und zieht von P durch I und I_1 je eine Gerade bis sie die gegebene Gerade TT_1 respective in den Punkten B und B_1 schneiden, so ist

$$\triangle ABI = \triangle AB_1I_1 = q^2$$

Anmerkung. Soll die gewünschte Gerade mit den beiden Schenkeln, zwischen denen der gegebene Punkt liegt, das Dreieck bilden, so braucht man nur in der Gleichung $-c$ statt c zu setzen, es wird dann $x = \frac{q^2}{a} \pm \frac{q}{a}\sqrt{q^2 - 2ac}$. Die Lösung ist jetzt unmöglich, wenn $q^2 < 2ac$. — Ist $q^2 = 2ac$, so ist $\frac{q}{a}\sqrt{q^2 - 2ac} = 0$ also $x = \frac{q^2}{a} = \frac{2ac}{a} = 2c$: Das kleinste Dreieck wird also durch die Gerade abgeschnitten, welche in dem gegebenen Punkte P halbirt wird.

34. **Aufgabe.** Auf einer unbegrenzten Geraden sind zwei Punkte gegeben; man soll einen dritten auf derselben so bestimmen, daß die drei Abschnitte stetig proportional sind.

Analyse. [Fig. 13.] Sind A und B die gegebenen Punkte auf der Geraden SS_1 und X_1 der gesuchte Punkt außerhalb AB, so setze man $AX_1 = x_1$, $AB = a$. — Nach der Forderung muß $AX_1 : AB = AB : BX_1$ sein oder $x_1 : a = a : (x_1 - a)$ folglich $x_1{}^2 - ax_1 = a^2$

$$\text{woraus } 1)\ x_1 = \frac{a}{2} \pm \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

Soll der gesuchte Punkt X_2 zwischen A und B liegen, so ist

$$AB : AX_2 = AX_2 : X_2B$$

$$\begin{array}{ll} \text{oder} & a : x_2 = x_2 : (a - x_2) \\ \text{hieraus} & x_2{}^2 = a^2 - ax_2 \\ \text{oder} & x_2{}^2 + ax_2 = a^2 \end{array}$$

$$2)\ x_2 = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = -\left(\frac{a}{2} \mp \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}\right)$$

Jede Gleichung giebt also die Lösung beider Fälle, und zwar den nicht beabsichtigten Fall als negative Wurzel.

Construction. [Fig. 14.] Man errichte BN $\perp$ AB, mache BC $= \frac{1}{2}$ AB, so ist

$AC = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$; schneidet man nun CD $=$ CD$_1$ $= \frac{1}{2}$ a ab, so ist

$$AD = \frac{a}{2} + \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = x_1 \text{ oder die positive Wurzel der Gleichung } 1$$

$$AD_1 = -\frac{a}{2} + \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = x_2 \quad " \quad " \quad " \quad " \quad " \quad " \quad 2$$

Macht man daher AE $=$ AD und AE$_1$ $=$ AD$_1$, so sind E und E$_1$ respective die verlangten Punkte, oder es ist:

1) AE : AB $=$ AB : BE und 2) AB : AE$_1$ $=$ AE$_1$: E$_1$B

der zweite Fall ist die bekannte sectio aurea (s. 183).

35. **Aufgabe.** Ein regelmäßiges Fünfeck und ein regelmäßiges Zehneck zu construiren, wenn die Länge der Seite gegeben ist.

Analyse. [Fig. 15.] Es sei AB die Seite eines regelmäßigen Fünfeckes, C die gegenüberstehende Ecke, so ist $\angle$ ACB $= \frac{2}{5}$ R (da der Centriwinkel des Fünfeckes $\frac{4}{5}$ R beträgt) und daher $\angle$ CAB $=$ $\angle$ CBA $= \frac{4}{5}$ R, d. h. die Winkel an der Basis (AB) sind doppelt so groß, als der Winkel am Scheitel (C). Halbiren wir nun den Basiswinkel A durch die Gerade AE, so ist:

$$\angle EAB = \angle ACB$$
$$\angle EBA = \angle ABC$$
$$\overline{\triangle EAB \sim \triangle ACB}$$
$$1)\ CB : AB = AB : BE$$
$$2)\ AB = AE = EC$$
$$\overline{CB : AB = AB : (CB - AB)}$$

Wir können also CB aus AB nach dem 1. Falle der vorigen Aufgabe (nach dem erweiterten goldenen Schnitt) finden.

