

TARTU ÜLIKOOL
Loodus- ja täppisteaduste valdkond
Füüsika instituut

Joosep Lember

Varpajamid skalaar-tensorteooriates

Magistritöö (30 EAP)

Füüsika õppekava

Juhendajad: Laur Järv, PhD
Sebastian Schuster, PhD

Tartu 2025

Varpajamid skalaar-tensorteooriates

Varpajamitele vastavad aegruumi konfiguratsioonid võimaldavad vaatlejal läbida kauguseid kuitahes kiiresti erirelatiivsusteooria printsiipe rikkumata. Kuigi see oleks revolutsiooniline kosmosereisimise valdkonnas, on teada, et üldrelatiivsusteoorias on varpajamite jaoks vaja eksootilist ainet, mis rikub energiatingimusi. Samas teame kosmoloogilistest vaatlustest, et üldrelatiivsusteoorial on mitmeid probleeme, mille lahendamise lootuses on loodud erinevaid laiendatud gravitatsiooniteooriaid. Tuginedes tulemustele üldrelatiivsusteoorias, uurime käesolevas töös varpajameid skalaar-tensorteooriates ja analüüsime, kas need on võimalikud ilma kummitusvälja või eksootilise aineta. Töös teeme esmased sammud probleemi lahendamiseks, esitades erinevad võimalikud eeldused ja koostades nende abil lahenduspuu. Analüüsime lahenduspuu harusid erinevate täiendavate eelduste abil ja eemaldame neist füüsikaliselt problemaatilised.

Märksõnad: Skalaar-tensortüüpi gravitatsiooniteooriad, varpajamid

CERCS: P190 Matemaatiline ja üldine teoreetiline füüsika, klassikaline mehaanika, kvantmehaanika, relatiivsus, gravitatsioon, statistiline füüsika, termodünaamika

Warp drives in scalar-tensor theories

Spacetime configurations corresponding to warp drives allow observers to traverse distances faster than the speed of light without violating the postulates of special relativity. Although appealing for space travel, it has been shown that warp drives in general relativity require exotic matter that violates energy conditions. Cosmological observations bring out the shortcomings of general relativity due to which many modified theories of gravity have been proposed. In this work we build upon the previous results in general relativity and study warp drives in scalar-tensor theories of gravity in order to find whether warp drives are possible without introducing ghost fields or exotic matter. We present first steps in solving the problem by mapping out a tree of solutions based on various assumptions. Considering additional assumptions we analyse the branches of the tree and the physical problems that arise.

Keywords: Scalar-tensor theories of gravity, warp drives

CERCS: P190 Mathematical and general theoretical physics, classical mechanics, quantum mechanics, relativity, gravitation, statistical physics, thermodynamics

Sisukord

Sissejuhatus	4
1 Teoreetiline taust	6
1.1 Üldrelatiivsusteooria geomeetriline taust	6
1.2 Energiatingimused üldrelatiivsusteoorias	7
1.3 Tetraadformalism	9
1.4 3+1 lahutamine	11
1.5 Skalaar-tensorteooriad	12
1.6 Efektiivne energia-impulsi tensor skalaar-tensorteooriates	13
2 Varpajamid üldrelatiivsusteoorias	15
2.1 Varpajamite kontseptsioon ja matemaatiline kirjeldus	15
2.2 Väljavõrrandid ja null energiatingimus	16
2.3 Null energiatingimuse rikkumine	18
3 Varpajamid skalaar-tensorteooriates	20
3.1 Väljavõrrandid tetraadbaasis	20
3.2 Null energiatingimus	21
3.3 Väljavõrrandite analüüsimine – lahenduspuu koostamine	23
4 Lahenduspuu uurimine	25
4.1 Tupikteed	25
4.2 Tupikteed eeldusel $\Phi = \Phi(v)$	26
4.3 Mitteminimaalselt seotud Higgsi väli	31
4.4 Kokkuvõtte välistatud harudest	32
4.5 Lahenduspuu tüvi	33
5 Arutelu	35
6 Kokkuvõtte	36
Tänuavaldused	38
Kirjandus	40
II. Litsents	41

Sissejuhatus

Albert Einsteini 1915. aastal formuleeritud üldrelatiivsusteooria (ÜRT) on siiani kõige paremini gravitatsiooni kirjeldav teooria. ÜRT suudab suurepärase täpsusega kirjeldada mitmeid nähtusi, näiteks planeetide periheeli nihe, mida varasem Newtoni teooria ei võimaldanud. Vaatamata ÜRT suurele edule hulgaliste vaatlustulemuste selgitamisel, on sellel ka omad nõrkused. Näiteks ei suuda teooria kirjeldada universumi kiirenevat paisumist ja galaktikate kiirusprofile ilma tumeenergiat ja tumeainet teooriasse lisamata. Tumeainet pole – vaatamata sellele, et see peaks moodustama enamuse universumis leiduvast aineest – aga eksperimentaalselt suudetud tuvastada ja tumeenergia avaldub teoorias kosmoloogilise konstandi kaudu, mille vaatlustest arvatud väärtus on vastuolus osakestefüüsikast arvatud teoreetilise väärtusega. Probleemide lahendamiseks on välja pakutud mitmeid erinevaid mooduseid ÜRT laiendamiseks. Üheks enim levinuimaks meetodiks on lisada teooriasse gravitatsiooniga mitteminimaalselt seotud skalaarväli, jõudes skalaar-tensorteooriateni. [1, 2]

Enne üldrelatiivsusteooriat formuleeris Einstein 1905. aastal erirelatiivsusteooria, mille ühe postulaadi kohaselt ei saa mitte ükski objekt liikuda lokaalselt kiiremini kui valgus. Sellegipoolest ei ole väljavaated efektiivsest reisimisest kosmoses täiesti lootusetud, sest probleemi lahendamiseks on välja pakutud varpajamid – teoreetilised aegruumi konfiguratsioonid, mis võimaldavad liikuda ühest ruumi punktist teise kuitahes kiiresti erirelatiivsusteooria printsiipe rikkumata. Varpajamite puhul toimub sobivates piirkondades ruumi paisumine ja kokkutõmbumine, mis võimaldab läbida kahe punkti vahelist kaugust efektiivselt kuitahes lühikese ajaga. Üldrelatiivsusteoorias viivad varpajamid energiatingimuste rikkumiseni, kusjuures on tõestatud, et ÜRT-is ei ole varpajameid kirjeldav meetrika konfiguratsioon võimalik ilma null energiatingimuse rikkumiseta [3]. Null energiatingimuse rikkumine ÜRT-is toob endaga kaasa ebafüüsikalise eksootilise aine vajaduse, mis viib kahtluse alla varpajamite realistlikkuse. [4]

Käesoleva magistritöö eesmärk on, tuginedes tulemustele ÜRT-is, jätkata varpajamite uurimist skalaar-tensorteooriates. Analüüsime, kas nendes teooriates on võimalik konstrueerida varpajameid, mis ei riku energiatingimusi ega nõua kummitusvälja lisamist teooriasse. Töös uurime, kuidas energiatingimused avalduvad skalaar-tensorteooriates ja esitame esmased sammud probleemi analüüsimiseks, kaardistades erinevad eeldused, mille korral jõuame ebafüüsikaliste olukordadeni. Samuti arutleme võrrandite üldise ülesehituse üle ja toome välja erinevad proble-

maatilised aspektid, mis on seotud vabadusastmete ja võrrandite arvuga.

Esimeses peatükis tutvustame töös vajaminevaid matemaatilisi mõisteid ja kontseptsioone, nagu tetraadformalism ja 3+1 lahutamine. Samuti anname ülevaate üldrelatiivsusteooriast ja skalaar-tensorteooriast ning sellest, kuidas erinevates teooriates on defineeritud energiatingimused. Teises peatükis tutvustame varpajameid ja kirjeldame varasemaid tulemusi üldrelatiivsusteooriast. Kolmas peatükk annab ülevaate väljavõrranditest ja null energiatingimusest skalaar-tensorteooriates. Erinevatele eeldustele tuginedes koostame võrrandite põhjal lahenduspuu. Neljandas peatükis uurime lahenduspuu erinevaid harusid põhjalikult, juurime neist välja ebafüüsikalised ja arutleme allesjäänud harude üle. Töö lõpus arutleme skalaar-tensorteooria väljavõrrandite üle varpajamite kontekstis ja toome välja erinevad aspektid, mis muudavad probleemi lahendamise keeruliseks.

Käesolevas töös on läbivalt kasutatud ühikuid, kus $c = G = 1$ ja meetrika signatuur on $(-, +, +, +)$. Arvutusteks on kasutatud Pythonil põhinevat arvutusprogrammi Jupyter Notebook, milles kasutasime sümbolarvutuse paketti Sympy [5].

1 Teoreetiline taust

1.1 Üldrelatiivsusteooria geomeetiline taust

Käesolevas peatükis tutvustatakse aegruumi geomeetria kirjeldamiseks vajalikke suuruseid, mida kasutatakse Einsteini üldrelatiivsusteooria ülesehitamisel. Peatükk põhineb allikal [6].

Aegruumi geomeetria kirjeldamiseks kasutatakse teist järku sümmeetrilist kovariantset tensorit $g_{\mu\nu}$, mida nimetatakse **meetriliseks tensoriks** ehk **meetrikaks**. Meetrika abil saab defineerida vektorite skalaarkorrutise

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a^\mu b^\nu g_{\mu\nu}, \quad (1)$$

seega kirjeldab meetrika punktidevahelisi kauguseid ja nurki. Infinitesimaalsete nihkevektorite skalaarkorrutise abil defineeritakse **meetrika jooelement** ehk **meetriline intervall**

$$ds^2 \equiv g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (2)$$

Tensorite ja vektorite komponentide muutumist paralleelnihetel aitab kirjeldada **seostus** $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$. Seostuse kaudu defineeritakse tensorite kovariantsed tuletised. Esimest järku tensori ehk vektori kovariantne tuletis on

$$\nabla_\mu V^\nu \equiv \partial_\mu V^\nu + \Gamma^\nu_{\mu\lambda} V^\lambda, \quad (3)$$

kusjuures siin ja edaspidi oleme osatuletise jaoks kasutanud tähistust

$$\partial_\mu V^\nu \equiv \frac{\partial V^\nu}{\partial x^\mu}. \quad (4)$$

Üldrelatiivsusteoorias kasutatakse meetrikast sõltuvat Levi-Civita seostust

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} (\partial_\mu g_{\alpha\nu} + \partial_\nu g_{\alpha\mu} - \partial_\alpha g_{\mu\nu}), \quad (5)$$

mis on sümmeetriline alumiste indeksite (μ ja ν) suhtes. Seostuse kaudu defineeritakse **Riemanni kõverustensor**

$$R^\rho_{\mu\sigma\nu} \equiv \partial_\sigma \Gamma^\rho_{\nu\mu} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\sigma\mu} + \Gamma^\alpha_{\nu\mu} \Gamma^\rho_{\sigma\alpha} - \Gamma^\alpha_{\sigma\mu} \Gamma^\rho_{\nu\alpha}, \quad (6)$$

mille ahendamisel saadakse **Ricci tensor**

$$R_{\mu\nu} \equiv R^\rho_{\mu\rho\nu}, \quad (7)$$

millest omakorda saab arvutada **Ricci skalaari**

$$R \equiv R_{\mu\nu} g^{\mu\nu}. \quad (8)$$

Albert Einsteini formuleeritud üldrelatiivsusteoorias kirjeldatakse aegruumi geomeetriat kõveruse kaudu ja teooria mõjufunktsionaal on

$$S = S_{EH} + S_m, \quad (9)$$

kus esimest liiget nimetatakse **Einsteini-Hilberti mõjufunktsionaaliks**

$$S_{EH} \equiv \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} R, \quad (10)$$

kusjuures g on meetrika determinant ja miinusmärk tuleneb sellest, et determinant on negatiivne. Teine liige S_m kirjeldab mateeriaväljade dünaamikat. Mõjufunktsionaali varieerimisel meetrika $g_{\mu\nu}$ järgi saadakse meetrika väljavõrrandid ehk **Einsteini väljavõrrandid**

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \kappa^2 T_{\mu\nu}, \quad (11)$$

kus $G_{\mu\nu}$ on **Einsteini tensor**, konstant κ^2 on käesolevas töös kasutatavates ühikutes $\kappa^2 \equiv 8\pi$ ja $T_{\mu\nu}$ on **energia-impulsi tensor**, mis saadakse mõjufunktsionaalis sisalduva mateeriapanuse S_m varieerimisel meetrika järgi ja on aegruumi kõveruse allikaks.

Üldrelatiivsusteooriat on võimalik formuleerida ka **Palatini formalismis**, kus eeldatakse *a priori*, et seostus on meetrikast sõltumatu. Täiendavate muutujate tõttu tuleb mõjufunktsionaali varieerida ka seostuse järgi, mille tulemusena saadakse seostuse väljavõrrandid. Nõudes seostuse sümmeetrilisust alumiste indeksite suhtes, järeldub seostuse väljavõrranditest, et seostuseks peab olema Levi-Civita seotus (5). Järelikult on ÜRT-i väljavõrrandite seisukohast meetriline formalism ja Palatini formalism ekvivalentsed.

1.2 Energiatingimused üldrelatiivsusteoorias

Alapeatükk põhineb allikal [4], kui ei ole viidatud teisiti. Käesolevas töös mängivad olulist rolli energiatingimused, mille abil on võimalik järeldada, kas aegruumi konfiguratsioonid on realistlikud või vajavad ebafüüsikalist ainet.

Energiatingimused on energia-impulsi tensorile $T_{\mu\nu}$ seatud piirangud, mis tagavad, et energia-impulsi tensor kirjeldab füüsikaliselt realistlikku ainet. Kuna Einsteini võrrandid seovad omavahel energia-impulsi tensori ja geomeetrilised suurused, nagu Einsteini tensor $G_{\mu\nu}$, on energiatingimused ka kaudselt tingimused aegruumi geomeetrialet. Ilma ühegi energiatingimusega on Einsteini

võrrandid tautoloogilised, sest valides sobiva energia-impulsi tensori on võimalik konstrueerida kõikvõimalikke aegruumi konfiguratsioone, hoolimata sellest, kui realistlikud või ebarealistlikud need on. Lisaks mainitud füüsikalistele kaalutlustele on energiatingimused motiveeritud teoreetilisest vaatepunktist, kus neid saab kasutada näiteks massi positiivsuse ja singulaarsusteoreemide tõestamisel. Energiatingimusi on erinevaid.

