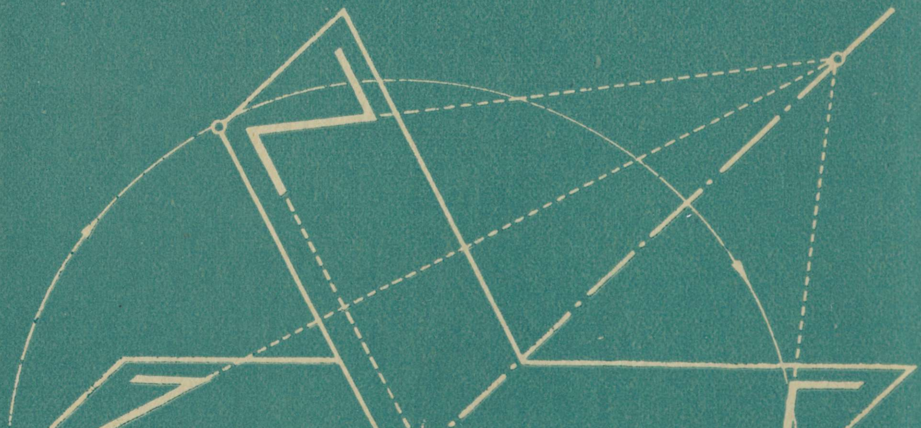
E. ETVERK
O. PRINITS
A. VIHMAN

MATEMAATIKA

X KLASSILE



E. Etverk, O. Prinits, A. Vihman

MATEMAATIKA

X KLASSILE

(Katseõpik)

EESTI NSV HARIDUSMINISTEERIUM
TALLINN . 1964

Kaanekujundus *L. Kruusma.*

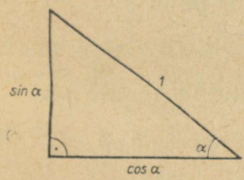
Kinnitatud Eesti NSV Haridusministeeriumi poolt.

I. TRIGONOMEETRIA (JÄRG).

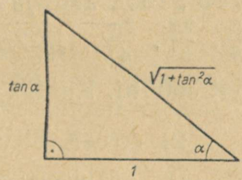
§ 1. TRIGONOMEETRIA EELMISE OSA KORDAMISEKS.

(Ülesanded 1 . . . 18)

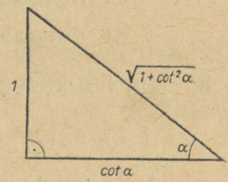
1. a) Kui täisnurkses kolmnurgas hüpotenuus võrdub pikkusühikuga ja ühe teravnurga suurus on α (joon. 1), siis selle teravnurga vastaskaateti pikkus on $\sin\alpha$ ja lähiskaateti pikkus $\cos\alpha$ (joon. 1). Põhjenda seda!



Joon. 1.



Joon. 2.



Joon. 3.

b) Tuleta joonise 1 abil trigonomeetriliste funktsioonide vahelised järgmised seosed (nn. põhiseosed):

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1;$$

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \tan\alpha;$$

$$\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1.$$

2. a) Täisnurkse kolmnurga teravnurga α lähiskaatet on valitud pikkusühikuks. Näita, et teise kaateti pikkus on siis $\tan\alpha$ ja hüpotenuusi pikkus $\sqrt{1+\tan^2\alpha}$ (joon. 2).

b) Tuleta joonise 2 abil järgmised valemid:

$$\sin\alpha = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}; \quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}.$$

3. a) Näita, et kui täisnurkse kolmnurga üks teravnurk on α ja selle nurga vastaskaateti pikkus on 1, siis lähiskaateti pikkus on $\cot\alpha$ ja hüpotenuusi pikkus $\sqrt{1+\cot^2\alpha}$ (joon. 3).

b) Tuleta joonise 3 abil järgmised valemid:

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}; \quad \cos\alpha = \frac{\cot\alpha}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}.$$

4. Avalda:

a) $\sin\alpha$ nurga α koosinuse kaudu;
b) $\cos\alpha$ nurga α siinuse kaudu;
c) nurga tangens selle nurga siinuse kaudu;
d) nurga tangens selle nurga koosinuse kaudu;
e) nurga kootangens selle nurga siinuse kaudu;
f) nurga kootangens selle nurga koosinuse kaudu.

5. Teades, et $\tan\alpha = \frac{4}{3}$, arvuta $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ ja $\cot\alpha$ väärtus.

6. Teades, et $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{ab}}{a+b}$ ja $a > b > 0$, avalda nurga α ülejäänud trigonomeetriliste funktsioonide väärtused.

7. Kui suured on trigonomeetriliste funktsioonide väärtused

1) nurkade $30°$, $45°$ ja $60°$ puhul?
2) nurkade $0°$, $90°$, $180°$, $270°$ ja $360°$ puhul?
3) nurga $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{3\pi}{4}$, ja 2π puhul?

8. Nurk x kasvab $0°$-st $360°$-ni. Kuidas muutub samal ajal

1) $\sin x$? 2) $\cos x$? 3) $\tan x$?

9. Leia nurk, mille siinus on 2 korda suurem kui koosinus.
10. Leia nurk, mille siinus on pool koosinusest.
11. Leia nurk, mille siinuse ja koosinuse summa on $\sqrt{2}$.
12. Näita, et pole olemas niisugust nurka, mille siinuse ja koosinuse summa on $\sqrt{3}$.
13. Arvuta $\cos 150°$.
14. On teada, et $\tan\alpha = \frac{3}{4}$. Arvuta $\tan 2\alpha$.
15. Võttes $3\alpha = \alpha + 2\alpha$, avalda nurga α funktsioonide kaudu:

1) $\sin 3\alpha$; 2) $\cos 3\alpha$; 3) $\tan 3\alpha$.

16. Lihtsusta antud avaldist:

1) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2$;

2) $\dfrac{\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan\frac{\alpha}{2}} + \dfrac{\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan\frac{\alpha}{2}}$.

17. Lahenda võrrand:

1) $1 - \cos 2x = \sin x$; 2) $2\sin 2x = 3\cos x$.

18. Arvuta avaldise väärtus:

1) $\cos(38° + \alpha)\sin(52° - \alpha) + \sin(38° + \alpha)\cos(52° - \alpha)$;

2) $\frac{\sin 2\alpha}{2\sin\alpha} - \frac{\sin\alpha}{\tan\alpha}$;

3) $\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) - 2\alpha$.

§ 2. KAHE NURGA TRIGONOMEETRILISTE FUNKTSIOONIDE SUMMA JA VAHE TEISENDAMINE KORRUTISEKS.

Kasutades kahe nurga summa ja vahe siinuse ning kahe nurga summa ja vahe koosinuse valemeid:

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y; \tag{1}$$

$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y; \tag{2}$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y; \tag{3}$$

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y; \tag{4}$$

saame tuletada valemid kahe nurga siinuste summa ja vahe ning koosinuste summa ja vahe teisendamiseks korrutiseks.

Kahe nurga siinuste summa valemi tuletamiseks liidame võrduste (1) ja (2) vastavad pooled:

$$\sin(x + y) + \sin(x - y) = 2\sin x \cos y. \tag{5}$$

Tähistades nurgad $x + y$ ja $x - y$ vastavalt tähtedega α ja β, saame nurgad x ja y avaldada α ja β kaudu järgmisest võrrandisüsteemist:

$$\begin{cases} x + y = \alpha \\ x - y = \beta. \end{cases}$$

Siit

$$x = \frac{\alpha+\beta}{2} \text{ ja } y = \frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Tehes nüüd asendused, saame võrdusele (5) anda kuju

$$\boxed{\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

Seega,

kahe nurga siinuste summa võrdub nende nurkade poolsumma siinuse ja poolvahe koosinuse kahekordse korrutisega.

Kui kahe nurga siinuste summa valemis asendame nurga β nurgaga $-\beta$ ning peame silmas, et

$$\sin(-\beta) = -\sin\beta,$$

siis saame valemi kahe nurga siinuste vahe jaoks:

$$\sin\alpha + \sin(-\beta) = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

ehk

$$\boxed{\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

Niisiis,

kahe nurga siinuste vahe võrdub nende nurkade poolsumma koosinuse ja poolvahe siinuse kahekordse korrutisega.

Kahe nurga koosinuste summa korrutiseks teisendamise valemi saamiseks liidame võrduste (3) ja (4) vastavad pooled:

$$\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2\cos x\cos y.$$

Tehes siin asendused, nagu eelmiselgi korral, saame valemi:

$$\boxed{\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

Järelikult,

kahe nurga koosinuste summa võrdub nende nurkade poolsumma ja poolvahe koosinuste kahekordse korrutisega.

Kirjutades viimases valemis nurga β asemele $180° - \beta$ ja pidades silmas, et $\cos(180° - \beta) = -\cos\beta$, saame:

$$\cos\alpha + \cos(180° - \beta) = 2\cos\frac{\alpha + 180° - \beta}{2}\cos\frac{\alpha - 180° + \beta}{2}$$

ehk

$$\cos\alpha - \cos\beta = 2\cos\left(90° + \frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - 90°\right).$$

Et

$$\cos\left(90° + \frac{\alpha-\beta}{2}\right) = -\cos\left(180° - 90° - \frac{\alpha-\beta}{2}\right) = -\cos\left(90° - \frac{\alpha-\beta}{2}\right) =$$

$$= -\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

ja

$$\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-90^\circ\right)=\cos\left(90^\circ-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\sin\frac{\alpha+\beta}{2},$$

siis saame

$$\boxed{\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

s. t.

kahe nurga koosinuste vahe võrdub nende nurkade poolsumma ja poolvahe siinuste kahekordse korrutise vastandarvuga.

Trigonomeetriliste funktsioonide summa ja vahe korrutiseks teisendamise valemid võimaldavad avaldisi lihtsustada ja kergendavad avaldiste väärtuste arvutamist. Toome selle kohta mõned näited.

Näide 1. Arvutada avaldise $\sin 75^\circ+\sin 15^\circ$ väärtus.

Lahendus.

$$\sin 75^\circ+\sin 15^\circ=2\sin\frac{75^\circ+15^\circ}{2}\cos\frac{75^\circ-15^\circ}{2}=$$

$$=2\sin 45^\circ\cos 30^\circ=2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{6}\approx 1{,}224.$$

Näide 2. Teisendada üksliikmeks avaldis

$$\sin(60^\circ+x)-\sin(60^\circ-x).$$

Lahendus.

$$\sin(60^\circ+x)-\sin(60^\circ-x)=$$

$$=2\cos\frac{60^\circ+x+60^\circ-x}{2}\cdot\sin\frac{60^\circ+x-60^\circ+x}{2}=$$

$$=2\cos 60^\circ\sin x=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin x=\sin x.$$

Näide 3. Lihtsustada avaldist

$$\frac{2\sin\alpha-\sin 2\alpha}{2\sin\alpha+\sin 2\alpha}.$$

Lahendus.

$$\frac{2\sin\alpha-\sin 2\alpha}{2\sin\alpha+\sin 2\alpha}=\frac{2\sin\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha}{2\sin\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=$$

$$=\frac{\cos 0^\circ-\cos\alpha}{\cos 0^\circ+\cos\alpha}=\frac{-2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\left(-\frac{\alpha}{2}\right)}{2\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\left(-\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}=\tan^2\frac{\alpha}{2}.$$

Näide 4. Teisenda korrutiseks avaldis $1+2\cos\alpha$.

Lahendus.

$$1+2\cos\alpha=2\left(\frac{1}{2}+\cos\alpha\right)=2(\cos 60^\circ+\cos\alpha)=$$
$$=2\cdot 2\cos\left(30^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(30^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)=$$
$$=4\cos\left(30^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(30^\circ-\frac{\alpha}{2}\right).$$

Näide 5. Taandada murdu $\frac{\cos 2x}{1-\sin 2x}$.

Lahendus. Taandaja selgitamiseks esitame murru lugeja ja nimetaja korrutistena.

Teisendame nimetaja korrutiseks:

$$1-\sin 2x=\sin 90^\circ-\sin 2x=2\cos(45^\circ+x)\sin(45^\circ-x).$$

Teisendades lugeja korrutiseks, saame:

$$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)=$$
$$=[\sin(90^\circ-x)+\sin x]\cdot[\sin(90^\circ-x)-\sin x]=$$
$$=2\sin 45^\circ\cdot\cos(45^\circ-x)\cdot 2\cdot\cos 45^\circ\cdot\sin(45^\circ-x)=$$
$$=2\cos(45^\circ-x)\cdot\sin(45^\circ-x).$$

Nüüd on

$$\frac{\cos 2x}{1-\sin 2x}=\frac{2\cos(45^\circ-x)\sin(45^\circ-x)}{2\cos(45^\circ+x)\sin(45^\circ-x)}=$$
$$=\frac{\cos(45^\circ-x)}{\cos(45^\circ+x)}=\frac{\sin(45^\circ+x)}{\cos(45^\circ+x)}=\tan(45^\circ+x).$$

Näide 6. Teisendada korrutiseks avaldis $\sin\alpha+\cos\alpha$.

Lahendus.

$$\sin\alpha+\cos\alpha=\sin\alpha+\sin(90^\circ-\alpha)=$$
$$=2\sin 45^\circ\cos(-45^\circ+\alpha)=\sqrt{2}\cos(45^\circ-\alpha).$$

Ülesandeid.

19. Tuleta kahe nurga siinuste vahe valem § 2 alguses leiduva võrduse (1) pooltest võrduse (2) vastavate poolte lahutamise teel.

20. Tuleta kahe nurga koosinuste vahe valem § 2 alguses leiduva võrduse (3) pooltest võrduse (4) vastavate poolte lahutamise teel.

21. Kasutades seoseid $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ ja $\tan\beta=\frac{\sin\beta}{\cos\beta}$ tõesta, et

a) $\tan\alpha + \tan\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$;

b) $\tan\alpha - \tan\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$.

22. Tuleta § 2 alguses leiduvate seoste (1) ja (2) abil valem

$$\sin x \cos y = \frac{\sin(x+y) + \sin(x-y)}{2},$$

mis võimaldab ühe nurga siinuse ja teise nurga koosinuse korrutise teisendada kahe nurga siinuste summaks.

23. Tuleta § 2 alguses leiduvate seoste (3) ja (4) abil kahe nurga koosinuste korrutise summaks teisendamise valem:

$$\cos x \cos y = \frac{\cos(x+y) + \cos(x-y)}{2}.$$

24. Kasutades § 2 alguses leiduvaid seoseid (3) ja (4), tuleta kahe nurga siinuste korrutise vaheks teisendamise valem:

$$\sin x \sin y = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2}.$$

25. Teisenda korrutiseks ja arvuta siis avaldise väärtus (kasutades tarbe korral tabeleid):

1) $\sin 75° - \sin 15°$;
2) $\cos 48° + \cos 12°$;
3) $\cos 135° + \cos 45°$;
4) $\cos 135° - \cos 45°$;
5) $\cos 5° - \cos 35°$;
6) $\tan 20° + \tan 70°$;
7) $\sin 80° + \sin 10°$;
8) $\cos 58° + \cos 32°$.

26. Lihtsusta avaldist ja seejärel arvuta ta väärtus (kasutades tarbe korral tabeleid):

1) $\frac{\sin 55° + \sin 35°}{\sin 55° - \sin 35°}$;
2) $\frac{\cos 54° + \cos 36°}{\cos 54° - \cos 36°}$;
3) $\frac{\sin 36° + \sin 24°}{\sin 36° - \sin 24°}$;
4) $\frac{\sin 100° - \sin 80°}{\sin 100° + \sin 80°}$;
5) $\sin^2 50° - \sin^2 40°$;
6) $\frac{\cos 5° - \cos 25°}{\sin 5° + \sin 25°}$;
7) $\frac{\sin 24° + \sin 6°}{\cos 24° + \cos 6°}$;
8) $\frac{\sin 29° - \sin 9°}{\sin 29° + \sin 9°}$;
9) $\frac{\cos 65° + \cos 35°}{\sin 65° - \sin 35°}$;
10) $\sin^2 70° - \cos^2 50°$.

27. Teisenda korrutiseks.

1) $\sin\alpha + \frac{1}{2}$
2) $\sin\alpha - \frac{1}{2}\sqrt{3}$

3) $1 + \sin \alpha$

4) $1 + 2 \sin \alpha$

5) $\sqrt{3} - 2 \sin \alpha$

6) $\frac{1}{2} + \cos \alpha$

7) $\sqrt{3} + \tan \alpha$

8) $1 - 4 \sin^2 \alpha$

9) $\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$

10) $\cos^2 \alpha - \cos^2 \beta$

28. Lihtsusta.

1) $\frac{\sin \alpha + \sin 3\alpha}{\cos \alpha + \cos 3\alpha}$

2) $\frac{\sin \frac{2}{3} \alpha + \sin \frac{4}{3} \alpha}{\cos \frac{2}{3} + \cos \frac{4}{3}}$

3) $\frac{\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)}$

4) $\frac{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)}$

29. Teisenda korrutiseks.

1) $\sin(45° + x) + \sin(45° - x)$
2) $\sin(30° + x) + \sin(30° - x)$
3) $\sin(45° + x) - \sin(45° - x)$
4) $\cos(30° + x) - \cos(30° - x)$

30. Tõesta samasus.

1) $\frac{\cos 3\alpha - \cos \alpha}{2 \sin \alpha \sin 2\alpha} = -1$

2) $\frac{1 + \sin 2\alpha}{1 - \sin 2\alpha} = \tan^2(45° + \alpha)$

3) $\frac{1 - \sin 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha} = \tan^2(45° - \alpha)$

4) $\frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha} = \tan\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)$

5) $\frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \tan(45° + \alpha)$

6) $1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$

7) $1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$

31. Tõestada, et

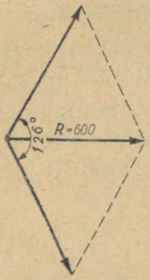
1) $\sin 10° + \sin 50° - \cos 20° = 0$;
2) $\cos 85° + \cos 35° - \cos 25° = 0$.

32. Rombi lühema diagonaali pikkus on 4 cm ja teravnurk on 68°. Arvuta teise diagonaali pikkus.

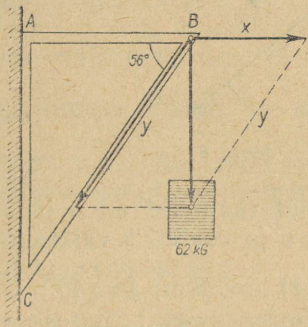
33. Kasvuhoone, mille pikkus on 16 m ja laius 6 m, on kaetud kaheviilulise klaaskatusega. Mitu ruutmeetrit klaasi kulub selle katuse valmistamiseks, kui katuse kaldenurk maapinna suhtes on 48°?

34. Täisnurkses kolmnurgas on üks külg teise kahe külje geomeetriline keskmine. Kui suured on selle kolmnurga teravnurgad?

35. Jõud $R = 600$ kG lahutatakse kaheks absoluutväärtuselt võrdseks komponendiks, mis moodustavad teineteisega 126°-se nurga (joon. 4). Kui suured on need komponendid?



Joon. 4.



Joon. 5.

36. Anna logaritmitav kuju avaldisele:

1) $\sin 52° + \frac{1}{2}$;

2) $\frac{3}{4} - \sin^2 42°$;

3) $3 - 4\cos^2 56°$;

4) $1 - 2\sin 15°$;

5) $\frac{1}{2} + \cos 81°$.

37. Lahenda võrrand.

1) $\sin(x + 30°) = \sin x$

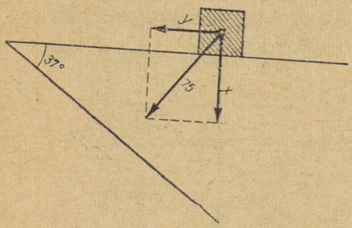
2) $\cos(x - 60°) = \sin 2x$

3) $\cos 3x + \cos 2x = 0$

4) $\sin 5x + \sin 3x = \cos x$

38. Kronsteini (seinapuki) ABC punktisse B on riputatud raskus 62 kG. Rõhtsa varda AB ja kaldtoe BC vaheline nurk on 56°. Kui suur jõud x mõjub varrast AB seinalt lahti rebivalt ja kui suur on surve y toele BC (joon. 5)?

Et siin andmed on mõõtmise teel saadud, seega ligikaudsed, siis ümarda tabelist saadavad trigonomeetriliste funktsioonide väärtused kahe tüvenumbrini ja anna ka lõpptulemus kahe tüvenumbriga. Arvutused tee arvutuslükatil!



Joon. 6.

39. Kaldpinnal, mis moodustab rõhttasapinnaga nurga 37° (joon. 6), on 75 kG raskune kast kaubaga. Kui suurt jõudu y on tarvis selle kasti hoidmiseks kaldpinnal tasakaalus (hõõrdumist arvestamata) ja kui suur on rõhk x kaldpinnale?

Lahendamisel arvesta märkust eelmise ülesande lõpus!

40. Lahenda täisnurkne kolmnurk, teades, et andmed on ligikaudsed arvud (kaatetid on a ja b, hüpotenuus c, kaateti a vastasnurk on α ja kaateti b vastasnurk β):

1) $c = 8$ m; $\beta = 40°$;	4) $a = 72$ mm; $\alpha = 32°$;
2) $c = 12$ m; $\alpha = 26°$;	5) $b = 24$ m; $\beta = 78°$;
3) $a = 200$ m; $\beta = 67°$;	6) $b = 153$ mm; $\alpha = 56°30'$.

41. Püstprisma põhjaks on täisnurkne kolmnurk, mille kaatetid on a ja b ning teravnurgad on α ja β. Prisma kõrgus on h. Arvuta prisma ruumala ja täispindala järgmistel andmetel:

1) $a = 48$ mm; $\alpha = 35°$; $h = 82$ mm;
2) $b = 13{,}5$ cm; $\alpha = 62°30'$; $h = 11{,}2$ cm;
3) $b = 2{,}72$ m; $\alpha = 43°20'$; $h = 1{,}55$ m;
4) $a = 2{,}08$ dm; $\beta = 59°10'$; $h = 1{,}12$ dm.

42. Korrapärase kolmnurkse püramiidi põhiserv on a ja külgserv moodustab põhja mediaaniga nurga α. (Korrapärase kolmnurkse püramiidi kõrguse aluspunktiks on põhja mediaanide lõikepunkt.)

Arvuta püramiidi ruumala ja täispindala järgmistel andmetel:

1) $a = 5$ cm; $\alpha = 40°$;
2) $a = 18$ cm; $\alpha = 32°$;
3) $a = 124$ mm; $\alpha = 50°30'$.

43. Korrapärase nelinurkse püramiidi põhiserv on a ja külgserv moodustab põhja diagonaaliga nurga α.

Arvuta püramiidi ruumala ja täispindala järgmistel andmetel:

1) $a = 4$ m; $\alpha = 20°$;
2) $a = 36$ mm; $\alpha = 32°$;
3) $a = 345$ mm; $\alpha = 67°20'$.

44. Täisnurksest kolmnurgast on teada kaateti a ja hüpotenuusi c ligikaudsed väärtused (veaga mitte üle poole viimase koha ühikut):

1) ühe tüvenumbriga, näiteks $a = 3$ m, $c = 5$ m;
2) kahe tüvenumbriga, „ $a = 3{,}5$ cm, $c = 5{,}8$ cm;
3) kolme tüvenumbriga, „ $a = 153$ mm, $c = 342$ mm.

Arvuta antud kaateti vastasnurga siinuse tõkked ja seejärel nurga tõkked.

Kuidas on sobiv ümardada tulemust juhul, kui pikkusmõõdud on antud ühe tüvenumbriga? kahe tüvenumbriga? kolme tüvenumbriga?

§ 3. VEA ÜLEMMÄÄR NURGA ARVUTAMISEL.

Kui lineaarsed andmed (pikkused) nurga arvutamiseks on saadud mõõtmise teel, siis on nad ligikaudsed arvud, mistõttu ka nurga suurus kui arvutustulemus on ligikaudne. Selle tulemuse ümardamisel peame teadma, kui suur viga võib ülimalt tekkida nurga arvutamisel. Selgitame nurga vea ülemäära leidmist näidete varal.

Näide 1. Laste mänguväljakul oleval muruplatsil on täisnurkse kolmnurga kuju, mille üks kaatet on 35 m ja hüpotenuus 60 m. Kuisuured on selle muruplatsi teravnurgad?

Lahendus. Paneme tähele, et kolmnurga külgede pikkused on siin mõõdetud veaga mitte üle 0,5 m.

Arvutame 35-meetrise kaateti vastasnurga suuruse tõkked. Tähistades selle nurga tähega α, saame $\sin\alpha$ ülemtõkkeks

$$\frac{35{,}5}{59{,}5} = \frac{71}{119} = 0{,}597;$$

seega nurga α enda ülemtõkkeks on

$$\arcsin 0{,}597 = 63°42'.$$

$\sin\alpha$ alamtõkkeks saame

$$\frac{34{,}5}{60{,}5} = \frac{69}{121} = 0{,}571,$$

millest nurga α enda alamtõkkena leiame

$$\arcsin 0{,}571 = 38°48'.$$

Ligikaudse suuruse **k õ i g e t õ e n ä o l i s e m a k s** väärtuseks loetakse ta ülemtõkke ja alamtõkke aritmeetilist keskmist. Niisiis

$$\alpha \approx \frac{36°42' + 34°48'}{2} = 35°45'.$$

Ligikaudse suuruse ülemtõkke ja alamtõkke vahet nimetatakse ligikaudse suuruse **kõikumisvahemikuks.**

Meie näites nurga α kõikumisvahemik on

$$36°42' - 34°48' = 1°52' \approx 2°.$$

Pool kõikumisvahemikust kannab ligikaudse suuruse **absoluutse vea ülemmäära** nime.

Antud juhul nurga α absoluutse vea ülemmäär on $2° : 2 = 1°$. Sümbolites märgitakse seda nõnda: $\Delta\alpha = 1°$ (kus kolmnurkne sümbol on kreeka suurtäht «delta»).

Et nurga α arvutamisel viga võib küündida 1°-ni, siis pole otstarbekohane vastuses näidata minuteid; vastuseks saadav arv tuleb ümardada kraadideni: $35°45' \approx 36°$.

Vastuse kirjutame nõnda:

$$\alpha \approx 36° (\pm 1°),$$

mida loetakse «nurk α on ligikaudu 36° veaga 1°».

Absoluutse vea ülemmäära ja ligikaudse arvu suhet nimetatakse ligikaudse arvu **relatiivse vea ülemmääraks.** See suhe antakse tavaliselt protsentides.

Meie näites on nurga α relatiivse vea ülemmääraks

$$1° : 36° = 0{,}028 \approx 0{,}03 = 3\%.$$

Tulemuse võib nüüd kirjutada ka nõnda:

$$\alpha \approx 36° (\pm 3\%),$$

mida loetakse «nurk α on ligikaudu 36° veaga 3%».

Ülesandes esineva muruplatsi teine nurk $\beta \approx 54° (\pm 1°)$ ehk $\beta \approx 54° (\pm 2\%)$.

N ä i d e 2. Ristküliku alus on 564 mm, kõrgus 162 mm. Kui pikk on selle ristküliku diagonaal ja kui suure nurga moodustab diagonaal alusega?

L a h e n d s. Et pikkused on mõõdetud millimeetrise täpsusega, siis vea ülemmääraks on siin 0,5 mm.

Diagonaali arvutamisel võtame arvesse, et andmed on kolme tüvenumbriga arvud, mistõttu ka tulemuse ümardame kolme tüvenumbriga arvuks, ümardades seejuures vahepealsed tulemused nelja tüvenumbriga arvudeks.

Tähistades aluse tähega a, kõrguse tähega b ja diagonaali tähega d, saame:

$$\begin{array}{ll} a^2 = 162^2 \approx & 26\,240; \\ h^2 = 569^2 \approx & 328\,000; \\ \hline d^2 \qquad\quad \approx & 355\,000; \end{array}$$

$$d = \sqrt{355\,000} = 595{,}8 \approx 596.$$

Diagonaali ja aluse vahelise nurga α tangensi ülemtõke on

$$\frac{162{,}5}{568{,}5} = 0{,}2858,$$

millest nurga α ülemtõkkeks saame

$$\arctan 0{,}2858 = 15°57'.$$

Arvutades $\tan \alpha$ alamtõket, leiame

$$\frac{161{,}5}{569{,}5} = 0{,}2835,$$

millest nurga α enda alamtõkkeks saame

$$\arctan 0{,}2835 = 15°50'.$$

Nurga α absoluutse vea ülemmäära arvutamisel leiame, et

$$\Delta\alpha = \frac{15°57' - 15°50'}{2} \approx 4'.$$

Nurga α kõige tõenäolisem väärtus on

$$\alpha = \frac{15°57' + 15°50'}{2} = 15°54' \approx 15°50'.$$

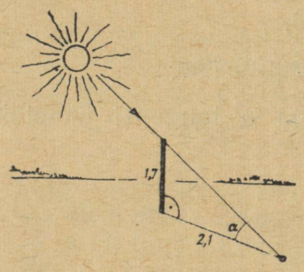
Seega $\alpha \approx 15°50'(\pm 04')$ ehk $\alpha \approx 15°50'(\pm 0{,}4\,\%)$.

Ülesandeid.

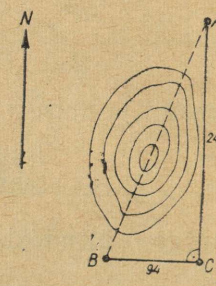
45. Täisnurkse kolmnurga kaatetid on ligikaudu 4 m ja 6 m. Arvuta hüpotenuus ja nurgad. Nurga arvutamisel leia absoluutse vea ülemmäär ja relatiivse vea ülemmäär. Ümarda tulemused vastavalt andmetele.

46. Tarvis on joonestada täisnurkne kolmnurk, mille üks kaatet on 372 mm ja hüpotenuus 943 mm. Kui pikk tuleb teine kaatet ja kui suured tulevad nurgad? Kui suur viga võib tekkida nurkade arvutamisel?

47. Päikese kõrgusnurga α määramiseks löödi maa sisse püsti teivas, mille maapealse osa pikkuseks jäi 1,7 m; teiba varju pikkus oli 2,1 m (joon. 7). Arvuta Päikese kõrgusnurk α varju mõõtmise momendil.



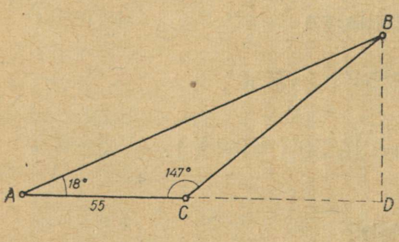
Joon. 7.



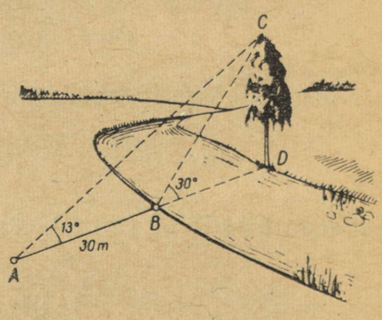
Joon. 8.

48. Punktide A ja B vahele on tarvis ehitada tunnel (joon. 8). Punkt C on valitud nõnda, et kolmnurk ABC on täisnurkne, kusjuures $BC = 94$ m ja $AC = 234$ m. Kui pikk tuleb ehitatav tunnel? Kui suure nurga moodustab tunneli siht AB põhja-lõuna sihiga AC ja kui suure nurga ta moodustab ida-lääne sihiga?

49. Arvuta nürinurkse kolmnurga ABC kõrgus BD, teades, et alus $AC = 55$ mm, alusnurk $BAC = 18°$ ja alusnurk $ACB = 147°$ (joon. 9).



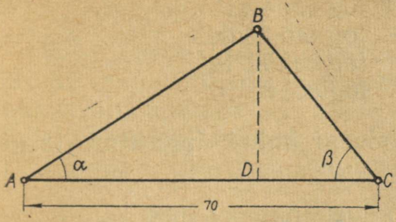
Joon. 9.



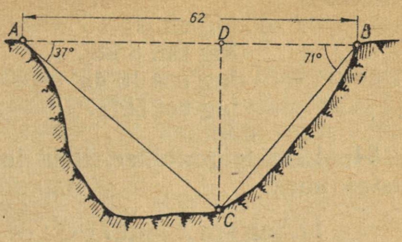
Joon. 10.

50. Jõe laiuse BD mõõtmiseks märgiti BD sihis pikkus $AB = 30$ m (joon. 10). Jõe teisel kaldal vee piiril kasvava puu latv C paistab punktist A nurgas 13° ja punktist B nurgas 30°. Kui lai on jõgi?

51. Kolmnurga ABC alus $AC = 70$ mm, nurk $\alpha = 32°20'$ ja nurk $\beta = 50°20'$ (joon. 11). Arvuta kõrgus BD.



Joon. 11.



Joon. 12.

52. Üle oru punktide A ja B vahele hakatakse ehitama silda (joon. 12). Tugisamba DC kõrguse leidmiseks mõõdeti punkti C alangunurgad DAC ja DBC. Arvuta samba DC pikkus, teades, et $AB = 62$ m, $\angle DAC = 37°$ ja $\angle DBC = 71°$.

§ 4. TÄISNURKSE KOLMNURGA LAHENDAMINE LOGARITMIDE KASUTAMISEGA.

Kui andmetena esinevad arvud on enam kui kahe tüvenumbriga, siis kolmnurga lahendamisel on kasulik teha arvutusi logaritmide abil.

Matemaatiliste tabelite kogudes on peale nurgafunktsioonide tabelite ka nende funktsioonide logaritmide tabelid, kust saame leida kas nurga antud suuruse järgi soovitava funktsiooni logaritmi või ümberpöördult — nurgafunktsiooni logaritmi järgi nurga.

Näiteks:

$$\log \sin 31°42' = \bar{1},7205;$$
$$\log \cos 40°45' = \bar{1},8794;$$
$$\log \tan 69°20' = 0,4235.$$

Mõned näited ka nurga leidmise kohta nurgafunktsiooni antud logaritmi järgi:

$\log \sin \alpha = \bar{1},7723;$ $\alpha = 36°18'.$

$\log \tan \beta = \bar{1},3032;$ $\beta = 11°22'.$

Ülesandeid.

53. Leia.

1) $\log \sin 16°24'$
$\log \tan 19°30'$
$\log \cos 72°06'$
$\log \cot 32°12'$

2) $\log \sin 42°54'$
$\log \tan 59°18'$
$\log \cos 26°42'$
$\log \cot 7°36'$

3) $\log\sin 47°15'$
$\log\tan 8°08'$
$\log\cos 16°45'$
$\log\cot 56°17'$

4) $\log\sin 4°41'$
$\log\tan 30°04'$
$\log\cos 72°19'$
$\log\cot 83°16'$

54. Leia trigonomeetrilise funktsiooni antud logaritmi järgi vastav nurk.

1) $\log\sin x = \bar{2},7183$
$\log\tan x = \bar{2},8960$
$\log\cos x = \bar{1},8053$
$\log\cot x = \bar{1},9529$

2) $\log\sin y = \bar{1},9656$
$\log\tan y = 0,4068$
$\log\cos y = \bar{1},9998$
$\log\cot x = 0,5174$

3) $\log\sin x = \bar{1},5692$
$\log\tan x = \bar{1},7375$
$\log\cos x = \bar{1},9776$
$\log\cot x = 0,6934$

4) $\log\sin x = \bar{1},9320$
$\log\tan y = 0,4496$
$\log\cos y = \bar{1},7199$
$\log\cot y = \bar{1},7759$

Lahendame nüüd täisnurkse kolmnurga logaritmide kasutamisega.

Ülesanne. Täisnurkse kolmnurga kaatet $a = 23,5$ mm ja kaatet $b = 24,1$ mm. Kui suured on selle kolmnurga teravnurgad ja hüpotenuus?

Lahendus.

1) $\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{23,5}{24,1};$

$\log a = 1,3711;$
$\log b = 1,3820;$

$\log\tan\alpha = \bar{1},9891;$
$\alpha = 44°17' \approx 44°20'.$

2) $\tan\beta = \frac{b}{a} = \frac{24,1}{23,5};$

$\log b = 1,3820;$
$\log a = 1,3711;$

$\log\tan\beta = 0,0109;$
$\beta = 45°43' \approx 45°40'.$

3) $\frac{a}{c} = \sin\alpha;$

$c = \frac{a}{\sin\alpha};$

$\log a = 1,3711;$
$\log\sin\alpha = \bar{1},8439;$

$\log c = 1,5272;$
$c = 33,67 \approx 33,7$ mm.

Kontroll:

$a^2 = 552,2;$
$b^2 = 580,8;$

$a^2 + b^2 = 1133,0 = c^2;$
$c = \sqrt{1133} = 33,66 \approx 33,7.$

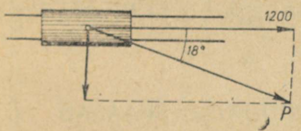
Vastus. Kolmnurga teravnurgad on 44°20′ ja 45°40′; hüpotenuus on 33,7 mm.

Ülesandeid.

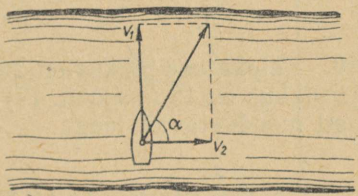
55. Lahenda täisnurkne kolmnurk, ümardades tulemused vastavalt andmetele. Arvutatud nurgad ümarda kraadideni, kui lineaarsed andmed on kahe tüvenumbriga; kümnete minutiteni, kui lineaarsed andmed on kolme tüvenumbriga; minutiteni, kui lineaarsed andmed on nelja tüvenumbriga.

1) $a = 25$; $b = 75$.	5) $c = 32{,}5$; $b = 18{,}4$.
2) $a = 31$; $c = 76$.	6) $c = 4{,}56$; $a = 2{,}88$.
3) $a = 30{,}2$; $\beta = 53°20'$.	7) $c = 32{,}54$; $\alpha = 26°42'$.
4) $b = 32{,}2$; $\beta = 62°30'$.	8) $a = 12{,}75$; $c = 20{,}58$.

56. Raudtee-vagunit, mida rööpme sihis mõjuv jõud 1200 kG võib paigast ära nihutada, tõmbab rööpme kõrval liikuv traktor (joon. 13). Vagunit ja traktorit ühendav vaier moodustab rööpme sihiga nurga 18°. Kui suure jõuga P tõmbab traktor?

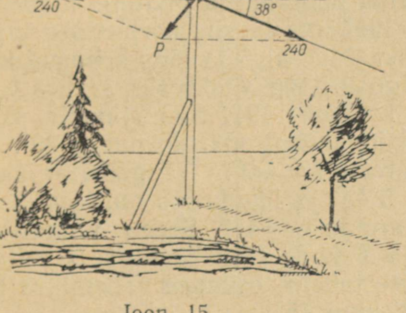


Joon. 13.

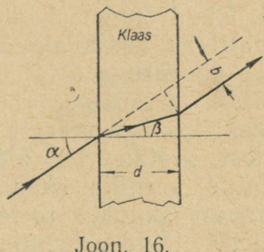


Joon. 14.

57. Mootorpaat sõidab kiirusega $v_1 = 1{,}7 \frac{m}{s}$. Paat sõidab üle jõe, mille voolu kiirus $v_2 = 0{,}9 \frac{m}{s}$ (joon. 14). Kui suure nurga α all liigub paatkalda suhtes, kui tüüritakse kaldaga risti?



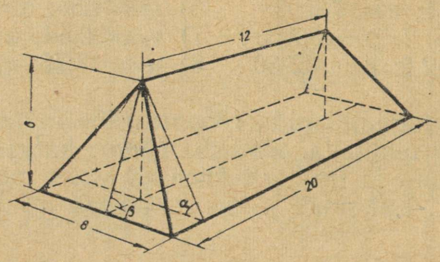
Joon. 15.



Joon. 16.

58. Kõrgepinge kaabel juhitakse ühest isolaatoripostist oma sihist horisontaaltasapinnas 38° võrra kõrvale (joon. 15). Kaabel on pingutatud jõuga 240 kG. Kui suur on horisontaalne jõud P, millega kaabel kisub posti viltu?

59. Tasaparalleelsele klaasplaadile kaldu langev valguskiir teeb plaati läbides paralleelse nihke b (joon. 16). Arvuta see nihe, kui plaadi paksus $d = 26$ mm, murdumisnäitaja $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = 1{,}5$ ja langemisnurk $\alpha = 30°$?

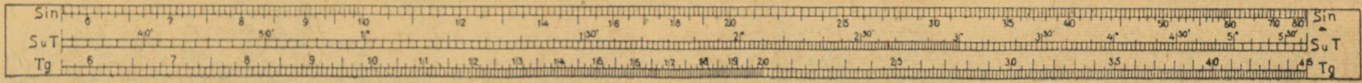


Joon. 17.

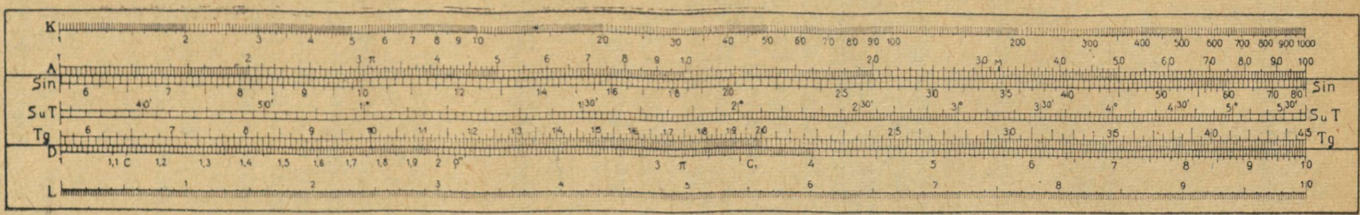
60. Kelpkatuse pikkus on 20 m, laius 8 m ja kõrgus 6 m, katuse harja pikkus on 12 m (joon. 17). Arvuta nurgad α ja β, mis katuse pinnad moodustavad laega.

§ 5. TRIGONOMEETRILISTE FUNKTSIOONIDE SKAALAD ARVUTUSLÜKATIL.

Antud nurga trigonomeetrilise funktsiooni või viimase järgi nurga leidmiseks võib kasutada arvutuslükati trigonomeetrilisi skaalasid, mis leiduvad keele tagaküljel (joon. 18): skaala S (siinuste skaala, joonisel «Sin»), skaala ST (siinuste ja tangensite ühine skaala, joonisel «SuT») ja skaala T (tangensite skaala, joonisel «Tg»). Igaüht neist kolmest skaalast kasutatakse koos põhiskaalaga D. See võib toimuda kahel viisil. Esiteks nõnda, et tõmbame keele lükati korpusest välja, pöörame ta pikitelje ümber nii, et tagakülg saab esiküljeks ja lükkame ta siis korpusesse tagasi, seades kõigi esiküljel olevate skaalade alg- ja lõpp-kriipsud kohakuti. Nüüd loeme skaala D alguskriipsu vastavaks arvule 0,1 ja lõppkriipsu vastavaks arvule 1 (joon. 19). Siis siinuste skaala algab suurusega 5°44′ ja tema lõppkriips märgib nurka 90°. Tõepoolest, $\arcsin 0{,}1 = 5°44'$, $\arcsin 1 = 90°$. Tangensite skaala alguskriips aga märgib nurka 5°43′ ja lõppkriips nurka 45°. Tõepoolest, $\arctan 0{,}1 = 5°43'$ ja $\arctan 1 = 45°$. Seega viimati kirjeldatud asendis skaalad S ja T koos põhiskaalaga D esitavad vastavalt siinuste ja tangensite tabelit, esimene vahemikus 5°44′ kuni 90°, teine vahemikus 5°43′ kuni 45°.



Joon. 18.



Joon. 19.

Joon. 20.

Skaalat S uurides märkame, et

6°-st	kuni	10°-ni	iga	kriipsuvahe	märgib	5′,
10°-st	„	20°-ni	„	„	„	10′,
20°-st	„	40°-ni	„	„	„	20′,
40°-st	„	60°-ni	„	„	„	30′,
60°-st	„	80°-ni	„	„	„	1°.

Skaala lõpul 80° ja 90° vahel on kaks kriipsu, millest esimene märgib nurka 83° ja teine nurka 85°.

Skaalalt T paneme tähele, et

6°-st	kuni	20°-ni	iga	kriipsuvahe	märgib	5′,
20°-st	„	45°-ni	„	„	„	10′.

Kui nurk α on väike, siis $\sin\alpha \approx \tan\alpha$. Seda näeme joonisel 20, kus ühikringis väikese nurga α korral siinuslõik ja tangenslõik on peaaegu võrdsed. (Kontrolli seda ka siinuste ja tangensite tabelite abil, võrreldes 6°-st väiksemate nurkade siinuseid tangensitega!)

See asjaolu võimaldab väikeste nurkade siinuste ja tangensite jaoks kasutada ühist skaalat, milleks ongi skaala ST. Selle skaala kasutamisel koos skaalaga D loetakse skaala D alguskriips vastavaks arvule 0,01, ja lõppkriips vastavaks arvule 0,1. Skaala ST alguskriips märgib siis nurka 34′ ja lõppkriips nurka 5°44′, sest

$$\arcsin 0{,}01 \approx \arctan 0{,}01 \approx 34';$$
$$\arcsin 0{,}1 \approx \arctan 0{,}1 \approx 5°44'.$$

Paneme tähele, et skaalal ST

40′-st	kuni	3°-ni	iga	kriipsuvahe	märgib	1′,
3°-st	„	5°-ni	„	„	„	2′,
5°-st	„	lõpuni	„	„	„	5′.

Niisiis skaala ST koos põhiskaalaga D kujutab siinuste ja tangensite ühist tabelit vahemikus 34′ kuni 5°44′.