Construction. [Fig. 16.] Ist AB $=$ a die gegebene Seite, so construiren wir (nach 34,1) AF : AB $=$ AB : BF, schlagen um A und B mit einem Radius $=$ AF Kreise; der Schneidepunkt C dieser Kreise ist die der Seite AB gegenüberliegende Ecke des Fünfeckes. Die beiden noch übrigen Ecken finden wir, indem wir erst um B und C, dann um A und C mit einem Radius $=$ a Kreise schlagen; die Schneidepunkte D und E dieser Kreise sind die fehlenden Ecken.

Da der Winkel $ACB = {}^2/_5 R = {}^4/_{10} R$ ist, so ist zugleich der Punkt C der Mittelpunkt des Kreises, in welchen die Seite a sich zehnmal als Sehne eintragen läßt. Schlagen wir also um C mit dem Radius CA einen Kreis und tragen die Seite a so oft als möglich als Sehne ein, so erhalten wir das regelmäßige Zehneck mit der Seite = a.

36. **Aufgabe.** Ein Punkt hat von zwei unter einem rechten Winkel sich schneidenden Geraden einen gegebenen gleichen Abstand. Man soll durch den Punkt eine Gerade so legen, daß das zwischen den gegebenen Geraden liegende Stück eine gegebene Länge habe.

Analyse. [Fig. 17.] Sind $XX_1 \perp YY_1$ die gegebenen Geraden, P der gegebene Punkt, dessen Abstände PA und PB von den Geraden = a und ist PI die verlangte Gerade, so muß EI die gegebene Länge c haben. Setzen wir $AI = x$, $ce = y$, so ist:

$$1)\ AI : AP = OI : OE \text{ oder } x : a = (x - a) : y$$
$$2)\ OE^2 + OI^2 = EI^2 \text{ oder } y^2 + (x - a)^2 = c^2$$

Eliminirt man aus den Gleichungen y, so erhält man:

$$\left[\frac{a\,(x-a)}{x}\right]^2 + (x - a)^2 = c^2$$

Diese Gleichung führt, gehörig reducirt, auf eine vollständige Gleichung vom 4. Grade, und wir müssen daher suchen sie in zwei Gleichungen vom 2. Grade zu zerlegen. Entwickeln wir zu dem Zwecke die Quadrate, so ist:

$$a^2 - \frac{2a^3}{x} + \frac{a^4}{x^2} + x^2 - 2ax + a^2 = c^2$$

$$\text{oder } \frac{a^4}{x^2} + 2a^2 + x^2 - 2a\left(\frac{a^2}{x} + x\right) = c^2$$

Die drei ersten Glieder dieser Gleichung bilden das Quadrat von $\frac{a^2}{x} + x$, also erhalten wir:

$$\left(\frac{a^2}{x} + x\right)^2 - 2a\left(\frac{a^2}{x} + x\right) = c^2$$

setzen wir nun $\frac{a_2}{x} + x = z$, so ist

$$1)\ z^2 - 2az = c^2$$
$$2)\ x^2 - zx = -a^2$$

Aus der 1. Gleichung erhalten wir $z = a \pm \sqrt{a^2 + c^2}$ und darnach aus der 2. Gleichung x.

Construction. [Fig. 18.] Verlängern wir AP, schneiden von der Verlängerung die Strecke $PC = c$ ab und ziehen CB, so ist $CB = \sqrt{a^2 + c^2}$. — Verlängern wir nun auch PB nach beiden Seiten und schneiden $BZ = BZ' = BC$ ab, so ist $PZ = a + \sqrt{a^2 + c^2}$ der positive Werth von z und $PZ' = a - \sqrt{a^2 + c^2}$ der negative Werth von z.