- **Tugev energiatingimus** ehk **SEC** (ingl *strong energy condition*) nõuab, et iga ajasarnase vektori V^μ jaoks kehtiks

$$\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu}\right) V^\mu V^\nu \geq 0. \quad (12)$$

Einsteini väljavõrrandite abil saab selle tingimuse ümber kirjutada kujul $R_{\mu\nu}V^\mu V^\nu \geq 0$, mille kohaselt on gravitatsioon tõmbava mõjuga.

- **Dominantne energiatingimus** ehk **DEC** (ingl *dominant energy condition*), mille kohaselt

$$T_{\mu\nu}V^\mu V^\nu \geq 0, \quad F^\mu F_\mu \leq 0, \quad (13)$$

kusjuures $F^\mu = -T^\mu{}_\nu V^\nu$. Dominantne energiatingimus nõuab, et iga ajasarnase vaatleja jaoks on energiatihedus positiivne ja selle häiritused levivad kausaalselt.

- **Nõrk energiatingimus** ehk **WEC** (ingl *weak energy condition*), mille kohaselt iga ajasarnase vektori V^μ jaoks kehtib

$$T_{\mu\nu}V^\mu V^\nu \geq 0 \quad (14)$$

ehk iga ajasarnase vaatleja jaoks on energiatihedus positiivne.

- **Null energiatingimus** ehk **NEC** (ingl *null energy condition*), mis väidab, et iga nullvektori k^μ jaoks kehtib

$$T_{\mu\nu}k^\mu k^\nu \geq 0, \quad (15)$$

mis on nõrga energiatingimuse piirjuht valgusesarnaste vaatlejate korral. ÜRT-is on null energiatingimus ekvivalentne **null koonduvuse tingimusega** (ingl *null convergence condition*) ehk **NCC**, mis nõuab, et

$$R_{\mu\nu}k^\mu k^\nu \geq 0. \quad (16)$$

Energiatingimuste definitsioonidest on näha, et need ei ole üksteisest sõltumatud, vaid on omavahel seotud järgmiste implikatsioonide kaudu

$$DEC \implies WEC \implies NEC \quad \text{ja} \quad SEC \implies NEC. \quad (17)$$

Järelikult, kui null energiatingimus on rikutud, siis on rikutud ka ülejäänud energiatingimused. Null energiatingimuse rahuldatus, aga ei tähenda automaatselt, et teised energiatingimused on rahuldatud. Seega on null energiatingimus kõige nõrgem energiatingimus, mis muudab selle ka käesoleva töö kontekstis kõige olulisemaks. [3]

Füüsikaliselt realistlikuks olukorraks ei pea olema kõik energiatingimused rahuldatud, vaid vastavalt süsteemist võivad olla mõned neist rikutud. Näiteks on teada, et kosmoloogilistel skaaladel praegu ja varajase inflatsiooni perioodil on tugev energiatingimus rikutud. Null energiatingimuse rikkumine esineb näiteks Casimiri efektis, kuid sel juhul on rikkumine lubatud ainult lühikese ajavahemiku vältel, mis on määratud Heisenbergi määramatuse printsiibist. Null energiatingimuse rikkumine pikemaks perioodiks on tugev vihje ebafüüsikalisele olukorrale ning ainet, mis rikub null energiatingimust nimetatakse **eksootiliseks aineks**.

1.3 Tetraadformalism

Alapeatükk põhineb allikal [7], kui ei ole viidatud teisiti. Teooriast tulenevaid väljavõrrandeid on võimalik lihtsustada, kui teha tensoritele baasiteisendus uude mittekoordinaatbaasi ehk tetraadbaasi. Seega on oluliseks matemaatiliseks vahendiks tetraadformalism, mille tutvustamisega tegeleb käesolev alapeatükk.

Matemaatiliselt kirjeldatakse aegruumi 4-dimensionaalse muutkonnana \mathcal{M} . Igas muutkonna punktis x saab defineerida selle punkti puutujaruumi $T_x\mathcal{M}$, millel defineeritakse lokaalne koordinaatsüsteem koordinaatidega x^μ . Seejärel saab defineerida lokaalsed baasivektorid \vec{e}_μ , mille abil esitatakse kõik vektorid \vec{V} kujul $\vec{V} = V^\mu \vec{e}_\mu$. Analoogselt saab esitada kõik erinevat järku tensorid baasis $\{e_\nu\}$. Baasivektorite skalaarkorrutus defineerib meetrika $g_{\mu\nu}$

$$g_{\mu\nu} = \vec{e}_\mu \cdot \vec{e}_\nu, \quad (18)$$

kusjuures, kuna meetrika võib olla suvaline, ei pruugi baasivektorid olla ortonormaalised. Defineeritud baas ei ole ühene, sest tensoreid ja vektoreid võib esitada ka teistes baasides. Tetraadformalismis sisu seisneb selles, et tensorid teisendatakse ortonormaaalsesse baasi, mida nimetatakse mittekoordinaatbaasiks ehk **tetraadbaasiks**, mille baasivektorid on defineeritud teisendusega

$$\vec{e}_a = e_a^\mu \vec{e}_\mu, \quad (19)$$

kusjuures teisendusmaatriksit $e_a^\mu \in GL(4, \mathbb{R})$ nimetatakse **tetraadiks**. Kui koordinaatbaasis tähistame indekseid kreeka tähtedega, siis tetraadbaasis kasutame indeksite tähistamiseks ladina tähestikku, kusjuures indeksid võtavad väärtuseid hulgast $\{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}\}$. Kuna tetraadbaas on ortonormaalne teiseneb meetrika $g_{\mu\nu}$ **Minkowski meetrikaks** η_{ab}

$$g_{\mu\nu}e_a^\mu e_b^\nu = \vec{e}_a \cdot \vec{e}_b = \eta_{ab} \equiv \text{diag}(-1, 1, 1, 1). \quad (20)$$

Lisaks meetrikale saab tetraadide abil teisendada tetraadbaasi kõiki tensoreid, sõltumata nende järgust, kasutades selleks sobivat arvu tetraade. Näiteks kolmandat järku tensori $T_{\mu\nu\rho}$ teisendamiseks on vaja kolme tetraadi

$$T_{abc} = e_a^\mu e_b^\nu e_c^\rho T_{\mu\nu\rho} \quad (21)$$

ning kontravariantsete tensorite teisendamiseks tuleb kasutada pöördtetraadi $e_\mu^a = (e_a^\mu)^{-1}$, näiteks

$$V^a = e_\mu^a V^\mu. \quad (22)$$

Samuti tuleb meele pidada, et tetraadbaasi saab teisendada ainult tensoreid, mistõttu suuruseid, nagu $\partial_\mu \partial_\nu \Phi$, kus Φ on skalaarväli, ei saa niiviisi tetraadbaasi teisendada, vaid selle asemel tuleks käsitleda tensoriaalseid suuruseid, näiteks $\nabla_\mu \partial_\nu \Phi$. Tetraadbaasis esitatud suurustest kovariantsete tuletiste võtmine ei ole enam nii triviaalne kui tensorite teisendamine mittekoordinaatbaasi. Kovariantne tuletis sarnaneb ülesehituselt valemile (3), kuid tavalise seostuse asemel tuleb tetraadbaasis kasutusele võtta **spinn-seostus** $\omega_\mu^a{}_b$ ning

$$\nabla_\mu X^a{}_b = \partial_\mu X^a{}_b + \omega_\mu^a{}_c X^c{}_b - \omega_\mu^c{}_b X^a{}_c. \quad (23)$$

Spinn-seostuse saab arvutada tavalisest seostusest ja tetraadist

$$\omega_\mu^a{}_b = e_\nu^a e^\lambda{}_b \Gamma^\nu{}_{\mu\lambda} - e^\lambda{}_b \partial_\mu e_\lambda^a. \quad (24)$$

Kuigi tetraadformalismis eesmärk on esitada väljavõrrandid lihtsamal kujul on sellel ka omad puudused. Kui koordinaatbaasis on baasivektoreid võimalik identifitseerida osatuletistega ∂_μ , siis tetraadbaasi puhul on tegemist mittekoordinaatbaasiga, mistõttu ei saa baasivektoreid niimoodi koordinaatidega siduda. Seega on suurused, mis koordinaatbaasis olid osatuletised, nagu $\partial_\mu \Phi$, tetraadbaasis lihtsalt mingisuguse tensori komponendid, mida ei tohi enam tõlgendada osatuletistena. Järelikult on võimalik tetraadbaasis väljavõrrandeid manipuleerida ainult algebraliselt. [8]

1.4 3+1 lahutamine

Varpajamite konstrueerimisel ja nende analüüsimisel kasutatakse aegruumi kirjeldamiseks meetodit nimega **3+1 jagamine** ehk **3+1 lahutamine** (ingl *3+1 decomposition*), mis võimaldab omavahel eraldada tensorite ajalised ja ruumilised komponendid. Käesolevas alapeatükis anname lühikese ülevaate 3+1 lahutamise põhimõttest. Alapeatükk põhineb allikal [9].

Protseduur seisneb 4-dimensionaalse muutkonna \mathcal{M} kirjeldamises 3-dimensionaalsete ruumiliste hüperpindade Σ_t kogumina, kus igal ruumilisel hüperpinnal on ajakoordinaat konstantne. Ruumilistel hüperpindadel defineeritakse ruumiline meetrika γ_{ij} , kus i, j võtavad väärtusi hulgast $\{1, 2, 3\}$. Hüperpinna igas punktis on võimalik defineerida normaalisuund, mis on antud 4-vektoriga n^μ . Vaatlejaid, kelle 4-kiirus on n^μ , nimetatakse **Euleri vaatlejateks** (ingl *Eulerian observer*). Euleri vaatleja omaaja intervalli kahe ruumilise hüperpinna vahel määrab **möödumisfunktsioon** α (ingl *lapse function*). Kuna normaalisuunas liikuva vaatleja jaoks ei pruugi koordinaadid ühelt hüperpinnalt teisele liikudes samaks jääda, on tarvis erinevate ruumiliste hüperpindade koordinaatsüsteemid omavahel siduda. Seda teeb **nihkevektor** β^i (ingl *shift vector*). Seega kirjeldavad möödumisfunktsioon ja nihkevektor ajalist evolutsiooni ruumiliselt hüperpinnalt Σ_t järgmisele hüperpinnale Σ_{t+dt} . Nende abil saab avaldada 4-vektori $n^\mu = \alpha^{-1}(1, -\beta^i)$ ja üldise aegruumi meetrilise intervalli

$$ds^2 = -\alpha^2 dt^2 + \gamma_{ij}(dx^i + \beta^i dt)(dx^j + \beta^j dt). \quad (25)$$

Kui ruumiliste hüperpindade kõverust kirjeldab meetrika γ_{ij} , millest saab arvutada Riemanni tensori ruumiliste hüperpindade jaoks, siis selleks et kirjeldada hüperpindade Σ_t paiknemist 4-dimensionaalses muutkonnas \mathcal{M} kasutatakse **väliskõverust** (ingl *extrinsic curvature*)

$$K_{\mu\nu} = -\gamma^\alpha{}_\mu \gamma^\beta{}_\nu \nabla_\alpha n_\beta, \quad (26)$$

kuşjuures

$$\gamma_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu \quad (27)$$

ja $n_\mu = (-\alpha, 0, 0, 0)$. Väliskõverus omab mittetriviaalseid väärtuseid ainult ruumiliste indeksite puhul, seega kasutatakse $K_{\mu\nu}$ asemel tihti tähistust K_{ij} . Väliskõveruse jälg K kirjeldab Euleri vaatlejate geodeetiliste joonte käitumist. Nimelt, kui $K = 0$, siis geodeetilised ei koonu ega haju ning seda nähtust nimetatakse **nullpaisumiseks**. Valemist (27) on ilmne, et 4-vektor n^μ on tõepoolest hüperpindadega Σ ortogonaalne, sest

$$n^\mu \gamma_{\mu\nu} = n^\mu g_{\mu\nu} + n^\mu n_\mu n_\nu = n_\nu - n_\nu = 0, \quad (28)$$

kus on arvestatud, et n^μ on normeeritud ja ajasarnane ehk $n^\mu n_\mu = -1$.

1.5 Skalaar-tensorteooriad

Käesolevas alapeatükis tutvustame üht enim levinud üldrelatiivsusteooria laiendust, mida nimetatakse skalaar-tensorteooriaks ja mille uurimisega tegeleb ka käesolev töö. Alapeatükk põhineb allikal [10], kui ei ole viidatud teisiti.

Vaatamata ÜRT-i suurele edule, on sellel omad puudused, mille lahendamise lootuses on välja pakutud erinevaid modifitseeritud gravitatsiooniteooriaid. Teooria laiendamiseks on mitmeid erinevaid võimalusi, näiteks aegruumi geometria kirjeldamine täiendavate geometriliste suuruste, nagu vääne ja mittemeetrilisus, abil. Selle tulemusena jõuame teleparalleelsete teooriateni [11]. Teiseks võimaluseks on lisada aegruumi gravitatsiooniga mitte minimaalselt seotud skalaarväli Φ . Niisuguse skalaarvälja lisamisel üldrelatiivsusteooriasse saame skalaar-tensorteooria, mille mõjufunktsionaal on

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} [\mathcal{A}(\Phi)R - \mathcal{B}(\Phi)g^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi - 2\mathcal{V}(\Phi)] + S_m, \quad (29)$$

kusjuures funktsioonid $\mathcal{A}(\Phi)$, $\mathcal{B}(\Phi)$ ja $\mathcal{V}(\Phi)$ on **vabad funktsioonid** ehk **mudelfunktsioonid**, mille fikseerimine määrab konkreetse teooria. Kui $\mathcal{A}(\Phi)$ on konstantne, siis on skalaarväli gravitatsiooniga minimaalselt seotud. Minimaalselt seotud skalaarvälja puhul on teooria ekvivalentne ÜRT-iga, seega kõik ÜRT-is tehtud järeldused kehtivad ka minimaalselt seotud skalaarväljaga skalaar-tensorteoorias.