Eeldusel, et keel on pööratud ja nurk α on vahemikus 5°44′ . . . 90°, leiame $\sin\alpha$ väärtuse järgmiselt: märgime märkijaga skaalal S nurga α ja loeme niidi alt skaalalt D selle nurga siinuse väärtuse.Ümberpöördult, antud siinuse järgi nurga leidmisel märgime skaalal D antud siinuse ja loeme niidi alt skaalalt S nurga suuruse.

Analoogiliselt toimime antud nurga tangensi leidmisel ning antud tangensi järgi nurga leidmisel, kasutades sel korral vaid skaalat T.

Näiteks:

$\sin 45° = 0{,}707;$ $\arcsin 0{,}574 = 35°;$

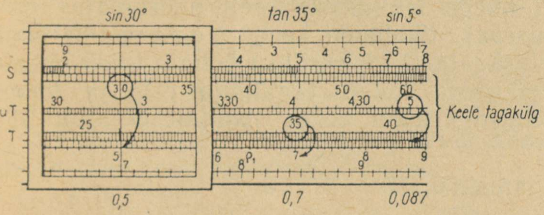
$\tan 15° = 0{,}268;$ $\arctan 0{,}795 = 38°30'.$

Kui antud nurk on vahemikus 34′...5°44′, siis toimime täpselt eespool kirjeldatud viisil, kasutades skaalat *ST* ja pidades silmas, et siinuse ja tangensi väärtused on sel korral vahemikus 0,01...0,1.

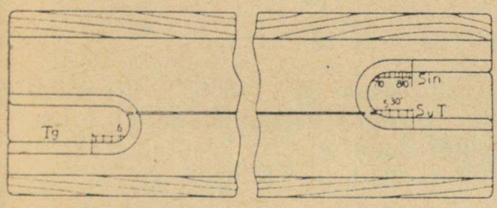
Näiteks:

sin 1°30′ = 0,0262; tan 2°18′ = 0,0402;
arcsin 0,0405 = 2°19′; arctan 0,0769 = 4°24′.

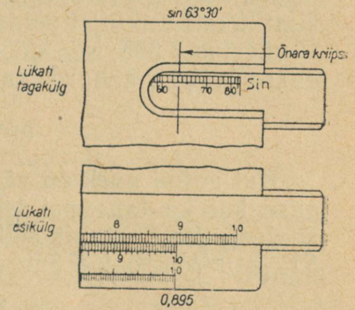
Joonisel 21 on näidatud sin 30°, tan 35° ja sin 5° leidmine lükatil, kui selle keel on pööratud.



Joon. 21.



Joon. 22.



Joon. 23.

Kirjeldatud operatsioone saab lükatil teostada ka k e e l t p ö ö r a m a t a, kasutades selle asemel lükati korpuse otstes leiduvaid õnaraid. Pöörates lükatit pikitelje ümber 180°, näeme tagaküljel õnarate äärtel kriipse: parempoolses otsas kaks kriipsu — üks ülal ja teine all, vasakpoolses otsas üks kriips — all (joon. 22).

Parempoolse otsa ülemist kriipsu kasutame kraadide ja minutite märkimiseks ja lugemiseks skaalal *S*, alumist skaalal *ST*; vasakpoolse otsa kriipsu kasutame seoses skaalaga *T*.

Leiame k e e l t p ö ö r a m a t a näiteks sin 63°30′. Selleks pöörame lükati tagakülje ette, tõmbame keelt paremale seni, kuni skaala *S* arvule 63°30′ vastav kriips tuleb kohakuti parempoolse õnara ülemise kriipsuga (joon. 23, ülal); siis pöörame lükati esikülje ette ja loeme skaala D lõppkriipsu kohalt skaalalt C (keele alumisel äärel) numbrid 8—9—5 (joon. 23, all); seega

$$\sin 63°30' = 0{,}895.$$

Antud nurga tangensi (näiteks $\tan 20°$) leidmiseks pöörame lükati tagakülje ette, tõmbame keelt vasakule seni, kuni skaalal T arvule 20° vastav kriips tuleb kohakuti vasakpoolse õnara kriipsuga; siis pöörame lükati esikülje ette ja loeme skaala D alguskriipsu kohalt skaalal C numbrid 3—6—4; seega

$$\tan 20° = 0{,}364.$$

Antud siinuse järgi nurga leidmiseks keelt pööramata (näiteks $\arcsin 0{,}515$ leidmiseks), tõmbame keelt p a r e m a l e seni, kuni lükati esiküljel põhiskaala D lõppkriipsu kohale tuleb skaala C väärtus 0,515; siis pöörame lükati tagakülje ette ja loeme parempoolse õnara ülemise kriipsu kohal skaalalt S arvu 31°; seega

$$\arcsin 0{,}515 = 31°.$$

Antud tangensi järgi nurga leidmiseks keelt pööramata (näiteks $\arctan 0{,}535$ leidmiseks) tõmbame keelt v a s a k u l e seni, kuni lükati esiküljel põhiskaala D alguskriipsu kohale tuleb skaala C väärtus 0,535; siis pöörame lükati ümber ja loeme vasakpoolse õnara kriipsu kohal skaalalt T 28°10'; seega

$$\arctan 0{,}535 = 28°10'.$$

Kui antud nurk on väike (vahemikust 34' . . . 5°44'), siis nii siinuse kui ka tangensi leidmine (samuti nurga leidmine) toimub analoogiliselt, ainult selle erinevusega, et siis kasutame skaalat ST ja parempoolse õnara alumist kriipsu. Näiteks:

$$\sin 4° = \tan 4° = 0{,}0698;$$
$$\arcsin 0{,}0525 = \arctan 0{,}0525 = 3°.$$

Antud nurga koosinuse ja antud koosinuse järgi nurga leidmisel kasutame valemi

$$\cos \alpha = \sin (90° - \alpha)$$

vahendust; näiteks:

$$\cos 32° = \sin (90° - 32°) = \sin 58° = 0{,}848.$$

Olgu antud, et $\cos \alpha = 0{,}588$. Kui suur on α?

Sel korral $\sin (90° - \alpha) = 0{,}588$; siit

$$90° - \alpha = 36° \text{ ja } \alpha = 54°.$$

Antud nurga kootangensi leidmisel kasutame abivahendina seost

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}.$$

Näiteks $\cot 25° = \frac{1}{\tan 25°}$ leidmiseks pöörame lükati tagakülje ette, tõmbame keelt vasakule seni, kuni skaala *T* koht 25° tuleb kohakuti vasaku õnara kriipsuga; nüüd pöörame lükati esikülje üles ning loeme skaalalt *C* (skaala *D* alguskriipsu kohalt) $\tan 25° = 0{,}466$, aga skaalalt *D* (skaala *C* lõppkriipsu kohalt) jagatise

$$\frac{1}{\tan 25°} = \frac{1}{0{,}466} = 2{,}14 = \cot 25°.$$

90°-st suurema nurga siinuse või koosinuse leidmisel rakendame taandamisvalemeid. Näiteks:

$$\sin 125° = \sin(180° - 125°) = \sin 55° = 0{,}82.$$

45°-st suurema nurga tangensi leidmisel rakendame seoseid

$$\tan \alpha = \cot(90° - \alpha) = \frac{1}{\tan(90° - \alpha)}.$$

Näiteks

$$\tan 75° = \cot(90° - 75°) = \cot 15° = \frac{1}{\tan 15°} = 3{,}73.$$

Erilist käsitlust nõuavad trigonomeetrilised funktsioonid nurkade puhul, mis on väiksemad kui 34′. Sääraste nurkade korral nii siinuslõik kui ka tangenslõik on pikkuselt peaaegu võrdsed kaare pikkusega (vt. joon. 20). Kesknurka teatavasti mõõdab temale vastav kaar; niisiis, kui kesknurk on α radiaani, siis ka sellele nurgale vastav kaar on α radiaani. Teades, et

$$1 \text{ rad} = 57°18' = 3438',$$

leiame nurgale α' vastava kaare pikkuse radiaanides jagatisena:

$$\alpha' : 3438'.$$

Arvu 3438 kohal leidub lükati põhiskaalal märge ϱ', nii et

$$\varrho' = 3438' \text{ ja (kui } \alpha < 34')$$

$$\sin \alpha = \tan \alpha = \frac{\alpha'}{\varrho'}.$$

Näiteks $\sin 20' = \frac{20'}{3438'} = \frac{20'}{\varrho'} = 0{,}00582.$

Sääraste jagatiste arvutamisel peame meeles: kui $\alpha < 34'$, siis $\sin\alpha = \tan\alpha < 0{,}01$.

Ülesandeid.

61. Leia lükatilt keele pööratud asendi puhul:

1) $\sin 50°$	2) $\sin 8°25'$	3) $\cos 15°$
$\sin 45°$	$\sin 85°$	$\cos 40°30'$
$\sin 24°$	$\sin 14°10'$	$\cos 72°50'$
$\sin 51°$	$\sin 130°$	$\cos 61°$
$\sin 9°30'$	$\sin 300°$	$\cos 147°$
4) $\tan 13°$	3) $\tan 50°$	6) $\cot 61°$
$\tan 32°$	$\tan 54°$	$\cot 43°$
$\tan 9°10'$	$\tan 77°30'$	$\cot 48°$
$\tan 36°30'$	$\tan 71°$	$\cot 12°30'$
$\tan 25°30'$	$\tan 60°30'$	$\cot 19°10'$
7) $\sin 1°30'$	8) $\sin 2°10'$	9) $\tan 2°05'$
$\tan 2°18'$	$\sin 3°20'$	$\tan 2°44'$
$\tan 0°42'$	$\sin 3°25'$	$\tan 0°54'$
$\tan 4°24'$	$\sin 1°55'$	$\cos 88°17'$
$\tan 5°30'$	$\sin 0°42'$	$\cot 87°54'$

62. Leia lükatilt keele normaalasendi puhul:

1) $\sin 30'$	2) $\cot 89°45'$	3) $\sin 15'$
$\sin 27'$	$\tan 89°44'$	$\sin 32'$
$\tan 25'$	$\tan 88°45'$	$\tan 18'$
$\sin 17'$	$\cos 89°15'$	$\tan 21'$
$\tan 6'$	$\cos 88°20'$	$\tan 46'$

63. Leia lükatilt keele pööratud asendi puhul teravnurk x, kui:

1) $\sin x = 0{,}245$	2) $\cos x = 0{,}670$	3) $\sin x = 0{,}309$
$\sin x = 0{,}142$	$\cos x = 0{,}245$	$\sin x = 0{,}339$
$\sin x = 0{,}315$	$\cos x = 0{,}158$	$\sin x = 0{,}799$
$\sin x = 0375$	$\cos x = 0{,}588$	$\sin x = -0{,}242$
$\sin x = 0{,}485$	$\cos x = 0{,}225$	$\sin x = -0{,}334$
4) $\tan x = 0{,}268$	5) $\tan x = 1{,}192$	6) $\cot x = 0{,}554$
$\tan x = 0{,}625$	$\tan x = 1{,}376$	$\cot x = 1{,}07$
$\tan x = 0{,}161$	$\tan x = 4{,}511$	$\cot x = 0{,}900$
$\tan x = 0{,}795$	$\tan x = 2{,}90$	$\cot x = 4{,}51$
$\tan x = 0{,}966$	$\tan x = 1{,}192$	$\cot x = 2{,}88$

64. Leia lükatilt keele pööratud asendi puhul:

1) arcsin 0,707 arcsin 0,375 arcsin 0,777 arcsin 0,165 arcsin 0,146	2) arc tan 0,839 arctan 0,259 arctan 0,445 arctan 0,835 arctan 0,615	3) arctan 1,195 arctan 1,575 arccot 2,90 arccot 1,192 arccot 0,554
4) arcsin 0,0552 arcsin 0,0596 arcsin 0,0334 arcsin 0,0122 arcsin 0,030	5) arctan 0,0364 arctan 0,0477 arctan 0,0157 arctan 0,0114 arctan 0,0556	6) arcsin 0,00262 arctan 0,00582 arcsin 0,00728 arctan 0,00485 arcsin 0,00211
7) arcsin 0,00582 arcsin 0,00786 arctan 0,00728 arcsin 0,00512 arctan 0,00197	8) sin 31° tan 19° sin 1°15′ sin 3°40′ tan 2°10′	9) sin 1°40′ sin 40′ tan 9° tan 17° cot 52°
10) cot 76° cot 87° tan 43°20′ cot 47°40′ cot 62°20′	11) arctan 0,625 arctan 0,815 arctan 0,244 arctan 0,880 arctan 0,250	12) arcsin 0,707 arcsin 0,174 arcsin 0,819 arcsin 0,985 arcsin 0,259

§ 6. TRIGONOMEETRILISI ARVUTUSI LÜKATI KASUTAMISEGA.

Näiteid.

1) Leia nurk α, kui $\sin\alpha = \frac{12,6}{17,5}$.

Lahendame ülesande lükati keelt pööramata. Märgime skaalal D arvu 17,5; tõmbame keelt paremale niipalju, et skaala C arv 12,6 jääb kohakuti arvuga 17,5 skaalalt D. Pöörame nüüd lükati ümber ning loeme parempoolse õnara ülemise kriipsu järgi skaalalt S väärtuse 46°. Seega vastuseks on $\alpha = 46°$.

2) $\frac{3,6}{\sin 30°} = \frac{2,5}{\sin x}$. Leia x.

Lahendus pööratud keelega lükatil on järgmine. Märgime niidiga skaalal D arvu 3,6. Tõmbame keelega niidi alla 30° skaalalt S. Nüüd märgime niidiga skaalal D arvu 2,5. Niidi alt skaalal S loeme vastuseks 20°19′. Seega $x = 20°19'$.

3) Arvuta avaldis $14,6 \cdot \sin 56°30'$.

Lahendame ülesande lükati keelt pööramata. Lükatit tagaküljelt jälgides tõmbame keelt paremale niipalju, et skaalalt S tuleks õnara kriipsu kohale 56°30′. Pöörame nüüd lükati päripidi ning märgime niidiga skaalal D arvu 14,6. Vastuseks loeme niidi alt skaalalt C arvu 12,2.

Seega $14{,}6 \cdot \sin 56°30' = 12{,}2$.

4) Teosta jagamine $\frac{13{,}9}{\tan 41°}$.

Lahendame ülesande lükatil keele pööratud asendis. Märgime niidiga skaalal D arvu 13,9, tõmbame niidi alla skaala T arvu 41 ning loeme keele lõpult skaalalt D tulemuseks 16. Seega

$$\frac{13{,}9}{\tan 41°} = 16.$$

5) Täisnurkse kolmnurga kaatet $a = 250$ ja $b = 575$. Leia teravnurgad ja hüpotenuus.

Ülesannet lükati abil lahendades leiame kõigepealt, et

$$\tan \alpha = \frac{250}{575} = 0{,}435.$$

Nüüd seame skaala C arvu 0,435 kohakuti skaala D alguskriipsuga, pöörame lükati ümber ning loeme vasakpoolse õnara kriipsu kohalt skaalalt T arvu 23°30′. Seega

$$\alpha = 23°30'; \ \beta = 90° - 23°30' = 66°30'.$$

Hüpotenuusi arvutame seoseset

$$\frac{a}{c} = \sin \alpha \text{ ehk } c = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{250}{\sin 23°30'}.$$

Viimase jagatise leiame järgmiselt. Pöörame keele ja märgime niidiga skaalal S koha 23°30′; niidi all skaalal D leidub siis vastav siinuse väärtus (0,399; selle väljalugemine pole tarvilik). Nüüd pöörame keele tagasi ja leiame jagatise

$$250 : \sin 23°30' = 627.$$

Kontrolliks kasutame Pütagorase teoreemi, arvutades lükatil

$$\begin{aligned} a^2 &= 250^2 = 62\,500; \\ b^2 &= 575^2 = 331\,000; \\ \hline a^2 + b^2 &= 393\,500 \approx 393\,000; \\ c^2 &= 627^2 \approx 393\,000. \end{aligned}$$

Vastus. $\alpha = 23°30'$; $\beta = 55°30'$; $c = 627$.

Ülesandeid.

65. Arvuta lükati abil nurk α, kui

1) $\sin\alpha = \frac{6,3}{8,6}$ 4) $\cot\alpha = \frac{23}{52}$

2) $\cos\alpha = \frac{18}{73}$ 3) $\tan\alpha = \frac{37,6}{54,5}$

66. Arvuta lükati kasutamisega avaldis:

1) $\frac{15,4}{\sin 69°30'}$ 6) $\frac{12,5}{\sin 28°20'}$ 11) $5,85 \cdot \sin 21°40'$

2) $\frac{13,8}{\sin 24°30'}$ 7) $\frac{41,5}{\sin 45°30'}$ 12) $2,4 \cdot \tan 22°20.$

3) $\frac{8,5}{\sin 76°}$ 8) $\frac{26,2}{\sin 15°15'}$ 13) $2,54 \cdot \tan 66°30'$

4) $\frac{52}{\sin 69°}$ 9) $\frac{243}{\sin 71°}$ 14) $\frac{27,8}{\tan 42°}$

5) $\frac{25,4}{\tan 35°}$ 10) $\frac{1,43}{\tan 40°35'}$ 15) $\frac{0,84}{\tan 28°10'}$

67. Arvuta lükati abil avaldis:

1) $\frac{25,2}{\sin 3°11'}$ 3) $\frac{0,28}{\sin 2°30'}$ 5) $78 \cdot \sin 1°55'$

2) $\frac{10}{\tan 2°20'}$ 4) $\frac{542}{\tan 4°20'}$ 6) $635 \cdot \tan 4°15'$

68. Lahenda lükati kasutamisega võrre:

1) $\frac{\sin 15°}{3,5} = \frac{\sin x}{6,9}$ 4) $\frac{\sin 10°}{2,4} = \frac{\sin x}{3,8}$

2) $\frac{43,3}{\sin 60°} = \frac{a}{\sin 30°}$ 5) $\frac{7,2}{\sin 30°} = \frac{5}{\sin x}$

3) $\frac{\tan 18°}{30} = \frac{\tan 32°}{x}$ 6) $\frac{\tan 40°}{3} = \frac{\tan x}{2}$

69. Arvuta lükati abil täisnurkse kolmnurga puuduvad küljed ja nurgad.

1) $a = 7,9$ cm; $c = 10,7$ cm
2) $b = 10,5$ dm; $c = 15,3$ dm
3) $a = 6,05$ m; $b = 8,32$ m
4) $a = 16,1$ cm; $b = 13,3$ cm
5) $a = 12,9$ mm; $\alpha = 33°30'$
6) $c = 74,5$ mm; $\alpha = 28°20'$

70. Joonestati kolmnurk külgege pikkustega $a = 8$ cm, $b = 5$ cm ja $c = 7{,}2$ cm. Nurkade mõõtmisel leiti, et $\alpha = 80°$, $\beta = 38°$ ja $\gamma = 62°$. Arvuta lükati abil suhted

$$\frac{a}{\sin\alpha}, \quad \frac{b}{\sin\beta} \quad \text{ja} \quad \frac{c}{\sin\gamma}$$

ja võrdle tulemusi omavahel.

71. Joonesta kolmnurk, mille küljed on $a = 4$ cm, $b = 6$ cm ja $c = 8{,}9$ cm. Mõõda selle kolmnurga nurgad α, β ja γ.
Arvuta lükati abil suhted

$$\frac{a}{\sin\alpha}, \quad \frac{b}{\sin\beta} \quad \text{ja} \quad \frac{c}{\sin\gamma}.$$

Võrdle nende suhete suurusi. Joonesta saadud kolmnurga ümber ringjoon ja mõõda selle diameeter sentimeetrites; võrdle saadud arvu eelmiste suhetega.

72. Joonesta kolmnurk külgedega $a = 87$ mm, $b = 65$ mm ja $c = 76$ mm. Mõõda saadud kolmnurga nurgad α, β ja γ ning arvuta lükati abil suhted

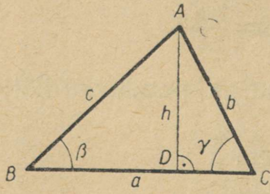
$$\frac{a}{\sin\alpha}, \quad \frac{b}{\sin\beta} \quad \text{ja} \quad \frac{c}{\sin\gamma}.$$

Võrdle neid tulemusi kolmnurga ümberringjoone läbimõõduga, kui viimane on mõõdetud millimeetrites.

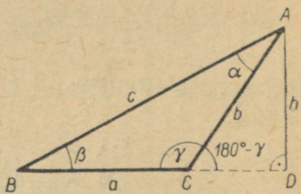
§ 7. KOLMNURGA PINDALA KAHE KÜLJE JA NENDEVAHELISE NURGA JÄRGI.

Kolmnurga pindala saab arvutada kahe külje ja nendevahelise nurga järgi. Vastava eeskirja saamiseks lähtume valemist

$$S = \frac{1}{2} ah.$$



Joon. 24.



Joon. 25.

Tõmmates kolmnurgas ABC kõrguse h alusele a (joonised 24 ja 25), saame täisnurkse kolmnurga ACD, milles $h = b \sin\gamma$

[nürinurkses kolmnurgas $h = b \sin(180° - \gamma) = b \sin \gamma$]. Asendades pindala valemis h avaldisega $b \sin \gamma$, saamegi otsitava valemi:

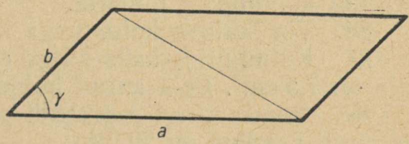
$$\boxed{S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma}$$

Võttes kõrguse küljele b või küljele c, saame vastavalt valemid

$$\boxed{S = \frac{1}{2} bc \sin \alpha}$$

ja

$$\boxed{S = \frac{1}{2} ac \sin \beta}$$



Joon. 26.

Niisiis,

kolmnurga pindala võrdub poolega kahe külje ja nendevahelise nurga siinuse korrutisest.

Järeldus. Et diagonaal jaotab rööpküliku kaheks võrdseks kolmnurgaks (joon. 26), millest kummagi pindala on $\frac{1}{2} ab \sin \gamma$, siis rööpküliku pindala arvutamiseks saame valemi:

$$S = ab \sin \gamma.$$

Rööpküliku pindala võrdub kahe külje ja nendevahelise nurga siinuse korrutisega.

Eeskiri on õige sõltumata sellest, kas rööpküliku vaadeldav nurk on terav- või nürinurk.

Ülesandeid.

73. Kolmnurga kaks külge on 6 cm ja 9 cm; nende külgede vaheline nurk on 30°. Kui suur on kolmnurga pindala?

74. Rööpküliku küljed on 5 dm ja 12 dm ja teravnurk on 30°. Kui suur on rööpküliku pindala?

75. Tõesta, et diagonaalid jaotavad rööpküliku neljaks pindvõrdseks kolmnurgaks.

76. Tõesta, et diagonaalid jaotavad ristküliku neljaks pindvõrdseks kolmnurgaks.

77. Arvuta lükati abil kolmnurga pindala, kui

1) $a = 632$ m; $b = 496$ m; $\gamma = 134°20'$;
2) $b = 542$ mm; $c = 435$ mm; $\alpha = 35°40'$.

78. Arvuta rööpküliku pindala, kui küljed ja nurk on vastavalt

1) 4 cm, 6 cm ja 40°;
2) 4,6 m, 5,8 m ja 130°.

79. Võrdhaarse kolmnurga haar on 3,4 cm ja tipunurk 80°. Arvuta kolmnurga pindala.

80. Võrdkülgse kolmnurga külg on 15 cm. Arvuta pindala.

81. Kolmnurga kaks külge on 5 cm ja 6 cm. Kolmnurga pindala on 7,5 cm^2. Leia antud külgede vaheline nurk.

82. Arvuta ringi segmendi pindala, kui segmendi kaar on 70° ja ringi raadius on 20,2 cm.

83. Arvuta korrapärase viisnurga pindala, kui viisnurga ümberringjoone raadius on 3 cm.

§ 8. SIINUSTEOREEM.

Üldkujulist kolmnurka saab lahendada, kui tükeldada antud kolmnurk kõrgusega täisnurkseteks kolmnurkadeks ning arvutada nendest antud kolmnurga puuduvad elemendid. Lihtsam on aga siiski lahendada otseselt, kasutades mõnesuguseid kolmnurga elementide vahelisi seoseid. Üht niisugust seost väljendab nn. siinusteoreem:

kolmnurga küljed on võrdelised vastasnurkade siinustega.

$$\boxed{\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}}$$

Tõestus. Lähtume kolmnurga pindala valemitest:

$$S = \frac{1}{2}ac\sin\beta; \tag{1}$$

$$S = \frac{1}{2}bc\sin\alpha; \tag{2}$$

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma. \tag{3}$$

Esimesest ja teisest võrdusest järeldub, et

$$ac\sin\beta = bc\sin\alpha$$

ehk

$$a \sin \beta = b \sin \alpha.$$

Siit

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}.$$

Esimesest ja kolmandast võrdusest järeldub, et

$$ac \sin \beta = ab \sin \gamma$$

ehk

$$c \sin \beta = b \sin \gamma.$$

Siit saame

$$\frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}.$$

Seega tõesti

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}.$$

Kui võrdes

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$$

kolm liiget on antud, siis neljanda saab arvutada. Seega siinusteoreem võimaldab

1) arvutada kolmnurga külge teise külje ja nende külgede vastasnurkade järgi; näiteks:

$$a = \frac{b \sin \alpha}{\sin \beta};$$

2) arvutada kolmnurga nurka teise nurga ja nende nurkade vastaskülgede järgi; näiteks:

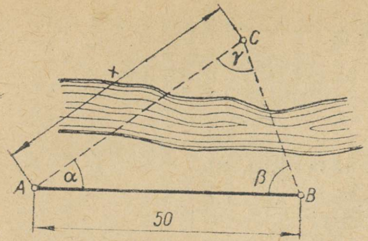
$$\sin \alpha = \frac{a \sin \beta}{b},$$

kust nurga α saame leida lükati või tabeli abil.

K o k k u v õ t t e s: *siinusteoreem võimaldab lahendada kolmnurka, millest on antud*

1) *kaks nurka ja üks külg või*
2) *kaks külge ja neist ühe külje vastasnurk.*

N ä i d e 1. Tahetakse mõõta ligipääsmatu punkti C kaugust punktist A. Selleks võetakse lõik $AB = 50$ m baasiks ja mõõdetakse nurgad $CAB = \alpha$ ja $CBA = \beta$. Arvutame kauguse $AC = x$, kui $\alpha = 36°30'$ ja $\beta = 68°30'$ (joon. 27).



Joon. 27.

L a h e n d u s. Rakendades siinusteoreemi, saame:

1) $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$;

2) $\frac{x}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$,

millest

$$x = \frac{c\sin\beta}{\sin\gamma}.$$

Numbriliselt:

$$\gamma = 180° - (36°30' + 68°30') = 180° - 105° = 75°.$$

Võrret $\frac{x}{\sin 68°30'} = \frac{50}{\sin 75°}$ lükatiga lahendades leiame, et $x = 48{,}2$. Seega on punktide A ja C vaheline kaugus ligikaudu 48 m.

N ä i d e 2. Lahendada kolmnurk andmeil:

$$c = 93{,}1;\quad b = 49{,}5;\quad \gamma = 110°50'.$$

L a h e n d u s. Et antud nurk on nürinurk, siis peavad ülejäänud nurgad α ja β olema teravnurgad.

1) Arvutame nurga β, milleks rakendame siinusteoreemi:

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

Asendades saame:

$$\frac{49{,}5}{\sin\beta} = \frac{93{,}1}{\sin 110°50'} \quad \text{ehk} \quad \frac{49{,}5}{\sin\beta} = \frac{93{,}1}{\sin 69°10'}.$$

Siit $\beta = 29°50'$.

2) $\alpha = 180° - (110°50' + 29°50') = 39°20'$.

3) Arvutame külje a:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} \quad \text{ehk} \quad \frac{a}{\sin 39°20'} = \frac{49{,}5}{\sin 29°50'}.$$

Seega,

$$a = 63{,}19 \approx 63{,}2.$$

Paneme tähele, et

$$b < a < c \quad \text{ja} \quad \beta < \alpha < \gamma.$$

V a s t u s. $a = 63{,}2$; $\alpha = 39°20'$; $\beta = 29°50'$.

Näide 3. Lahendada kolmnurk andmeil:

$$b = 34;\quad c = 46;\quad \beta = 42^\circ.$$

1) Arvutame nurga γ:

$$\frac{c}{\sin\gamma} = \frac{b}{\sin\beta},\ \text{millest}\ \sin\gamma = \frac{c\sin\beta}{b}\quad \text{ehk}$$

$$\sin\gamma = \frac{46\cdot\sin 42^\circ}{34}\ \text{ehk}\ \sin\gamma = 0{,}9054.$$

Nurga γ arvutamisel peame silmas pidama, et $\gamma > \beta$, (sest $c > b$) ja teiseks, et viimasel võrrandil on kaks lahendit; tõesti, ka

$$\sin(180^\circ - \gamma) = 0{,}9054.$$

Nurga γ väärtuseks saame antud juhul:

$$\gamma_1 = 53^\circ 32' \approx 53^\circ 30';$$
$$\gamma_2 = 126^\circ 30'.$$

Mõlemad väärtused võivad olla lahendatava kolmnurga nurgaks, sest mõlemad on suuremad kui β.

2) Leiame nurga α:

$$\alpha_1 = 180^\circ - (42^\circ + 53^\circ 30') = 84^\circ 30';$$
$$\alpha_2 = 180^\circ - (42^\circ + 126^\circ 30') = 11^\circ 30'.$$

3) Külje a arvutamisel saame:

$$\frac{a_1}{\sin\alpha_1} = \frac{b}{\sin\beta},\ \text{millest}\ a_1 = \frac{b\sin\alpha_1}{\sin\beta}$$

ehk

$$a_1 = \frac{34\cdot\sin 84^\circ 30'}{\sin 42^\circ} \approx 50{,}5;$$

$$a_2 = \frac{34\cdot\sin 11^\circ 30'}{\sin 42^\circ} \approx 10{,}2.$$

Vastused.

$$1)\ \begin{cases} \alpha = 84^\circ 30' \\ \gamma = 53^\circ 30' \\ a = 50{,}5 \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} \alpha = 11^\circ 30' \\ \gamma = 126^\circ 30' \\ a = 10{,}2 \end{cases}$$

Kui kolmnurgast on antud kaks külge ja väiksema külje vastasnurk, siis, nagu teada, määravad need andmed kas kaks kolmnurka, ühe kolmnurga või ei määra ühtki kolmnurka. Olgu näiteks antud a, b ja α nii, et $a < b$; nurga β arvutamisel saame

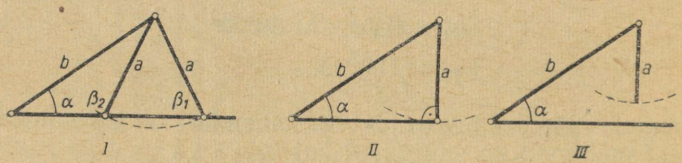
$$\sin\beta = \frac{b \sin\alpha}{a}.$$

Sõltuvalt andmetest a, b ja α võib juhtuda, et

1) $a > b \sin\alpha$; 2) $a = b \sin\alpha$; 3) $a < b \sin\alpha$, millele vastavalt peaks olema

1) $\sin\beta < 1$; 2) $\sin\beta = 1$; 3) $\sin\beta > 1$.

Esimesel juhul leidub alati teravnurk β_1, mis sellele siinusele vastab. Kuid siis leidub ka nürinurk β_2, millel on sama siinuse väärtus, sest $\sin\beta_1 = \sin(180° - \beta_1)$, seega $\beta_2 = 180° - \beta_1$. Lahendamisel saame sel korral kaks kolmnurka, ühe teravnurkse, teise nürinurkse (joon. 28-I).



Joon. 28.

Teisel juhul, kui $\sin\beta = 1$, saame lahendamisel ühe kolmnurga, nimelt täisnurkse, sest siis $\beta = 90°$ (joon. 28-II).

Kolmandal juhul, kui $\sin\beta > 1$, andmed a, b ja α ei määra ühtki kolmnurka, sest pole olemas nurka, mille siinus on suurem kui 1. Ülesandel sel korral lahend puudub (joon. 28-III).

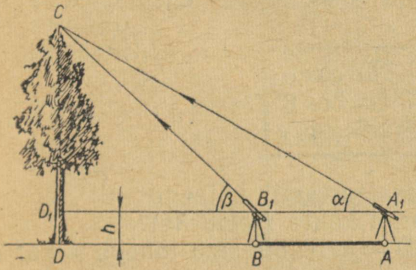
Ülesandeid.

84. Lahenda kolmnurk andmeil:

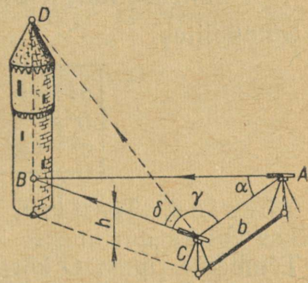
1) $a = 22$;	$\alpha = 36°$;	$\beta = 52°$.
2) $b = 30$;	$\alpha = 52°$;	$\gamma = 58°$.
3) $c = 24$;	$\beta = 122°$;	$\gamma = 35°$.
4) $c = 174$;	$\beta = 36°30'$;	$\gamma = 63°30'$.
5) $b = 72$;	$c = 45$;	$\beta = 58°20'$.
6) $a = 416$;	$b = 635$;	$\beta = 28°10'$.
7) $b = 85{,}76$;	$\beta = 36°55'$;	$\gamma = 74°18'$.
8) $c = 144{,}7$;	$\alpha = 120°16'$;	$\beta = 42°24'$.
9) $b = 56$;	$\alpha = 52°$;	$\gamma = 6°$.
10) $a = 62$;	$b = 48$;	$\alpha = 50°$.
11) $a = 32$;	$b = 48$;	$\beta = 40°$.
12) $b = 35$;	$c = 45$;	$\beta = 46°$.

13) $b = 127$; $c = 283$; $\beta = 70°30'$.
14) $a = 99$; $c = 68$; $\gamma = 28°$.
15) $a = 14{,}5$; $b = 21{,}1$; $\alpha = 63°50'$.

85. Mõõtmistöödel maastikul said õpilased ülesande mõõta niisuguse puu kõrgus, millele ei saanud ligi minna. Ülesande täitmiseks võeti puu tüve läbival sirgel baas $AB = 10$ m ning mõõdeti puu kõrgusnurgad α ja β vastavalt punktide A ja B juurest viseerimisega puu latva C (joon. 29). Saadi $\alpha = 28°17'$ ja $\beta = 41°20'$. Nurgamõõtja kõrgus $h = 1{,}3$ m. Kui kõrge oli puu?



Joon. 29.



Joon. 30.

86. Vabrikukorstna kõrguse kindlakstegemiseks mõõdeti korstna sihis baas $AB = 75$ m ning korstna kõrgusnurgad punktide A ja B kohal, saades $\alpha = 20°48'$ ja $\beta = 32°18'$. Nurgamõõtja kõrgus oli 1,3 m. Kui kõrge oli korsten? (Kasuta joonist 29!)

87. Veetorni kõrguse mõõtmiseks võeti maapinnal baas $b = AC$, mis ei asunud torni jalamit läbival sirgel. Mõõdeti nurgad $BAC = \alpha$, $BCA = \gamma$ ja $DCA = \delta$ (joon. 30). Arvuta torni kõrgus andmeil: $b = 35$ m; $\alpha = 47°43'$; $\gamma = 110°28'$; $\delta = 32°13'$. Teodoliidi kõrgus $h = 1{,}3$ m.

88. Näita, et siinusteoreem kehtib ka täisnurkse kolmnurga kohta.

89. Näita siinusteoreemi abil, et

1) kui kolmnurgas kaks nurka on võrdsed, siis on võrdsed ka nende nurkade vastasküljed;

2) kolmnurgas, mille kõik nurgad on võrdsed, on ka kõik küljed võrdsed.

90. Kolmnurga nurgad suhtuvad nagu 1 : 2 : 3 ja ümbermõõt on 20 cm. Kui pikad on kolmnurga küljed?

91. Kolmnurgas ABC on joonestatud nurga B poolitaja BE, kus E on nurgapoolitaja ja külje AC ühine punkt. Rakendades siinusteoreemi, tõesta kolmnurga nurgapoolitaja omadus:

$$AE : EC = AB : BC.$$

§ 9. KOOSINUSTEOREEM.

Kolmnurga lahendamist juhul, kui ta on määratud kolme küljega või kahe külje ja nendevahelise nurgaga, ei saa alustada siinusteoreemiga, sest sel korral ei saa kirjutada võrret, millest kolm liiget on teada.

Sel puhul on rakendatav seos, mida väljendab nn. k o o s i n u s t e o r e e m:

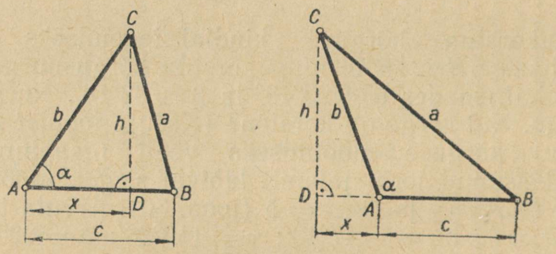
kolmnurga külje ruut on võrdne teiste külgede ruutude summaga, millest on lahutatud nende külgede ja viimaste vahelise nurga koosinuse kahekordne korrutis.

Sümbolites

$$\boxed{\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \end{aligned}}$$

T õ e s t u s. Tõestame, koosinusteoreemi ühtaegu nii teravnurkse kui ka nürinurkse kolmnurga kohta (joon. 31).

Tõmbame tipust C kõrguse $CD = h$. Tähistame tähega x külje b projektsiooni küljel c või selle pikendusel.



Joon. 31.

Pütagorase teoreemi põhjal saame kolmnurgast DBC:

teravnurkse kolmnurga korral:	nürinurkse kolmnurga korral:
$a^2 = h^2 + (c - x)^2$,	$a^2 = h^2 + (c + x)^2$,
$a^2 = h^2 + x^2 + c^2 - 2cx$.	$a^2 = h^2 + x^2 + c^2 + 2cx$.

Kolmnurgast ADC: $h^2 + x^2 = b^2$, seega

$a^2 = b^2 + c^2 - 2cx$.	$a^2 = b^2 + c^2 + 2cx$.

Kolmnurgast ADC saame, et

$x = b\cos\alpha$.	$x = b\cos(180° - \alpha)$ $= - b\cos\alpha$.

Kirjutades eespool saadud valemites tähe x asemele tema avaldised, saame

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cb \cos \alpha. \quad \Big| \quad a^2 = b^2 + c^2 + 2c(-b \cos \alpha).$$

Seega saame nii teravnurkse kui ka nürinurkse kolmnurga puhul:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$$

Analoogiliselt saame koosinusteoreemi tõestada ka külgede b ja c kohta.

Valemid, mis väljendavad koosinusteoreemi, võimaldavad arvutada kolmnurga külge kahe ülejäänud külje ja nendevahelise nurga järgi.

Eespooltoodud valemeid võib kirjutada ka kujul:

$$\boxed{\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ \cos \beta &= \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \\ \cos \gamma &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \end{aligned}}$$

Need valemid võimaldavad arvutada kolmnurga nurkasid, kui kõik küljed on antud. $\cos \alpha$, $\cos \beta$ ja $\cos \gamma$ järgi leiame tabelitest või lükati abil nurgad α, β ja γ.

Logaritmide kasutamine on koosinusteoreemi rakendamisel raskendatud, sest külje ruudu ja nurga koosinuse avaldised ei ole logaritmitavad.

Niisiis, *koosinusteoreem võimaldab lahendada kolmnurka, millest on antud*

1) *kaks külge ja nendevaheline nurk või*
2) *kolm külge.*

Kui kolmnurgast on antud kaks külge ja nendevaheline nurk, näiteks a, b ja γ, siis ülejäänud elemendid võime leida kahel erineval viisil.

A. Koosinusteoreemi põhjal:

1) rakendades valemit

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma, \text{ arvutame külje } c;$$

2) rakendades valemit

$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \text{ leiame nurga } \beta;$$

3) rakendades valemit

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}, \text{ leiame nurga } \alpha.$$

Viis A on otstarbekohane siis, kui antud külgede mõõtarvud on ühe- või kahekohalised.

B. Koosinusteooreemi ja siinusteoreemi põhjal:

1) valemist $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ arvutame külje c;

2) rakendades siinusteoreemi, kirjutame võrde

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}, \text{ millest leiame nurga } \beta;$$

3) võrdest $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$ leiame lõpuks nurga α.

Kui kolmnurgast on antud kolm külge, siis võib nurkade arvutamine toimuda samuti kahel viisil:

A. Koosinusteoreemi põhjal, kasutades nurkade koosinuste valemeid leheküljelt 39.

B. Koosinusteoreemi ja siinusteoreemi põhjal järgmiselt:

1) kasutades valemit

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}, \text{ leiame nurga } \alpha;$$

2) kirjutades siinusteoreemi põhjal võrde

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}, \text{ leiame sellest nurga } \beta;$$

3) võrdest $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$ leiame lõpuks nurga γ.

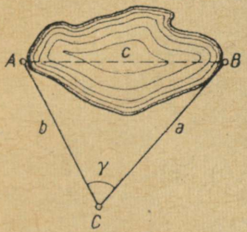
§ 10. KOLMNURGA LAHENDAMISE NÄITEID.

Näide 1. Arvuta tiigi pikkus AB (joon. 32), kui $AC = 60$ m, $BC = 80$ m ja nurk $ACB = 88°$.

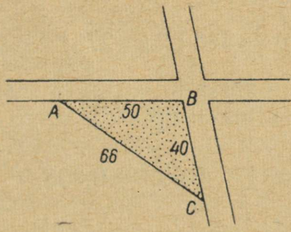
Lahendus. Tähistades pikkuse AB meetrites tähega c, võime koosinusteoreemi põhjal kirjutada:

$$c^2 = 60^2 + 80^2 - 2 \cdot 60 \cdot 80 \cdot \cos 88^\circ =$$
$$= 3600 + 6400 - 9600 \cdot 0{,}0349 = 9665.$$
$$c = \sqrt{9665} = 98{,}29 \approx 98.$$

Seega on tiigi pikkus ligikaudu 98 m.



Joon. 32.



Joon. 33.

Näide 2. Risttänavate vahel on kolmnurkne haljasala ABC, mille külgede pikkused on vastavalt 50, 40 ja 66 m (joon. 33). Arvuta tänavatevaheline nurk ABC.

Lahendus. Tähistades otsitava nurga tähega β, võime koosinusteoreemi põhjal kirjutada:

$$\cos \beta = \frac{50^2 + 40^2 - 66^2}{2 \cdot 50 \cdot 40} = \frac{2500 + 1600 - 4356}{4000} = -0{,}0640.$$

Seega

$$\cos(180^\circ - \beta) = 0{,}0640;$$
$$180^\circ - \beta = 86^\circ 20';$$
$$\beta = 93^\circ 40' \approx 94^\circ.$$

Seega on tänavatevaheline nurk 94°.

Näide 3. Kui suured on nurgad kolmnurgas, mille küljed on: $a = 195$, $b = 169$, $c = 182$?

Lähtudes koosinusteoreemist ja rakendades tuntud valemit

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

pole raske tuletada (proovi seda teha!) kolmnurga nn. **poolnurkade koosinuste valemeid:**

$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$	$\cos \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}$	$\cos \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$

kus $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$ tähendab kolmnurga poolt ümbermõõtu. Need valemid on eriti sobivad lükatiga arvutamiseks. Meie näite puhul korraldaksime arvutused nii:

$$\begin{array}{ll} a = 195; & p - a = 273 - 195 = 78; \\ b = 169; & p - b = 273 - 169 = 104; \\ c = 182; & p - c = 273 - 182 = 91; \\ \hline p = 546 : 2 = 273; & \end{array}$$

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{273 \cdot 78}{169 \cdot 182} = 0{,}692;$$

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - 0{,}692 = 0{,}308; \qquad \sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{0{,}308};$$

$$\frac{\alpha}{2} = 33°40'; \qquad \alpha = 67°20'.$$

$$\cos^2 \frac{\beta}{2} = \frac{273 \cdot 104}{195 \cdot 182} = 0{,}800;$$

$$\sin^2 \frac{\beta}{2} = 1 - 0{,}800 = 0{,}200; \qquad \sin \frac{\beta}{2} = \sqrt{0{,}200};$$

$$\frac{\beta}{2} = 26°35'; \qquad \beta = 53°10'.$$

$$\cos^2 \frac{\gamma}{2} = \frac{273 \cdot 91}{195 \cdot 169} = 0{,}753;$$

$$\sin^2 \frac{\gamma}{2} = 1 - 0{,}753 = 0{,}247; \qquad \sin \frac{\gamma}{2} = \sqrt{0{,}247};$$

$$\frac{\gamma}{2} = 29°45'; \qquad \gamma = 59°30'.$$

Kontroll. $\alpha + \beta + \gamma = 180°00'$.

Märkus. Arusaadavalt võiks näiteks 3. antud ülesande lahendada ka ainult koosinusteoreemi põhjal või rakendades viimast koos siinusteoreemiga (tee seda!).

Ülesandeid.

92. Lahenda kolmnurk järgmisil andmeil:

1) $a = 16$; $b = 12$; $\gamma = 38°$.
2) $b = 81{,}7$; $c = 39{,}2$; $\alpha = 122°10'$.
3) $a = 52{,}84$; $c = 14{,}88$; $\beta = 24°55'$.
4) $a = 8$; $b = 12$; $c = 16$.
5) $a = 50$; $b = 41$; $c = 19$.

