

II ЛЕТНЯЯ ШКОЛА
ПО ПРОБЛЕМАМ
ТЕОРИИ
ЭЛЕМЕНТАРНЫХ
ЧАСТИЦ

ОТЕПЯ 1967

3

МЕТОДЫ
ВЫЧИСЛЕНИЯ

112

1A-1540.7
Институт физики и астрономии АН Эстонской ССР

Л Е Т Н Я Я Ш К О Л А
п о
П Р О Б Л Е М А М
Т Е О Р И И Э Л Е М Е Н Т А Р Н Ы Х Ч А С Т И Ц

О т е п я
А в г у с т 1967

III часть
М Е Т О Д Ы В Ы Ч И С Л Е Н И Я

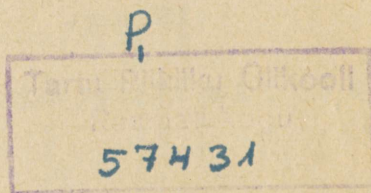
15-173
Т а р т у 1969

PROCEEDINGS OF THE 1967 SUMMER SCHOOL
ON ELEMENTARY PARTICLE PHYSICS

held at Otepää, Estonian SSR
August, 1967

Volume 3

METHODS OF CALCULATION



Редакционная коллегия: А.Айнсаар (ответственный редактор), П.Кард, М.Кыйв, Л.Палги, Х.Мяглане

В.А.Колкунов, Н.Н.Мейман,
Е.С.Николаевский, В.Н.Петрухин

ФАЗОВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

О Г Л А В Л Е Н И Е

I. ФАЗОВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 1. Введение.....	5
§ 2. Приведение фазового объема к однократному интегралу.....	6
§ 3. Вычисление фазовых интегралов.....	13
§ 4. Функции Ханкеля.....	18
§ 5. Подынтегральная функция в фазовом объеме.....	34
§ 6. Общий метод вычисления фазовых интегралов.....	42
§ 7. Упрощенный метод вычисления фазовых интегралов..	55

II. РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

§ 1. Массовые распределения.....	58
§ 2. Массовые распределения с ограничением на одну частицу.....	62
§ 3. Кинематика распада.....	64
§ 4. Массовые распределения в реакциях с одним резонансом.....	68
§ 5. Массовые распределения в реакциях с двумя резонансами.....	76
Литература.....	79
Рисунки.....	80

Предметом работы является изучение фазовых интегралов, определяющих характеристики реакций как то полное сечение, время жизни, корреляции и т.д. в феноменологической теории элементарных частиц с постоянными форм-факторами. Рассматриваются также различные распределения по массам и импульсам.

Основным методом является сведение многократных фазовых интегралов к однократным контурным интегралам в комплексной плоскости. Последние вычисляются по модифицированному методу перевала. Приводится подробное изложение вычислительных алгоритмов. Работа содержит специальные исследования по теории функций Ханкеля.

§ I. В в е д е н и е

В квантовой теории поля любые процессы взаимодействия элементарных частиц описываются функциями, которые зависят от импульсов частиц и называются амплитудами. Построение амплитуды процесса на основе небольшого числа фундаментальных принципов является одной из главных задач теории элементарных частиц. В настоящее время она решена только в рамках квантовой электродинамики. Для остальных видов взаимодействия нет аналогичных схем вычисления амплитуд, тем не менее можно указать ряд свойств, которым амплитуды должны удовлетворять. Учет этих ограничений позволяет записать общий вид амплитуды процесса с точностью до нескольких неизвестных скалярных функций-формфакторов. В силу симметрий типа изотопической, SU_3 и т.д. одни и те же скалярные функции встречаются при описании нескольких процессов. Полученная таким образом амплитуда называется феноменологической амплитудой и отражает в основном кинематические свойства процесса. Осо-

бенно широко этот подход используется в теории слабых взаимодействий [1] и в статистической теории множественного рождения частиц.

В связи с этим возникает задача о вычислении различных характеристик процессов, описываемых с помощью феноменологической амплитуды, особенно в случае большого числа частиц. В настоящей работе показано, что все многократные интегралы, через которые определяются характеристики процессов, всегда можно привести к однократному стандартному контурному интегралу.

Для аналитического исследования и численного счета указанных контурных интегралов разработаны весьма эффективные методы, представляющие, как нам кажется, самостоятельный интерес. Особую роль играют некоторые модификации метода перевала. Сделан ряд общих замечаний, относящихся к существу метода перевала.

Подинтегральные функции фазовых интегралов выражаются через функции Ханкеля. В связи с этим проведено подробное исследование рельефа римановых поверхностей этих функций.

Программа вычисления фазовых интегралов, сделанная в ИТЭФ на основе этих исследований, позволяет вычислить эти интегралы за времена порядка секунды с точностью до шести значащих цифр. Стоит заметить, что в нашем методе при увеличении числа частиц крайне незначительно увеличивается время счета, а при увеличении числа одинаковых частиц, время счета даже несколько уменьшается. Кривая распределений получается за время порядка одной минуты.

§ 2. Приведение фазового объема к однократному интегралу

Рассмотрим физический процесс, описываемый феноменологической амплитудой A . Пусть $F = A^* A$ - квадрат модуля амплитуды, тогда полная вероятность распада Γ

или соответственно сечения рассеяния σ , если рассматривается процесс рассеяния, выражается через

$$\Gamma = \frac{(2\pi)^4}{2M} \int \delta^{(4)}(Q - \sum_{n=1}^N P_n) \cdot F \cdot \prod_{n=1}^N \frac{d^3 p_n}{(2\pi)^3 2E_n}, \quad (2.1)$$

$$\sigma = \frac{1}{4\sqrt{(Q_0, Q_0)^2 - M_1^2 M_2^2}} \int \delta^{(4)}(Q - \sum_{n=1}^N P_n) \cdot F \cdot \prod_{n=1}^N \frac{d^3 p_n}{(2\pi)^3 2E_n}. \quad (2.2)$$

Здесь N - число частиц, $P_n = (E_n, \vec{p}_n)$ - 4-импульс n -ой частицы с массой m_n , Q - 4-импульс системы и $M = \sqrt{Q^2}$ - масса системы. M_1 и M_2 в (2.2) массы налетающих частиц, а Q_1 и Q_2 их 4-импульсы.

Квадрат модуля амплитуды F в ряде случаев представляется в виде суммы произведений полилинейных комбинаций импульсов частиц вида

$$F = F_0 + \sum_{n=1}^N F_{\alpha}^{(n)} \cdot P_{n\alpha} + \sum_{n,r=1}^N F_{\alpha\beta}^{(n,r)} \cdot P_{n\alpha} P_{r\beta} + \dots \quad (2.3)$$

Зависимость формфакторов $F_{\alpha, \dots}^{(n, \dots)}$ от импульсов частиц неизвестна и поэтому обычно при расчетах предполагается, что формфакторы постоянны. Приведем простой пример. Распад векторного ω -мезона ($J^P = 1^-$) на три π -мезона ($J^P = 0^-$) феноменологически описывается следующей амплитудой

$$A = L^3 \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} P_{1\alpha} P_{2\beta} P_{3\gamma} \psi_{\alpha} \psi_{\beta}^* \psi_{\gamma}^*,$$

где L - величина размерности длины, ρ_1, ρ_2, ρ_3 и ψ_1, ψ_2, ψ_3 - 4-импульсы и волновые функции π -мезонов, ψ_2 - волновая функция ω -мезона.

В самом простом случае, когда в сумме (2.3) учитывается лишь первый член F_0 , интеграл (2.1) определяет так называемый инвариантный фазовый объем.

В работе [2] было показано, каким образом в этом частном случае исходный интеграл можно преобразовать к однократному контурному интегралу. Интегралы, соответствующие следующим членам разложения в (2.3), содержат в подинтегральной функции один или несколько импульсов.

Покажем, что метод, развитый в работе [2], дает возможность и в этом случае свести интеграл (2.1) к одномерному контурному интегралу.

С этой целью заменим в (2.1) $\delta^{(4)}$ -функцию, выражающую закон сохранения 4-импульса, ее интегральным представлением

$$\delta^{(4)}(Q - \sum P) = \int \frac{d^4 x}{(2\pi)^4} e^{iQx} \prod_{n=1}^N e^{-iP_n x} \quad (2.5)$$

Интегрирование по любому импульсу частицы выполняется независимо от других импульсов от $-\infty$ до $+\infty$. Поэтому для интегрирования по всей совокупности импульсов достаточно рассмотреть интегралы только по какому-либо одному импульсу. Если подставить разложение (2.3) в (2.1), то увидим, что необходимо уметь вычислять следующие типы интегралов:

$$I = \int \frac{d^3 p}{m^2 E} e^{-ixp}; \quad I_\alpha = \int \frac{d^3 p}{m^2 E} e^{-ixP} P_\alpha \quad (2.6)$$

Тензорные интегралы I_{α} , $I_{\alpha, \beta}$ выражаются через скалярный интеграл I путем дифференцирования по x , поэтому требуется знать явный вид только I . Интеграл I иначе называется перестановочной функцией. Он выражается через функции Ханкеля второго рода [2].

$$I = \frac{2\pi^2 i}{mZ} H_1^{(2)}(mZ) \xrightarrow{m \rightarrow 0} -\frac{4\pi}{m^2 Z^2}. \quad (2.7)$$

Отметим, что I - безразмерная функция от одной безразмерной переменной mZ . Далее величина $Z = \sqrt{t^2 - r^2}$ будет рассматриваться как комплексное число и необходимо правильно определить фазу перед корнем во всех точках пространства $x = (t, \vec{r})$. Из (2.6) видно, что для сходимости интеграла I нужно к переменной t добавить бесконечно-малую мнимую величину, т.е. заменить t на $t - i0$. Рассмотрим Z как функцию t , при фиксированном $r = |\vec{r}|$. На комплексной плоскости t имеются две особые точки корневого типа $t = \pm r$. Действительная ось t , при обходе особенностей снизу $(t - i0)$, отображается на комплексную плоскость Z в кривую, показанную на рис. 1. Следовательно, правильное определение для действительных t и r таково:

$$Z = \sqrt{t^2 - r^2} = \begin{cases} +\sqrt{t^2 - r^2}, & t^2 - r^2 > 0, \quad t > 0, \\ -i\sqrt{|t^2 - r^2|}, & t^2 - r^2 < 0, \\ -\sqrt{t^2 - r^2}, & t^2 - r^2 > 0, \quad t < 0. \end{cases}$$

Остальные интегралы (2.6) получаются из I дифференцированием по 4-вектору x . Это дифференцирование сводится к дифференцированию по массе m . Опуская проме-

журточные вычисления, приведем следующие результаты:

$$I_{\alpha} = \hat{p}_{\alpha} I = \left[\frac{imx_{\alpha}}{z^2} \frac{\partial}{\partial m} \right] I \xrightarrow{m \rightarrow 0} \frac{8\pi i}{m^2} \frac{x_{\alpha}}{z^4}, \quad (2.8)$$

$$I_{\alpha\beta} = \hat{p}_{\alpha} \hat{p}_{\beta} I = \frac{m}{z^2} \left[x_{\alpha} x_{\beta} \left(m + \frac{4}{z^2} \frac{\partial}{\partial m} \right) - g_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial m} \right] I \rightarrow \\ \xrightarrow{m \rightarrow 0} \frac{8\pi i}{m^2 z^4} \left(4 \frac{x_{\alpha} x_{\beta}}{z^2} - g_{\alpha\beta} \right), \quad (2.9)$$

$$I_{\alpha\beta\gamma} = \hat{p}_{\alpha} \hat{p}_{\beta} \hat{p}_{\gamma} I = \\ = \left[(x_{\alpha} g_{\beta\gamma} + x_{\beta} g_{\alpha\gamma} + x_{\gamma} g_{\alpha\beta}) \left(\frac{im^2}{z^2} + \frac{4im}{z^4} \frac{\partial}{\partial m} \right) + \frac{imx_{\alpha} x_{\beta} x_{\gamma}}{z^4} \left(m^2 \frac{\partial}{\partial m} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{24}{z^2} \frac{\partial}{\partial m} - 6m \right) \right] I \rightarrow \frac{32\pi i}{m^2 z^6} \left[(x_{\alpha} g_{\beta\gamma} + x_{\beta} g_{\alpha\gamma} + x_{\gamma} g_{\alpha\beta}) - 6x_{\alpha} x_{\beta} x_{\gamma} z^{-2} \right], \quad (2.10)$$

$$I_{\alpha\beta\gamma\delta} = \hat{p}_{\alpha} \hat{p}_{\beta} \hat{p}_{\gamma} \hat{p}_{\delta} I = \left[x_{\alpha} x_{\beta} x_{\gamma} x_{\delta} z^{-6} \left(m^4 z^2 - 48m^2 + 12m^3 \frac{\partial}{\partial m} - \right. \right. \\ \left. \left. - 192m z^{-2} \frac{\partial}{\partial m} \right) + (x_{\alpha} x_{\beta} g_{\gamma\delta} + x_{\alpha} x_{\gamma} g_{\beta\delta} + x_{\alpha} x_{\delta} g_{\beta\gamma} + x_{\beta} x_{\gamma} g_{\alpha\delta} + \right. \\ \left. + x_{\beta} x_{\delta} g_{\alpha\gamma} + x_{\gamma} x_{\delta} g_{\alpha\beta}) \left(6m^2 z^{-4} - m^3 z^{-4} \frac{\partial}{\partial m} + 24m z^{-6} \frac{\partial}{\partial m} \right) + \right. \\ \left. + (g_{\alpha\beta} g_{\gamma\delta} + g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} + g_{\alpha\delta} g_{\beta\gamma}) (m z^{-4}) \left(m z^2 + 4 \frac{\partial}{\partial m} \right) \right] I \rightarrow \\ \rightarrow - \frac{32\pi i}{m^2 z^6} \left[48 z^{-4} x_{\alpha} x_{\beta} x_{\gamma} x_{\delta} - 6 z^{-2} (x_{\alpha} x_{\beta} g_{\gamma\delta} + \dots) + (g_{\alpha\beta} g_{\gamma\delta} + \dots) \right], \quad (2.11)$$

где $g_{\alpha\beta}$ - метрический тензор.

Вторая производная от I по массе согласно дифференциальному уравнению для функций Бесселя выражается через I и $\partial I / \partial m$. Заметим, что векторная структура всех интегралов образована из одного вектора x . Это свойство

также можно отнести к преимуществу настоящего подхода, так как оно позволяет сильно сократить выкладки особенно тогда, когда в F содержатся шпурь.

В случае, когда масса частицы точно равна нулю или настолько мала, что ее можно пренебречь, выражения для интегралов значительно упрощаются. Их явный вид тоже приводится в формулах (2.7-2.II).

Итак, интегрирование по импульсам частиц в (2.I) свелось к замене в выражении для квадрата амплитуды (2.3) импульсов частиц P на взятые в квадратные скобки в (2.7-2.II) комбинации, образованные из вектора x и производных по массам частиц.

Перед последним интегрированием по x -пространству подынтегральная функция всегда будет состоять из членов типа $\chi_\alpha \chi_\beta \dots \chi_\gamma f(z, m)$, где f - некоторая скалярная функция от масс частиц и расстояния z . Векторную структуру, стоящую под знаком интеграла, можно убрать, если воспользоваться дифференцированием по полному импульсу системы Q . К оставшемуся после этой процедуры чисто скалярному интегралу уже можно применить результаты работы [2]. Преобразуем его к однократному контурному интегралу по следующей формуле

$$\int d^4x f(z) e^{iQx} = \frac{(2\pi)^2}{2i} \int_C dz \cdot z^2 \cdot f(z) H_1^{(0)}(Mz) M^{-1}, \quad (2.I2)$$

где C - контур в плоскости z , огибающей отрицательную действительную ось. Так как зависимость от вектора Q в (2.I2) выражена в явном виде через M , то теперь легко произвести дифференцирование по Q , чтобы выписать векторную структуру исходного члена. Последовательное выполнение этих операций над интегралом (2.I), в конце концов, сводится к тому, что в подынтегральной функции нужно сделать замену векторов $\chi_\alpha \chi_\beta \dots$ на следующие

СООТНОШЕНИЯ:

$$x_\alpha \rightarrow \frac{Q_\alpha}{iM} \frac{\partial}{\partial M}, \quad (2.13)$$

$$x_\alpha x_\beta \rightarrow \frac{Q_\alpha Q_\beta}{M^2} z^2 + \left(4 \frac{Q_\alpha Q_\beta}{M^2} - g_{\alpha\beta}\right) M^{-1} \frac{\partial}{\partial M}, \quad (2.14)$$

$$x_\alpha x_\beta x_\gamma \rightarrow \frac{i Q_\alpha Q_\beta Q_\gamma}{M^3} \left(\frac{6z^2}{M} + \frac{24}{M^2} \frac{\partial}{\partial M} - \frac{z^2 \partial^2}{\partial M} \right) - \\ - i (Q_\alpha g_{\beta\gamma} + Q_\beta g_{\alpha\gamma} + Q_\gamma g_{\alpha\beta}) (z^2 M^{-2} + 4M^{-3} \frac{\partial}{\partial M}). \quad (2.15)$$

Таким образом, в результате получим представление интеграла (2.1) в виде однократного интеграла.

Сформулируем вкратце правила вычисления интегралов. Выражение (2.1) всегда может быть приведено к виду

$$\Gamma = \frac{\pi^2 \prod m_i^2}{i M 2^N (2\pi)^{3N}} \int_C dz \cdot z^2 \cdot F \left[\frac{H_1^{(j)}(Mz)}{M} \prod I(m_i z) \right], \quad (2.16)$$

$$F = F_0 + \sum_i F_\alpha \frac{m_i Q_\alpha}{M z^2} \frac{\partial^2}{\partial M \cdot \partial m_i} + \dots$$

Для нахождения явного вида F сначала нужно заменить в нем импульсы частиц по формулам (2.8-2.11) и сделать приведение подобных членов, а затем в полученном выражении еще раз заменить вектора χ по соотношениям (2.13-2.15).

Продемонстрируем предлагаемую технику на примере распада $\omega \rightarrow 3\pi$. Согласно выражению (2.4) для квадрата амплитуды по сформулированным выше правилам получим для $F(z, m)$:

$$F = \frac{2L^6 m^3}{z^4} \left[\frac{8}{z^2} \frac{\partial^3}{\partial m_1 \partial m_2 \partial m_3} + \frac{m_1 \partial^2}{\partial m_2 \partial m_3} + \frac{m_2 \partial^2}{\partial m_1 \partial m_3} + \frac{m_3 \partial^2}{\partial m_1 \partial m_2} \right],$$

откуда $\Gamma = L^6 M^7 f 2^{-12} \pi^{-3} / 90,$

$$f = \frac{180(m_1, m_2, m_3)^3}{i\pi^4 M^9} \int \frac{dz}{z^2} H_1^{(1)}(Mz) \left[\frac{8z^{-2} \partial^3}{\partial m_1 \partial m_2 \partial m_3} + \right. \\ \left. + \frac{3m_1 \partial^2}{\partial m_2 \partial m_3} \right] I(m_1, z) I(m_2, z) I(m_3, z).$$

Отсюда имеем

$$\begin{array}{ll} f \rightarrow 1 & \text{при } m \rightarrow 0, \\ f \rightarrow 0,23 & \text{при } m \rightarrow m_\pi = 0,14 \text{ БэВ.} \end{array}$$

§ 3. Вычисление фазовых интегралов

В предыдущем параграфе было получено выражение для полной вероятности распада Γ в виде однократного контурного интеграла (2.16). Теперь покажем как вычислять такие интегралы. Оператор $F(z, m)$, соответствующий квадрату амплитуды, кроме переменной z и масс частиц, может содержать еще производные по некоторым массам. На первый взгляд кажется, что это обстоятельство сильно увеличивает число различных типов фазовых интегралов. Однако, если воспользоваться соотношением

$$\frac{d}{dz} \frac{H_1^{(1,2)}(z)}{z} = - \frac{H_2^{(1,2)}(z)}{z},$$

то станет ясно, что вычисление Γ всегда может быть сведено к вычислению стандартного контурного интеграла типа

$$\int \frac{dz}{z^l} \frac{H_n^{(1)}(Mz)}{M} \prod_{\nu=1}^L \frac{H_{\alpha_\nu}^{(2)}(z m_\nu)}{m_\nu}. \quad (3.1)$$

Индексы α и α_ν могут принимать значения 1,2; а L, l - некоторые целые числа.

Прежде, чем приводить общую схему вычислений, рассмотрим случаи, в которых удовлетворительный результат можно получить просто. К ним относятся следующие случаи:

а) нерелятивистский случай, когда для всех частиц $m \gg M - \sum m$.

б) релятивистский случай, когда для всех частиц $m_p \rightarrow 0$.

Можно было бы рассмотреть смешанный случай, когда одна группа частиц релятивистская, а другая нерелятивистская. Расчет делается точно теми же приемами, что в случае а) и б), но получаются довольно громоздкие формулы [2].

При выводе приближенных оценок интегралов, важно знать асимптотические свойства подынтегральной функции при больших и малых Z . Эти свойства мало зависят от значения индексов функций Ханкеля, поэтому мы для определенности все формулы обсудим для случая чистого фазового объема, т.е. когда в формуле (2.3) F сводится к константе F_0 , а остальные формфакторы равны нулю. Индексы α и α_ν в (3.1) при этом равны единице. Это ограничение не существенно для общности результатов, т.к. аналогичная схема вычислений применима к любому типу интеграла (3.1). Итак, рассмотрим чистый фазовый объем N частиц [2]

$$\begin{aligned} \Omega_{L_N}(M, m_1, \dots, m_N) &= \int \delta^{(4)}(Q - \sum P) \prod d^3 p E^{-1} = \\ &= \frac{(2\pi^2 i)^{N-1} \prod m^2}{4} \int_c \frac{dz}{z^{N-2}} \frac{H_1^{(1)}(Mz)}{M} \prod \frac{H_1^{(2)}(mz)}{m} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Контур C - бесконечный контур, окружающий разрез $(-\infty, 0)$ (рис. 2).

Начнем с нерелятивистского случая. Контур C деформируем в контур C_R и пусть радиус велик. На C_R $|z| \geq R \gg 1$. Поэтому можно воспользоваться разложением функций $H_1^{(1)}$ и $H_1^{(2)}$ при большом $|z|$

$$H_1^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \exp\left\langle iz - \frac{3\pi i}{4} \right\rangle \cdot h_1^{(1)}(z), \quad (3.3)$$

$$H_1^{(2)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \exp\left\langle -iz + \frac{3\pi i}{4} \right\rangle \cdot h_1^{(2)}(z), \quad (3.4)$$

$$h_1^{(1,2)}(z) = \sum c(m) (\pm 2iz)^{-m}; \quad c(m) = \frac{\Gamma(\frac{3}{2}+m)\Gamma(-\frac{1}{2}+m)}{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(-\frac{1}{2})\Gamma(1+m)}. \quad (3.5)$$

В результате интегрирования получаем разложение фазового объема Ω_N в виде

$$\Omega_N = (2\pi)^{\frac{3(N-1)}{2}} M^{2N-4} (1 - \sum \mu)^{\frac{3N-5}{2}} (\prod \sqrt{\mu}) \cdot \sum \frac{c(n_0)c(n_1)\dots c(n_N) x_0^{n_0} \dots x_N^{n_N}}{\Gamma(\frac{3N-3}{2} + n_0 + n_1 + \dots + n_N)}, \quad (3.6)$$

где

$$x_0 = \frac{1 - \sum \mu}{2}; \quad x_k = \frac{\sum \mu - 1}{2\mu_k};$$

$$\prod \sqrt{\mu} = \sqrt{\mu_1 \dots \mu_N}; \quad \mu = \frac{m}{M}.$$

Удерживая первые члены, имеем

$$\Omega_N \approx \Omega_N^{(пер)} = \frac{(2\pi)^{\frac{3N-3}{2}} \sqrt{m_1 \dots m_N}}{\Gamma(\frac{3N-3}{2}) M^{3/2}} \cdot (M - \sum m)^{\frac{3N-5}{2}} \left\langle 1 - \frac{(M - \sum m)}{4M(N-1)} \left(\sum \frac{M}{m} - 1 \right) + \dots \right\rangle. \quad (3.7)$$

Очевидно, что ряд расходится для $x_k < -1$. Легко заметить, что $c(n_0)c(n_1)\dots c(n_N) \leq \Gamma(\frac{3}{2}(N-1) + n_0 + n_1 + \dots + n_N)$

и поэтому многомерный ряд мажорируется рядом $\sum x_0^{n_0} x_1^{n_1} \dots x_N^{n_N}$. Следовательно область сходимости ряда является гиперкуб $-1 < x_k \leq 0$. Это условие означает, что масса k -ой частицы больше половины кинетической энергии системы, т.е. частица нерелятивистская. О настоящих границах применимости формулы (3.4) можно судить по величине остаточного члена. Для простоты предположим, что массы всех частиц равны $m_1 = m_2 = \dots = m_N = m$. Тогда

$$\frac{M - \sum m}{4M(N-1)} \left(\sum \frac{M}{m} - 1 \right) \approx \frac{N+1}{4} \left(1 - \frac{Nm}{M} \right). \quad (3.8)$$

Таким образом, при фиксированном относительном дефекте $1 - Nm/M$ точность формулы ухудшается с ростом числа частиц. Случай равных масс, как легко видеть из (3.7), наиболее благоприятный в отношении точности формулы.

Перейдем к рассмотрению релятивистского случая. Подставим в (3.2) разложение функций Ханкеля при малых z . Для компактности и простоты последующего интегрирования запишем разложение в следующем виде

$$H_1^{(2)}(z) = \frac{2i}{\pi z} \left\langle 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial n} \frac{(iz/2)^{2+2n}}{\Gamma(1+n)\Gamma(2+n)} \right\rangle. \quad (3.9)$$

Подставим разложение (3.9) в интеграл (3.2)

$$\Omega_N = \frac{(-4\pi)^N}{8\pi^2 i M} \int_C \frac{dz}{z^{2N-2}} H_1^{(1)}(Mz) \Pi \left\langle 1 + \sum \frac{\partial}{\partial n} \frac{(imz/2)^{2+2n}}{\Gamma(1+n)\Gamma(2+n)} \right\rangle.$$

Если перемножить между собой все выражения в угловых скобках, то для выполнения почленного интегрирования по z нужно знать только один тип интеграла

$$\int_C \frac{dz}{z^N} H_1^{(1)}(z) = \frac{2^{2-N} i^{N-1} \pi}{\Gamma(N/2) \Gamma(1+N/2)}. \quad (3.10)$$

Таким образом приходим к результату

$$\frac{\Omega_N}{2\pi(\pi M^2)^{N-2}} = \sum_{k=0}^N P_k^N \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial^k}{\partial n_1 \dots \partial n_k} \frac{\prod_{j=1}^k \mu_j^{2+2n_j} \Gamma^{-1}(1+n_j) \Gamma^{-1}(2+n_j)}{\Gamma(N-k-\sum n) \Gamma(N-1-\sum n-k)} \quad (3.II)$$

Здесь P_k^N означает суммирование по всем различным сочетаниям из k масс. Другими словами, массы $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$, входящие в эту формулу нужно заменить другим произвольным сочетанием из k масс и затем просуммировать по всем таким сочетаниям.