Käesolevas töös käsitletakse üldistatud skalaar-tensorteooriaid, mis hõlmavad nii meetrilist kui ka Palatini formalismi. Palatini formalismis lisanduvad meetrika väljavõrranditele ka seostuse varieerimisel saadud seostuse väljavõrrandid. Kui nõuda seostuse sümmeetrilisust alumiste indeksite suhtes, siis tuleneb seostuse väljavõrranditest, et ühelt formalismilt saab üle minna teise, kui asendada vaba funktsioon $\mathcal{B}(\Phi)$, kusjuures

$$\mathcal{B}(\Phi)_{\text{Palatini}} = \mathcal{B}(\Phi) + \frac{3(\mathcal{A}')^2}{2\mathcal{A}} \quad (30)$$

ja ülakoma tähistab tuletist skalaarvälja järgi. Üldistatud formalismis jäävad seega alles meetrika järgi varieerimisel saadud meetrika väljavõrrandid ja skalaarvälja järgi varieerimisel saadud

skalaarvälja võrrand. Meetrika väljavõrrandid on

$$\begin{aligned} \mathcal{A}G_{\mu\nu} + \left[\frac{\mathcal{B}}{2} + \mathcal{A}'' - \delta_P \frac{3(\mathcal{A}')^2}{4\mathcal{A}} \right] g_{\mu\nu} g^{\rho\sigma} \partial_\rho \Phi \partial_\sigma \Phi - \left[\mathcal{B} + \mathcal{A}'' - \delta_P \frac{3(\mathcal{A}')^2}{2\mathcal{A}} \right] \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi + \\ + \mathcal{A}' (g_{\mu\nu} \square \Phi - \nabla_\mu \partial_\nu \Phi) + g_{\mu\nu} \mathcal{V} = T_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (31)$$

ja skalaarvälja võrrand on kujul

$$R\mathcal{A}' + \left(\mathcal{B} - \frac{3\delta_P(\mathcal{A}')^2}{2\mathcal{A}} \right)' g^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi + 2 \left(\mathcal{B} - \frac{3\delta_P(\mathcal{A}')^2}{2\mathcal{A}} \right) \square \Phi - 2\mathcal{V}' = 0. \quad (32)$$

Võttes võrrandist (31) jälje, saab skalaarvälja võrrandist eemaldada Ricci skalaari ja saame

$$\frac{2\mathcal{A}\mathcal{B} + 3\delta_m(\mathcal{A}')^2}{\mathcal{A}} \square \Phi + \frac{(2\mathcal{A}\mathcal{B} + 3\delta_m(\mathcal{A}')^2)'}{2\mathcal{A}} \partial^\rho \Phi \partial_\rho \Phi - \frac{2(\mathcal{A}\mathcal{V}' - 2\mathcal{A}'\mathcal{V})}{\mathcal{A}} = \frac{\mathcal{A}'}{\mathcal{A}} T. \quad (33)$$

Siinkohal suurused δ_m ja δ_P eristavad meetrilise ja Palatini formalismi vahel, nimelt

$$\delta_m = \begin{cases} 0, & \text{Palatini formalism,} \\ 1, & \text{meetiline formalism,} \end{cases} \quad \delta_P = \begin{cases} 1, & \text{Palatini formalism,} \\ 0, & \text{meetiline formalism,} \end{cases} \quad (34)$$

millest järeldub, et $\delta_m + \delta_P = 1$. Väljavõrranditest on näha, et erinevalt ÜRT-ist ei ole skalaar-tensorteooriates enam meetiline ja Palatini formalism ekvivalentsed. Vabad funktsioonid ei ole täiesti suvalised, vaid kehtivad tingimused

$$\mathcal{A}(\Phi) > 0, \quad \mathcal{V}(\Phi) \geq 0, \quad (35)$$

kusjuures esimene tingimus tagab, et gravitatsioonikonstant oleks alati positiivne, sest vastasel juhul oleks gravitatsioon tõukava, mitte tõmbava, iseloomuga. Teine tingimus on selleks, et vältida ebastabiilsusi. Skalaarvälja lisamisel teooriasse peame tagama, et tegu ei oleks **kummitusväljaga**, mis võimaldab saavutada kuitahes suurt negatiivset energiat. Kummitusvälja interakteerumisel ainega on võimalik ainel saavutada lõpmata suuri energiasid, mis viiks meie universumi hävinguni. Selleks, et skalaarväli ei oleks kummitusväli peavad vabad funktsioonid samuti rahuldama tingimust

$$N_G \equiv 2\mathcal{A}\mathcal{B} + 3\delta_m(\mathcal{A}')^2 > 0. \quad (36)$$

1.6 Efektiivne energia-impulsi tensor skalaar-tensorteooriates

Käesolev alapeatükk selgitab, kuidas skalaar-tensorteooriates defineeritakse efektiivne energia-impulsi tensor ja kuidas see on seotud energiatingimustega. Peatükk põhineb allikal [12].

Üldrelatiivsusteoorias on aegruumi geometria ja aine vaheline seos antud Einsteini väljavõrranditega, mis on saadud mõjufunktsionaali varieerimisel meetrika järgi. Skalaar-tensorteooriates on meetrika väljavõrrandid palju keerulisemad, kuid need saab ümber kirjutada kujul

$$G_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{\text{eff}} \equiv \frac{T_{\mu\nu}}{\mathcal{A}} - \frac{1}{\mathcal{A}} \left[\frac{\mathcal{B}}{2} + \mathcal{A}'' - \delta_P \frac{3(\mathcal{A}')^2}{4\mathcal{A}} \right] g_{\mu\nu} g^{\rho\sigma} \partial_\rho \Phi \partial_\sigma \Phi - \frac{\mathcal{A}'}{\mathcal{A}} (g_{\mu\nu} \square \Phi - \nabla_\mu \partial_\nu \Phi) + \frac{1}{\mathcal{A}} \left[\mathcal{B} + \mathcal{A}'' - \delta_P \frac{3(\mathcal{A}')^2}{2\mathcal{A}} \right] \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi - g_{\mu\nu} \frac{\mathcal{V}}{\mathcal{A}}, \quad (37)$$

kus $G_{\mu\nu}$ on sama Einsteini tensor, mis ilmub ka ÜRT-is, kuid kõik täiendavad liikmed väljavõrrandis on peidus **efektiivses energia-impulsi tensoris** $T_{\mu\nu}^{\text{eff}}$. Energiatingimused võib formaalselt defineerida samamoodi nagu ÜRT-is, asendades energia-impulsi tensori efektiivsega. Niimoodi defineeritud energiatingimusi nimetame käesolevas töös efektiivseteks energiatingimusteks, et eristada neid energiatingimustest, mis on defineeritud tavalise energia-impulsi tensori $T_{\mu\nu}$ kaudu. Kuna efektiivne energia-impulsi tensor sisaldab endas veel täiendavaid panuseid, mis tulevad mitteminimaalselt seotud skalaarväljast, siis ei ole efektiivsete energiatingimuste tõlgendused enam samasugused nagu ÜRT-is.

2 Varpajamid üldrelatiivsusteoorias

Peatükk tutvustab varpajamite kontseptsiooni ja matemaatilist tausta ning varasemaid tulemusi varpajamitest üldrelatiivsusteoorias, mida kasutame edasises skalaar-tensorteooria analüüsis. Peatükk põhineb allikal [3], kui ei ole viidatud teisiti.

2.1 Varpajamite kontseptsioon ja matemaatiline kirjeldus

Varpajamite kontseptsiooni tutvustas esimesena ameerika ulmekirjanik John. W. Campbell 1957. aastal [13] ja need kogusid üldsuse seas enim populaarsust tänu menukale ulmesarjale „Star Trek“. Matemaatiliselt kirjeldas varpajameid esimesena Mehhiko füüsik Miguel Alcubierre aastal 1994 [14]. Tema tööd täiendas 2002. aastal matemaatik José Natario [15].

Varpajamid kujutavad endast süsteemi, mille abil saab kosmoselaev liikuda ühest ruumi punktist teise mistahes lühikese aja jooksul. Selleks, et vältida Einsteini erirelatiivsusteooria rikkumist, mille kohaselt ei ole võimalik lokaalselt valguse kiirusest kiiremini liikuda, kasutab Alcubierre'i välja pakutud varpajam ruumi paisumist ja kokkutõmbumist. Olukord sarnaneb inflatsiooni-perioodiga, kus kaks ruumi punkti on põhjuslikult seotud just tänu ruumi paisumisele, mille tulemusena eemalduvad ruumi punktid üksteisest näivalt kiiremini kui valguskiirus. Analoogselt saab kasutada ruumi kokkutõmbumist, et kahte ruumi punkti mistahes kiiresti üksteisele lähendada. Varpajami puhul toimub ruumi kokkutõmbumine lokaalselt kosmoselaeva ees ja paisumine kosmoselaeva taga, et kosmoselaev viia ühest ruumi punktist teise kuitahes kiiresti ilma erirelatiivsusteooria printsiipe rikkumata. [14] José Natario üldistas Alcubierre'i konfiguratsiooni ja konstrueeris nn üldise Natario varpajami. Üldise erijuhuna näitas ta, et ruumi paisumine ja kokkutõmbumine pole tarvilik. Viimast nimetatakse nullpaisuvaks varpajamiks. Natario nullpaisuva varpajami korral toimub paisumine või kokkutõmbumine küll varpajami liikumissihis, kuid liikumisega risti toimub vastavalt kokkutõmbumine või paisumine, nii et ruumalaelemendid jäävad samaks. [15]

Matemaatiliselt kasutatakse varpajami kirjeldamiseks meetrikat 3+1 formalismis (vt peatükk 1.4). Natario üldist varpajamit kirjeldava meetrika joonelement on

$$ds^2 = -dt^2 + \delta_{ij}(dx^i - v^i(t, x, y, z)dt)(dx^j - v^j(t, x, y, z)dt) \quad (38)$$

ehk võrreldes üldise 3+1 lahutamise meetodil saadud meetrikaga (25) on $\alpha = 1$, $\gamma_{ij} = \delta_{ij}$ ja $\beta^i = -v^i$, kus vektor v^i kirjeldab varpajami kiirust, seega nimetatakse seda vastavalt **kiirusprofiiliks** (ingl *velocity profile*) [15]. Ääritingimustena on nõutud, et kiirusprofiil ja tema tuletised on siledad ja piiratud [15]. Alcubierre'i varpajam on Natario varpajami alamjuht, mille saab, kui fikseerida varpajami liikumissihiks näiteks z -telg ja valida kiirusprofiiliks [14]

$$v^i = (0, 0, v), \quad v = v_s(t)f(r_s(t)) = \frac{dz_s(t)}{dt}f(r_s(t)), \quad r_s(t) = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_s)^2}, \quad (39)$$

kus $z_s(t)$ on suvaline aja funktsioon, mis kirjeldab varpajami liikumist, ja funktsioon f on antud kujul

$$f(r_s) = \frac{\tanh(\sigma(r_s + \tilde{R})) - \tanh(\sigma(r_s - \tilde{R}))}{2 \tanh(\sigma \tilde{R})}. \quad (40)$$

Siinkohal σ ja \tilde{R} on suvalised positiivsed parameetrid, mis kirjeldavad kiirusprofiili kuju [14]. Parameeter \tilde{R} iseloomustab varpajami raadiust ja σ kiiruse muutumist varpajami äärepirkonnas, kusjuures piirjuhul $\sigma \rightarrow \infty$ läheneb kiirusprofiil „kõvakübara“ funktsioonile (ingl *"top hat" function*) [14].

2.2 Väljavõrrandid ja null energiatingimus

Kuigi kirjanduses on toodud näiteid Euleri vaatlejatest, kelle jaoks varpajamite puhul on energiatihedus positiivne [16–18], siis kuna energiatingimused peavad kehtima **iga** vaatleja jaoks, ei ole see piisav, et väita energiatingimuste rahuldatust. Järelikult on mõistlik analüüsida energiatingimusi vaatlejast sõltumatult, et otsustada, kas need on rahuldatud või mitte. Seda on tehtud artiklis [3] ja ülevaade tehtud sammudest on antud järgnevates alapeatükkides.

Üldrelatiivsusteoorias peab iga varpajamit kirjeldav meetrika rahuldama meetrika väljavõrrandeid ehk Einsteini võrrandeid

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}. \quad (41)$$

Analüüsi lihtsustamiseks on mõistlik teisendada võrrandid tetraadbaasi valides järgnev tetraad ja pöördtetraad

$$e_a^\mu = \begin{pmatrix} 1 & v^x & v^y & v^z \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e_\mu^a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -v^x & 1 & 0 & 0 \\ -v^y & 0 & 1 & 0 \\ -v^z & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (42)$$

Teisenduse tagajärjel võtavad Einsteini väljavõrrandid kuju

$$G_{ab} = 8\pi T_{ab} . \quad (43)$$

Kuna tetraad on ruumilises osas (indeksite väärtuste 1, 2, 3 korral) ühikmaatriks, siis on ilmne, et tensorite teisendamisel ruumilised osad jäävad samaks ja teisenevad ainult komponendid, mis on seotud ajakoordinaadi indeksiga. Sellest tulenevalt on suvalise tensori $T_{\mu\nu}$ komponentide teisendamiseks vaja ainult vektorit $e_{\hat{0}}{}^\mu \equiv n^\mu = (1, v^x, v^y, v^z)$

$$T_{\hat{0}\hat{0}} = n^\mu n^\nu T_{\mu\nu} , \quad T_{\hat{0}\hat{i}} = T_{\mu i} n^\mu , \quad T_{\hat{i}\hat{j}} = T_{ij} . \quad (44)$$

Energia-impulsi tensori komponendid tetraadbaasis tähistame järgnevalt

$$T_{ab} = \begin{pmatrix} T_{\hat{0}\hat{0}} & T_{\hat{0}\hat{i}} \\ T_{\hat{i}\hat{0}} & T_{\hat{i}\hat{j}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\rho} & \hat{f}_i \\ \hat{f}_i & \hat{T}_{ij} \end{pmatrix} . \quad (45)$$

Kuna ruumilised hüperpinnad on tasased, siis järeldub, et $\hat{T}_{ij} = T_{ij}$. Einsteini võrranditest on võimalik energia-impulsi tensori komponendid esitada Einsteini tensori G_{ab} komponentide kaudu järgnevalt

$$\hat{\rho} = \frac{G_{\hat{0}\hat{0}}}{8\pi} , \quad \hat{f}_i = \frac{G_{\hat{0}\hat{i}}}{8\pi} , \quad T_{ij} = \frac{G_{\hat{i}\hat{j}}}{8\pi} . \quad (46)$$

Seejärel saame kasutada eelnevalt tutvustatud 3+1 formalismi. Natario varpajami meetrika (38) korral on väliskõverus (26) antud kiirusprofili v^i kaudu

$$K_{ij} = \partial_{(i} v_{j)} , \quad (47)$$

kujuures ümarsulud tähendavad sümmetriseerimist vastavate indeksite suhtes. Ääritingimustest järeldub, et asümptootikas lähenevad väliskõveruse komponendid nullile, mis on loogiline, sest varpajami puudumisel või sellest piisavalt kaugel on tegu tasase Minkowski ruumiga.