6) $a = 6{,}4$; $b = 8{,}8$; $c = 10$.
7) $a = 40$; $b = 19$; $c = 41$.
8) $a = 1{,}5$; $b = 2{,}5$; $c = 1{,}8$.
9) $a = 24{,}57$; $b = 24{,}75$; $c = 10{,}05$.
10) $a = 0{,}2243$; $b = 0{,}2469$; $c = 0{,}3126$.

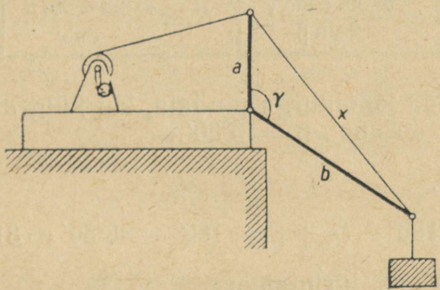
93. Arvuta järve pikkus AB (joon. 32), kui $AC = 570$ m, $BC = 860$ m ja nurk $\gamma = 79°$.

94. Nelinurga küljed on järjestikku 16 m, 18 m, 24 m ja 26 m; üks diagonaal on 36 m. Arvuta nelinurga pindala.

95. Matkaja näeb oma asukohast P kolme mäetippu A, B ja C, milledest A ja B paistavad talle ühes ja samas suunas ja milledest A on talle kõige lähemal. Kaardi järgi on $AB = 9{,}4$ km, $BC = 6{,}0$ km ja $AC = 11{,}2$ km. Matkaja mõõdab nurga BPC ja leiab selle olevat 12°. Kui kaugel on matkaja mäest C?

96. Ühest ja samast punktist alustasid ühtlast sirgjoonelist liikumist kaks keha, üks kiirusega 2 m sekundis, teine kiirusega 3 m sekundis. Kui kaugel on need kehad teineteisest 10 sekundi pärast, kui liikumise teed moodustavad nurga 34°?

97. Joonisel 34 on skemaatiliselt kujutatud tõstekraana, millel tugi $a = 3{,}8$ m, õlg $b = 6{,}5$ m ning nendevaheline nurk $\gamma = 125°$. Arvuta trossi pikkus x.



Joon. 34.

§ 11. KOLMNURGA PINDALA VALEMID.

Kolmnurga pindala saab arvutada tuntud valemi

$$\boxed{S = \frac{1}{2}ah} \qquad (1)$$

järgi, kus a tähendab kolmnurga alust ja h alusele tõmmatud kõrgust.

Kui kolmnurk on määratud kahe külje ja nendevahelise nurga kaudu, siis pindala arvutamiseks sobib valem (vt. § 7):

$$\boxed{S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma} \qquad (2)$$

Viimasest pindala valemist saab tuletada valemi kolmnurga pindala arvutamiseks ühe külje ja kolme nurga järgi.

Avaldame siinusteoreemi põhjal külje b:

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}; \quad b=\frac{a\sin\beta}{\sin\alpha}.$$

Asendades pindala valemis (2) külje b tema avaldisega, saame

$$S=\frac{1}{2}a\cdot\frac{a\sin\beta}{\sin\alpha}\cdot\sin\gamma;$$

$$\boxed{S=\frac{a^2\sin\beta\sin\gamma}{2\sin\alpha}} \qquad (3)$$

Anaoloogiliselt saame valemid:

$$(3') \quad \boxed{S=\frac{b^2\sin\alpha\sin\gamma}{2\sin\beta}} \quad \boxed{S=\frac{c^2\sin\alpha\sin\beta}{2\sin\gamma}} \quad (3'')$$

N ä i d e. Leida kolmnurga pindala, kui külg $c=89$ m ja selle lähisnurgad on: $\alpha=88°$, $\beta=10°50'$.

L a h e n d u s.

$$\gamma=180°-(\alpha+\beta)=180°-98°50'=81°10'.$$

Valemi (3″) järgi kirjutame:

$$S=\frac{89^2\cdot\sin 88°\cdot\sin 10°50'}{2\cdot\sin 81°10'}.$$

Edasisi arvutusi lükati abil sooritades saame vastuse järgmiselt:

$$S=\frac{7900\cdot 1\cdot 0{,}188}{2\cdot 0{,}988}=\frac{7900\cdot 0{,}094}{0{,}988}=756\ (\mathrm{m}^2).$$

Kolmnurga pindala saab arvutada ka kolme külje järgi. Sellekohase valemi tuletamisel lähtume valemist (2) kujul

$$S=\frac{1}{2}bc\sin\alpha$$

ning rakendame põhiseost

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)}.$$

Saame: $S = \frac{bc}{2}\sqrt{(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)}$.

Teisendame juuritavat avaldist. Liites koosinusteoreemist saadud valemis

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

mõlema poolega arvu 1, saame

$$1+\cos\alpha = 1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}$$

ehk, lahutades viimase murru lugeja tegureiks,

$$1+\cos\alpha = \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc}.$$

Tähistame kolmnurga ümbermõõdu sümboliga $2p$; siis

$$\begin{aligned}
&a+b+c=2p,\\
&a+b-c=a+b+c-2c=2p-2c=2(p-c),\\
&a+c-b=a+b+c-2b=2p-2b=2(p-b),\\
&b+c-a=a+b+c-2a=2p-2a=2(p-a).
\end{aligned}$$

Seega

$$1+\cos\alpha = \frac{2p(p-a)}{bc}.$$

Saadud võrduse mõlemaid pooli arvust 2 lahutades saame

$$1-\cos\alpha = 2-\frac{2p(p-a)}{bc} = \frac{2}{bc}(bc-p^2+ap).$$

Asendades viimases sulgavaldises a väärtusega $2p-b-c$, saame sulgavaldist teisendada järgmiselt:

$$\begin{aligned}
bc-p^2+ap &= bc-p^2+2p^2-pb-pc=\\
&=p^2-pb-pc+bc=\\
&=(p-b)(p-c).
\end{aligned}$$

Järelikult

$$1-\cos\alpha = \frac{2(p-b)(p-c)}{bc}$$

Pindala valemi saame lõpuks nii:

$$S=\frac{bc}{2}\sqrt{\frac{2p(p-a)}{bc}}\cdot\sqrt{\frac{2(p-b)(p-c)}{bc}};$$

$$\boxed{S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}} \qquad (4)$$

Seda valemit nimetatakse H e r o n i p i n d a l a v a l e m i k s. Kreeka matemaatik H e r o n elas II ja III sajandi vahetusel e.m.a. Vimasel ajal on selgunud, et valem oli tuntud juba enne Heronit.

N ä i d e. Leida võrdhaarse kolmnurga pindala, kui haar on 4,6 m ja alus 5,8 m.

L a h e n d u s. Kasutades Heroni pindalavalemit viime arvutused läbi järgmise skeemi järgi:

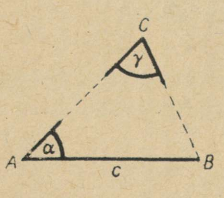
$$\begin{array}{ll} a=4{,}6; & p-a=2{,}9; \\ b=4{,}6; & p-b=2{,}9; \\ c=5{,}8; & p-c=1{,}7; \\ \hline p=15{,}0:2=7{,}5; & \end{array}$$

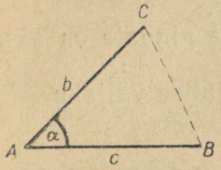
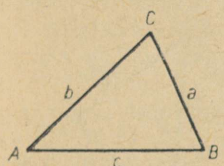
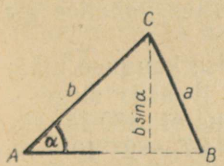
$$S=\sqrt{7{,}5\cdot 2{,}9^2\cdot 1{,}7}=2{,}9\cdot\sqrt{7{,}5\cdot 1{,}7}.$$

Edasi leiame lükatil korrutise $7{,}5\cdot 1{,}7$ skaalade A ja B abil; korrutise väärtust välja lugemata saame niidi alt skaalalt D ruutjuure väärtuse; viimastki välja lugemata korrutame ta kohe arvuga 2,9 ning loeme lõpptulemuseks numbrid 1—0—4. Arvutusandmete suurusjärke ja nimetusi arvestades otsustame, et

$$S=10{,}4\ (\text{m}^2).$$

§ 12. KOLMNURGA LAHENDAMISE SKEMAATILINE ÜLEVAADE.

Antud elemendid	Puuduvate elementide leidmine	Pindala
I. Külg ja kaks nurka 	1) $\beta=180°-(\alpha+\gamma)$ $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$ 2) $b=\frac{c\sin\beta}{\sin\gamma}$ 3) $a=\frac{c\sin\alpha}{\sin\gamma}$	$S=\frac{c^2\sin\alpha\sin\beta}{2\sin\gamma}$

Antud elemendid	Puuduvate elementide leidmine	Pindala
II. Kaks külge ja nurk nende vahel 	1) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$ $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$ 2) $\sin \beta = \frac{b \sin \alpha}{a}$ 3) $\sin \gamma = \frac{c \sin \alpha}{a}$	$S = \frac{1}{2} bc \sin \alpha$
III. Kolm külge 	$\cos \alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ või $\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$ või $\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$	Heroni pindalavalem
IV. Kaks külge ja neist ühe vastasnurk 	A. Lahend puudub, kui $a < b \sin \alpha$. B. On üks lahend, kui 1) $a > b$ 2) $a = b$ ja $\alpha < 90°$ 3) $a = b \sin \alpha$ C. Kaks lahendit, kui $b > a > b \sin \alpha$ $\frac{a}{\sin \gamma} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$	

Ülesandeid.

98. Arvuta kolmnurga pindala järgmisil andmeil:

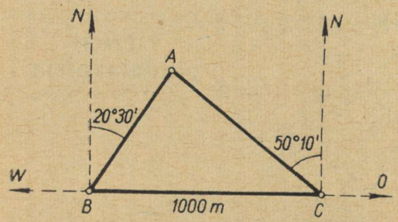
1) $a = 93$; $b = 65$; $\gamma = 42°$.
2) $b = 4{,}42$; $c = 5{,}72$; $\alpha = 65°20'$.
3) $a = 50{,}8$; $c = 32{,}3$; $\beta = 23°30'$.
4) $a = 20{,}73$; $b = 36{,}26$; $\gamma = 70°45'$.
5) $a = 48{,}8$; $\beta = 106°$; $\gamma = 25°20'$.
6) $a = 98{,}55$; $\alpha = 23°42'$; $\beta = 47°24'$.

7) $b=0,307$; $\alpha=32°40'$; $\beta=70°20'$.
8) $a=28$; $b=35$; $c=42$.
9) $a=0,18$; $b=0,23$; $c=0,09$.
10) $a=421,6$; $b=409,8$; $c=335,9$.

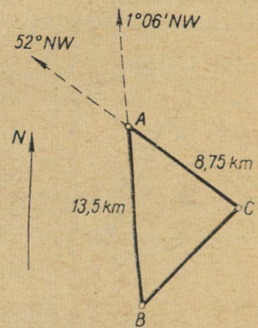
99. Võrdhaarse kolmnurga pindala on 636 cm² ja kolmnurga suurim nurk on 92°42′. Arvuta kolmnurga haar.

100. Leia kolmnurga nurgad, kui kolmnurga pindala on 78 m² ja kaks külge on 13,8 m ja 24,6 m.

101. Joonisel 35 on kujutatud kolmnurgakujulise väljaku *ABC* plaan. Arvuta väljaku pindala.



Joon. 35.

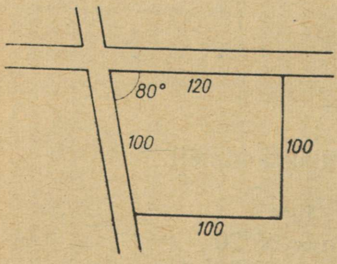


Joon. 36.

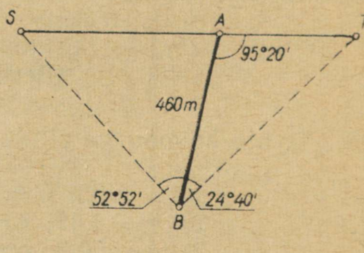
102. Arvuta joonisel 36 kujutatud kolmnurga pindala.

103. Arvuta joonisel 37 kujutatud kahe risttee vahelise maatüki pindala.

104. Ligipääsmatute punktide *S* ja *T* vahelise kauguse määramiseks mõõdeti baas *AB*, mille üks otspunkt *A* asus sirgel *ST* punktide *S* ja *T* vahel (joon. 38) ja mille pikkus oli 460 m. Peale selle mõõdeti nurgad $\angle BAT=95°20'$, $\angle ABT=24°40'$ ning $\angle ABS=52°52'$. Arvuta kaugus *ST*.



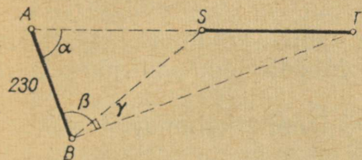
Joon. 37.



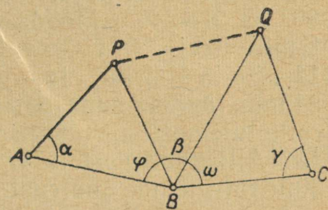
Joon. 38.

105. Ligipääsmatute punktide *S* ja *T* vahelise kauguse kindlakstegemiseks mõõdeti baas *AB*, mille otspunkt *A* asus lõigu *ST* pikendusel (joon. 39), ning nurgad $\angle SAB = \alpha$, $\angle ABS = \beta$ ja $SBT = \gamma$.

Arvuta kaugus ST, kui $AB = 230$ m, $\alpha = 80°$, $\beta = 70°$ ja $\gamma = 25°$.



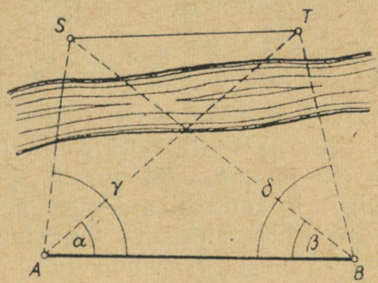
Joon. 39.



Joon. 40.

106. Punktid P ja Q teiselpool jõge on siinpoolselt kaldalt korraga nähtavad ainult punktist B (joon. 40). Punktid B ja P on korraga nähtavad punktist A. Punktid Q ja B on nähtavad punktist C. Pikkused AB ja BC on vastavalt 92,3 ja 72,1 m. Teodoliidiga nurki mõõtes leiti, et $\alpha = 66°16'$, $\beta = 20°48'$, $\gamma = 82°25'$, $\varphi = 52°18'$ ja $\omega = 60°05'$. Arvuta pikkus PQ.

107. Punktid S ja T teisel pool jõge on korraga nähtavad nii punktist A kui ka punktist B siinpool jõge. Punktide S ja T vahelise kauguse (joon. 41) määramiseks mõõdeti AB ja nurgad α, β, γ ja δ. Arvuta kaugus ST, kui $AB = 100$ m, $\alpha = 52°$, $\beta = 57°$, $\gamma = 96°$ ja $\delta = 87°$.



Joon. 41.

Näpunäiteid. 1) Arvuta AS kolmnurgast ASB. 2) Arvuta AT kolmnurgast ATB. 3) Arvuta ST kolmnurgast AST.

Kontrolliks arvuta samal viisil ST kolmnurgast BST.

108. Lahenda ülesanne 107 (joon. 41) järgmisil andmeil: $AB = 150$ m, $\alpha = 97°$, $\beta = 45°$, $\gamma = 107°$, $\delta = 59°$.

Ülesandeid kordamiseks.

109. Ristküliku pikem külg $a = 48{,}06$ mm; ühendades külgede keskpunktid, saame rombi, mille nurk $\alpha = 32°$. Arvuta ristküliku lühem külg.

110. Peegli ees asetseb kaks punkti, mille kaugused peegli tasapinnast on 2 cm ja 10 cm. Punktide kaugused teineteisest on 17 cm.

Kui suur langemisnurk on valguskiirel, mis väljudes ühest punktist läbib pärast peegeldumist teise punkti?

111. Täisnurkse kolmnurga pindala on 12,34 m^2 ja üks nurk on 36°24′. Leia kolmnurga hüpotenuus.

112. Arvuta korrapärase kümmenurga ümberringjoone raadius, kui kümmenurga apoteem on 26,8 cm.

113. Ehita sirkli ja joonlaua abil kolmnurk andmeil: $a = 10$ cm, $\alpha = 60°$ ja $\beta = 45°$. Mõõda külg b. Kontrolli mõõtmistulemust arvutamise teel.

114. Ehita sirkli ja joonlaua abil kolmnurk andmeil: $a = 54$ mm, $b = 42$ mm ja $\alpha = 135°$. Mõõda jooniselt nurk β ja kontrolli tulemust arvutamise teel.

115. Alljärgnevas tabelis on antud kümne kolmnurga elemendid. Kontrolli nende sobivust.

Nr.	a	b	c	α	β	γ	S
1.	5	12	13	22°37′	67°23′	90°	30
2.	16	63	65	14°15′	75°45′	90°	500
3.	6	5	5	73°44′	53°08′	53°08′	12
4.	55	110	110	28°58′	75°31′	75°31′	2 900
5.	84	72	45	89°35′	58°18′	32°07′	1 600
6.	416	635	970	18°02′	28°12′	133°46′	95 200
7.	133,1	85,76	137,5	68°47′	36°55′	74°18′	5 500
8.	52	56	6,3	52°	122°32′	5°28′	140
9.	17	8	11,9	116°	25°	39°	43
10.	108	81,7	39,2	122°06′	39°58′	17°56°	1 350

116. a) Ehita sirkli ja joonlaua abil kolmnurk andmeil: $a = 50$ mm, $b = 70$ mm ja $\gamma = 22°30′$. Mõõda jooniselt kolmas külg c ja kontrolli tulemust arvutamise teel.

b) Ehita sirkli ja joonlaua abil kolmnurk, mille küljed on: $a = 60$ mm, $b = 70$ mm ja $c = 80$ mm. Mõõda jooniselt kolmnurga nurgad ja kontrolli tulemust arvutamise teel.

117. Alljärgnevas tabelis on antud kolmnurka määravad elemendid. Arvuta puuduvad elemendid.

Nr.	a	b	c	α	β	γ	S
1.	7	8					14
2.	5			44°25′		101°32′	
3.	5	7					9,8
4.		14		53°08′		67°23′	
5.	13	20			67°23′		
6.		75	91			120° 31′	
7.	9	65		6°22′			
8.		65	76		46°24′		
9.	9	1,7	8,9				
10.	8,95	6,88	10,2				

118. Kolmnurgas, mille küljed moodustavad aritmeetilise progressiooni, on üks külg 5 cm ja selle külje vastasnurk 120°. Arvuta teised küljed, nurgad ja pindala.

119. Võrdhaarse täisnurkse kolmnurga hüpotenuus on jaotatud kolmeks võrdseks osaks ja jaotuspunktid on ühendatud täisnurga tipuga. Millisteks osadeks jaguneb täisnurk?

120. Kolmnurga nurgad suhtuvad nagu 2 : 3 : 4. Kuidas suhtuvad kolmnurga küljed?

121. Kolmnurga küljed suhtuvad nagu 2 : 3 : 4. Kuidas suhtuvad kolmnurga nurgad?

122. Kolmnurga pindala on 252 cm^2 ja kaks nurka on 53°08′ ja 120°31′. Arvuta kolmnurga küljed.

123. Nelinurga küljed on järjestikku 11 cm, 8,4 cm, 5,5 cm ja 4,2 cm; viimase kahe külje vaheline nurk on 70°. Arvuta nelinurga pindala.

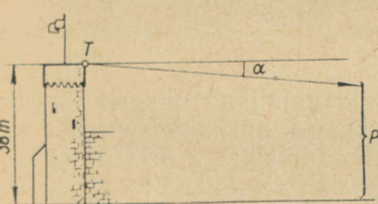
124. Täisnurkse kolmnurga teravnurga α siinus on $\frac{1}{3}$. Missuguse osa hüpotenuusist moodustab kaatet a?

125. Täisnurkse kolmnurga teravnurga β koosinus on $\frac{5}{8}$. Mitu protsenti hüpotenuusist on nurga β lähiskaatet?

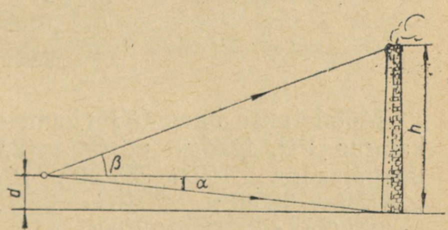
126. Missuguse nurga koosinus võrdub 45°-se nurga tangensiga?

127. Missuguse teravnurga tangens võrdub 30°-se nurga siinusega?

128. 38 m kõrguse torni tipust T vaadeldava punkti P alangunurk $\alpha = 4{,}3°$ (joon. 42). Arvuta punkti P kaugus torni tipust T.



Joon. 42.



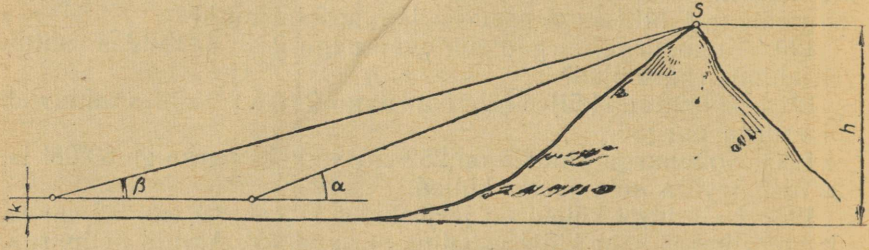
Joon. 43.

129. Kõrguselt $d = 9{,}30$ m vaadelduna paistab vabriku korstna jalg rõhtsihist nurga $\alpha = 6{,}1°$ võrra allpool, korstna ülemine äär aga nurga $\beta = 16{,}3°$ võrra kõrgemal (joon. 43). Arvuta korstna kõrgus h.

130. Leia vahemikust 0° kuni 360° kõik nurgad, mis rahuldavad võrrandit:

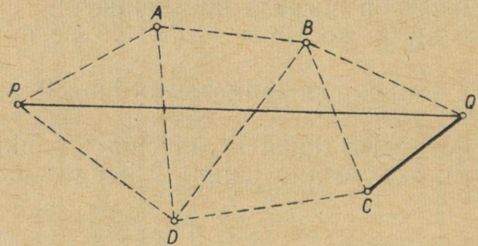
a) $\cos x = \sin 2x$; b) $\cos x + \cos 2x = 0$; c) $\sin x = 2 \cos x$.

131. Mäetipp S (joon. 44) paistab punktidest A ja B, mis on punktiga S ühes ja samas püsttasapinnas, vastavalt kõrgusnurkadega $\alpha = 15{,}5^\circ$ ja $\beta = 7{,}4^\circ$. Arvuta mäetipu kõrgus h, kui $AB = 538$ m ja nurgamõõtja kõrgus $k = 1{,}65$ m.



Joon. 44.

132. Suurte kauguste mõõtmisel valitakse mõõdetava lõigu ümbruses vaatluspunktid nii, et igast vaatluspunktist on nähtavad kaks naabruses olevat punkti (triangulatsioonimeetod).



Joon. 45.

Mõõdetakse baas CQ (joon. 45) ja vajalikud nurgad. Arvuta kaugus PQ, teades, et $CQ = 2{,}00$ km ja nurkade suurused on järgmised: $\angle APD = 83^\circ 20'$; $\angle PAD = 46^\circ 50'$; $\angle BAD = 71^\circ 20'$; $\angle ADB = 38^\circ 40'$; $\angle DBC = 62^\circ 10'$; $\angle BDC = 40^\circ 30'$; $\angle CBQ = 35^\circ 20'$; $\angle BCQ = 72^\circ 20'$.

Näpunäide.

1) Arvuta BC kolmnurgast BCQ;
2) „ BD ja DC „ DBC;
3) „ AD „ ABD;
4) „ PD „ PAD;
5) „ PC „ PCD;
6) „ PQ „ PQC.

Kontrolliks arvuta analoogiliselt PQ kolmnurgast PQB.

II. GEOMEETRILISED TEISENDUSED TASAPINNAL.

§ 13. GEOMEETRILISE TEISENDUSE MÕISTE.

Geomeetrilise teisenduse mõiste selgitamiseks lahendame järgmise ülesande.

Arvteljelt t olgu antud rida punkte A, B, C, D, ..., igaüks oma abstsissiga, näiteks järgmiselt:

$$A(-3);\ B(-1);\ C(2);\ D(3);\ \ldots$$

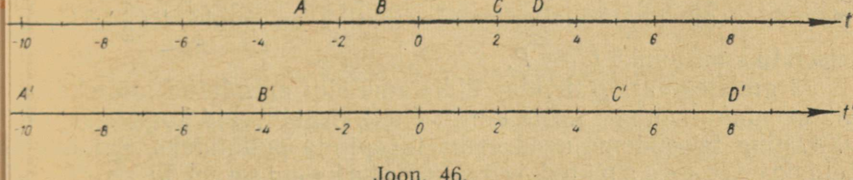
Tähistame abstsisse üldiselt tähega x. Nõutakse leida mingil teisel teljel t' uus rida punkte A', B', C', ... nii, et nende abstsissid x' oleksid määratud valemiga

$$x' = 3x - 1.$$

Ülesande lahendamiseks arvutame antud abstsisside x järgi neile vastavad abstsissid x', kasutades antud valemit. Saame järgmise tabeli:

x	-3	-1	2	3	...
x'	-10	-4	5	8	...

Kujutades antud punktid teljel t ning neile vastavad punktid teljel t', saame joonise 46.



Joon. 46.

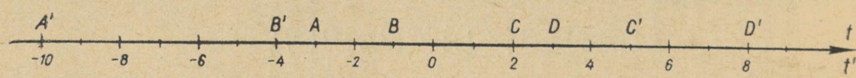
Me ütleme, et arvtelje t punktid on teisendatud telje t' punktideks; lühemalt — arvtelg t on teisendatud teljeks t'. Saadud punkte nimetatakse antud punktide **teisenditeks**. On kerge näha, et antud juhul telje t igale punktile $M(x)$ on võimalik leida teisendit $M'(x')$ ja, ümberpöördult, telje t' iga punkt $M'(x')$ on telje t ühe punkti $M(x)$ teisendiks.

Et leida, missuguse punkti teisendiks on näiteks telje t' punkt abstsissiga $x' = -10$, asendame antud t e i s e n d u s v a l e m i s

$$x' = 3x - 1$$

suuruse x' arvuga -10 ja lahendame saadud võrrandi. Saame: $x = -3$. Niisiis, telje t' punkt $M'(-10)$ on telje t punkti $M(-3)$ teisendiks.

Oletame nüüd, et teljed t ja t' on võrdsete ühikutega (nagu joonisel 46). Paigutame teljed teineteise peale nii, et kõik vastavad jaotuspunktid ühtivad (joon. 47). Siis antud punktid ja nende teisendid asetsevad ühel ja samal sirgel (mida peame mõtlema kahekordsena). Sel juhul öeldakse, et arvtelje punktid A, B, C, ...



Joon. 47.

on teisendatud s a m a telje punktideks A', B', C' ...; lühemalt — a r v t e l g o n t e i s e n d a t u d i s e e n d a k s (kuigi punktid pole jäänud samadeks).

Teisendamisel võib juhtuda, et punkt ja tema teisend ühtivad.

Punkti, mis ühtib oma teisendiga, nimetatakse selle teisenduse kahekordseks punktiks.

Leiame joonisel 47 kujutatud teisenduse kahekordsed punktid. Selleks asendame teisendusvalemis tähe x' tähega x (sest kahekordses punktis $x' = x$) ja lahendame saadud võrrandi

$$x = 3x - 1.$$

Sel võrrandil on üks ja ainus lahend $x = \frac{1}{2}$. Järelikult antud teisenduse ainsaks kahekordseks punktiks on punkt $P(\frac{1}{2})$; tema teisendiks on punkt $P' \equiv P$.

Järgmistes paragrahvides üldistame siin arendatud mõttekäiku nii, et punkte võtame mitte ainult ühelt sirgelt, vaid kogu tasapinnalt, ning teisendame need sama tasapinna punktideks. Sel juhul öeldakse, et t a s a p i n d t e i s e n d a t a k s e i s e e n d a k s. Teisenduseeskirjana kasutame seejuures harilikult geomeetrilist konstruktsiooni, mitte valemit.

Tasapinna teisendamisel iseendaks teisendub selle tasapinna iga kujund sama tasapinna teatud kujundiks. Kui kujundi iga kahe punkti vaheline kaugus on võrdne tema teisendi vastavate punktide vahelise kaugusega, s. t. et kujund ja tema teisend on võrdsed, siis öeldakse, et vaadeldav teisendus on **liikumisteisendus** ehk **liikumine.** Esimeses järjekorras ongi meie ülesandeks vaadelda liikumisteisendusi tasapinnal ja analüüsida liikumise liike. Teisenduste käsitlusel lähtume lõikude, nurkade ja kolmnurkade võrdsuse mõistest, kasutamata liikumise mõistet, mis on meile veel tundmata.

Ei tule arvata, et iga teisendus on liikumine. Näiteks joonisel 47 kujutatud teisendus pole liikumine, sest lõik AB ei võrdu temale vastava lõiguga $A'B'$. Liikumisteisendused moodustavad kõige lihtsama (kuid väga tähtsa) geomeetriliste teisenduste rühma. Peale liikumisteisenduste vaatleme käesolevas peatükis veel homoteetsust, s. o. teisendust, mis võimaldab antud kujundist saada temaga sarnast kujundit.

Ülesandeid.

133. Arvtelje punktid $M(x)$ on teisendatud sama telje punktideks $M'(x')$ valemi järgi $x' = 3 - 2x$. Leia:

1) punktide $x = -2$, 0 ja 3 teisendid;
2) punktid, millede teisenditeks on punktid $x' = 9$, -5 ja 0;
3) antud teisenduse kahekordne punkt;
4) punkti $x = 5$ teisend ja punkt, mille teisend on $x' = 5$.

134. Abstsisstelje punktid on teisendatud ordinaattelje punktideks valemi järgi $y = 0{,}5x^2$. Leia punktide $x = 2$, -3 ja 4 teisendid. Missuguse punkti teisendiks on punkt $y = 18$? Milliseks y-telje osaks teisendub kogu x-telg?

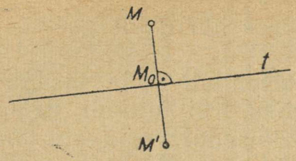
135. On antud ringjoon ja selle mingi puutuja. Ühendame puutuja mingi punkti M ringjoone keskpunktiga O ning loeme punktile M vastavaks ringjoone selle punkti M', milles ringjoon ja lõik OM lõikuvad. Tee joonis ja selgita selle abil, mis kujund ringjoonel vastab

1) puutuja mingile lõigule AB;
2) puutepunktile;
3) kogu puutujale.

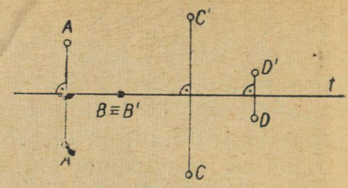
Kas see teisendus on liikumine?

§ 14. TELJELINE SÜMMEETRIA.

1. **Telje suhtes sümmeetrilised punktid.** Olgu antud mingi sirge t ja väljaspool seda punkt M (joon. 48). Leiame punkti M' nii, et sirge t jääb lõigu MM' keskristsirgeks. Selleks joonestame



Joon. 48.



Joon. 49.

sirge $MM' \perp t$ ja võtame sellel punkti M' nii, et $M'M_0 = MM_0$, kus M_0 on sirgete MM' ja t lõikepunkt. Niisuguse omadusega punkti M' nimetatakse antud punktiga M sirge t suhtes **sümmeetriliseks punktiks**. Lauset «Punkt M' on sirge t suhtes sümmeetriline punktiga M» kirjutame lühidalt kujul: $M' \equiv t(M)$.

On selge, et kui $M' \equiv t(M)$, siis ka $M \equiv t(M')$; seega võime kõnelda kahest teineteisega (sirge t suhtes) sümmeetrilisest punktist. Sirge t nimetatakse nende punktide **sümmeetriateljeks**.

Niisiis:

tasapinna kaks punkti on sellel tasapinnal asetseva sirge suhtes sümmeetrilised, kui see sirge on nende punktide ühenduslõigu keskristsirgeks.

Kui punkt asetseb sümmeetriateljel, siis loeme ta sümmeetriliseks iseendaga; igal muul juhul on punkt ja tema teisend kaks erinevat punkti (joon. 49).

2. **Sümmeetriliste punktide põhiomadus.** Anname telje suhtes sümmeetriliste punktide põhiomaduse järgmise teoreemi näol:

lõigud, mis ühendavad sümmeetriatelje punkti kahe selle telje suhtes sümmeetrilise punktiga, on omavahel võrdsed ning moodustavad teljega võrdsed nurgad.

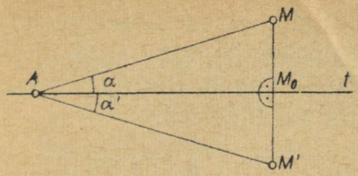
Tõepoolest, kui sümmeetriatelje t mingi punkti A ühendame punktidega M ja $M' \equiv t(M)$ (joon. 50), siis saame võrdsed kolmnurgad AMM_0 ja $AM'M_0$ (tunnuse knk põhjal), millest järeldamegi, et

$$AM = AM' \text{ ja } \alpha = \alpha'.$$

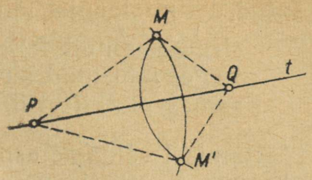
Kehtib ka pöördteoreem:

kui mingi punkt on kahest punktist võrdsetel kaugustel, siis asetseb ta nende punktide sümmeetriateljel.

Tõesti, kui $AM = AM'$ (joon. 50), siis kolmnurk AMM' on võrdhaarne ning järelikult tema kõrgussirge AM_0 poolitab aluse MM', olles seega punktide M ja M' sümmeetriateljeks.



Joon. 50.



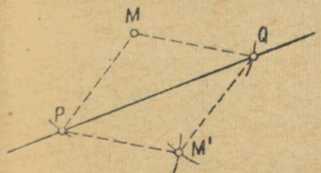
Joon. 51.

Vaadeldud otsene teoreem võimaldab lahendada järgmise konstruktsioonülesande (kasutades ainuüksi sirklit):

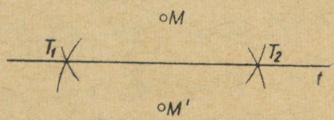
leida antud punktiga antud telje suhtes sümmeetriline punkt.

Võtame teljel t vabalt kaks punkti (P ja Q) ning tõmbame kummagi ümber ringjoone, mis läbib antud punkti M (joon. 51). Otsitav punkt M' peab asetsema kummalgi ringjoonel, järelikult on ta nende teine lõikepunkt.

Kui keskpunktid P ja Q võtta teljel mitte vabalt (nagu joonisel 51), vaid võrdsetel kaugustes antud punktist M (nagu joonisel 52), siis punktide P, M, Q ja M' järjestikusel ühendamisel saadakse romb; igal muul juhul aga tekib r o m b o i d (joon. 51), s. o. nelinurk, mille kahe vastastipu lähisküljed on paariti võrdsed.



Joon. 52.



Joon. 53.

Pöördteoreemi alusel laheneb järgmine ülesanne:

leida kahe antud punkti sümmeetriatelg.

Konstruktsioonis leitakse kaks niisugust punkti T_1 ja T_2, mis asetsevad antud punktidest (M ja M') võrdsetel kaugustel (joon. 53). Neid läbiv sirge t ongi otsitav sümmeetriatelg.

3. **Telje suhtes sümmeetrilised kujundid** defineeritakse järgmiselt:

kujundid k ja k' on telje t suhtes sümmeetrilised, kui kummagi kujundi iga punkt on selle telje suhtes sümmeetriline teise kujundi mingi punktiga.

Lauset «Kujund k' on telje t suhtes sümmeetriline kujundiga k» kirjutame edaspidi lühidalt nii:

$$k' \equiv t(k).$$

Antud definitsioonist lähtudes tõestame järgmise teoreemi:

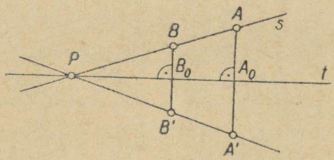
sirgega antud telje suhtes sümmeetriliseks kujundiks on sirge; mõlemad sirged lõikavad sümmeetriatelge ühes ja samas punktis või on teljega paralleelsed.

Tõestamisel eeldame esmalt, et antud sirge s l õ i k a b telge t, näiteks punktis P (joon. 54). Võtame sirgel s mingi punkti A, leiame teisendi $A' \equiv t(A)$ ning veendume, et sirge $A'P$ ongi antud sirge s sümmeetriliseks teisendiks. Selleks näitame, et kummagi sirge iga punkt on telje t suhtes sümmeetriline teise sirge mingi punktiga. Punkti P kohta on see ilmne: $P' \equiv P$. Võtame nüüd ühel sirgetest, näiteks sirgel s, mingi punkti B ning tõmbame $BB_0 \perp t$ kuni lõikumiseni sirgega $A'P$ punktis B'. Siis

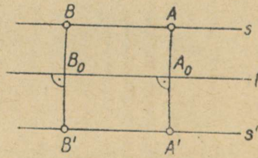
$$\Delta BPB_0 = \Delta B'PB_0,$$

sest neil on ühise külje PB_0 juures vastavalt võrdsed nurgad ($\angle BPB_0 = \angle B'PB_0$ sümmeetriliste punktide põhiomaduse alusel, § 14, p. 2). Kolmnurkade võrdsusest järeldub, et $BB_0 = B'B_0$. Et ühtlasi $BB' \perp t$, siis on tõestatud, et $B' \equiv t(B)$.

Niisamuti saab tõestada, et sirge $A'P$ iga punkt on sümmeetriline sirge s mingi punktiga.



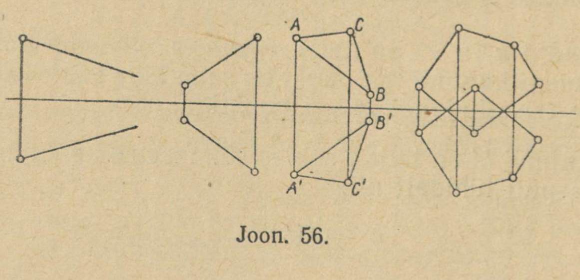
Joon. 54.



Joon. 55.

Kui sirge s on paralleelne teljega t (joon. 55), siis joonestame läbi punkti $A' \equiv t(A)$ sirge $s' \parallel s$ ning näitame, et endisel viisil leitud punkt B' on sümmeetriline punktiga B. Kolmnurkade võrdsuse asemel tuleb nüüd kasutada ristkülikute vastaskülgede võrdsust: $BB_0 = AA_0 = A'A_0 = B'B_0$.

Tõestatud teoreemist järeldame (joon. 56), et



Joon. 56.

kiirega sümmeetriline kujund on kiir, lõiguga sümmeetriline kujund on lõik, kolmnurgaga sümmeetriline kujund on kolmnurk, hulknurgaga sümmeetriline kujund on antud hulknurgaga samanimeline hulknurk.

4. **Sümmeetriliste kujundite võrdsus.** Näitame, et

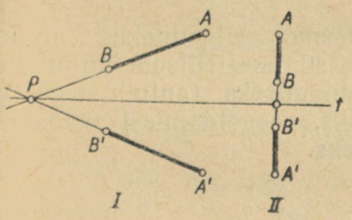
iga kaks teineteisega mingi telje suhtes sümmeetrilist kujundit on võrdsed.

Vaatleme esmalt lõikusid. Kui teineteisega sümmeetrilised lõigud on omavahel paralleelsed (joon. 55), siis nad on võrdsed kui ühe ja sama ristküliku vastasküljed.

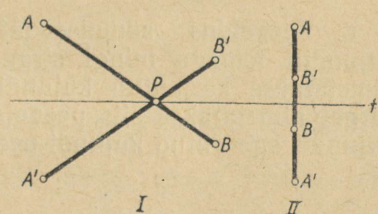
Kui sümmeetrilised lõigud pole paralleelsed ega lõika telge (nagu AB ja $A'B'$ joonistel 57, I ja 57, II), siis pikendame neid kuni teljega lõikumiseni mingis punktis P. Sümmeetriliste punktide põhiomaduse põhjal on siis $AP = A'P$ ja $BP = B'P$. Esimese võrduse pooltest teise võrduse pooli lahutades saame, et $AB = A'B'$.

Lõpuks, kui kahel sümmeetrilisel lõigul AB ja $A'B'$ leidub teljega ühine punkt P (joon. 58, I, II), siis saame endisel viisil võrdused $AP = A'P$ ja $BP = B'P$, millede vastavate poolte liitmine näitab, et $AB = A'B'$.

Sümmeetriliste l õ i k u d e võrdsusest järeldub (tunnuse kkk põhjal) kahe sümmeetrilise k o l m n u r g a võrdsus ja kolmnurkade võrdsusest kahe sümmeetrilise n u r g a võrdsus. Sümmeetriliste lõikude ja nurkade võrdsusest aga saab juba järeldada i g a kahe sümmeetrilise kujundi võrdsust.



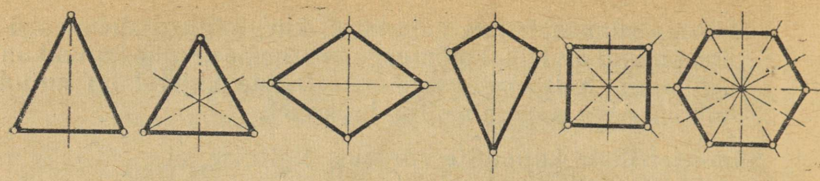
Joon. 57.



Joon. 58.

5. **Iseendaga sümmeetriline kujund.** Leidub kujundeid, mis on mingi ühe (või mitme) sirge suhtes sümmeetrilised iseendaga. Iseendaga sümmeetrilised kujundid (joon. 59) on näiteks: võrdhaarne kolmnurk (üks sümmeetriatelg), võrdkülgne kolmnurk (kolm sümmeetriatelge), romb (kaks sümmeetriatelge), romboid (üks sümmeetriatelg), ruut (neli sümmeetriatelge), korrapärane kuusnurk (kuus sümmeetriatelge). Ringjoon aga on sümmeetriline ja iga sirge suhtes, mis läbib tema keskpunkti; seega

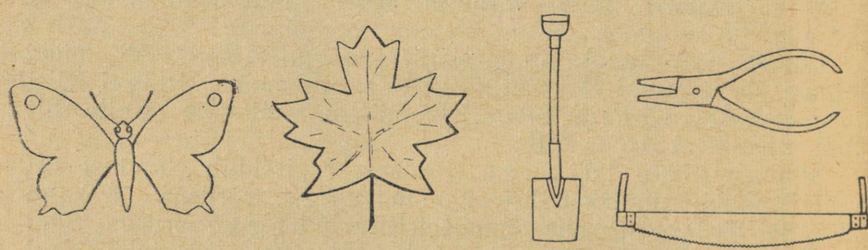
ringjoonel on lõpmata palju sümmeetriatelgi.



Joon. 59.

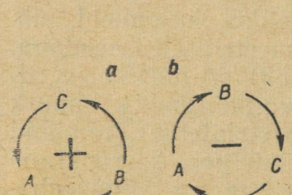
Iseendaga sümmeetrilise kujundi paljud omadused järelduvad kergesti tema sümmeetriast. Teades näiteks, et romb on sümmeetriline oma diagonaalsirge suhtes, järeldame kohe, et rombi diagonaal poolitab rombi nurga ning et rombi diagonaalid on omavahel risti ja poolitavad teineteist (põhjenda neid väiteid!).

Iseendaga sümmeetrilised on ka paljud looduslikud vormid ja inimese poolt valmistatud esemed (joon. 60).

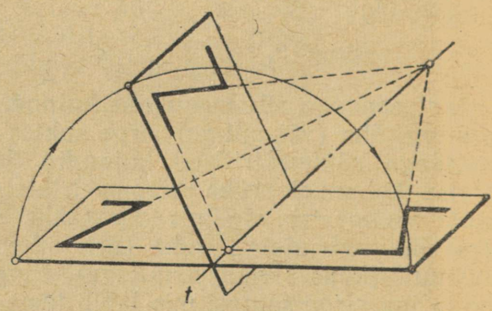


Joon. 60.

6. **Peegeldus sümmeetriateisendusena.** Üleminekut antud kujundilt temaga mingi sirge suhtes sümmeetrilisele kujundile nimetatakse ka antud kujundi **peegeldamiseks** (antud sirgest). Sirget nimetatakse siis **peegeldusteljeks,** peegeldamisel saadavat kujundit aga antud kujundi **peegelduseks.**



Joon. 61.



Joon. 62.

Eespool nägime (vaata § 14, p. 4), et kujund ja tema peegeldus on võrdsed, seega peegeldamine sirgest on üks liikumisteisendus. Seda liikumist iseloomustab kolmnurga (üldiselt hulknurga) tippude ringjärjestuse ehk **k o l m n u r g a o r i e n t a t s i o o n i** muutumine. Tõepoolest, näiteks joonisel 56 on kolmnurga ABC orientatsioon positiivne (nagu joonisel 61, *a*), kuid peegeldatud kolmnurgal $A'B'C'$ on see negatiivne (joon. 61, *b*).

Kujund ja tema peegeldus on teineteisest saadavad ka tasapinna pööramise teel 180° võrra ümber peegeldustelje (joon. 62); seega sümmeetriateisendus ehk peegeldamine asendab geomeetrias tasapinna pööramist samal tasapinnal asetseva sirge ümber sirgnurga võrra. See tasapinna ümberpööramine kutsubki esile orientatsiooni muutumise.