$K=0$ соответствует I; $K=1$ соответствует следующему члену

$$\sum \frac{\partial}{\partial n} \frac{\mu^{2+2n}}{\Gamma(1+n) \Gamma(2+n) \Gamma(N-1-n) \Gamma(N-2-n)} =$$

$$= \sum_{n=0}^{N-2} \frac{2 \ln \mu + \psi(N-1-n) + \psi(N-2-n) - \psi(1+n) - \psi(2+n)}{\Gamma(1+n) \Gamma(2+n) \Gamma(N-1-n) \Gamma(N-2-n)} \mu^{2+2n} \quad (3.I2)$$

и поэтому фазовый объем N частиц, когда только одна имеет ненулевую массу, выражается в конечном виде:

$$\frac{\Omega_N}{2\pi(\pi M^2)^{N-2}} = \frac{1 - \mu^{2N-2}}{\Gamma(N) \Gamma(N-1)} +$$

$$+ \sum_{n=0}^{N-3} \frac{2 \ln \mu + \psi(N-1-n) + \psi(N-2-n) - \psi(1+n) - \psi(2+n)}{\Gamma(1+n) \Gamma(2+n) \Gamma(N-1-n) \Gamma(N-2-n)} \mu^{2+2n}$$

$$\Omega_2 = 2\pi(1-\mu^2); \quad \Omega_3 = \pi^2 M^2 (1-\mu^4 + 4\mu^2 \ln \mu),$$

$$\Omega_5 = \frac{\pi^4 M^6}{72} [1 + 28\mu^2 - 28\mu^4 - \mu^6 + 24\mu^2(1+3\mu^2+\mu^4) \ln \mu]. \quad (3.I3)$$

Следующие члены более сложны.

При большой распадной массе M в качестве первого

приближения можно ограничиться следующими членами:

$$\Omega_N = \Omega_N^{(p, n)} = \frac{2\pi (\pi M^2)^{N-2}}{\Gamma(N)\Gamma(N-1)} \cdot [1 + (\ln \mu^2 + \psi(N-1) + \psi(N-2) - \psi(1) - \psi(2))(N-1)(N-2)\mu^2]. \quad (3.14)$$

§ 4. Функции Ханкеля

Подынтегральное выражение в фазовом объеме состоит из произведения степенной функции и некоторого числа функций Ханкеля $H_1^{(1)}$ и $H_1^{(2)}$. Поэтому, прежде чем перейти к вычислению интегралов, необходимо познакомиться с некоторыми свойствами функций Ханкеля и, что особенно важно, подробно изучить их рельеф на комплексной плоскости.

Функции Ханкеля $H_p^{(q)}(z)$ ($q=1, 2$) иначе называются цилиндрическими функциями третьего рода. Нас будет интересовать случай целого индекса p . Воспользуемся следующим представлением

$$H_p^{(1)}(z) = \frac{2}{\pi} e^{-i\pi(1+p)/2} K_p(e^{-i\pi/2} z), \quad (4.1)$$

$$H_p^{(2)}(z) = \frac{2}{\pi} e^{i\pi(1+p)/2} K_p(e^{i\pi/2} z) = e^{i\pi(1+p)} H_p^{(1)}(e^{i\pi} z), \quad (4.2)$$

где $K_p(z)$ - функция Макдональда

$$K_p(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{z}{2}\right)^p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k (p-k-1)!}{k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} + \frac{(-)^p}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{p+2k}}{k!(p+k)!} \left(\sum_{\ell=1}^k \frac{1}{\ell} + \sum_{\ell=1}^{k+p} \frac{1}{\ell}\right) + (-)^{1+p} I_p(z) \cdot \ln(cz/2), \quad (4.3)$$

$C = 0,5772157$ - постоянная Эйлера

$$I_p(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{\rho+2k}}{k! (\rho+k)!}. \quad (4.4)$$

Из (4.3) следует положительность $K_p(z)$ на положительной полуоси $\arg z = 0$. Отсюда вытекают свойства симметрии

$$K_p(\bar{z}) = \overline{K_p(z)},$$

$$H_p^{(1)}(e^{i\pi} \bar{z}) = e^{-\pi i(1+p)} \overline{H_p^{(1)}(z)}, \quad (4.5)$$

$$H_p^{(2)}(e^{-i\pi} \bar{z}) = e^{\pi i(1+p)} \overline{H_p^{(2)}(z)}.$$

Под сопряженными величинами мы здесь всегда понимаем величины с аргументами равными по абсолютной величине и противоположными по знаку, например точки z и $e^{2\pi i} \bar{z}$ мы не считаем взаимно сопряженными.

Непосредственно из (4.1) и (4.2) следует

$$H_p^{(2)}(z) = H_p^{(1)}(\bar{z}). \quad (4.6)$$

Ряды в (4.3) сходятся во всей плоскости. Заметим, что функции $H_p^{(q)}$ аналитичны и однозначны на римановой поверхности $w = \log z$.

Рельефом функции будем называть ее риманову поверхность, на которой проведены линии постоянной фазы функции и линии уровня ее модуля. Линии постоянной фазы являются линиями наибольшего изменения модуля функции, причем

возрастание модуля изменяется на убывание и наоборот лишь в точках перевала, нулях функции и ее особых точках. Семейства линий постоянной фазы и постоянного модуля взаимно ортогональны. Наконец, через каждую регулярную точку, отличную от нуля функции и от точки перевала, проходит лишь одна линия постоянного модуля функции. В точках перевала, за исключением случаев вырождения, проходят две ортогональные друг другу линии постоянной фазы и две линии постоянного модуля, делящие пополам углы между линиями постоянной фазы. Риманову поверхность функции $H_p^{(n)}(z)$ опишем следующим образом. Полулист $-\frac{\pi}{2} < \arg z \leq \frac{\pi}{2}$ снабдим номером $[0]$. Через $[m]$ будем обозначать полулист, полученный из $[0]$ поворотом на $\exp \langle \pi m i \rangle$. На полулистах $[-m]$ и $[m+1]$ функция $H_p^{(n)}(z)$ связана соотношением симметрии (4.5).

Напоминаем, что согласно нашему условию сопряженности точка \bar{z} лежит на полулисте $[-(m+1)]$ если точка z лежит на $[m+1]$, и следовательно, точка $e^{i\pi} \bar{z}$ лежит на полулисте $[-m]$. Из (4.5) следует, что достаточно рассматривать функцию $H_p^{(n)}$ на полулистах $[0]$, $[-1]$, $[-2]$, ...

Происхождение вышеизложенной символики легко понять, если перейти на плоскость переменной $w = \log z$, на которой функции Ханкеля однозначны. Каждому полулисту плоскости z соответствует полоса шириной π на плоскости w . Например, полулисту $[0]$ отвечает полоса $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{Im} w \leq \frac{\pi}{2}$. Операция комплексного сопряжения, условия симметрии и т.д. приобретают обычный смысл.

Рельеф функции в первую очередь определяется особенностями функции, нулями, точками перевала и асимптотикой функции. Поэтому нам нужно рассмотреть все эти элементы функции $H_p^{(n)}(z)$;

1. На каждом листе $H_p^{(n)}$ имеет в $z=0$ полюс порядка p и логарифмическую точку ветвления.

2. Асимптотика $H_p^{(n)}$. Известно, что функция $I_p(z)$

на положительной полуоси монотонно возрастает от нуля до бесконечности, а функция K_p положительна и при $|z| \rightarrow \infty$, $\arg z = 0$ монотонно стремится к нулю. Из (4.3) следует, что

$$e^{m\rho\pi i} K_p(z e^{m\pi i}) = K_p(z) + (-)^{1+p} I_p(z) \cdot m\pi i. \quad (4.7)$$

Из (4.3) и (4.7) можно получить, что при изменении $|z|$ от 0 до ∞ $\arg K_p(e^{m\pi i}/|z|)$ монотонно изменяется на $(-)^{1+p} \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} m$. Точно так же изменяется и $\arg H_p^{(1)}[|z| \exp \pi i (m + \frac{1}{2})]$ и $\arg H_p^{(2)}[|z| \exp \pi i (m - \frac{1}{2})]$. Согласно (4.3) при малых $|z|$

$$\begin{aligned} \arg K_p(z) &\simeq -p \cdot \arg z, & \arg H_p^{(1)}(z) &\simeq -p \arg z - \pi/2 \\ \arg H_p^{(2)}(z) &\simeq -p \cdot \arg z + \pi/2. \end{aligned} \quad (4.8)$$

В соответствии с этим при $|z| \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \arg H_p^{(1)}[|z| \exp \pi i (m + \frac{1}{2})] &\simeq -[p(m + \frac{1}{2}) + \frac{1+(-)^p \operatorname{sgn} m}{2}] \pi, \\ \arg H_p^{(2)}[|z| \exp \pi i (m - \frac{1}{2})] &\simeq -[p(m - \frac{1}{2}) - \frac{1-(-)^p \operatorname{sgn} m}{2}] \pi. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Обычно считают [3], что справедливы следующие асимптотические формулы

$$H_p^{(1)}(z) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{i(z - \frac{\pi p}{2} - \frac{\pi}{4})} [1 + O(z^{-1})], \quad (4.10)$$

$-\pi < \arg z < 2\pi,$

$$H_p^{(2)}(z) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{-i(z - \frac{\pi p}{2} - \frac{\pi}{4})} [1 + O(z^{-1})], \quad (4.11)$$

$-2\pi < \arg z < \pi.$

В действительности эти формулы справедливы лишь с точностью до множителей вида $e^{2\kappa\pi i}$ (κ - целое). Обращаясь к $\arg H_p^{(1)}$ и $\arg H_p^{(2)}$ и сравнивая с (4.9), видим, что (4.10) верно на полуоси $\arg z = \pi/2$, а на полуоси $\arg z = -\pi/2$ к правой части (4.10) добавляется множитель $\exp 2\pi i [p/2]$, т.е. при $\arg z = -\pi/2$.

$$H_p^{(1)}(z) = e^{2\pi i [p/2]} \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} e^{i(z - \pi \frac{p}{2} - \frac{\pi}{4})} [1 + O(z^{-1})]. \quad (4.12)$$

Соответственно формула (4.11) верна при $\arg z = -\pi/2$, а при $\arg z = \pi/2$

$$H_p^{(2)}(z) = e^{-2\pi i [p/2]} \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} e^{-i(z - \frac{\pi p}{2} - \frac{\pi}{4})} [1 + O(z^{-1})]. \quad (4.13)$$

Не входя в детали, укажем, что наличие добавочных множителей означает наличие $[p/2]$ нулей у функции $H_p^{(1)}(z)$ на каждом из полулистов $[0]$ и $[I]$ и наличие нулей у функции $H_p^{(2)}(z)$ на каждом из полулистов $[0]$ и $[-I]$.

Лишь после этих замечаний мы можем точно выписать соотношения обхода для функций $H_p^{(1)}(z)$ и $H_p^{(2)}(z)$

$$H_p^{(1)}(e^{m\pi i} z) = e^{-m\pi i} \begin{cases} (m-1)e^{-\pi i(-)^p} H_p^{(1)}(z) + m e^{-\pi i} H_p^{(2)}(z), & m \geq 1, \\ (1-m)H_p^{(1)}(z) - m e^{-4\pi i [p/2]} H_p^{(2)}(z), & m \leq 0, \end{cases} \quad (4.14)$$

$$H_p^{(2)}(e^{m\pi i} z) = e^{-m\pi i} \begin{cases} m e^{4\pi i [p/2]} H_p^{(1)}(z) + (m+1) H_p^{(2)}(z), & m \geq 0, \\ -m e^{\pi i} H_p^{(1)}(z) - (m+1) e^{\pi i(-)^p} H_p^{(2)}(z), & m \leq -1 \end{cases} \quad (4.15)$$

Эти формулы получаются предельным переходом из соотношений обхода при нецелом индексе $\nu \rightarrow \rho$ ([4] стр.982-983). Фазовые множители $e^{2k\pi i}$ определяются из поведения функции вблизи $z=0$ и на верхней и нижней бесконечности вдоль мнимой оси.

Из формулы (4.12) - (4.14) следует, что асимптотика $H_\rho^{(H)}$ на отрицательном полулисте $[m]$, $m < 0$, имеет вид I^* .

$$H_\rho^{(H)}(z) = \sqrt{\frac{2e^{m\pi i}}{\pi z}} e^{-m\rho\pi i + 2\pi i\{P/2\}} \left[(1-m)e^{i(z(-)^m + \frac{\pi\rho}{2} - \frac{\pi}{4})} - m e^{-i(z(-)^m + \frac{\pi\rho}{2} - \frac{\pi}{4})} \right]. \quad (4.16)$$

Точка $z e^{-m\pi i}$ лежит на полулисте $[0]$, поэтому

$$-\frac{\pi}{4} \leq \arg(z e^{-m\pi i})^{-1/2} < \frac{\pi}{4}. \quad (4.17)$$

Формулы (4.14-17) позволяют определить $\arg H_\rho^{(H)}(z)$ на ее римановой поверхности, разрезанной вдоль кривых, проходящих через все нули функции $H_\rho^{(H)}$. Именно с этой целью точно определялись фазовые множители.

Сформулируем некоторые следствия.

I. На всех полулистах $[m]$, $m \leq -1$, функция $H_\rho^{(H)}$ на верхней бесконечности асимптотически совпадает с функцией

$$-m \sqrt{\frac{2e^{m\pi i}}{\pi z}} \exp\left[-\pi i(m\rho + 2\{P/2\}) - i\left(z + \frac{\pi\rho}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right] \quad (4.18)$$

* Напоминаем, что $\{x\}$ дробная часть, а $[x]$ целая часть числа x .

при четном m , и с функцией

$$(1-m) \sqrt{\frac{2e^{m\pi i}}{\pi z}} \exp\left[-\pi i(m\rho + 2\{\rho/2\}) - i\left(z - \frac{\pi\rho}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right] \quad (4.19)$$

при нечетном m .

На нижней бесконечности $H_p^{(1)}$, соответственно четности и нечетности m , ведет себя как

$$(1-m) \sqrt{\frac{2e^{m\pi i}}{\pi z}} \exp\left[-\pi i(m\rho + 2\{\rho/2\}) + i\left(z + \frac{\pi\rho}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right] \quad (4.20)$$

и

$$-m \sqrt{\frac{2e^{m\pi i}}{\pi z}} \exp\left[-\pi i(m\rho + 2\{\rho/2\}) + i\left(z - \frac{\pi\rho}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right]. \quad (4.21)$$

На исключительном полулисте $[0]$ $H_p^{(1)}$ на нижней бесконечности растет как функция (4.12), а на верхней убывает, как (4.10). Для $H_p^{(2)}$ исключительными полулистами являются не полулисты $[0]$ и $[1]$, а соответственно полулисты $[0]$ и $[-1]$ (см. форм. (4.2)).

II. На отрицательном четном полулисте на прямой

$$\operatorname{Im} z = y_m \equiv \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1-m}{-m} \right) \quad (4.22)$$

справедливо асимптотическое равенство

$$H_p^{(1)}(z) \approx 2 \sqrt{\frac{2m(m-1)}{\pi z e^{-m\pi i}}} e^{-\pi i(m\rho + 2\{\rho/2\})} \cos\left(x + \frac{\pi\rho}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \quad (4.23)$$

На отрицательном нечетном полулисте, на прямой $\text{Im } z = -y_m$, справедливо асимптотическое равенство

$$H_p^{(1)}(z) \approx 2 \sqrt{\frac{2m(m-1)}{\pi z}} e^{-\pi i(m\rho + 2\{ \rho/2 \})} \text{Cos}\left(x - \frac{\pi\rho}{2} + \frac{\pi}{4}\right). \quad (4.24)$$

III. Нули функции $H_p^{(1)}(z)$ на отрицательном полулисте асимптотически лежат в точках

$$z_{m,k} \approx [k - (-)^{\rho/4}] \pi + iy_m \quad (4.25)$$

при четном m , и в точках

$$z_{m,k} \approx -[k - (-)^{\rho/4}] \pi - iy_m \quad (4.26)$$

при нечетном m . Здесь k целое $\gg 1$. На исключительном полулисте $[0]$ расположено равно $[\rho/2]$ нулей.

Нули производной $H_p^{(1)}$, т.е. точки перевала функции $H_p^{(1)}$, асимптотически лежат в точках

$$z_{m,k}^0 \approx [k - \frac{1}{2} - (-)^{\rho/4}] \pi + iy_m \quad (4.27)$$

при четном m , и

$$z_{m,k}^0 \approx -[k - \frac{1}{2} - (-)^{\rho/4}] \pi - iy_m \quad (4.28)$$

при нечетном m .

Начиная с этого места мы будем рассматривать лишь функцию $H_p^{(1)}$, так как функция $H_p^{(2)}$, ничем принципиально не отличаясь, требует все-таки отвлекающих от

сути оговорок. Для $H_1^{(1)}$ формулы (4.25)–(4.28) дают качественно хороший результат даже при $\kappa=1$. Ниже будет показано, что других нулей нет.

Каждый нуль функции является точкой стока линий постоянной фазы. Определяя поток линий стандартным образом, легко убедиться, что мощность стока в любом простом нуле равна 2π . Наоборот, полюс является источником потока линий постоянной фазы мощностью 2π . Поэтому на каждом листе римановой поверхности функции $H_1^{(1)}$ точка $z=0$ является источником мощности 2π . Стрелку на линии постоянной фазы мы будем ставить в направлении уменьшения модуля функции.

Построение рельефа функции на ее римановой поверхности по сути равносильно изучению гидродинамики потока постоянной фазы на этой поверхности. Начнем с листа $[-1, 0]$. Докажем, что на полулисте $[0]$ функция $H_1^{(1)}$ не имеет нулей. С этой целью, покажем, что приращение $\arg H_1^{(1)}$ вдоль достаточно большого контура вида, изображенного на рис. 3, равно нулю. Действительно, приращение аргумента вдоль левой стороны равно $\pi/2$ (вдоль верхней мнимой полуоси $\Delta \arg H_1^{(1)} = 0$, вдоль малой полуокружности $\Delta \arg H_1^{(1)} = \pi$ и вдоль нижней полуоси $\Delta \arg H_1^{(1)} = -\pi/2$). Приращение $\arg H_1^{(1)}$ вдоль парвой стороны равно нулю, а вдоль нижней и верхней сторон в сумме равно $-\pi/2$. Два последних утверждения непосредственно следуют из асимптотики

$$H_1^{(1)}(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \exp\left\langle iz - \frac{3\pi i}{4} \right\rangle \left[1 + O(z^{-1}) \right], \quad (4.29)$$

справедливой на полулисте $[0]$.

Рассмотрим судьбу линии постоянной фазы, выходящей из точки $x_- - i\infty$, $x_- > 0$. Вдоль этой линии, как это следует из (4.29), $\arg H_1^{(1)} = x_- - \pi/2$. При $x_- > \pi/2$ эта линия не может пересекать мнимую ось, так как вдоль

положительной мнимой полуоси $\arg H_1^{(1)} = -\pi$, а вдоль отрицательной мнимой полуоси монотонно убывает на интервале $-\frac{\pi}{2} < \arg z < 0$. Из-за отсутствия нулей на полулисте $[0]$ следует, что рассматриваемая линия уходит на верхнюю бесконечность в точку $\chi_+ + i\infty$. Вдоль этой линии снизу вверх $\arg z^{-1/2}$ убывает на $\pi/2$, поэтому

$$\chi_+ = \chi_- + \pi/2. \quad (4.30)$$

Итак, существует такое число δ_0

$$0 \leq \delta_0 \leq 1/2, \quad (4.31)$$

что всякая линия постоянной фазы, выходящая из точки $(\chi_- - i\infty)$ при $\chi_- > \pi\delta_0$, попадает в верхнюю бесконечность, сдвигаясь при этом направо на $\pi/2$. При $0 < \chi_- < \pi\delta_0$ линия постоянной фазы, выходящая из точки $\chi_- - i\infty$ пересекает отрицательную мнимую полуось и переходит на полулист $[-I]$.

Итак, линия постоянной фазы, выходящая из точки $\chi_- - i\infty$ при $\chi_- > \pi\delta_0$, оставаясь на полулисте $[0]$, попадает в точку $(\chi_+ + \pi/2) + i\infty$. При $-\frac{\pi}{2} < \chi_- < \pi\delta_0$ линия постоянной фазы либо с самого начала находится на полулисте $[-I]$, (при $\chi_- < 0$), либо, пересекая один раз нижнюю мнимую полуось, попадает на полулист $[-I]$. В верхнюю бесконечность эти линии попасть не могут, так как на полулисте $[-I]$ в верхней бесконечности $H_1^{(1)} \rightarrow \infty$. Очевидно, разделяющая линия постоянной фазы, выходящая из точки $\pi\delta_0 - i\infty$, попадает в точку перевала, как мы ниже убедимся, в единственную точку перевала на полулисте $[0]$.

Для определения числа точек перевала, расположенных в области, полезно следующее простое предложение.

Теорема

Полное число нулей производной $f'(z)$ в конечной области, ограниченной одним контуром Γ , в которой функция $f(z)$ регулярна, равно полному числу оборотов образа кривой $f(\Gamma)$ в плоскости f вокруг конечных точек минус число оборотов вокруг точки $f = \infty$ и минус I .

Доказательство

Число нулей $f'(z)$ равно

$$\frac{1}{2\pi} \Delta_{\Gamma} \arg f' = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\Gamma} \arg df - \frac{1}{2\pi} \Delta_{\Gamma} \arg dz. \quad (4.32)$$

Очевидно, $\Delta_{\Gamma} \arg dz = 2\pi$, а $\frac{1}{2\pi} \Delta_{\Gamma} \arg df$ равно числу всех возможных оборотов кривой $f(z)$ вокруг конечных точек минус число оборотов вокруг точки $f = \infty$. Число оборотов вокруг точки $f = \infty$ равно общему числу оборотов в отрицательном направлении вокруг некоторых конечных точек плоскости f (рис. 4).

На этом рисунке $f(\Gamma)$ описывает два положительных оборота и один отрицательный.

Докажем, что на полулисте $[0]$ функция $H_1^{(1)}(z)$ имеет в точности одну точку перевала. Воспользуемся рис. 3, полагая при этом, что правая граница является линией постоянной фазы. Вычислим $\Delta_{\Gamma} \arg dH_1^{(1)}$. Каждая из угловых точек контура в силу конформности дает в $\Delta_{\Gamma} \arg dH_1^{(1)}$ вклад $\pi/2$, поэтому общий вклад от угловых точек равен 3π . Воспользуемся далее следующими соотношениями:

$$1. \quad \Delta \arg dH_1^{(1)}(z) \Big|_{x_+ - i\infty}^{x_+ + i\infty} = 0,$$

$$2. \quad \Delta \arg dH_1^{(1)}(z) \Big|_{-i\infty}^{x_- - i\infty} + \Delta \arg dH_1^{(1)} \Big|_{x_+ + i\infty}^{i\infty} = x_- - x_+ = -\pi/2,$$

$$3. \Delta \arg dH_1^{(1)}(z) \Big|_{i\infty}^{i0} = 0, \quad \Delta \arg dH_1^{(1)} \Big|_{i0}^{-i0} = \pi,$$

$$4. \Delta \arg dH_1^{(1)}(z) \Big|_{-i0}^{-i\infty} = \pi/2.$$

Складывая I-4 с вкладом от угловых точек, получим

$$\Delta_r \arg dH_1^{(1)}(z) = 4\pi.$$

Согласно (5.9) число точек перевала равно единице.

При доказательстве использовалось, что правой границей служит линия постоянной фазы, выходящая из точки $\chi_- - i\infty$ и приходящая в точку $\chi_- + \frac{\pi}{2} + i\infty$. Поэтому χ_- удовлетворяет лишь условию $\chi_- > \pi\delta_0$.

В точку перевала попадает линия постоянной фазы, выходящая из точки $\pi\delta_0 - i\infty$. Вдоль этой линии $\arg H_1^{(1)} = (\delta_0 - \frac{1}{2})\pi$. В точке перевала линии постоянной фазы раздваивается, и та ветвь, вдоль которой $|H_1^{(1)}(z)|$ возрастает, должна закончиться в полюсе $z = 0$. Это следует из того, что эта ветвь не может уходить на верхнюю бесконечность полулиста $[0]$ (там $H_1^{(1)} \rightarrow 0$), не может пересекать положительную мнимую полуось (там $\arg H_1^{(1)} = -\pi$) и не может пересекать нижнюю мнимую полуось. Последнее следует из того, что вдоль нижней мнимой полуоси $\arg H_1^{(1)}$ монотонно убывает и поэтому $|H_1^{(1)}|$ вдоль линий постоянной фазы, пересекающей эту полуось из полулиста $[0]$ в полулист $[-I]$, должен убывать.

Из асимптотики (4.16) следует, что вдоль любой вертикали $\operatorname{Re} z < 0$, не проходящей через нуль функции $H_1^{(1)}$ на полулисте $[-I]$, при y , меняющемся от $-\infty$ до $+\infty$, $\arg H_1^{(1)}$ меняется меньше, чем на $\pi/2$, поэтому через каждую достаточно далеко лежащую точку перевала вида (см. 4.28)

$$z_{-1, k}^0 \approx -\left(k - \frac{1}{4}\right)\pi - iy_1$$

проходит, грубо говоря, почти вертикальная линия постоянной фазы. При достаточно большом k эта фаза с точностью до кратности 2π сколь угодно мало отличается от 0 или π .