Rakendades 3+1 lahutamist Ricci tensorile, leiame

$$\begin{aligned} R_{\hat{0}\hat{0}} &= -n^\mu \partial_\mu K - \text{tr}(K^2) , \\ R_{\hat{0}\hat{i}} &= \partial_k K_{ij} \delta^{jk} - \partial_i K , \\ R_{\hat{i}\hat{j}} &= \mathcal{L}_n K + K K_{ij} - 2(K^2)_{ij} , \end{aligned} \quad (48)$$

kujuures $\mathcal{L}_n K = n^\mu \partial_\nu K$ on Lie tuletis 4-vektori n^μ suunas. Ricci tensori komponentide kaudu tuletame ka Ricci skalaari, mis võtab kuju

$$R = 2\mathcal{L}_n K + K^2 + \text{tr}(K^2) . \quad (49)$$

Einsteini tensori komponendid väliskõveruse kaudu on

$$\begin{aligned} G_{\hat{0}\hat{0}} &= \frac{1}{2} (K^2 - \text{tr}(K^2)) , \\ G_{\hat{0}\hat{i}} &= \partial_j K_{ij} - \partial_i K , \\ G_{\hat{i}\hat{j}} &= \mathcal{L}_n K_{ij} + K K_{ij} - (K^2)_{ij} - \left(\mathcal{L}_n K + \frac{1}{2} K^2 + \frac{1}{2} \text{tr}(K^2) \right) \delta_{ij} , \end{aligned} \quad (50)$$

millest saab, kasutades seoseid (46), esitada energia-impulsi tensori komponendid tetraadbaasis väliskõveruse K_{ij} kaudu.

Selleks, et teha järeldusi varpajamite konstrueerimiseks vajaliku aine kohta, on vaja analüüsida energiatingimusi. Kuna null energiatingimus on kõige nõrgem energiatingimus (vt peatükk 1.2) ehk selle rikkumine sunnib ka teiste energiatingimuste rikkumist, siis on oluline analüüsida just seda energiatingimust. Teame, et null energiatingimus on antud võrratusega

$$T_{\mu\nu} k^\mu k^\nu \geq 0 , \quad (51)$$

kusjuures tetraadbaasis saab sama tingimuse kirjutada kujul

$$\hat{\rho} + \hat{p}_i \geq 0 , \quad (52)$$

kus \hat{p}_i on lisaks $\hat{\rho}$ -le ülejäänud kolm energia-impulsi tensori omaväärtust. Saab näidata (vt peatükk 5 artiklis [3]), et

$$NEC \implies \hat{\rho} + \hat{p} \geq 0 , \quad (53)$$

kus on defineeritud **keskmine rõhk** (ingl *average pressure*)

$$\hat{p} = \frac{1}{3} T_{ij} \delta^{ij} . \quad (54)$$

Järelikult, kui $\hat{\rho} + \hat{p} < 0$, on null energiatingimus rikutud, millest omakorda järeldub teiste energiatingimuste rikutus. Kuna tegu on ainult ühepoolse implikatsiooniga, siis $\hat{\rho} + \hat{p} \geq 0$ ei tähenda automaatselt, et null energiatingimus on rahuldatud. Kasutades seoseid (46) ja (50) saab avaldada suurused väliskõveruse kaudu

$$\hat{\rho} + \hat{p} = \frac{1}{24\pi} (-2\mathcal{L}_n K + K^2 - 3\text{tr}(K^2)) . \quad (55)$$

2.3 Null energiatingimuse rikkumine

Järgnevalt tuleb analüüsida, kas võrrandi (55) parem pool on positiivne või negatiivne. Lihtsuse mõttes on mõistlik esmalt uurida varpajamit, millega ei kaasne ruumi paisumist ehk **null-paisumise varpajamit** (ingl *zero-expansion warp drive*). Sellega kaob väliskõveruse jälg ehk

$K = 0$ ja saame, et

$$\hat{\rho} + \hat{p} = -\frac{1}{8\pi} \text{tr}(K^2) . \quad (56)$$

Kuna väliskõveruse komponendid on reaalsed, siis on $\text{tr}(K^2) > 0$ ja on selge, et $\hat{\rho} + \hat{p} < 0$, mis tähendab et null energiatingimus on rikutud.

Kui $K \neq 0$, siis on olukord keerulisem. Selle jaoks saab null energiatingimusest järelduva võrratuse

$$\hat{\rho} + \hat{p} = \frac{1}{24\pi} (-2\mathcal{L}_n K + K^2 - 3\text{tr}(K^2)) \geq 0 \quad (57)$$

kirjutada ümber kujul

$$\mathcal{L}_n K \leq -\frac{3}{2} \text{tr}([K^{\text{tf}}]^2) \leq 0 , \quad (58)$$

kus K^{tf} tähistab jäljevaba väliskõverust

$$K_{ij}^{\text{tf}} = K_{ij} - \frac{1}{3} K \delta_{ij} . \quad (59)$$

Lie tuletise asemel saab kirjutada $\mathcal{L}_n K = \frac{dK}{d\tau}$, kus τ tähistab Euleri vaatlejate omaaega. Võrratuse (58) kohaselt ei saa vaatleja jaoks väliskõveruse jälg K kunagi suureneada, vaid see peab kahanema või jääma samaks. Kui vaatleja asub varpajamist piisavalt kaugel, siis on ääretingimuste tõttu tema jaoks väliskõverus nullilähedane. Varpajami möödudes peab K kahanema või jääma samaks. Kui väliskõverus jääb samaks on tegu nullpaisuva varpajamiga, mille puhul on juba teada, et null energiatingimus on rikutud. Kui K kahaneb, siis pärast varpajami möödumist peab K naasema nullilähedase väärtuse juurde, et taaskord rahuldada ääretingimusi. See tähendaks, et vaatleja jaoks väliskõveruse jälg suureneks, mis rikub null energiatingimust. Järelikult igal juhul saab väita, et leidub aegruumi punkt, kus

$$\hat{\rho} + \hat{p} < 0 \quad (60)$$

ja energiatingimused on rikutud. Analüüs tõestab, et üldrelatiivsusteoorias ei ole võimalik üldine Natario varpajami aegruumi konfiguratsioon ilma eksootilise aineta, mis rikub energiatingimusi. Teisisõnu on null energiatingimuse rikkumine varpajami loomiseks tarvilik tingimus.

3 Varpajamid skalaar-tensorteooriates

Käesolevas peatükis teeme vajalikud esimesed sammud, et analüüsida Natario meetrika konfiguratsiooni skalaar-tensorteooriates. Selleks esitame väljavõrrandid tetraadbaasis ja selgitame, kuidas ÜRT-i analüüsis leitud null energiatingimuse rikkumine avaldub skalaar-tensorteooriates. Viimases alapeatükis esitame lahenduspuu võrrandite analüüsimiseks, mis on saadud erinevate eelduste kombineerimisel.

3.1 Väljavõrrandid tetraadbaasis

Skalaar-tensorteooriates peab üldine Natario aegruumi konfiguratsioon, mis on antud meetrikaga (38), rahuldama lisaks meetrika väljavõrranditele (31) ka skalaarvälja võrrandit (33). Meetrika väljavõrrandid saab ümber kirjutada efektiivse energia-impulsi tensori (37) kaudu

$$G_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{\text{eff}}. \quad (61)$$

Analoogselt ÜRT-i juhule on mõistlik teisendada väljavõrrandid tetraadbaasi. Arvutuste lihtsustamiseks eeldame skalaar-tensorteooriate analüüsis, et varpajam liigub z -telje suunas, tänu millele $v^x = v^y = 0$ ja $v^z = v(t, x, y, z)$. Kuna koordinaatsüsteemi orientatsiooni võib vabalt valida, ei piira tehtud eeldus analüüsi üldisust. Sobiv tetraad ja pöördtetraad on taaskord antud valemitega (42). Tetraadbaasis saame väljavõrrandid kirjutada lühidalt kui

$$G_{ab} = \begin{pmatrix} G_{\hat{0}\hat{0}} & G_{\hat{0}\hat{i}} \\ G_{\hat{i}\hat{0}} & G_{\hat{i}\hat{j}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\rho}^{\text{eff}} & \hat{f}_i^{\text{eff}} \\ \hat{f}_i^{\text{eff}} & \hat{T}_{ij}^{\text{eff}} \end{pmatrix} = T_{ab}^{\text{eff}}, \quad (62)$$

kusjuures taaskord $\hat{T}_{ij}^{\text{eff}} = T_{ij}^{\text{eff}}$. Nii meetrika kui ka skalaarvälja võrrandites esineb mitmes kohas skalaarvälja esimest ja teist järku tuletisi. Kuna esimest järku tuletised $\partial_\mu \Phi$ moodustavad esimest järku tensori, saab need lihtsasti teisendada tetraadbaasi

$$\Phi_a = e_a^\mu \partial_\mu \Phi. \quad (63)$$

Tuleb meeles pidada, et tensori Φ_a komponendid ei ole enam interpreteeritavad tuletistena, vaid on lihtsalt uued abisuurused (vt peatükk 1.3). Natario üldise varpajami meetrika (38) korral saame

$$\Phi_a = \left(\Phi_t + v\Phi_z \quad \Phi_x \quad \Phi_y \quad \Phi_z \right). \quad (64)$$

Siin ja edaspidi tähistame alaindeksitega tuletisi, näiteks $\Phi_t = \partial_t \Phi$. Skalaarvälja teist järku tuletistega on olukord natuke keerulisem, kuna suurus $\partial_\mu \partial_\nu \Phi$ ei ole teist järku tensor. Teist järku

tensor on aga $\nabla_\mu \partial_\nu \Phi$, mille abil defineerime tetraadbaasis suuruse

$$\Phi_{ab} = e_a^\mu e_b^\nu \nabla_\mu \partial_\nu \Phi. \quad (65)$$

Selle abil on võimalik ka asendada teist järku tuletised $\partial_\mu \partial_\nu \Phi$, arvestades kovariantse tuletise definitsiooni. Meetrika (38) kaudu saame arvutada Einsteini tensori (11) komponendid ning leiame, et tetraadbaasis on need

$$G_{ab} = \begin{pmatrix} -\frac{v_x^2 + v_y^2}{4} & -\frac{v_{xz}}{2} & -\frac{v_{yz}}{2} & \frac{v_{xx} + v_{yy}}{2} \\ -\frac{v_{xz}}{2} & \frac{-4vv_{zz} + v_x^2 - v_y^2 - 4v_z^2 - 4v_{tz}}{4} & \frac{v_x v_y}{2} & \frac{vv_{xz} + 2v_x v_z + v_{tx}}{2} \\ -\frac{v_{yz}}{2} & \frac{v_x v_y}{2} & \frac{-4vv_{zz} - v_x^2 + v_y^2 - 4v_z^2 - 4v_{tz}}{4} & \frac{vv_{yz} + 2v_y v_z + v_{ty}}{2} \\ \frac{v_{xx} + v_{yy}}{2} & \frac{vv_{xz} + 2v_x v_z + v_{tx}}{2} & \frac{vv_{yz} + 2v_y v_z + v_{ty}}{2} & \frac{-3(v_x^2 + v_y^2)}{4} \end{pmatrix} \quad (66)$$

ja efektiivse energia-impulsi tensori komponendid tetraadbaasis on antud valemitega (71).

3.2 Null energiatingimus

Üldrelatiivsusteoorias leiti, et null energiatingimusest järeldeb tingimus [3]

$$\hat{\rho} + \hat{p} \geq 0. \quad (67)$$

Skalaar-tensorteooriates on lisaks null energiatingimusele, efektiivse energia-impulsi tensori $T_{\mu\nu}^{\text{eff}}$ kaudu defineeritud efektiivne null energiatingimus. Seega saab analoogselt leida, et efektiivsest null energiatingimusest järeldeb tingimus

$$\hat{\rho}^{\text{eff}} + \hat{p}^{\text{eff}} \geq 0, \quad (68)$$

kus keskmise rõhu asemel on defineeritud **efektiivne keskmine rõhk**

$$\hat{p}^{\text{eff}} = \frac{1}{3} T_{ij}^{\text{eff}} \delta^{ij}. \quad (69)$$

Meetrika väljavõrrandite kirjutamisel efektiivse energia-impulsi tensori kaudu jäi võrrandite vasakule poole ainult Einsteini tensor, mis on samasugune nagu ÜRT-is. Seepärast on ka selle 3+1 jagamisel saadud komponendid täpselt samad ja kõik tulemused, mis kehtisid null energiatingimuse kohta ÜRT-is kehtivad efektiivse null energia tingimuse kohta skalaar-tensorteooriates. Järelikult, lähtudes ÜRT-i tulemustest, on teada, et skalaar-tensorteooriates Natario meetrika korral peab vähemalt ühes aegruumi punktis kehtima võrratus

$$\hat{\rho}^{\text{eff}} + \hat{p}^{\text{eff}} < 0. \quad (70)$$

Skalaar-tensorteooriate puhul ei saa sellest järeldada, et varpajam nõuab eksootilist ainet, kuna suurused $\hat{\rho}^{\text{eff}}$ ja \hat{p}^{eff} sisaldavad endas ka skalaarvälja panust. Arvutades välja energia-impulsi tensori komponendid tetraadbaasis, leiame

$$\begin{aligned}\hat{\rho}^{\text{eff}} = T_{\hat{0}\hat{0}}^{\text{eff}} &= \frac{1}{\mathcal{A}} \left[(2\Phi_{\hat{0}}^2 + \hat{\Phi}^2) \left(\frac{\mathcal{B}}{2} - \frac{3\delta_P(\mathcal{A}')^2}{4\mathcal{A}} \right) + (\Phi_{\hat{0}}^2 + \hat{\Phi}^2)\mathcal{A}'' + (\Phi_{\hat{0}\hat{0}} + \square\Phi)\mathcal{A}' + \mathcal{V} + T_{\hat{0}\hat{0}} \right], \\ T_{\hat{i}\hat{i}}^{\text{eff}} &= \frac{1}{\mathcal{A}} \left[(2\Phi_{\hat{i}}^2 - \hat{\Phi}^2) \left(\frac{\mathcal{B}}{2} - \frac{3\delta_P(\mathcal{A}')^2}{4\mathcal{A}} \right) + (\Phi_{\hat{i}}^2 - \hat{\Phi}^2)\mathcal{A}'' + (\Phi_{\hat{i}\hat{i}} - \square\Phi)\mathcal{A}' - \mathcal{V} + T_{\hat{i}\hat{i}} \right], \\ T_{ab}^{\text{eff}} &= \frac{1}{\mathcal{A}} \left[\Phi_a\Phi_b \left(\mathcal{A}'' + \mathcal{B} - \frac{3\delta_P(\mathcal{A}')^2}{2\mathcal{A}} \right) + \Phi_{ab}\mathcal{A}' + T_{ab} \right], \quad a \neq b,\end{aligned}\tag{71}$$

kus oleme kasutanud lühendatud kirjapilti

$$\hat{\Phi}^2 = -\Phi_{\hat{0}}^2 + \Phi_{\hat{1}}^2 + \Phi_{\hat{2}}^2 + \Phi_{\hat{3}}^2.\tag{72}$$