Geben wir nun der zweiten Gleichung die Form:

$$x(z - x) = a^2 \text{ oder } x : a = a : (z - x)$$

und bedenken, daß die Normale, in einem beliebigen Punkte des Durchmessers eines Halbkreises zum Durchmesser errichtet, stets die mittlere Proportionale zu den beiden Abschnitten des Durchmessers ist, so leuchtet ein, daß die Aufgabe sofort gelöst ist, wenn wir über PZ und PZ' (den beiden Werthen für z) je einen Halbkreis schlagen. Die Durchschnittspunkte I_1, I_2, I_3, I_4 dieser Halbkreise mit der Geraden XX_1 sind die Punkte, durch welche wir die Geraden von P aus zu ziehen haben, deren Abschnitte zwischen den Geraden XX_1 und YY_1 die gegebene Länge c haben. Denn fällen wir von irgend einem I aus eine Normale (IV) zu ZZ_1 so ist jedesmal

$$PV : VZ = VI : (PZ - PV)$$

$$\text{oder } PV : a = a : (z - PV)$$

Es sollte aber sein $x : a = a : (z - x)$

Also ist jedes $PV = x$; und da stets $AI = PV$ ist, so ist auch jedes $AI = x$.

Determination. Lösen wir die Gleichung 2) in x auf, so erhalten wir $x = \frac{z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{z}{2}\right)^2 - a^2}$. Dieser Ausdruck wird nur imaginair, wenn $\frac{z}{2} < a$ ist; da aber $z = a \pm \sqrt{a^2 + c^2}$ ist und $\sqrt{a^2 + c^2}$ stets $> a$, so ist der positive Werth von z nämlich $a + \sqrt{a^2 + c^2} > 2a$, so klein auch c sein mag; also $\frac{z}{2}$ stets $> a$: Es schneidet daher der Halbkreis über PZ stets die Gerade XX_1, die Punkte I_1 und I_2 sind immer vorhanden, d. h. von dem Punkte P aus lassen sich immer zwei Gerade ziehen — und zwar in die Nebenwinkel zu XOI — die der Bedingung entsprechen, so klein auch c sein mag. — Ist aber $c^2 \gtreqless 8a^2$, so ist $a^2 + c^2 \gtreqless 9a^2$ und $\sqrt{a^2 + c^2} \gtreqless 3a$, folglich $-a + \sqrt{a^2 + c^2} \gtreqless 2a$. — Ist also $c^2 = 8a^2$, so ist der negative Werth von $z = 2a$ (also $-\frac{z}{2} = a$ und auch $x = a$): der Kreis über PZ^1 berührt die Gerade XX_1, die Punkte I_3 und I_4 fallen in einen Punkt zusammen; in dem Quadranten XOI, in welchem P selbst liegt, kann durch P nur eine Gerade = c gezogen werden — die Aufgabe hat drei Lösungen. — Ist $c^2 < 8a^2$, so wird $-z < 2a$ (und somit x imaginair): der Kreis über PZ^1 trifft die Gerade XX_1 gar nicht; in dem Quadranten XOY ist durch P keine Gerade = c möglich die Aufgabe hat nur zwei Lösungen.

Cap. III.

Synthetische Lösung geometrischer Aufgaben.

37. **Aufgabe.** Ein rechtwinkliges Dreieck zu construiren, wenn eine Kathete und die Summe der Hypotenuse und der anderen Kathete gegeben ist.

Analyse. [Fig. 19.] Die eine Kathete ist = b, die Summe der Hypotenuse und der anderen Kathete = s gegeben. — Wäre nun ABC das richtige Dreieck, so müßte AC = b sein, und wenn man die andere Kathete AB um die Hypotenuse BC verlängert, also BD = BC macht, so müßte AD = s sein. Da nun b und s gegeben sind, so läßt sich das Dreieck ADC construiren. Da ferner das Dreieck DCB gleichschenklig ist, so muß die Normale, welche die Basis DC halbirt, durch den Scheitel B gehen, wodurch die Ecke B bestimmt ist.

Determination. Aus den beiden Katheten ist ein rechtwinkliges Dreieck immer möglich, das Dreieck DAC also immer construirbar; soll aber die Normale, welche DC halbirt, die Kathete AD treffen, so muß diese Kathete oder $s > b$ sein. Die Aufgabe ist also immer lösbar, wenn $s > b$ gegeben ist.

Construction. [Fig. 20.] Man mache AC = b, errichte in A die $AX \perp AC$, schneide von der Normalen die Strecke AD = s ab, verbinde D mit C und halbire DC in E durch die Normale YZ. Der Punkt B, in welchem diese Normale die erste schneidet, ist die dritte Ecke des Dreieckes. Verbindet man noch B mit C, so ist ABC das verlangte Dreieck.