Пусть $z_{-1, k}^0$ произвольная фиксированная точка перевала, на полулисте $[-1]$, через которую проходит линия постоянной фазы, идущая от нижней бесконечности до верхней (см. рис. 5). Если в области, ограниченной с боков линиями постоянной фазы, проходящими через точки перевала z^0 и $z_{-1, k}^0$, расположено m нулей функции $H_1^{(j)}$, то

$$\Delta_+ + \Delta_- = 2\pi m,$$

где Δ_+ - приращение $\arg H_1^{(j)}$ вдоль верхней части контура, а Δ_- - приращение $\arg H_1^{(j)}$ вдоль нижнего основания области. Если бы было справедливо равенство $\Delta_+ = \Delta_-$, отсюда вытекало бы, что разность между $\arg H_1^{(j)}(z_{-1, k}^0)$ и $\arg H_1^{(j)}(z^0)$ равна целому кратному π и поэтому $H_1^{(j)}(z)$ имеет чисто вещественное значение. Имеется ряд соображений в пользу справедливости равенства $\Delta_+ = \Delta_-$, но строгое доказательство нам неизвестно. Мы только знаем, что при достаточно большом k одна и та же вертикаль служит асимптотой линии постоянной фазы на верхней и нижней бесконечностях. Тем не менее, имеет смысл вести изложение так, будто равенство $\Delta_+ = \Delta_-$ доказано, так как при этом вся качественная сторона сохраняется, а картина становится очень наглядной. Например, пользуясь указанным предположением, можно показать, что если $z_{-1, 1}^0$ первый перевал, через который проходит линия постоянной фазы на верхнюю мнимую бесконечность (см. рис. 5), то $\arg H_1^{(j)}(z_{-1, 1}^0) = \pi$, а линия постоянной фазы асимптотически сверху и снизу удалена от мнимой оси на $\pi/2$.

Строго мы можем доказать лишь, что

$$\frac{\pi}{2} \leq \arg H_1^{(1)}(z_{-1,1}^c) < \frac{3\pi}{2}$$

и сумма расстояний сверху и снизу от мнимой оси равна π .

Поясним рис. 6. Точка $z = 0$ на листе $[0, -1]$ является источником мощности 2π . Поток линий постоянной фазы, выходящий из этого источника, разобьем на четыре части мощности $\pi\delta_0$; $(1-\delta_0)\pi$; $\pi\delta_{-1}$; $(1-\delta_{-1})\pi$. Первый поток состоит из линий, уходящих на верхнюю бесконечность полулиста $[0]$. Вторым и третьим потоки впадают в ближайший нуль $z_{-1,0}$, расположенный на полулисте $[-1]$. Эти потоки удобно рассматривать отдельно, так как каждая линия второго потока пересекает разрез $(-i0, -i\infty)$ между полулистами $[0]$ и $[-1]$, а третий поток целиком расположен на полулисте $[-1]$. Четвертый поток $(1-\delta_{-1})\pi$ состоит из линий постоянной фазы, пересекающих разрез $(i0, +i\infty)$ между полулистами $[-1]$ и $[-2]$.

Вдоль разреза $(-i0, -i\infty)$ $\arg H_1^{(1)}$ монотонно убывает на $\pi/2$, поэтому через этот разрез из полулиста $[0]$ в полулист $[-1]$ втекает поток линий постоянной фазы мощностью $\pi/2$. Этот поток складывается из потока мощности $\pi\delta_0$, вытекающего из нижней бесконечности полулиста $[0]$, и потока $(1-\delta_0)\pi$ вытекающего из полюса $z = 0$, поэтому

$$\delta_0 + (1-\delta_0) = 1/2, \quad \text{или} \quad \delta_0 = \delta_0 + 1/2. \quad (4.33)$$

Вдоль разреза $(i0, i\infty)$ между полулистами $[-1]$ и $[-2]$ $\arg H_1^{(1)}$ тоже монотонно уменьшается на $\pi/2$, поэтому через этот разрез из полулиста $[-1]$ на полулист $[-2]$ притекает поток мощностью $\pi/2$. Часть этого потока мощностью $\pi\delta_{-1}$ вытекает из верхней бесконечности полулиста $[-1]$, а часть мощностью $(1-\delta_{-1})\pi$ из

полюса $z = 0$. Очевидно,

$$\delta_{-1} + (1 - \delta_{-1}) = 1/2 \quad \text{или} \quad \gamma_{-1} = \delta_{-1} + 1/2. \quad (4.34)$$

Поток, впадающий в нуль $z_{-1,0}$, состоит из потока мощности $\pi/2$, пересекающего разрез $(-0, -i\infty)$, потока мощности $\pi/2$ с нижней бесконечности полулиста $[-I]$, потока мощности $\pi \gamma_{-1}$ из полюса и потока мощности $(\frac{1}{2} - \delta_{-1})\pi$ из верхней бесконечности полулиста $[-I]$. Баланс

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \delta_{-1} + \frac{1}{2} - \delta_{-1} = 2$$

выполняется в силу равенства $\gamma_{-1} = 1/2 + \delta_{-1}$.

Гидродинамика этой части поверхности испытывает сильное влияние полюса в точке $z = 0$, гидродинамика остальной части полулиста $[-I]$ значительно проще.

Весь полулист слева от линии постоянной фазы, проходящей через точку перевала $z_{-1,1}^0$, разбивается на криволинейные полосы. На верхней и нижней бесконечностях эти полосы точно ширины π . Сверху и снизу в каждой полосе выходит по потоку линий постоянной фазы мощности π . Все эти линии, за исключением двух граничных, впадают в соответствующий нуль функции $H_1^{(1)}$. Граничные линии проходят через точки перевала (см. рис. 7). На этих кривых $H_1^{(1)}$ попеременно отрицательна и положительна. Итак, гидродинамика листа $[0, -I]$ описана. Так как полулист $[0]$ является исключительным, то мы опишем так же гидродинамику листа $[-2, -3]$.

Оба полулиста $[-2]$ и $[-3]$ содержат бесконечное число нулей и точек перевала. Линии постоянной фазы, проходящие через точки перевала $z_{-2,1}^0$ и $z_{-3,1}^0$ (см. рис. 8), определяют криволинейную полосу асимптотической ширины (снизу и сверху) π .

Через разрез $(i0, i\infty)$ между листами $[0, -1]$ и $[-2, -3]$ поступает поток мощности $\pi/2$, а через разрез $(i0, i\infty)$ между листами $[-2, -3]$ и $[-4, -5]$ поток мощности $\pi/2$ выходит, поэтому общая мощность источников потоков, поступающих в область, указанную на рисунке, равна 4π : с верхней и нижней бесконечности по π и из полюса в точке $z=0$ 2π . Общая мощность стоков в нулях $z_{-2,1}$ и $z_{-3,1}$ тоже равна 4π , т.е. баланс верен.

Поток, выходящий из точки $z=0$ на листе $[-2, -3]$, как и раньше, разобьем на четыре части мощности $\pi\delta_{-2}$, $\pi(1-\delta_{-2})$, $\pi\delta_{-3}$ и $(1-\delta_{-3})\pi$. В отличие от ситуации на листе $[0, -1]$, поток $\pi\delta_{-2}$ уходит не на верхнюю бесконечность, а в нуль $z_{-2,1}$. Вдоль каждого из разрезов $(-i0, -i\infty)$ и $(i0, i\infty)$ на листе $[-2, -3]$ $\arg H_1^{(u)}$ монотонно уменьшается на $\pi/2$, поэтому из полулиста $[-2]$ на полулист $[-3]$ и из полулиста $[-3]$ на полулист $[-4]$ притекают потоки мощности $\pi/2$. В первом случае этот поток складывается из потока мощности $(1-\delta_{-2})\pi$ с источником в полюсе и потока мощности $\pi\delta_{-2}$ из нижней бесконечности полулиста $[-2]$. Во втором случае из потока мощности $\pi(1-\delta_{-3})$ с источником в полюсе и потока мощности $\pi\delta_{-3}$ из верхней бесконечности полулиста $[-3]$. Итак,

$$\delta_{-2} = \frac{1}{2} + \delta_{-2}, \quad \delta_{-3} = \frac{1}{2} + \delta_{-3}. \quad (4.35)$$

Для полноты картины нужно сказать, что в точку $z_{-2,1}$ впадает поток мощности $\pi/2$, приходящий через разрез с листа $[0, -1]$, поток мощности $\pi\delta_{-2}$ из полюса $z=0$ поток мощности $\pi/2$ из верхней бесконечности и поток мощности $\pi(\frac{1}{2} - \delta_{-2})$ из нижней бесконечности. Баланс

$$\frac{1}{2} + \delta_{-2} + \frac{1}{2} + (\frac{1}{2} - \delta_{-2}) = 2$$

выполняется в силу равенства $\gamma_{-2} = 1/2 + \delta_{-2}$

Гидродинамика на полулисте $[-2]$ справа от линий постоянной фазы, проходящей через точку перевала $z_{-2,1}^0$, и на полулисте $[-3]$ слева от линии постоянной фазы, проходящей через точку $z_{-3,1}^0$, имеет тот же характер, что описанная выше гидродинамика на полулисте $[-1]$ слева от линии постоянной фазы, проходящей через точку $z_{-1,1}^0$.

Гидродинамика на любом листе $[-2\nu, -2\nu-1]$, $\nu > 0$ имеет тот же самый характер. Величины δ и γ связаны соотношением

$$\gamma_{-2\nu} = \frac{1}{2} + \delta_{-2\nu}, \quad \gamma_{-2\nu-1} = \frac{1}{2} + \delta_{-2\nu-1}. \quad (4.36)$$

В ноль $z_{-2\nu,1}$ впадает поток мощности $\pi/2$ с листа $[-2\nu+2, -2\nu-1]$, поток мощности $\pi\gamma_{-2\nu}$ из полюса, поток мощности $\pi/2$ с верхней бесконечности и поток мощности $\pi(1/2 - \delta_{-2\nu})$ из нижней бесконечности.

В действительности вся картина, возможно, менее симметрична, т.е. хотя общая сумма потоков из верхней и нижней бесконечности равна 2π , но мощности этих потоков разные. Соотношения между γ и δ , конечно, верны и при отсутствии предположенной симметрии.

§ 5. Подынтегральная функция в фазовом объеме

Подынтегральная функция является произведением функций Ханкеля от различных аргументов

$$F(z) = (iz)^{2-N-n} \cdot i H_i^{(1)}(z) \prod [-\mu H_i^{(2)}(\mu z)]. \quad (5.1)$$

Здесь $i = \exp\left(\frac{\pi i}{2}\right)$, N - число частиц, n - число частиц с нулевой массой, $0 < \mu < 1$ и приведенный дефект

$$D = 1 - \sum \mu = \frac{M - \sum m}{M} > 0. \quad (5.2)$$

Частным случаем нашей функции при $N = n = 1$ (соответственно, и $D = 1$), является $i H_1^{(1)}(z)$.

Нас интересует

$$\int_C F(z) dz, \quad (5.3)$$

где контур C окружает отрицательную полуось (см. рис. 2). Из формул (4.10); (4.13) следует, что при

$$-\pi < \arg z < \pi \quad (5.4)$$

имеет место асимптотическое равенство

$$F(z) \sim (iz)^{\frac{3N+n-3}{2}} \exp(iDz). \quad (5.5)$$

В точке $z = 0$ функция имеет логарифмическое ветвление и на каждом листе полюс порядка $2N - 1$. Если пользоваться введенной в §4 нумерацией полулистов, можно сказать, что функция рассматривается на полулисте $[0]$, верхней половине полулиста $[I]$ и нижней половине полулиста $[-I]$. Как мы убедились, очень полезно знать изменение $\arg F(z)$ вдоль границы полулиста - в данном случае, полулиста $[0]$. Для функции $H_1^{(1)}$ верхняя мнимая полуось является линией постоянной фазы, а для функции $H_1^{(2)}$ таковой является нижняя мнимая полуось. Вдоль полуоси $(-i0, -i\infty)$ $\Delta \arg H_1^{(1)} = -\pi/2$, а вдоль полуоси $(i0, i\infty)$

$$\Delta \arg H_1^{(2)} = \pi/2$$

. Отсюда следует, что

$$\Delta \arg F(z) \Big|_{i0}^{i\infty} = (N-n) \frac{\pi}{2}, \quad (5.6)$$

$$\Delta \arg F(z) \Big|_{-\infty}^{-i0} = -\frac{\pi}{2}. \quad (5.7)$$

Отметим, что аргументы всех функций изменяются монотонно. Из результатов §4 следует, что на полулисте $[0]$ функция $F(z)$ нулей не имеет, а на полулисте $[-I]$ ее нули совпадают с нулями $H_1^{(1)}$, т.е. асимптотически лежат на прямой $\text{Im } z = -\frac{1}{2} \ln 2$ на расстоянии $\sim \pi$ друг от друга. Нули $F(z)$ на полулисте $[+I]$, как станет ясно ниже (см. §6), для нас не имеют значения.

Из справедливости (5.5) на полулисте $[0]$ и отсутствия нулей следует применимость к функции $F(z)$ аргументации о поведении линий постоянной фазы, приведенной в §4. В частности, существует такое число $0 < \delta_0 D < \frac{1}{2}$, что всякая линия постоянной фазы, выходящая из точки $\chi_- - i\infty$, при $\chi_- > \pi \delta_0$ попадает в верхнюю бесконечность, сдвигаясь при этом направо на величину $\frac{3N+n-3}{2D} \pi$ (эта величина определяется из (5.5)). Линия постоянной фазы при $0 < \chi_- < \delta_0$ пересекает нижнюю мнимую полуось и впадают в один из нулей $F(z)$.

Докажем, что на полулисте $[0]$ лежит в точности одна точка перевала. Рассмотрим стилизованный контур (рис. 9), ограниченный справа линией постоянной фазы. Из последнего следует

$$\chi_+ = \chi_- + \frac{3N+n-3}{2D} \pi. \quad (5.8)$$

Как показано в §4, число точек перевала в рассматриваемой области равно

$$\frac{1}{2\pi} \Delta_r \arg dF = 1. \quad (5.9)$$

Каждая из угловых точек контура дает в $\Delta_r \arg dF$ вклад $\pi/2$, поэтому общий вклад от угловых точек равен 3π .

Очевидно, справедливы следующие соотношения:

$$1. \quad \Delta \arg dF \Big|_{x_- - i\infty}^{x_+ + i\infty} = 0,$$

$$2. \quad \Delta \arg dF \Big|_{-\infty}^{x_- + i\infty} + \Delta \arg dF \Big|_{x_+ + i\infty}^{i\infty} = -(x_+ - x_-)D = -(3N + n - 3) \frac{\pi}{2},$$

$$3. \quad \Delta \arg dF \Big|_{i\infty}^{i0} = (n - N) \frac{\pi}{2}; \quad \Delta \arg dF \Big|_{i0}^{-i0} = (2N - 1) \pi,$$

$$4. \quad \Delta \arg dF \Big|_{-i0}^{-i\infty} = \frac{\pi}{2}$$

Складывая I-4 и прибавляя вклад угловых точек, получим

$$\Delta_r \arg dF = 4\pi,$$

и согласно (5.9) число точек перевала равно единице.

Запишем соотношение баланса на полулисте $[0]$. Через верхнюю мнимую полуось с полулиста $[I]$ на полулист $[0]$ втекает поток мощностью $(N - n)\pi/2$, уходящий на верхнюю бесконечность. Из полюса в точке $[0]$ на верхнюю бесконечность устремляется поток мощностью $(2N - 1)\pi \delta_0$. Суммарный поток ограничен на верхней бесконечности линией постоянной фазы, выходящей из точки перевала, на которой фаза $F(z)$ равна $\delta_0 D \pi$. На верхней бесконечности этот поток заполняет интервал длины

$$\pi \rho_0 = \left[\frac{N-n}{2} + (2N-1)\delta_0 \right] \frac{\pi}{D}. \quad (5.10)$$

Поток, проходящий на полулисте $[-I]$ через нижнюю полуось, равен $\pi/2$. Этот поток складывается из потока мощности $(2N-1)(1-\delta_0)\pi$ из полюса и потока мощности $\delta_0 D \pi$ из нижней бесконечности.

Итак,

$$(2N-1)(1-\delta_0) + \delta_0 D = \frac{1}{2} \quad (5.11)$$

Из (5.11) следует, что при больших N δ_0 близко к 1. Вычисления показывают, что член $\delta_0 D \ll 1/2$. Из (5.11) следует, что

$$\rho_0 = \delta_0 + \frac{3N+n-3}{2D}. \quad (5.12)$$

На полулисте $[-I]$ для получения асимптотики воспользуемся соотношением

$$H_1^{(1)}(z) = e^{i\pi} [2H_1^{(2)}(z) + H_1^{(2)}(ze^{i\pi})] \quad (5.13)$$

(частный случай соотношений обхода (4.14)). Для $H_1^{(2)}(z)$ и $H_1^{(2)}(ze^{i\pi})$ годится обычная асимптотика (4.11), откуда получаем, что на полулисте $[-I]$

$$F(z) \simeq e^{iDz} (iz)^{-\frac{3N+n-3}{2}} \cdot [1 + 2e^{i(\frac{\pi}{2}-2z)}]. \quad (5.14)$$

Асимптотика нулей отсюда, очевидно, получается такая же, как и для $H_1^{(1)}$, что согласуется с тем, что сами нули просто те же. Для точек перевала получается

$$z^0 \simeq -k\pi + \frac{\pi}{4} + \frac{i}{2} \ln\left(\frac{4}{D} - 2\right), \quad (5.15)$$

что в случае $D=1$ совпадает с точками перевала $H_1^{(1)}$. Аргумент функции в точке перевала

$$\text{Arg } f(z^0) = D\left(-k\pi + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{3N+n-3}{2} \frac{\pi}{2} + 2\pi \ell_{\pm}. \quad (5.16)$$

Смысл ℓ_{\pm} и сами эти величины мы сейчас определим. Рассматривая достаточно далекую (большое K) точку перевала, мы можем быть уверены, что линии постоянной фазы из точки перевала, на которых модуль функции убывает, идут в соседние нули, а линии постоянной фазы из точки перевала, на которых модуль возрастает, идут в верхнюю и нижнюю бесконечности, в точки $x_{\pm} \pm i\infty$ (рис. 10). Обойдя замкнутый контур $z^0, x_{-} - i\infty, -i\infty, +i\infty, x_{+} + i\infty, z^0$, внутри которого находится K нулей и приращение аргумента по которому равно $2k\pi$, и разрезав для однозначности аргумента полулист $[-I]$ между соседними нулями по перевальным контурам, получим точное определение ℓ_{\pm} и $\ell_{+} - \ell_{-} = k$. Аргументы функции в $x_{\pm} \pm i\infty$, совпадающие, конечно, с верхним и нижним аргументами функции в точке перевала,

$$\text{Arg } f_{-} = Dx_{-},$$

$$\text{Arg } f_{+} = (D-2)x_{+} + (3N+n-2) \frac{\pi}{2}. \quad (5.17)$$

Отсюда

$$2\pi \ell_- \simeq D(x_- - x^0) - (3N+n-3) \frac{\pi}{4},$$

$$2\pi \ell_+ \simeq (D-2)(x_+ - x^0) - 2x^0 + (3N+n-1) \frac{\pi}{4}.$$

В частности, при $N=n=D=1$ получается $iH_1^{(1)}(z)$, поэтому в этом частном случае $\ell_- = 0$, $\ell_+ = \kappa$ (т.к. $x_- - x^0 = x_+ - x^0 = \pi/4$). На рис. II изображена полоска между линиями постоянной фазы, на которых модуль возрастает (уходя на бесконечность), из нашей точки перевала и соседней слева. Изображен также нуль функции и линии постоянной фазы, ведущие в него из точек перевала. Будем непрерывно менять D, N и n от фиксированных значений, при которых линии постоянной фазы из z^0 идут в $x_{\pm} \pm i\infty$, до $D=N=n=1$ (берем, например, поочередно $H_1^{(2)}(\mu z)$ в некоторой степени). Так как мы рассматриваем при этом достаточно далекую (больше κ) точку перевала, мы можем быть уверены, что во все время изменения линии постоянной фазы из этих 2 точек перевала идут на верхнюю и нижнюю бесконечность. Вся картина непрерывно изменяется, причем ограничивающие линии постоянной фазы не пересекают нулей функции (нулей $H_1^{(1)}$). Поэтому величины ℓ_{\pm} не меняются. В соответствии с этим, уже в самом общем случае $\ell_- = 0, \ell_+ = \kappa$.

Асимптотически, очевидно, ширина полосы в верхней и нижней бесконечности $\Delta x_+ \sim \Delta x_- \sim \pi$ (это следует из асимптотики функции вверху, внизу и в точке перевала). В соответствии с этим, нижний и верхний углы между линиями постоянной фазы, ведущими в точки перевала, в нуле функции, асимптотически равны соответственно $D\pi$ и $(2-D)\pi$. Наконец,

$$x_- - x^0 \simeq (3N+n-3) \cdot \frac{\pi}{4D},$$

$$x_+ - x^0 \simeq (3N+n-3) \cdot \frac{\pi}{4(2-D)}.$$

Все эти соотношения, конечно, имеют лишь асимптотический смысл, т.е. верны при большом K . При небольших K , вообще говоря, они верны лишь приближенно.

Рассмотрим первую точку перевала, из которой линия постоянной фазы уже попадает на нижнюю бесконечность. Попробуем с помощью асимптотики определить соответствующее K_{min} . - это, очевидно, будем номер нуля функции, в который попадает линия постоянной фазы из единственной точки перевала на полулисте $[0]$. Воспользовавшись этим, получаем, что если бы асимптотические равенства выполнялись точно, то было бы

$$\delta D\pi - \pi D < (3N+n-3)\frac{\pi}{4} + D\pi\left(\frac{1}{4} - k_{min}\right) \leq \delta D\pi,$$

откуда

$$(3N+n-3)\frac{1}{4D} + \frac{1}{4} - \delta \leq k_{min} < (3N+n-3)\frac{1}{4D} + \frac{1}{4} - \delta + 1$$

или

$$K_{min} = \left[\frac{3N+n-3}{4D} + \frac{1}{4} - \delta \right] \quad (5.18)$$

(здесь опять $[x]$ - целая часть x , $\{x\}$ - дробная часть x , $x = [x] + \{x\}$).

Соответственно получалось бы

$$x_- = \left(\delta + \left\{ \frac{3N+n-3}{4D} + \frac{1}{4} - \delta \right\} \right) \pi,$$

$$x_+ = \left(\frac{3N+n-3}{4(2-D)} + \frac{1}{4} - K_{min} \right) \pi. \quad (5.19)$$

Казалось бы, что в действительности K_{min} может довольно сильно отличаться от полученного с помощью асимптотических формул. Однако, во всех проделанных расчетах значение K_{min} совпадает с асимптотическим. Кроме того, аргумент функции на перевальном контуре получается с большой точностью таким, каким он должен быть по асимптотическим формулам. Это, как нам кажется, показывает, что асимптотические формулы довольно точны и для небольших K (начиная с K_{min} , определенного выше).

§ 6. Общий метод вычисления фазовых интегралов

В §3 были выведены формулы для вычисления фазового объема Ω_N в двух предельных нерелятивистском и релятивистском случаях. В настоящем параграфе рассмотрим общий случай, когда массы частиц лежат в широком диапазоне.

Интеграл (3.2) мы будем вычислять и исследовать методом перевала, или точнее говоря, некоторой модификацией этого метода. Мы воспользуемся тем, что подынтегральная функция

$$F(z) = (iz)^{2-N} i H_1^{(1)}(z) \prod [-\mu H_1^{(2)}(\mu z)] \quad (6.1)$$

аналитична с единственной особенностью в $z = 0$, причем нам известно поведение этой функции в окрестностях нуля и бесконечности.

Контур интегрирования C в интеграле (3.2) вначале определялся, как огибающий отрицательную полуось, но реально вычислять по такому контуру, как будет видно ниже, крайне невыгодно. Хорошо известно, что в качестве

контура интегрирования выгодней всего взять линию постоянной фазы, проходящую через точку перевала. Однако точно определить точку перевала невозможно (хотя бы из-за погрешности счета). Допустим, что в качестве начальной точки взята не точка перевала z_0 , а точка z_0' , близкая к ней (рис. 12). Через точку перевала проходят две линии постоянной фазы L_1 и L_2 . При удалении от точки z_0 вдоль линии L_1 , модуль функции $F(z)$ убывает, а вдоль линии L_2 , наоборот, возрастает. Через точку z_0' проходит одна линия постоянной фазы L' , причем $|F|$ на ней возрастает при движении от z_0' вдоль L_2 и убывает при движении от z_0' вдоль L_1 . Поэтому нельзя полностью линию L' принять за контур интегрирования, а нужно перейти в точке z_0' с линии L' на другую линию постоянной фазы, расположенную за перевальной линией L_2 , например L'' . Для этого перехода достаточно включить в контур интегрирования отрезок прямой $z_0' z_0''$, имеющей направление, близкое к направлению L_1 в точке перевала. В точке перевала

$$F(z) = e^{\ln F(z)} \equiv e^{\psi(z)} = F(z_0) e^{\left\langle \frac{(z-z_0)^2}{2!} \psi_2 + \dots \right\rangle}, \quad (6.2)$$

где $\psi_2(z_0)$ - вторая производная логарифма $F(z)$. Из (6.2) видно, что ψ_2 полностью определяет направление линии и слабо зависит от погрешности определения точки перевала. Таким образом, реальный контур интегрирования состоит из трех частей: отрезка $z_0' z_0''$ и участков линий L' и L'' , близких к L_1 .

В нашем случае точка перевала z_0 близка к мнимой оси и в качестве z_0' мы примем $z_0' = i \lambda n z_0$. Контур интегрирования имеет вид, показанный на рис. 13.