Komponentide abil saame leida, et

$$\hat{\rho}^{\text{eff}} + \hat{p}^{\text{eff}} = \frac{\hat{\rho} + \hat{p}}{\mathcal{A}} + \frac{4\Phi_{\hat{0}}^2 + \hat{\Phi}^2}{3\mathcal{A}} \left(\mathcal{A}'' + \mathcal{B} - \frac{3\delta_P(\mathcal{A}')^2}{2\mathcal{A}} \right) + \frac{4\Phi_{\hat{0}\hat{0}} + \square\Phi}{3\mathcal{A}}\mathcal{A}'.\tag{73}$$

Kogudes kokku kõik panused skalaarväljast, saame tingimuse (70) ümber kirjutada kujul

$$\hat{X}(\Phi) \equiv \frac{4\Phi_{\hat{0}}^2 + \hat{\Phi}^2}{3\mathcal{A}} \left(\mathcal{A}'' + \mathcal{B} - \frac{3\delta_P(\mathcal{A}')^2}{2\mathcal{A}} \right) + \frac{4\Phi_{\hat{0}\hat{0}} + \square\Phi}{3\mathcal{A}}\mathcal{A}' < -\frac{\hat{\rho} + \hat{p}}{\mathcal{A}}.\tag{74}$$

Eksootilise aine vältimiseks soovime, et tavalisest, mitte efektiivsest, energia-impulsi tensorist saadud null energiatingimus oleks rahuldatud, mis tähendab, et peab kehtima tingimus

$$\hat{\rho} + \hat{p} \geq 0,\tag{75}$$

ilma et skalaarväli muutuks kummitusväljaks. Suuruse $\hat{X}(\Phi)$ märgist saab teha järeldusi varpajami realistlikkuse kohta. Kui $\hat{X}(\Phi) > 0$ igas ae ruumi punktis, siis leidub ae ruumi punkt, kus $\hat{\rho} + \hat{p} < 0$ ja on vaja eksootilist ainet. Kui $\hat{X}(\Phi) < 0$, ei ole võimalik lõplikke järeldusi teha, kuna ae ruumi punktides, kus efektiivne null energiatingimus on rikutud, peab suurus olema piisavalt negatiivne, et tagada võrratuse (74) rahuldatus. Taaskord, kuna võrratus (68) on saadud ühepoolse implikatsiooni tulemusena, siis kui see kehtib, ei järeldu automaatselt, et efektiivne null energiatingimus samuti kehtib. Lisaks tuleb meeles pidada, et efektiivne null energiatingimus ei pea olema rikutud igas ae ruumi punktis, vaid leidub vähemalt üks selline punkt, kus rikkumine esineb.

Avaldisest (74) on näha, et minimaalselt seotud skalaarvälja puhul, kus \mathcal{A} on konstantne, saame

$$\hat{X}(\Phi) = \frac{4\Phi_{\hat{0}}^2 + \hat{\Phi}^2}{3\mathcal{A}} \mathcal{B} > 0, \quad (76)$$

mis ühtib ÜRT-is saadud tulemusega, et null energiatingimus on varpajami korral rikutud. Samuti näeme valemist (74), et kui teeme avaldise lihtsustamiseks skalaarväljale täiendavaid eelduseid, nagu $\square\Phi = 0$ või $\Phi_{\hat{0}\hat{0}} = 0$, siis piirame sellega lahendiks sobivate konfiguratsioonide hulka, milles null energiatingimus on Natarrio meetrika korral rahuldatud.

3.3 Väljavõrrandite analüüsimine – lahenduspuu koostamine

Üldjuhul ei ole võimalik kindlaks määrata, millal suurus $\hat{X}(\Phi)$ on positiivne või negatiivne, mistõttu on tarvis appi võtta nii meetrika (31) kui ka skalaarvälja võrrandid (33), mis peavad olema meetrika konfiguratsiooni (38) korral rahuldatud. Edasises analüüsis fikseerime $\mathcal{B} = 1$, mida on alati võimalik skalaarvälja ümber parametrizeerimisega teha [7]. Seega ei piira tehtud eeldus analüüsi üldisust.

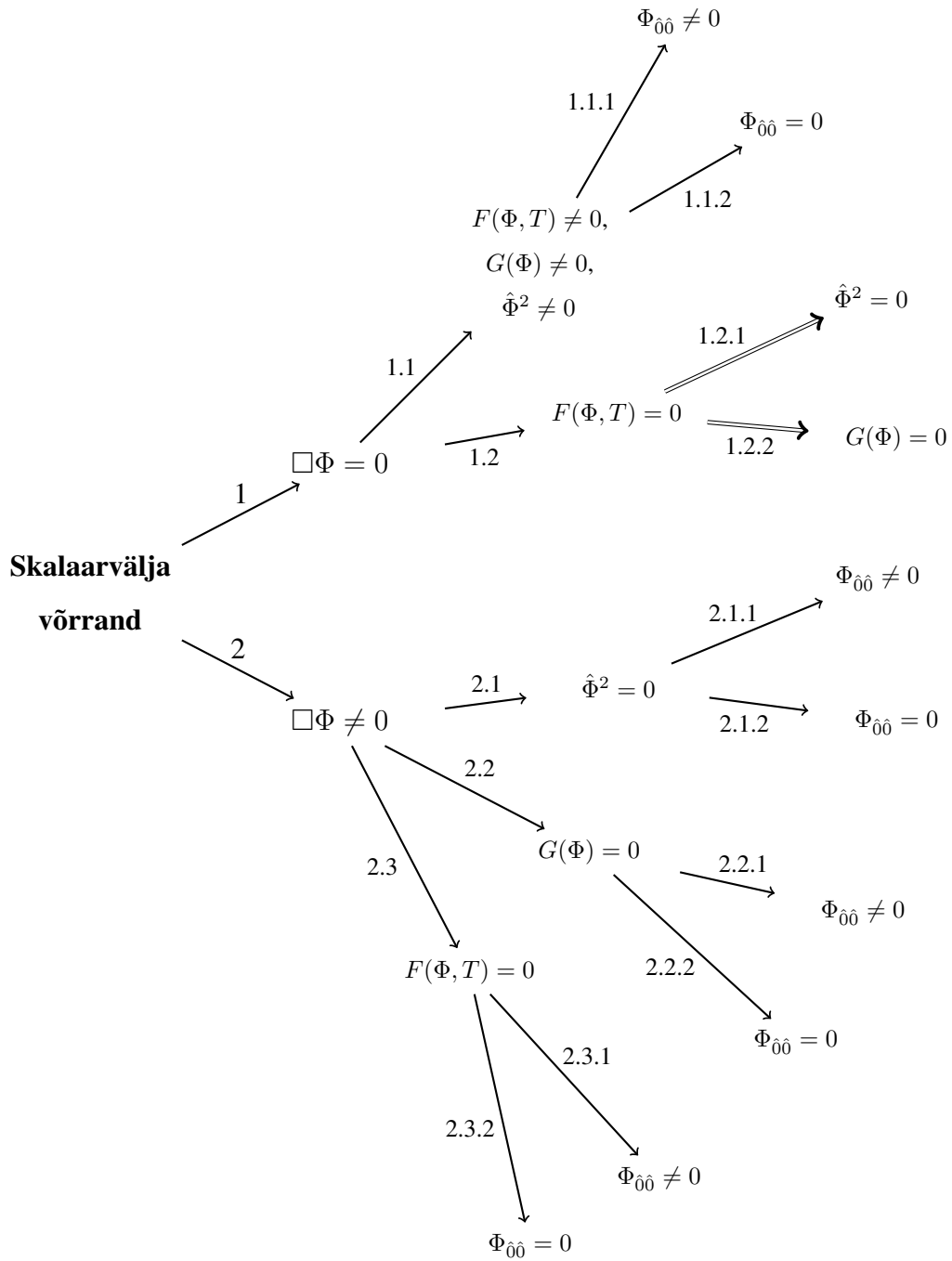
Skalaarvälja võrrandi (33) tetraadbaasis võib lühidalt kirja panna kujul

$$N_G \cdot \square\Phi + G(\Phi)\hat{\Phi}^2 = F(\Phi, T), \quad (77)$$

kus N_G on valemis (36) defineeritud tingimus kummitusvälja vältimiseks ja oleme täiendavalt defineerinud suurused

$$\begin{aligned} G(\Phi) &= \mathcal{A}' (1 + 3\delta_m \mathcal{A}'') , \\ F(\Phi, T) &= \mathcal{A}' T - 2 (2\mathcal{V}\mathcal{A}' - \mathcal{A}\mathcal{V}') . \end{aligned} \quad (78)$$

Väljavõrrandid on teist järku mittelineaarsed osatuletistega diferentsiaalvõrrandid, mille lahendamine üldjuhul on liialt keeruline, mistõttu on otstarbekas lahendamisel teha erinevaid eeldusi, mis muudavad võrrandid hoomatavaks. Kuna erinevate mudelfunktsioonide \mathcal{A} ja \mathcal{V} valikud viivad meid erinevate teooriateni, siis võib eeldada, et on teooriaid, mille puhul osad skalaarvälja võrrandi liikmed on nullid. See tähendab, et võrrandi lahendamiseks ei pea sobivalt kombineeruma kõik liikmed, vaid piisab ainult mittetriviaalsetest. See motiveerib järgnevaid eelduseid: $\square\Phi = 0$, $G(\Phi) = 0$, $\hat{\Phi}^2 = 0$ ja $F(\Phi, T) = 0$. Vaadates $\hat{X}(\Phi)$ definitsiooni (74), näeme et lisaks mudelfunktsioonide tuletistele on suurused, mille märk ei ole ilmne, $\square\Phi$ ja $\Phi_{\hat{0}\hat{0}}$. See motiveerib ka eelduse $\Phi_{\hat{0}\hat{0}} = 0$ kasutamist. Loetletud eelduste kombineerimisel saame erinevad lahendusteed ehk harud ja saame esitada lahenduspuu (vt joonis 1).



Joonis 1. Erinevate eelduste kombineerimisel tekkinud lahenduspuu.

Lahenduspuus esinevad kahe joonega nooled vihjavad implikatsioonidele, mis tulenevad skalaarvälja võrrandist ja tagavad, et see on rahuldatud. Iga saadud haru puhul saab veel täiendavalt eraldi uurida meetrilist ja Palatini formalismi ning vajadusel teha veel täiendavaid eeldusi mudelfunktsioonide \mathcal{A} ja \mathcal{V} kohta.

4 Lahenduspuu uurimine

Peatükis analüüsime lahenduspuu erinevaid harusid. Kaardistame tupikteed, mis viivad ebafüüsikaliste olukordadeni, kasutades vajadusel veel erinevaid täiendavaid eelduseid. Alapeatükis 4.4 esitame tabelina kokkuvõtte erinevate eelduste põhjal välistatud harudest ja peatükis 4.5 kirjeldame põgusalt, mida saab teha lahenduspuu tüves ja arutleme sealsete raskuskohtade üle.

4.1 Tupikteed

Mitmed lahenduspuus esitatud eeldused seavad tingimusi mõjufunktsionaalis sisalduvale mudelfunktsioonile $\mathcal{A}(\Phi)$ ehk on diferentsiaalvõrrandid, mida saab $\mathcal{A}(\Phi)$ jaoks lahendada. Tihti on sealt lihtne jõuda järeldusele, et eeldust rahuldava $\mathcal{A}(\Phi)$ kuju on ebafüüsikaline, mistõttu saab sellel eeldusel põhinevad lahenduspuu harud kõrvale jätta.

Üks lihtsamaid eeldusi, mida saame teha, on eeldada, et skalaarvälja võrrandi (77) parem pool on null ehk

$$F(\Phi, T) = \mathcal{A}'T - 2(2\mathcal{V}\mathcal{A}' - \mathcal{A}\mathcal{V}') = 0. \quad (79)$$

Saadud diferentsiaalvõrrandi lahendamisel leiame, et

$$\mathcal{A}(\Phi) = C_1 \sqrt{T - 4\mathcal{V}}, \quad (80)$$

kus C_1 on suvaline reaalarvuline integreerimiskonstant. Teades, et \mathcal{A} peab olema alati positiivne, on lihtne näha, et saadud lahend on ebafüüsikaline. Piisab lahendi uurimisest asümptootikas, kus materia puudub ja energia-impulsi tensori jälg $T = 0$. Paneme tähele, et siis peab potentsiaal olema negatiivne või null, et vältida \mathcal{A} muutumist kompleksseks. Teooria ülesehitamisel on aga nõutud potentsiaali mittenegatiivsust. Kui potentsiaal oleks asümptootikas null, siis $\mathcal{A}(\Phi) = 0$, mis muudab gravitatsioonikonstandi G_N lõpmata suureks. Järelikult ei ole lahend (80) füüsikaliselt realistlik ja võime harud eeldusega $F(\Phi, T) = 0$ (harud 1.2 ja 2.3) kõrvale jätta.