7. **Samasus kahekordse peegeldusena.** Olgu antud kujund k ja telg t. Leiame peegelduse $k' \equiv t(k)$. Nüüd võtame peegelduse k' lähtekujundiks ning endist telge kasutades leiame tema peegelduse k''. Ilmselt saame teise peegeldamise tulemuseks tagasi lähtekujundi k; seega $k'' \equiv k$:

peegelduse peegeldamisel samast teljest saame tulemuseks lähtekujundi.

Teisendust, mis annab tulemuseks lähtekujundi, nimetatakse s a m a s u s e k s. Nii siis oleme leidnud, et

sama telje korral kahest sümmeetriateisendusest koosnev teisendus osutub samasuseks.

Ülesandeid.

136. a) Antud on kaks lõikuvat sirget. Leia nende sümmeetriateljed.

b) Antud on kaks paralleelset sirget. Leia nende sümmeetriatelg.

137. a) Antud on kolmnurk ja seda mittelõikav sirge. Leia selle kolmnurgaga antud sirge suhtes sümmeetriline kolmnurk.

b) Antud on kolmnurk ja seda lõikav sirge. Leia selle kolmnurgaga antud sirge suhtes sümmeetriline kolmnurk.

138. Joonesta antud ringjoone mingi kõõlu suhtes sümmeetriline ringjoon. Mis tingimusel need kaks ringjoont ühtivad?

139. Kus asetsevad sümmeetriateisenduse kahekordsed punktid?

140. Missugused ringjooned vastavad sümmeetriateisenduses iseendale?

141. Missugused sirged vastavad sümmeetriateisenduses iseendale?

142. Lõika kahekorra murtud paberilehest mingi sümmeetriline puulehe kujutis.

143. Lõika paberist välja mingi teravnurkne kolmnurk ja leia kolmnurga voltimise teel selle ümberringjoone keskpunkt.

144. Lõika paberist välja mingi võrdhaarne kolmnurk ja leia kolmnurga voltimise teel selle siseringjoone keskpunkt.

145. Neljakordselt kokkumurtud paberilehe murdenurgast lõigatakse ära täisnurkne kolmnurk. Milline kuju on äralõigatud leheosal avatult?

146. Leia punktidega

$$(0;\ 3),\ (-2;\ 5),\ (4;\ -1),\ (-6;\ -4)$$

x-telje suhtes sümmeetrilised punktid.

147. Leia punktidega

$$(8;\ 0),\ (2;\ 3),\ (-6;\ 5),\ (0;\ -3)$$

y-telje suhtes sümmeetrilised punktid.

148. Leia punktiga (2; 5) sümmeetriline punkt 1) x-telje suhtes, 2) y-telje suhtes ja 3) sirge $y = x$ suhtes.

149. Leia järgmiste sirgetega x-telje suhtes sümmeetrilised sirged: 1) $y = 2x + 1$; 2) $y = 1{,}5$; 3) $y = 1{,}5x$; 4) $x = 3$; 5) $y = -x + a$.

§ 15. RÖÖPLÜKE.

1. **Korduv peegeldamine.** Olgu antud kujund k ning kaks telge t_1 ja t_2. Peegeldame kujundi k esmalt teljest t_1 ning siis saadud peegelduse teljest t_2. Esimene peegeldus olgu k' ja teine k''. Siis võime lühidalt kirjutada nii:

$$k' \equiv t_1(k);\ k'' \equiv t_2(k').$$

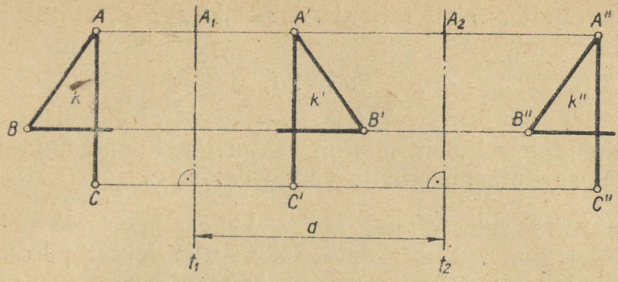
Analoogiliselt võiksime kolmanda peegelduse (kolmandast teljest t_3) sümboolselt avaldada kujul

$$k''' \equiv t_3(k'').$$

Mõttekäigu jätkamisel võime nii jõuda kuitahes suurele peegelduste kordusarvule.

Järgnevalt hakkame uurima kujundite k ja k'' (s. t. antud kujundi ja tema kahekordse peegelduse) vastastikust asendit sõltuvalt peegeldustelgede vastastikusest asendist. Et iga peegeldus muudab kujundi orientatsiooni vastupidiseks, siis kahekordne peegeldus on alati sama orientatsiooniga mis antud kujund.

2. **Rööplüke kahe peegelduse tulemusena.** Olgu peegeldusteljed t_1 ja t_2 omavahel paralleelsed (joon. 63). Kujundite k ja k'' vastastikuse asendi uurimiseks võtame kujundi k kolm punkti A, B



Joon. 63.

ja C ning leiame neile vastavad kujundi k'' punktid A'', B'' ja C''. Et sirged t_1 ja t_2 on paralleelsed, siis nende ristsirged AA' ja $A'A''$ ühtivad; järelikult punktid A, A' ja A'' asetsevad ühel sirgel. Niisamuti asetsevad ühel sirgel punktid B, B' ja B'' ning ka punktid C, C' ja C''. Ühtlasi on $AA'' \parallel BB'' \parallel CC''$ kui ühe ja sama sirge ristsirged.

Edasi näitame, et lõigud AA'', BB'' ja CC'' on võrdsed ja samasuunalised. Selleks avaldame need lõigud telgede vahelise kauguse d abil (joon. 63):

$$AA'' = AA_1 + A_1A' + A'A_2 + A_2A'' =$$
$$= 2A_1A' + 2A'A_2 = 2A_1A_2 = 2d.$$

Niisamuti saaksime, et $BB'' = CC'' = 2d$. Et esitatud tuletus kehtiks antud kujundi ja telgede igasuguse vastastikuse asendi puhul, tuleks lõike AA_1, A_1A', ... vaadelda suunaga lõikudena. Meie juhul on võrdsete lõikude

$$AA'' = BB'' = CC'' = \ldots$$

ühiseks suunaks suund telje t_1 poolt telje t_2 poole.

Nii on selgunud, et paralleelsete telgede korral kahe peegelduse järjestikune rakendamine annab teisenduse, milles vastavate punktide ühenduslõigud on paralleelsed, võrdsed ja samasuunalised. Säärast teisendust nimetatakse **rööplükkeks** (või lühemalt lihtsalt l ü k k e k s).

On ilmne, et rööplükkel iga kujund teisendub temaga võrdseks kujundiks. Tähendab rööplüke on ka liikumisteisendus.

Rööplükke kui teisenduse kirjeldamisel on otstarbekohane kasutada **vektori** mõistet. Vektor on suunaga lõik. Vektorit, mis on paralleelne, samasuunaline ja pikkuselt võrdub punktide nihetega rööplükkel, nimetatakse **lükke vektoriks** ning teda tähistatakse sümboliga $\vec{v}$. Tähistades telgede vahelist vektorit (s. t. vektorit, mis läheb teljelt t_1 risti teljeni t_2) sümboliga $\vec{d}$, võime kirjutada:

$$\vec{v} = 2\vec{d},$$

kus $2\vec{d}$ tähendab vektorit, mis on vektoriga $\vec{d}$ samasuunaline, kuid temast 2 korda pikem. Niisiis võime öelda, et

paralleelsete telgede korral kahest peegeldusest koosnev teisendus osutub rööplükkeks, mille vektor võrdub peegeldustelgede vahelise vektori kahekordsega.

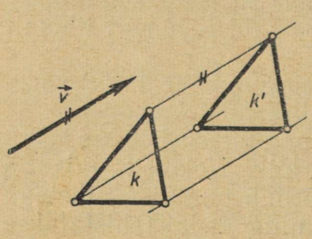
Rööplüke kui teisendus on määratud, kui tema vektor $\vec{v}$ on antud. Seepärast võib kujundi k rööplüket märkida lihtsalt sümboliga $\vec{v}(k)$, kus $\vec{v}$ tähendab lükke vektorit. Tähistades antud kujundist k rööplükkel saadava kujundi (ehk antud kujundi lükketeisendi) tähega k', võime lühidalt kirjutada:

$$k' \equiv \vec{v}(k),$$

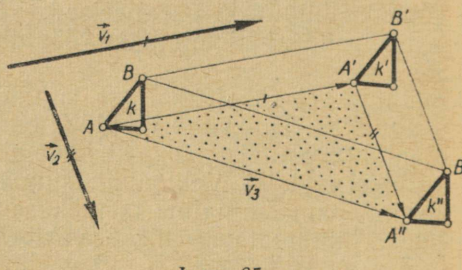
s. t. kujund k' on kujundi k rööplüke, kui lükke vektoriks on $\vec{v}$.

Eespool arendatud mõttekäik on pööratav, s. t. iga rööplüke on vaadeldav peegelduse peegeldusena, kusjuures peegeldusteljed on omavahel paralleelsed ja sihilt risti lükke vektoriga. Vastavas konstruktsioonis võtame esimese peegeldustelje risti lükke vektoriga (kuid muidu vabalt); teise telje aga joonestame esimesega paralleelselt nii, et see paikneks esimesest teljest lükke vektoriga määratud suunas ja sellest kaugusel, mis võrdub poolega lükke vektori pikkusest.

3. **Rööplükke konstruktsioon.** Olgu antud kujund k ja lükke vektor $\vec{v}$ (joon. 64). Lükkekujundi $k' \equiv \vec{v}(k)$ saame järgmiselt. Kujundit k määravatest punktidest tõmbame lükke vetori $\vec{v}$ paralleelid ning kanname neile, alates kujundi punktidest, lükke vek-



Joon. 64.



Joon. 65.

tori suunas lõigud, mis võrduvad selle vektori pikkusega. Nende lõikude lõpp-punktid määravadki otsitava lükkekujundi $k' \equiv \vec{v}(k)$.

Rakendame nüüd antud kujundile k järjestikku kaks rööplüket vektoritega vastavalt $\vec{v}_1$ ja $\vec{v}_2$. Olgu esimene tulemus $k' \equiv \vec{v}_1(k)$ ja teine $k'' \equiv \vec{v}_2(k')$. Võrdleme teise lükke tulemust k'' lähtekujundiga k (joon. 65). Selleks vaatleme nelinurki $ABB'A'$ ja $A'B'B''A''$, kus AB on kujundi k mingi lõik, $A'B'$ ja $A''B''$ aga sellele vastavad lõigud kujundeis k' ja k''.

Et rööplükke korral kahe kujundi vastavate punktide ühenduslõigud on omavahel paralleelsed ning pikkuselt võrdsed, siis $AA' \# BB'$ ja $A'A'' \# B'B''$; seega nelinurgad $ABB'A'$ ja $A'B'B''A''$ on rööpkülikud. Kuid siis on $AB \# A'B'$ ja $A'B' \# A''B''$ (kui rööpküliku vastasküljed), järelikult ka $AA'' \# BB''$. Nii selgub, et kujund k'' on saadav kujundist k ainsa rööplükkega, mille vektor $\vec{v}_3 = \overrightarrow{AA''}$. Viimase vektori loeme vektorite $\vec{v}_1$ ja $\vec{v}_2$ summaks ning avaldame kujul:

$$\vec{v}_3 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2.$$

Jooniselt 65 nähtub, et kahe vektori $\vec{v}_1$ ja $\vec{v}_2$ liitmiseks tuleb rööplükke abil teise liidetava alguspunkt teha ühtivaks esimese liidetava lõpp-punktiga (A') ning saadud murdjoone ($AA'A''$) alguspunkt lugeda vektorite summa alguspunktiks, murdjoone lõpp-punkt aga summa lõpp-punktiks. Niisiis on selgunud, et

kahest rööplükkest koosnev teisendus osutub rööplükkeks, mille vektor võrdub antud lükete vektorite summaga.

Nimetades antud lükked komponentideks ning neist saadava lükke resultandiks, tõestame lõpuks järgmise teoreemi:

resultantlüke ei sõltu komponentlükete järjekorrast.

Tõesti, liites vektoriga $\vec{v}_2$ vektori $\vec{v}_1$, saame summaks endise vektori $\vec{v}_3$ (joon. 66). Sellest järeldame, et vektorite liitmiseks eespool antud kolmnurga-reegli asemel võib kasutada ka järgmist nn. rööpküliku-reeglit: kui liidetavad vektorid on rööpküliku ühest tipust lähtuvateks külgvektoriteks, siis samast tipust lähtuv diagonaalvektor osutub nende liidetavate summaks.

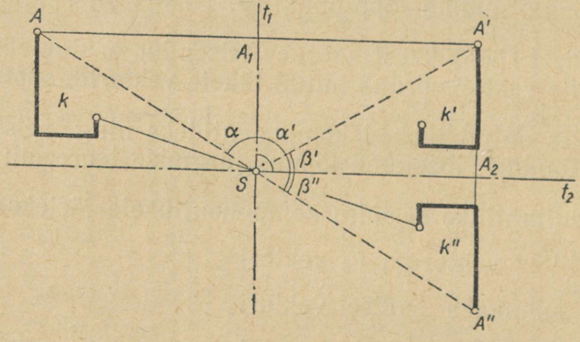
Joon. 66.

Ülesandeid.

150. Antud on kaks paralleelset sirget ja nende vahel mingi kolmnurk. Joonesta kolmnurga peegeldus esmalt ühest sirgest, siis saadud peegelduse peegeldus teisest sirgest. Kas tulemus sõltub peegeldustelgede kasutamise järjekorrast?
151. Põhjenda väidet, et kolmnurk ja tema lüke on võrdsed.
152. Kas kolmnurga peegeldus ja lüke on võrdsed või mitte? Mille poolest nad siiski erinevad?
153. Liida kaks vabalt võetud vektorit.
154. On antud kahe vektori summa ja üks liidetav. Konstrueeri teine liidetav.
155. Põhjenda väidet, et rööplükkel kui teisendusel ei leidu kahekordseid punkte.
156. Milleks teisendub rööplükkel lükkevektori sihiline sirge ja milleks iga muu sirge?

§ 16. TSENTRAALSÜMMEETRIA.

1. **Tsentraalsümmeetria kahe peegelduse liitteisendusena.** Peegeldame antud kujundi k teljest t_1 ning saadud peegelduse k' omakorda t_2, mis on risti teljega t_1 (joon. 67). Viimasel peegeldamisel saame kujundi k''.



Joon. 67.

Tõestame, et kujundite k ja k'' vastavaid punkte ühendavad lõigud läbivad telgede lõikepunkti S ning poolituvad selles punktis.

Selleks ühendame kujundi k mingi punkti A, samuti tema teisendid A' ja A'' telgede lõikepunktiga S (joon. 67). Edasi näitame, et nurk ASA'' on sirgnurk. Tõesti:

$$\angle ASA'' = \alpha + \alpha' + \beta' + \beta'' = 2\alpha' + 2\beta' =$$
$$= 2(\alpha' + \beta') = 2 \cdot 90° = 180°.$$

Siin kasutasime tõsiasja, et nurgad, mis tekivad sümmeetriatelje punkti S ühendamisel kahe sümmeetrilise punktiga, on võrdsed ($\alpha = \alpha'$ ja $\beta' = \beta''$). Et nurk ASA'' on sirgnurk, siis punktid A, S ja A'' asetsevad ühel ja samal sirgel. Ühtlasi on punkt S lõigu AA'' keskpunktiks, sest sümmeetria tõttu $AS = A'S = A''S$. Analoogiliselt kehtib see kujundite k ja k'' iga kahe teineteisele vastava punkti kohta. Sellega on väide tõestatud.

Tähendatud omaduse alusel öeldakse, et kujundid nagu k ja k'' (joon. 67) on punkti S suhtes **sümmeetrilised**; seejuures punkti S nimetatakse **sümmeetria keskpunktiks.** Teljelisest sümmeetriast eristamiseks nimetatakse sümmeetriat punkti suhtes **tsentraalsümmeetriaks** ning selles teineteisele vastavaid kujundeid **tsentraalsümmeetrilisteks kujunditeks.** Kahest tsentraalsümmeetrilisest kujundist kumbagi võib nimetada ka teise **peegelduseks** (sümmeetriakeskpunktist). Sümmeetriakeskpunkti võib sel puhul nimetada ka **peegelduskeskpunktiks** ja kirjeldatud teisendust **tsenraalpeegelduseks.** Esitatud arutlusi kokku võttes ütleme, et

> **ristuvate peegeldustelgede korral kahest peegeldusest koosnev teisendus osutub tsentraalsümmeetriaks, mille keskpunktiks on telgede lõikepunkt.**

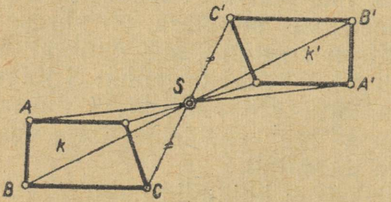
Ümberpöördult: tsentraalsümmeetriat saab alati asendada kahe peegeldusega, mille teljed on omavahel risti ning läbivad sümmeetriakeskpunkti. Vastavas konstruktsioonis võetakse üks peegeldustelg (näiteks t_1) vabalt läbi keskpunkti S (joon. 67). Antud tsentraalsümmeetrilised punktid A ja A'' on sellest sirgest võrdsetel kaugustel (põhjenda seda!), mistõttu ka $A' = t_1(A)$ ja A'' on sellest võrdsetel kaugustel. Kuid siis on sirge $A'A''$ paralleelne sirgega t_1 ja punktide A' ja A'' sümmeetriatelg seega risti selle sirgega. Viimaste punktide sümmeetriatelg läbib ühtlasi punkti S, sest $A'S = A''S$.

Kujundi k tsentraalsümmeetrilist teisendit ehk peegeldust punktist S märgitakse sümboliga $S(k)$; seega kirjutus $k' = S(k)$ asendab lauset «Kujund k' on kujundi k peegeldus punktist S».

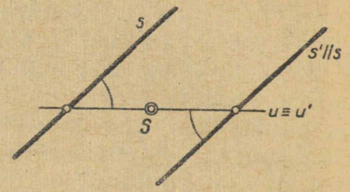
On kerge põhjendada, et kujund ja tema peegeldus mistahes punktist S on võrdsed: $k = S(k)$. See näitab, et ka peegeldus punktist on liikumisteisendus: ta on tasapinna pööramine peegelduskeskpunkti ümber sirgnurga võrra.

2. **Tsentraalpeegelduse konstruktsioon.** Kujundi tsentraalpeegeldus on määratud, kui peegelduskeskpunkt on antud. Konstruktsioonis tõmbame antud kujundit määravatest punktidest A, B, ... sirged läbi peegelduskeskpunkti S (joon. 68) ning mär-

gime igal sirgel punkti, mis on punktist S sama kaugel kui kujundi vastav punkt. Saadud punktid A', B', ... määravadki otsitava peegelduskujundi.



Joon. 68.



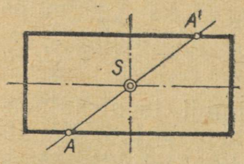
Joon. 69.

Kirjeldatud viisil saame igale peegelduspunktist erinevale punktile vastavaks üheainsa punkti. Peegelduskeskpunkti loeme vastavaks iseendale, mistõttu see on vaadeldava teisenduse kahekordne punkt. Sellest järeldub, et iga sirge, mis läbib peegelduskeskpunkti, on selle teisenduse kahekordne sirge (vastab iseendale).

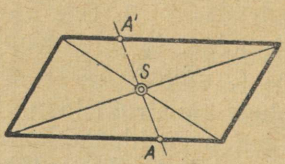
Iga sirge s, mis ei läbi peegelduskeskpunkti, teisendub temaga paralleelseks sirgeks ($s' \parallel s$, joon. 69). Tõesti, sirge u, läbides peegelduskeskpunkti (mistõttu $u' \equiv u$), lõikab sirgeid s ja s' nii, et tekib paar võrdseid põiknurki (iga nurk teisendub temaga võrdseks nurgaks, joon. 69).

3. **Iseendaga tsentraalsümmeetriline kujund.** Kujund võib olla mingi punkti suhtes sümmeetriline iseendaga. Sellise kujundi kohta öeldakse, et tal leidub sümmeetriakeskpunkt ehk et ta on tsentraalsümmeetriline. Kindlasti on tsentraalsümmeetriline iga kujund, millel leidub kaks teineteisega ristuvat sümmeetriatelge; säärase kujundi sümmeetriakeskpunktiks on telgede lõikepunkt. Näiteks ristküliku sümmeetriateljed (külgede keskristsirged) on teineteisega risti, mistõttu nende lõikepunkt S on ristküliku sümmeetriakeskpunktiks (joon. 70): iga sirge läbi selle punkti lõikab ristküliku külgi kahes punktis A ja A', mis on sümmeetrilised punkti S suhtes.

Kuid ristuvate sümmeetriatelgede olemasolu on piisav, mitte aga tarvilik tingimus sümmeetriakeskpunkti olemasoluks. Näiteks



Joon. 70.



Joon. 71.

Joon. 72.

on rööpkülik tsentraalsümmeetriline oma diagonaalide lõikepunkti S suhtes, sest see punkt on vastastippude ühenduslõikude ühiseks keskpunktiks, kuid rööpkülikul ei leidu ühtki sümmeetriatelge (joon. 71).

Tsentraalsümmeetria leiab laialdast rakendamist tarbeesemete kujundamisel, eriti kaunistusmotiivides (joon. 72).

4. **Kahest tsentraalpeegeldusest koosnev teisendus.** Kui peegeldame mingi kujundi esmalt punktist S ja siis saadud peegelduse veel kord samast punktist S, siis saame tulemuseks lähtekujundi. Niisiis:

sama keskpunkti korral kahest tsentraalpeegeldusest koosnev teisendus osutub samasuseks.

Edasi uurime teisendust, mis koosneb kahest tsentraalpeegeldusest, kusjuures peegelduskeskpunktid on erinevad. Selleks tõestame järgmise teoreemi:

erinevate keskpunktide korral kahest tsentraalpeegeldusest koosnev teisendus osutub rööplükkeks, mille vektor võrdub esimesest keskpunktist teise viiva vektori kahekordsega.

Tõestus. Peegeldame antud kujundi k esmalt keskpunktist S_1 ning saadud peegelduse $k' = S_1(k)$ omakorda teisest keskpunktist S_2 (joon. 73). Joonisel on vastavad teisenduskonstruktsioonid läbi viidud punktidega A ja B:

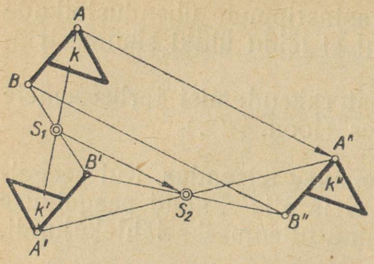
$$A' \equiv S_1(A); \quad B' \equiv S_1(B);$$
$$A'' \equiv S_2(A'); \quad B'' \equiv S_2(B').$$

Ühendades punkti A punktiga A'' ja punkti B punktiga B'', saame kaks kolmnurka $AA'A''$ ja $BB'B''$, milledel on üks ja sama kesklõik S_1S_2. Tõesti, konstruktsiooni järgi $AS_1 = A'S_1$ ja $A'S_2 = A''S_2$ ning samuti $BS_1 = B'S_1$ ja $B'S_2 = B''S_2$. Kolmnurga kesklõigu omaduste tõttu kumbki lõikudest AA'' ja BB'' on paralleelne lõiguga S_1S_2 ning võrdub tema kahekordsega. Lisaks sellele on lõigud AA'' ja BB'' samasuunalised, sest kumbki neist on samasuunaline lõiguga S_1S_2. Sellega ongi tõestatud, et vaadeldav liitteisendus osutub tõesti rööplükkeks vektoriga

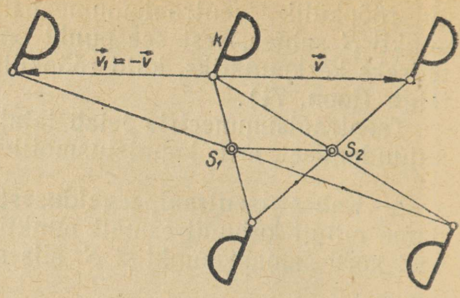
$$\vec{v} = \overrightarrow{AA''} = \overrightarrow{BB''} = \ldots = 2\,\overrightarrow{S_1S_2}.$$

Teoreemist järeldame, et

kahe tsentraalpeegelduse tulemus sõltub peegeldamiste järjekorrast.



Joon. 73.



Joon. 74.

Tõesti, kui peegeldame enne punktist S_2 ja pärast punktist S_1, siis tulemuse kui rööplükke vektoriks saame endise vektori vastandvektori (joon. 74):

$$\vec{v}_1 = 2\,\overrightarrow{S_2S_1} = -2\,\overrightarrow{S_1S_2} = -\vec{v}.$$

Teiseks järeldame (joon. 73), et

rööplükkest (vektoriga AA'') **ja tsentraalpeegeldusest** (keskpunktiga S_2) **koosnev teisendus osutub tsentraalpeegelduseks** (meie joonisel keskpunktiga S_1).

Ülesandeid.

157 Näita joonise abil, et kahe peegelduse puhul, millede teljed on teineteisega risti, tulemus ei sõltu peegeldamiste järjekorrast.

158. Koordinaatteljestikus on antud punktid $A(3; 2)$, $B(-4; 3)$, $C(-1; -2)$ ja $D(5; -3)$. Leia neile koordinaatide alguse suhtes sümmeetrilised punktid.

159. Koordinaatteljestikus on antud kolmnurk tippudega $A(-2; 3)$, $B(2; 1)$ ja $C(4; 5)$. Leia sellele alguspunkti suhtes sümmeetriline kolmnurk.

160. Koordinaatteljestikus on antud sirge $y = 3 - 2x$. Joonesta sellele koordinaatide alguse suhtes sümmeetriline sirge ja anna viimase võrrand.

161. Joonesta punktiga $A(1; 2)$ punkti $S(4; 3)$ suhtes sümmeetriline punkt ja määra selle koordinaadid.

162. Missugusel korrapärasel hulknurgal leidub sümmeetriakeskpunkt ja missugusel ei leidu?

163. Veendu konstruktsiooni abil, et neljast tsentraalpeegeldusest koosnev teisendus, milles keskpunktideks on ühe rööpküliku järjestikused tipud, on samasus.

164. Joonesta võrdkülgsele kolmnurgale tema keskpunkti suhtes sümmeetriline kolmnurk. Mitu sümmeetriatelge on tekkinud tähtkuusnurgal?

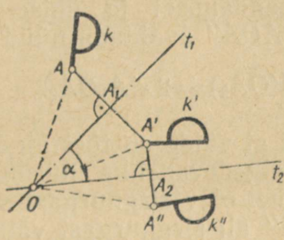
165. Mis on ringjoone sümmeetriakeskpunktiks?

166. Kasutades rööpküliku tsentraalsümmeetriat, tõesta, et rööpküliku vastasnurkade poolitajad on paralleelsed.

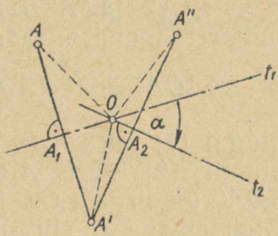
§ 17. PÖÖRE.

1. **Pööre kui kahe peegelduse tulemus.** Peegeldame kujundit k järjestikku kahest teljest t_1 ja t_2 (joon. 75), millede vaheline suunaga teravnurk on α (suunaga esimese telje poolt teise poole). Saadud kujundid olgu $k' \equiv t_1(k)$ ja $k'' \equiv t_2(k')$. Viimast kujundit k'' nimetatakse kujundi k **pöördeks** ja üleminekut kujundilt k kujundile k'' kujundi k **pööramiseks** (lühemalt — pöördeks) punkti O ümber. Punkti O nimetatakse **pöördekeskpunktiks.** Seega

pööre on kahe peegelduse tulemus lõikuvate peegeldustelgede korral; seejuures peegeldustelgede lõikepunkt on pöördekeskpunktiks.



Joon. 75.



Joon. 76.

Vaadeldav teisendus on liikumine, sest lähtekujund ja tema teisend on võrdsed.

2. **Pöörde põhiomadus.** Pöörde põhiomadust väljendab järgmine teoreem:

kujundi punkti ja tema pöördeteisendit keskpunktiga ühendades saadakse võrdsed lõigud, millede vaheline suunaga nurk võrdub peegeldustelgede vahelise suunaga teravnurga kahekordsega.

Tõestuseks võtame kujundil k mingi punkti A (joon. 75) ja leiame tema teisendid $A' \equiv t_1(A)$ ja $A'' \equiv t_2(A')$. Siis on $OA = OA'$ kui lõigud, mis ühendavad sümmeetriatelje t_1 punkti

O telje suhtes kahe sümmeetrilise punktiga. Niisamuti $OA' = OA''$. Neist kahest võrdusest järeldub, et $OA = OA''$, millega väite esimene pool on tõestatud.

Väite teise poole tõestamisel vaatleme eraldi kolme võimalikku juhtumit.

1) Punktid A_1 ja A_2, milledes sidejooned AA' ja $A'A''$ lõikavad vastavaid sümmeetriatelgi, asetsevad telgedevahelise teravnurga haaradel (joon. 75).

2) Punktid A_1 ja A_2 asetsevad telgedevahelise nürinurga haaradel (joon. 76).

3) üks punktidest A_1 ja A_2 langeb ühte keskpunktiga O (joon. 77).

Igal juhtumil saab suunaga nurga AOA'' avaldada suunaga nurkade summana

$$\angle AOA'' = \angle AOA' + \angle A'OA''$$

olgu kiire OA' asend milline tahes.

Juhtumeil 1 ja 2

$$\angle AOA' = 2\angle A_1OA' \text{ ja } \angle A'OA'' = 2\angle A'OA_2,$$

sest $A' \equiv t_1(A)$ ja $A'' \equiv t_2(A')$. Asendamisel ja ühise teguri 2 sulgude ette toomisel saame nurga AOA'' avaldada nüüd kujul:

$$\angle AOA'' = 2(\angle A_1OA' + \angle A'OA_2) = 2\angle A_1OA_2.$$

Juhtumil (1) nurk A_1OA_2 on α, nii et väide on tõestatud.

Juhtumil (2) nurk A_1OA_2 on telgedevaheline nürinurk ja nurk AOA'' on sirgete OA ja OA'' vahel olev sirgnurgast suurem nurk. Mõistes aga ka siin nurga AOA'' all sirgnurgast väiksemat nurka nimetatud sirgete vahel, võime kirjutada:

$$\angle AOA'' = 360° - 2\,|\angle A_1OA_2| = 360° - 2(180° - \alpha) = 2\alpha.$$

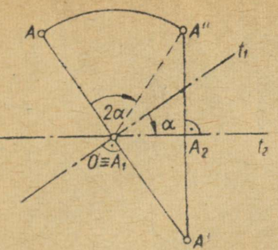
Juhtumil (3), kus punkt A_1 ühtib punktiga O (joon. 77), on nurk AOA' sirgnurk ning väide järeldub nüüd järgmiselt:

$$\angle AOA'' = 180° - 2\,|\angle A'OA_2| = 180° - 2(90° - \alpha) = 2\alpha.$$

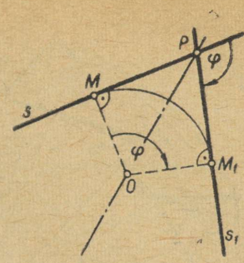
Tõestatud teoreemi võib kokkuvõtlikumalt sõnastada ka järgmiselt:

> **kujundi pööramisel tema tasapinna mingi punkti ümber pöördub kujundi iga punkt ühe ja sama nurga, nn. pöördenurga $\varphi = 2\alpha$ võrra.**

Kujundi k pööret. mille määravad keskpunkt O ja pöördenurk φ, märgime lühidalt kujul $O_\varphi(k)$.



Joon. 77.



Joon. 78.

Kui pöördenurk $\varphi = 180°$, siis pööre osutub peegelduseks punktist O, sest peegeldusteljed on siis teineteisega risti.

3. **Järeldusi pöörde põhiomadusest.**

1) *Kujundi ja tema pöörde iga vastavate punktide paari sümmeetriatelg läbib pöördekeskpunkti,*

sest viimane on neist punktidest võrdsetel kaugustel (kahest punktist võrdsetel kaugustel asetsev punkt on teatavasti nende punktide sümmeetriateljel).

2) *Sirgjoone ja tema pöörde kaugused pöördekeskpunktist on võrdsed,*

sest see kaugus ei muutu kummalgi peegeldusel, milledest koosneb antud pööre ($OM = OM_1$, joon. 78). Teisiti:

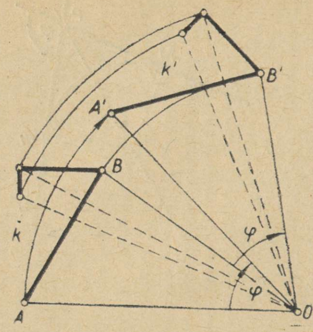
sirgjoone ja tema pöörde sümmeetriatelg läbib pöördekeskpunkti.

3) *Sirgjoone ja tema pöörde vaheline nurk, mille poolitaja ei läbi pöördekeskpunkti, võrdub pöördenurgaga,*

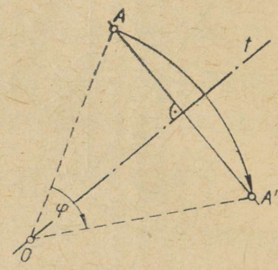
sest võrreldavaid nurki nurgaga MPM_1 liites saame sirgnurga (joon. 78). Viimane omadus näitab, et antud pöörde korral iga sirge pöördub (sirgete lõikepunkti ümber) ühe ja sama nurga (nimelt pöördenurga) võrra.

4. **Pöörde konstruktsioon.** Pöördekeskpunkti O ja pöördenurga φ andmisega on kujundi pööre kui teisendus üheselt määratud. Pöörde konstrueerimisel tõmbame kujundi punktidest kaared ümber keskpunkti ja märgime igal kaarel kujundi punktile vastava punkti, kasutades antud pöördenurka φ. Leitud punkte õigesti ühendades saamegi pööratud kujundi (joon. 79).

Iga pööret, mis on antud oma keskpunkti ja nurgaga, saab mitmeti esitada kahe peegelduse näol, kusjuures peegeldusteljed läbivad pöördekeskpunkti. Selleks võtame ühe telje (näiteks t_1) vabalt läbi keskpunkti, teise telje aga nii, et telgede vaheline



Joon. 79.



Joon. 80.

suunaga teravnurk (suunaga esimese telje poolt teise poole) võrduks poolega antud pöördenurgast (joonised 75 ja 76).

5. **Põhiülesanded pöördest.**

Ülesanne 1. Antud on kaks punkti A ja A'. Leida mingi pööre, mis teeks ühe punkti teisega ühtivaks.

Lahendus. Otsitav pöördekeskpunkt peab asetsema punktide A ja A' sümmeetriateljel (§ 17, p. 3, järeldus 1). Selle sümmeetriatelje t iga punkt O kõlbab pöördekeskpunktiks, kui pöördenurgaks võetakse nurk $\varphi = \angle AOA'$ (joon. 80). Ülesandel on seega lõpmata palju lahendeid.

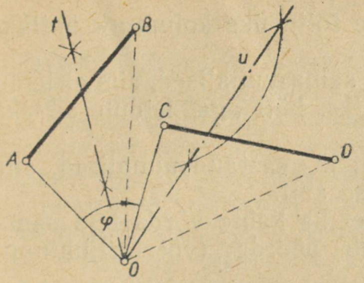
See lahendus näitab, et kahe punkti sümmeetriatelg on ühte punkti teiseks teisendava pöörde keskpunkti geomeetriliseks kohaks.

Ülesanne 2. Antud on kaks võrdset lõiku. Leida pööre, mis teeb ühe lõigu teisega ühtivaks.

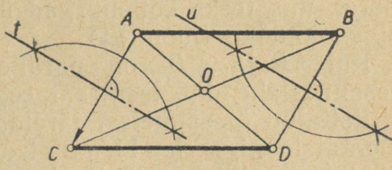
Lahendus. Olgu esimene lõik AB, teine CD (joon. 81). Leiame punktide A ja C sümmeetriatelje t ning punktide B ja D sümmeetriatelje u. Kui teljed t ja u lõikuvad, siis otsitavaks pöördekeskpunktiks on nende telgede lõikepunkt O ning pöördenurgaks $\varphi = \angle AOC$. Selle nurgaga võrdub nurk BOD, sest kumbki neist koosneb nurgast BOC ja veel võrdsete kolmnurkade AOB ja COD ühest nurgast (põhjenda nende kolmnurkade võrdsust, kasutades tunnust *kkk*).

Teise võimaliku lahenduse puhul saaksime keskpunktiks punkti, milles punktide A ja D sümmeetriatelg lõikab punktide B ja C sümmeetriatelge. Seega on sel ülesandel üldiselt kaks lahendust. Neist ühe puhul langeb punkt A ühte punktiga C, teise puhul punktiga D.

Kui punktipaaride A ja C ning B ja D sümmeetriateljed t ja u ei lõiku, siis on nad paralleelsed või ühtivad. Sel juhtumil on



Joon. 81.

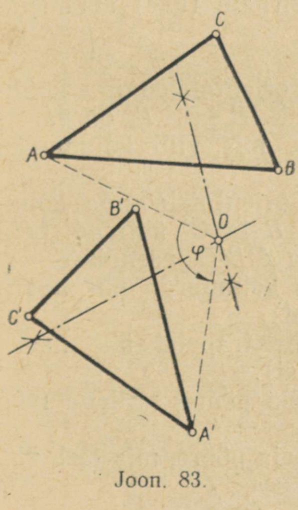


Joon. 82.

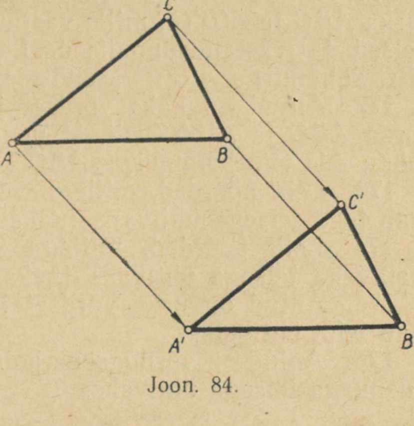
paralleelsed või ühtivad ka sirgetega t ja u ristuvad sirged AC ja BD. Kui lisaks sellele ka AB ja CD on paralleelsed, siis nelinurk $ABDC$ on rööpkülik ja ülesande üheks lahendiks on rööplüke, mille vektor on AC, teiseks lahendiks aga pööre sirgnurga võrra ümber rööpküliku diagonaalide lõikepunkti O (joon. 82).

Ülesanne 3. Antud on kaks võrdset ja sama orientatsiooniga kolmnurka. Leida pööre, mis teeb ühe kolmnurga teisega ühtivaks.

Lahendus. Antud võrdsed ja sama orientatsiooniga kolmnurgad olgu ABC ja $A'B'C'$ (joon. 83). Seega ka kolmnurkade vastavad küljed AB ja $A'B'$ on võrdsed. Kui need küljed pole paralleelsed, siis leiame eelmise ülesande eeskujul pöörde, mis teeb punkti A ühtivaks punktiga A' ja punkti B ühtivaks punktiga B'. Et kolmnurgad on sama orientatsiooniga, siis punkt C satub leitud pöörde puhul sirgest $A'B'$ samale poole, kus on



Joon. 83.



Joon. 84.

punkt C', ning kolmnurkade võrdsuse tõttu üks kolmnurk ühtibki teisega (joon. 83).

Kui AB ja $A'B'$ on paralleelsed ja samasuunalised, siis ei leidu pööret, mis teeks kolmnurgad ühtivaiks, küll aga leidub selleks sobiv rööplüke (joon. 84).

Kui AB ja $A'B'$ on paralleelsed ja vastandsuunalised, siis ülesanne lahendub tsentraalpeegelduse abil.

Esitatud ülesannetest järeldame, et ka kahte võrdset ja sama orientatsiooniga hulknurka saab pöörde (või erijuhtumil rööplükke) abil teha ühtivaiks.

Ülesandeid.

167. Antud on võrdkülgne kolmnurk ja väljaspool seda N-tähe kujuline kujund. Peegelda kujundit järjestikku kolmnurga kahest küljest ja määra saadud pöörde keskpunkt ja pöördenurk.

168. Joonesta mingi ruut ja selle pööre ruudu keskpunkti ümber 45° võrra.

169. Mingisuguste nurkade võrra saab iga järgnevat kujundit pöörata tema keskpunkti ümber nii, et pööratud kujund ühtiks antud kujundiga: a) võrdkülgne kolmnurk, b) ruut, c) korrapärane kuusnurk, d) korrapärane viisnurk?

170. Antud on kaks lõikuvat sirget ja kummalgi üks punkt. Leia pööre, mis teeb ühe sirge ja sellel antud punkti vastavalt ühtivaks teise sirge ja sellel antud punktiga.

Näpunäide. Pöördekeskpunktiks on punkt, kus lõikuvad antud punktide sümmeetriatelg ja antud sirgete (üks) sümmeetriatelg. Ülesandel on kaks lahendust.

171. Antud on kaks võrdset ja sama orientatsiooniga kolmnurka ABC ja $A'B'C'$, mille vastavad küljed AB ja $A'B'$ on paralleelsed ja vastandsuunalised. Leia pööre, mis viib kolmnurga ABC kolmnurga $A'B'C'$ asendisse.

172. Antud on kaks võrdset ja sama orientatsiooniga kolmnurka ABC ja $A'B'C'$ nii, et nende tipud B ja C' ühtivad. Leia pööre, mis viib kolmnurga ABC kolmnurga $A'B'C'$ asendisse.

173. Leia pöörded, millega võrdhaarse kolmnurga ühe haara saab teha teisega ühtivaks (kaks lahendust).

174. Leia pöörded, millega võrdhaarse trapetsi ühe haara saab teha teisega ühtivaks (kaks lahendust).

175. Antud on kaks võrdset nurka. Leia pööre, millega neid saab teha ühtivaiks.

176. Antud on võrdhaarne kolmnurk. Leia pööre, mis teeb ühe alusnurga teisega ühtivaks.

§ 18. LIIKUMINE TASAPINNAL.

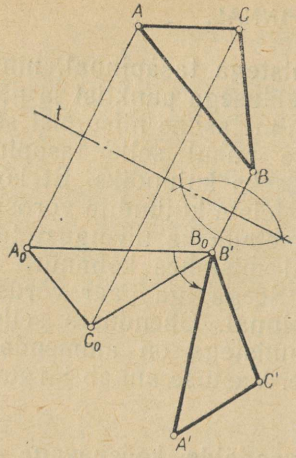
Eespool tutvusime lihtsamate liikumistega tasapinnal, nimelt peegeldusega sirgest, rööplükkega, peegeldusega punktist ja pöördega. Seejuures liikumiseks tasapinnal nimetasime niisugust selle tasapinna teisendamist iseendaks, mille puhul selle tasapinna mistahes kujund teisendub temaga võrdseks kujundiks. Et kõige lihtsam kujund, mille abil saab määrata teiste kujundite võrdsust, on kolmnurk, siis võime liikumiseks nimetada ka niisugust tasapinna teisendust iseendaks, mille puhul mistahes kolmnurk teisendub temaga võrdseks kolmnurgaks. Seega iga paar võrdseid kolmnurki määrab ühe liikumise tasapinnal. Ühenduses sellega tekib küsimus, kas ülalnimetatud liikumistega on ammendatud kõik liikumise liigid tasapinnal või mitte. Vastuse annab järgmine teoreem:

iga liikumist tasapinnal saab vaadelda koosnevana ülimalt kolmest peegeldusest.

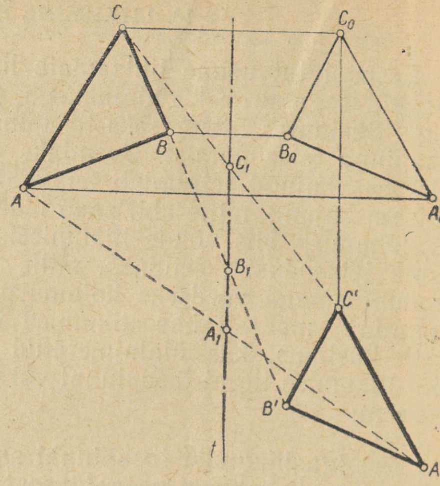
Eespool nägime, et antud võrdseid ja sama orientatsiooniga kolmnurki saab viia ühtivusse kas rööplükke või pöörde abil (§ 17, p. 5, ülesanne 3). Et mõlemad nimetatud teisendused koosnevad vaid kahest peegeldusest, siis on väide tõestatud kõigi niisuguste liikumiste kohta, mis on määratud kahe sama orientatsiooniga kolmnurga abil.

Eeldame nüüd, et antud võrdsetel kolmnurkadel ABC ja $A'B'C'$ on orientatsioonid vastandlikud (joon. 85). Peegeldame üht neist, näiteks kolmnurka ABC, sirgest t, mis on ühe paari vastavate tippude, näiteks B ja B' sümmeetriateljeks. Siis kolmnurga tipu B peegelduseks on tipp B', aga tippude A ja C peegeldused olgu vastavalt A_0 ja C_0. Kolmnurk $A_0B'C_0$ on võrdne kolmnurgaga ABC, kuid vastandorientatsiooniga, s. t. ta on võrdne kolmnurgaga $A'B'C'$, millel on temaga ü h i n e orientatsioon. Seetõttu võib juhtuda, et kolmnurgad $A_0B'C_0$ ja $A'B'C'$ ühtivad. Sel juhul oleks väide tõestatud, sest liikumine, mis teeks antud kolmnurgad ühtivaiks, oleks peegeldus sirgest t. Kui aga kolmnurgad $A_0B'C_0$ ja $A'B'C'$ ei ühti, siis saab neid panna ühtima pöörde abil ümber tipu B', sest nad on võrdsed ja sama orientatsiooniga. Et pööre koosneb kahest peegeldusest, siis kuluks nüüd antud kolmnurkade ühteviimiseks kokku kolm peegeldust. Sellega on väide täielikult tõestatud.