Вдоль правой ветви C_n подынтегральная функция убывает по экспоненте, а вдоль левой ветви C_n по степенному закону, что замедляет интегрирование. Кроме

того, левая ветвь линии постоянной фазы уходит не на бесконечность, а стремится к нулю подынтегральной функции, совпадающему с нулем функции $H_1^{(1)}(z)$. Далее приходится интегрировать по отрезкам между нулями подынтегральной функции, причем интегралы по этим отрезкам сильно интерферируют. Для устранения этих дефектов, мы вдоль левой ветви воспользуемся тождеством (5.13):

$$H_1^{(1)}(z) = -2 H_1^{(1)}(ze^{i\pi}) - H_1^{(2)}(ze^{i\pi})$$

и представим интеграл J_1 по левой ветви контура соответственно в виде суммы двух интегралов

$$J_1 = -J_{1L} - 2J_{2L}. \quad (6.4)$$

Асимптотика функций Ханкеля такова (4.10) - (4.11), что для интегралов J_{1L} и J_{2L} контуры интегрирования C_{1L} и C_{2L} можно соответственно загнуть вверх и вниз (рис.14). Если контуры C_{1L} и C_{2L} выбрать симметричными относительно мнимой оси, то используя симметрию функций Ханкеля (4.1-4.6) легко проверить, что

$$J_{1L} = -\bar{J}_{2L}. \quad (6.5)$$

Следовательно,

$$J = 2 \operatorname{Re} J_n - 2J_{2L}, \quad (6.6)$$

т.е. нужно считать вещественный интеграл J_{2L} и вещественную часть интеграла J_n . Согласно асимптотике функций Ханкеля (3.3 - 3.5) вдоль контура L_n при $|z| \rightarrow \infty$ подынтегральная функция ведет себя как

$$\sim z^{\frac{3}{2}(1-N)} e^{i z (1 - \sum \mu)} \quad (6.7)$$

и фазовый объем имеет в качестве характерной константы
- приведенный дефект масс

$$D = 1 - \sum \mu = \frac{M - \sum m}{M}; \quad 0 < D < 1. \quad (6.8)$$

Из выражения (6.7) следует также вид контура интегрирования при $|z| \gg 1$, в частности, получим, что контур имеет вертикальную асимптоту $Re z \sim D^{-1}$. Для упрощения счета интеграла полезно перейти к новой переменной

$$\xi = i D z. \quad (6.9)$$

Новый контур интегрирования получается поворотом на угол $\pi/2$ старого контура (рис. 14). Интегралы преобразуются к виду

$$J_n = \int_{C_+} F_+(\xi) d\xi; \quad J_{2\lambda} = \int_{C_0} F_0(\xi) d\xi. \quad (6.10)$$

Подынтегральные функции состоят из множителей, которые при вариации параметров D и N изменяются в широких пределах. При счете на машине это обстоятельство может вызвать переполнение и останов счета. Для избежания этого дефекта мы нормируем подынтегральную функцию в начальной точке на единицу и вместо (6.10) вычисляем

$$J_n = F_+(p) \int_{C_+} f_+(\xi) d\xi; \quad J_{2\lambda} = F_+(p) \int_{C_0} f_0(\xi) d\xi, \quad (6.11)$$

где

$$f_+ = \frac{F_+(\xi)}{F_+(\rho)}; \quad f_0 = \frac{F_0(\xi)}{F_0(\rho)}. \quad (6.12)$$

Теперь перейдем к подробному описанию программы счета фазового объема. Входными данными являются следующие величины:

$$\begin{aligned} N \geq 2 & - \text{ полное число частиц} \\ n \geq 0 & - \text{ число безмассовых частиц} \\ M = \sqrt{Q^2} & - \text{ масса системы} \\ m_j & - \text{ массы частиц } (j = 1, 2, \dots, N-n) \end{aligned} \quad (6.13)$$

Вместо масс частиц лучше пользоваться их отношением к дефекту масс $\bar{m}_j = \frac{m_j}{M - \sum m_j} = \frac{m_j}{D}$. Для однообразия формул удобно ввести параметр $\mu_0 = \frac{M}{M - \sum m} = \frac{1}{D}$ и индекс j изменять от 0 до $N-n$.

Изложение программы по вычислению фазового объема разобьем на ряд основных пунктов.

I. Контур интегрирования

Контурами интегрирования служат линия C_+ и действительная ось от точки $\xi = \rho$ до бесконечности (контур C_0). Контур C_+ определяется как линия постоянной фазы подынтегральной функции f_+ , вдоль которой модуль функции монотонно убывает от значения $|f_+(\rho)|$ до нуля при $|\xi| = \infty$. Следовательно, контур C_+ находим из условия

$$\text{Im } \psi(\xi) = \text{Im } \psi(\rho); \quad \psi(\rho) - \psi(\xi) = t \geq 0, \quad (6.14)$$

где $\psi(\xi) = \ln f_+(\xi)$. Из (3.29) следует, что

$$\frac{d\xi}{dt} = -\frac{1}{\psi_1(\xi)}, \quad (6.15)$$

т.е. контур C_+ получается при интегрировании уравнения (6.15).

2. Единая форма записи подынтегральных функций f_+ и f_0

Функции f_+ и f_0 различны, но тем не менее мы запишем их как одну функцию в виде

$$f(\xi) = \left(\frac{\rho}{\xi}\right)^{\frac{3N+n-3}{2}} \cdot e^{\alpha\xi-\rho} \cdot \prod a_j h_{1,j}^{(\ell)}(\omega_j); \quad \omega_j = \bar{\mu}_j \xi, \quad (6.16)$$

где

$$a_j = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{4}[\pi(3N+n-3)\bar{\mu}_j]}, & \text{если } \sqrt{\dots} < 1, \\ 1, & \text{если } \sqrt{\dots} \geq 1, \end{cases}$$

причем $\alpha = 1$ соответствует $f_+(\xi)$ и $\alpha = 1 - 2\bar{\mu}_0$ соответствует $f_0(\xi)$.

3. Вычисление функций $h_{1,j}^{(\ell)}$

В зависимости от величины модуля аргумента будем различать два случая: $|\omega| \geq 7$ и $|\omega| < 7$

$$h_{1,j}^{(\ell)} = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\omega_j} \rho_1 e^{\rho_2 \omega_j} K_1^{(\ell)}(\omega_j) & \text{для } |\omega_j| < 7, \\ K_1^{(\ell)}(\omega_j) & \text{для } |\omega_j| \geq 7. \end{cases} \quad (6.17)$$

Значения параметров ρ_1 , ρ_2 и ℓ при $j = 1, 2, \dots, N-n$ равны $\rho_1 = \rho_2 = 1$; $\ell = 2$, а при $j = 0$ они

зависят от контура интегрирования

$$\begin{aligned} \rho_1 = \rho_2 = 1; \quad \ell = 2 & \quad \text{для контура } C_0, \\ \rho_1 = i; \quad \rho_2 = -1; \quad \ell = 1 & \quad \text{для контура } C_+ \end{aligned} \quad (6.18)$$

4. Вычисление функций $K_0^{(\ell)}$ и $K_1^{(\ell)}$.

Пусть $|\omega| < 7$, тогда

$$K_0 = \sum_{m=0}^{\infty} \rho_m q_m = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\omega_j}{2}\right)^{2m}}{(m!)^2} \underbrace{\left[\ln \left| \frac{\omega_j}{2} \right| + C - \sum_{\ell=1}^m \frac{1}{\ell} + i \operatorname{Arg} \xi \right]}_{q_m} \quad (6.19)$$

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{1}{\omega_j} + \frac{\omega_j}{2} \sum_{m=0}^{\infty} r_m s_m = \\ &= \frac{1}{\omega_j} + \frac{\omega_j}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\omega_j}{2}\right)^{2m}}{(m!)^2 (m+1)} \underbrace{\left[\ln \left| \frac{\omega_j}{2} \right| + C - \frac{1}{2(m+1)} - \sum_{\ell=1}^m \frac{1}{\ell} + i \operatorname{Arg} \xi \right]}_{s_m} \end{aligned} \quad (6.20)$$

Здесь $C = 0,577215\dots$ - постоянная Эйлера,

$$\operatorname{Arg} \xi = \arg \xi - \frac{\pi}{2} (1 + \epsilon_j).$$

Число $\epsilon_j = 1$, когда нужно найти $K_0^{(1)}$ и $K_1^{(1)}$ ($\ell=1$) и $\epsilon_j = -1$, когда нужно найти $K_0^{(2)}$ и $K_1^{(2)}$ ($\ell=2$).

Коэффициенты ρ_m , q_m , r_m , s_m связаны соотношениями

$$\rho_m = \frac{\rho_m}{m+1}; \quad s_m = q_m - \frac{1}{2(m+1)}.$$

Рекуррентная формула для получения ρ_m и q_m имеет вид

$$\rho_m = \rho_{m-1} \cdot \frac{\left(\frac{\omega_j}{2}\right)^2}{m^2}; \quad \rho_0 = 1$$

$$q_m = q_{m-1} - \frac{1}{m}; \quad q_0 = \ln \left| \frac{\omega_j}{2} \right| + C + i \operatorname{Arg} \xi.$$

Счет продолжается, пока не станет $|\rho_m| < \varepsilon$ (ε - точность вычислений, см. п.9).

Для $|\omega_j| \geq 7$ имеем

$$K_0 = \sum_{m=0} A_{0,m}; \quad A_{0,0} = 1; \quad A_{0,m} = A_{0,m-1} \frac{(m - \frac{1}{2})^2}{2m \xi \varepsilon_j \bar{\mu}_j};$$

$$K_1 = \sum_{m=0} A_{1,m}; \quad A_{1,0} = 1; \quad A_{1,m} = A_{1,m-1} \frac{(m - \frac{1}{2})^2 - 1}{2m \xi \varepsilon_j \bar{\mu}_j}. \quad (6.21)$$

Счет идет до тех пор, пока не выполняется одно из условий

$$|A_{1,m}| < \varepsilon \quad \text{или} \quad |A_{1,m}| \geq |A_{1,m-1}|.$$

5. Вычисление функций $\psi_1(\xi)$ и $\psi_2(\xi)$.

Функции $\psi_1(\xi) = \frac{d}{d\xi} [\ln f(\xi)]$ и $\psi_2(\xi) = \frac{d}{d\xi} \psi_1 = \frac{d^2}{d\xi^2} [\ln f(\xi)]$ вычисляются по формулам

$$\psi_1(\xi) = \frac{1-2N}{\xi} + \sum_{j=0}^{N-n} \varepsilon_j \bar{\mu}_j \frac{K_{aj}^{(e)}}{K_{i,j}^{(e)}},$$

$$\psi_2(\xi) = \frac{2N-1}{\xi^2} + \sum_{j=0}^{N-n} \bar{\mu}_j^2 + \frac{1}{\xi} \sum_{j=0}^{N-n} \varepsilon_j \bar{\mu}_j \frac{K_{aj}^{(e)}}{K_{i,j}^{(e)}} - \sum_{j=0}^{N-n} [\varepsilon_j \bar{\mu}_j \frac{K_{aj}^{(e)}}{K_{i,j}^{(e)}}]^2, \quad (6.22)$$

причем, согласно (6.14), $\varepsilon_j \equiv -1$ для $j=1, 2, \dots, N-n$, а для $j=0$

$$\varepsilon_0 = \begin{cases} +1 & \text{для контура } C_+, \\ -1 & \text{для контура } C_0. \end{cases}$$

Преимуществом приведенных в пунктах 2 - 5 формул является то, что программирование функций $K_0^{(e)}$, $K_1^{(e)}$ и т.д. можно осуществить единым циклом.

При $j = 1$ все приведенные выше функции должны считаться с индексом $\ell = 2$, а при $j = 0$ с индексами $\ell = 2$ или $\ell = 1$ в зависимости от контура. Это осуществляется путем задания соответствующих для каждого случая констант α , ρ_1 , ρ_2 и ϵ_j .

6. Нахождение начальной точки интегрирования

Как указывалось в начале параграфа, в качестве начальной точки интегрирования принимается точка $\rho = \text{Re } \xi_0$, где ξ_0 - точка перевала функции f_+ . Точку перевала определяем из уравнения

$$\Psi_1(\xi) = \frac{d}{d\xi} \ln[f_+(\xi)] = 0$$

итерационным методом Ньютона

$$\xi_{k+1}^{(0)} = \xi_k^{(0)} - \Psi_1(\xi_k^{(0)}) \Psi_2^{-1}(\xi_k^{(0)}); \quad \xi^{(0)} = \frac{3N+n-3}{2}. \quad (6.23)$$

Нулевое приближение $\xi_0^{(0)}$ получается, считая, что для функции Ханкеля действует асимптотика (3.3-3.5). Приближения $\xi_0^{(0)}$ вычисляются до выполнения условия

$$|\Psi_1 \Psi_2^{-1}| \leq 16\epsilon.$$

Коэффициент 16 выбран из учета погрешности счета функций Ψ . Конечное значение $\xi_{k+1}^{(0)}$ определяет точку $\rho = \text{Re } \xi_{k+1}^{(0)}$.

7. Вычисление интегралов по контурам

Порядок вычисления интегралов по контурам следующий:

а) Первый шаг от точки $\xi = \rho$ в точку $\xi' = \rho + h_0$ делаем по направлению $\psi_2(\rho)$ в соответствии с замечаниями, приведенными в начале параграфа,

$$h_0 = \Delta_0 \left[\frac{\text{Im} \psi_2(\rho)}{2 \text{Re} \psi_2(\rho)} - \frac{1}{3} \left(\frac{\Delta_0}{\rho} \right)^2 \right] + i \Delta_0; \quad \Delta_0 = b \sqrt[6]{\varepsilon}. \quad (6.24)$$

Константа b , определяющая точность счета контура, была выбрана равной 4 (см. пункт 9).

б) Следующие шаги по контуру C_+ делаем согласно формулам (6.14-6.15). При счете по контуру C_+ шаги находим по формулам

$$\xi_{k+1} = \xi_k + h_k^+; \quad h_k^+ = \left(1 + \sqrt{1 - \frac{2\xi}{\psi_1} \cdot \frac{\psi_2}{\psi_1}} \right)^{-1} \left(-\frac{2\xi}{\psi_1} \right);$$

$$\xi = R + i [\arg f - (c + \eta)];$$

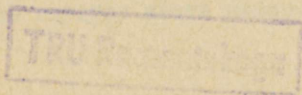
$$\arg f = \arg \text{tg} \frac{\text{Im} f}{\text{Re} f}; \quad c = \arg f(\rho);$$

$$R = (|\psi_1| + \frac{1}{2} |\psi_2| \cdot \Delta_k) \Delta_k; \quad \Delta_k = \Delta_0 \sqrt[8]{\frac{f(\rho)}{f(\xi)}};$$

$$\eta = \frac{3N+n-3}{2} \left(\frac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}} \right)^3 \left[\text{Im} \left(\frac{h_{k-1}}{\xi_k} \right) \left\{ 3 \left(\text{Re} \left(\frac{h_{k-1}}{\xi_k} \right) \right)^2 - \left(\text{Im} \left(\frac{h_{k-1}}{\xi_k} \right) \right)^2 \right\} \right]. \quad (6.25)$$

Интеграл считаем между двумя соседними точками ξ_k и ξ_{k+1}

$$\Delta J_{z, k+1} = \frac{h_{k+1}}{120} \cdot \left\{ f(\xi_{k+1}) [60 - 12 h_k \psi_1(\xi_{k+1}) + h_k^2 (\psi_1^2(\xi_{k+1}) + \psi_2(\xi_{k+1}))] + f(\xi_k) [60 + 12 h_k \psi_1(\xi_k) + h_k^2 (\psi_1^2(\xi_k) + \psi_2(\xi_k))] \right\}, \quad (6.26)$$



а затем суммируем

$$J^{(+)} = \sum \Delta J_{k, k+1}.$$

Счет по контуру C_+ продолжается до тех пор, пока не выполнится условие

$$|f| < a \varepsilon J_{\text{текущее}}^{(+)};$$

константа a , определяющая точность счета интеграла, была выбрана равной $1/128 = 2^{-7}$ (см. пункт 9).

в) по контуру C_0 интегрируем от точки $\xi = \vartheta$ с шагом $h_k^0 = \Delta_k / (2\bar{\mu}_0 - 1)$

по формулам (6.26) до выполнения условия

$$|f| < a \varepsilon J^{(+)}(2\bar{\mu}_0 - 1).$$

8. Вычисление фазового объема

После получения полного интеграла $J = 2J^{(+)} - 2J^{(0)}$ находим значение фазового объема

$$\Omega = K J, \tag{6.27}$$

$$\begin{aligned} \ln K = & \vartheta - 2 \ln \bar{\mu}_0 + \frac{3N-n-5}{2} \ln \pi - \\ & - \frac{3N+n-3}{2} \ln \frac{\vartheta}{2} + \sum_{j=0}^{N-n} b_j + (2N-4) \ln \left(m_0 - \sum_{j=1}^{N-n} m_j \right), \end{aligned}$$

где

$$b_j = \begin{cases} \ln \sqrt{\frac{4}{\pi(3N+n-3)}} & \text{при } a_j < 1, \\ \frac{1}{2} \ln \bar{\mu}_j & \text{при } a_j \geq 1. \end{cases} \quad (\text{см. п.2})$$

9. Точность счета

Точность счета фазового объема определяется точностью счета подынтегральной функции, т.е. произведения функций Бесселя, и точностью счета самого интеграла. Точность счета всех этих элементов такова, что окончательная точность с заметным превышением мажорируется величиной ε . Сравнение со случаем, когда фазовый интеграл аналитически вычисляется ($N = 2, n = 0, N = 3, n = 2$), полностью это подтверждает. Указанные случаи дают также возможность определить оптимальные значения для констант a и b .

Точность счета, достигаемая на основе выше изложенных формул вычислений функций Бесселя, не хуже, чем ε

$$\varepsilon \geq \varepsilon_{\min} = 10^{-6} \quad (6.28)$$

Увеличение ε заметно уменьшает время счета.

10. З а м е ч а н и е

Наибольшую трудность при составлении программ представляет то, что приходится обращаться с комплексными числами. Учитывая особенность современных ЭВМ, которые не позволяют оперировать с комплексными числами, необходимо вести отдельно вычисления действительных и мнимых частей. Наиболее целесообразным представляется задание комплексных чисел в алгебраической форме, т.к. тригонометрическая и показательная формы требуют вычисления стандартных функций \sin , \cos и \exp , что связано с большими затратами машинного времени. Поэтому в машине следует иметь набор стандартных программ, реали-

зующих комплексную арифметику, в которую следует поместить следующие операции

$$z = a + ib; \quad z_1 = a_1 + ib_1; \quad z_2 = a_2 + ib_2.$$

$$1) \quad z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + i(b_1 \pm b_2).$$

$$2) \quad z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(b_1 a_2 + a_1 b_2).$$

$$3) \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + i(b_1 a_2 - a_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2}, \quad \frac{1}{z} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}.$$

$$4) \quad |z| = \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$5) \quad \sqrt{z} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{|z| + a} + i(\operatorname{sgn} b) \sqrt{|z| - a} \right],$$

$$6) \quad \arg z = (\operatorname{sgn} b) \left[\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{a}{|z|} \right].$$

Фазовый объем можно оценить по порядку величины через массы частиц, а именно

$$\Omega_N \approx \Omega_{\text{пер.}}^{(0)}, \quad (6.29)$$

где

$$\begin{aligned} \ln \Omega_{\text{пер.}}^{(0)} = & \frac{3N+n-5}{2} \ln D + \frac{1}{2} \sum \ln \mu + \\ & + \rho + \frac{3N+n-4}{2} \ln \frac{2}{\rho} + \frac{3N-n-4}{2} \ln \pi + \\ & + (2N-4) \ln M + \ln |h_1^{(1)}(\rho m_0)| + \sum \ln |h_1^{(2)}(\rho \bar{\mu})|. \end{aligned} \quad (6.30)$$

Здесь $\rho = \operatorname{Re} \xi_0$, а n - число частиц с нулевой массой.

Описанный здесь в общих чертах счет фазового объема был запрограммирован В.Н.Петрухиным. Программа оказалась чрезвычайно быстродействующей, например, вычисление фазо-

вого объема 10 разных частиц с относительной точностью до 10^{-6} длится около секунды.

§ 7. Упрощенный метод вычисления фазовых интегралов

Обычно при вычислении фазовых объемов и различных распределений требуется точность порядка 2-3 значащих цифр. Это дает возможность сильно упростить схему вычислений. При этом на порядок или несколько больше ускоряется счет. Например, вычисление фазового объема 5-10 частиц требует меньше 0,1 сек.

Переходим к описанию схемы, являющейся по сути некоторым видоизменением метода перевала.

Вернемся к рис. 14. Вклад от интегрирования по C_0 крайне незначителен, и мы им пренебрегаем, поэтому

$$J \approx 2 \operatorname{Re} \int_{C_+} F_+(\rho) d\rho. \quad (7.1)$$

Интеграл в (7.1) вычисляем следующим образом. Вводим новую переменную t

$$\frac{F_+(\xi)}{F_+(\rho)} = \left[\left(\frac{\rho}{et} \right)^\rho \right] e^t. \quad (7.2)$$

Когда ξ , выходя из точки $\xi = \rho$, описывает контур C_+ , переменная t , выходя из точки $t = \rho$, опишет контур C'_+ , близкий к контуру C_+ . Это следует из асимптотики $F_+(\xi)$. Очевидно

$$\int_{C_+} F_+(\xi) d\xi = F_+(\rho) \left(\frac{e}{\rho} \right)^\rho \int \frac{e^t dt}{t^\rho} \cdot \frac{d\xi}{dt}. \quad (7.3)$$

Для множителя $d\xi/dt$ напомним формулу Тейлора

$$\frac{d\xi}{dt} = 1 + C_1\left(1 - \frac{\rho}{t}\right) + C_2\left(1 - \frac{\rho}{t}\right)^2 + C_3\left(1 - \frac{\rho}{t}\right)^3. \quad (7.3)$$

При этом мы для C_3 возьмем приближенное значение, а именно значение соответствующей производной в точке $t = \rho$. Коэффициенты C_1 , C_2 и C_3 выражаются через первые три логарифмические производные функции $F_+(\xi)$, которые были выше обозначены через ψ_1, ψ_2, ψ_3

$$C_1 = \rho \psi_1(\rho);$$

$$C_2 = \left(\psi_2 + \psi_1^2 - \frac{1}{\rho}\right) \frac{\rho^2}{2} + \rho \psi_1; \quad (7.4)$$

$$C_3 = \frac{\rho^3}{6} \left(\psi_3 - 2\psi_1^3 - \frac{2}{\rho^2}\right) + \rho^2 \left(1 + \frac{\rho \psi_1}{2}\right) \left(\psi_2 + \psi_1^2 - \frac{1}{\rho}\right) + \rho \psi_1.$$

Если бы точка ρ являлась точкой перевала, то $\psi_1(\rho) = 0$ и $C_1 = 0$. Реально точка ρ весьма близка к точке перевала. Кроме того, член C_1 не входит в окончательную формулу (7.7). При нашей точности функцию $H_\rho^{(n)}\left(\frac{\rho}{iD}\right)$ можно считать чисто вещественной. Отметим, что все функции $H_\rho^{(q)}\left(\frac{i\rho\mu}{D}\right)$ мы считаем по асимптотике при $\frac{\rho\mu}{D} \gg 4$, иначе рядами. Все эти формулы чисто вещественны.

Итак,

$$\int_{c_+} F_+ d\xi = F_+(\rho) \left(\frac{\rho}{\xi}\right)^\rho \int_{c_+} \frac{e^t dt}{t^\rho} \left[1 + C_1\left(1 - \frac{\rho}{t}\right) + \dots\right]. \quad (7.5)$$

Так как

$$\operatorname{Re} \frac{1}{i\pi} \int_{c_+} \frac{e^t dt}{t^e} = \Gamma^{-1}(e), \quad (7.6)$$

имеет место окончательная формула (см. (6.2I))

$$\ln \Omega \approx \ln \Omega_{np}^{(0)} - \frac{1}{12\rho} + \beta \left(1 + \frac{\beta}{2}\right); \quad (7.7)$$

$$\beta = \frac{C_2}{\rho+1} + \frac{4C_3}{(\rho+1)(\rho+2)}.$$

Первый член этой формулы совпадает с результатом, получаемым обычным методом перевала (см. (6.20)). Используя этот же метод, можно весьма просто выписать асимптотические разложения по входящим в него параметрам: приведенному дефекту D , числу частиц N (заметим, что $J_{2\lambda}$ экспоненциально убывает по сравнению с J_n с ростом N), величине ρ , массе системы M . Для сравнения укажем, что асимптотика Ω_N по N получена в [5] с использованием предельных теорем статистики. Все написанное выше, относится не только к Ω_N , но и к более общим интегралам, описанным в § 2.

II. РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

При обработке экспериментальных данных, особенно при исследовании рассеяния элементарных частиц, часто нужно сравнить распределение, полученное на опыте, с распределением, следующим из модели инвариантного фазового объема. Пик над фазовой кривой свидетельствует о наличии резонанса в рассматриваемой системе. Ввиду важности фазовых кривых необходимо иметь типовые программы для машинного счета. Здесь представлена небольшая часть формул, на основе которых написаны программы. Конечно, нельзя перечислить все теоретически возможные варианты реакций. Поэтому нам пришлось ограничиться наиболее часто встречающимися на

практике случаями.