Kuna eeldus $F(\Phi, T) = 0$ on välistatud, siis on mõistlik järgmisena uurida harusid, kus on eeldatud, et $G(\Phi) = 0$. See tähendab, et tuleb lahendada järgmine diferentsiaalvõrrand funktsiooni $\mathcal{A}(\Phi)$ jaoks

$$G(\Phi) = \mathcal{A}' + 3\delta_m \mathcal{A}'\mathcal{A}'' = 0. \quad (81)$$

Diferentsiaalvõrrandi lahendamisel saame kaks lahendit, millest üks vastab mitteminimaalselt seotud skalaarvälja juhule, kus $\mathcal{A}(\Phi)$ on konstantne, ja teine lahend on olemas ainult meetrilises

formalismis ($\delta_m = 1$) ja on kujul

$$\mathcal{A}(\Phi) = C_1 + C_2\Phi - \frac{\Phi^2}{6}, \quad (82)$$

kus C_1 ja C_2 on taaskord suvalised reaalarvulised integreerimiskonstandid. Kuna skalaarvälja Φ väärtustele mingisuguseid piiranguid seatud ei ole, on teooria problemaatilisus ilmne, kuna suurtel Φ väärtustel hakkab negatiivne ruutliige domineerima ja $\mathcal{A} < 0$. Järelikult võime ka selle eeldusega harud (2.2 ja 1.2.2) kõrvale jätta.

Peale mainitud harude eemaldamist jäävad lahenduspuusse alles harud 1.1 ja 2.1. Nende kohta pole siinkohal võimalik võrrandite põhjal veel lõplikke järeldusi teha, mistõttu tuleb neid veel täiendavalt analüüsida.

4.2 Tupikteed eeldusel $\Phi = \Phi(v)$

Allesjäänud lahenduspuu harude analüüsimiseks on vaja teha täiendavaid eelduseid. Uurides meetrika ja skalaarvälja võrrandeid (31) ja (33) näeme, et need sisaldavad skalaarväljast kuni teist järku tuletisi. Meetrika väljavõrrandite vasakul pool on Einsteini tensor (66), mille komponendid sisaldavad kuni teist järku tuletisi kiirusprofiilist v . Skalaarvälja Φ puhul ei ole põhjust eeldada, et see on kiirusprofiilist v sõltumatu, mistõttu teeme edasiseks analüüsiks eelduse, et $\Phi = \Phi(v)$. Eeldusega arvestame, et skalaarväli sõltub ainult kiirusprofiilist ja mitte selle tuletistest. Kui Φ sõltuks ka kiirusprofiili tuletistest $\partial_\mu v$, siis esineks väljavõrrandites ühel pool võrdusmärki kuni kolmandat järku tuletised v -st, kuid teisel pool kuni teist järku tuletised. Sellisel juhul peaksid kõrgemat järku tuletised sobivalt kombineeruma ja välja taanduma, et väljavõrrandid oleksid rahuldatud. Kuigi selline olukord on teoreetiliselt võimalik, siis lihtsuse huvides jätame hetkel selle variandi kõrvale ja eeldame, et skalaarvälja profiil on sõltumatu kiirusprofiili tuletistest.

Täiendava eelduse abil analüüsime allesjäänud nelja haru: 1.1.1, 1.1.2, 2.1.1 ja 2.1.2. Siinkohal uurime skalaarvälja võrrandit (32), mis tetraadformalismis on kujul

$$\mathcal{A}'R + \left(1 - \frac{3\delta_P(\mathcal{A}')^2}{2\mathcal{A}}\right)' \hat{\Phi}^2 + 2\Box\Phi \left(1 - \frac{3\delta_P(\mathcal{A}')^2}{2\mathcal{A}}\right) - 2\mathcal{V}' = 0, \quad (83)$$

kusjuures Natario üldise varpajami meetrika puhul on Ricci skalaar

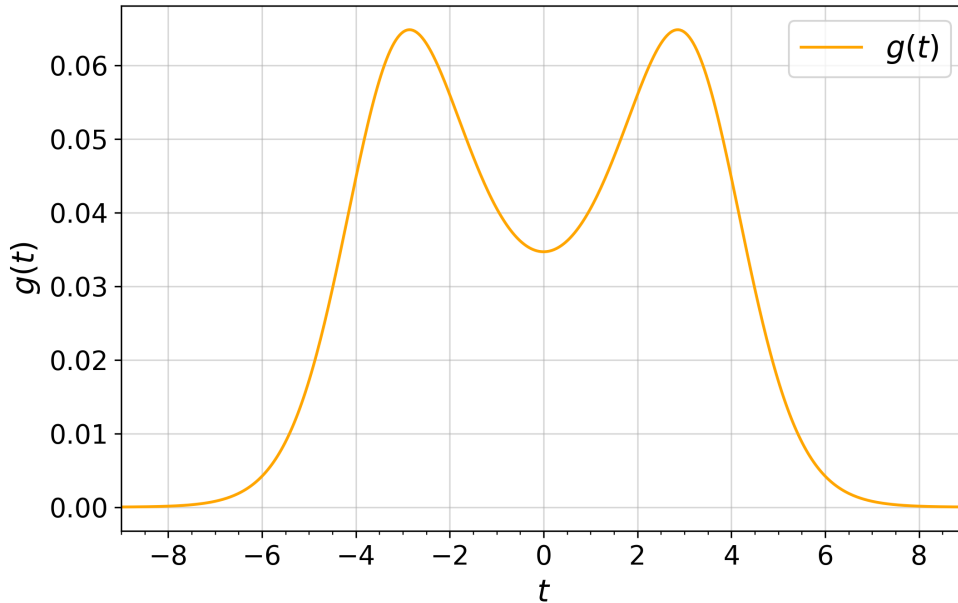
$$R = 2vv_{zz} + \frac{v_x^2}{2} + \frac{v_y^2}{2} + 2v_z^2 + 2v_{tz}. \quad (84)$$

4.2.1 Eeldus $\hat{\Phi}^2 = 0$

Eelduse $\Phi = \Phi(v)$ asendamisel $\hat{\Phi}^2$ definitsiooni (72) saame, et

$$\Phi_v^2 g(v, \partial_\mu v) = \Phi_v^2 (-v^2 v_z^2 - 2v v_t v_z - v_t^2 + v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = 0, \quad (85)$$

millest järeldub, et kas $\Phi_v = \partial_v \Phi = 0$ või $g(v, \partial_\mu v) = 0$. Kui $\Phi_v = 0$, siis skalaarväli ei sõltu kiirusprofiilist v ehk $\Phi \neq \Phi(v)$, mis on vastuolus tehtud eeldusega. Tingimuse $g(v, \partial_\mu v) = 0$ puhul on üldjuhul keeruline järeldada, kas see on varpajami konfiguratsiooni puhul realistlik või mitte. Sellest aimduse saamiseks kontrollime, mis juhtub funktsiooniga g Alcubierre'i varpajami meetrika (39) korral, kui fikseerime konkreetse Euleri vaatleja ruumipunktis $(x, y, z) = (1, 1, 0)$. Samuti fikseerime Alcubierre'i meetrikas esinevad parameetrid $\sigma = 1$ ja $\tilde{R} = 2$ ning valime varpajami liikumiseks ühtlase kiirusega liikumise, kusjuures $v_s(t) = 0,5$ ja $z_s(t) = 0,5t$. Lisaks lihtsusele on see motiveeritud praktilistest kaalutlustest, sest igasugune varpajam võiks olla võimeline liikuma ka ilma kiirenduseta. Tulemusena saame joonestada funktsiooni $g(t)$ (vt joonis 2), mis kujutab avaldise g ajalist sõltuvust mainitud parameetrite valikute korral



Joonis 2. Funktsiooni g ajaline sõltuvus Alcubierre'i meetrika korral, kui parameetrid $\tilde{R} = 2$, $\sigma = 1$, $v_s = 0,5$ ja $z_s(t) = 0,5t$ ning oleme fikseerinud ruumikoordinaadid $(x, y, z) = (1, 1, 0)$.

Jooniselt on näha, et funktsioon g ei ole konstantselt null, vaid on null ainult ajalises asümptootikas. See on tingitud sellest, et siis on varpajam vaatlejast piisavalt kaugel ja kiirusprofiil on nullilähedane. Käesolevas analüüsis huvitab meid, mis juhtub varpajami möödudes, mille korral

on graafikult näha, et $g \neq 0$. Seega illustreerib näide, et eeldus $g(v) \equiv 0$ on tõenäoliselt liiga piirav ning ei ole piisavalt motiveeritud. Järelikult saame täiendava eelduse $\Phi = \Phi(v)$ korral välistada Alcubierre'i varpajami harudes 2.1.1 ja 2.1.2, kus $\hat{\Phi}^2 = 0$.

4.2.2 Eeldus $\square\Phi = 0$

Kuna harud, kus $\hat{\Phi}^2 = 0$, on välistatud, jääb alles uurida haru 1.1, kus eeldame, et $\square\Phi = 0$. Skalaarvälja võrrand lihtsustub kujule

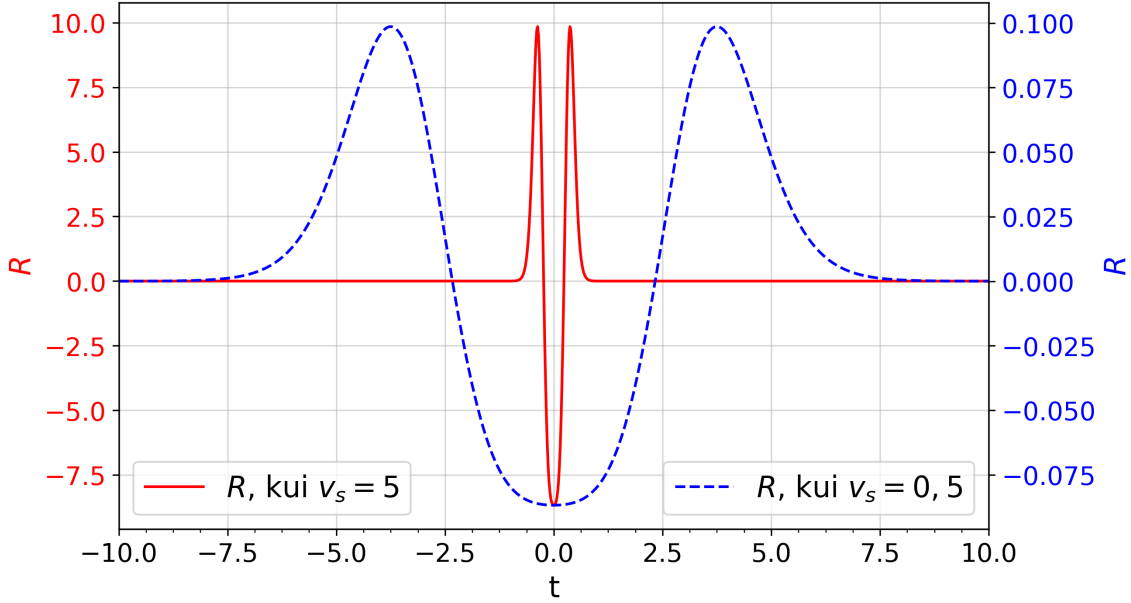
$$\frac{3\delta_P \mathcal{A}'}{\mathcal{A}} \left(\frac{(\mathcal{A}')^2}{2\mathcal{A}} - \mathcal{A}'' \right) \hat{\Phi}^2 + R\mathcal{A}' - 2\mathcal{V}' = 0 \quad (86)$$

ja on näha, et kui eeldada meetrilist formalismi, kus $\delta_P = 0$, siis on skalaarvälja võrrand eriti lihtsal kujul, mille lahendamisel funktsiooni \mathcal{A} jaoks saame

$$\mathcal{A}(\Phi) = C_1 + \frac{2\mathcal{V}(\Phi)}{R} = C_1 + \frac{4\mathcal{V}(\Phi)}{4vv_{zz} + v_x^2 + v_y^2 + 4v_z^2 + 4v_{tz}}. \quad (87)$$

Siinkohal ei ole teooria ebafüüsikalikus enam nii ilmne, kui eeldustega $G(\Phi) = 0$ ja $F(\Phi, T) = 0$. Kuigi esmapilgul näib, et aegruumi punktides, kus Ricci skalaar $R = 0$, tekib nulliga jagamine ehk funktsioon \mathcal{A} hajub, siis ei ole välistatud, et igas punktis, kus $R = 0$, on ka $\mathcal{V} = 0$. Niisugusel juhul tuleks funktsiooni hajuvust hinnata piirväärtuste abil, mis on üldise kiirusprofili v korral üsna keeruline. Selle asemel saame lahendi problemaatilisust näha lihtsamalt, uurides Ricci skalaari käitumist Alcubierre'i meetrika korral ning fikseerides samad parameetrid ja Euleri vaatleja mis eelmine kord. Seekord joonestame Ricci skalaari sõltuvuse ajast kahel juhul: $v_s = 0,5$ ja $v_s = 5$. Saadud graafikud on kujutatud joonisel 3.

Jooniselt näeme, et leidub aegruumi punkte, kus Ricci skalaar on negatiivne, kusjuures mida suurem on varpajami kiirus v_s , seda suuremaid absoluutväärtusi Ricci skalaar võtab. Kuna varpajami puhul võib kiirus v_s minna kuitahes suureks, siis leidub aegruumi punkte, kus Ricci skalaar omab kuitahes suuri negatiivseid väärtuseid. Samas teame, et potentsiaal $\mathcal{V} > 0$ ja selleks, et $\mathcal{A} > 0$ peab teise liikme negatiivsus olema kompenseeritud integreerimiskonstandi C_1 poolt. Ükskõik missuguse C_1 väärtuse korral saame minna piisavalt suure varpajami kiiruseni, mille korral leidub aegruumi punkt, kus R on piisavalt negatiivne, et muuta $\mathcal{A} < 0$. Selle põhjal saame väita, et saadud lahend (87) ei ole füüsikaline ja välistame Alcubierre'i varpajamid harus 1.1 meetrilises formalismis.



Joonis 3. Ricci skalaari sõltuvus ajast Alcubierre'i meetrika korral, kui parameetrid $\tilde{R} = 2$, $\sigma = 1$ ning oleme fikseerinud ruumikoordinaadid $(x, y, z) = (1, 1, 0)$. Sinine katkendjoon on joonestatud, kui $v_s = 0,5$ ja $z_s = 0,5t$ (skaala paremal) ning punasel pidevjoonel on $v_s = 5$ ja $z_s = 5t$ (skaala vasakul).