Beweis.
$$\underline{BD = BC \quad (\triangle DEB \cong CEB)}$$
$$AB + BD = AB + BC \quad (\text{S. F. } 3)$$
$$\underline{AB + BD = s \text{ gemacht}}$$
$$AB + BC = s$$
$$\underline{\text{und } AC = b \text{ gemacht}}$$
folglich sind die Bedingungen erfüllt.

38. **Aufgabe.** Ein rechtwinkliges Dreieck zu construiren, wenn die eine Kathete und die Differenz der Hypotenuse und der anderen Kathete gegeben ist.

Analyse. [Fig. 21.] Ist ABC das verlangte Dreieck, AC die gegebene Kathete b, und BD = BC gemacht, so ist AD die Differenz der Hypotenuse und der anderen Kathete, — also ebenfalls gegeben. Das Dreieck DAC ist also bestimmt, und da DB = CB ist, so braucht man nur die Gerade DC durch eine Normale zu halbiren, um die dritte Ecke B des verlangten Dreieckes zu erhalten *).

39. **Aufgabe.** Ein rechtwinkliges Dreieck zu construiren, wenn die Hypotenuse und 1) die Summe, 2) die Differenz beider Katheten gegeben ist.

1) Analyse. [Fig. 22.] Ist wieder ABC das verlangte Dreieck, BC = a die gegebene Hypotenuse, und AD = AC gemacht, so ist BD = s die Summe beider Katheten, und daher ebenfalls gegeben. Zugleich ist $\angle$ CDB = $\frac{1}{2}$ R (weil $\angle$ CAD = R und AC = AD). In dem Dreiecke DBC sind also zwei Seiten und ein Winkel bestimmt; da aber der gegebene Winkel der kleineren gegebenen Seite gegenüberliegt, so ist die Ecke C nicht unzweideutig bestimmt (s. S. 28, 3).

Construction. [Fig. 23.] Man mache DB = s, $\angle$ YDB = $\frac{1}{2}$ R und schlage um B mit dem Radius = a einen Kreis. Der Kreis schneidet die Gerade DY in zwei Punkten C; welchen von beiden Punkten man wählen mag, ist gleichgiltig, denn zieht man CA $\perp$ AB, so ist jedesmal CAB dasselbe richtige Dreieck, nur in verschiedener Lage.

Determination. Fällt man von B auf DY das Loth BC_1, so ist $DC_1 = BC_1$, also $2 BC_1^2 = DB^2$ oder da DB = s

$$BC_1 = \sqrt{\tfrac{1}{2} s^2}$$

Ist also $a < \sqrt{\frac{1}{2} s^2}$ d. h. < als das geom. Mittel aus $\frac{1}{2}$ s und s, so ist kein Dreieck möglich; ist $a = \sqrt{\frac{1}{2} s^2}$, so entsteht das gleichschenklige Dreieck $A_1 C_1 B$.

2. Analyse. Ist außer der Hypotenuse noch die Differenz der Katheten = d gegeben und ACB (Fig. 22.) das verlangte Dreieck, so ist, wenn AD_1 = AC gemacht wird, $D_1 B$ = d; außerdem $\angle$ $CD_1 A$ =

*) Man benutze diese Gelegenheit, um den Schülern zu veranschaulichen, daß Aufgaben, die sich nur darin unterscheiden, daß einmal die Summe, das andere Mal die Differenz gewisser Größen gegeben ist, stets durch eine analoge Construction gelöst werden.

$\frac{1}{2}$ R, also $\angle$ CD$_1$B $=$ $\frac{3}{2}$ R und daher das Dreieck D$_1$BC unzweideutig bestimmt, hiermit auch $\triangle$ CAB.

40. **Aufgabe.** Man soll ein Dreieck durch eine Gerade halbiren, die durch einen gegebenen Punkt in der einen Seite des Dreieckes geht.