§ I. Массовые распределения

Пусть в результате реакции между первичными частицами образовалась промежуточная система массы M , которая распадается на несколько частиц (рис. 15). Нас будет интересовать распределение по эффективной массе некоторой совокупности частиц. Для этой цели разобьем все частицы на два блока. К первому блоку отнесем частицы, по эффективной массе которых ищем распределение, а второму блоку - все остальные частицы. Обозначим массы и четырех-импульсы частиц первого и второго блоков через $m_{11}, p_{11}; \dots, m_{1n}, p_{1n}; m_{21}, p_{21}; \dots, m_{2k}, p_{2k}$. Эффективная масса первого блока m_1 задается соотношением

$$m_1^2 = (p_{11} + p_{12} + \dots + p_{1n})^2 \equiv (\sum_1 p)^2$$

Дифференциальное распределение согласно модели инвариантного фазового объема имеет вид

$$d\Omega = \frac{d^3 p_{11}}{E_{11}} \dots \frac{d^3 p_{1n}}{E_{1n}} \frac{d^3 p_{21}}{E_{21}} \dots \frac{d^3 p_{2k}}{E_{2k}} \cdot \delta^4(Q - \sum p), \quad (I.1)$$

где Q - полный 4-импульс системы, причем $Q^2 = M^2$. Чтобы получить распределение по массе m_1 , нам нужно проинтегрировать по всей совокупности импульсов частиц, так, чтобы остался только дифференциал dm_1 . Воспользуемся для этой цели соотношениями

$$\begin{aligned} \int \delta^{(4)}(p_1 - \sum_1 p) d^4 p_1 &= 1, & \int \delta^{(4)}(p_2 - \sum_2 p) d^4 p_2 &= 1. \\ \sum_1 p &\equiv \sum_{r=1}^{r=n} p_{1r}, & \sum_2 p &\equiv \sum_{r=1}^{r=k} p_{2r}. \end{aligned} \quad (I.2)$$

Подставляя (I.2) в (I.1), перегруппировывая переменные, получим

$$d\Omega = \delta^{(4)}(Q - p_1 - p_2) d^4 p_1 d^4 p_2 \left[\delta^{(4)}(p_1 - \sum_1 p) \frac{d^3 p_1}{E_1} \dots \right] \left[\delta^{(4)}(p_2 - \sum_2 p) \frac{d^3 p_2}{E_2} \right]. \quad (I.3)$$

Выражения, взятые в квадратные скобки, представляют собой фазовые объемы первого и второго блоков

$$d\Omega = \delta^4(Q - p_1 - p_2) d^4 p_1 d^4 p_2 \cdot \Omega(1) \cdot \Omega(2), \quad (I.4)$$

где

$$\Omega(1) = \Omega_n(m_1; m_{11}, \dots, m_{1n}),$$

$$\Omega(2) = \Omega_k(m_2; m_{21}, \dots, m_{2k}).$$

Дифференциал $d^4 p$ преобразуется к виду $d^4 p = m dm d^3 p E^{-1}$, так как $E^2 = m^2 + \vec{p}^2$ и, следовательно, $E dE = m dm$. Теперь выражение (I.4) перепишем как

$$d\Omega = \Omega(1) m_1 dm_1 \cdot \Omega(2) m_2 dm_2 \int \delta^{(4)}(Q - p_1 - p_2) \frac{d^3 p_1 d^3 p_2}{E_1 E_2}. \quad (I.5)$$

Отсюда получим

$$d\Omega = \Omega(1) m_1 dm_1 \cdot \Omega(2) m_2 dm_2 \cdot \Omega_2(M; m_1, m_2). \quad (I.6)$$

Заметим, что для практических целей распределение (I.6) нужно нормировать на единицу (или на число событий). Для этого выражение (I.6) следует разделить на полный фазовый объем всей системы $\Omega_{n+k}(M; m_{11}, \dots, m_{1n}, m_{21}, \dots, m_{2k})$. Так как $\Omega(M)$ считается в машине независимо от счета

выражения (I.6), то условие равенства полного интеграла от кривой распределения (I.6) и $\Omega(M)$

$$\int \Omega(1) m_1 dm_1 \cdot \int \Omega(2) m_2 dm_2 \cdot \Omega_2(M; m_1, m_2) = \Omega(M) \quad (I.7)$$

служит хорошей проверкой правильности счета. Этот критерий контроля вычислений применяется также ко всем последующим распределениям.

Возвратимся к распределению (I.6). Нам осталось указать область изменения масс m_1 и m_2 . Ясно, что эффективные массы блоков должны быть не меньше суммы масс покоя своих частиц: $m_1 \geq \sum_1 m$ и $m_2 \geq \sum_2 m$. с одной стороны, а с другой стороны в сумме не могут превышать начальную массу $m_1 + m_2 \leq M$. Областью, где выполнены перечисленные условия, является треугольник ABC (рис. I.6). Таким образом имеем

$$\frac{d\Omega}{dm_1} = m_1 \Omega(1) \cdot \int_{\sum_1 m}^{M-m_1} dm_2 \cdot m_2 \Omega(2) \Omega_2(M; m_1, m_2). \quad (I.8)$$

Типичная кривая распределения (I.8) показана на рис. I.7. Ее поведение на концах можно аппроксимировать степенной функцией. На нижнем пределе $m_1 \approx \sum_1 m$ она пропорциональна

$$\frac{d\Omega}{dm_1} \approx \Omega(1) \approx (m_1 - \sum_1 m)^{\frac{3N_1 + n_1 - 5}{2}}, \quad (I.9)$$

где N_1 - полное число частиц в блоке один, n_1 - число безмассовых частиц в блоке один. На верхней пределе $m_1 \approx M - \sum_2 m$ после простых вычислений получим, что

$$\frac{d\Omega}{dm_1} \approx \int_{\sum_2 m} dm_2 \cdot m_2 \Omega(2) \Omega_2(M; m, m_2) \approx \left(M - \sum_2 m - m_1\right)^{\frac{3N_2 + n_2 - 2}{2}}, \quad (\text{I.10})$$

где N_2, n_2 - числа частиц блока два, аналогичные блоку один.

Положение максимума кривой распределения можно определить, если представить ее в виде

$$\frac{d\Omega}{dm_1} \sim \left(m_1 - \sum_1 m\right)^{\frac{3N_1 + n_1 - 5}{2}} \left(M - \sum_2 m - m_1\right)^{\frac{3N_2 + n_2 - 2}{2}} \quad (\text{I.11})$$

Отсюда получим, что

$$m_1^c \approx \frac{(3N_2 + n_2 - 2) \sum_1 m + (3N_1 + n_1 - 5) \left(M - \sum_2 m\right)}{3(N_1 + N_2) + n_1 + n_2 - 7} \quad (\text{I.12})$$

Формулу (I.6) легко обобщить на случай, когда распадающиеся частицы нужно разбить на несколько блоков. Например, для трех блоков имеем

$$d\Omega = \Omega(1) m_1 dm_1 \cdot \Omega(2) m_2 dm_2 \cdot \Omega(3) m_3 dm_3 \cdot \Omega(M; m, m_2, m_3). \quad (\text{I.13})$$

Область изменения переменных масс m_1, m_2, m_3 лежит внутри пирамиды $m_1 + m_2 + m_3 \leq M$; $m_k \geq \sum_{\kappa} m$. Далее мы воспользуемся формулами типа (I.13). Они дают возможность сводить системы с большим числом частиц к системам с небольшим числом частиц. Естественно ввести понятие блок-диаграммы, на которой группы частиц заменяются одной эффективной частицей с переменной массой. На рисунках мы будем их изображать двойной стрелкой.

§ 2. Массовые распределения с ограничением на одну частицу

Часто условия опыта не позволяют полностью промерить всю область изменения кинематических переменных. В этом случае в фазовые кривые нужно вносить соответствующие поправки на эффективность измерения аппаратуры. В данном параграфе будут получены формулы распределений по эффективной массе, когда ограничение наложено на движение только одной частицы.

Блок-диаграмма в общем случае имеет вид (рис. 19). В блок m_1 входят частицы, по эффективной массе которых нужно искать распределение, а в блок m_2 - остальные частицы. Частица, которая неполностью регистрируется, обозначена через m_3 . Пусть вероятность регистрации частицы три с импульсом \vec{p}_3 задается некоторой функцией $\varphi(\vec{p}_3)$. Распределение по импульсам для диаграммы рис. 18 имеет вид

$$\frac{d^3 p_1 d^3 p_2 d^3 p_3}{E_1 E_2 E_3} \delta^{(4)}(Q - p_1 - p_2 - p_3) \varphi(\vec{p}_3) = d\Omega_3. \quad (2.1)$$

Рассмотрим два варианта, которые могут представиться при вычислении распределений по эффективной массе. В первом варианте требуется найти распределение по массе m_1 , а во втором варианте по массе $m_{13} = \sqrt{(p_1 + p_2)^2}$.

Наша задача состоит в том, чтобы проинтегрировать по импульсам p_1 и p_2 и сохранить дифференциал $d^3 p_3$.

Если нас интересует распределение по m_1 , то из (2.1) легко получить следующее выражение

$$d\Omega = \varphi \frac{d^3 p_3}{E_3} \int \delta^{(4)}(Q - p_3 - p_1 - p_2) \frac{d^3 p_1 d^3 p_2}{E_1 E_2} = \varphi \frac{d^3 p_3}{E_3} \Omega_2(\sqrt{(Q - p_3)^2}, m_1, m_2). \quad (2.2)$$

Используя (1.8), окончательно найдем

$$d\Omega = \Omega(1) m_1 dm_1 \int_{\sum_2 m}^{M-m_3-m_1} dm_2 \cdot m_2 \Omega(2) \quad (2.3)$$

$$\int \frac{d^3 p_3}{E_3} \varphi(p_3) \Omega_2(\sqrt{(Q-p_3)^2}, m_1, m_2).$$

Область интегрирования по импульсу \vec{p}_3 определяется условиями опыта и кинематикой 3-х-частичного распада

$$M \rightarrow m_1 + m_2 + m_3 \quad (\text{см. параграф 3}).$$

Второй вариант посложнее, так как необходимо выделить дифференциал dm_{13} и проинтегрировать по импульсам \vec{p}_1 и \vec{p}_2 . Выражение (2.1) релятивистски инвариантно, и поэтому его можно вычислять в любой системе координат, в частности удобно перейти в систему центра инерции. Фиксируем импульс \vec{p}_3 . По импульсу частицы 2 проинтегрируем за счет $\delta^{(3)}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3)$. Если записать дифференциал импульса первой частицы как $d\vec{p}_1 = p_1^2 dp_1 d\varphi d\cos\theta_{13}$, то интегрирование по p_1 выполняется с помощью $\delta(M - E_1 - E_2 - E_3)$. Дифференциал $d\cos\theta_{13}$ заменяется на дифференциал искомой эффективной массы, так как $m_{13}^2 = (p_1 + p_3)^2 = m_1^2 + m_3^2 + 2E_1 E_2 - 2|\vec{p}_1||\vec{p}_3|\cos\theta_{13}$, а от угла φ ничего не зависит. Итак имеем

$$d\Omega = m_{13} dm_{13} \frac{2\pi \varphi(\vec{p}_3) d\vec{p}_3}{E_3 \sqrt{(Q p_3)^2 - M^2 m_3^2}} \quad (2.4)$$

В каких пределах изменяются переменные? Эффективная масса m_{13} может изменяться от суммы масс покоя всех частиц блока I и 3: $(m_{13})_{\min} = m_3 + \sum m$ до своего максимального значения $(m_{13})_{\max} = M - \sum_2 m$. Окончательно распределение имеет вид

$$\frac{d\Omega}{m_{13} dm_{13}} = \int_{\sum_2 m}^{M-m_{13}} dm_1 \cdot m_2 \Omega(2) \int_{\sum_1 m}^{m_{13}-m_1} dm_1 \cdot m_1 \Omega_1(1) \int \frac{2\pi \psi(\vec{p}_3) d^3 p_3}{E_3 \sqrt{(G p_3)^2 - M^2 m_3^2}}. \quad (2.5)$$

Область изменения импульса p_3 определяется кинематической процессом $M \rightarrow m_{13} + m_2$; $m_{13} \rightarrow m_1 + m_3$ (см. §3).

§ 3. Кинематика распада

В предыдущем параграфе были рассмотрены простейшие распределения и уже при их выводе нужно было уметь определять области изменения кинематических переменных. Распады с участием промежуточных частиц-резонансов требуют детального знания кинематики многочастичных процессов. Чтобы при дальнейшем изложении материала не останавливаться на общих вопросах релятивистской кинематики, мы в этом параграфе приведем основные формулы. На примерах, представленных в следующих параграфах, укажем способы нахождения кинематических границ.

В последнее время релятивистскую кинематику рассматривают в пространстве скоростей Лобачевского-Эйнштейна [6]. Введем для одной частицы обозначения

$$p^2 = E^2 - \vec{p}^2 = E^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 = m^2. \quad (3.1)$$

Условимся системе координат приписывать индекс той частицы, которая в ней покоится. Пусть в системе M движется частица массы m со скоростью β . Тогда согласно теории относительности имеем ($c = 1$)

$$\vec{E} = \frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad \vec{p} = \frac{m\vec{\beta}}{\sqrt{1-\beta^2}} = E\vec{\beta}. \quad (3.2)$$

Удобно вместо скорости β перейти к другой величине, которую будем называть гиперболической скоростью или просто гиперскоростью χ :

$$\chi = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\beta}{1-\beta}; \quad \beta = \operatorname{th} \chi. \quad (3.3)$$

Соотношения (3.2) преобразуются к виду

$$E = m \operatorname{ch} \chi_{Mm}; \quad |\vec{p}| = m \operatorname{sh} \chi_{Mm}. \quad (3.4)$$

Мы величине χ_{Mm} приписали два индекса, так как она характеризует не только частицу m , но одновременно определяет относительную скорость между системой M и системой покоя частицы m .

Теперь выпишем формулы перехода из одной системы координат в другую систему - формулы преобразования Лоренца. Пусть система M движется относительно системы L со скоростью $\beta_{ML} = \operatorname{th} \chi_{ML}$. 4-импульс частицы в системе L $\rho = (E_L, \vec{p}_L)$ выражается через компоненты импульса в системе M $\rho = (E_M, \vec{p}_M)$ как

$$\bar{E}_L = (E_M + \beta_{ML} \vec{p}_M) (1 - \beta_{ML}^2)^{-1/2},$$

$$\vec{p}_L = \vec{p}_M + \beta_{ML} [E_M + \beta_{ML} \vec{p}_M (1 + \sqrt{1 - \beta_{ML}^2})^{-1} (1 - \beta_{ML}^2)^{-1/2}]. \quad (3.5)$$

Далее нас будет интересовать область изменения импульса \vec{p}_L , если $|\vec{p}_M| = \text{const}$. Обычно эту задачу решают с помощью построения эллипса импульсов. Направим ось x^0 вдоль скорости $\vec{\beta}_{ML}$, тогда из соотношений (3.5) видно, что компоненты импульса $\vec{p}_L = (p_{Lx}, p_{Ly}, p_{Lz})$ удовлетворяют уравнению эллипсоида

$$\left(\frac{p_{Lx} - \beta E_M / \sqrt{1 - \beta^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right)^2 + p_{Ly}^2 + p_{Lz}^2 = \vec{p}_M^2. \quad (3.6)$$

Центр эллипсоида смещен на расстояние $E_M \beta / \sqrt{1 - \beta^2} = E_M s \hbar \chi_{mM}$ относительно начала координат. Хотя решение (3.6) наглядно, но эллипсоид является сложной фигурой для построения, и особенно, для определения кинематических частиц. Поэтому мы воспользуемся решением, выражающимся через гиперскорость.

Отложим по осям координат гиперскорость частицы m в системах M и L : χ_{mM} и χ_{mL} (рис. 19). Согласно преобразованию Лоренца, значения гиперскорости χ_{mL} в граничных точках A и C равны

$$\begin{aligned} \chi_{mL}(A) &= \chi_{mM} + \chi_{ML}, \\ \chi_{mL}(C) &= |\chi_{mM} - \chi_{ML}|. \end{aligned} \quad (3.7)$$

На рисунке верхняя кривая относится к семейству точек A а нижняя к семейству точек C . Зададимся каким-нибудь конкретным значением гиперскорости χ_{mM}^0 . Пересечение вертикальной линии $\chi_{mM} = \chi_{mM}^0$ с граничными прямыми (точки A и C) определяют промежуток AB изменения гиперскорости частицы u_m в системе L : χ_{mL} . По формулам (3.7) можно найти гиперскорость в системе L только

для двух случаев, когда направление полета частицы совпадает с направлением движения системы координат M . В случае, когда эти направления не совпадают, формула имеет более сложный вид

$$\chi_{mL} = \epsilon_{\eta} \frac{\operatorname{ch} \chi_{mM} \pm \sqrt{\operatorname{sh}^2 \chi_{mM} - \sin^2 \alpha_L \cdot \operatorname{sh} \chi_{mL}}}{\operatorname{ch} \chi_{LM} - \cos \alpha_L \cdot \operatorname{sh} \chi_{LM}}, \quad (3.8)$$

где α_L - угол между направлением частицы и системы M в системе L . Для вывода формулы достаточно расписать скалярное произведение между 4-скоростями частицы u_m и системы M , u_M в системах M и L .

$$\begin{aligned} (u_M, u_m) &= \operatorname{ch} \chi_{mM} = \\ &= \operatorname{ch} \chi_{mL} \cdot \operatorname{ch} \chi_{LM} - \cos \alpha_L \cdot \operatorname{sh} \chi_{mL} \cdot \operatorname{sh} \chi_{LM}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

При обращении к формуле (3.8) нужно проявлять осторожность при выборе знака перед корнем. Если скорость частицы больше относительной скорости систем M и L , т.е. $\chi_{mM} > \chi_{LM}$, то угол α_L может изменяться от 0 до π и в формуле (3.8) перед корнем выбирается только один знак плюс. В случае $\chi_{mM} < \chi_{LM}$ угол α_L между направлениями частицы и системы M не может превышать значения α_L^0 , которое определим из условия обращения в нуль корня

$$\sin \alpha_L^0 = \frac{\operatorname{sh} \chi_{mM}}{\operatorname{sh} \chi_{LM}}$$

Меняя α_L в пределах $0 \leq \alpha_L \leq \alpha_L^0$, в формуле (3.8) следует сохранить два знака перед корнем.

§ 4. Массовые распределения в реакциях с одним резонансом

Общий вид блок диаграммы с одним резонансом показан на рис. 20. Система массы M распадается на резонанс массы Δ и частицы 3 и 4. Резонанс, в свою очередь, распадается на частицы 1 и 2. Напомним, что все частицы на блок-диаграмме понимаются условно, так как они в действительности могут заменять целые группы частиц. Дифференциальное распределение согласно модели инвариантного фазового объема, соответствующее диаграмме рис. 20, имеет вид

$$d\Omega = \frac{dp_1 dp_2 dp_3 dp_4}{E_1 E_2 E_3 E_4} \int^{(4)} (Q - \sum p) 2\delta[(p_1 + p_2)^2 - \Delta^2]. \quad (4.1)$$

Существует несколько способов расчета реакций, идущих через резонанс. Мы ограничимся таким способом, при котором пренебрегается шириной резонанса. В этом случае наличие резонанса учитывается δ -функцией. Множитель два перед ней введен для нормировки. Однако если резонанс имеет заметную ширину или определенную форму, то для их учета следует распределение (4.1) умножить на необходимую весовую функцию и проинтегрировать по всему спектру эффективной массы Δ .

Блок диаграмма рис. 20 содержит в конце четыре частицы. Однако без потери общности она приводится к диаграмме с тремя частицами в конце. Представим распад системы M следующим образом. Сначала система M распадается на частицу 4 и систему с переменной массой m , образованную частицей три и резонансом Δ , который затем тоже распадается. Таким образом, имеем

$$M \rightarrow 4 + m, \quad (4.2)$$

$$m \rightarrow \Delta + 3 \rightarrow 1 + 2 + 3.$$

Произведем соответствующие (4.2) преобразования над дифференциальным распределением (4.1). Обозначим через q сумму импульсов частиц 1, 2, 3. Так как $\int d^4q \delta^{(4)}(q - p_1 - p_2 - p_3) = 1$, то

$$d\Omega_4 = \frac{d^4p_4}{E_4} d^4q \delta^{(4)}(q + p_4 - Q) \frac{d^3p_1 d^3p_2 d^3p_3}{E_1 E_2 E_3} \cdot \delta^{(4)}(q - p_1 - p_2 - p_3) 2 \delta[(p_1 + p_2)^2 - \Delta^2]. \quad (4.3)$$

Запишем дифференциал d^4q как $m dm d^3q E^{-1}$ и подставим в (4.3)

$$d\Omega_4 = m dm \frac{d^3\vec{p}_4 d^3q}{E_4 E} \delta^{(4)}(Q - p_4 - q) \frac{d^3p_1 d^3p_2 d^3p_3}{E_1 E_2 E_3} \cdot \delta^{(4)}(q - \sum p) 2 \delta[(p_1 + p_2)^2 - \Delta^2]. \quad (4.4)$$

Интеграл по импульсам p_4 и q привелся к двухчастичному фазовому объему

$$\int \frac{d^3p_4 dq}{E_4 E} \delta^{(4)}(Q - p_4 - q) = \Omega_2(M; m_4, m). \quad (4.5)$$

Масса системы $(3 + \Delta)$ m может изменяться в пределах $(m_3 + \Delta) \leq m \leq M - m_4$. Итак, исходное распределение (4.1) преобразуется к виду

$$d\Omega_4 = \int_{m_3 + \Delta}^{M - m_4} dm \cdot m \Omega_2(M; m_4, m) d\Omega_3, \quad (4.6)$$

где

$$d\Omega_3 = \frac{dp_1 dp_2 dp_3}{E_1 E_2 E_3} \delta^{(4)}(q - p_1 - p_2 - p_3) 2\delta[(p_1 + p_2)^2 - \Delta^2], \quad (4.7)$$

$$q^2 = m^2.$$

Блок-диаграмма, соответствующая распределению (4.7), изображена на рис. 21.

В параграфе два мы указали, что порой условия эксперимента не позволяют регистрировать сразу все частицы. Предположим, что какая-нибудь одна из трех частиц, изображенных на блок-диаграмме рис. 21, полностью не регистрируется. Вероятность ее обнаружения определяется некоторой функцией $\varphi(\vec{p})$, явный вид которой зависит от конкретных условий опыта. В нашем случае в лабораторной системе координат она совпадала со ступенчатой функцией

$$\varphi(\vec{p}) = \begin{cases} 1, & |\vec{p}| \leq p_0 = m \operatorname{sh} \chi_{0L}, \\ 0, & |\vec{p}| > p_0, \end{cases} \quad (4.8)$$

т.е. частица с импульсом более, чем p_0 , не регистрировалась.

Для блок-диаграммы рис. 21 при неполной регистрации одной частицы имеются три типа распределений по эффективной массе. Все три типа изображены на рис. 22. Частица, не регистрируемая полностью, показана пунктирной стрелкой, а частицы, по массе которых ищется распределение, соединены стрелкой. Рассмотрим подробно эти варианты.

Начнем со случая, когда частица три комбинируется с частицей два, а частица один регистрируется с вероятностью $\varphi(\vec{p}_1)$. По этой причине распределение (4.7) следует умножить на функцию $\varphi(\vec{p}_1)$. Квадрат эффективной массы частиц два и три равен $m_{23}^2 = (p_2 + p_3)^2 = (q - p_1)^2$. Очевидно, что

он зависит от импульса первой частицы и поэтому выражение (4.7) следует в первую очередь проинтегрировать по импульсам второй и третьей частиц. Удобно это сделать в системе центра инерции m . Интегрирование по импульсу \vec{p}_3 выполняется за счет $\delta^{(3)}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3)$:

$$\int \frac{d^3 p_3}{E_3} \delta^{(3)}(p_1 + p_2 + p_3) = \vec{E}_3^{-1}; \quad (4.9)$$

$$E_3^2 = m_3^2 + \vec{p}_3^2 = m_3^2 + \vec{p}_1^2 + \vec{p}_2^2 + 2\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2.$$

Следовательно,

$$d\Omega_3 = \frac{dp_1 dp_2}{E_1 E_2} \frac{\delta(M - E_1 - E_2 - E_3)}{E_3} 2\delta[(Q - p_1)^2 - \Delta^2] \varphi. \quad (4.10)$$

При интегрировании по импульсу \vec{p}_2 направим ось z системы координат вдоль импульса \vec{p}_1 . Так как от азимутального угла импульса \vec{p}_2 подынтегральная функция не зависит, то $d^3 p_2 = 2\pi |\vec{p}_2| d|\vec{p}_2| \cdot d\cos\theta_{12}$. Интегрирование по абсолютной величине импульса $|\vec{p}_2|$ и его углу с импульсом \vec{p}_1 θ_{12} выполняется с помощью δ -функций

$$\int d\cos\theta_{12} \cdot \delta(m - E_1 - E_2 - \sqrt{m_3^2 + (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2}) = \frac{E_3}{|\vec{p}_1| |\vec{p}_2|}, \quad (4.11)$$

$$\int \frac{p_2^2 dp_2}{E_2} 2\delta[(E_1 + E_2)^2 - (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2 - \dots] = \frac{|\vec{p}_2|}{m}.$$

В последнем интеграле мы преобразовали выражение под знаком δ -функции согласно закону сохранения полной энергии: $m = E_1 + E_2 + E_3$, откуда нашли, что $(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2 = (m - E_1 - E_2)^2 - m_3^2$. Подставим (4.3) в (4.2):

$$d\Omega_3 = \frac{d\vec{p}_1 \cdot 2\pi\varphi}{E_1 \cdot m \cdot |\vec{p}_1|} = \frac{2\pi\varphi(\vec{p}_2)}{\sqrt{(q p_1)^2 - m^2 m_1^2}} \frac{d\vec{p}_1}{E_1}, \quad (4.12)$$

так как релятивистски инвариантная запись выражения $m|\vec{p}_1| = \sqrt{(q p_1)^2 - m^2 m_1^2}$.