Peegeldustelje otstarbeka valikuga saab teoreemi tõestuses esineva peegelduse ja pöörde asendada peegelduse ja rööplükkega, kusjuures lükke vektor on paralleelne peegeldusteljega. Selleks võtame peegeldusteljeks sirge, mis läbib kolmnurkade ABC ja $A'B'C'$ mingi kahe paari vastavate tippude ühenduslõikude keskpunkte, näiteks lõikude AA' ja BB' keskpunkte A_1 ja B_1 (joon. 86).



Joon. 85.



Joon. 86.

Kolmnurga ABC peegeldumisel sirgest A_1B_1 saame kolmnurga $A_0B_0C_0$, mille lükketeisendiks on kolmnurk $A'B'C'$, nagu seda on võimalik tõestada (tõestuse jätame siin esitamata). Peegeldusest ja peegeldusteljega paralleelsest rööplükkest koosnevat teisendust (mis muide ei sõltu komponentteisenduste järjekorrast), nimetatakse **nihkunud peegelduseks** ehk **libisevaks peegelduseks**.

Nii on lõpuks selgunud, et

kahte vastupidi orienteeritud võrdset kujundit saab viia ühtivusse tavalise teljelise või nihkunud peegelduse abil.

Ülesandeid.

177. Antud on kaks sama orientatsiooniga võrdset kolmnurka. Leia kaks järjestikust peegeldust, mis teevad need kolmnurgad ühtivaiks.

178. Antud on kaks erineva orientatsiooniga võrdset kolmnurka, mis pole sümmeetrilised sirge suhtes. Leia kolm järjestikust peegeldust, mis teevad need kolmnurgad ühtivaiks.

179. Leia, missuguse lihtsama liikumisega saab asendada

a) kahte rööplüket;

b) rööplüket koos tsentraalpeegeldusega;

c) kahte tsentraalpeegeldust;

d) nelja peegeldust, kui peegeldustelgedeks on vaheldumisi kaks ristuvat sirget.

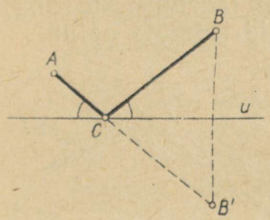
§ 19. LIIKUMISTEISENDUSTE KASUTAMINE KONSTRUKTSIOON-ÜLESANNETE LAHENDAMISEL.

Liikumisteisendusi saab kasutada paljude teoreemide tõestamisel ja konstruktsioonülesannete lahendamisel. Vaatleme mõnda näidet viimaselt alalt.

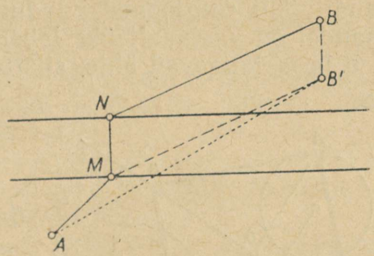
Teisenduste kasutamise meetod konstruktsioonülesannete lahendamisel seisneb selles, et vaadeldav kujund või selle mingi osa teisendatakse nii, et otsitav lahend (või lahendusviis) muutuks hõlpsamalt leitavaks. Selle meetodi sisu selgitavad lähemalt järgmised näited.

N ä i d e 1. Ühel pool sirgest u on antud kaks punkti A ja B. Leida sirgel u punkt C nii, et lõikude summa (tee pikkus) $AC+CB$ oleks minimaalne (võimalikult väike).

L a h e n d u s. Olgu ACB otsitav murdjoon (joon. 87). Tema pikkus ei muutu, kui lõik CB asendada sirge u suhtes sümmeetrilise lõiguga CB'. Nüüd peaks lühima pikkusega olema murdjoon ACB'. Ta on seda siis, kui punkt C asetseb sirgel AB'. Siit selgub, et otsitav punkt on sirgete u ja AB' lõikepunkt, kus $B' \equiv u(B)$.



Joon. 87.



Joon. 88.

M ä r k u s. Jooniselt selgub, et leitud punkti C puhul on võrdsed need teravnurgad, mis AC ja CB moodustavad sirgega u, s. t. lühim tee on see, mida mööda liigub valgus punktist A punktini B, peegeldudes sirgest u.

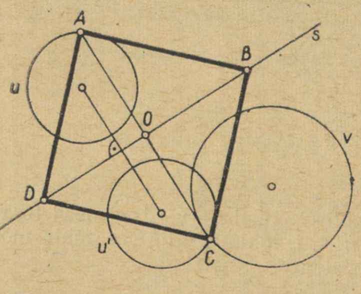
N ä i d e 2. Ühel pool paralleelsete kallastega kanalit on küla A, teisel pool küla B. Üle kanali tuleb ehitada sild niisuguses kohas, et tee ühest külast teise oleks minimaalse pikkusega.

L a h e n d u s. Oletame, et MN on nõutud silla asukoht, nii et murdjoon $AMNB$ on võimalik lühim tee, mis külasid ühendab (joon. 88). Anname teeosale BN rööplükke, mille vektor on $\overrightarrow{NM}$, ning vaatleme uut murdjoont $AMB'B$, mille pikkus on võrdne endise murdjoone pikkusega. Et see pikkus oleks minimaalne, peaksid punktid A, M ja B' asetsema ühel sirgel. Siit selgub, et punkt M peab asetsema kohal, kus punkti A poolne kanali kallas lõikab sirget AB'.

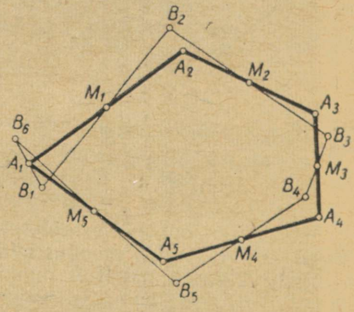
N ä i d e 3. Konstrueerida ruut, mille kaks vastastippu asetsevad antud sirgel ja ülejäänud tippudest üks asetseb ühel ja teine teisel antud ringjoonel.

L a h e n d u s. Olgu antud sirgjoon s ja ringjooned u ja v (joon. 89). Oletame, et ülesanne on lahendatud ja et $ABCD$ on otsitav ruut, mille tipud B ja D asetsevad antud sirgel s, tipp A ringjoonel u ja tipp C ringjoonel v. Siis punktid A ja C on sümmeetrilised sirge s suhtes, sest ruudu diagonaalid ristuvad ja poolitavad teineteist. Et punkt A asetseb ringjoonel u, siis temaga sirge s suhtes sümmeetriline punkt C asetseb ringjoonega u sirge s suhtes sümmeetrilisel ringjoonel u'. Siit selgub järgmine konstruktsioon: 1) leiame ringjoone $u' \equiv s(u)$; 2) märgime, kui see on olemas, punkti, näiteks C, milles lõikuvad ringjooned v ja u'; 3) leiame punkti $A \equiv s(C)$; 4) joonestame ruudu, mille diagonaaliks on lõik AC, järelikult on ruudu keskpunktiks sirgete s ja AC lõikepunkt O. Selle ruudu tipud B ja D satuvad sirgele s, sest nad on punktidest A ja C võrdsetel kaugustel. Ruut $ABCD$ rahuldabki ülesande kõiki nõudeid.

Ülesande lahendite arv on võrdne ringjoonte u' ja v ühiste punktide arvuga. Kui need ringjooned ei lõiku, siis ülesandel pole lahendit; kui ringjooned puudutavad või lõikavad teineteist, siis ülesandel on vastavalt üks lahend või kaks lahendit; kui ringjooned v ja u' langevad ühte, siis on lahendeid lõpmata palju.



Joon. 89.



Joon. 90.

N ä i d e 4. Konstrueerida viisnurk külgede antud keskpunktide järgi.

L a h e n d u s. Olgu antud punktid M_1, M_2, M_3, M_4 ja M_5 (joon. 90). Kui otsitava viisnurga esimest tippu A_1 peegeldada punktist M_1, siis saadakse teine tipp A_2, seda peegeldades punktist M_2 saadakse kolmas tipp A_3 jne.; lõpuks tipu A_5 peegeldamisel punktist M_5 saadakse uuesti tipp A_1. Nii selgub, et punkt A_1 on viiest tsentraalpeegeldusest koosneva teisenduse kahekordne punkt, kui peegelduskeskpunktiks on punktid $M_1, \ldots, M_5$. Et kahest tsentraalpeegeldusest koosnev teisendus on rööplüke, rööplükkest ja tsentraalpeegeldusest koosnev teisendus aga jälle tsentraalpeegeldus (§ 16, p. 4), siis neljast tsentraalpeegeldusest koosnev teisendus on taas rööplüke, viiest tsentraalpeegeldusest koosnev teisendus aga — tsentraalpeegeldus. Viimase teisenduse ainus kahekordne punkt on peegelduskeskpunkt. Tähendab, punkt A_1 on viiekordsel tsentraalpeegeldusel saadava tsentraalpeegelduse keskpunkt. Tema leidmiseks võtame tasapinna mistahes punkti B_1, peegeldame seda punktist M_1, saadud peegeldust B_2 uuesti punktist M_2 jne. kuni saame punkti B_6. Et punktid B_1 ja B_6 on peegelduses teineteisele vastavad punktid, siis lõigu B_1B_6 keskpunkt ongi selle peegelduse keskpunkt, ühtlasi otsitav punkt A_1. Viisnurga ülejäänud tipud leiame peegeldamise teel antud punktidest.

Ülesandeid.

180. Tasapinnal on antud kolm sirget: *s*, *t* ja *u*. Leia sirgel *s* punkt *S*, millega sirge *t* suhtes sümmeetriline punkt *S'* asetseb sirgel *u*.

181. Tasapinnal on antud sirge *s* ja sellest ühel pool punktid *A* ja *B*. Leia sirgel *s* punkt *M* nii, et sirged *AM* ja *BM* moodustaksid sirgega *s* võrdsed nurgad.

182. Tasapinnal on antud sirge *s* ja sellest teine teisel pool punktid *A* ja *B*. Leia sirgel *s* punkt *M* nii, et lõikude *AM* ja *BM* pikkuste vahe oleks võimalikult suur.

183. Tasapinnal on antud nurk tipuga *A* ja sirge *t*. Ehita ruut, mille kaks vastastippu asetsevad sirgel *t* ja ülejäänud tipud antud nurga haaradel või nende pikendustel üle tipu *A*.

184. Tasapinnal on antud nurk tipuga *A* ja selle sees punkt *S*. Joonesta läbi punkti *S* sirge nii, et tema lõik nurga haarade vahel poolituks punktis *S*.

185. Tasapinnal on antud sirgjoon, ringjoon ja punkt. Joonesta läbi antud punkti sirge, mille lõik antud sirgjoone ja ringjoone vahel poolituks antud punktis.

186. Joonesta tasapinnaline seitsenurk külgede antud keskpunktide järgi.

187. Joonesta läbi kahe antud ringjoone lõikepunkti sirge, mis ei läbi ringjoonte teist lõikepunkti ja millest need ringjooned lõikavad välja võrdsed kõõlud.

§ 20. HOMOTEETSUS TASAPINNAL.

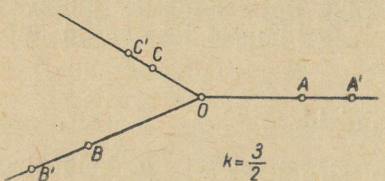
1. **Homoteetsuse mõiste.** Homoteetsuseks tasapinnal nimetatakse järgmiste omadustega vastavust tasapinna punktide vahel:

1) iga punkti ja sellele vastava punkti ühendussirge läbib üht ja sama punkti *O*, mida nimetatakse **homoteetsuskeskpunktiks**.

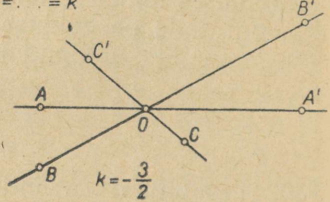
2) iga kaks teineteisele vastavat punkti asetsevad homoteetsuskeskpunktist kas ühel pool (**päripidine homoteetsus**, joon. 91) või teine teisel pool (**vastupidine homoteetsus**, joon 92);

3) kui M ja M' on kaks teineteisele vastavat punkti, siis lõikude suhe $OM' : OM = k$ on jääv tasapinna kõigi punktide puhul. See jääv suhe, mida nimetatakse **homoteetsusteguriks**, on päripidise homoteetsuse korral positiivne ja vastupidise homoteetsuse korral negatiivne, sest esimesel juhtumil on lõigud OM ja OM' samasuunalised, teisel juhtumil aga vastandsuunalised.

$$OA' : OA = OB' : OB = OC' : OC = \ldots = k$$



Joon. 91.



Joon. 92.

Homoteetsusteguri definitsioonist järeldub, et

$$OM' = k \cdot OM,$$

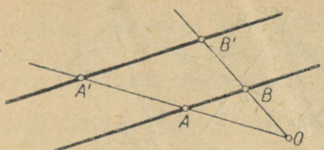
millest nähtub, et k e s k p u n k t i O ja t e g u r i k a n d m i s e g a o n h o m o t e e t s u s m ä ä r a t u d, sest nende andmete korral saab igale punktile M leida temale vastavat punkti M'. Kui punkt M ühtib keskpunktiga O, siis ühtib viimasega ka teisend M'; järelikult on keskpunkt homoteetsuse kahekordne punkt. Saab tõestada, et ta on homoteetsuse a i n u s kahekordne punkt.

2. **Homoteetsuse tähtsamad omadused.**

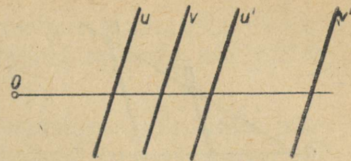
1) **Homoteetsuskeskpunkti läbiva sirge teisendiks on seesama sirge, iga muu sirge teisendiks aga tema paralleel.**

Homoteetsuskeskpunkti läbiva sirge kohta on väide ilmselt õige, sest homoteetsuse definitsiooni järgi on selle sirge punktide teisenditeks sellesama sirge punktid. Väite tõestamiseks homoteetsuskeskpunkti mitteläbiva sirge AB kohta eeldame, et homoteetsus on antud keskpunktiga O ja teguriga k (joon. 93). Leiame sirgel AB asetseva punkti, näiteks punkti A teisendi A' ning joonestame temast läbi sirge, mis on paralleelne sirgega AB. Lõigaku sirge OB joonestatud sirget punktis B'. Siis kiirteteoreemi põhjal

$$OB' : OB = OA' : OA.$$



Joon. 93.



Joon. 94.

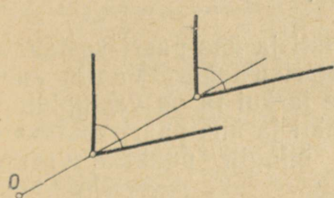
Et viimane suhe väljendab homoteetsustegurit, siis teeb sedasama ka esimene: $OB' : OB = k$. See näitab, et sirgel AB asetseva punkti B homoteetseks teisendiks on punkt B' sirgel $A'B'$. Ilmselt kehtib see nende sirgete kõigi punktide kohta.

2) **Paralleelsetele sirgetele vastavad paralleelsed sirged,**

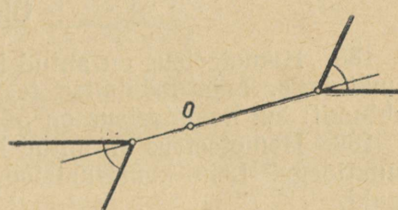
sest kui kaks sirget on paralleelsed, siis ka ühega ja teisega vastavalt paralleelsed sirged on omavahel paralleelsed (joon. 94): kui $u \| v$ ja $u' \| u$, $v' \| v$, siis $u' \| v'$.

3) **Iga nurk teisendub temaga võrdseks nurgaks,**

sest teisendatud nurga haarad on antud nurga haaradega vastavalt paralleelsed ja samasuunalised (joon. 95) või vastavalt paralleelsed ja vstandsuunalised (joon. 96).



Joon. 95.



Joon. 96.

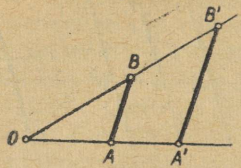
4) **Iga kahe teineteisele vastava lõigu suhe võrdub homoteetsusteguriga,**

sest kolmnurkade OAB ja $OA'B'$ sarnasuse tõttu (põhjenda seda, joon. 97) võime kirjutada:

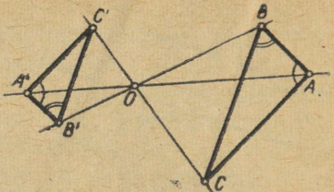
$$A'B' : AB = OA' : OA = k.$$

5) **Iga kolmnurk** (üldiselt iga kujund) **teisendub temaga sarnaseks kolmnurgaks** (kujundiks),

sest viimase kahe omaduse järgi nende nurgad on vastavalt võrdsed ja kõik vastavad lõigud on võrdelised (joon. 98).



Joon. 97.



Joon. 98.

Viimase omaduse tõttu nimetatakse homoteetsust ka **sarnasusteisenduseks** ning kahte homoteetset kujundit **perspektiivsarnasteks kujunditeks** (ehk sarnasteks kujunditeks sarnasusasendis). Kui ühega kahest perspektiivsarnasest kujundist teostada mingi liikumisteisendus, siis nende eriline vastastikune asend kaob ja me saame lihtsalt kaks sarnast kujundit. Seega võime öelda, et

kujundite sarnasus on homoteetsuse ja liikumisteisenduse järjestikusel rakendamisel püsima jääv kujundite omadus.

Lõpuks olgu märgitud, et kui homoteetsustegur $k=1$, siis homoteetsus osutub samasuseks (sest igale punktile vastavaks on siis see punkt ise); kui aga $k=-1$, siis homoteetsus osutub peegelduseks homoteetsuskeskpunktist.

Ülesandeid.

188. Homoteetsus on antud keskpunkti ja ühe paari vastavate punktidega. Leia mõõtmise teel homoteetsustegur. Vaatle kaht juhtumit: kui homoteetsus on päripidine ja kui ta on vastupidine.

189. Homoteetsus on antud keskpunkti ja ühe paari vastavate punktidega. Leia konstruktsiooni teel mingile punktile vastav punkt.

190. Homoteetsus on antud kespunkti ja ühe paari vastavate punktidega. Konstrueeri vabalt võetud kolmnurgale vastav kolmnurk.

191. Põhjenda väidet, et ringjoonega, mille raadius on r, homoteetseks kujundiks on ringjoon raadiusega kr, kus k on homoteetsustegur. (Kasuta omadust 4!)

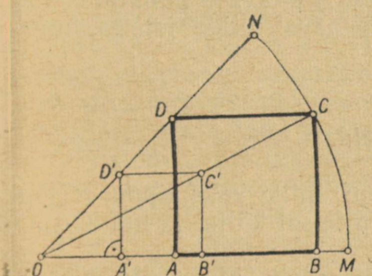
192. Põhjenda väidet, et vastupidine homoteetsus koosneb päripidisest homoteetsusest ja tsentraalpeegeldusest.

§ 21. HOMOTEETSUSE KASUTAMINE KONSTRUKTSIOONÜLESANNETE LAHENDAMISEL.

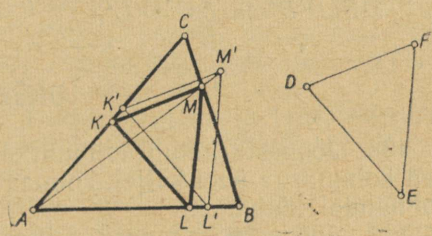
Nagu liikumisteisendusi, nii ka homoteetsust saab kasutada konstruktsioonülesannete lahendamisel. Vastav nn. s a r n a s u s m e e t o d seisneb selles, et esmalt konstrueeritakse otsitava kujundiga sarnane kujund ja siis homoteetsust kasutades otsitav kujund. Vaatleme selle meetodi rakendamist mõnede näidisülesannete lahendamisel.

N ä i d e 1. Antud sektorisse MON joonestada ruut, mille kaks tippu asetsevad sektori raadiusel OM, kolmas tipp raadiusel ON ja neljas tipp kaarel MN (joon. 99).

L a h e n d u s. Joonestame algul m i n g i ruudu $A'B'C'D'$ (joon. 99), mille tipud A' ja B' asetsevad antud sektori raadiusel OM ja tipp D' sektori raadiusel ON (kuidas seda teha?). Pikendame lõiku OC' kuni lõikumiseni sektori kaarega punktis C, kui ta juba ei lõika seda kaart. Teisendame ruutu $A'B'C'D'$ homoteetselt, võttes keskpunktiks punkti O ja üheks paariks vastavateks punktideks punktid C' ja C ($k = OC : OC'$). Teisendamisel saame ruudu $ABCD$, mis täidab ülesande tingimusi. Lahend on ühene.



Joon. 99.



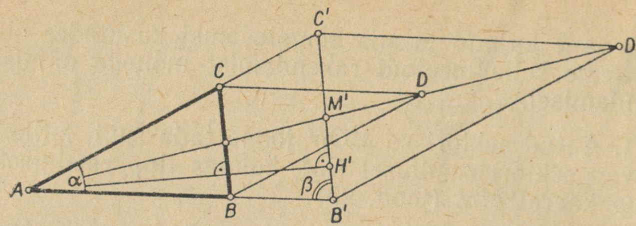
Joon. 100.

N ä i d e 2. Joonestada kolmnurk, mille tipud asetsevad antud kolmnurga ABC külgedel ja küljed on vastavalt paralleelsed teise antud kolmnurga DEF külgedega.

L a h e n d u s. Võtame küljel AC vabalt punkti K' ja joonestame esmalt otsitava kolmnurgaga KLM sarnase kolmnurga $K'L'M'$, mille tipp L' asetseb küljel AB ja mille küljed on vastavalt paralleelsed kolmnurga DEF külgedega (joon. 100). Kolmnurka $K'L'M'$ teisendame homoteetselt, võttes homoteetsuskeskpunktiks punkti A ja üheks vastavate punktide paariks punktid M' ja M, kus M on sirgete AM' ja BC lõikepunkt.

N ä i d e 3. Konstrueerida kolmnurk, mille kaks nurka α ja β ning nurga α tipust tõmmatud mediaani ja kõrguse summa on antud.

L a h e n d u s. Konstrueerime otsitavaga sarnase kolmnurga $AB'C'$ (joon. 101), milles $\angle A = \alpha$, $\angle B' = \beta$ ja külg AB' on vabalt võetud. Edasi leiame tipust A tõmmatud mediaani AM' ja kõrguse AH' ning kanname kõrguse mediaani pikendusele. Nii



Joon. 101.

saame tipust A tõmmatud mediaani ja kõrguse summaks lõigu AD'.

Samale sirgele AD' kanname alates punktist A otsitava kolmnurga mediaani ja kõrguse summa, saades lõigu AD. Otsitava kolmnurga ABC saame, kui kolmnurga $AB'C'$ teisendame homoteetselt, võttes keskpunktiks A ja üheks vastavate punktide paariks D' ja D. Punktid B ja C leiame paralleelide joonestamise teel: $DB \| D'B'$ ja $DC \| D'C'$.

Ülesandeid.

193. Joonesta antud kolmnurka ruut, mille kaks tippu asetsevad kolmnurga ühel küljel, kolmas tipp teisel küljel ja neljas tipp kolmandal küljel.

194. Joonesta kolmnurk, millest on antud kaks nurka ja kolmanda nurga tipust tõmmatud mediaan.

195. Joonesta kolmnurk, millest on antud kaks nurka ja nende nurkade tippudest tõmmatud mediaanide summa.

196. Joonesta kolmnurk, millest on antud kaks nurka ja kolmanda nurga tipust tõmmatud kõrguse ja bisektori summa.

197. Antud on kaks lõikuvat sirget ja väljaspool neid punkt. Joonesta ringjoon, mis läbib antud punkti ja puudutab antud sirgeid.

198. Joonesta antud kolmnurka ristkülik, mille kaks tippu asetsevad kolmnurga ühel küljel, kolmas tipp teisel küljel ja neljas tipp kolmandal küljel, kui ristküliku küljed suhtuvad nagu 3:2.

199. Antud on ringjoon ja sellel punkt A. Leia punktist A väljuva antud ringjoone kõõlu keskpunkti geomeetriline koht.

200. Joonesta antud segmenti ruut, mille kaks tippu asetsevad segmendi alusel ja kaks segmendi kaarel.

III. SIRGED JA TASAPINNAD.

§ 22. TASAPIND JA SELLE KUJUTAMINE.

Geomeetria esimeses osas — **planimeetrias** ehk tasapinnageomeetrias õpitakse tundma *tasapinnaliste* kujundite omadusi. Geomeetria teise osa — **stereomeetria** ehk ruumigeomeetria ülesandeks on uurida *ruumilisi* kujundeid, s. o. kujundeid, mis ei asetse kõigi oma punktidega ühel ja samal tasapinnal. Iga kujundi uurimisel on eeskätt vaja saada kujundist õige *kujutlus* ning osata teda *kujutada* joonise abil.

Kõige lihtsamad kujundid on **punkt, sirgjoon** ja **tasapind;** neid nimetatakse **põhikujunditeks.** Põhikujundeid me ei defineeri. Nende abil uurime kõiki teisi kujundeid.

Punkti ja sirge omadused on tuttavad planimeetria kursusest. Tasapinda iseloomustab tema järgmine omadus, nn. *tasapinna põhiomadus:*

kui tasapinnal ja sirgjoonel on kaks ühist punkti, siis sirgjoone kõik punktid asetsevad sellel tasapinnal.

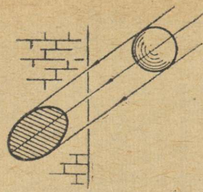
Sel juhul öeldakse, et sirge *asetseb* tasapinnal ehk tasapind *läbib* sirget.

Tasapindu tähistatakse väikeste kreeka tähtedega, näiteks α, β, ε jm.

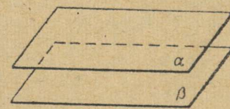
Objektist *kujutise* saamiseks toimime järgmiselt. Valgustame objekti näiteks päikesekiirtega ja joonestame tekkiva varju piirjoone mingil tasapinnal. Niisugust varjujoonist nimetatakse objekti **projektsiooniks** ehk **kujutiseks** tasapinnal ning tasapinda, millel saadakse see joonis, **projektsioonipinnaks** ehk **ekraaniks.** Kiired, mis tekitavad kujutise, on **kujutamiskiired** ehk **projekteerivad kiired.**

Kujutleme näiteks, et projektsioonipind on vertikaalne ning sellest meie pool asetseb mingi objekt (joon. 102). Kui päike paistab meie selja tagant ülalt paremalt, siis objekti projektsioon (vari) tekib vasakul all.

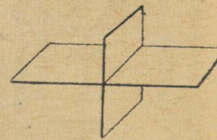
Ruumis oleva tasapinna kujutamiseks eraldame temast mõttes



Joon. 102.



Joon. 103.



Joon. 104.

tüki, harilikult ristkülikukujulise, ning joonestame selle tüki projektsiooni. Selleks on üldiselt rööpkülik; seepärast kujutataksegi tasapindu harilikult rööpkülikutena. Nii kujutab joonis 103 kahte rõhttasapinda ja joonis 104 ühte rõht- ja ühte püsttasapinda. Tasapinna asendi selgitamiseks antakse mõnikord rööpküliku need küljed tugevamalt, mis on vaatlejale lähemal; samal põhjusel esitatakse lõigud, mis jäävad teise tasapinna varju, kas kriipsjoonega (nagu tasapinna β puhul joonisel 103) või jäetakse need lõigud üldse joonestamata (nagu joonisel 104). Viimasel juhtumil tekitab joonis kujutluse tasapindadest, mis on läbipaistmatud.

Õige kujutluse saamiseks ruumilistest kujunditest nende jooniste järgi peame oskama näha jooniseid n. ö. «ruumilistena». Selle kergendamiseks on kasulik kõrvuti joonistega vaadelda ka vastavaid m u d e l e i d. Mudelite ehitamisel kasutame tasaseid vineeri-, või papitükke (ka joonestuskolmnurki) tasapindadena ning mitmesuguseid vardaid (ka pliiatseid) sirgetena.

Ülesandeid.

201. Kuidas saab joonlauaga kontrollida, kas laua pind on tasane?

202. Esita joonisel tasapind ühes sellele kuuluva kahe lõikuva sirgega.

203. Kujuta joonisel kaks lõikuvat püsttasapinda.

204. Mitu tasapinda läheb läbi ühe punkti, läbi ühe sirge?

205. Esita joonisel kolm tasapinda läbi ühe sirge.

§ 23. TASAPINNA MÄÄRAMINE PUNKTIDE JA SIRGETE ABIL.

1. **Tasapinna määramine kolme punkti abil.** Tasapinna määramine punktide ja sirgete abil põhineb järgmisel aksioomil (joon. 105, *a*):

läbi kolme punkti, mis ei asetse ühel ja samal sirgel, läheb üks ja ainult üks tasapind.

Sama tõsiasja väljendatakse veel kujul:

tasapind on määratud oma kolme punktiga, mis ei asetse ühel ja samal sirgel.

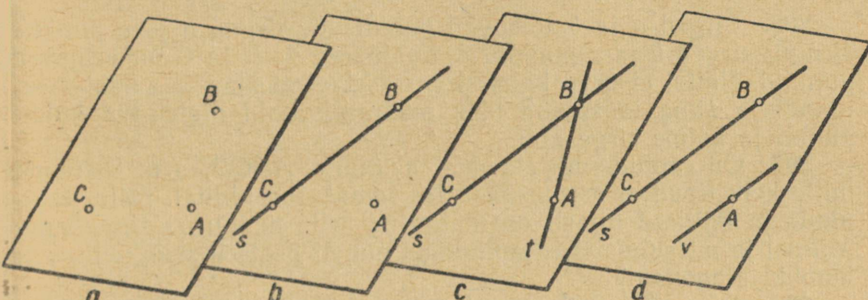
Sellest aksioomist järeldub nn. t a s a p i n d a d e ü h t i v u s e t e o r e e m:

kui kahel tasapinnal on kolm ühist punkti, mis ei asetse ühel ja samal sirgel, siis need tasapinnad ühtivad,

sest nende kolme punktiga on määratud ainult üks tasapind.

Tasapinda, mis on määratud punktidega A, B ja C, nimetame tasapinnaks ABC. Lauset «Tasapind α on määratud punktidega A, B, ja C» kirjutame lühidalt kujul

$$\alpha \equiv ABC.$$



Joon. 105.

2. **Tasapinna muud määramise viisid.** Kolme punktiga määramise viisi kõrval leidub veel kolm tasapinna määramise viisi. Esitame need kõik korraga järgmise teoreemi näol:

tasapind on määratud:

1) **ühe sirge ja väljaspool sirget asetseva punktiga;**
2) **kahe lõikuva sirgega;**
3) **kahe paralleelse sirgega.**

T õ e s t u s. Kui on antud kas sirge ja väljaspool seda asetsev punkt või kaks lõikuvat sirget või kaks paralleelset sirget, siis saab neil kujunditel ikka valida kolm punkti A, B ja C, mis ei asetse ühel sirgel (joon. 105, b, c, d). Need kolm punkti määravad ühe tasapinna, millel asetsevad antud sirgete ülejäänud punktid. Kui viimaste hulgast valiksime mingi muu mitte ühel sirgel asetseva punktide kolmiku A_1, B_1, C_1, siis nendega määratud tasapind ühtiks tasapinnaga ABC, sest neil tasapindadel oleks kolm ühist punkti, mis ei asetse ühel sirgel. Seega on nende andmetega määratud ikka ainult üks tasapind. Seda aga oligi vaja tõestada.

Jooniselt 105 selgub ühtlasi, kuidas kolmest punktist kui tasapinna määramisandmete baasist saab üle minna muudele määramisandmetele.

Sõltuvalt tasapinna määramise viisist saab tasapinda peale ühe kreeka tähe tähistada ja nimetada ka kas kolme punkti, kahe sirge või punkti ja sirge tähiste abil. Nii näiteks tasapind *st* on määratud sirgetega *s* ja *t*, tasapind *Ms* on määratud punktiga *M* ja sirgega *s* jne. Kui tasapind α on määratud näiteks sirgetega *s* ja *t*, siis märgime seda lühidalt nii:

$$\alpha \equiv st.$$

Ülesandeid.

206. Sirged *a* ja *b* lõikuvad punktis *C*, sirged *a* ja *c* punktis *B* ning sirged *b* ja *c* punktis *A*, kusjuures *A*, *B* ja *C* on erinevad punktid. Näita, et need kolm sirget asetsevad ühel ja samal tasapinnal ja anna tasapinna kõik määramisviisid nimetatud kolme punkti ja kolme sirge abil.

207. On antud mittetasane nelinurk *ABCD*, s. o. nelinurk, mille kõik tipud ei asetse ühel ja samal tasapinnal. Mitu tasapinda ja millised nimelt on määratud selle nelinurga tippudega? Mitmel ja missugustel tasapindadel nimelt asetseb selle nelinurga kumbki diagonaal?

208. On antud neli punkti, mis ei ole ühel ja samal tasapinnal. Kas võib leiduda nende hulgas kolm punkti, mis asetsevad ühel ja samal sirgel? Mitu sirget ja mitu tasapinda on määratud nende nelja punktiga?

209. Mitu sirget on määratud *n* punktiga ($n>2$), kui ükski punktide kolmik pole ühel ja samal sirgel?

210. Mitu tasapinda on määratud *n* punktiga ($n>3$), kui ükski punktide nelik pole ühel ja samal tasapinnal?

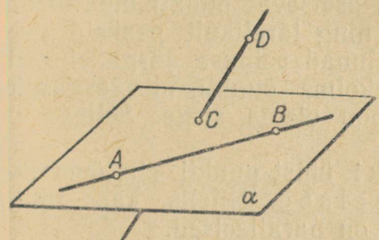
211. Paljude aparaatide toeks, nagu fotoaparaat, pikksilm, teodoliit jm., tarvitatakse k o l m e jalaga statiivi. Selgita, miks.

§ 24. KAHE SIRGJOONE VASTASTIKUSED ASENDID. KIIVSIRGED.

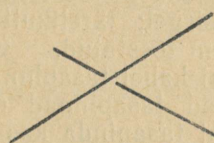
Ühe ja sama tasapinna kaks sirget teatavasti kas lõikuvad või on paralleelsed. Ümberpöördult, kui mistahes kaks sirget lõikuvad või on paralleelsed, siis saab neist ikka läbi panna tasapinna.

Näitame nüüd, et kahel sirgel r u u m i s on veel kolmas vastastikuse asendi võimalus. Selleks võtame tasapinnal α sirge *AB* ja väljaspool seda punkti C (joon. 106). Kui nüüd väljaspool tasapinda α asetsevast punktist D tõmbame sirge CD, siis viimane pole sirgega AB ühel ja samal tasapinnal. Tõepoolest, kui leiduks tasapind β, mis läbiks sirgeid AB ja CD, siis punkte A, B ja C peaks läbima kaks mitteühtivat tasapinda, nimelt tasapind α, mis ei sisalda sirget CD, ja tasapind β, mis sisaldab sirge CD. Et punkte A, B ja C läbib ainult üks tasapind, milleks on α, siis tasapinda β pole olemas.

Kahte sirget, mida ei saa läbida üks ja sama tasapind, nimetatakse **kiivsirgeteks.**



Joon. 106.



Joon. 107.

Seega on ruumis kaks mitteühtivat sirget kas lõikuvad, paralleelsed või kiivsed.

Kahe kiivsirge kujutamisel joonestatakse see sirge katkestatult, mis jääb teise aila või taha (joon. 107). Paralleelseid sirgeid, mis pole joonisepinnal (ekraanil), kujutame jooniselgi paralleelsetena. See on õigustatud eeldusel, et kujutamine toimub paralleelsete kiirte abil.

Ülesandeid.

212. Mitu kuubi serva lõikuvad ühe servaga? on paralleelsed ühe servaga? on kiivsed ühe servaga?

213. Mitu risttahuka serva lõikuvad, mitu on paralleelsed ja mitu on kiivsed risttahuka ühe diagonaaliga?

214. Kui palju on horisontaalseid ja kui palju vertikaalseid sirgeid, mis läbivad antud punkti?

215. Mitu horisontaalset sirget saab joonestada antud vertikaalsel tasapinnal läbi antud punkti?

216. Kuidas asetsevad teineteise suhtes mittetasase nelinurga diagonaalid?

§ 25. KAHE TASAPINNA VASTASTIKUSED ASENDID.

Kui kahel tasapinnal on ühiseid punkte, aga tasapinnad ei ühti, siis öeldakse, et nad lõikuvad. Meie kujutluse järgi kahel lõikuval tasapinnal ei saa olla ainult üksikuid ühiseid punkte, vaid neil peab olema ühine joon. Viimast nimetatakse tasapindade **lõikejooneks.** Tõestame, et

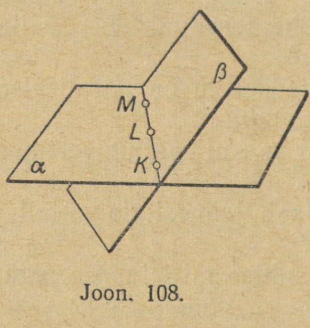
kahe tasapinna lõikejoon on sirge.

Tõestus. Kui kahe tasapinna α ja β lõikejoon ei oleks sirge (joon. 108), siis peaks ta olema kõver. Kõverjoonel on võimalik valida kolm punkti K, L ja M nii, et nad ei asetse ühel sirgel. Need kolm mitte ühel sirgel asetsevat punkti oleksid siis tasapindade α ja β ühised punktid ning järelikult peaksid need tasapinnad ühtima. Et antud tasapinnad eelduse järgi ei ühti, siis ei saa nende lõikejoonel olla kolme punkti, mis ei asetse ühel sirgel; järelikult peab lõikejoon olema sirge. Sellega on teoreem tõestatud.

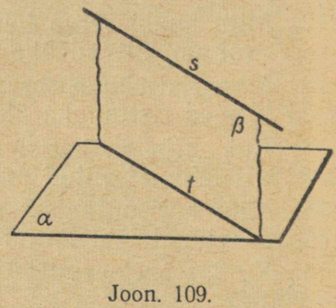
Kui kahel tasapinnal pole ühtki ühist punkti, siis öeldakse, et need tasapinnad on paralleelsed. Niisiis, kaks mitteühtivat tasapinda kas lõikuvad või on paralleelsed.

§ 26. SIRGE JA TASAPIND.

1. **Sirge ja tasapinna vastastikused asendid.** Tasapinna põhiomadusest selgus, et kui sirgel on tasapinnaga kaks ühist punkti, siis sirge kõik punktid on tasapinnal. Kui sirgel ja tasapinnal on üksainus ühine punkt, siis öeldakse, et sirge ja tasapind lõikuvad. Kui neil aga pole ühtki ühist punkti, siis öeldakse, et sirge ja tasapind on paralleelsed. Muid võimalusi ilmselt olla ei saa. Niisiis on ruumis igal sirgel iga tasapinna suhtes üks järgmisest kolmest asendist: sirge kas asetseb (ehk on) tasapinnal, lõikab tasapinda või on tasapinnaga paralleelne.



Joon. 108.



Joon. 109.

Nende tõsiasjade märkimiseks kasutame sümboleid $\subset$ (asetseb), $\supset$ (läbib), $\times$ (lõikab) ja $\parallel$ (on paralleelne). Nii kirjutame allantud lauseid lühidalt järgmiselt:

sirge s asetseb tasapinnal α	$s \subset \alpha$;
sirge t läbib punkti M	$t \supset M$;
sirge u lõikab tasapinda β	$u \times \beta$;
sirge v on paralleelne tasapinnaga γ	$v \parallel \gamma$.

Kahe kujundi, näiteks sirge u ja tasapinna β lõikumise üleskirjutust $u \times \beta$ kasutame ühtlasi ka nende lõikekujundi märkimiseks. Nii kirjutame lauset «Sirge u ja tasapinna β lõikepunkt on A» kujul

$$u \times \beta \equiv A$$

ja lauset «Tasapinnad α ja β lõikuvad mööda sirget s» kujul

$$\alpha \times \beta \equiv s.$$

Sõnade «ei asetse» ja «ei läbi» asemele kirjutame vastavalt $\not\subset$ ja $\not\supset$. Nii tähendab kirjutus

$$v \not\subset \gamma,$$

et sirge v ei asetse tasapinnal γ, ja kirjutus

$$\gamma \not\supset v,$$

et tasapind γ ei läbi sirget v.

2. **Sirge ja tasapinna paralleelsuse tunnus.** Sirge ja tasapinna vastastikuse asendi uurimisel on otstarbekohane kasutada järgmist teoreemi, mida nimetatakse ka s i r g e j a t a s a p i n n a p a r a l l e e l s u s e t u n n u s e k s:

sirge, mis pole tasapinnal, on siis tasapinnaga paralleelne, kui ta on paralleelne sirgega, mis asetseb sel tasapinnal.

E e l d u s. $s \not\subset \alpha$; $t \subset \alpha$; $s \parallel t$ (joon. 109).

V ä i d e. $s \parallel \alpha$.

T õ e s t u s. Sirged s ja t määravad tasapinna β, mis lõikub tasapinnaga α mööda sirget t. Kui sirge s lõikuks tasapinnaga α, siis nende lõikepunkt X oleks nii tasapinnal β kui ka tasapinnal α, järelikult asetseks ta nende tasapindade lõikesirgel t. Seega oleks punkt X sirgete s ja t ühine punkt. Kuid eelduse järgi neil sirgeil ühist punkti pole ning seepärast ei saa sirge s lõikuda tasapinnaga α, vaid on temaga paralleelne.

Sellest teoreemist järeldame, et

sirge, mis on paralleelne kahe tasapinna lõikejoonega ega asetse kummalgi tasapinnal, on mõlema tasapinnaga paralleelne,

sest kahe tasapinna lõikejoon on nii ühel kui ka teisel tasapinnal.

Ülesandeid.

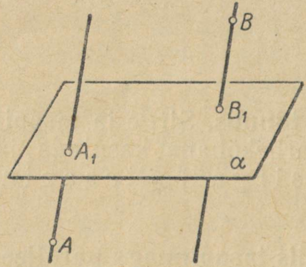
217. Kuidas võib asetseda tasapinnaga paralleelne sirge sellel tasapinnal antud sirge suhtes?

218. Mitu sirget saab panna läbi antud punkti paralleelselt antud tasapinnaga?

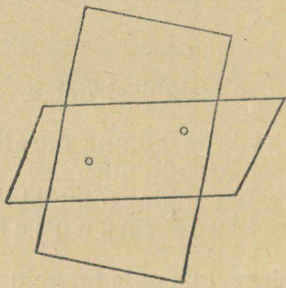
219. Näita, et risttahuka iga serv on paralleelne kahe tahuga.

220. Antud on tasapind ja sellega paralleelne sirge. Tõesta, et seda sirget läbiva tasapinna ja antud tasapinna lõikejoon on paralleelne antud sirgega.

221. Tasapinnast α ühel pool on antud punkt A ja teisel pool punkt B. Läbi nende punktide on pandud kaks paralleelset sirget, mis lõikavad tasapinda α vastavalt punktides A_1 ja B_1 (joon. 110). Leia punkt, kus sirge AB lõikab tasapinda α.



Joon. 110.



Joon. 111.

222. Joonisel 111 on antud kahe tasapinnatüki kujutiste piirjooned ja nende tasapindade lõikejoone kaks punkti. Esita joonisel nende tasapindade lõikumine, s. t. joonesta nende lõikejoon ja tõmba tugevamalt kummagi tasapinnatüki piirjoone need osad, mis on nähtavad (ülesandel on kaks lahendust).

223. Püramiidi $SABC$ tahul SAB on antud punkt M ja tahul SBC punkt N (joon. 112). Tee joonis ja esita sellel:

1) tasapindade SMN ja SAB lõikejoon;
2) tasapindade SMN ja SBC lõikejoon;
3) tasapindade SMN ja ABC lõikejoon;

4) sirge MN ja tasapinna ABC lõikepunkt;

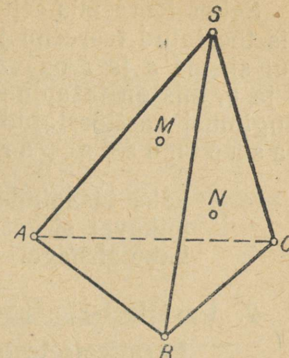
5) tasapindade SMN ja SAC lõikejoon;

6) sirge MN ja tasapinna SAC lõikepunkt.

224. Püramiidi $SABC$ serval SA on antud punkt M, serval SB punkt N ja serval SC punkt P. Tee joonis ja leia sellel:

1) punktid, kus sirged MN, NP ja PM lõikavad tasapinda ABC;

2) tasapindade ABC ja MNP lõikejoon.



Joon. 112.

§ 27. KAHE TASAPINNA PARALLEELSUS.