Analyse. [Fig. 24.] Es sei ABC das gegebene Dreieck, P der gegebene Punkt in der Seite BC. Um die Lösung zu finden, gehe man von einer bekannten Halbirung aus: Verbindet man die Mitte D der Seite AC mit der Ecke B, so wird das Dreieck durch diese Gerade (DB) jedenfalls halbirt. Soll nun auch PX das Dreieck halbiren, so muß das Dreieck PEB = DEX sein, also auch $\triangle$ PEB + $\triangle$ PED = $\triangle$ DEX + $\triangle$ PED d. h. es muß $\triangle$ PDB = $\triangle$ PDX sein. Diese Dreiecke haben aber die gemeinsame Grundlinie PD, also müssen ihre Scheitel B und X in einer Geraden liegen, die der PD parallel ist. Hiermit ist der Punkt (X) auf der Seite AC bestimmt, durch welchen die halbirende Gerade gehen muß, und somit die Gerade selbst.

Construction. [Fig. 25.] Man halbire die Seite AC in D, ziehe BD, und BF || PD. Verbindet man nun P mit F, so halbirt PF das Dreieck.

Bew. $\triangle$ PDB = $\triangle$ PDF (s. 86. Zus.)

$\triangle$ PDB + $\triangle$ PDC = $\triangle$ PDF + $\triangle$ PDC

oder $\triangle$ BDC = $\triangle$ FPC

$\triangle$ BDC = $\frac{1}{2}$ $\triangle$ ABC

$\triangle$ FPC = $\frac{1}{2}$ $\triangle$ ABC

Determination. Die Aufgabe ist immer lösbar: Liegt der Punkt P auf der Mitte der Seite BC, so fällt F mit A zusammen; liegt aber P der Ecke C näher als der Ecke B, so muß man die Mitte der Seite AB mit P verbinden und von der Ecke C aus die Parallele ziehen.

Anm. Eine der obigen ganz analoge Analyse führt zur Lösung der Aufgabe, wenn die Gerade vom Dreiecke $\frac{1}{3}, \frac{1}{4} \ldots \frac{1}{n}$ abschneiden soll, desgleichen der Aufgaben: Wöckel Nr. 324 und 327.

41. **Aufgabe.** In einem Kreise ist eine Sehne gegeben; man soll auf der Peripherie desselben Kreises einen Punkt so bestimmen, daß die Summe seiner beiden Abstände von den Endpunkten der Sehne eine gegebene Länge habe.

Analyse. [Fig. 26.] Es sei AB die gegebene Sehne, P der gegebene Punkt, so muß AP + BP der gegebenen Strecke s gleich sein. Verlängert man AP und schneidet PD = PB ab, so muß nun auch

$AD = s$ sein; da aber $\triangle BPD$ gleichschenklig ist, so ist $ADB = \frac{1}{2} \angle APB$, und hiermit der Punkt D (also auch P) bestimmt: Denn einmal muß D auf der Peripherie eines Kreises liegen, den man um A mit dem Radius $= s$ schlägt, und dann auch auf der Peripherie eines Kreises, welcher AB als Sehne hat und über AB einen Peripheriewinkel $= \frac{1}{2} \angle APB$ faßt.

Construction. [Fig. 27.] Man halbire die Sehne AB durch die Normale CE, schlage um E mit dem Radius EA einen Kreis und um A mit dem Radius $= s$ einen zweiten Kreis. Den Schneidepunkt D beider Kreislinien verbinde man mit A, so ist der Punkt P, in welchem diese Gerade die gegebene Kreislinie (um M) schneidet, der verlangte Punkt.

Bew.
$$\angle ADB + \angle PBD = \angle APB$$
$$\angle ADB = \tfrac{1}{2} \angle APB$$
$$\overline{\angle PBD = \tfrac{1}{2} \angle APB}$$
$$\overline{\angle PBD = \angle ADB}$$
$$\overline{BP = PD}$$
$$AP + PD = s$$
$$\overline{AP + BP = s}$$

Anmerkung. Mit Hilfe der obigen Aufgabe läßt sich leicht die Aufgabe lösen: Aus einer Seite, dem gegenüberliegenden Winkel und der Summe der beiden anderen Seiten das Dreieck zu construiren.

42. **Aufgabe.** Einem Dreiecke soll ein Quadrat umschrieben werden, so daß beide Figuren eine Ecke gemein haben.