Следующие этапы вычислений зависят от явного вида функции $\varphi(\vec{p}_1)$. Для первого знакомства с кинематикой распада рассмотрим сначала "чистый" фазовый объем, т.е. положим $\varphi(p_1) = 1$. В этом случае $d^3p_1 = 4\pi|\vec{p}_1|E_1 dE_1$, и так как $m_{23}^2 = (q - p_1)^2 = m^2 + m_1^2 - 2mE_1$ (отсюда $m dE_1 = -m_{23} dm_{23}$), то окончательно получим

$$d\Omega_3 = \frac{8\pi^2}{m^2} m_{23} dm_{23}. \quad (4.13)$$

В каких пределах изменяется масса m_{23} ? Распад системы m представим идущим в два этапа. Сначала m распадается на частицу 3 и резонанс Δ , что схематично изображено на рис. 23. Расстояния $3m$ и Δm равны соответственно гиперболическим скоростям частиц χ_{3m} и $\chi_{\Delta m}$. Их величину легко определить из закона сохранения 4-импульса системы $q = p_3 + p_\Delta$:

$$(q - p_3)^2 = p_\Delta^2 = \Delta^2 = m^2 + m_3^2 - 2m m_3 \operatorname{ch} \chi_{3m},$$

$$(q - p_\Delta)^2 = p_3^2 = m_3^2 = m^2 + \Delta^2 - 2m\Delta \operatorname{ch} \chi_{\Delta m}. \quad (4.15)$$

Второй этап - распад резонанса Δ на частицы 1 и 2. Согласно закону сохранения $\Delta = p_1 + p_2$, снова имеем

$$\operatorname{ch} \chi_{1\Delta} = \frac{\Delta^2 + m_1^2 - m_2^2}{2 m_1 \Delta}, \quad \operatorname{ch} \chi_{2\Delta} = \frac{\Delta^2 + m_2^2 - m_1^2}{2 m_2 \Delta}. \quad (4.16)$$

В системе покоя Δ частица I может лететь в любом направлении, но с одинаковой гиперскоростью $\chi_{1\Delta}$. На рис. 23 этому факту отвечает пунктирный круг радиуса $\chi_{1\Delta}$. С точки зрения наблюдателя системы центра инерции m , круг деформируется в фигуру, определяемую уравнением (3.8). Она изображена на рис. 23 сплошной линией. Рис. 23 можно было бы назвать диаграммой гиперболической скорости. Для определения границ по эффективной массе m_{23} воспользуемся соотношением $m_{23}^2 = (q-p_1)^2 = m^2 + m_1^2 - 2 m m_1 \operatorname{ch} \chi_{1m}$. Пределы изменения гиперскорости найдем из графика 24, построенного по типу рис. 19. Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} (m_{23}^2)_{\max} &= m^2 + m_1^2 - 2 m m_1 \operatorname{ch} (\chi_{1m})_{\min}, \\ (\chi_{1m})_{\min} &= |\chi_{m\Delta} - \chi_{\Delta 1}|; \\ (m_{23}^2)_{\min} &= m^2 + m_1^2 - 2 m m_1 \operatorname{ch} (\chi_{1m})_{\max}, \\ (\chi_{1m})_{\max} &= \chi_{m\Delta} + \chi_{\Delta 1}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Вернемся к выражению (4.12). Его интегрирование осложняется $\varphi(\vec{p}_1)$. Допустим в лабораторной системе координат L она имеет вид (4.8). Интегрировать (4.12) по угловым переменным можно в любой системе. В лабораторной системе просто выглядит область регистрации (круг) и сложно область, разрешенная кинематикой, а в системе центра инерции m картина становится противоположной. Остановим свой выбор на системе центра инерции m . На рис. 25 изображена кинематика в переменных χ . На правой стороне показано преобразование гиперскорости частицы один из системы Δ в систему m , а на левой стороне перевод области регистрации с максимальной гиперско-

ростью χ_{0L} в лабораторной системе в систему центра инерции m . По оси ординат отложена гиперскорость частицы один в системе m χ_{1m} . Перекрытие области регистрации

$$|\chi_{0L} - \chi_{Lm}| \leq \chi_{1m} \leq |\chi_{0L} + \chi_{Lm}|$$

с кинематически разрешенной областью

$$|\chi_{1\Delta} - \chi_{\Delta m}| \leq \chi_{1m} \leq \chi_{1\Delta} + \chi_{\Delta m}$$

определяет область интегрирования в формуле (4.12). В зависимости от величины масс частиц взаимных пересечений областей кинематики и регистрации может представиться несколько вариантов. Все варианты мы не станем обсуждать, а дадим вывод формул для варианта, указанного на рис. 25, т.е. когда область регистрации целиком находится внутри кинематической области. В системе m дифференциал d^3p_1 запишем как $2\pi dz |\vec{p}_1| E_1 dE_1$. Так как $m_{23}^2 = m^2 + m_1^2 - 2mE_1$, то (4.12) преобразуем к виду

$$d\Omega_3 = 4\pi^2(1-z_0)m_{23} dm_{23} \cdot m^{-2}. \quad (4.19)$$

Граничное значение косинуса угла z_0 находим из (3.9)

$$1 - z_0 = \frac{\text{ch}(\chi_{Lm} + \chi_{m1}) - \text{ch} \chi_{0L}}{\text{sh} \chi_{Lm} \cdot \text{sh} \chi_{1m}}. \quad (4.20)$$

Границы изменения массы m_{23} просто выражаются через гиперскорости

$$m_{23}^2 = m^2 + m_1^2 - 2 m m_1 \operatorname{ch} \chi_{1m}, \quad (4.21)$$

$$|\chi_{0L} - \chi_{mL}| \leq \chi_{1m} \leq \chi_{0L} + \chi_{Lm}.$$

Переходим во второму случаю, когда частица три комбинируется с частицей один. Эффективная масса комбинации третьей с первой частиц связана с m_{23} согласно законам сохранения $q = p_1 + p_2 + p_3$ и условию $(p_1 + p_2)^2 = \Delta^2$ соотношением

$$m_{31}^2 = m^2 + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 - \Delta^2 - m_{23}^2.$$

Таким образом распределение по m_{13} выражается через распределение (4.12).

Рассмотрим, наконец, третий случай. Допустим, что частица три регистрируется с вероятностью $\varphi(\vec{p}_3)$, определяемой (4.2). Найдем распределения по эффективной массе третьей и первой частиц. Дифференциальное распределение

$$d\Omega_3 = \frac{dp_1 dp_2 dp_3}{E_1 E_2 E_3} \delta^{(4)}(q - p_1 - p_2 - p_3) 2 \delta[(p_1 + p_2)^2 - \Delta^2] \quad (4.7)$$

удобно интегрировать в системе центра инерции m . Интегрирование по импульсу первой частицы выполняется за счет $\delta^3(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3)$. Переходя к интегрированию по импульсу второй частицы, зафиксируем в пространстве направление импульса третьей частицы и направим вдоль него одну из координатных осей. Тогда имеем

$$d\Omega_3 = \frac{dp_3}{E_3} 2 \delta(m^2 + m_3^2 - \Delta^2 - 2m E_3) \cdot \frac{\delta(m - E_1 - E_2 - E_3)}{E_1} \frac{2\pi |\vec{p}_2| E_2 dE_2 d\cos\theta_{23}}{E_2} \quad (4.22)$$

Интегрирование по косинусу угла θ_{23} произведем с помощью энергетической $\delta(m-E_1-E_2-E_3)$ -функции. Так как $\partial E_1 / \partial \cos \theta_{23} = p_1 p_2 E_1^{-1}$ и $m_{13}^2 = (q-p_2)^2 = m^2 + m_2^2 - 2mE_2$, то

$$d\Omega_3 = \frac{d^3 p_3}{|\vec{p}_3| E_3} 4\pi \delta(m^2 + m_3^2 - \Delta^2 - 2mE_3) \frac{m_{13} dm_{13}}{m}. \quad (4.23)$$

Направление вектора \vec{p}_3 в системе центра инерции законами сохранения не выделено и поэтому ограничено только областью регистрации. Проинтегрировав по импульсу частицы три, получим

$$d\Omega_3 = 4\pi^2 m_{13} dm_{13} (1 - \cos \theta_0) m^{-2}.$$

Предельный угол θ_0 , который составляет импульс третьей частицы с направлением движения системы координат, в соответствии с (3.8) равен

$$1 - \cos \theta_0 = 2 \frac{\operatorname{ch} \chi_{0L} - \operatorname{ch} (\chi'_{3m} - \chi_{mL})}{\operatorname{ch} (\chi_{3m} + \chi_{mL}) - \operatorname{ch} (\chi_{3m} - \chi_{mL})}.$$

§ 5. Массовые распределения в реакциях с двумя резонансами

Мы не будем рассматривать все типы блок-диаграммы с двумя резонансами, а остановимся только на блок-диаграмме рис. 26. Пусть нужно найти распределение по массе второй и третьей частиц $m_{23}^2 = (p_2 + p_3)^2$ в распаде

$$M \rightarrow \Delta_a + \Delta_b \rightarrow 1 + 2 + 3 + 4. \quad (5.1)$$

Вычисление распределения произведем в два этапа. Сначала рассмотрим трехчастичный блок

$$M \rightarrow \Delta_a + \Delta_b \rightarrow 3 + 4 + \Delta_b. \quad (5.2)$$

Преобразуем дифференциальную плотность вероятности к виду

$$\begin{aligned} d\Omega_4 &= \frac{d^3 p_1 d^3 p_2 d^3 p_3 d^3 p_4}{E_1 E_2 E_3 E_4} \delta^4(Q - \Sigma p) 2\delta[(p_1 + p_2)^2 - \Delta_b^2] 2\delta[(p_3 + p_4)^2 - \Delta_a^2] = \\ &= \frac{d^3 p_1 d^3 p_2}{E_1 E_2} \delta^4(p_b - p_1 - p_2) d^4 p_b \frac{d^3 p_3 d^3 p_4}{E_3 E_4}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$\cdot \delta^{(4)}(Q - p_b - p_3 - p_4) 2\delta[(p_1 + p_2)^2 - \Delta_b^2] 2\delta[(p_3 + p_4)^2 - \Delta_a^2],$$

так как $d^4 p_b = m_b dm_b d^3 p_b E_b^{-1}$, то $d^4 p_b 2\delta[(p_1 + p_2)^2 - \Delta_b^2] = d^3 p_b E_b^{-1}$.

Отсюда находим

$$d\Omega_4 = \frac{d^3 p_1 d^3 p_2}{E_1 E_2} \delta^4(p_b - p_1 - p_2) \frac{d^3 p_b d^3 p_3 d^3 p_4}{E_b E_3 E_4} \delta^{(4)}(Q - p_b - p_3 - p_4) 2\delta[(p_3 + p_4)^2 - \Delta_a^2]. \quad (5.4)$$

Интегрирование по импульсам p_b, p_3, p_4 аналогично интегрированию трехчастичного фазового объема с одной фиксированной массой. Следовательно,

$$d\Omega_4 = \frac{d^3 p_1 d^3 p_2}{E_1 E_2} \delta^4(p_b - p_1 - p_2) \frac{8\pi^2 m_{3b} dm_{3b}}{M^2}, \quad (5.5)$$

$$m_{3b}^2 = (p_3 + p_b)^2.$$

Удобно от переменной массы m_{3b} перейти к углу χ_{3b}

$$m_{3b}^2 = m_3^2 + \Delta_b^2 + 2m_3 \Delta_b \operatorname{ch} \chi_{3b}$$

$$m_{3b} dm_{3b} = m_3 \Delta_b \operatorname{sh} \chi_{3b} d\chi_{3b}. \quad (5.6)$$

Пределы изменения угла χ_{3b} следующие:

$$|\chi_{3a} - \chi_{ab}| \leq \chi_{3b} \leq \chi_{3a} + \chi_{ab}. \quad (5.7)$$

Продолжим вычисления распределения (5.5) в системе покоя частицы (b), что возможно в силу релятивистской инвариантности выражения (5.5). Все, что осталось от системы покоя (a) - направление вылета частицы три и интервала изменения ее гиперскорости (5.7). Выберем в системе (b) ось z вдоль направления импульса три. Распад резонанса $I+2$ будет характеризоваться только углом вылета какой-либо распадной частицы, например, два, относительно частицы три, так как величина импульсов полностью определена массами. Угол между частицами два и три однозначно связан с эффективной массой

$$m_{23}^2 = (p_2 + p_3)^2 = m_2^2 + m_3^2 + 2m_2 m_3 \operatorname{ch} \chi_{23},$$

$$\operatorname{ch} \chi_{23} = \operatorname{ch} \chi_{3b} \cdot \operatorname{ch} \chi_{2b} - \cos \theta_{23} \cdot \operatorname{sh} \chi_{3b} \cdot \operatorname{sh} \chi_{2b}. \quad (5.8)$$

Таким образом,

$$\frac{dp_1 dp_2}{E_1 E_2} \delta^{(4)}(p_b - p_1 - p_2) = \frac{dp_2}{E_1 E_2} \delta(\Delta_b - E_1 - E_2) = \frac{2\pi m_{32} dm_{32}}{\Delta_b m_3 \operatorname{sh} \chi_{3b}}. \quad (5.9)$$

Комбинируя выражения (5.5) и (5.9), находим

$$d\Omega_4 = \frac{16\pi^2}{M^2} m_{23} dm_{23} d\chi_{3b}. \quad (5.10)$$

Область изменения переменных в (5.10) особенно просто выглядит в плоскости гиперскоростей χ_{3b} и χ_{32} . На рис. 27 она заштрихована. Интеграл в (5.10) по гиперскорости χ_{3b} при фиксированной гиперскорости χ_{32} при фиксированной гиперскорости χ_{32} ($m_{23} = \text{const.}$) равен

$$\int d\chi_{3b} = \min[\chi_{3a} + \chi_{ab}, \chi_{32} + \chi_{2b}] - \max[|\chi_{3a} - \chi_{ab}|, |\chi_{32} - \chi_{2b}|]. \quad (5.11)$$

Окончательно распределение по эффективной массе второй и третьей частиц m_{23} для блок-диаграммы рис. 26 имеет вид

$$\frac{d\Omega}{m_{23} dm_{32}} = \frac{16\pi^2}{M^2} \langle 5.11 \rangle. \quad (5.12)$$

Л и т е р а т у р а

1. Л.Б.Окунь. Слабое взаимодействие элементарных частиц. Физматгиз (1963).
2. В.А.Колкунов. ЖЭТФ 43, 1448 (1962). ЯФ 3, 565 (1965).
3. Г.Н.Ватсон. Теория бесселевых функций. ИИЛ (1949).
4. И.С.Градштейн, И.М.Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, ФМ (1963).
5. F.Lurcat, P.Mazur. Nuovo Cim. 31, 140 (1964).
6. Н.А.Черников. Научные доклады высшей школы, 2, 158 (1958);
Я.А.Сморodinский, ЖЭТФ 43, 2217 (1962).

Рисунки

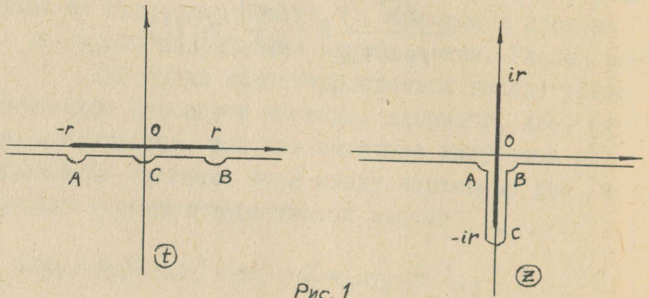


Рис. 1

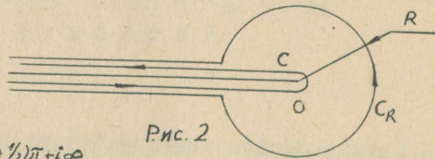


Рис. 2

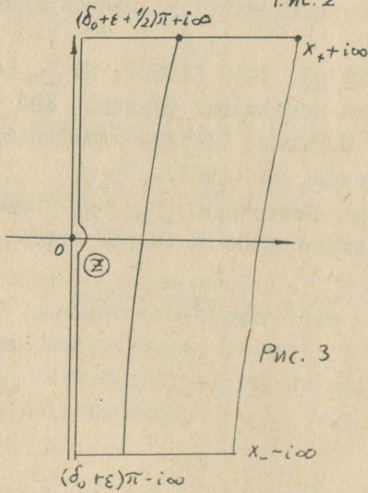


Рис. 3

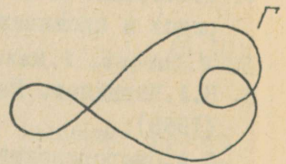


Рис. 4

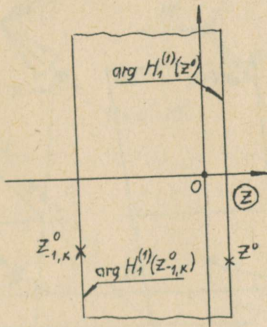


Рис. 5

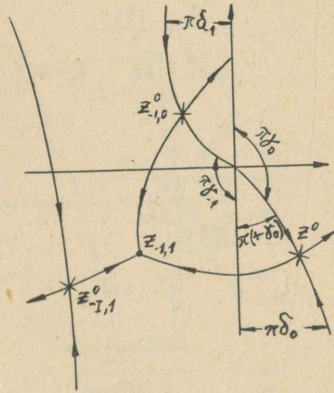


Рис. 6

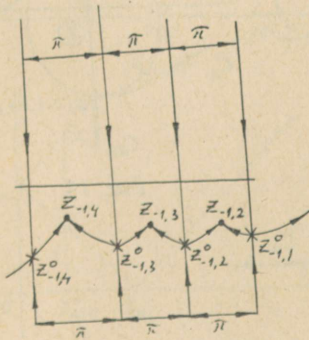


Рис. 7

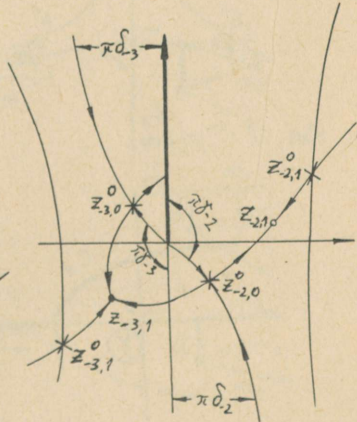


Рис. 8

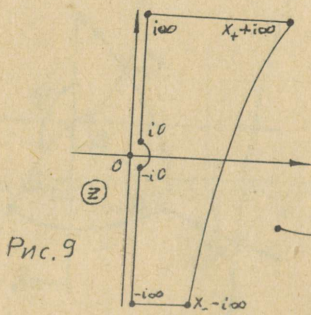


Рис. 9

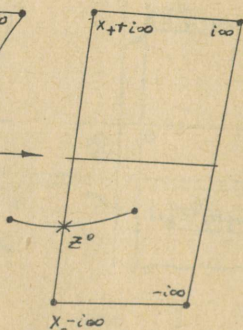


Рис. 10

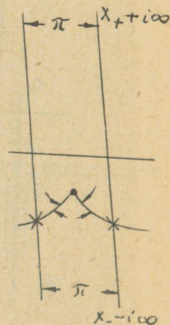


Рис. 11

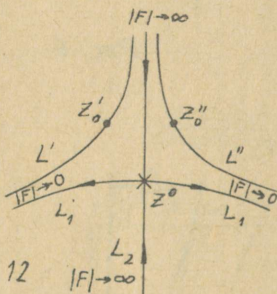


Рис. 12

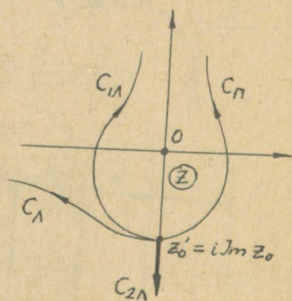


Рис. 13

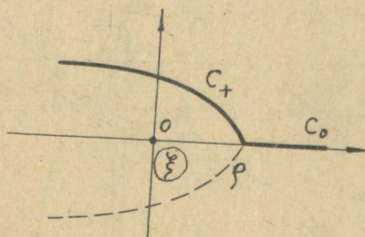


Рис. 14

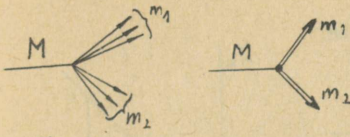


Рис. 15

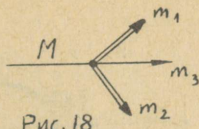


Рис. 18

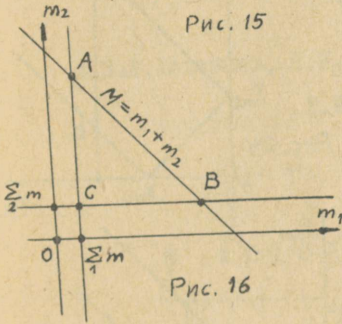


Рис. 16

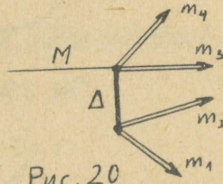


Рис. 20

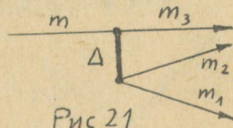


Рис. 21

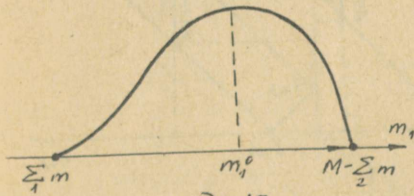


Рис. 17

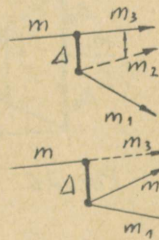
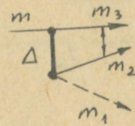


Рис. 22

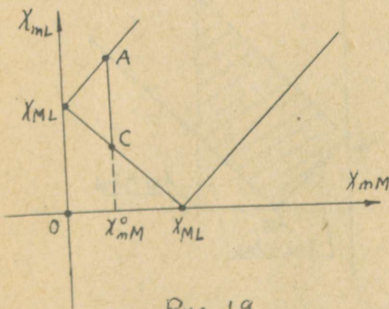


Рис. 19

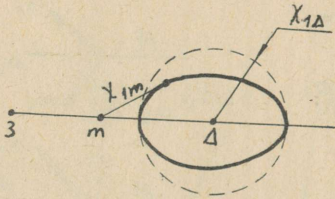


Рис. 23

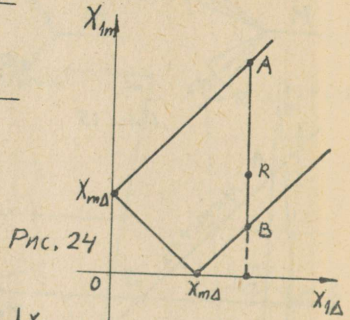


Рис. 24

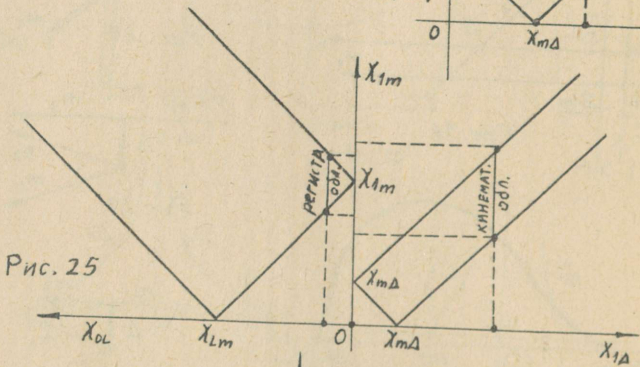


Рис. 25

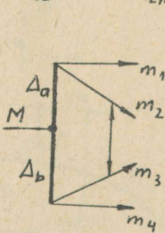


Рис. 26

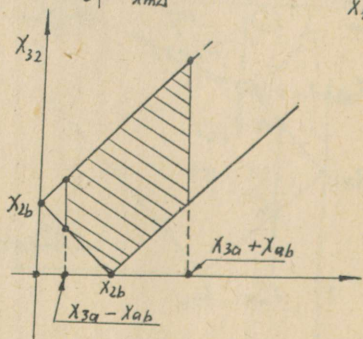


Рис. 27

В.А.Колкунов, Н.Н.Мейман, Е.С.Николаевский,
В.Н.Петрухин

К М Е Т О Д У П Е Р Е В А Л А

О Г Л А В Л Е Н И Е

§ 1. Вывод формального ряда метода перевала.....	88
§ 2. Простая и двойная точки перевала.....	93
§ 3. Условия применимости метода перевала.....	97
§ 4. Модифицированный метод перевала.....	101
§ 5. Программа вычисления фазового объема по методу перевала.....	105
Л и т е р а т у р а.....	III
Р и с у н к и.....	III

В работе изучаются формальные разложения контурных интегралов по методу перевала. Получены в явном виде через подынтегральную функцию все члены перевального ряда. Для расширения класса вычисляемых контурных интегралов предложен модифицированный метод перевала, учитывающий особенности, ближайšie к области влияния точки перевала. Вопросы сходимости и применимости метода перевала при отсутствии большого параметра обсуждаются на конкретных примерах.

Подробно изложено применение модифицированного метода перевала к вычислению фазового объема и дан алгоритм программы для ЭВМ.

В в е д е н и е

Метод перевала описан в многочисленных учебниках и монографиях и является одним из наиболее действенных способов вычисления и оценок интегралов. Тем не менее в теории и применении этого метода до сих пор много неясностей. В некоторых из них мы попытаемся разобраться в настоящей работе.

В классическом изложении применение метода перевала требует наличия большого параметра. Сразу же возникает вопрос, что считать большим параметром, и когда и с какой точностью можно пользоваться методом перевала. Обычно выписывают лишь один или два члена формального ряда метода перевала. Представляет безусловный интерес выписать явно через подынтегральную функцию весь формальный ряд метода перевала.

При реальном счете часто выгодней, как показано в работе, пользоваться методом перевала не в классической его форме, а в модифицированном виде. В работе, насколько нам известно, впервые в литературе, приводятся некоторые со-

ображения по этому поводу. В качестве приложения дается представляющий самостоятельный интерес алгоритм программы вычисления на ЭВМ фазового объема модифицированным методом перевала.

Работа имеет предварительный характер, и мы рассчитываем вернуться к рассматриваемым вопросам в следующих публикациях.

§ I. Вывод формального ряда метода перевала.

Рассмотрим контурный интеграл

$$J = \int_{\gamma} f(z) dz. \quad (I.1)$$

Контур γ соединяет два нуля подынтегральной функции. В частности, один или оба конца контура γ могут лежать в бесконечности. Точка перевала z_0 определяется из уравнения

$$f'(z_0) = 0. \quad (I.2)$$

Вместо функции $f(z)$ удобно ввести ее логарифм $\psi(z) = \ln f(z)$. Пусть в окрестности точки перевала $\psi(z)$ разлагается в ряд Тейлора

$$\psi(z) = \psi(z_0) + \frac{\psi'_n}{n!} (z-z_0)^n + \dots = \psi(z_0) + \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\psi_k}{k!} (z-z_0)^k, \quad (I.3)$$
$$\psi_k = \frac{d^k \psi}{dz^k},$$

т.е. все производные до $n-1$ -порядка включительно равны нулю. Из точки z_0 выходят $2n$ лучей, делящих ее

окрестность на равные углы величиной π/n . На этих лучах $|f|$ попеременно убывает и возрастает при удалении от точки z_0 . Мы рассмотрим лишь линии l_1, \dots, l_n стока, на которых $|f|$ убывает. Через J_k обозначим интеграл от точки перевала вдоль $k^{\text{ой}}$ линии стока l_k . Вторым концом этой линии лежит в бесконечности или в нуле функции $f(z)$,

$$J_k = \int_{l_k} f(z) dz. \quad (I.4)$$

Пусть функция $f(z)$ такова, что контур γ в (I.1) можно деформировать в путь, образованный какими-нибудь двумя линиями стока l_k и l'_k .