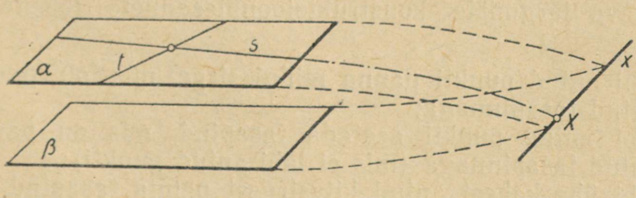
1. **Kahe tasapinna paralleelsuse definitsioon ja tunnus.** Kaks tasapinda on paralleelsed, kui neil ei ole ühtki ühist punkti. Et tasapinnad võivad olla paralleelsed, seda näitab järgmine teoreem:

kaks tasapinda on paralleelsed, kui ühe tasapinna kahest lõikuvast sirgest kumbki on paralleelne teise tasapinnaga:

E e l d u s. $s \times t$; $\alpha \equiv st$; $s \parallel \beta$; $t \parallel \beta$ (joon. 113).

V ä i d e. $\alpha \parallel \beta$.

T õ e s t u s. Tasapinnad α ja β ei ühti, sest sirged s ja t on tasapinnal α, kuid mitte tasapinnal β. Kui tasapinnad α ja β lõikuksid, siis nende lõikesirge x, olles tasapinnal α, lõikuks vähemalt ühega sirgetest s ja t, kuna teisega neist ta võib olla paralleelne. Lõikugu ta näiteks sirgega s punktis X. See punkt X oleks siis sirge s ja tasapinna β lõikepunkt. Kuid eelduse järgi on sirge s paralleelne tasapinnaga β. Järelikult ei saa tasapinnad α ja β lõikuda, vaid peavad olema paralleelsed. Seda oligi vaja tõestada.



Joon. 113.

Selles teoreemis eeldasime, et $s \parallel \beta$ ja $t \parallel \beta$. Eelmises paragrahvis tõestatud teoreemi järgi on aga niisugused eeldused täidetud, kui sirged s ja t on vastavalt paralleelsed kahe lõikuva sirgega u ja v, mis on tasapinnal β, s. t. kui $s \parallel u$ ja $t \parallel v$. Kasutades neid tingimusi vasttõestatud teoreemi eelduses, võime sõnastada nn. tasapindade paralleelsuse tunnuse järgmiselt:

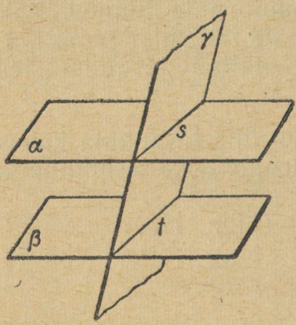
kaks tasapinda on paralleelsed, kui ühe tasapinna kaks lõikuvat sirget on vastavalt paralleelsed teise tasapinna kahe sirgega.

2. **Paralleelsete tasapindade põhiomadus.**

Paralleelsete tasapindade lõikamisel tasapinnaga tekivad paralleelsed lõikesirged.

Eeldus. $\alpha \parallel \beta$; $\alpha \times \gamma = s$; $\beta \times \gamma = t$ (joon. 114).

Väide. $s \parallel t$.



Joon. 114.

Tõestus. Sirged s ja t, olles ühel ja samal tasapinnal γ, kas lõikuvad või on paralleelsed. Kui sirged s ja t lõikuksid, siis nende lõikepunkt X oleks tasapinnal α, sest sirge s kõik punktid asetsevad tasapinnal α; samuti asetseks punkt X tasapinnal β, sest sirge t kõik punktid asetsevad tasapinnal β. Seega oleks X tasapindade α ja β ühine punkt. Kuid ühist punkti neil tasapindadel olla ei saa, sest $\alpha \parallel \beta$. Järelikult s ja t ei lõiku, vaid on paralleelsed.

Ülesandeid.

225. Tõesta, et risttahuka vastastahkude tasapinnad on paralleelsed.

226. Eeldades, et ruumis saame igal antud või vabalt võetud tasapinnal teostada planimeetriast tuntud konstruktsioone, koosta kava järgmiste konstruktsioonülesannete lahendamiseks ruumis:

1) läbi antud punkti panna mingi sirge, mis on paralleelne antud tasapinnaga;
2) läbi antud punkti asetada tasapind, mis on paralleelne antud tasapinnaga (mis ei läbi antud punkti);
3) läbi ühe kahest antud kiivsirgest panna tasapind, mis on paralleelne teise antud sirgega.

§ 28. KOLME TASAPINNA VASTASTIKUSED ASENDID.

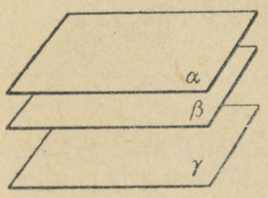
Kolm tasapinda võivad asetseda nii, et

1) neil pole ühtki lõikesirget (joon. 115); sel juhul tasapinnad on paralleelsed;

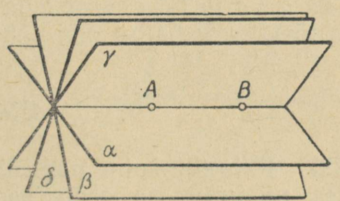
2) neil on üks lõikesirge (joon. 116); sel juhul need tasapinnad kuuluvad ühte tasapindade kimpu;

3) neil on kaks lõikesirget (joon. 114); sel juhul kaks tasapinda nende hulgast on paralleelsed;

4) neil on kolm lõikesirget (joonised 117 ja 118).



Joon. 115.



Joon. 116.

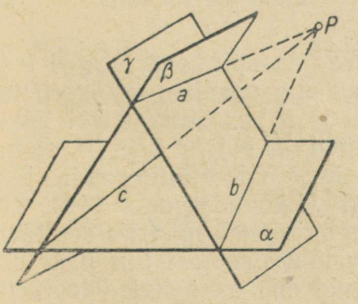
Viimasel juhul on kolme tasapinna lõikesirgetel kaks vastastikuse asendi võimalust, nagu selgub järgmisest teoreemist.

Kolme tasapinna lõikesirged on kas paralleelsed või lõikuvad ühes ja samas punktis.

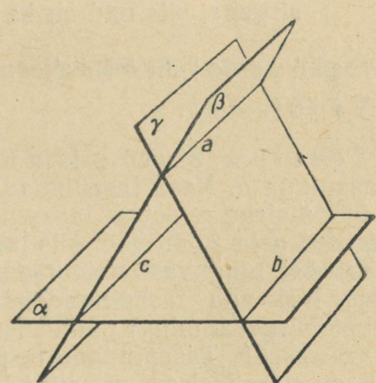
Eeldus. $\alpha \times \beta \equiv c$; $\beta \times \gamma \equiv a$; $\alpha \times \gamma \equiv b$ (joonised 117 ja 118).

Väide. 1) Kui $a \times b \equiv P$, siis $c \supset P$ (joon. 117).

2) Kui a ja b ei lõiku, siis $a \parallel b$, $a \parallel c$ ja $b \parallel c$ (joon. 118).



Joon. 117.



Joon. 118.

T õ e s t u s. Sirgetest a, b ja c saab koostada kolm sirgete paari, nimelt paari a ja b, paari a ja c, paari b ja c. Neist esimene paar on tasapinnal γ, teine tasapinnal β ja kolmas tasapinnal α. Järelikult pole nende sirgete hulgas kiivsirgeid.

Kui üks paar sirgeid, näiteks a ja b, lõikuvad (joon. 117), siis nende lõikepunkt P on nii tasapinnal α, kus asetseb sirge b, kui ka tasapinnal β, kus asetseb sirge a. Niisiis on punkt P tasapindade α ja β ühine punkt ja järelikult asetseb nende tasapindade lõikesirgel c. Sel juhul sirged a, b ja c lõikuvad ühes ja samas punktis P.

Kui a ja b ei lõiku, siis $a \parallel b$, sest nad ei ole kiivsirged. Kuid siis ka $a \parallel c$ ja $b \parallel c$, sest a ja c või b ja c lõikumise puhul järelduks tõestuse eelmise osa põhjal, et ka a ja b lõikuvad.

Ülesandeid.

227. Paiguta kolm papitükki kui tasapinna mudelid üksteise suhtes niisugusesse asendisse, et nende lõikesirgete hulgas on üks paar, kaks paari, kolm paari ristuvaid sirgeid.

228. On antud kiivsirged x ja y ning esimesel neist punktid A ja B, teisel C. Missugused tasapinnad on määratud nende punktide ja sirgetega? Kuidas asetsevad nende tasapindade lõikesirged üksteise suhtes?

§ 29. KOLM PARALLEELSET SIRGET.

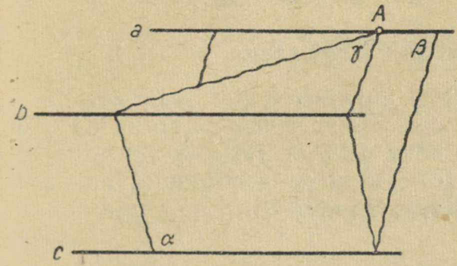
Toetudes eelmisele teoreemile saab näidata, et ruumigeomeetrias jääb õigeks järgmine tasapinnageomeetriast tuntud teoreem:

kui kumbki kahest sirgest on paralleelne mingi kolmanda sirgega, siis nad on ka teineteisega paralleelsed.

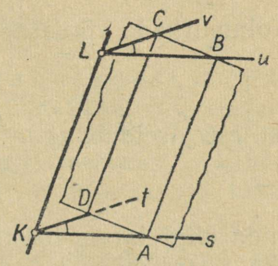
E e l d u s. $a \parallel c$; $b \parallel c$ (joon. 119).

V ä i d e. $a \parallel b$.

T õ e s t u s. Sirged a ja c määravad tasapinna β, sirged b ja c tasapinna α. Need tasapinnad ei saa olla paralleelsed, sest neil on ühine sirge c. Seega tasapinnad α ja β kas ühtivad või lõikuvad. Kui α ja β ühtivad, siis on sirged a, b ja c ühel ja samal tasapinnal ning vastav teoreem on tõestatud planimeetria kursuses. Kui aga tasapinnad α ja β lõikuvad (joon. 119), siis võtame sirgel a mingi punkti A; koos sirgega b määrab see tasapinna $\gamma \equiv Ab$. Tasapindade α, β ja γ lõikesirgetest üks paar sirgeid on paralleelsed, nimelt $b \parallel c$. Kuid siis on eelmise teoreemi põhjal ka tasapindade γ ja β lõikesirge paralleelne sirgega c, järelikult ühtiv sirgega a, sest läbi punkti A läheb tasapinnal β ainult üks sirge paralleelselt sirgega c. Sama teoreemi põhjal on tasapindade β ja γ lõikesirge a ühtlasi paralleelne sirgega b, järelikult $a \parallel b$.



Joon. 119.



Joon. 120.

Ülesandeid.

229. Tõesta, et risttahuka iga serv on paralleelne kolme servaga.

230. a) Tõesta, et risttahuka iga diagonaalipaar asub ühel tasapinnal, nn. diagonaaltasapinnal; järelda, et risttahuka diagonaalid lõikuvad kõik ühes ja samas punktis, mis poolitab diagonaale.

b) Joonesta risttahuka lõige tasapinnaga, mis on määratud diagonaalipaariga.

§ 30. VASTAVALT PARALLEELSETE HAARADEGA NURGAD.

1. Tõestame, et

vastavalt paralleelsete ja samasuunaliste haaradega nurgad on võrdsed.

Eeldus. $s \parallel u$; $t \parallel v$; $s \times t \equiv K$; $u \times v \equiv L$ (joon. 120).

Väide. $\angle st = \angle uv$.

Tõestus. Võtame kiirel s vabalt punkti A ja kiirelt t vabalt punkti D. Sirgetega s ja u määratud tasapinnal su joonestame läbi punkti A sirge AB paralleelselt sirgega KL; samuti joonestame sirgega KL paralleelse sirge DC tasapinnal tv. Tekkinud nelinurgad $ABLK$ ja $DCLK$ on rööpkülikud. Et rööpküliku vastasküljed on võrdsed, siis

$$AB = KL = DC.$$

Sirged AB ja DC, mis on paralleelsed sirgega KL, on ka teineteisega paralleelsed. Seega ka nelinurk $ABCD$ on rööpkülik, sest tal on üks paar paralleelseid ja võrdseid vastaskülgi. Rööpküliku vastaskülgede võrdsuse tõttu

$$AK = BL, \quad KD = LC \quad \text{ja} \quad AD = BC.$$

Kolmnurkade võrdsuse tunnuse kkk järgi seega

$$\triangle AKD = \triangle BLC,$$

millest järeldub, et

$$\angle K = \angle L,$$

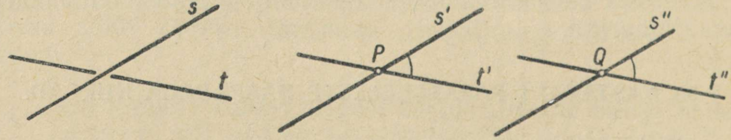
mida oligi tarvis tõestada.

2. **Kahe kiivsirge vaheline nurk.** Eelmine teoreem võimaldab defineerida nurka kahe kiivsirge vahel: kahe kiivsirge s ja t vaheliseks nurgaks nimetatakse nurka kahe lõikuva sirge s' ja t' vahel, kui need sirged on vastavalt paralleelsed antud kiivsirgetega s ja t (või üks neist ühtib ühega sirgetest s ja t). Niisiis (joon. 121), kui

$$s' \parallel s, \quad t' \parallel t \quad \text{ja} \; s' \times t' = P,$$

siis

$$\angle s't' = \angle st.$$



Joon. 121.

Nii defineeritud nurga $\angle s't'$ suurus ei sõltu nurga tipu P asukohast, sest võttes nurga tipuks mingi teise punkti Q ja joonestades läbi Q kaks sirget s'' ja t'' nii, et

$$s'' \parallel s \quad \text{ja} \quad t'' \parallel t,$$

saame eelnenud teoreemi põhjal tõestada, et

$$\angle s''t'' = \angle s't'.$$

Kui kahe kiivsirge vaheline nurk osutub täisnurgaks, siis öeldakse, et kiivsirged ristuvad.

Ülesandeid.

231. Too risttahuka servade juurest näiteid lõikuvatest ristsirgetest ja kiivsetest ristsirgetest.

§ 31. KAHETAHULINE NURK.

Kahe tasapinna lõikumisel tekib neli kahetahulist nurka. Kui kõrvaldada teisele poole tasapindade lõikesirget jäävad pooltasapinnad, siis saame ühe kahetahulise nurga. Tasapindade lõikesirget nimetatakse selle kahetahulise nurga **servaks** ja kahetahulist nurka moodustavaid pooltasapindu — selle nurga **tahkudeks.**

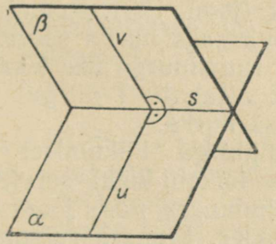
Kahetahuline nurk on kujund, mille moodustavad kaks ühest ja samast sirgest väljuvat pooltasapinda.

Kahetahulise nurga suurust mõõdetakse tema **joonnurga** abil. Selleks on nurk kahe kiire vahel, mis mõlemad on tõmmatud kahetahulise nurga serva ühest ja samast punktist risti kahetahulise nurga servaga ning milledest üks on ühel tahul, teine teisel tahul. Niisiis, joonestades kahetahulise nurga serva s mingist punktist tahul α kiire u nii, et $u \perp s$, ja tahul β kiire v nii, et $v \perp s$, saamegi kahetahulise nurga joonnurga uv (joon. 122).

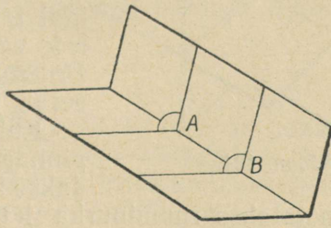
Kahetahulise nurga joonnurga suurus ei sõltu nurga tipu asukohast kahetahulise nurga serval.

Selle tõestamiseks võrdleme kahetahulise nurga joonnurki, mille tippudeks on mingid kaks punkti A ja B (joon. 123). Et joonnurkade haarad on risti kahetahulise nurga servaga, siis nurgad A ja B on vastavalt paralleelsete ja samasuunaliste haaradega nurgad. Seega $\angle A = \angle B$.

Nii on siis ükskõik, missuguse punkti kahetahulise nurga serval võtame joonnurga tipuks.



Joon. 122.



Joon. 123.

Vastavalt oma joonnurga suurusele on kahetahuline nurk kas täis-, terav- või nürinurk. Kahetahulised nurgad on võrdsed, kui nende joonnurgad on võrdsed.

Kui kahetahulise nurga joonnurk on täisnurk, siis öeldakse, et t a s a p i n n a d r i s t u v a d; lühidalt (joon. 122):

$$\text{kui } \angle uv = 90^\circ, \text{ siis } \alpha \perp \beta.$$

Kui kaks lõikuvat tasapinda ei ristu, siis nende lõikumisel tekkinud kahetahulistest nurkadest kaks nurka on teravnurgad ja kaks nürinurgad. Siis loetakse k a h e t a s a p i n n a v a h e l i s e k s n u r g a k s harilikult nende lõikumisel tekkinud t e r a v n u r k a. Sama nurka nimetatakse ka ühe tasapinna k a l d e n u r g a k s teise tasapinna suhtes.

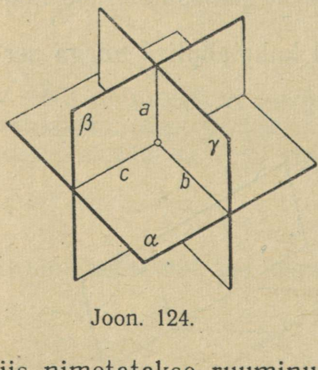
Ülesandeid.

232. Tõesta, et tasapind, mis on risti ühega kahest paralleelsest tasapinnast, on risti ka teisega.

233. Selgita, missuguseid nurki võiks nimetada kahetahulisteks kõrvunurkadeks, missuguseid kahetahulisteks tippnurkadeks.

§ 32. RUUMINURK.

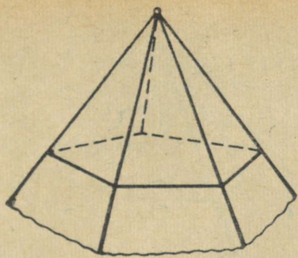
1. **Ruuminurga mõiste.** Kui kolme tasapinna lõikesirged läbivad ühist punkti, siis tekib selle punkti juures kaheksa k o l m e t a h u l i s t n u r k a (joon. 124).



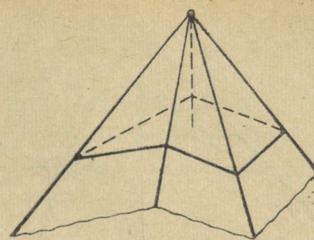
Joon. 124.

Ühes punktis võib lõikuda ka enam kui kolm tasapinda — üldiselt n tasapinda. Kujundeid, mis tekivad tasapindade lõikumisel ühes punktis, nimetatakse **ruuminurkadeks.** On lõikuvaid tasapindu näiteks viis, siis tekib viietahuline nurk (joon. 125). Ruuminurga igal tahul asub kaks nurga serva, millede vahel on ruuminurga üks **tasanurk.** On selge, et n-tahulisel nurgal on n serva ja n tasanurka.

Kui ruuminurga lõikumisel tasapinnaga, mis lõikab kõiki servi, saadakse kumer hulknurk, nagu joonisel 25, siis nimetatakse ruuminurka k u m e r a k s. Kumera ruuminurga ühegi tahu tasapind ei lõika seda nurka; mittekumera ruuminurga mõne tahu tasapind aga lõikab seda nurka (joon. 126).



Joon. 125.



Joon. 126.

2. **Teoreem kolmetahulise nurga tasanurkadest.**

Kolmetahulise nurga iga tasanurk on väiksem kui kahe ülejäänud tasanurga summa.

Olgu kolmetahulise nurga $Oabc$ tasanurkadest nurk ab kõige suurem (joon. 127); tõestame, et

$$\angle ab < \angle ac + \angle cb.$$

Kui see väide on õige kõige suurema tasanurga kohta, siis on ta kindlasti õige ka teiste tasanurkade kohta.

Tõestuseks joonestame tipust O tahul ab kiire d nii, et $\angle ad = \angle ac$, ja võtame kiirtel c ja d vastavalt punktid C ja D nii, et $OC = OD$. Lõikame nüüd kolmetahulist nurka tasapinnaga, mis läheb läbi punktide D ja C ning lõikab servi a ja b. Lõige on kolmnurk ABC. Selles

$$AD + DB < AC + CB.$$

Et kolmnurkadel AOD ja AOC peale ühise külje AO on veel üks paar võrdseid külgi, nimelt $OD = OC$, ning ühed nurgad on võrdsed, nimelt $\angle AOD = \angle AOC$, siis on need kolmnurgad võrdsed; seega ka nende kolmandad küljed on võrdsed:

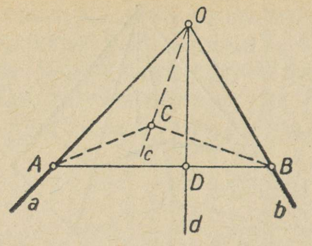
$$AD = AC.$$

Lahutades ülalsaadud võrratuse pooltest võrdsed liikmed AD ja AC, leiame, et

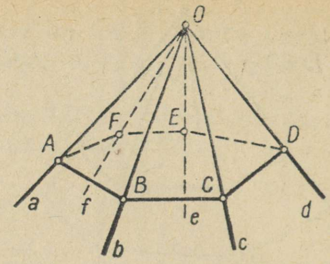
$$DB < CB.$$

Edasi vaatleme kolmnurki DOB ja COB. Neil on peale ühise külje BO veel üks paar võrdseid külgi, aga kolmandad küljed DB ja CB ei ole võrdsed. Teatavasti kahe võrdse küljepaariga kolmnurgas suurema külje vastas on suurem nurk, seega

$$\angle db < \angle cb.$$



Joon. 127.



Joon. 128.

Liites selle võrratuse vasaku poolega nurga ad ja parema poolega niisama suure nurga ac, saame

$$\angle ad + \angle db < \angle ac + \angle cb$$

ehk

$$\angle ab < \angle ac + \angle cb,$$

mida oligi tarvis tõestada.

Järeldus. **Kolmetahulise nurga iga tasanurk on suurem kui kahe ülejäänud tasanurga vahe,**

sest kui $\angle ab < \angle ac + \angle cb$, siis $\angle ab - \angle ac < \angle cb$.

3. **Teoreem ruuminurga tasanurkade summast.**

Kumera ruuminurga tasanurkade summa on väiksem kui täispööre.

Olgu $Oabcdef$ mingi kumer ruuminurk. Tõestame, et

$$\angle ab + \angle bc + \angle cd + \ldots + \angle fa < 360^\circ.$$

Tõestuseks lõikame ruuminurka mingi tasapinnaga. Lõige on kumer hulknurk $ABCDEF$ (joon. 128). Selle iga tipu juures leidub kolmetahuline nurk, mis asub püramiidi $OABCDEF$ sees. Et kolmetahulise nurga iga tasanurk on väiksem kui kahe ülejäänud tasanurga summa, siis tipu A juures

$$\angle FAB < \angle FAO + \angle OAB,$$

tipu B juures

$$\angle ABC < \angle ABO + \angle OBC \text{ jne.},$$

lõpuks tipu F juures

$$\angle EFA < \angle EFO + \angle OFA.$$

Nende võrratuste vasakute poolte summa on hulknurga $ABCDEF$ sisenurkade summa, seega $(n-2)\cdot 180°$, kus n on hulknurga tippude arv. Võrratuste paremate poolte summa on kolmnurkade OAB, OBC, ..., OFA sisenurkade summa ilma tipu O juures olevate nurkade summata. Tähistame viimase summa tähega x; siis võrratuste poolte liitmisel saame, et

$$(n-2)\cdot 180° < n\cdot 180° - x$$

ehk

$$x + n\cdot 180° - 360° < n\cdot 180°$$

ehk

$$x < 360°.$$

Et x on antud ruuminurga tasanurkade summa, siis on teoreem tõestatud.

Kaks ruuminurka on võrdsed, kui neid saab teineteise sisse mahutada nii, et kõik ühe ruuminurga servad ühtivad teise vastavate servadega. Võrdsete ruuminurkade kõik tasanurgad ja kõik kahetahulised nurgad on vastavalt võrdsed ja ühteviisi asetatud.

Ülesandeid.

234. Kolmetahulise nurga üks tasanurk on 75° ja teine 126°. Missugustes piirides on kolmnurga tasanurga suurus?

235. Kolmetahulise nurga $Oabc$ serval a on antud punkt P, serval b punkt Q ja tahul ac punkt R. Esita joonisel kolmetahulise nurga lõige tasapinnaga PQR.

236. Kolmetahulise nurga $Oabc$ serval a on antud punkt P, tahul ab punkt Q ja tahul ac punkt R. Esita joonisel kolmetahulise nurga lõige tasapinnaga PQR.

237. Kolmetahuline nurk $Oabc$ on lõigatud kahe tasapinnaga, milledest üks lõikab servi a, b ja c vastavalt punktides A, B ja C, teine vastavalt punktides K, L ja M. Esita joonisel tasapindade ABC ja KLM lõikejoon.

238. Mitu kahetahulist ja mitu kolmetahulist nurka on kuubil? Kui suur on kuubi kolmetahulise nurga tasanurkade summa?

239. Kolmetahulise nurga kaks tasanurka on 45° ja nende kahe tahu vaheline nurk on täisnurk. Kui suur on kolmas tasanurk?

Näpunäide. Joonesta antud kahetahulise nurga joonnurk ja uuri tekkinud kolmnurki.

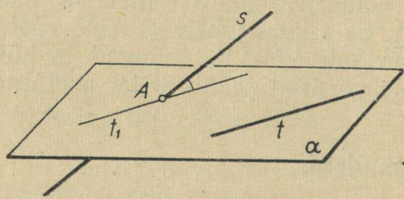
240. Kolmetahulise nurga kaks tasanurka on mõlemad 30° ja nende kahe tahu vaheline nurk on täisnurk. Kui suur on kolmas tasanurk?

241. Kolmetahulise nurga kõik tasanurgad on 60°. Arvuta kahetahuliste nurkade suurused.

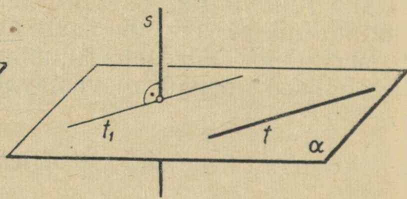
Lõigaku sirge s tasapinda α punktis A (joon. 129). Võtame tasapinnal α mingi sirge t ja leiame sirgete s ja t vahelise nurga $\angle st$. Kui sirge t ei läbi punkti A, siis sirged s ja t on kiivsirged ja nendevahelise nurga leidmiseks võtame läbi punkti A sirge $t_1 \| t$ (§ 30, 2).

Kui $\angle st$ on täisnurk ja jääb täisnurgaks ka sirge t mistahes asendi puhul tasapinnal α, siis ütleme, et tasapind α ja sirge s on teineteisega risti (joon. 130). Tasapinnaga ristuvat sirget nimetatakse ka tasapinna normaaliks. Niisiis,

sirget nimetatakse tasapinna normaaliks, kui ta on risti kõigi selle tasapinna sirgetega.



Joon. 129.



Joon. 130.

Sirget, mis tasapinda lõikab, kuid ei ole sellega risti, nimetatakse selle tasapinna suhtes **kaldsirgeks.**

Tasapinna normaali olemasolu selgub järgmisest teoreemist, mida nimetatakse ka sirge ja tasapinna ristseisu tunnuseks.

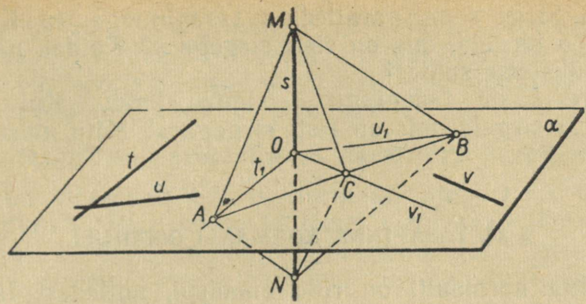
Kui tasapinda lõikav sirge on risti selle tasapinna kahe lõikuva sirge, siis see sirge on tasapinna normaal.

Eeldus. $s \perp t$; $s \perp u$; $t \times u$; $tu \equiv \alpha$ (joon. 131).

Väide. $s \perp \alpha$.

Tõestus. Sirge s ristumiseks tasapinnaga α on antud definitsiooni järgi tarvis, et sirge s ristuks iga sirgega, mis asetseb tasapinnal α. Tõestamiseks võtame seepärast tasapinnal α mistahes kolmanda sirge v ja näitame, et $s \perp v$. Kui sirge v ei läbi punkti $O \equiv s \times \alpha$, siis võtame läbi punkti O sirge $v_1 \| v$ ja näitame, et $s \perp v_1$. Sellest järeldub siis, et $s \perp v$. Kui sirged t ja u ei läbi punkti O, siis võtame läbi punkti O sirged t_1 ja u_1 nii, et $t_1 \| t$ ja $u_1 \| u$. Eeldusest järeldub, et siis $s \perp t_1$ ja $s \perp u_1$. Edasi täiendame joonist veel järgmiselt:

1) märgime sirgel s punktid M ja N nii, et $OM = ON$;



Joon. 131.

2) võtame sirgetel t_1 ja u_1 punktid A ja B nii, et sirge AB lõikab sirget v_1; tähistame lõikepunkti tähega C;

3) ühendame punktid A, B ja C punktidega M ja N.

Nii saadud kolmnurkadest on

$$\triangle OAM = \triangle OAN \text{ ja } \triangle OBM = \triangle OBN,$$

millest järeldub, et

$$AM = AN \text{ ja } BM = BN.$$

Kuid siis

$$\triangle ABM = \triangle ABN,$$

sest ühe kolmnurga küljed on vastavalt võrdsed teise kolmnurga külgedega. Sellest näeme, et $\angle CBM = \angle CBN$. Võrreldes nüüd kolmnurki CBM ja CBN, selgub, et ka need on võrdsed, millest omakorda järeldub, et $CM = CN$. Kuid siis kolmnurk MNC on võrdhaarne ja tema aluse MN mediaan CO on risti alusega; niisiis, $s \perp v_1$ ja seega $s \perp v$.

Et sirge s on eelduse järgi risti tasapinna α kahe lõikuva sirgega t ja u ning tõestuse järgi risti ka mistahes kolmanda sirgega; järelikult s on tasapinna α normaal.

Ülesandeid.

242. Põhjenda väidet, et kahetahulise nurga serv on risti tema joonnurga tasapinnaga.

243. Teades, et risttahuka iga tahk on ristkülik, põhjenda väidet, et risttahuka iga serv on risti kahe tahuga.

244. Põhjenda väidet, et risttahuka lõige tasapinnaga, mis läbib tema kaht diagonaali, on ristkülik.

245. a) Risttahuka servade pikkused on 10 cm, 12 cm ja 16 cm. Arvuta risttahuka diagonaali pikkus.

b) Kuubi serva pikkus on a cm. Kui pikk on kuubi diagonaal?

246. a) Sirge s on paralleelne tasapinnaga α. Kas leidub tasapinnal α sirgeid, mis on risti sirgega s? Kuidas need sirged asetsevad üksteise suhtes?

b) Sirge s on tasapinna α suhtes kaldu. Kui palju on tasapinnal α sirgeid, mis on risti sirgega s? Mitu neist lõikuvad sirgega s?

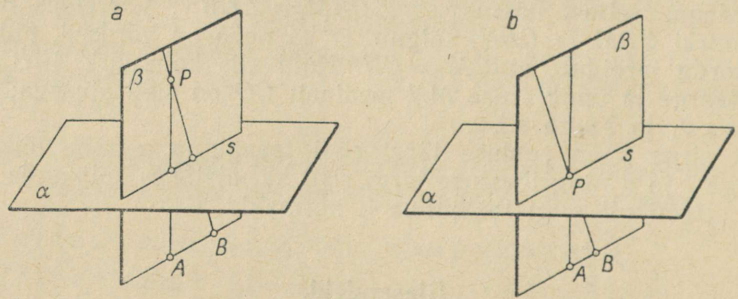
§ 34. TASAPINNA NORMAALI OMADUSI.

Tasapinna normaalil on rida omadusi, milledest tähtsamaid väljendavad järgmised teoreemid.

1. **Iga punkti läbib ainult üks sirge, mis on risti antud tasapinnaga.**

Tõepoolest, kui punkti P läbiks mitu sirget, mis on risti tasapinnaga α, näiteks sirged PA ja PB (joon. 132), siis nende kahe sirgega määratud tasapinnal β läheks läbi punkti P kaks sirget (PA ja PB), mis on mõlemad risti sirgega $s \equiv \alpha \times \beta$. Et see pole aga võimalik (nagu teame planimeetria kursusest), siis järelikult läbib punkti P ainult ü k s sirge, mis on risti tasapinnaga α.

Et tõestamisel polnud oluline, kas punkt P on tasapinnal α või väljaspool seda (joon. 132, b), siis on väide õige i g a punkti kohta.



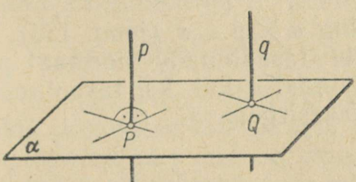
Joon. 132.

2. **Kui kahest paralleelist üks on risti mingi tasapinnaga, siis ka teine on risti selle tasapinnaga.**

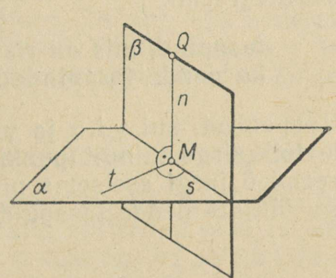
Tõestuseks vaatleme tasapinna α mistahes normaali p ja selle paralleeli q. Lõigaku need tasapinda α vastavalt punktides P ja Q (joon. 133). Joonestame tasapinnal α kaks sirget läbi punkti P ning kaks nendega vastavalt paralleelset sirget läbi punkti Q.

Siis sirge p on risti läbi punkti P joonestatud sirgetega, sest p on tasapinna α normaal. Et vastavalt paralleelsete haaradega nurgad on võrdsed, siis sirge q on risti läbi punkti Q joonestatud kahe sirgega tasapinnal α, järelikult $q \perp \alpha$.

3. **Kõik tasapinna normaalid on üksteisega paralleelsed,** sest kui p ja q on tasapinna α kaks normaali ning Q on teise normaali üks punkt, siis esimese teoreemi järgi saab läbi punkti Q minna ainult üks sirge, mis on risti tasapinnaga α, teise teoreemi järgi aga on selleks sirge p paralleel läbi punkti Q, seega $p \parallel q$ (joon. 133).



Joon. 133.



Joon. 134.

4. **Tasapinna normaali läbiv tasapind on risti esimese tasapinnaga.**

Tõestuseks vaatleme tasapinna α normaali n läbiva tasapinna β ja tasapinna α vahelise nurga joonnurka (joon. 134), mille tipuks on punkt $M = n \times \alpha$ lõikesirgel $s = \alpha \times \beta$. Selle joonnurga üheks haaraks on normaal n, sest normaali definitsiooni järgi on $n \perp s$. Kuid samal põhjusel on n risti ka joonnurga teise haaraga t; seega

$$\angle nt = 90^\circ, \text{ s. t. } \beta \perp \alpha.$$

5. Viimasest teoreemist järeldub, et

tasapind, mis on risti kahe lõikuva tasapinnaga, on risti ka nende tasapindade lõikesirgega.

Tõepoolest, kui tasapind γ on risti tasapindade α ja β lõikesirgega s (joon. 135), s. t. sirge s on tasapinna γ normaal, siis seda normaali läbivad tasapinnad α ja β on viimase teoreemi järgi risti tasapinnaga γ.

6. **Kui ühel kahest ristuvast tasapinnast on võetud punkt ja sellest on tõmmatud teise tasapinna normaal, siis see normaal asetseb esimesel tasapinnal.**

Tõestuseks eeldame, et tasapinnad α ja β ristuvad (joon. 134) ning ühel neist, näiteks tasapinnal β, on võetud punkt Q. Viimasest tõmbame tasapinnal β sirge n risti tasapindade α ja β lõikesirgega s. Punktist $M \equiv n \times s$ tõmbame tasapinnal α sirge t risti sirgega s. Siis $n \perp t$, sest $\angle nt$ on ristuvate tasapindade α ja β vahelise nurga joonnurk. Et ühtlasi $n \perp s$, siis n on tasapinna α normaal, sest ta on risti tasapinna α kahe lõikuva sirgega s ja t. Et punktist Q saab tasapinnale α tõmmata ainult ü h e normaali ning selleks osutus meie poolt tasapinnal β tõmmatud sirge n, siis ongi tõestatud, et normaal n asetseb tasapinnal β.

7. Viimati tõestatud teoreem võimaldab tõestada teoreemi 5 pöördteoreemi:

tasapind, mis on risti kahe lõikuva tasapinnaga, on risti ka nende tasapindade lõikesirgega.

Tõepoolest, kui $\gamma \perp \alpha$ ja $\gamma \perp \beta$ ning $\alpha \times \beta \equiv s$ (joon. 135), siis selle lõikesirge mingit punkti läbiv tasapinna γ normaal peab teoreemi 6 järgi asetsema nii tasapinnal α kui ka tasapinnal β, seega ühtima nende tasapindade lõikesirgega s.

Ülesandeid.

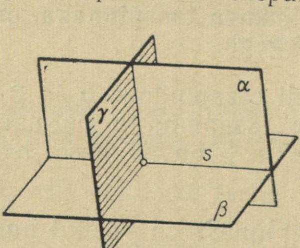
247. Kaks võrdset võrdkülgset kolmnurka küljepikkusega a asetsevad nii, et neil on üks külg ühine ning kolmnurkade tasapinnad ristuvad. Avalda mitteühiste tippude vaheline kaugus.

248. Põhjenda väidet, et kahetahulise nurga joonnurga tasapind on risti kahetahulise nurga tahkudega.

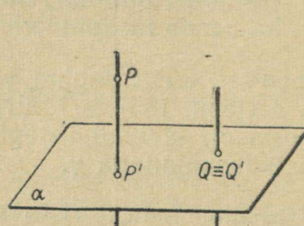
249. Tõesta, et antud punktist paralleelsetele tasapindadele tõmmatud normaalid ühtivad.

§ 35. PUNKTI JA SIRGE RISTPROJEKTSIOON.

1. **Punkti ristprojektsioon.** Punkti P ristprojektsiooniks tasapinnal α nimetatakse punktist P tasapinnale α tõmmatud normaali ja tasapinna α lõikepunkti (punkti P' joonisel 136).



Joon. 135.



Joon. 136.

Punkt, mis ise on tasapinnal (ekraanil, projektsioonipinnal), ühtib oma ristprojektsiooniga sellel tasapinnal (punkt Q joonisel 136).

Punkti ja tema ristprojektsiooni vahelist kaugust nimetatakse **punkti kauguseks tasapinnast**. Niisiis, punkti kaugust tasapinnast tuleb mõõta mööda tasapinna normaali.

2. Sirgjoone ristprojektsioon.

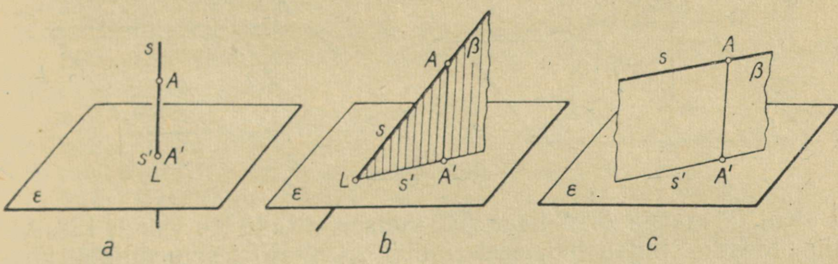
Sirgjoone ristprojektsiooniks tasapinnal nimetatakse sirgjoone punktide ristprojektsioonide kogumit sellel tasapinnal.

Kui sirge s on risti ekraaniga ε (joon. 137, a), siis selle sirge mistahes punkti A läbiv ekraani normaal ühtib sirgega s ning seetõttu sirge kõigi punktide ristprojektsioonid ühtivad sirge ja ekraani lõikepunktiga L; järelikult

ekraaniga ristuva sirge ristprojektsiooniks on punkt.

Kui sirge s pole risti ekraaniga ε (joon. 137, b, c), siis tema punkte projekteerivad ekraani normaalid asetsevad ühel ja samal tasapinnal β, mis on risti ekraaniga ε. See nn. **projekteeriv** tasapind β on määratud sirgega s ja tema mingit punkti projekteeriva normaaliga, näiteks normaaliga AA'. Sirge s kõigi punktide ristprojektsioonid ekraanil ε asetsevad tasapindade β ja ε lõikesirgel s'; järelikult

ekraaniga mitteristuva sirge ristprojektsioon on sirge.



Joon. 137.

Ekraaniga mitteristuv sirge s ja tema ristprojektsioon s' on ühel ja samal tasapinnal β ning järelikult nad kas lõikuvad või on paralleelsed. Esimesel juhul on sirge ekraani suhtes kaldu (joon. 137, b), teisel juhul paralleelne (joon. 137, c).

Ekraaniga paralleelne sirge on paralleelne oma ristprojektsiooniga.

sest nende lõikumise korral antud sirge lõikuks ekraaniga (joon. 137, c).

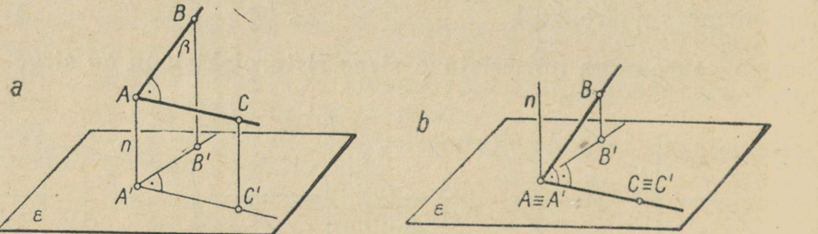
3. Teoreem täisnurga ristprojektsioonist.

Täisnurga ristprojektsiooniks võib sõltuvalt haarade asendist ekraani suhtes tulla kas kiir, sirgnurk, teravnurk, nürinurk või täisnurk. Praktika seisukohalt on tähtis silmas pidada just viimast juhtumit.

Tõestame järgmise teoreemi:

kui täisnurga üks haar asetseb ekraanil või on sellega paralleelne ja teine haar pole ekraaniga risti, siis täisnurga ristprojektsioon on jälle täisnurk.

Tõestus. Olgu $\angle BAC$ täisnurk, mille haar AC on paralleelne ekraaniga ε ja haar AB pole risti selle ekraaniga (joon. 138, a). Tähistame punktide A, B ja C ristprojektsioone tasapinnal ε vastavalt A', B' ja C'. Siis sirged AC ja $A'C'$ on paralleelsed kui ekraaniga paralleelne sirge ja tema ristprojektsioon. Sellest järeldub, et kiivsirged $A'C'$ ja AB on teineteisega risti, sest nendevaheline nurk võrdub täisnurgaga BAC (§ 30, 2). Ühtlasi sirge $A'C'$ on risti tasapinna ε normaaliga $n \equiv A'A$, mis lõikab sirget AB. Kuid siis on $A'C'$ risti tasapinnaga $\beta \equiv BAA'$ (§ 33), seega risti ka sirgega $A'B' \subset \beta$. Sellest nähtubki, et antud täisnurga ristprojektsioon $\angle B'A'C'$ on täisnurk.



Joon. 138.

Kui täisnurga BAC haar AC asetseb ekraanil ε (joon. 138, b), siis tõestus lihtsustub, sest nüüd $AC \equiv A'C'$ ja endiste kiivsirgete AB ja $A'C'$ vaheline nurk asendub antud nurgaga BAC. Samal viisil saab tõestada, et

kui nurga ristprojektsioon on täisnurk ja tema üks haar asetseb ekraanil või on sellega paralleelne, siis see nurk on täisnurk.

4. Lõigu ristprojektsioon.

Kaldsirge ja tema ristprojektsiooni vahelist teravnurka nimetatakse sirge ja ekraani vaheliseks nurgaks ehk sirge k a l d e n u r g a k s (ekraani suhtes).

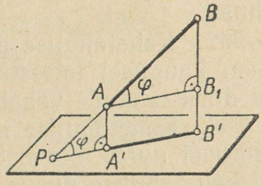
Tähistame sirge s kaldenurga, s. o. nurga APA' joonisel 139 tähega φ. Kolmnurgast APA' saame siis, et

$$A'P = AP \cdot \cos \varphi$$

ehk

lõigu ristprojektsiooni pikkus võrdub lõigu pikkuse ja tema kaldenurga koosinuse korrutisega.

See seos kehtib ka siis, kui lõigu mõlemad otspunktid on väljaspool projektsioonipinda, nagu lõigul AB joonisel 139. See selgub, kui läbi lõigu ühe otspunkti A tõmbame lõigu projektsioonile paralleeli AB_1. Seega üldiselt lõigu AB ristprojektsioon $A'B' = AB \cdot \cos \varphi$.



Joon. 139.

Kui $\varphi = 0$, siis $A'B' = AB$, s. t.

ekraaniga paralleelne lõik on võrdne oma ristprojektsiooniga.

Ülesandeid.

250. Joonesta kuubi diagonaali ja tahu vaheline nurk loomulikus suuruses. Kui suur on see nurk?

251. Risttahuka mõõtmed on 7 cm, 4 cm ja 5 cm. Kui suur on nurk risttahuka diagonaali ja kõige väiksema tahu vahel?

252. Kui suur on nurk kuubi diagonaali ja selle otspunktist lähtuva serva vahel?

253. Punktist väljaspool tasapinda on tasapinnani tõmmatud kaldlõik, mille pikkus on 35 cm; lõigu ristprojektsiooni pikkus on 12 cm. Kui suur on lõigu kaldenurk tasapinna suhtes?