Peale meetrilise formalismi välistamist jääb järele Palatini formalism, kus $\delta_P = 1$. Eeldades, et $\Phi = \Phi(v)$, saame tingimusest $\square\Phi = 0$ avaldada skalaarvälja teise tuletise v järgi

$$\Phi_{vv} = \frac{\Phi_v(-v^2 v_{zz} - 2vv_z^2 - 2vv_{tz} - 2v_t v_z - v_{tt} + v_{xx} + v_{yy} + v_{zz})}{v^2 v_z^2 + 2vv_t v_z + v_t^2 - v_x^2 - v_y^2 - v_z^2}. \quad (88)$$

Seejärel saame Palatini formalismis kasutada skalaarvälja võrrandit, et avaldada ka esimese tuletise ruut

$$\Phi_v^2 = \frac{[(-4vv_{zz} - v_x^2 - v_y^2 - 4v_z^2 - 4v_{tz}) \mathcal{A}' + 4\mathcal{V}'] \mathcal{A}^2}{3(-v^2 v_z^2 - 2vv_t v_z - v_t^2 + v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) [(\mathcal{A}')^2 - 2\mathcal{A}\mathcal{A}'] \mathcal{A}'}. \quad (89)$$

Kuna tegu on ruutliikmega, siis peab reaalse skalaarvälja puhul olema võrrandi parem pool positiivne. Üldiste mudelfunktsioonide \mathcal{A} ja \mathcal{V} korral ei saa otseselt järeldada, millal võrrandi parem pool negatiivseks muutub, kuid ei ole välistatud, et saab valida sobivad \mathcal{A} ja \mathcal{V} , mille korral võrrandi (89) parem pool on igas aegruumi punktis positiivne. Teooria fikseerimisel tuleks kontrollida, kas see on rahuldatud.

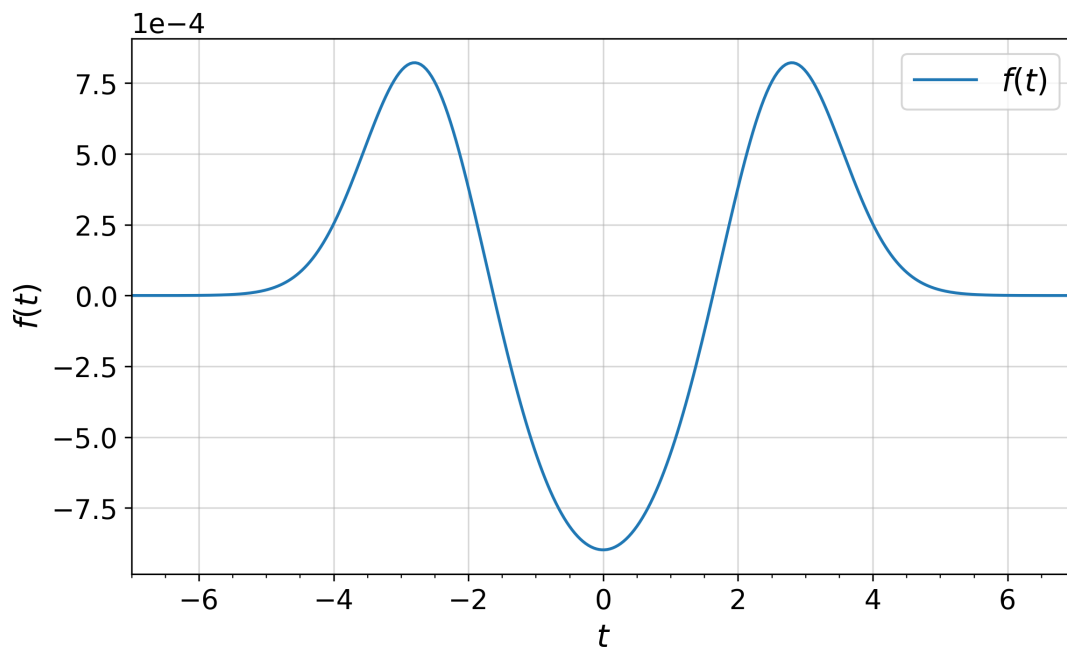
Täiendavalt saame eeldada, et $\Phi_{\hat{0}\hat{0}} = 0$, mis viib meid harusse 1.1.2, ja arvutades $\Phi_{\hat{0}\hat{0}}$ eeldusel $\Phi = \Phi(v)$ ning kasutades seost (88), saame tingimuse

$$\Phi_v f(v, \partial_\mu v, \partial_\mu \partial_\nu v) = 0, \quad (90)$$

kusjuures oleme tähistanud

$$f = (v_x^2 + v_y^2) (v^2 v_{zz} + v v_z^2 + 2v v_{tz} + v_t v_z + v_{tt}) + v_z^2 (v_{tt} + 2v v_{tz} + 3v v_t^2 - v^2 (v_{xx} + v_{yy})) + v v_z^4 (v^2 + 1) + v_t [v_z (v_z^2 (3v^2 + 1) + v_t^2) - (v_{xx} + v_{yy} + v_{zz}) (2v v_z + v_t)] . \quad (91)$$

Taaskord näeme, et kas $\Phi_v = 0$, mis on vastuolus tehtud eeldusega, või $f(v, \partial_\mu v, \partial_\mu \partial_\nu v) = 0$. Funktsiooni f käitumise kohta aimduse saamiseks toimime samamoodi nagu peatükis (4.2.1) funktsiooni g puhul. Fikseerime taaskord kiirusprofiiliks Alcubierre'i meetrika (39) parameetritega $\sigma = 1$, $\tilde{R} = 2$, $v_s(t) = 0,5$ ja $z_s(t) = 0,5t$ ning valime Euleri vaatleja, kelle jaoks $(x, y, z) = (1, 1, 0)$. Saadud funktsiooni $f(t)$ graafik on antud joonisel 4.



Joonis 4. Funktsiooni f ajaline sõltuvus Alcubierre'i meetrika korral, kui parameetrid $\tilde{R} = 2$, $\sigma = 1$, $v_s = 0,5$ ja $z_s(t) = 0,5t$ ning oleme fikseerinud ruumikoordinaadid $(x, y, z) = (1, 1, 0)$.

Erinevalt funktsiooni $g(t)$ graafikust (vt joonis 2) on funktsioonil $f(t)$ ka väljaspool ajalast asümptootikat kaks nullkohta. Sellegipoolest ei ole see piisav, et võtta $f(t) \equiv 0$. Taaskord oleks see tingimus liialt piirav ning seeõttu võime Alcubierre'i varpajami lahenduspuu harus 1.1.2 täiendaval eeldusel $\Phi = \Phi(v)$ Palatini formalismis kõrvale jätta.

4.3 Mitteminimaalselt seotud Higgsi väli

Siiamaani on kõik leitud tupikteed, mis ei fikseeri konkreetset $\mathcal{A}(\Phi)$ kuju, olnud sõltumatud teooria mudelfunktsioonidest \mathcal{A} ja \mathcal{V} . Oleme rakendanud ainult põhjendatud eelduseid, et lihtsustada väljavõrrandite analüüsi. Lisaks lahenduspuu tüvele, milles ühtegi eeldust ei tehta, on hetkel alles jäänud haru 1.1.1, kus täiendavalt on eeldatud Palatini formalismi ja et $\Phi = \Phi(v)$. Skalaarvälja esimest ja teist järku tuletised v järgi käesolevas harus on antud valemitega (89) ja (88). Üldised avaldised on jällegi liiga keerulised, et nendest järeldusi teha. Seepärast vaatame, mis juhtub võrranditega, kui fikseerime konkreetseks skalaar-tensorteooriaks mitteminimaalselt seotud Higgsi teooria, kus

$$\mathcal{A}(\Phi) = M_{Pl}^2 + \xi\Phi^2, \quad \mathcal{V}(\Phi) = m^2\Phi^2. \quad (92)$$

Parameetrid M_{Pl} ja m on massidimensiooniga, kusjuures M_{Pl} pannakse tavaliselt ühtima taandatud Plancki massiga ja m on skalaarvälja mass. Mitteminimaalse seose parameeter ξ on dimensioonitu ja kui $\xi = 0$, siis on tegu minimaalselt seotud Higgsi väljaga. Käesolevas teoorias on skalaarvälja esimese tuletise ruut antud valemiga

$$\Phi_v^2 = -\frac{(M_{Pl}^2 + \Phi^2\xi)^2 h(v)}{12M_{Pl}^2\xi^2}, \quad (93)$$

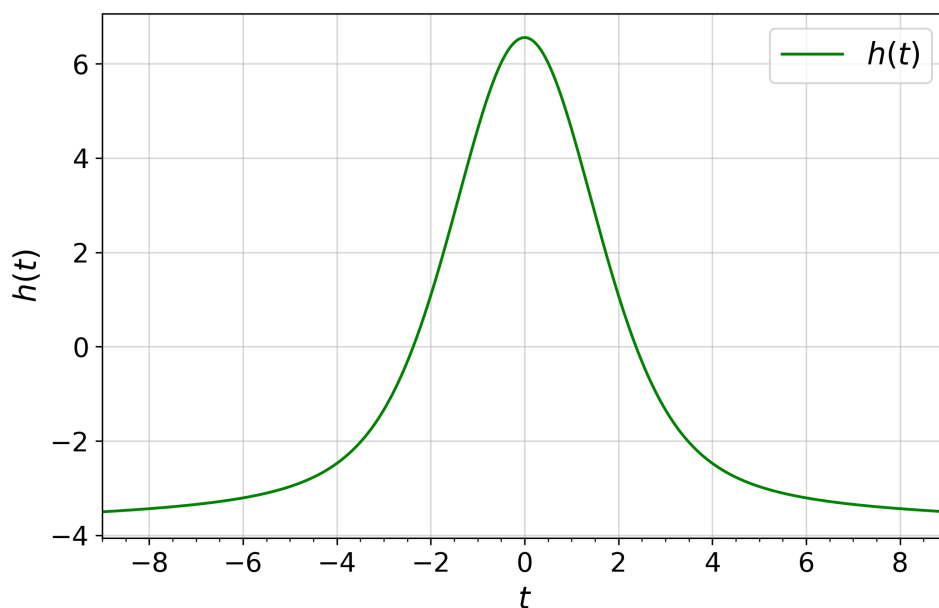
kus oleme kasutanud tähistust

$$h(v) \equiv -\frac{\xi(4vv_{zz} + v_x^2 + v_y^2 + 4v_z^2 + 4v_{tz}) - 4m^2}{v^2v_z^2 + 2vv_tv_z + v_t^2 - v_x^2 - v_y^2 - v_z^2}. \quad (94)$$

Funktsiooni $h(v)$ käitumine määrab, kas valemi (93) parem pool on negatiivne või positiivne. Taaskord vaatame funktsiooni käitumist Alcubierre'i kiirusprofili korral, fikseerides samasuguse Euleri vaatleja ja parameetrid σ ning \tilde{R} . Lisaks peame fikseerima parameetrid ξ ja m . Kuna ξ on dimensioonitu suurus võime selle valida suvaliselt. Skalaarvälja mass m on aga massidimensiooniga, mistõttu valime parameetri väärtuse samas suurusjärgus eksperimentaalselt mõõdetud Higgsi massiga. Teadaolevalt on Higgsi mass $m_H \approx 125 \text{ GeV}/c^2$ [19]. SI ühikutes on taandatud Plancki mass on antud valemiga [20]

$$M_{Pl} = \sqrt{\frac{\hbar c}{8\pi G}}, \quad (95)$$

millest saame leida, et $m_H \approx 10^{-18} M_{Pl}$. Kuna kõik suurused on antud taandatud Plancki massi kaudu valime $M_{Pl} = 1$ ja tulemusena saame joonistada funktsiooni h sõltuvuse ajast (vt joonis 5).



Joonis 5. Funktsiooni h ajaline sõltuvus Alcubierre'i meetrika korral, kui parameetrid $\tilde{R} = 2$, $\sigma = 1$, $v_s = 0,5$ ja $z_s(t) = 0,5t$ ning oleme fikseerinud ruumikoordinaadid $(x, y, z) = (1, 1, 0)$. Parameetrid $\xi = 1$ ja $m = 10^{-18}$.

Jooniselt on näha, et funktsioon omab kindlas ajavahemikus positiivseid väärtuseid. See tähendab, et valemi (93) parem pool on negatiivne ja Φ_v omab kompleksarvulisi väärtuseid. Järelikult ei ole skalaarväli reaalne ja tegu on kummitusväljaga. Kuigi analüüs põhineb ainult ühel punktil, siis piisab sellest, et näidata käesoleva haru problemaatilisust, mistõttu võime välistada Alcubierre'i varpajami harus 1.1.1 Higgsi mudelfunktsiooni, Palatini formalismi ja $\Phi = \Phi(v)$ eeldustel.

4.4 Kokkuvõtte välistatud harudest

Eelnevate alapeatükkide tulemusena oleme välistanud kõik lahenduspuu harud (vt joonis 1), kusjuures mitmete harude korral tuli kasutada veel täiendavaid eelduseid. Käesolevas alapeatükis esitame välistatud harude ja nendega kaasas käivate eelduste kokkuvõtte tabelina (vt tabel 1).

Täiendavad eeldused	Väljastatud lahenduspuu harud
Mitte ühtegi täiendavat eeldust	1.2, 2.2 ja 2.3
$\Phi = \Phi(v)$ ja Alcubierre'i meetrika	2.1
$\Phi = \Phi(v)$, $\delta_P = 0$ ja Alcubierre'i meetrika	1.1
$\Phi = \Phi(v)$, $\delta_P = 1$ ja Alcubierre'i meetrika	1.1.2
$\Phi = \Phi(v)$, $\mathcal{A} = M_{Pl}^2 + \xi\Phi^2$, $\mathcal{V} = m^2\Phi^2$, $\delta_P = 1$ ja Alcubierre'i meetrika	1.1.1

Tabel 1. Kokkuvõtte väljastatud lahenduspuu harudest erinevate täiendavate eelduste korral.