Введем естественную переменную t

$$\psi(z) = \psi(z_0) + t^n. \quad (I.5)$$

Соответственно для интеграла J_k имеем

$$J_k = f(z_0) \int_0^\infty dt \frac{dz}{dt} e^{t^n} \quad (I.6)$$

Нумерация выбрана так, что на $k^{\text{ой}}$ линии стока фаза переменной t равна

$$\nu_k = \arg t = \frac{\pi}{n}(1+2k), \quad (I.7)$$

а t^n вдоль линии стока изменяется от нуля до $-\infty$. Разложим в окрестности точки перевала в ряд Тейлора производную

$$\psi(t) = \frac{dz}{dt} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z_{1+m}(0)}{m!} t^m; \quad z_k = \left. \frac{d^k z}{dt^k} \right|_{t=0}. \quad (I.8)$$

Подставим (I.8) в (I.6) и проинтегрируем по переменной t

$$J_k \approx \frac{f(z_0)}{n} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{1+m}{n}\right)}{\Gamma(1+m)} e^{i(1+m)\nu_k} z_{1+m}(0). \quad (\text{I.9})$$

Для функции $f_N(z)$, связанной с функцией $f(z)$ соотношением

$$\ln f_N = N \ln f \quad \text{или} \quad \psi_N = N \cdot \psi$$

ряд (I.9) перейдет в степенной ряд

$$J_k(f_N) = \frac{f_N(z_0)}{n} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{1+m}{n}\right)}{\Gamma(1+m)} e^{i(1+m)\nu_k} \frac{z_{1+m}(0)}{N^{\frac{1+m}{n}}}. \quad (\text{I.10})$$

Ряд (I.10) является асимптотическим разложением интеграла $J_k(f_N)$ при большом N . При $N=1$ ряды (I.9) и (I.10) совпадают. Ряд (I.9) назовем формальным рядом метода перевала. В случае, когда этот ряд сходится, его сумма, очевидно, равна интегралу J_k .

В действительности ряды (I.9) и (I.10) нужно преобразовать, так как входящие в них производные z_{1+m} не выражены явно через подынтегральную функцию $f(z)$ или $\psi(z) = \ln f(z)$. Такое преобразование нужно как для реального счета, так и для общего исследования.

Исходим из тождества

$$\varphi(t_0) = \frac{dz}{dt} \Big|_{t=t_0} = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dt}{t-t_0} \cdot \frac{dz}{dt} = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dz}{t-t_0}, \quad (\text{I.11})$$

где интеграл берется по контуру, окружающему точку t_0 , а под dz/dt понимается значение производной на этом

контуре. Дифференцируя m раз по t , получим

$$\varphi^{(m)}(0) = z_{1+m}(0) = \frac{\Gamma(1+m)}{2\pi i} \oint \frac{dz}{t^{1+m}}. \quad (I.I2)$$

Подставив значение $t = \sqrt[n]{\psi(z) - \psi(z_0)}$ в (I.I2), преобразуем его к виду

$$z_{1+m}(0) = \frac{\Gamma(1+m)}{2\pi i} \left(\frac{n!}{\psi_n}\right)^{\frac{1+m}{n}} \cdot \oint \frac{dz}{(z-z_0)^{1+m}} \left[1 + \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+\kappa)!} \frac{\psi_{n+\kappa}}{\psi_n} (z-z_0)^\kappa\right]^{-\frac{1+m}{n}}. \quad (I.I3)$$

Значение интеграла равно вычету, определяемому коэффициентом в разложении степени квадратной скобки. Искомый коэффициент мы найдем следующим образом. Введем оператор сдвига на $-x$

$$\exp\left(-x \frac{\partial}{\partial x_0}\right) f(x_0) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} \left(-x \frac{\partial}{\partial x_0}\right)^\ell f(x_0) = f(x_0 - x), \quad (I.I4)$$

Применим этот оператор к функции $f(x) = x^{-\frac{1+m}{n}}$, полагая

$$x_0 = 1, \quad x = -\sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+\kappa)!} \frac{\psi_{n+\kappa}}{\psi_n} (z-z_0)^\kappa. \quad (I.I5)$$

Получим

$$\begin{aligned} & \left[1 + \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+\kappa)!} \frac{\psi_{n+\kappa}}{\psi_n} (z-z_0)^\kappa\right]^{-\frac{1+m}{n}} = \\ & = \exp\left\langle \left(\sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+\kappa)!} \frac{\psi_{n+\kappa}}{\psi_n} (z-z_0)^\kappa\right) \frac{\partial}{\partial x_0} \right\rangle x_0^{-\frac{1+m}{n}} \end{aligned} \quad (I.I6)$$

Заметим, что

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_0}\right)^r x_0^{-\frac{1+m}{n}} \Big|_{x_0=1} = (-1)^r \frac{\Gamma\left(\frac{1+m}{n} + r\right)}{\Gamma\left(\frac{1+m}{n}\right)}. \quad (\text{I.17})$$

Оператор сдвига выгодно представить в виде произведения операторов сдвига следующим образом:

$$\begin{aligned} & \exp\left\langle \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+k)!} \frac{\psi_{n+k}}{\psi_n} (z-z_0)^k\right) \frac{\partial}{\partial x_0} \right\rangle = \\ & = \prod_{k=1}^{\infty} \exp\left\langle \frac{n!}{(n+k)!} \frac{\psi_{n+k}}{\psi_n} (z-z_0)^k \frac{\partial}{\partial x_0} \right\rangle = \\ & = \sum_{r_1, r_2, \dots} \frac{1}{r_1!} \left(\frac{n!}{(n+1)!} \frac{\psi_{n+1}}{\psi_n}\right)^{r_1} \frac{1}{r_2!} \left(\frac{n!}{(n+2)!} \frac{\psi_{n+2}}{\psi_n}\right)^{r_2} \dots (z-z_0)^{r_1+2r_2+\dots} \left(\frac{\partial}{\partial x_0}\right)^{r_1+r_2+\dots} \end{aligned} \quad (\text{I.18})$$

Отсюда следует, что коэффициент при $(z-z_0)^m$ равен

$$\sum_{\sum_k r_k = m} \frac{1}{r_1!} \left(\frac{n!}{(n+1)!} \frac{\psi_{n+1}}{\psi_n}\right)^{r_1} \frac{1}{r_2!} \left(\frac{n!}{(n+2)!} \frac{\psi_{n+2}}{\psi_n}\right)^{r_2} \dots \frac{\Gamma\left(\frac{1+m}{n} + r_1 + r_2 + \dots\right)}{\Gamma\left(\frac{1+m}{n}\right)}. \quad (\text{I.19})$$

Подставив (I.19) в (I.13), найдем, что

$$\begin{aligned} \psi^{(m)}(0) = z_{1+m}(0) &= \frac{\Gamma(1+m)}{\Gamma\left(\frac{1+m}{n}\right)} \left(\frac{n!}{\psi_n}\right)^{\frac{1+m}{n}} \cdot \\ & \cdot \sum_{\sum_{k=1}^m k r_k = m} \Gamma\left(\frac{1+m}{n} + \sum_{k=1}^m r_k\right) \frac{1}{r_1!} \left(\frac{n!}{(n+1)!} \frac{\psi_{n+1}}{\psi_n}\right)^{r_1} \frac{1}{r_2!} \left(\frac{n!}{(n+2)!} \frac{\psi_{n+2}}{\psi_n}\right)^{r_2} \dots \end{aligned} \quad (\text{I.20})$$

Это дает возможность формальный ряд (I.9) метода перевала представить в виде

$$J_K \simeq \frac{f(z_0)}{n} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{e^{i\nu_K}}{\sqrt{\psi_n/n!}}\right)^{1+m} \left\{ \sum_{\sum_{k=1}^m k r_k = m} \dots (\text{см. (I.20)}) \right\}, \quad (\text{I.21})$$

причем сумма в фигурных скобках берется по всем $r_k = 0, 1, \dots$, удовлетворяющим уравнению $\sum_{k=1}^m \kappa r_k = m$.

Отметим, что формальный ряд (I.2I) метода перевала в литературе не известен.

§ 2. Простая и двойная точки перевала.

Наиболее важным является самый простой случай $n=2$. В окрестности простой точки перевала ($n=2$) имеются только две линии стока, вдоль которых убывает подынтегральная функция. Поэтому контур γ первоначального интеграла (I.I) может проходить через точку перевала единственным образом. Складывая интегралы с учетом направления линий стока, получим из (I.2I)

$$\int_{\gamma} f(z) dz \approx f(z_0) \left(-\frac{2}{\psi_2}\right)^{1/2} \sum_{m \geq 0} \left(-\frac{2}{\psi_2}\right)^m \cdot \left\{ \sum_{\sum \kappa r_k = 2m} \Gamma\left(\frac{1}{2} + m + \sum r_k\right) \left[\frac{1}{r_1!} \left(-\frac{2! \psi_2}{3! \psi_2}\right)^{r_1} \frac{1}{r_2!} \left(-\frac{2! \psi_4}{4! \psi_2}\right)^{r_2} \dots \right] \right\} \approx$$

$$\approx f(z_0) \sqrt{\frac{2\pi}{\psi_2}} \left\langle 1 + \frac{3\psi_4 \psi_2 - 5\psi_3^2}{24\psi_2^3} + \frac{1}{32} \left[\frac{385}{36} \frac{\psi_3^4}{\psi_2^6} + \frac{35}{12} \frac{\psi_4^2}{\psi_2^4} + \frac{14}{3} \frac{\psi_3 \psi_5}{\psi_2^4} - \frac{2}{3} \frac{\psi_6}{\psi_2^3} - \frac{35}{2} \frac{\psi_3^2 \psi_4}{\psi_2^5} \right] \dots \right\rangle$$

(2.1)

Нечетные члены при сложении сокращаются и поэтому суммирование по r_k при фиксированном $m = 0, 1, \dots$ ведется по всем целым неотрицательным r_k , удовлетворяющим условию

$$\sum_{k=1}^{2m} \kappa \cdot r_k = 2m. \quad (2.2)$$

Рассмотрим в качестве примера интеграл Эйри

$$A_i(u^{2/3}) = \frac{u^{1/3}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[iu\left(\frac{1}{3}z^3 + z\right)\right] dz. \quad (2.3)$$

В этом случае

$$\psi(z) = iu\left(\frac{1}{3}z^3 + z\right); \quad \psi_1(z) = iu(z^2 + 1), \quad \psi_2(z) = iu \cdot 2z,$$

$$\psi_3(z) = 2iu, \quad \psi_n(z) = 0, \quad n \geq 4$$

и имеются две точки перевала: $z_0^{(1)} = +i$, $z_0^{(2)} = -i$.

Через перевальные точки проходят линии стока вида, указанного на рис. I.

Контур интегрирования можно деформировать лишь в верхнюю линию стока, состоящую из ветвей l_1 и l_2 , поэтому мы рассматриваем лишь точку перевала $z_0 = i$.

Для этой точки

$$\psi(z_0) = -\frac{2}{3}iu, \quad \psi_1 = 0, \quad \psi_2 = -2iu, \quad \psi_3 = 2iu, \quad \psi_4 = \psi_5 = \dots = 0$$

и общий ряд (2.1) сводится к ряду

$$A_i(u^{2/3}) = \frac{u^{1/3}}{2\pi} \frac{e^{-2iu/3}}{\sqrt{u}} \sum_{m \geq 0} \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + 3m)}{(2m)!} (-9u)^{-m}. \quad (2.4)$$

Ряд справа расходится при любом u и является хорошо известным асимптотическим рядом интеграла Эйри. Обычно этот ряд получают специальным приемом [I].

В качестве второго, более сложного примера рассмотрим цилиндрические функции. Воспользуемся интегральным представлением Зоммерфельда, выражающим цилиндрические функции через контурный интеграл вида

$$\int dz \exp(ushz - vZ). \quad (2.5)$$

В комплексной плоскости z в зависимости от значения u и v могут представиться самые разнообразные способы расположения перевальных линий стока. Полное исследование различных возможностей будет нами изложено в одной из последующих публикаций. Здесь мы ограничимся случаем, указанным на рис. 2.

Такое расположение, например, встретится при положительных $0 < v < u < \infty$. Снова в соответствии с обозначениями, принятыми в §I, имеем

$$\psi(z) = u \operatorname{sh} z - v z, \quad \psi_1(z) = u \operatorname{ch} z - v;$$

$$\psi_2(z) = \psi_4(z) = \psi_6(z) = \dots = u \operatorname{sh} z, \quad \psi_3(z) = \psi_5(z) = \dots = u \operatorname{ch} z;$$

$$\operatorname{ch} z_0 = \frac{v}{u}, \quad z_0 = \ln \frac{v + i\sqrt{u^2 - v^2}}{u},$$

$$\psi_2(z_0) = \psi_4(z_0) = \psi_6(z_0) = \dots = i\sqrt{u^2 - v^2} = v \operatorname{th} z_0, \quad \psi_3(z_0) = \psi_5(z_0) = \dots = v.$$

Таким образом получим, что

$$\int dz \exp \langle u \operatorname{sh} z - v z \rangle =$$

$$\sqrt{\frac{2\pi}{v \operatorname{th} z_0}} \exp \langle v (\operatorname{th} z_0 - z_0) \rangle \left\{ 1 + \frac{1}{8v \operatorname{th} z_0} - \right. \quad (2.6)$$

$$\left. - \frac{5}{24v^2 \operatorname{th}^3 z_0} + \frac{9}{128v^2 \operatorname{th}^2 z_0} - \frac{231}{576v^2 \operatorname{th}^4 z_0} + \frac{1155}{3456v^2 \operatorname{th}^6 z_0} + \dots \right\}.$$

Интеграл (2.5) в этом случае совпадает с $\pi i H_v^{(1)}(u) (\varphi. [1])$. Формальный ряд в этом примере тоже расходится.

Следующим по значению является случай $n=3$. Этот случай возникает при слиянии двух простых точек перевала. Из точки перевала теперь выходят три линии стока ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 (Рис. 3). Из этих линий можно составить три полных контура интегрирования $\ell_1 - \ell_2, \ell_1 - \ell_3, \ell_2 - \ell_3$. Поэтому мы должны рассматривать все три возможности, при

которых контур интегрирования первоначального интеграла (I.1) сводится к одному из выписанных контуров. Если функция $f(z)$ такова, что контур γ возможно деформировать в контур $\ell_j - \ell_\kappa$ ($j, \kappa = 1, 2, 3$), то

$$\int_{\gamma} f(z) dz \approx \frac{f(z_0)}{3} \sum \left[\frac{e^{i\nu(1+m)} - e^{-i\nu(1+m)}}{[(\psi_3/3!)^{1/3}]^{1+m}} \right].$$

$$\sum_{\sum \kappa r_\kappa = m} \Gamma\left(\frac{1+m}{3} + \sum r\right) \frac{1}{r_1!} \left(-\frac{3! \psi_4}{4! \psi_3}\right)^{r_1} \frac{1}{r_2!} \left(-\frac{3! \psi_5}{5! \psi_3}\right)^{r_2} \approx$$

$$\approx \frac{f(z_0)}{3} \left\langle \frac{e^{i\nu} - e^{-i\nu}}{(\psi_3/6)^{1/3}} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{e^{2i\nu} - e^{-2i\nu}}{(\psi_3/6)^{2/3}} \left[-\Gamma\left(\frac{2}{3} + 1\right) \frac{\psi_4}{4\psi_3}\right] + \right. \quad (2.7)$$

$$\left. + \frac{e^{3i\nu} - e^{-3i\nu}}{(\psi_3/6)} \left[\frac{\psi_4^2}{16\psi_3^2} - \frac{\psi_5}{20\psi_3}\right] + \frac{e^{4i\nu} - e^{-4i\nu}}{(\psi_3/6)^{4/3}} \cdot \right.$$

$$\left. \left[-\frac{\Gamma\left(\frac{4}{3} + 3\right) \psi_4^3}{3! 4^3 \psi_3^3} + \frac{\Gamma\left(\frac{4}{3} + 2\right) \psi_4 \psi_5}{4 \cdot 20 \psi_3^2} - \frac{\Gamma\left(\frac{4}{3} + 1\right) \psi_6}{120 \psi_3} \right] + \dots \right\rangle.$$

В практике вычисленный ряд (2.7) встречается при исследовании цилиндрических функций, когда индекс и аргумент имеют близкие значения.

Например, при $|\arg \nu| < \frac{\pi}{2}$ перевальные контура при $u = \nu$ имеют расположение, как на рис. 3. В соответствии с этим, интегрирование по $\ell_1 - \ell_2$ дает $2\pi i J_\nu(\nu)$, по $\ell_1 - \ell_3$ $\pi i H_\nu^{(1)}(\nu)$, по $\ell_2 - \ell_3$ $-\pi i H_\nu^{(2)}(\nu)$. При этом, к примеру (ср. [1]),

$$J_\nu(\nu) \approx \frac{1}{3\pi} \left\langle \frac{\sin \frac{\pi}{3} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\left(\frac{\nu}{6}\right)^{1/3}} + \frac{\sin \frac{5\pi}{3} \cdot \Gamma\left(\frac{5}{3}\right)}{280 \left(\frac{\nu}{6}\right)^{5/3}} - \right.$$

$$\left. - \frac{\sin \frac{7\pi}{3} \cdot \Gamma\left(\frac{7}{3}\right)}{3600 \left(\frac{\nu}{6}\right)^{7/3}} - \frac{1213 \sin \frac{11\pi}{3} \cdot \Gamma\left(\frac{11}{3}\right)}{655.200.000 \left(\frac{\nu}{6}\right)^{11/3}} + \dots \right\rangle. \quad (2.8)$$

§ 3. Условия применимости метода перевала

Классическое применение метода перевала предполагает наличие большого параметра, т.е. рассматриваются интегралы вида

$$\int_{\gamma} e^{N\psi(z)} dz, \quad N \rightarrow \infty. \quad (3.1)$$

При этом в тех или других условиях доказывается степень точности (в терминах степеней $1/N^\alpha$) формул вида (I.10).

Нас интересует существенно другая постановка вопроса, а именно: вычисление интеграла (I.1) при отсутствии большого параметра. Для простоты ограничимся наиболее важным случаем простого перевала ($n=2$). Сразу возникают два вопроса:

- 1) Каковы условия справедливости равенства (2.1).
- 2) Какова точность обрезанной формулы

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \varphi(t) dt = \sum_{m=0}^M \left(-\frac{2}{\psi_2}\right)^{m+1/2} \sum_{\sum k r_k = 2m} \Gamma\left(m + \frac{1}{2} + \sum r_k\right) \frac{1}{r_1!} \left(-\frac{2!}{3!} \frac{\psi_3}{\psi_2}\right)^{r_1} \frac{1}{r_2!} \left(-\frac{2!}{4!} \frac{\psi_4}{\psi_2}\right)^{r_2} \dots = R_M. \quad (3.2)$$

Сюда же примыкает вопрос об определении оптимального числа членов обрезанной формулы.

Формальное равенство (I.9) справедливо лишь в случае, когда функция

$$\varphi(t) = \frac{dz}{dt} = \frac{2\sqrt{\psi(z) - \psi(z_0)}}{\psi'(z)} \quad (3.3)$$

не имеет особенностей в плоскости t , т.е. является целой функцией от t .

Самые простые особенности функции $\varphi(t)$ соответствуют точкам перевала в плоскости z . Пусть z_0, z_1, z_2, \dots — точки перевала. Из-за многозначности функций $\psi(z)$ и $t=t(z)$ точке перевала z_k соответствует в плоскости t точки $t_{k,n}$. Все эти точки за исключением точки $t=0$ являются полюсами функции $\varphi(t)$. Для того, чтобы $\varphi(t)$ не имела особенностей, все эти точки должны совпадать с точкой $t=0$, т.е. $\psi(z)$ должна быть однозначной и

$$\psi(z_k) = \psi(z_0)$$

для всех значений k . Отсюда следует, что, вообще говоря, равенство (2.1) имеет лишь для $\psi(z)$, являющимися квадратичными трехчленами, или для интегралов, которые при помощи замены переменных сводятся к интегралам с такой функцией ψ . Например,

$$\int_0^{\infty} e^{-\ln^2 z} dz \quad (3.4)$$

заменой $\ln z = \xi$ сводится к интегралу

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2 + \xi} d\xi.$$

поэтому для интеграла (3.4) справедливо равенство (2.1).

Итак, за весьма частными исключениями формальный ряд метода перевала не сходится и после введения большого параметра может рассматриваться как асимптотический ряд по этому параметру.

Рассмотрим простой пример

$$\int_r^{\infty} \frac{e^{-z}}{1-z} dz = \frac{2\pi}{ie}. \quad (3.5)$$

где контур γ уходит в ∞ в правой полуплоскости, окружая точку $z=1$. В этом случае

$$t^2 = \psi(z) = -z - \ln(1-z), \quad (3.6)$$

$$\psi_1 = \frac{z}{1-z}, \quad z_0 = 0, \quad \varphi(t) = 2t(z-1)/z.$$

В этом примере имеется лишь одна точка перевала $z=0$, но этой точке в плоскости t соответствуют все точки вида $t_{0,n} = \pm\sqrt{2\pi i n}$, $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Итак, даже в таком простом случае равенство (2.1) неверно. Простой расчет показывает, что в этом случае с точностью до 1,5% верна формула с двумя членами.

На второй, более важный вопрос, о точности формулы (3.2) в общем виде ответить невозможно. Исходя из формулы Тейлора

$$\frac{\varphi(t)}{\varphi(0)} - \sum_{m=0}^{2M+1} \frac{\varphi^{(m)}(0)}{\varphi(0)} \frac{t^m}{m!} = r_{2M+2}(t), \quad (3.7)$$

можно сказать, что если существует такой интервал $(-\alpha, \alpha)$, что на этом интервале

$$|r_{2M+2}(t) / \frac{\varphi(t)}{\varphi(0)}| \ll 1, \quad (3.8)$$

а вне интервала интеграл $\int e^{-t^2} r_{2M+2}(t) dt$ мал по сравнению с выражением (3.2), то формула действует. Немного более содержательно следующее утверждение. Точки перевала интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} t^{2M+2} dt,$$

определяющие значение этого интеграла - это точки $\pm\sqrt{M+1}$. Отсюда следует, что интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} r_{2M+2}(t) dt$$

можно отбрасывать лишь в тех случаях, когда точки $\pm\sqrt{M+1}$ лежат в интервале (3.8).

Если имеется большой параметр N , $\ln f(z) = N\psi(z)$, вместо интеграла (I.I) рассматривается интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-Nt^2} \varphi(t) dt = \frac{1}{\sqrt{N}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \varphi\left(\frac{t}{\sqrt{N}}\right) dt, \quad (3.9)$$

интервал $(-\alpha, \alpha)$ стремится к $(-\infty, \infty)$ при $N \rightarrow \infty$, и разложение (2.I) превращается в асимптотическое разложение интеграла (3.9).

Несмотря на отсутствие общего теоретического ответа на второй вопрос, предыдущие рассуждения приводят нас к возможности дать практический ответ о границах применимости метода перевала.

Мы убедились, что характерными особенностями функции $\varphi(t)$ являются полюса, причем простым перевалам соответствуют простые полюса, поэтому нужно исследовать точность, с которой вычисляются методом перевала интегралы вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \frac{dt}{1+t/\xi}. \quad (3.10)$$

На графике (рис. 4) приведен результат вычислений по формулам (3.2) с различным числом членов при чисто мнимом ξ , меняющемся на интервале $0,5 \leq \frac{\xi}{\xi} \leq 2,5$.

Заранее ясно, что при меньших ξ точнее перевальная формула с малым числом членов, а при большом ξ — формулы с большим числом членов. Оказалось, что при $|\xi|$ несколько менее 1 все формулы дают крайне плохую

точность, а при $|\xi| > 1$ достаточно хороша трехчленная формула h_2 . Трехчленная формула значительно точнее одночленной формулы. Дальнейшее увеличение числа членов формулы особого смысла не имеет. Эти выводы сохраняют свое значение для интегралов вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \varphi(t) dt;$$

если функция $\varphi(t)$ не имеет особенностей в полосе $-1 < \text{Im} t < 1$, то трехчленная перевальная формула дает хорошую точность.

Для полноты исследования нужно бы вычислить интегралы (3.10) при ξ , меняющихся по окружности, и интегралы вида (3.10), но с кратными полюсами.

§ 4. Модифицированный метод перевала

Наличие особой точки в окрестности точки перевала (например, полюса $f(z)$ или другой точки перевала, становящейся в переменной t тоже полюсом) сильно портит разложение (1.21) и не позволяет уже воспользоваться несколькими его членами в качестве приближения для (1.4). Подробнее этот вопрос рассмотрен в § 3.

Для более точного вычисления следует правильно учесть ближайшие особенности $f(z)$. Пусть нам известна функция $\chi(t)$, у которой ближайшие такого же характера, как и у $\psi(z)$, причем

$$\int_{\gamma_c} e^{\chi(t)} (t-t_0)^m dt \quad (4.1)$$

выражаются через удобно вычисляемые функции (примеры см. ниже).