254. Kaldlõigu pikkus on 13,4 m; lõigu kaldenurk tasapinna suhtes on 63°36′. Arvuta lõigu ristprojektsiooni pikkus.

255. Punktist, mille kaugus tasapinnast on 12 cm, on tõmmatud tasapinnani 20 cm pikkune kaldlõik. Leia kaldlõigu ristprojektsiooni pikkus ja kaldenurga suurus.

256. Lõigu otspunktid on tasapinnast 3 dm ja 6,3 dm kaugusel. Leia lõigu ristprojektsiooni pikkus, kui lõigu pikkus on 6,5 dm.

257. Lõiku pikkusega 20 cm lõikab tasapind nii, et lõigu otspunktid on tasapinnast 4 cm ja 6 cm kaugusel. Kui suur on lõigu ja tasapinna vaheline nurk?

258. Ruudu külje pikkus on 20 cm. Ruudu keskpunktist O on püstitatud 15 cm pikkune lõik OP risti ruudu tasapinnaga. Punkt P on ühendatud ruudu külje keskpunktiga C. Arvuta lõigu PC kaldenurk ruudu tasapinna suhtes.

259. Täisnurkses kolmnurgas kaateti a lähisnurk $\beta = 36°48'$. Kaatet a on tasapinnal α ja kaatet b moodustab tasapinnaga α nurga $52°44'$. Arvuta hüpotenuusi kaldenurk tasapinna α suhtes.

260. Punktist A nähakse torni olevat põhja suunas; ta tipp paistab kõrgusnurgas $17°$. Liikudes 70 m võrra ida poole — punkti B, nähakse torni nihkununa $40°$ võrra põhjast lääne poole. Arvuta torni kõrgus.

261. Määra kahetahulise nurga suurus, kui punkt, mis asetseb ühel tahul, on nurga servast 2 korda kaugemal kui teisest tahust.

262. Kahetahulise nurga ühel tahul on võetud punkt, mis on a cm kaugusel teisest tahust. Leia selle punkti kaugus servast, kui nurk tahkude vahel on $45°$.

263. Kahetahulise nurga ühel tahul on võetud punkt 25 cm kaugusel nurga servast. Kui kaugel on see punkt teisest tahust, kui kahetahulise nurga suurus on $50°$?

264. Tõesta, et punktist väljaspool tasapinda selle tasapinnani tõmmatud võrdsetel kaldlõikudel on võrdsed ristprojektsioonid ja võrdsed kaldenurgad.

265. Kaks võrdset võrdhaarset kolmnurka, mille alus on a ja tipunurk on $40°$, asetsevad nii, et nende alused ühtivad ja aluste vastastippude vaheline kaugus on samuti a. Kui suur on kolmnurkade tasapindade vaheline nurk?

266. Võrdkülgse kolmnurga üks külg asetseb tasapinnal ja teine moodustab tasapinnaga nurga $\frac{\pi}{4}$. Kui suure nurga moodustab kolmnurk selle tasapinnaga?

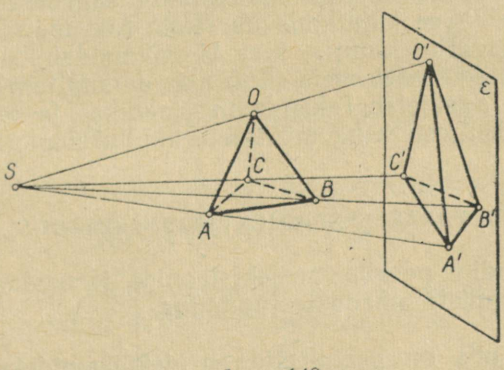
IV. RUUMIKUJUNDITE PARALLEEL-PROJEKTSIOONID.

§ 36. TSENTRAALPROJEKTSIOON JA PARALLEELPROJEKTSIOON.

Mingist ruumikujundist tasapinnalise kujutise saamiseks tuleb joonestada selle kujundi projektsioon tasapinnal, mis on võetud projektsioonipinnaks ehk ekraaniks.

Sõltuvalt kujutamiskiirte vastastikusest asendist eristatakse kahesuguseid projektsioone, nimelt t s e n t r a a l p r o j e k t s i o o n e ja p a r a l l e e l p r o j e k t s i o o n e.

Tsentraalprojektsiooniks nimetatakse kujundi projektsiooni juhul, kui kujutamiskiired lähtuvad ühest punktist.



Joon. 140.

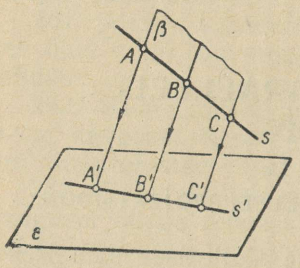
Joonis 140 kujutab kolmnurkse püramiidi $OABC$ tsentraalprojektsiooni $O'A'B'C'$ tekkimist ekraanile ε. Projekteerivad kiired SA, SB,... väljuvad siin ühest ja samast punktist S, mida nimetatakse **silmapunktiks.**

Kui silmapunkt S on lõpmata kaugel esemest ja ekraanist, siis kujutamiskiired on omavahel paralleelsed.

Projektsiooni, mis saadakse paralleelsete kujutamiskiirtega nimetatakse paralleelprojektsiooniks.

Näitame, et nii tsentraal- kui ka paralleelprojektsioonis

sirgjoone kujutis on üldiselt sirge, erijuhul aga punkt.



Joon. 141.

Kujutamiskiired AA', BB', CC', mis läbivad sirge s punkte A, B, C, kas väljuvad kõik ühest punktist või on paralleelsed (joon. 141). Nii ühel kui teisel juhul asetsevad nad kõik ühel ja samal tasapinnal β, s. t. sirge s kujutamiskiirte tasapinnal, mis on määratud sirgega s ja ühe kiirega, näiteks kiirega AA'. Sirge s kujutiseks ekraanil ε on tasapindade β ja ε lõikejoon s', mis teatavasti on sirge.

Kui sirge s ühtib ühe kujutamiskiirega, siis selle kiire ja ekraani lõikepunkt on sirge kõigi punktide kujutiseks.

Et päikesekiired on Päikese väga suure kauguse tõttu praktiliselt paralleelsed, siis võib nende poolt mingil tasapinnal tekitatud varjusid lugeda paralleelprojektsioonideks. Seevastu on fotograafilised ülesvõtted tsentraalprojektsioonid. Tsentraalprojektsioonis tehtud kujutist nimetatakse sagedasti ka p e r s p e k t i i v i k s[1]. See kujutamisviis leiab rakendamist peamiselt maalikunstis ja arhitektuuris, sest ta võimaldab kujutada esemeid nii, nagu neid näeb meie silm. Kehade kujutamine paralleelprojektsioonis aga leiab rakendamist tehnikas ja teaduses, sest ta võimaldab kergesti keha mõõtmete kindlakstegemist.

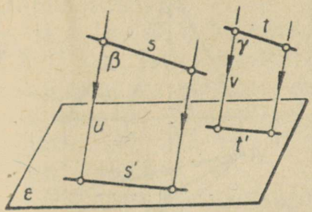
§ 37. PARALLEELPROJEKTSIOONI OMADUSI.

Ruumikujundite paralleelprojektsioonide joonestamist kergendab nende järgmiste omaduste tundmine.

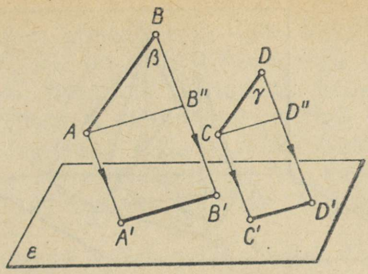
1) **Sirged, mis on paralleelide projektsioonideks, on paralleelsed.**

Paralleelsete sirgete s ja t kujutamiskiirte tasapinnad β ja γ on paralleelsed, sest sirge s ja teda lõikav mingi kujutamiskiir u tasapinnal β on vastavalt paralleelsed sirgega t ja teda lõikava mingi kujutamiskiirega v tasapinnal γ (joon. 142). Paralleelsete

[1] *perspicere* (lad.) — läbi vaatama.



Joon. 142.



Joon. 143.

tasapindade β ja γ lõikamisel tasapinnaga ε tekivad paralleelsed lõikesirged s' ja t', mis ongi sirgete s ja t kujutiseks.

2) **Paralleelsed sirglõigud on võrdelised oma paralleelprojektsioonidega.**

Olgu $A'B'$ ja $C'D'$ paralleelsete lõikude AB ja CD kujutised tasapinnal ε (joon. 143). Võtame kiirel BB' punkti B'' nii, et $AB'' \parallel A'B'$, ja kiirel DD' punkti D'' nii, et $CD'' \parallel D'C'$. Et eelmise teoreemi järgi $A'B' \parallel C'D'$, siis ka $AB'' \parallel CD''$; seega kolmnurga ABB'' kõik küljed on vastavalt paralleelsed kolmnurga CDD'' külgedega. Kuid siis nende kolmnurkade nurgad on vastavalt võrdsed (§ 30) ning kolmnurgad ise sarnased; seetõttu

$$AB : AB'' = CD : CD''.$$

Et nelinurgad $AB''B'A'$ ja $CD''D'C'$ on rööpkülikud, siis

$$AB'' = A'B' \text{ ja } CD'' = C'D'.$$

Neid võrdusi eespool leitud võrdes arvestades saamegi, et

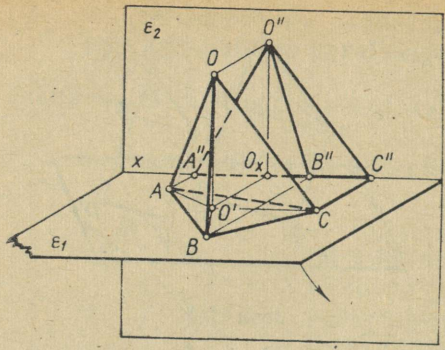
$$AB : A'B' = CD : C'D'.$$

Erijuhtumil, kui $AB \parallel \varepsilon$, nelinurk $ABB'A'$ osutub rööpkülikuks ning siis $A'B' = AB$ ja $A'B' \parallel AB$. Sellega oleme tõestanud, et

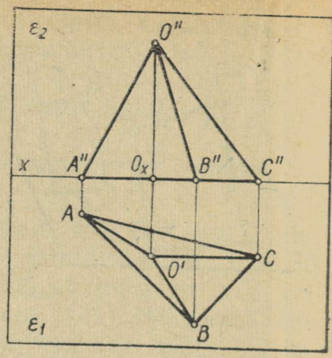
3) **ekraaniga paralleelne lõik on võrdne ja paralleelne oma paralleelprojektsiooniga.**

§ 38. RISTPROJEKTSIOON KAHEL TASAPINNAL.

Kõige lihtsam paralleelprojektsioon on ristprojektsioon, s. o. projektsioon, mille tekitavad ekraaniga ristuvad kujutamiskiired. Et keha ristprojektsioon ühelainsal tasapinnal ei anna igakord



Joon. 144.



Joon. 145.

küllalt selget kujutlust kehast, siis projekteeritakse ta kahele teineteise suhtes risti seisvale tasapinnale. Harilikult võetakse esimeseks tasapinnaks rõhttasapind (ε_1 joonisel 144) ja teiseks tasapinnaks püsttasapind (ε_2 joonisel 144). Neid tasapindu nimetatakse vastavalt **põhiekraaniks** ja **esiekraaniks** ning neil saadavaid eseme kujutisi vastavalt **põhivaateks** ja **esivaateks**. Joonisel 144 näeme püramiidi $OABC$, mis oma põhjaga ABC toetub põhiekraanile. Selle püramiidi põhivaade on $O'ABC$ ja esivaade $O''A''B''C''$.

Harilikult esitatakse need kaks ristprojektsiooni ühel ja samal jooniselehel teatavas kindlas vastastikuses asetuses. Niisuguse asetuse saame, kui põhiekraani ε_1 pöörame ümber ekraanide lõikesirge x noolega näidatud suunas 90° võrra (joon. 144). Nii satuvad eseme mõlemad vaated ühele ja samale tasapinnale, nagu näha jooniselt 145. Saadud joonist nimetatakse kujutatava eseme **kaksvaateks**. Ekraanide lõikesirget x nimetatakse **kaksvaate teljeks**.

§ 39. PUNKTI KAKSVAADE.

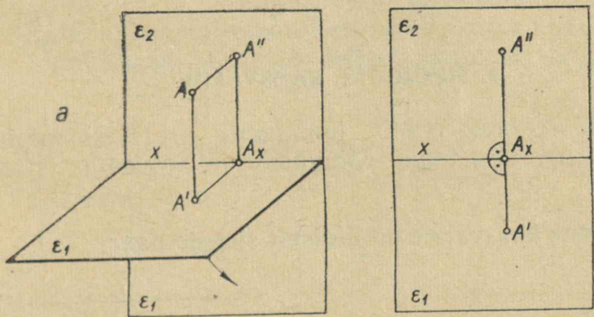
Punkti asukoht ruumis on määratud tema kahe ristprojektsiooniga: punkt asetseb seal, kus lõikuvad põhiekraani normaal läbi punkti põhivaate ja esiekraani normaal läbi punkti esivaate. Näiteks joonisel 144 kujutatud punkt O asetseb seal, kus lõikuvad põhiekraani normaal $O'O$ ja esiekraani normaal $O''O$. Täheldatud asjaolu tõttu vaatlemegi kujundite projektsioone ainult kahel ristuval tasapinnal.

Kui põhiekraan ε_1 on pööratud esiekraanile ε_2 (joon. 146), siis

punkti kaht ristprojektsiooni läbiv sirge on risti kaksvaate teljega.

Tõestus. Tasapind, mis läbib punkti A ja selle kaht ristprojektsiooni A' ja A'' (joon. 146, a), on risti ekraanidega ε_1 ja ε_2, sest ta läbib kummagi ekraani normaali. Kuid siis tasapind $AA'A''$ on risti ekraanide lõikesirgega x, mistõttu x on risti selle tasapinna iga sirgega, seega ka sirgetega $A'A_x$ ja $A''A_x$. Seetõttu tasapinna ε_1 pööramisel ümber x-telje tasapinnale ε_2 satuvad punktid A', A_x ja A'' ühele sirgele, mis on risti teljega x (joon. 146, b).

Viimane joonis kujutab punkti A kaksvaadet. Sellel esinev sirge $A'A''$ on punkti kaksvaate sidejoon. Tõestatud teoreemi järgi punkti kaksvaate sidejoon on risti kaksvaate teljega. Ümberpöördult, iga punktipaar, mille ühendussirge on risti kaksvaate teljega, kujutab üht ruumipunkti.



Joon. 146.

Joonise 146 abil on kerge veenduda, et

punkti põhivaate kaugus teljest võrdub punkti kaugusega esiekraanist ning esivaate kaugus teljest võrdub punkti kaugusega põhiekraanist:

$$A'A_x = AA''; \quad A''A_x = AA'.$$

Kui punkt asetseb põhiekraanil, siis tema esivaade on kaksvaate teljel; kui punkt asetseb esiekraanil, siis tema põhivaade on samuti kaksvaate teljel.

Ülesandeid.

267. Kus asetseb kaksvaatel punkti põhivaade, kui punkt on

a) esiekraani ees,
b) esiekraani taga?

268. Kus asetseb kaksvaatel punkti esivaade, kui punkt on
a) põhiekraanist ülevalpool,
b) põhiekraanist allpool?

269. Kujuta kaksvaates punkt, mis asetseb
a) esiekraani ees, sellest 2 cm kaugusel, ja põhiekraanist ülevalpool, sellest 1,5 cm kaugusel;
b) esiekraani taga, sellest 1 cm kaugusel, ja põhiekraanist ülevalpool, sellest 3 cm kaugusel.

270. Kujuta kaksvaates punkt, mis asetseb esiekraani taga, sellest 3 cm kaugusel, ja põhiekraanist allpool, sellest 4 cm kaugusel.

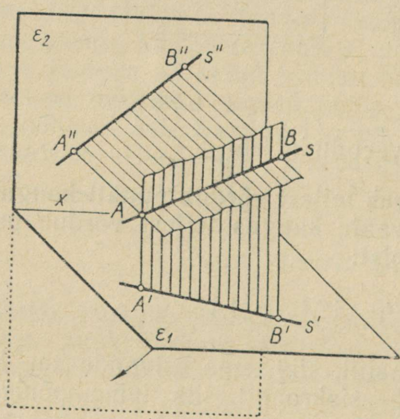
271. Kujuta kaksvaates esiekraanil asetsev punkt, mis on põhiekraanist 28 mm allpool.

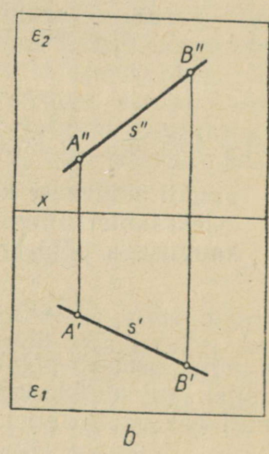
272. Kujuta kaksvaates põhiekraanil asetsev punkt, mis on esiekraani ees 25 mm kaugusel sellest.

§ 40. SIRGJOONE KAKSVAADE.

Kui sirge ei ole risti kummagi projektsioonipinnaga (joon. 147, a, b), siis tema põhivaade ja esivaade on sirged (§ 35). Seega

sirgjoone kaksvaade on üldiselt sirgete paar.





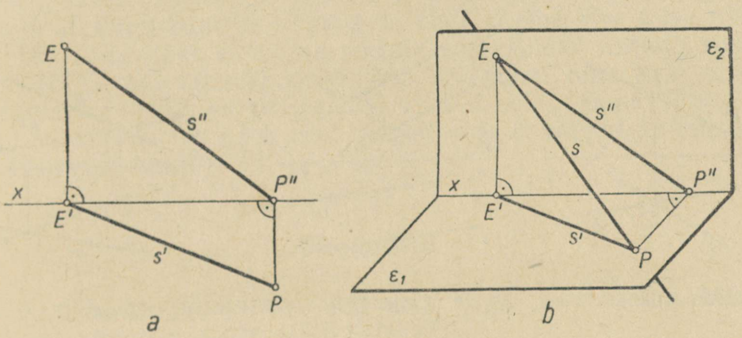
Joon. 147.

Sirgjoone kasvaade on määratud, kui on antud sirgjoone kahe punkti kaksvaated: joonestades ühe sirge läbi nende punktide põhivaadete ja teise läbi nende punktide esivaadete, saame neid punkte läbiva sirgjoone kaksvaate (joon. 147, b).

Kõige lihtsam on sirgjoone kaksvaadet määrata punktide abil, milledes sirge lõikab projektsioonipindu. Punkt P, kus sirge lõikab põhiekraani, on sirgjoone **põhijälg**, ja punkt E, kus sirge lõikab esiekraani, on sirgjoone **esijälg**. Et sirgjoone põhivaade on kaksvaate teljel, siis sirgjoone kaksvaate joonestamine tema põhijälje P ja esijälje E järgi toimub järgmiselt (joon. 148, a, b): punktidest P ja E joonestame ristlõigud kaksvaate teljele, leides nii põhijälje esivaate P'' ja esijälje põhivaate E'; sirge PE' on sirgjoone põhivaade ja EP'' on sirgjoone esivaade.

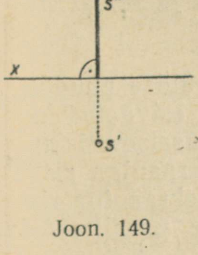
Kui sirge on risti ühe projektsioonipinnaga, näiteks põhiekraaniga, siis tema projektsioon sellel ekraanil on punkt (§ 35); sama sirge projektsioon teisel ekraanil on risti teljega (joon. 149), sest vastasel juhul sirge mistahes punkti põhi- ja esivaadet läbiv sirge ei oleks risti teljega, nagu see peab olema (§ 39). Seega

projektsioonipinnaga ristuva sirgjoone kaksvaade koosneb punktist ja kaksvaate teljega ristuvast sirgest.

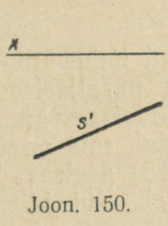


Joon. 148.

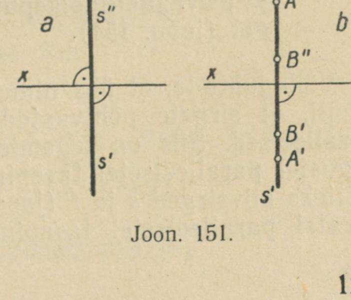
Kui sirge on paralleelne ühe ekraaniga ning pole seejuures risti teise ekraaniga, siis tema projektsioon teisel ekraanil on paralleelne teljega.



Joon. 149.



Joon. 150.



Joon. 151.

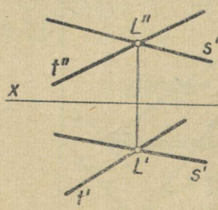
Näiteks põhiekraaniga paralleelse sirge kõik punktid on põhiekraanist võrdsetel kaugustel ning seetõttu nende esivaated tulevad samale kaugusele teljest (joon. 150; $s'' \parallel x$). Kehtib ka pöördteoreem (sõnasta see!); selle põhjal näiteks joonisel 150 kujutatud sirge s on paralleelne põhiekraaniga, sest tema esivaade $s'' \parallel x$.

Kui sirge asetseb x-telje risttasapinnal, kuid pole risti kummagi ekraaniga, siis tema esivaade ja põhivaade langevad ühte; niisuguse sirge kaksvaateks on teljega ristuv sirge (joon. 151). Sellise sirge asend ruumis pole kaksvaatega määratud (joon. 151, a); määramiseks on vaja anda lisaks sirgjoone kahe punkti projektsioonid (joon. 151, b).

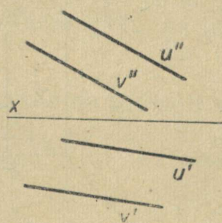
Vaatleme nüüd kahe sirge kaksvaateid.

Kui sirged lõikuvad, siis nende põhivaadete lõikepunkti ja esivaadete lõikepunkti ühendav sirge on risti kaksvaate teljega,

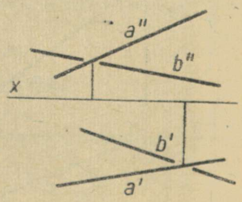
sest sirgete lõikepunkti L projektsioonid peavad andma punkti kaksvaate (joon. 152).



Joon. 152.



Joon. 153.



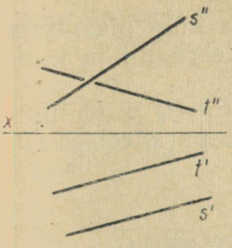
Joon. 154.

Kui sirged on paralleelsed, siis nende põhivaated on paralleelsed ja ka esivaated on paralleelsed,

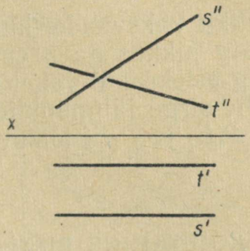
sest paralleelsete sirgete paralleelprojektsioonidena saadud sirged on paralleelsed (§ 37) (joon. 153).

Kui sirged on kiivsed, siis nende põhivaadete lõikepunkt ja esivaadete lõikepunkt ei asetse telje ühel ja samal sirgel (joon. 154).

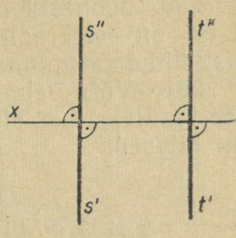
Võib juhtuda, et üks nimetatud lõikepunktidest üldse puudub, teisiti, et sirgete põhivaated on paralleelsed või esivaated on paralleelsed. Siis on tegemist kiivsirgetega, mis asetsevad niisugustel paralleelsetel tasapindadel, mis on ühe ekraaniga risti. Näiteks kiivsirged s ja t (joon. 155) asetsevad põhiekraaniga ristuvatel paralleelsetel tasapindadel. Kui kiivsirgete paralleelsed samanimelised projektsioonid on pealegi paralleelsed kaksvaate teljega, siis on mõlemad sirged ühe projektsioonipinnaga paralleelsed. Näiteks kiivsirged s ja t (joon. 156) on paralleelsed esiekraaniga, sest nende põhivaated on paralleelsed kaksvaate teljega.



Joon. 155.



Joon. 156.



Joon. 157.

Kui kahest sirgest üks asetseb ühel ja teine teisel x-telje risttasapinnal ning kumbki sirge pole risti ei ühe ega teise ekraaniga, siis kaksvaade ei määra sirgete vastastikust asendit ruumis (joon. 157), sest kumbki sirge jääb sel puhul oma kaksvaatega määramata (võrdle joonisega 151, a). Nii poleks õige joonise 157 alusel otsustada, et $s \parallel t$, sest sirged s ja t võivad ruumis olla ka kiivsirged, kuigi $s' \parallel t'$ ja $s'' \parallel t''$.

Ülesandeid.

273. Mis on põhipinnal asetseva sirge esivaateks? Mis on esipinnal asetseva sirge põhivaateks?

274. Võta vabalt sirgjoone kaksvaade ja leia sirge põhijälg ja esijälg.

275. Antud on sirge põhijälgpunkt P ja esijälgpunkt E. Joonesta sirgjoone kaksvaade.

276. Joonesta sirgjoone kaksvaade, kui

1) sirge on paralleelne põhiekraaniga;
2) sirge on paralleelne esiekraaniga;
3) sirge on paralleelne kaksvaate teljega.

Mida saab öelda nende sirgete jälgpunktidest?

277. Joonesta sirgjoone kaksvaade, kui

1) sirge on risti põhiekraaniga;
2) sirge on risti esiekraaniga;
3) sirge on risti kaksvaate teljega ning lõikab seda telge mingis antud punktis.

Mida saab öelda nende sirgete jälgpunktidest?

278. Joonesta nurga kaksvaade, kui

1) nurga üks haar on paralleelne põhiekraaniga;

2) nurga üks haar on paralleelne esiekraaniga;
3) nurga üks haar on paralleelne kaksvaate teljega.

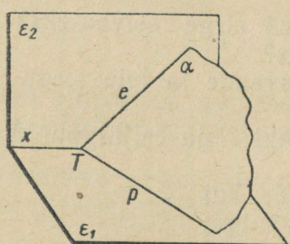
279. Joonesta ristküliku kaksvaade, kui
1) tema tasapind on paralleelne põhiekraaniga;
2) tema tasapind on paralleelne esiekraaniga, võttes kõik muud andmed vabalt.

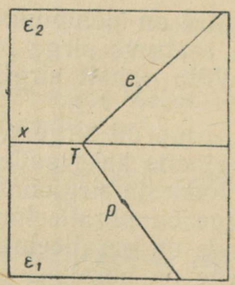
280. Joonesta ristküliku kaksvaade, kui tema külg pikkusega 4 cm on esiekraanil, külg pikkusega 3 cm põhiekraanil ja nurk ristküliku tasapinna ning esiekraani vahel on 45°.

281. Võta vabalt kahe sirge jälgpunktid P_1, E_1, P_2 ja E_2 ning tee kindlaks, kas sirged P_1E_1 ja P_2E_2 lõikuvad, on paralleelsed või on kiivsed.

§ 41. TASAPINNA KUJUTAMINE RISTPROJEKTSIOONIS.

Vastavalt tasapinna määramisviisidele saab tasapinda kujutada kas kolme punkti kaksvaatega või ühe punkti ja ühe sirgjoone kaksvaatega või kahe sirgjoone kaksvaatega. Sirgetena sobib kasutada tasapinna ja projektsioonipindade lõikejooni. Nii saab tasapinda kaksvaatel kujutada ainult kahe sirgjoone abil (joon. 158). Tasapinna lõikejoont põhiekraaniga nimetatakse tasapinna **põhijäljeks** ja lõikejoont esiekraaniga — **esijäljeks**. Neid jälgi tähistame vastavalt tähtedega p ja e. Tasapinna α jäljed p ja e ning x-telg kas lõikuvad ühes ja samas punktis T või on kõik paralleelsed kui kolme tasapinna α, ε_1 ja ε_2 lõikesirged (§ 28).





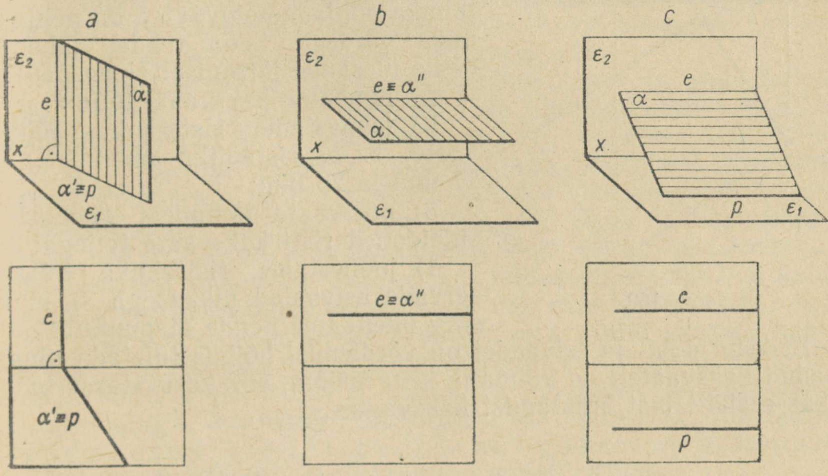
Joon. 158.

Tasapinna asend ekraanide suhtes määrab tema jälgede asendi kaksvaate telje suhtes (ja ümberpöördult).

Kui tasapind on risti ühe ekraaniga ning pole paralleelne teise ekraaniga, siis tema jälg teisel ekraanil on risti teljega.

Näiteks, kui tasapind α on risti põhiekraaniga (joon. 159, a), siis viimane on risti kahe lõikuva tasapinnaga α ja ε_2, seega risti ka nende lõikejoonega e (§ 34); nii on esijälg e põhiekraani normaal ning peab seetõttu olema risti iga sirgega põhiekraanil, ka teljega x (§ 33).

Ekraaniga ristuv tasapind projekteerub sellele ekraanile sirgjooneks, nimelt jälgsirgeks ($\alpha' \equiv p$, joon. 159, a).



Joon. 159.

Kui tasapind on paralleelne ühe ekraaniga, siis tema jälg teisel ekraanil on paralleelne kaksvaate teljega,

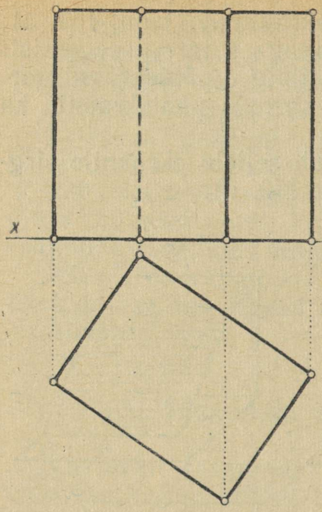
sest see jälg ja kaksvaate telg on saadud kahe paralleelse tasapinna lõikamisel kolmanda tasapinnaga (§ 27). Kogu tasapinna projektsiooniks teisel ekraanil on sel juhul jälgsirge ($\alpha'' \equiv e$, joon. 159, b).

Kui tasapind on paralleelne teljega, siis tema mõlemad jäljed on samuti paralleelsed teljega,

sest nende lõikumisest järelduks, et telg lõikuks antud tasapinnaga, seega ei oleks temaga paralleelne (joon. 159, c).

Punkti, sirge ja tasapinna kujutamisvõtete tundmine võimaldab joonestada kehade kaksvaateid. Näitena vaatleme risttahuka kaksvaate joonestamist.

Olgu risttahuka mõõtmed 21 cm, 28 cm ja 31 cm ning asetsegu tema kõige väiksem tahk põhiekraanil. Joonestame selle risttahuka kaksvaate, võttes risttahuka asendi esiekraani suhtes vabalt.



Joon. 160.

Teeme joonise vähendusena, näiteks mõõdusuhtega 1 : 10; siis antud mõõtmed tulevad joonisel võtta millimeetrites (joon. 160)). Et risttahuka külgservad on põhiekraaniga risti, siis nende põhivaadeteks on punktid, esivaadeteks aga teljega ristuvad ja külgserva-pikkused lõigud. Risttahuka põhjade põhivaated on põhjadega võrdsed. Seda teades lahendame ülesande järgmiselt (joon. 160):

1) tõmbame kaksvaate telje x;

2) joonestame risttahuka põhivaate, s. o. ristküliku mõõtmetega 21 mm ja 28 mm;

3) põhivaate tippudest tõmbame sidejooned risti kaksvaate teljega;

4) joonestame risttahuka külgservade esivaated pikkusega 31 mm ning ühendame nende otspunktid.

Et keha põhi- ja esivaadet on võrdlemisi hõlbus tuletada ning saadud kaksvaatelt on võimalik keha mõõta, siis kasutatakse tehnikas eeskätt just kujutamist kaksvaates.

Ülesandeid.

282. Tasapind on antud oma kolme punktiga, milledest kaks on põhiekraanil ja üks esiekraanil. Joonesta tasapinna jäljed.

283. Joonesta esiekraaniga ristuva tasapinna jäljed, kui on antud
1) tasapinna kaks punkti esiekraanil;
2) tasapinna üks punkt põhiekraanil ja üks punkt esiekraanil.

284. Joonesta kahe paralleelse tasapinna jäljed, kui
1) tasapinnad on risti esiekraaniga;
2) tasapinnad on risti põhiekraaniga.

285. Kaks põhiekraaniga ristuvat mitteparalleelset tasapinda on antud oma jälgedega. Leia tasapindade lõikejoone kaksvaade.

286. Kuup, mille serv on 4 cm, toetub ühe tahuga põhiekraanile nii, et kuubi ükski tahk pole esiekraaniga paralleelne. Joonesta kuubi kaksvaade.

§ 42. KALDPROJEKTSIOON.

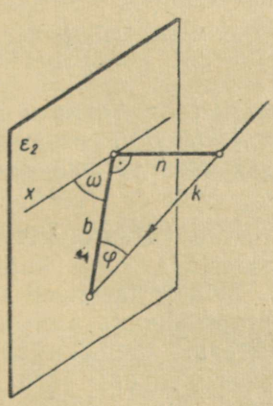
Kahe kokkukuuluva ristprojektsiooni (põhi- ja esivaate) kasutamine nõuab joonisel rohkesti ruumi ning kujutatavast kehast selge kujutluse saamiseks vaatlejalt vastavat vilumust. Kus tahetakse lihtsa ja vähe ruumi nõudva joonise abil anda kujutlust kehadest, näiteks geomeetrilistel joonistel õpperaamatuis, seal kasutatakse kaldprojektsiooni.

Kaldprojektsioon on niisugune paralleelprojektsioon, mille puhul kujutamiskiired ei ole risti projektsioonipinnaga.

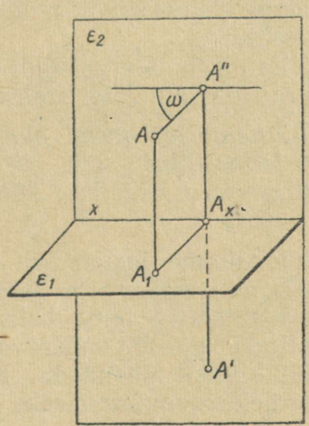
Kaldprojektsiooni tuletamisel võetakse projektsioonipinnaks harilikult esiekraan. Kui kujutamisobjektiks on keha, siis see asetatakse esiekraani ette, põhjaga põhiekraanile.

Kujundi kaldprojektsiooni määramiseks on vaja anda kujutamiskiirte siht. Harilikult valitakse see siht niisugune, et kiired tulevad paremalt ülalt (või mõnikord ka — vasakult ülalt). Selle sihi saab lähemalt määrata kahe andmega järgmiselt. Kujutleme projektsioonipinna normaali lõiku n, mille üks otspunkt on projektsioonipinnal ja mille teist otspunkti läbib kujutamiskiir k (joon. 161). See lõik n ja kiir k koos lõigu kaldprojektsiooniga b moodustavad täisnurkse kolmnurga, milles kujutamiskiire kaldenurga φ vastaskaatetiks on normaali lõik n ja lähiskaatetiks selle lõigu kaldprojektsioon b. Kujutamiskiire k asend ekraani suhtes on määratud, kui on teada kaldenurk φ ja veel nurk ω, mille normaali lõigu projektsioon b moodustab ekraanil esitatud mingi kindla sihiga, harilikult rõhtsirgega x. Nurka ω nimetatakse kaldprojektsiooni pöördenurgaks ning selle suurus on antud, või võetakse joonestamisel vabalt. Niisiis

kaldprojektsiooni pöördenurgaks nimetatakse joonisepinna normaali projektsiooni ja joonisepinna rõhtsirge vahelist nurka.



Joon. 161.



Joon. 162.

Kujutamiskiire kaldenurga φ asemel kasutatakse joonestamisel selle nurga kootangensit $\frac{b}{n}$, mida nimetatakse kaldprojektsiooni moondeteguriks ning tähistatakse tähega q. Seega

$$\frac{b}{n} = q, \text{ millest } b = qn.$$

Sellest nähtub, et

kaldprojektsiooni moondetegur on arv, millega tuleb korrutada ekraani normaali lõigu pikkust, et saada selle lõigu kaldprojektsiooni pikkust.

Moondetegur q iseloomustab kujutamiskiirte kallet ekraani suhtes, pöördenurk ω aga näitab, kuhu poole on kiired kaldu.

Kaldprojektsiooni pöördenurk ja moondetegur valitakse nii, et joonestamine oleks võimalikult lihtne; harilikult ω on kas 30°, 45°, 60° või 90°, ja q on kas 1, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ või $\frac{1}{4}$.

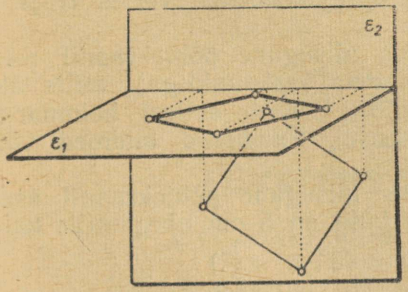
Vaatleme nüüd punkti kaldprojektsiooni joonestamist tema kaksvaate järgi. Olgu $\omega = 45°$ ja $q = \frac{1}{2}$. Olgu antud punkti A kaksvaade (joon. 162). Joonestame punktist A'' lõigu, mis moodustab rõhtsirgega nurga 45° ning võtame pikkuseks poole lõigu $A'A_x$ pikkusest (sest $q = \frac{1}{2}$). Lõigu teine otspunkt ongi ruumipunkti A kaldprojektsioon ekraanil ε_2; seda kujutist tähistame lihtsalt tähega A, samuti nagu punkti ennast ruumis.

Sama punkti saab leida veel teisiti, nimelt joonestades (lähtudes punktist A_x) lõigu A_1A_x ja siis lõigu $A_1A = A_xA''$. Et oleks kergem kujutleda punkti A ruumis olevana, on kasulik joonist täiendada põhiekraani ε_1 kaldprojektsiooniga (nagu joonisel 162 ongi tehtud).

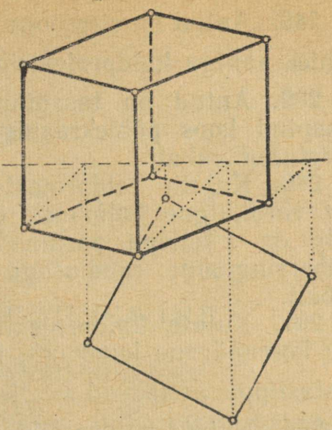
Esitatud näitest selgub järgmine üldine võte antud punkti kaldprojektsiooni leidmiseks:

kujutleme, et antud punktist on tõmmatud esiekraanini ristlõik; joonestame selle ristlõigu kaldprojektsiooni, arvestades antud ω ja q väärtusi; kõik vajalikud pikkused võtame punkti kaksvaatelt.

Kui oskame joonestada iga üksiku punkti kaldprojektsiooni selle punkti kaksvaate järgi, saame joonestada kogu kujundi kaldprojektsiooni tema kaksvaate põhjal. Selleks tarvitseb vaid joonestada kujundit määravate punktide projektsioonid ning need vajalikul viisil ühendada. Näiteks põhiekraanil asetseva ruudu kaldprojektsiooni saamiseks joonestame tema põhivaate järgi iga tipu kaldprojektsiooni ja ühendame need õiges järjekorras (joon. 163). Saadud joonise täpsust võimaldab kontrollida see



Joon. 163.

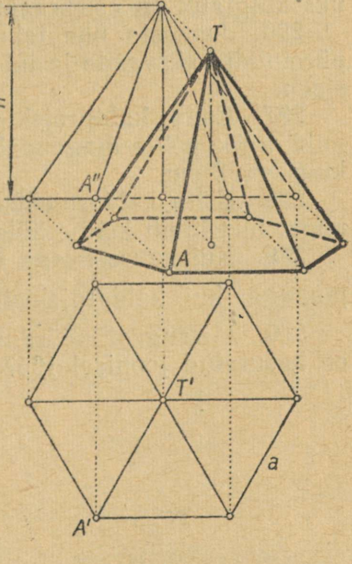


Joon. 164.

teadmine, et ruudu paralleelprojektsiooni vastasküljed on paralleelsed (§ 37).

Kui kujutlusobjektiks on keha, mille külgservad on risti põhiekraaniga — näiteks risttahukas, siis nende servade kaldprojektsioonid esiekraanil on risti teljega ning pikkuselt võrdsed servade enestega. See asjaolu võimaldab säärase keha kaldprojektsiooni saamist tema põhivaate ja külgserva pikkuse kaudu (joon. 164).

Kui keha külgservad pole risti põhiekraaniga, siis kasutame kaldprojektsiooni tuletamisel keha kõrgust. Viimase kaldprojektsioon on risti kaksvaate teljega ning esineb loomulikus suuruses. Näitena on joonisel 165 esitatud korrapärase kuusnurkse püramiidi kaksvaade ja kaldprojektsioon (kusjuures kaldkiired tulevad seekord vasakult ülalt); andmetena on kasutatud püramiidi põhiserva pikkust a ja kõrgust h. Püramiid asetseb põhiekraanil nii, et tema kaks põhiserva on x-teljega paralleelsed.



Joon. 165.

Ülesandeid.

287. Antud on sirgjoone jälgpunktid kaksvaates. Esita see sirgjoon koos põhiekraaniga kaldprojektsioonis, kui $\omega = 30°$ ja $q = \frac{1}{2}$.

288. Antud on sirgjoone kaksvaade. Esitada see sirgjoon koos põhiekraaniga kaldprojektsioonis, kui $\omega = 45°$ ja $q = \frac{1}{2}$.

289. Antud on tasapinna jälgsirged kaksvaates. Esita see tasapind koos põhiekraaniga kaldprojektsioonis, võttes ω ja q väärtused vabalt.

290. Kujuta kaldprojektsioonis niisugune põhiekraanil asetsev võrdkülgne kolmnurk (koos oma keskpunktiga), mille üks külg on x-teljega paralleelne ning asetseb sellest kolmnurga ümberringjoone raadiusega kaugusel. Puuduvad andmed võta vabalt.

291. Kujuta kaldprojektsioonis niisugune põhiekraanil asetsev korrapärane kuusnurk, mille külg on 5 cm ning mille kaks vastastippu asetsevad x-teljel. ($\omega = 45°$, $q = \frac{1}{2}$.)

292. Kujuta kaldprojektsioonis niisugune põhiekraanil asetsev korrapärane viisnurk, mille ümberringjoone raadius on 4,5 cm ning üks külg asetseb x-teljel. ($\omega = 45°$, $q = \frac{1}{2}$.)

293. Kujuta kaldprojektsioonis kolmnurk koos oma põhivaatega, kui kolmnurga kaksvaade on antud (puuduvad andmed võta vabalt).

294. Kujuta kaldprojektsioonis kuup servaga 3,5 cm, kui kuubi põhja diagonaal on risti esiekraaniga; muud andmed võta vabalt.

295. Kujuta kaldprojektsioonis korrapärane kuusnurkne prisma, mille põhiserv on 4 cm ja külgserv 6,5 cm, kui prisma üks külgtahk on esiekraanil.

296. Joonesta ühe tahuga põhiekraanil asetseva kolmnurkse püramiidi kaksvaade ja tuleta sellest sama püramiidi kaldprojektsioon.

297. Esita kaldprojektsioonis korrapärane nelinurkne püramiid, mille põhja diagonaal on risti x-teljega, põhiserv on 5 cm ja külgserv 8 cm.

298. Esita kaldprojektsioonis kuup koos teda lõikava tasapinnaga, mis läbib kolme külgservadel vabalt võetud punkti.

299. Kui suure nurga moodustab kujutamiskiir projektsioonipinnaga, kui kaldprojektsiooni moondetegur on $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, 1, $\frac{3}{4}$, 0,4?

300. Missugust pöördnenurga ω ja moondeteguri q väärtust on kasutatud joonisel 165?

V. FUNKTSIOONIDE UURIMINE.

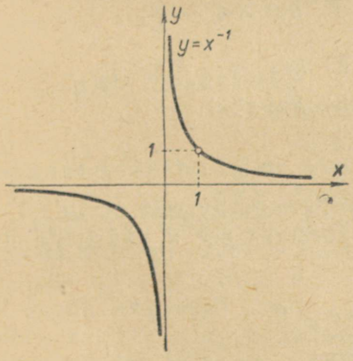
§ 43. FUNKTSIOONI MÄÄRAMISPIIRKOND.

Seda argumendi väärtuste hulka, mille igale väärtusele vastab kindel funktsiooni väärtus, nimetatakse funktsiooni määramispiirkonnaks.

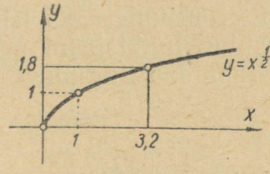
a) Funktsiooni $y = x^{-1}$ määramispiirkond.