Analyse. [Fig. 28.] Es sei ABC das gegebene Dreieck, AFDE das umschriebene Quadrat. Man richte sein Augenmerk auf die der gemeinsamen Ecke A gegenüberliegende Ecke D: Da $\angle CDB = 1$ R, so liegt D auf der Peripherie eines Halbkreises über CB; und da $\angle ADB = \frac{1}{2}$ R, so liegt D zugleich auf der Peripherie eines Kreises, welcher AB zur Sehne und über AB einen Peripheriewinkel $= \frac{1}{2}$ R hat. Hiermit ist D bestimmt.

Abkürzungen.

S. = Seite
s. = siehe
S. F. = Schluß-Form (vergl. S. 3)
/_ = log.
Propäd. = Paulson, Propädeutik der Geometrie.

Correcturen.

Seite	2	Zeile	12	von	oben	lies	eine Gerade	statt	ein Gerade
„	4	„	1	„	„	„	Convergenz	„	Convergavz
„	4	„	2	„	„	„	Stehende	„	stehende
„	12	„	14	„	unten	„	viermal	„	vier Mal
„	92	„	13	„	oben	„	dritter	„	vierter

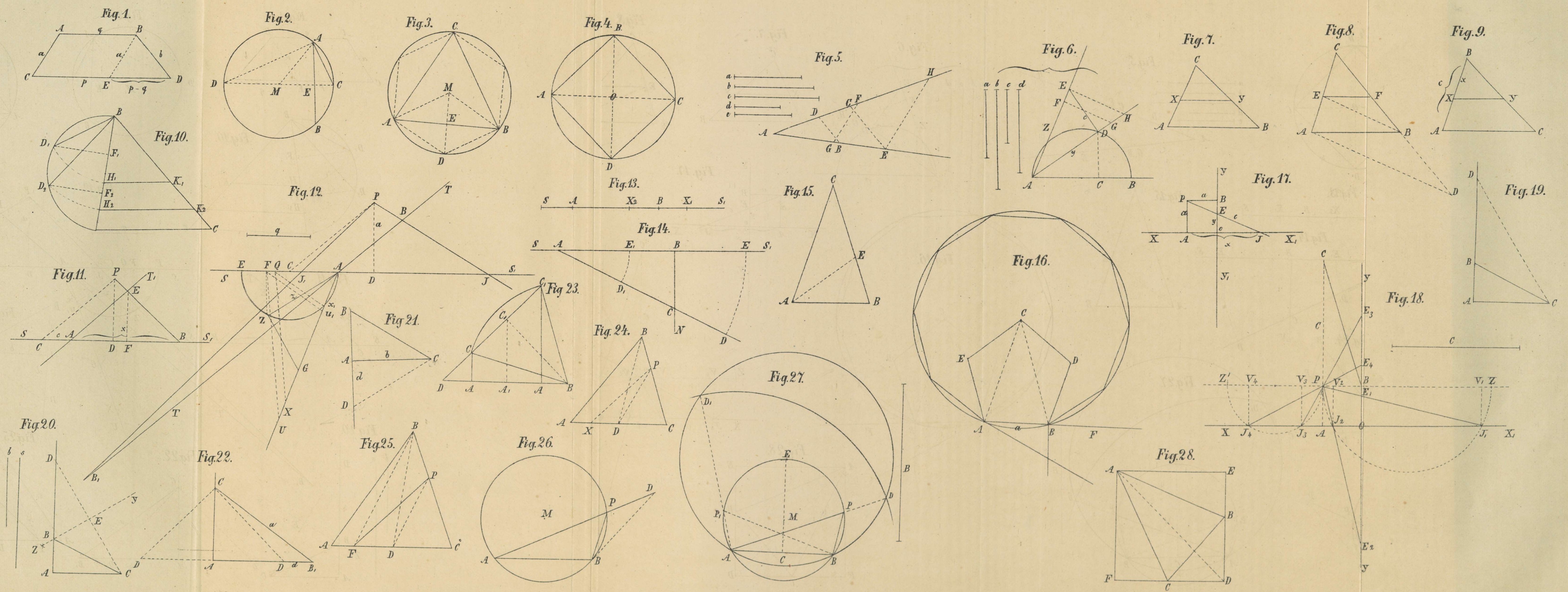


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 20.
Fig. 21.
Fig. 22.
Fig. 23.
Fig. 24.
Fig. 25.
Fig. 26.
Fig. 27.
Fig. 28.