Сделаем замену z на t :

$$\psi(z) - \psi(z_0) = \chi(t) - \chi(t_0) = w^n \quad (4.2)$$

Тогда формально

$$\gamma \approx e^{\psi(z_0) - \chi(t_0)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z_{1+m}(t_0)}{m!} v_m. \quad (4.3)$$

Аналогично (I.12),

$$z_m(t) = \frac{\Gamma(m)}{2\pi i} \oint \frac{dz}{(t-t_0)^m} = \frac{\Gamma(m)}{2\pi i} \oint \varphi(w) \frac{dw}{[t(w)-t_0]^m} \quad (4.4)$$

Функцию $\varphi(w) = \frac{dz}{dw}$ представим по степеням w ($\varphi^{(k)}(0)$ см. (I.20)):

$$\varphi(w) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} w^k. \quad (4.5)$$

С другой стороны,

$$\frac{1}{(t-t_0)^m} = \frac{1}{w^m} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{k!} w^k, \quad (4.6)$$

где $b_0 = \left(\frac{x_0}{n!}\right)^m$,

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{d^k}{dw^k} \left[\left(\frac{w}{t-t_0} \right)^m \right] = \frac{\Gamma(k)}{2\pi i} \oint \frac{d \left[\left(\frac{w}{t-t_0} \right)^m \right]}{w^k} = \\ &= \frac{\Gamma(k)}{2\pi i} \oint \frac{\frac{d}{dt} \frac{[\chi(t) - \chi(t_0)]^{m/n}}{(t-t_0)^m}}{[\chi(t) - \chi(t_0)]^{m/n}} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\frac{d}{dt}\right)^{k-1} \left\langle \left[\frac{t-t_0}{\chi(t)-\chi(t_0)} \right]^k \frac{d}{dt} \frac{(\chi-\chi_0)^{m/n}}{(t-t_0)^m} \right\rangle = \\
 &= \left\{ \begin{aligned} &\frac{m}{m-k} \left(\frac{d}{dt}\right)^k \left\langle \left[\frac{\chi-\chi_0}{(t-t_0)^n} \right]^{m-k} \right\rangle, & k \neq m \\ &\frac{m}{n} \left(\frac{d}{dt}\right)^k \left\langle \ln \frac{\chi-\chi_0}{(t-t_0)^n} \right\rangle, & k = m \end{aligned} \right\} = \\
 &= \frac{m}{n} \left(\frac{\chi_n}{n!}\right)^{\frac{m-k}{n}} \sum_{\nu_1+2\nu_2+\dots+k\nu_k=k} \frac{\left(\frac{m-k}{n}-1\right)\dots\left(\frac{m-k}{n}-\nu_1-\dots-\nu_k\right)}{\nu_1!\dots\nu_k!} \frac{(n!\chi_{n+1})^{\nu_1}}{(n+1)!\chi_n} \dots \frac{(n!\chi_{n+k})^{\nu_k}}{(n+k)!\chi_n}.
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

Обозначив

$$C_k = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(r)}(0)}{r!} \frac{b_{k-r}}{(k-r)!}, \tag{4.8}$$

получим окончательно

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}_m(t_0) &= \Gamma(m) \cdot C_{m-1} = \Gamma(m) \cdot \sum_{r=0}^{m-1} \frac{\varphi^{(r)}(0) \left(\frac{\chi_n}{n!}\right)^{\frac{r+1}{n}}}{r!(m-1-r)!}. \\
 &\begin{cases} 1 & \text{при } r=m-1, \text{ иначе} \\ \frac{1}{m} \sum \frac{\left(\frac{r+1}{n}-1\right)\dots\left(\frac{r+1}{n}-\nu_1-\dots-\nu_{m-r-1}\right)}{\nu_1!\dots\nu_{m-r-1}!} \frac{(n!\chi_{n+1})^{\nu_1}}{(n+1)!\chi_n} \dots \frac{(n!\chi_{n+m-r-1})^{\nu_{m-r-1}}}{(n+m-r-1)!\chi_n}, \\ \nu_1+2\nu_2+\dots+(m-r-1)\nu_{m-r-1}=m-r-1 \end{cases} \tag{4.9} \\
 J &\approx e^{\psi(z_0)-\chi(t_0)} \sum_{m=0}^{\infty} V_m \sum_{r=0}^m \frac{\varphi^{(r)}(0) \left(\frac{\chi_n}{n!}\right)^{\frac{r+1}{n}}}{r!(m-r)!}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 1 & \text{при } r=m, \text{ иначе} \\ \frac{1}{n} \sum \frac{\left(\frac{r+1}{n}-1\right)\dots\left(\frac{r+1}{n}-\nu_1-\dots-\nu_{m-r}\right)}{\nu_1!\nu_2!\dots\nu_{m-r}!} \frac{(n!\chi_{n+1})^{\nu_1}}{(n+1)!\chi_n} \dots \frac{(n!\chi_{n+m-r})^{\nu_{m-r}}}{(n+m-r)!\chi_n}. \end{cases} \tag{4.10}$$

$\nu_1+2\nu_2+\dots+(m-r)\nu_{m-r}=m-r$

Если, например, $f(z)$ имеет степенную особенность, выгодно брать

$$\chi(t) = t - \rho \ln t = \rho - \rho \ln \rho + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k \rho^{k-1}} (t-\rho)^k. \tag{4.11}$$

Единственная точка перевала: $t = \rho$, $n = 2$, перевальный контур огибает точку $t = 0$ и уходит на $-\infty$ по $\text{Re } t$. $\frac{dz}{dt}$ разлагается по степеням $t - \rho$;

$$V_m = \int_{0^+} \frac{e^t}{t^\rho} (t - \rho)^m dt = \sum_{s=0}^m \frac{m! (-\rho)^{m-s}}{s! (m-s)! \Gamma(\rho-s)} =$$

$$= \frac{\rho^m}{\Gamma(\rho)} \sum_{s=0}^m \frac{m! (-1)^{m-s}}{s! (m-s)!} \left(1 - \frac{1}{\rho}\right) \dots \left(1 - \frac{s}{\rho}\right),$$

$$J \approx \frac{\exp(\psi(z_0) - \rho + \rho \ln \rho)}{\Gamma(\rho+1)}.$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} m! \left\langle \sum_{s=0}^m \frac{(-1)^{s+1}}{s! (m-s)!} \left(1 - \frac{1}{\rho}\right) \dots \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) \right\rangle \left\langle \sum_{r=0}^m \frac{\varphi^{(r)}(0) \left(\frac{\rho}{2}\right)^{\frac{r+1}{2}}}{r! (m-r)!} \right\rangle$$

$$\left\langle \begin{array}{l} 1 \text{ при } r=m, \text{ иначе} \\ \frac{m+1}{2} \sum_{\substack{\nu_1 + 2\nu_2 + \dots + (m-r)\nu_{m-r} = m-r}} \frac{\left(\frac{r+1}{2} - 1\right) \dots \left(\frac{r+1}{2} - \nu_1 - \nu_2 - \dots - \nu_{m-r}\right)}{\nu_1! \nu_2! \dots \nu_{m-r}!} \left(\frac{2}{3}\right)^{\nu_1} \dots \left(\frac{2}{m-r+2}\right)^{\nu_{m-r}} \end{array} \right\rangle$$

Часто бывает удобно разлагать не по степеням $t - \rho$, а по степеням $1 - \frac{\rho}{t}$. Это соответствует

$$\chi(t) = \rho \left[\frac{t}{1-t} + \ln(1-t) \right] = \rho \sum_{k=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{k}\right) t^k. \quad (4.14)$$

Единственная точка перевала: $t = 0$, $n = 2$. Перевальный контур огибает точку $t = 1$ сверху и снизу и подходит к ней со стороны больших вещественных t .

$$V_m = \int_{\delta_t} \frac{\rho^t}{1-t} (1-t)^\rho t^m dt = -\rho e^{\rho(\ln \rho - 1)} \int_{0^+} \frac{e^u}{u^{\rho+2}} \left(1 - \frac{\rho}{u}\right)^m du =$$

$$= e^{\rho \ln \rho - \rho} \sum_{s=0}^m \frac{m! (-\rho)^{s+1}}{s! (m-s)! \Gamma(\rho+s+2)}.$$

Здесь $u = \frac{\rho}{1-t}$ - прежнее t (3.II), $t = 1 - \frac{\rho}{u}$

$$J = e^{\psi(z_0) - \rho + \rho \ln \rho} \sum_{m=0}^{\infty} m! \left\langle \sum_{s=0}^m \frac{(-\rho)^{s+1}}{s! (m-s)! \Gamma(\rho+s+2)} \right\rangle \left\langle \frac{\psi^{(r)}(0) \left(\frac{\rho}{2}\right)^{\frac{r+1}{2}}}{r! (m-r)!} \right\rangle$$

$$\cdot \begin{cases} 1 & \text{при } r=m, \text{ иначе} \\ \frac{m+1}{2} \sum \frac{\left(\frac{r+1}{2}-1\right) \dots \left(\frac{r+1}{2}-j+\dots-\nu_{m-r}\right)}{j! \dots \nu_{m-r}!} \left(\frac{4}{3}\right)^{\nu_1} \dots \left(\frac{2(m-r+1)}{m-r+2}\right)^{\nu_{m-r}} \end{cases} (4.16)$$

Действуя в духе этих же идей, если, например, $f(z) = \frac{e^z}{z^{\rho}} \cdot u(z)$ и $u(z)$ - медленно меняющаяся функция, можно и не делать замены, а просто разлагать $u(z)$ хотя бы по степеням $1 - \frac{\rho}{z}$. Именно так мы и делали в случае фазового объема.

§ 5. Программа вычисления фазового объема по методу перевала

Фазовый объем для N произвольных частиц согласно результатам предыдущей работы [2] представим в виде

$$\Omega_N(m_0; m_1, \dots, m_{N-n}, \sigma, \dots, 0) = C \int_{0^+} F(z) dz,$$

$$F(z) = e^z \cdot z^{\frac{3N+n-3}{2}} h_1^{(1)}\left(\frac{z m_0}{D}\right) \prod_{j=1}^{N-n} h_1^{(2)}\left(\frac{z m_j}{D}\right), \quad (5.1)$$

$$D = m_0 - \sum_{j=1}^{N-n} m_j.$$

При анализе поведения подынтегральной функции F было показано, что в правой полуплоскости имеется точка перевала $z = \rho + i\varepsilon$. Асимптотика функции F в окрестности перевальной точки

$$F(z) \approx C, e^z z^{-\rho} \quad (5.2)$$

указывает на то, что при использовании метода перевала необходимо учитывать наличие алгебраического полюса в точке $z = 0$. Следовательно, формальный ряд метода перевала (I.9) не дает хорошей точности, и поэтому нужно прибегнуть к разложению по модифицированному методу перевала.

$$\begin{aligned} \ln \Omega = & \rho - \frac{1}{12\rho} - \frac{3N+n-4}{2} \ln \frac{\rho}{2\pi} - n \ln \pi + \\ & + \left\{ (2N-4) \ln(m_0 - \sum_{j=1}^{N-n} m_j) - \frac{3}{2} \ln \mu_0 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N-n} \ln \mu_j \right\} + \\ & + \ln h_1^{(1)}(\rho, \mu_0) + \sum_{j=1}^{N-n} \ln h_1^{(2)}(\rho, \mu_j) - \beta \left(1 + \frac{\beta}{2}\right). \end{aligned} \quad (5.3)$$

В этой формуле ρ - точка перевала;

$$\beta = \frac{(0,5\rho + 5)(\psi_2 - \frac{1}{\rho}) + \frac{2}{3}(\rho\psi_3 + \frac{2}{\rho})}{(1 + \frac{1}{\rho})(1 + \frac{2}{\rho})}, \quad (5.4)$$

ψ_1 , ψ_2 и ψ_3 - соответствующие логарифмические производные функции $F(z)$.

Подставим численные значения $\ln 2\pi$, $\ln \pi$, $\frac{1}{12}$ и пользуясь соотношениями $\mu_j = \frac{m_j}{D}$ и $m_0 - \sum_{j=1}^{N-n} m_j = D$, преобразуем выражение к виду, удобному для программирования:

$$\begin{aligned} \ln \Omega = & \rho - \frac{0,08(3)}{\rho} - \frac{3N+n-4}{2} (\ln \rho - 1,83787707) - \\ & - 1,14472989_n + \left\{ \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\prod_{j=1}^{N-n} m_j}{m_0^3} \right) + \frac{3N+n-5}{2} \ln D \right\} + \\ & + \ln [h_1^{(1)}(\rho, \mu_0) \prod_{j=1}^{N-n} h_1^{(2)}(\rho, \mu_j)] - \beta \left(1 + \frac{\beta}{2}\right). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Формула (5.5) является исходной в программе вычисления фазового объема.

Алгоритм программы выгодно разбить на ряд блоков.

1. Вычисление φ .

Точка передела $\varphi = z_{n+1}^{(0)}$ вычисляется последовательными приближениями по методу Ньютона

$$z_{n+1}^{(0)} = z_n^{(0)} - \frac{2\psi_1(z_n^{(0)})}{\psi_2(z_n^{(0)}) + \sqrt{\psi_2^2(z_n^{(0)}) - 2\psi_1(z_n^{(0)})\psi_3(z_n^{(0)})}}, \quad (5.6)$$

$$z_0^{(0)} = \frac{z_{N+n-6}}{4}.$$

Итерации продолжаются до тех пор, пока

$$|z_{n+1}^{(0)} - z_n^{(0)}| < 2^{-9}.$$

2. Вычисление функций $\psi_1(z)$, $\psi_2(z)$, $\psi_3(z)$.

$$\psi_1 = -\left[\frac{zN-1}{z} + \sum_{j=0}^{N-n} \mu_j d_j\right],$$

$$\psi_2 = \frac{1}{z} \left[\frac{zN-1}{z} - \sum_{j=0}^{N-n} \mu_j d_j \right] + \sum_{j=0}^{N-n} \mu_j^2 (1-d_j^2),$$

$$\psi_3 = -\frac{2}{z^2} \cdot \frac{zN-1}{z} + \frac{1}{z} \sum_{j=0}^{N-n} \mu_j^2 (1-3d_j^2) + 2 \sum_{j=0}^{N-n} \mu_j^3 d_j (1-d_j^2), \quad (5.7)$$

где

$$d_0 = -\frac{h_0^{(1)}(\omega_0)}{h_1^{(1)}(\omega_0)}, \quad d_j = \frac{h_0^{(2)}(\omega_j)}{h_1^{(2)}(\omega_j)} \quad (j=1, 2, \dots, N-n).$$

3. Вычисление функций $h_p^{(q)}(\omega)$.

Функции $h_p^{(q)}$ вычисляются в точках $\omega_j = \varrho \mu_j$;

$$q = 1, 2; \quad p = 0, 1.$$

Формула для вычисления $h_p^{(q)}(\omega_j)$ имеет вид:

$$h_p^{(1)}(\omega) = a_{0,p} + \frac{1}{\omega} (a_{1,p} + \frac{1}{\omega} (a_{2,p} +$$

$$+ \frac{1}{\omega} (a_{3,p} + \frac{1}{\omega} (a_{4,p} + \frac{1}{\omega} (a_{5,p} + \frac{1}{\omega} a_{6,p}))))), \quad (5.8)$$

где

$$\begin{array}{ll}
 a_{0,0} = 1,0, & a_{0,1} = + 1,0, \\
 a_{1,0} = 0,125, & a_{1,1} = - 0,375, \\
 a_{2,0} = 0,703125 \cdot 10^{-1}, & a_{2,1} = - 0,117188, \\
 a_{3,0} = 0,732422 \cdot 10^{-1}, & a_{3,1} = - 0,102539, \\
 a_{4,0} = 0,112152, & a_{4,1} = - 0,144196, \\
 a_{5,0} = 0,227108, & a_{5,1} = - 0,277576, \\
 a_{6,0} = 0,572501, & a_{6,1} = - 0,676592.
 \end{array}$$

Функции $h_p^{(2)}(\omega_j)$ вычисляются по разным формулам в зависимости от числового значения ω_j .

При $|\omega_j| \geq 4$ $h_p^{(2)}(\omega)$ считаются по формулам (5.8) с заменой $\frac{1}{\omega}$ на $(-\frac{1}{\omega})$.

При $|\omega_j| < 4$

$$h_p^{(2)}(\omega) = 0,797884561 \cdot \sqrt{\omega} e^{\omega} K_p(\omega), \quad (5.9)$$

где функция Макдональда

$$\begin{aligned}
 K_p = & \frac{p}{\omega} + \omega^p [\ln \omega (b_{0,p} + \omega^2 (b_{1,p} + \omega^2 (b_{2,p} + \\
 & + \omega^2 (b_{3,p} + \omega^2 (b_{4,p} + \omega^2 (b_{5,p} + \omega^2 (b_{6,p} + \\
 & + \omega^2 (b_{7,p} + \omega^2 (b_{8,p} + \omega^2 b_{9,p}))) \dots)) + c_{0,p} + \\
 & + \omega^2 (c_{1,p} + \omega^2 (c_{2,p} + \omega^2 (c_{3,p} + \omega^2 (c_{4,p} + \\
 & + \omega^2 (c_{5,p} + \omega^2 (c_{6,p} + \omega^2 (c_{7,p} + \omega^2 (c_{8,p} + \\
 & + \omega^2 c_{9,p}))) \dots))] ,
 \end{aligned} \quad (5.10)$$

где

$$\begin{aligned}
 b_{0,0} &= -1,0, \\
 b_{1,0} &= -0,25, \\
 b_{2,0} &= -0,156250 \cdot 10^{-1}, \\
 b_{3,0} &= -0,434028 \cdot 10^{-3}, \\
 b_{4,0} &= -0,678168 \cdot 10^{-5}, \\
 b_{5,0} &= -0,678168 \cdot 10^{-7}, \\
 b_{6,0} &= -0,470950 \cdot 10^{-9}, \\
 b_{7,0} &= -0,240281 \cdot 10^{-11}, \\
 b_{8,0} &= -0,938597 \cdot 10^{-14}, \\
 b_{9,0} &= -0,289690 \cdot 10^{-16},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c_{0,0} &= 0,115931, \\
 c_{1,0} &= 0,278983, \\
 c_{2,0} &= 0,252489 \cdot 10^{-1}, \\
 c_{3,0} &= 0,846035 \cdot 10^{-3}, \\
 c_{4,0} &= 0,149147 \cdot 10^{-4}, \\
 c_{5,0} &= 0,162710 \cdot 10^{-6}, \\
 c_{6,0} &= 0,120843 \cdot 10^{-8}, \\
 c_{7,0} &= 0,650870 \cdot 10^{-11}, \\
 c_{8,0} &= 0,265978 \cdot 10^{-13}, \\
 c_{9,0} &= 0,853109 \cdot 10^{-16},
 \end{aligned}$$

- x - x - x -

$$\begin{aligned}
 b_{0,1} &= 0,5, \\
 b_{1,1} &= 0,625 \cdot 10^{-1}, \\
 b_{2,1} &= 0,260417 \cdot 10^{-2}, \\
 b_{3,1} &= 0,542535 \cdot 10^{-4}, \\
 b_{4,1} &= 0,678168 \cdot 10^{-6}, \\
 b_{5,1} &= 0,565140 \cdot 10^{-8}, \\
 b_{6,1} &= 0,336393 \cdot 10^{-10}, \\
 b_{7,1} &= 0,150175 \cdot 10^{-12}, \\
 b_{8,1} &= 0,521444 \cdot 10^{-15}, \\
 b_{9,1} &= 0,144845 \cdot 10^{-17},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c_{0,1} &= -0,307966, \\
 c_{1,1} &= -0,853707 \cdot 10^{-1}, \\
 c_{2,1} &= -0,464218 \cdot 10^{-2}, \\
 c_{3,1} &= -0,112536 \cdot 10^{-3}, \\
 c_{4,1} &= -0,155929 \cdot 10^{-5}, \\
 c_{5,1} &= -0,140302 \cdot 10^{-7}, \\
 c_{6,1} &= -0,887190 \cdot 10^{-10}, \\
 c_{7,1} &= -0,416180 \cdot 10^{-12}, \\
 c_{8,1} &= -0,150663 \cdot 10^{-14}, \\
 c_{9,1} &= -0,433797 \cdot 10^{-17}.
 \end{aligned}$$

Формулы для вычисления коэффициентов a , b и c в (5.8) и (5.10) приведены в [2], § 6.

Полиномы, по которым считаются функции $h_p^{(n)}$ и K_p , записаны по схеме Горнера.

4. Программирование функций ψ_1, ψ_2, ψ_3 и $h_i^{(q)}(\rho\mu_0) \prod_{j=1}^{N-n} h_i^{(2)}(\rho\mu_j)$.

Программирование указанных функций легко осуществить, если одновременно с нахождением функций $h_p^{(q)}$ вычислять d_j и $\prod_{j=0}^{N-n} h_{1,j}$.

Анализ формул (5.5) и (5.7) дает нам, что входящие в произведение $\prod_{j=0}^{N-n} h_1(\omega_j)$ и в отношения d_j (см. (5.7)) функции $h_p^{(q)}$ имеют индекс $q=1$ только для $j=0$; для $j \geq 1$ всегда индекс $q=2$.

Это подсказывает простой путь программирования: получать функции h_p независимо от верхнего индекса всегда в одних и тех же ячейках $\langle h_0 \rangle$ и $\langle h_1 \rangle$. Обращаясь для $j=0$ в блок вычисления $h_0^{(1)}$ и $h_1^{(1)}$, а для $j \geq 1$ в блок вычисления $h_0^{(2)}$ и $h_1^{(2)}$, получим в ячейках $\langle h_0 \rangle$ и $\langle h_1 \rangle$ соответствующие функции с правильными индексами. Тогда $A_1^{(1)}(\omega_0) \prod_{j=1}^{N-n} h_1^{(2)}(\omega_j) = \prod_{j=0}^{N-n} \langle h_1 \rangle$, а $d_j = \frac{\langle h_0 \rangle}{\langle h_1 \rangle}$ (при $j=0$ необходимо у отношения d_0 поменять знак). Произведение $\prod_{j=0}^{N-n} \langle h_1 \rangle$ и суммы, содержащие d_j (см. (5.7)), будут получаться по мере получения функций $h_p^{(q)}(\omega_j)$.

5. Точность вычислений.

При вычислениях мы пренебрегаем интегралом $J_0[2], J_+$ разлагаем в расходящийся ряд по модифицированному методу перевала и берем два первых члена, пренебрегаем также мнимыми частями функций $h_p^{(q)}$. Эти функции и величину q мы считаем приблизительно с точностью $2^{-9} \approx 0,002$. Строго оценить погрешность вычисления Ω при этом очень трудно. Однако в результате специально проведенных вычислений мы убедились, что уже начиная с $N=3$ вышеприведенный способ дает 3-4 верных значащих цифры при любых соотношениях масс. Для $N > 3$ точность только улучшается, а для $N=2$ Ω вычисляется по известной точной формуле

$$\Omega_2(m_0; m_1, m_2) = 2\pi \sqrt{\left[1 - \left(\frac{m_1 + m_2}{m_c}\right)^2\right] \left[1 - \left(\frac{m_1 - m_2}{m_c}\right)^2\right]}.$$

Л и т е р а т у р а

1. Г.Н. Ватсон. Теория бесселевых функций ИИЛ (1949).
2. В.А. Колкунов. ЖЭТФ 43, 1448 (1962);
ЯФ 3, 565 (1965).

Р и с у н к и

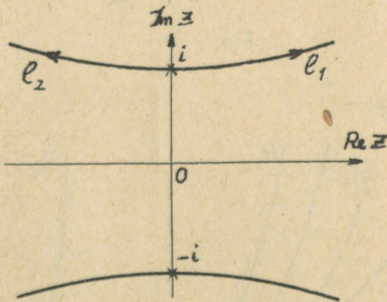


Рис. 1

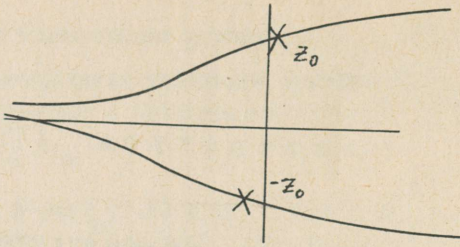


Рис. 2

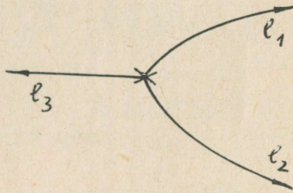


Рис. 3

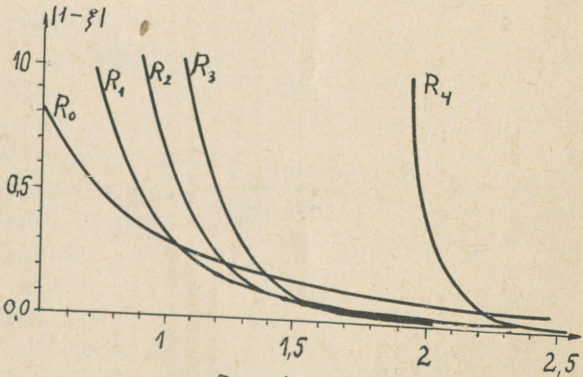


Рис. 4

СО Д Е Р Ж А Н И Е

В.А.Колкунов, Н.Н.Мейман, Е.С.Николаевский,

В.Н.Петрухин.

Фазовые интегралы..... 3

В.А.Колкунов, Н.Н.Мейман, Е.С.Николаевский,

В.Н.Петрухин.

К методу перевала.....85

C O N T E N T S

V.A.Kolkunov, N.N.Meiman, E.S.Nikolayevski,
V.N.Petruhhin.

Phase Integrals..... 3

V.A.Kolkunov, N.N.Meiman, E.S.Nikolayevski,
V.N.Petruhhin.

On the Saddle Point Method.....85

ЛЕТНЯЯ ШКОЛА ПО ПРОБЛЕМАМ ТЕОРИИ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

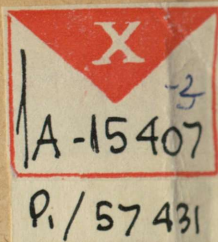
Отепя 1967. III часть. Методы вычисления.
На русском языке.

Редакционно-издательский совет Академии
наук Эстонской ССР
Таллин, ул. Сакала, 3.

Подписано к печати 28 XI 1969. Печатных
листов 8 + приложение.
Учетно-издательских листов 5,01. Тираж 500.
MB-08156. Заказ 1311.

Ротапринт Комитета пен
Таллин, ул. Тоомпеа, 1
Цена 50 коп.

Цена 50 коп.



К методу перевала. Колкунов В.А.,
Мейман Н.Н., Николаевский
Е.С., Петрухин В.Н. В сб. "II Лет-
няя школа по проблемам теории элементарных
частиц", Тарту, Институт физики и астроно-
мии АН ЭССР, 1969, том III, стр. 85-113.

В работе изучаются формальные разложения контурных интегралов по методу перевала. Получены в явном виде через подынтегральную функцию все члены перевального ряда. Для расширения класса вычисляемых контурных интегралов предложен модифицированный метод перевала, учитывающий особенности, ближайшие к области влияния точки перевала. Вопросы сходимости и применимости метода перевала при отсутствии большого параметра обсуждаются на конкретных примерах.

Подробно изложено применение модифицированного метода перевала к вычислению фазового объема и дан алгоритм программы для ЭВМ. Рис. 4. Библ. 3 назв.

P, / 57431

Фазовые интегралы. Колкунов В.А.,
Мейман Н.Н., Николаевский
Е.С., Петрухин В.Н. В сб. "II Лет-
няя школа по проблемам теории элементарных
частиц", Тарту, Институт физики и астроно-
мии АН ЭССР, 1969, том III, стр. 3-84.

Предметом работы является изучение фазовых интегралов, определяющих характеристики реакций как то полное сечение, время жизни, корреляции и т.д. в феноменологической теории элементарных частиц с постоянными формфакторами. Рассматриваются также различные распределения по массам и импульсам.

Основным методом является сведение многократных фазовых интегралов к однократным контурным интегралам в комплексной плоскости. Последние вычисляются по модифицированному методу перевала. Приводится подробное изложение вычислительных алгоритмов. Работа содержит специальные исследования по теории функций Ханкеля. Рис. 27. Библ. 6 назв.