4.5 Lahenduspuu tüvi

Tabelist 1 on näha, et oleme kõik lahenduspuu (vt joonis 1) harud vähemalt mingite täiendavate eelduste korral väljastanud. Seega on tõenäoliselt vaja skalaarvälja võrrand (77) lahendada terviklikult, eeldamata et osad liikmed võrrandis on triviaalsed. Niisugusel juhul saame võrrandist algebraliselt avaldada

$$\square\Phi = \frac{F(\Phi, T) - G(\Phi)\hat{\Phi}^2}{N_G}. \quad (96)$$

Seejärel rakendame samasuguseid täiendavaid eeldusi, nagu tegime lahenduspuu erinevate harude korral. Esiteks eeldame, et skalaarväli sõltub kiirusprofiilist ehk $\Phi = \Phi(v)$. Samuti fikseerime mitteminimaalselt soetud Higgsi teooria, kus mudelfunktsioonid \mathcal{A} ja \mathcal{V} on antud kujul (92). Lihtsuse huvides eeldame täiendavalt meetrilist formalismi, kus $\delta_P = 0$. Selle tulemusena oleme teinud küll mitmeid eelduseid, kuid need kõik on tehtud lahenduspuu tüves. Võrrandist (96) saame

$$f_1(t, x, y, z)\Phi_{vv} + f_2(t, x, y, z)\Phi_v + f_3(t, x, y, z)\Phi = 0, \quad (97)$$

kusjuures kordajad f_1 , f_2 ja f_3 on

$$\begin{aligned} f_1(t, x, y, z) &= -v^2v_z^2 - 2vv_tv_z - v_t^2 + v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = g(v, \partial_\mu v), \\ f_2(t, x, y, z) &= -v^2v_zz - 2vv_z^2 - 2vv_{tz} - v_{tt} + v_{xx} + v_{yy} + v_{zz}, \\ f_3(t, x, y, z) &= -(2m^2 - \xi R). \end{aligned} \quad (98)$$

Lisaks skalaarvälja võrrandile on teoorias 10 meetrika väljavõrrandit, mis sisaldavad endas tundmatuid energia-impulsi tensori komponente. Seega on kokku 11 võrrandit ja 11 otsitavat suurust: 10 energia-impulsi tensori komponenti ja skalaarväli Φ . Kõik meetrika väljavõrrandid on võimalik algebraliselt lahendada T_{ab} komponentide jaoks esitades need Φ ja v kaudu.

Teoreetilised saab ka lahendada võrrandi (97), leides skalaarvälja sõltuvus kiirusprofiilist v ja avaldades kõik otsitavad suurused v kaudu. Võrrandi (97) lahendamine analüütiliselt on väga keeruline, kuna kordajad sõltuvad lisaks v -le ka kiirusprofiili tuletistest erinevate koordinaatide järgi. Samuti ei ole siinkohal enam võimalik avaldada algebraliselt suuruseid Φ_{vv} ja Φ_v , sest puuduvad vajalikud võrrandid, mis tulenesid täiendavatest eeldustest. Kasu ei ole ka kiirusprofiili fikseerimisest, kuna võrrandis esinevad tuletised kiirusprofiili enda järgi. Seega tuleks probleemi edasiseks analüüsiks võtta veel appi täiendavaid eeldusi või lahendada võrrandeid numbriliselt.

5 Arutelu

Varpajamite uurimiseks skalaar-tensorteooriates lähtusime tulemustest üldrelatiivsusteoorias, mille põhjal saime järeldada, et skalaar-tensorteooriates leidub alati aegruumi punkt, kus efektiivne null energiatingimus on rikunud. Selle tingimuse kirjutasime ümber suuruse \hat{X} kaudu valemis (74), kusjuures \hat{X} märgi järgi saame järeldada, kas eksootiline aine on vajalik või mitte. Kuna üldjuhul on \hat{X} märki keeruline määrata tuleks kasutada ka väljavõrrandeid, mida on skalaar-tensorteooriates 11 tükki: 10 meetrika väljavõrrandit ja üks skalaarvälja võrrand. Kuna \hat{X} on skalaarvälja funktsioon, siis tuleks selle märgi analüüsimiseks teada skalaarvälja profiili ehk lahendada võrrandid skalaarvälja Φ jaoks. Võrrandites esinev muutujate arv on aga suurem kui võrrandite arv. Lisaks skalaarväljale sisaldavad võrrandid 10 tundmatut energia-impulsi tensori komponenti ja ka tundmatuid mudelfunktsioone $\mathcal{A}(\Phi)$ ja $\mathcal{V}(\Phi)$. Järelikult ei saa üldjuhul võrrandeid kõikide tundmatute jaoks lahendada ja tuleb teha täiendavaid eelduseid.

Peatüki 4.5 näitel nägime, et ka täiendavate eelduste korral, millal võrrandite arv ja tundmatute arv ühtib, ei pruugi olla teist järku mittelineaarsete diferentsiaalvõrrandite lahendamine niivõrd lihtne, mistõttu tuleks kas lisada veel eelduseid või läheneda probleemile numbriliselt. Kuigi tetraadformalismis võtavad väljavõrrandid lihtsama kuju, siis sellega kaasneb näivalt muutujate arvu suurenemine, kuna suurused Φ_a ja Φ_{ab} ei ole interpreteeritavad tuletistena. Seega saab nende suuruste jaoks võrrandeid lahendada ainult algebraliselt, mistõttu on võrrandite täielikuks lahendamiseks vaja suurendada võrrandite hulka, tehes näiteks täiendavaid eelduseid. Niisuguste eelduste rolli mängisid käesolevas töös näiteks lahenduspuus toodud eeldused $\square\Phi = 0$ ja $\Phi_{00} = 0$, kuid nagu näha, ei olnud nende põhjal võimalik füüsikaliseid varpajamite lahendeid leida.

Käesolevas töös tehtud analüüs teeb esimesed sammud varpajamite uurimises skalaar-tensorteooriates. Probleemi keerukuse tõttu saime teha järeldusi ainult mitmete eelduste kombineerimisel, mille tulemusena saime analüüsitud lahenduspuu (vt joonis 1) kõik erinevad harud. Selleks, et lõplikult järeldada, kas varpajamid skalaar-tensorteooriates on võimalikud või mitte, tuleks kas leida näide varpajamist, mis ei vaja kummitusvälja ega eksootilist ainet, või tõestada üldiselt, et varpajamid ei ole nendes teooriates võimalikud, nagu seda tehti artiklis [3] üldrelatiivsusteoorias. Selle jaoks tuleks uurida võrrandeid lahenduspuu tüves, tuginedes põhjendatud eeldustele või numbrilistele meetoditele, et muuta võrrandite lahendamine võimalikuks.

6 Kokkuvõte

Käesoleva magistritöö eesmärk oli toetuda artikli [3] tulemustele, mille kohaselt ei ole võimalik energiatingimusi rikkumata ÜRT-is varpajameid konstrueerida, ja uurida varpajameid skalaar-tensorteooriates. Peamine eesmärk oli analüüsida, kas skalaar-tensorteooriates on varpajamid võimalikud ilma eksootilise aine või kummitusväljata. Töö käigus tuginesime erinevatele eeldustele, et koostada lahenduspuu ja uurida selle erinevaid harusid, juurides välja neist ebafüüsikalised.

Töö teoreetilise tausta osas tutvustasime aegruumi geomeetria kirjeldamiseks kasutatavaid mõisteid, mille abil formuleeritakse üldrelatiivsusteooria. Samuti tutvustasime energiatingimusi ja nendevahelisi seoseid üldrelatiivsusteoorias. Lisaks kirjeldasime, mida kujutavad endast erinevad matemaatilised meetodid, nagu tetraadformalism ja 3+1 lahutamine, mis mängisid käesolevas töös olulist rolli. Tutvustasime üldrelatiivsusteooria enim levinud laiendust, mida nimetatakse skalaar-tensorteooriaks, üldistatud formalismis, mis hõlmab nii meetrilist kui ka Palatini formalismi, ja kirjeldasime kuidas üldistuvad energiatingimused selles teoorias.

Teises peatükis tutvustasime varpajamite ajalugu, kontseptsiooni ja matemaatilist tausta. Samuti andsime ülevaate käesoleva töö kontekstis vajalikest sammudest, mille abil saab tõestada, et varpajamid üldrelatiivsusteoorias rikuvad null energiatingimust ja vajavad seega konstrueerimiseks ebafüüsikalist eksootilist ainet.

Kolmandas peatükis esitasime skalaar-tensorteooria väljavõrrandid tetraadbaasis ja näitasime, kuidas üldrelatiivsusteoorias tehtud analüüsi tulemused kanduvad üle skalaar-tensorteooriatesse. Leidsime, et ebafüüsikalise aine vajadust on võimalik määrata suuruse \hat{X} abil, mis on antud valemiga (74). Kuna üldisel juhul võrranditest järelduste tegemine jäi liiga keeruliseks, siis tõime välja erinevad potentsiaalsed eeldused, mille kombineerimisel koostasime lahenduspuu (vt joonis 1).

Neljandas peatükis analüüsisime lahenduspuu erinevaid harusid, võttes vajadusel arvesse veel täiendavaid eelduseid. Kaardistasime tupikteed, kus tehtud eelduste tulemusena jõudsim ebafüüsikaliste olukordadeni. Tulemusena saime kõik lahenduspuu harud välistada, kuid erinevate harude jaoks oli vaja teha vähem või rohkem täiendavaid, kuid põhjendatud, eelduseid. Täienda-

vad eeldused ja nende abil välistatud harud on kokku võetud tabelis 1. Viimaks analüüsisime ka samade täiendavate eelduste abil lahenduspuu tüve ja arutlesime probleemi lahendamist takistavate aspektide üle.

Viimases, arutelu peatükis arutlesime skalaar-tensorteooriate väljavõrrandite üle varpajamite kontekstis. Arutlesime võrrandite arvu ja seal esinevate vabadusastmete üle ja selgitasime miks on varpajameid üldistes skalaar-tensorteooriates keeruline uurida. Töö tulemusena ei ole välistatud kummitusväljadeta ja eksootilise aineta varpajamid skalaar-tensorteooriates, kuid selle tõestamiseks või ümber lükkamiseks oleks vaja käesolevat tööd jätkata. Arutelu peatükis tõime välja ka erinevad meetodid, kuidas seda teha.

Tänuavaldused

Soovin peamiselt tänada oma juhendajaid Laur Järve ja Sebastian Schusterit, kellega oli väga meeldiv koostööd teha. Nendega läbiviidud arutelud olid alati põnevad ja aitasid mul arendada oma erialaseid teadmisi ning üldist silmaringi. Nii Laur kui ka Sebastian olid alati valmis põhjalikult vastama kõikidele küsimustele, mis mul tekkisid, sõltumata sellest kui lihtsad või keerulised need olid. Lisaks soovin tänada Kärt Soievat üldise toetuse ja keelenõustamise eest.

Joosep Lember

Kirjandus

- [1] S. Capozziello ja M. De Laurentis, „Extended theories of gravity“, *Physics Reports* 509, 167–321 (2011).
- [2] T. Clifton, P. G. Ferreira, A. Padilla ja C. Skordis, „Modified gravity and cosmology“, *Physics reports* 513, 1–189 (2012).
- [3] J. Santiago, S. Schuster ja M. Visser, „Generic warp drives violate the null energy condition“, *Physical Review D* 105, 064038 (2022).
- [4] F. S. N. Lobo, *Wormholes, warp drives and energy conditions*, Springer (2017).
- [5] A. Meurer, C. P. Smith, M. Paprocki, O. Čertík, S. B. Kirpichev, M. Rocklin, A. Kumar, S. Ivanov, J. K. Moore, S. Singh, T. Rathnayake, S. Vig, B. E. Granger, R. P. Muller, F. Bonazzi, H. Gupta, S. Vats, F. Johansson, F. Pedregosa, M. J. Curry, A. R. Terrel, v. Roučka, A. Saboo, I. Fernando, S. Kulal, R. Cimrman ja A. Scopatz, „SymPy: symbolic computing in Python“, *PeerJ Computer Science* 3, e103 (2017).
- [6] M. Blau, *Lecture notes on general relativity*, Albert Einstein Center for Fundamental Physics Bern (2011).
- [7] S. M. Carroll, *Spacetime and geometry*, Cambridge University Press (2019).
- [8] F. De Felice ja C. J. S. Clarke, *Relativity on curved manifolds*, Cambridge University Press (1990).
- [9] E.ourgoulhon, *3+ 1 formalism in general relativity: bases of numerical relativity* volume 846, Springer Science & Business Media (2012).
- [10] L. Järv, S. Karamitsos ja M. Saal, „Global portraits of nonminimal inflation: Metric and Palatini formalism“, *Physical Review D* 109, 084073 (2024).
- [11] L. Järv, M. Rünkla, M. Saal ja O. Vilson, „Nonmetricity formulation of general relativity and its scalar-tensor extension“, *Physical Review D* 97, 124025 (2018).
- [12] J. R. Fliss, B. Freivogel, E.-A. Kontou ja D. PardoŠantos, „Non-minimal coupling, negative null energy, and effective field theory“, *SciPost Physics* 16, 119 (2024).

- [13] J. Gardiner, „Warp Drive-From Imagination to Reality“, *Journal of the British Interplanetary Society* 61, 353–357 (2008).
- [14] M. Alcubierre, „The warp drive: hyper-fast travel within general relativity“, *Classical and Quantum Gravity* 11, L73 (1994).
- [15] J. Natário, „Warp drive with zero expansion“, *Classical and Quantum Gravity* 19, 1157 (2002).
- [16] E. W. Lentz, „Breaking the warp barrier: hyper-fast solitons in Einstein–Maxwell–plasma theory“, *Classical and Quantum Gravity* 38, 075015 (2021).
- [17] A. Bobrick ja G. Martire, „Introducing physical warp drives“, *Classical and Quantum Gravity* 38, 105009 (2021).
- [18] S. D. Fell ja L. Heisenberg, „Positive energy warp drive from hidden geometric structures“, *Classical and Quantum Gravity* 38, 155020 (2021).
- [19] G. Aad et al., „Measurement of the Higgs boson mass with $H \rightarrow \gamma\gamma$ decays in 140 fb⁻¹ of s=13 TeV pp collisions with the ATLAS detector“, *Phys. Lett. B* 847, 138315 (2023).
- [20] I. Oda, „Conformal Higgs gravity“, *arXiv preprint arXiv:1505.06760* (2015).

II. Litsents

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja üldsusele kättesaadavaks tege- miseks

Mina, **Joosep Lember**,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) minu loodud teose
Varpajamid skalaar-tensor teooriates,
mille juhendajad on Laur Järv ja Sebastian Schuster,
reprodutseerimiseks eesmärgiga seda säilitada, sealhulgas lisada digitaalarhiivi DSpace
kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.
2. Annan Tartu Ülikoolile loa teha punktis 1 nimetatud teos üldsusele kättesaadavaks Tartu
Ülikooli veebikeskkonna, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace kaudu Creative Commonsi
litsentsiga CC BY NC ND 4.0, mis lubab autorile viidates teost reprodutseerida, levitada
ja üldsusele suunata ning keelab luua tuletatud teost ja kasutada teost ärieesmärgil, kuni
autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.
3. Olen teadlik, et punktides 1 ja 2 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.
4. Kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei riku ma teiste isikute intellektuaalomandi ega isiku-
andmete kaitse õigusaktidest tulenevaid õigusi.

Joosep Lember

01.06.2025