Astmefunktsioonil $y = x^{-1}$ (joon. 166) puudub väärtus, kui $x = 0$, sest nulliga jagada ei saa. Seega antud funktsioon ei ole määratud kohal $x = 0$. Küll on aga võimalik leida sellele funktsioonile väärtusi kõigi teiste argumendi väärtuste korral. Ütleme, et funktsioon $y = x^{-1}$ on määratud, kui $x > 0$ ja kui $x < 0$; lühidalt, kui $x \neq 0$.

Funktsiooni $y = x^{-1}$ määramispiirkonnaks on argumendi nende väärtuste hulk, mis rahuldavad tingimust $x < 0$ või $x > 0$.



Joon. 166.



Joon. 167.

b) Funktsiooni $y = x^{\frac{1}{2}}$ määramispiirkond.

Astmefunktsioon $y = x^{\frac{1}{2}}$ (joon. 167) ei ole määratud negatiivsete x väärtuste korral, sest ei leidu arve, mille ruut oleks negatiivne. Küll on aga võimalik leida sellele funktsioonile väärtusi, kui x on positiivne või 0. Seega

funktsiooni $y = x^{\frac{1}{2}}$ määramispiirkonnaks on argumendi nende väärtuste hulk, mis rahuldavad tingimust $x \geqslant 0$.

c) Lineaarse ja ruutfunktsiooni määramispiirkond.

On funktsioone, millede väärtused on määratud argumendi kõigi väärtuste korral. Nii näiteks ükskõik, mis väärtuse me anname argumendile x, ikka saab leida vastavat väärtust lineaarsele funktsioonile $y = ax + b$ ja samuti ruutfunktsioonile $y = ax^2 + bx + c$. Seega

lineaarse ja ruutfunktsiooni määramispiirkonnaks on kogu reaalarvude hulk.

d) Funktsiooni $\frac{ax^2+bx+c}{dx^2+ex+f}$ määramispiirkond.

Murruna avalduva funktsiooni määramispiirkonda ei kuulu niisugused argumendi väärtused, mille korral nimetaja saab võrdseks nulliga.

Leiame funktsiooni $y = \frac{5x^2-2x+6}{3x^2-2x-1}$ määramispiirkonna.

Nimetaja nullkohtade leidmiseks lahendame võrrandi

$$3x^2 - 2x - 1 = 0,$$

mille lahendeid on $x_1 = 1$ ja $x_2 = -\frac{1}{3}$. Seega,

antud funktsioon on määratud: 1) *kui* $x < -\frac{1}{3}$;

2) *kui* $-\frac{1}{3} < x < 1$;

3) *kui* $x > 1$.

e) Funktsiooni $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ määramispiirkond.

Et ruutjuurt saab leida ainult mittenegatiivseist arvudest, siis on antud funktsiooni määramispiirkonnaks see x väärtuste hulk, mis rahuldab tingimust

$$ax^2 + bx + c \geqslant 0.$$

Leiame funktsiooni $y = \sqrt{2x^2 + 3x - 5}$ määramispiirkonna.

Ülesande lahendamiseks tuleb leida ruutfunktsiooni $2x^2 + 3x - 5$ positiivsuspiirkond koos nullkohtadega. Lahendades ruutvõrrandi $2x^2 + 3x - 5 = 0$, saame lahendeiks $x_1 = -\frac{5}{2}$ ja

$x_2 = 1$. Et ruutliikme kordaja on positiivne, siis saame positiivsuspiirkonnaks kaks piirkonda $x < -\frac{5}{2}$ ja $x > 1$.

Et ka nullkohad kuuluvad määramispiirkonda, siis koosneb antud funktsiooni määramispiirkond järgmisest kahest piirkonnast:

$$x \leqslant -\frac{5}{2} \text{ ja } x \geqslant 1.$$

Ülesandeid.

301. Leia järgmiste funktsioonide määramispiirkonnad.

1) $y = \frac{1}{2-x}$ 4) $y = \frac{3}{x^2-1}$ 7) $y = \frac{x^2+3}{x^2-5x+6}$

2) $y = \frac{3x}{x+4}$ 5) $y = \frac{5x}{x^2+4x}$ 8) $y = \frac{4x^2-20}{x^2+2x-35}$

3) $y = \frac{2x-1}{3x+2}$ 6) $y = \frac{2x-3}{x^2-2x+1}$ 9) $y = \frac{2x^2-3x-2}{2x^2-3x+1}$

302. Leia järgmiste funktsioonide määramispiirkonnad.

1) $y = \sqrt{x}$ 5) $y = (-2x+1)^{\frac{1}{2}}$ 9) $y = \sqrt{-x^2-2x+8}$

2) $y = \sqrt{x+2}$ 6) $y = (x^2-9)^{\frac{1}{2}}$ 10) $y = \sqrt{2x^2-4x-1}$

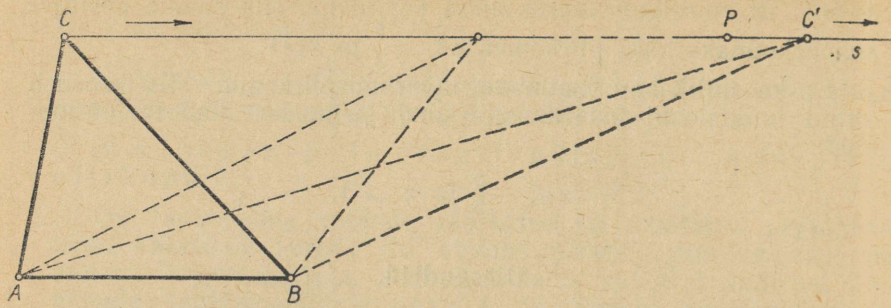
3) $y = \sqrt{3x}$ 7) $y = (2x^2-3x)^{\frac{1}{2}}$ 11) $y = \sqrt{-3x^2-5}$

4) $y = \sqrt{4x+2}$ 8) $y = (x^2-4x+3)^{\frac{1}{2}}$ 12) $y = \sqrt{\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}}$

§ 44. TÕKESTAMATULT KASVAVAD JA TÕKESTAMATULT KAHANEVAD SUURUSED.

a) Kolmnurga elementide tõkestamatu kasvamine ja tõkestamatu kahanemine.

Jälgime kolmnurga ABC kuju muutumist, kui tipp C liigub mööda alusega paralleelset sirget s (joon. 168). Muutuvateks suurusteks on siis küljed AC ja BC ning kõik kolmnurga nurgad. Sirge on teatavasti lõputu. Seega võib punkti C viia sirgel s kuitahes kaugele ning kolmnurga küljed AC ja BC saavad siis kuitahes pikaks. Märgime sirgel s hästi kaugel punktist C ühe punkti P. Liikudes mööda sirget s jõuab punkt C ikka punktini P ja läheb temast kaugemale (näiteks punkti C'), ükskõik kui kaugel me punkti P ka märgiksime. Nii saab teha lõigu CC' tema otspunkti C' nihutamisega suuremaks igast kuitahes suurest etteantud pikkusest. Sama omadus on ka kolmnurga külgedel AC' ja BC'.



Joon. 168.

Me ütleme, et pikkused CC', AC' ja BC' on **tõkestamatult kasvavad suurused,** kui punkt C' mööda sirget s järjest kaugeneb.

Vaatleme nüüd kolmnurga nurka tipu C' juures. Kui punkt C' liigub noole suunas edasi mööda sirget s, siis see nurk muutub järjest väiksemaks. Kui annaksime ette kuitahes väikese nurga, siis tipp C' ikkagi jõuab niisugusesse kohta, kus kolmnurga nurk saab võrdseks etteantud väikese nurgaga, punkti C' edasiliikumisel aga saab temast ka väiksemaks. Kui annaksime ette veel väiksema nurga, korduks sama lugu.

Analoogiline on olukord kolmnurga tipu A juures.

Me ütleme, et kolmnurga nurgad tippude C' ja A juures on **tõkestamatult kahanevad suurused,** kui punkt C' mööda antud sirget s järjest kaugeneb.

Tipu B juures olev sisenurk suureneb punkti C' edasiliikumisel, kuid ta ei saa kuitahes suureks. Paneme tähele, et see nurk läheneb järjest sirgnurgale.

Analoogilisi nähtusi paneme tähele funktsioonide muutumisel.

b) Funktsioooni $y=x^{-1}$ muutumine argumendi tõkestamatul kasvamisel ja tõkestamatul kahanemisel.

Jälgime funktsiooni $y=x^{-1}$ muutumist argumendi positiivsete väärtuste muutumisel, kasutades graafikut joonisel 166. Paneme tähele, et argumendi kasvamisel funktsiooni väärtused aina vähenevad. Tõepoolest, murd $\frac{1}{x}$ saab seda väiksemaks, mida suurem on x. Seejuures ei saa selle murru väärtus, kuigi ta väheneb, kunagi võrdseks nulliga, ükskõik kui suure väärtuse me x-ile ka ei annaks. Olgu näiteks x väärtused

$$100, 1000, 1000000,$$

siis funktsiooni väärtused on vastavalt

$$0{,}01;\ 0{,}001;\ 0{,}000001.$$

Seega

argumendi tõkestamatul kasvamisel funktsioon x^{-1} on tõkestamatult kahanev suurus.

Jälgime nüüd funktsiooni x^{-1} muutumist argumendi positiivsete väärtuste muutumisel vastupidises suunas, s. t. nende lähenemisel nullile.

Olgu näiteks x väärtused

$$0{,}01;\ 0{,}001;\ 0{,}000001,$$

siis vastavad funktsiooni väärtused on

$$100,\ 1000,\ 1000000.$$

Seega

argumendi tõkestamatul kahanemisel funktsioon x^{-1} on tõkestamatult kasvav suurus.

Järgnevalt vaatleme funktsiooni x^{-1} muutumist argumendi negatiivsete väärtuste muutudes.

Kui x negatiivne väärtus oma absoluutväärtuse poolest suureneb, siis funktsiooni väärtus oma abosluutväärtuselt väheneb, saades seejuures kuitahes väikeseks. Näiteks, kui x väärtused on

$$-10,\ -1000,\ -1000000,$$

siis $\frac{1}{x}$ väärtused on

$$-0{,}1;\ -0{,}001;\ -0{,}000001.$$

Seega võime öelda, et

argumendi absoluutväärtuse tõkestamatul kasvamisel funktsiooni x^{-1} absoluutväärtus on tõkestamatult kahanev suurus.

Kui x väärtus negatiivselt poolelt tõkestamatult läheneb nullile, siis funktsiooni x^{-1} absoluutväärtus järjest kasvab.

Näiteks, kui x väärtused on

$$-0{,}1;\ -0{,}001;\ -0{,}000001,$$

siis $\frac{1}{x}$ väärtused on

$$-10,\ -1000,\ -1000000.$$

Seega

argumendi absoluutväärtuse tõkestamatul kahanemisel funktsiooni x^{-1} absoluutväärtus on tõkestamatult kasvav suurus.

Et positiivse arvu absoluutväärtus võrdub arvu endaga, siis võime tõkestamatult kasvavat ja tõkestamatult kahanevat suurust defineerida lõpuks järgmiselt.

Muutuvat suurust, mille absoluutväärtus saab ja siis ka jääb suuremaks igast kuitahes suurest etteantud positiivsest arvust, nimetatakse tõkestatult kasvavaks suuruseks.

Muutuvat suurust, mille absoluutväärtus saab ja siis ka jääb väiksemaks igast kuitahes väikesest etteantud positiivsest arvust, nimetatakse tõkestamatult kahanevaks ehk nullile lähenevaks suuruseks.

Niisiis, kui x väärtustele vastavad punktid nullpunktist kaugenevad, siis osutub funktsioon x^{-1} tõkestamatult kahanevaks suuruseks; kui aga x väärtustele vastavad punktid nullpunktile lähenevad, siis osutub funktsioon x^{-1} tõkestamatult kasvavaks suuruseks.

c) «Lähenemine lõpmatusele».

Kasutades sümbolit ∞, mis näitab tõkestamatut kasvamist ning mida loetakse harilikult sõnaga «lõpmata», võime eespool käsitletud neli juhtu üles kirjutada järgmiselt:

1) kui $x \to +\infty$, siis $x^{-1} \to 0$;

2) kui $x \to -\infty$, siis $x^{-1} \to 0$;

3) kui $x \to 0$ (vasakult), siis $x^{-1} \to -\infty$;

4) kui $x \to 0$ (paremalt), siis $x^{-1} \to +\infty$.

Loetakse neid kirjutusi harilikult (lihtsustatult) nii:

1) kui x läheneb pluss lõpmatusele, siis x^{-1} läheneb nullile;

2) kui x läheneb miinus lõpmatusele, siis x^{-1} läheneb nullile;

3) kui x läheneb (vasakult) nullile, siis x^{-1} läheneb miinus lõpmatusele;

4) kui x läheneb (paremalt) nullile, siis x^{-1} läheneb pluss lõpmatusele.

Neid väljendeid kasutatakse eespool sümbolites üleskirjutatud muutumisprotsesside lugemiseks nende lühiduse tõttu. Otsene tähendus neil aga puudub, sest lõpmatusele lähenemine on võimatu.

Täpsemalt aga väljendatakse nende sümboolsete kirjutuste taga peituvaid mõtteid järgmiselt:

1) kui x positiivsena kasvab tõkestamatult, siis x^{-1} samuti positiivsena kahaneb tõkestamatult (ehk läheneb tõkestamatult nullile);

2) kui x negatiivsena kasvab tõkestamatult, siis x^{-1} samuti negatiivsena kahaneb tõkestamatult (ehk läheneb tõkestamatult nullile);

3) kui x negatiivsena kahaneb tõkestamatult, siis x^{-1} samuti negatiivsena kasvab tõkestamatult;

4) kui x positiivsena kahaneb tõkestamatult, siis x^{-1} samuti positiivsena kasvab tõkestamatult.

Ülesandeid.

303. Uuri funktsioonide $y=x^{-2}$, $y=x^{-3}$ tõkestamatut kasvamist ja kahanemist.

304. Leia funktsioonide $y=x^{-2}$, $y=x^{-3}$ ja $y=x$ määramispiirkonnad.

§ 45. FUNKTSIOONI ÜLDTÄHIS.

Paljude erinevate funktsioonide uurimisel tuleb selgitada samalaadseid küsimusi, nagu kasvamise ja kahanemise piirkonnad, maksimum- ja miinimumpunktid, nullkohad, positiivsus- ja negatiivsuspiirkonnad, määramispiirkond, tõkestamata kasvamine või kahanemine jm.

Funktsioonide uurimisel puutume seega kokku küsimustega, mis hõlmavad mistahes funktsiooni. Seepärast kasutatakse matemaatikas mistahes funktsiooni märkimiseks vastavaid üldsümboleid.

Konkreetse funktsiooni defineerimisel tugineme vastavale matemaatilisele avaldisele; näiteks binoom $ax+b$ defineerib lineaarse funktsiooni, $\sin x$ siinusfunktsiooni jne. Kui aga on tegemist mingi funktsiooniga, mille konkreetne kuju meid parajasti ei huvita, siis funktsiooni avaldise asemel kasutame sümboleid

$$f(x),\ g(x),\ F(x)\ \text{jne.},$$

kus sulgudes olev täht näitab, mis on argumendiks, sulgude ees olev täht aga märgib tõsiasja, et tegemist on just selle argumendi funktsiooniga.

Olgu mingi funktsiooni üldtähiseks näiteks $f(x)$. Sama sümbolit kasutatakse siis ka selle funktsiooni konkreetsete väärtuste üleskirjutamisel; näiteks kirjutused

$$f(2);\ f(-4)\ \text{ja}\ f(a)$$

tähendavad funktsiooni $f(x)$ väärtusi, mis vastavad argumendi x väärtustele 2, —4 ja a.

Kui $f(x)$ tähistaks funktsiooni $\frac{x^2+1}{x-1}$, s. t.

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x-1},$$

siis

$$f(2)=\frac{2^2+1}{2-1}=5;\quad f(-4)=\frac{(-4)^2+1}{-4-1}=-3\frac{2}{5};\quad f(a)=\frac{a^2+1}{a-1}.$$

Ülesandeid.

305. Antud on funktsioon

$$f(x)=2x^2-3x+1.$$

Leia $f(0)$; $f(3)$; $f(-2)$; $f(2,3)$; $f\left(-\frac{1}{2}\right)$.

306. Antud on funktsioon

$$F(u)=u^3-1.$$

Leia $F(1)$; $F(a)$; $F(a+1)$; $F(a-1)$; $2F(2a)$.

307. Antud on funktsioon

$$g(t)=2t^2+\frac{2}{t^2}+\frac{5}{t}+5t.$$

Näita, et $g(t)=g\left(\frac{1}{t}\right)$.

308. Antud on funktsioonid

$$f(x)=\frac{x-2}{x+1} \text{ ja } \varphi(x)=\frac{x+2}{x-1}.$$

Leia $f(-x)$; $f(1)$; $\varphi(-3)$; $\varphi(a)$; $f(4)+\varphi(1)$.

§ 46. PAARISFUNKTSIOON JA PAARITU FUNKTSIOON.

Olgu mingi funktsiooni graafik sümmeetriline y-telje suhtes (joon. 169); sellised on ka näiteks ruutfunktsiooni $y=x^2$ ja koosinusfunktsiooni $y=\cos x$ graafikud (joon. 170 ja 171). Sellest sümmeetrilisusest järeldub, et nende funktsioonide väärtused argumendi väärtustel x ja $-x$ on võrdsed.

Funktsiooni, mille väärtused kohtadel x ja $-x$ on võrdsed, nimetatakse paarisfunktsiooniks.

Kasutades funktsiooni üldtähist, võime paarisfunktsiooni definitsiooni üles kirjutada võrdusena

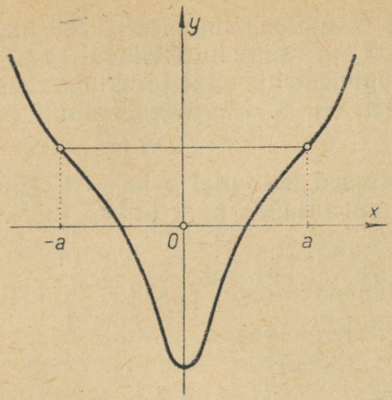
$$f(x)=f(-x).$$

Teame, et

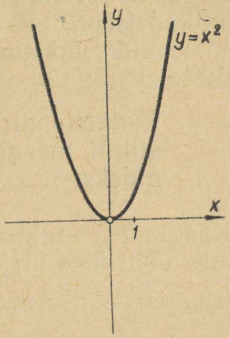
$$x^2=(-x)^2 \text{ ja } \cos x=\cos(-x).$$

Seega x^2 ja $\cos x$ on paarisfunktsioonid.

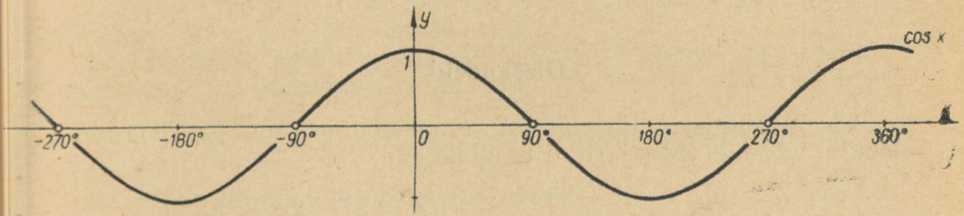
Joonisel 172 näeme mingi funktsiooni graafikut, mis on süm-



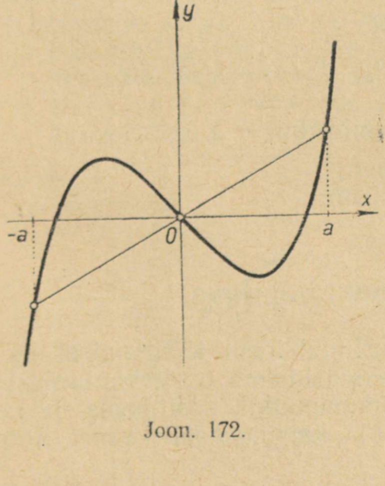
Joon. 169.



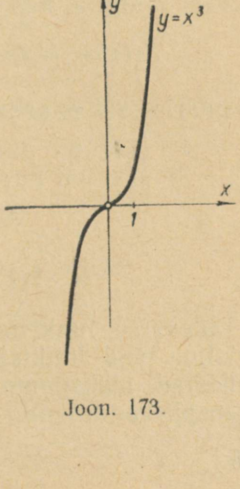
Joon. 170.



Joon. 171.



Joon. 172.



Joon. 173.

meetriline koordinaatide alguse O suhtes. Sümmeetrilised on näiteks ka kuupfunktsiooni $y=x^3$ ja siinusfunktsiooni $y=\sin x$ graafikud (joon. 173 ja 180). Sümmeetrilisusest järeldub, et nende funktsioonide väärtused kohtadel x ja $-x$ erinevad ainult märgi poolest.

Funktsiooni, mille väärtused kohtadel x ja $-x$ erinevad ainult märgi poolest, nimetatakse paarituteks funktsioonideks.

Kasutades funktsiooni üldtähist, võime paaritu funktsiooni definitsiooni üles kirjutada järgmiselt:

$$f(x)=-f(-x).$$

Teame, et $x^3=-(-x)^3$ ja $\sin x=-\sin(-x)$. Seega x^3 ja $\sin x$ on paaritud funktsioonid.

Olgu tähendatud, et paljud konkreetsetest funktsioonidest pole ei paaris- ega paaritud funktsioonid.

Ülesandeid.

309. Missugused järgmistest funktsioonidest on paarisfunktsioonid, missugused paaritud funktsioonid?

1) $y=x^4$
2) $y=x^{-3}$
3) $y=x^2+x$
4) $y=x^3+x$
5) $y=\frac{1}{x}$
6) $y=x^4-2x^2+5$
7) $y=\tan x$
8) $y=\sin x+\cos x$
9) $y=x$
10) $y=\frac{3x^2+2}{x^2+1}$

310. Selgita, kas funktsioonid

$$F_1(x)=f(x)+f(-x) \quad \text{ja} \quad F_2(x)=f(x)-f(-x)$$

on paaris- või paaritud funktsioonid, kui

1) $f(x)$ on paarisfunktsioon;
2) $f(x)$ on paaritu funktsioon.

§ 47. FUNKTSIOONI UURIMINE.

Lineaarse funktsiooni ja ruutfunktsiooni käsitlemisel me ka uurisime neid funktsioone. Selleks leidsime uuritava funktsiooni nullkohad, maksimum- või miinimumpunkti, positiivsus- ja negatiivsuspiirkonna ning kasvamis- ja kahanemispiirkonna. Eespool tutvusime funktsiooni määramispiirkonna mõistega, suuruste tõkestamatu kasvamise ja tõkestamatu kahanemisega ning paarisfunktsiooni ja paaritu funktsiooni mõistega. Need mõisted võimaldavad funktsioone veelgi täpsemini tundma õppida.

Edaspidi uurime funktsioone teatud kindlas järjekorras. Selleks leiame:

1) määramispiirkonna;
2) kas funktsioon on paaris või paaritu;
3) maksimum- ja miinimumpunktid;
4) kasvamis- ja kahanemispiirkonna;
5) nullkohad;
6) positiivsus- ja negatiivsuspiirkonna;
7) kuidas muutub funktsioon, kui argument tõkestamatult kasvab või kui argument läheneb nullile.

§ 48. LINEAARSE FUNKTSIOONI UURIMINE.

1. Lineaarne funktsioon $ax+b$ on määratud argumendi iga väärtuse korral, s. t. piirkonnas $-\infty < x < \infty$.

2. Lineaarne funktsioon ei ole üldiselt ei paaris- ega paaritu funktsioon, ainult erijuhul, kui $a=1$ ja $b=0$, siis esitab ta paaritut funktsiooni.

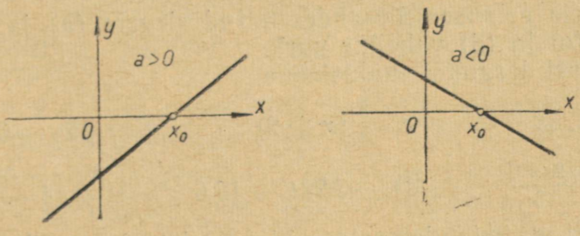
3. Lineaarsel funktsioonil ei ole maksimumpunkti ega miinimumpunkti.

4. a) Lineaarne funktsioon on kasvav, kui $a>0$.
   b) Lineaarne funktsioon on kahanev, kui $a<0$.

5. Lineaarse funktsiooni nullkohaks on $x_0 = -\frac{b}{a}$.

6. a) Kui $a>0$, siis on lineaarse funktsiooni positiivsuspiirkonnaks $x>x_0$ ja negatiivsuspiirkonnaks $x<x_0$.
   b) Kui $a<0$, siis on lineaarse funktsiooni positiivsuspiirkonnaks $x<x_0$ ja negatiivsuspiirkonnaks $x>x_0$.

7. a) Kui $a>0$ ja $x \to \infty$, siis $(ax+b) \to \infty$;
   kui $a>0$ ja $x \to -\infty$, siis $(ax+b) \to -\infty$.
   b) Kui $a<0$ ja $x \to \infty$, siis $(ax+b) \to -\infty$;
   kui $a<0$ ja $x \to -\infty$, siis $(ax+b) \to \infty$.



Joon. 174.

Põhjenda neid väiteid, kasutades selleks ka joonist 174.

Uurime näiteks funktsiooni $y = 3x - 5$ ja märgime tulemused tabelisse.

	Funktsioonid		
	$3x - 5$	$\frac{2}{3}x + \frac{4}{5}$	$-2x + \frac{2}{3}$
1. Määramispiirkond	$-\infty < x < \infty$		
2. Kas paaris- või paaritu funktsioon	ei kumbki		
3. a) Maksimumpunkt	puudub		
b) Miinimumpunkt	puudub		
4. a) Kasvamispiirkond	$-\infty < x < \infty$		
b) Kahanemispiirkond	puudub		
5. Nullkohad	$x = \frac{5}{3}$		
6. a) Positiivsuspiirkond	$x > \frac{5}{3}$		
b) Negatiivsuspiirkond	$x < \frac{5}{3}$		
7. a) Kui $x \to \infty$, siis	$(3x-5) \to \infty$		
b) Kui $x \to -\infty$, siis	$(3x-5) \to -\infty$		

Täida tabel ka funktsioonide $\frac{2}{3}x + \frac{4}{5}$ ja $-2x + \frac{2}{3}$ osas.

Ülesandeid.

311. Missugust funktsiooni nimetatakse lineaarseks funktsiooniks?

312. Mis on sirge tõus?

313. Millal nimetatakse funktsiooni kasvavaks (kahanevaks)?

314. Mis on funktsiooni positiivsuspiirkond (negatiivsuspiirkond)?

315. Kasutades tabeleid, tee kindlaks kui suure nurga moodustavad x-teljega järgmised sirged:

a) $y = 2{,}13x - 5$;
b) $y = -0{,}421x + 1$;
c) $y = 1{,}6x + 3$;
d) $y = -5{,}2x - 4$.

316. Leia eelmises ülesandes antud sirgete (a) ja (b) vaheline ning (c) ja (d) vaheline nurk.

317. Uuri järgmisi funktsioone.

a) $3x + 2$
b) $\frac{2x=6}{3}$
c) $\frac{3}{4}(x + 2)$
d) $-3{,}22x - 15{,}6$
e) $12x - 64$
f) $2{,}14 - \frac{3}{5}x$

Skitseeri uurimistulemuste põhjal vastavad graafikud.

§ 49. RUUTFUNKTSIOONI UURIMINE.

1. Ruutfunktsioon ax^2+bx+c on määratud argumendi iga väärtuse korral, s. t. piirkonnas $-\infty<x<\infty$.

2. Ruutfunktsioon pole üldiselt ei paaris ega paaritu funktsioon. Erijuhul, kui $b=c=0$ esitab ta paarisfunktsiooni.

3. Ruutfunktsiooni ekstreemumkohaks on $x_e=-\frac{b}{2a}$.

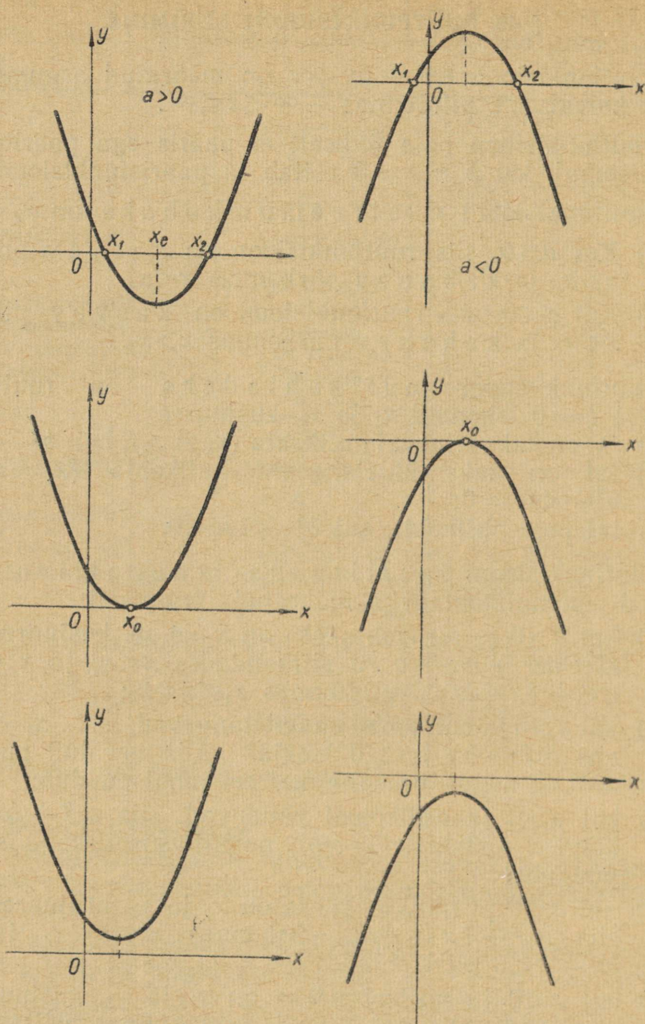
4. a) Kui $a>0$, siis ruutfunktsioon on kasvav piirkonnas $x>x_e$ ja kahanev piirkonnas $x<x_e$.
   b) Kui $a<0$, siis ruutfunktsioon on kasvav piirkonnas $x<x_e$ ja kahanev piirkonnas $x>x_e$.

5. Ruutfunktsiooni nullkohtadeks on ruutvõrrandi $ax^2+bx+c=0$ lahendid x_1 ja x_2, kusjuures
   a) tal on kaks erinevat nullkohta ($x_1\neq x_2$), kui $b^2-4ac>0$;
   b) tal on kaks ühtelangevat nullkohta ($x_1=x_2$), kui $b^2-4ac=0$;
   c) tal pole nullkohti, kui $b^2-4ac<0$.

6. Ruutfunktsiooni positiivsus- ja negatiivsuspiirkonnad on nullkohtadega määratud järgmiselt:
   a) kui $a>0$ ja nullkohtadeks on x_1 ja x_2, kusjuures $x_1<x_2$, siis $ax^2+bx+c>0$ piirkondades $x<x_1$ ja $x>x_2$ ning $ax^2+bx+c<0$ piirkonnas $x_1<x<x_2$;
   b) kui $a>0$ ja nullkohad on ühtelangevad, s. t. $x_1=x_2=x_0$, siis $ax^2+bx+c>0$ kõikjal, välja arvatud punkt, kus $x=x_0$; negatiivsuspiirkond sel juhul puudub;
   c) kui $a>0$ ja nullkohad puuduvad, siis $ax^2+bx+c>0$ kõigi x väärtuste korral; negatiivsuspiirkond sel juhul puudub;
   d) kui $a<0$ ja nullkohtadeks on x_1 ja x_2, kusjuures $x_1<x_2$, siis $ax^2+bx+c>0$ piirkonnas $x_1<x<x_2$ ja $ax^2+bx+c<0$ piirkondades $x<x_1$ ja $x>x_2$;
   e) kui $a<0$ ja nullkohtadeks on $x_1=$ $=x_2=x_0$, siis $ax^2+bx+c<0$ kõikjal, välja arvatud punkt, kus $x=x_0$; positiivsuspiirkond sel juhul puudub;
   f) kui $a<0$ ja nullkohad puuduvad, siis $ax^2+bx+c<0$ kõigi x väärtuste korral; positiivsuspiirkond sel juhul puudub.

7. a) Kui $a>0$ ja $x\to\infty$, siis $(ax^2+bx+c)\to\infty$;
   kui $a>0$ ja $x\to-\infty$, siis $(ax^2+bx+c)\to\infty$.
   b) Kui $a<0$ ja $x\to\infty$, siis $(ax^2+bx+c)\to-\infty$;
   kui $a<0$ ja $x\to-\infty$, siis $(ax^2+bx+c)\to-\infty$.

Põhjenda neid väiteid, kasutades selleks ka joonist 175.



Joon. 175.

Uurime näiteks funktsiooni $3x^2 - 4x - 4$.

1. Et antud funktsioon on ruutfunktsioon, siis on tema määramispiirkonnaks $-\infty < x < \infty$.

2. Asendades antud funktsiooni avaldises x $(-x)$-ga, saame $3x^2 + 4x - 4$. Kui antud funktsiooni tähistada $f(x)$-ga, siis ei kehti siin võrdused: $f(x) = f(-x)$, $f(x) = -f(-x)$. Seega antud funktsioon pole ei paaris- ega paaritu funktsioon.

3. Haripunkti koordinaadid leiame täisruuduks teisendamise võtte abil järgmiselt:

$$3x-4x-4=3\left(x^2-\frac{4}{3}x\right)-4=3\left(x^2-\frac{4}{3}x+\frac{4}{9}\right)-4-\frac{4}{3}=$$

$$=3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2-5\frac{1}{3}.$$

Selle ruutfunktsiooni graafiku haripunktiks on seega punkt

$$\left(\frac{2}{3};\ -5\frac{1}{3}\right).$$

4. Et siin $a>0$, siis on kahanemispiirkonnaks $x<\frac{2}{3}$ ja kasvamispiirkonnaks $x>\frac{2}{3}$.

5. Nullkohtade leidmiseks lahendame ruutvõrrandi

$$3x^2-4x-4=0,$$

mille lahendid on:

$$x_1=-\frac{2}{3};\ x_2=2.$$

6. Teades kasvamis- ja kahanemispiirkondi ning nullkohti, saab kohe välja kirjutada positiivsus- ja negatiivsuspiirkondi. Vaadeldaval juhul

$$3x-4x-4<0,\ \text{kui}\ -\frac{2}{3}<x<2;$$

$$3x^2-4x-4>0,\ \text{kui}\ x<-\frac{2}{3}\ \text{ja kui}\ x>2.$$

7. Et $a=3>0$, siis x tõkestamatul kasvamisel kas positiivses või negatiivses suunas osutub funktsioon ikka tõkestamatult kasvavaks positiivses suunas.

Uurimise tulemused paigutame tabelisse

	Funktsioonid		
	$3x^2-4x-4$	$2x^2-3x$	$-x^2+4$
1. Määramispiirkond	$-\infty<x<\infty$		
2. Kas paaris- või paaritu funktsioon	ei kumbki		
3. a) Maksimumpunkt	puudub		
b) Miinimumpunkt	$\left(\frac{2}{3};\ -5\frac{1}{3}\right)$		

	Funktsioonid		
	$3x^2-4x-4$	$2x^2-3x$	$-x^2+4$
4. a) Kasvamispiirkond	$x>\frac{2}{3}$		
b) Kahanemispiirkond	$x<\frac{2}{3}$		
5. Nullkohad	$x=-\frac{2}{3}$; $x=2$		
6. a) Positiivsuspiirkond	$x<-\frac{2}{3}$; $x>2$		
b) Negatiivsuspiirkond	$-\frac{2}{3}<x<2$		
7. a) Kui $x\to\infty$, siis b) Kui $x\to-\infty$, siis	$\left.\right\}(3x^2-4x-4)\to\infty$		

Täida tabel ka funktsioonide $2x^2-3x$ ja $-x^2+4$ osas!

Ülesandeid.

318. Missugust funktsiooni nimetatakse ruutfunktsiooniks?

319. Kuidas tehakse kindlaks, kas parabooli haripunkt on maksimumpunktiks või miinimumpunktiks?

320. Uuri funktsioone ja esita tulemused tabelis.

a) $2x^2-5x+3$
b) $-3x^2+3$
c) $x^2-24x+144$
d) $0{,}2x^2+2{,}6x$
e) $x(2x+3)+1$
f) $(x-3)(x-1)-15$
g) $2x^2-13x+15$
h) $-3x^2-8$

Skitseeri uurimistulemuste põhjal ka vastavad graafikud.

321. Ristkülikukujulise muruplatsi mõõtmed on 20 m ja 36 m. Selle ümber rajatakse ühelaiune lillepeenar, mille pindala on 12% muruplatsi pindalast. Kui lai on rajatav lillepeenar?

322. Koolipeoks müüdi kahesuguse hinnaga pileteid, kokku 400 piletit. Õpilaspilet oli 20 kopikat odavam täiskasvanu piletist. Õpilaspiletite müügist laekus 60 rubla ja muude piletite müügist 40 rubla. Kui kallid olid piletid?

323. Kui kuubi üht mõõdet vähendati 2 cm võrra, teist 3 cm võrra, kolmandat aga suurendati 4 cm võrra, siis väheneb ruumala 216 cm^3 võrra. Leia kuubi serva pikkus.

324. Kolhoosikeskusest raudteejaama on maanteed mööda 24 km, metsavaheteed mööda aga 15 km. Rong väljub kell 14.38. Autobuss ja hobusõiduk asuvad rongileminejatega teele vastavalt kell 13.50 ja 13.20; autobuss sõidab mööda maanteed, hobusõiduk mööda metsavaheteed. Autobuss sõidab tunnis 28 km rohkem kui

hobusõiduk ja jõuab jaama 9 minutit varem kui hobusõiduk. Kas kõik jõudsid rongile?

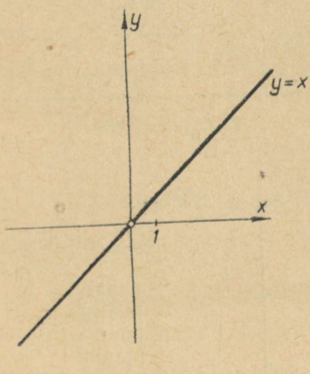
325. Raudteejaama veetorni paak täitub peapumba kaudu 3,5 tunni võrra lühema ajaga kui tagavarapumba kaudu. Mõlema pumba töötades täitub paak 6 tunni jooksul. Leia aeg, mis on tarvilik paagi täitmiseks peapumba kaudu.

326. Missuguste ruutfunktsioonide nullkohtade leidmisele taandusid ülesanded 321—325? Kas ühe ja sama ülesande lahendamine võib taanduda erinevate funktsioonide nullkohtade leidmisele? Too näiteid.

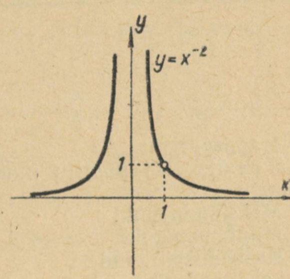
§ 50. ASTMEFUNKTSIOONI UURIMINE.

Tunneme astmefunktsiooni $y=x^n$ astendaja n järgmistel väärtustel: a) $n=1$; 2; 3; b) $n=-1$; -2; -3; c) $n=\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$.

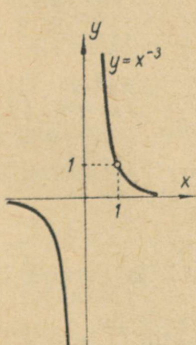
Joonistel 176, 170, 173, 166, 177, 178, 167 ja 179 on esitatud nende funktsioonide graafikud.



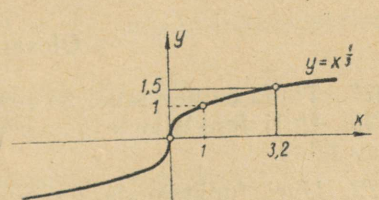
Joon. 176.



Joon. 177.



Joon. 178.



Joon. 179.

Uurime funktsiooni $y = x^{-3}$ (joon. 178).

1. See funktsioon ei ole määratud, kui $x = 0$. Tema määramispiirkonnaks on seega: $-\infty < x < 0$ ja $0 < x < \infty$.

2. Asendades x $(-x)$-ga, saame $(-x)^{-3} = -x^{-3}$. Seega vaadeldav funktsioon on paaritu funktsioon. Graafik on tsentraalsümmeetriline, kusjuures sümmeetria tsentriks on koordinaatide alguspunkt.

3. Sellel funktsioonil ei ole maksimum- ega miinimumpunkti.

4. Vaadeldav funktsioon kahaneb nii vahemikus $-\infty < x < 0$ kui ka vahemikus $0 < x < \infty$.

5. Funktsiooni graafik ei lõika x-telge, sest ei leidu niisugust väärtust, mille puhul kehtiks võrdus $\frac{1}{x^3} = 0$.

6. Vahemikus $-\infty < x < 0$ on funktsiooni väärtused negatiivsed, sest negatiivse arvu kuup on negatiivne, ja vahemikus $0 < x < \infty$ positiivsed, sest positiivse arvu kuup on positiivne.

7. Kui $x \to \infty$, siis $x^{-3} \to 0$ ja kui $x \to -\infty$, siis samuti $x \to 0$. Kui aga $x \to 0$ (vasakult), siis $x^{-3} \to -\infty$ ja kui $x \to 0$ (paremalt), siis $x^{-3} \to \infty$.

Võtame uurimistulemused kokku tabelisse.

	Funktsioonid		
	x^{-1}	x^{-2}	x^{-3}
1. Määramispiirkond			$-\infty < x < 0$ ja $0 < x < \infty$
2. Kas paaris- või paaritu funktsioon			paaritu
3. a) Maksimumpunkt			puudub
b) Miinimumpunkt			puudub
4. a) Kasvamispiirkond			puudub
b) kahanemispiirkond			$-\infty < x < 0$ ja $0 < x < \infty$
5. Nullkohad			puudub
6. a) Positiivsuspiirkond			$0 < x < \infty$
b) Negatiivsuspiirkond			$-\infty < x < 0$
7. Kui $x \to \infty$, siis Kui $x \to -\infty$, siis			$x^{-3} \to 0$
Kui $x \to 0$ (v), siis			$x^{-3} \to -\infty$
Kui $x \to 0$ (p), siis			$x^{-3} \to \infty$

Ülesandeid.

327. Täida eelnev tabel ka funktsioonide x^{-1} ja x^{-2} osas.

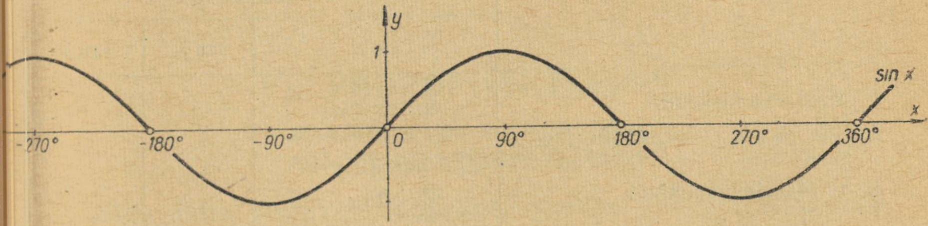
328. Uuri funktsioone $y = x^n$, kus $n = 1$, 2 ja 3 ning koosta vastav tabel.

329. Uuri funktsioone $y = x^n$, kus $n = \frac{1}{2}$ ja $\frac{1}{3}$ ning koosta vastav tabel.

§ 51. TRIGONOMEETRILISTE FUNKTSIOONIDE UURIMINE.

Oleme tuttavad trigonomeetriliste funktsioonidega: $\sin x$, $\cos x$ ja $\tan x$.

Uurime funktsiooni $y = \sin x$, tuginedes tema graafikule (joon. 180).



Joon. 180.

1. $\sin x$ on määratud argumendi iga väärtuse korral.
2. $\sin x$ on paaritu funktsioon (§ 46).
3. a) $\sin x$ maksimumpunktideks on $x = -\frac{3\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{5\pi}{2}$; $\frac{9\pi}{2}$ jne.

   Üldiselt, $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, kus n on mistahes täisarv.

   b) $\sin x$ miinimumpunktideks on $x = -\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{7\pi}{2}$ jne.

   Üldiselt, $x = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi$, kus n on mistahes täisarv.
4. a) Vastavalt maksimum- ja miinimumpunktide asukohtadele on $\sin x$ kasvav vahemikkudes: $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{3}{2}\pi, \frac{5\pi}{2}\right)$ jne. Üldiselt, $\left(-\frac{\pi}{2} + 2n\pi, \frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)$, kus n on mistahes täisarv.

   b) Kahanemispiirkondadeks on vahemikud: $\left(-\frac{3}{2}\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$ $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right)$ jne. Üldiselt, $\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi, \frac{3}{2}\pi + 2n\pi\right)$, kus n on mistahes täisarv.
5. Nullkohtadeks on $x = -\pi$, 0, π, 2π jne. Üldiselt, $x = n\pi$, kus n on mistahes täisarv.
6. a) $\sin x$ on positiivne vahemikkudes: $(-2\pi, -\pi)$, $(0, \pi)$, $(2\pi, 3\pi)$ jne. Üldiselt, $(2n\pi, (2n+1)\pi)$, kus n on mistahes täisarv.

   b) $\sin x$ on negatiivne vahemikkudes $(-\pi, 0)$, $(\pi, 2\pi)$, $(3\pi, 4\pi)$ jne. Üldiselt, $((2n-1)\pi, 2n\pi)$, kus n on mistahes täisarv.

7. Kui x kasvab tõkestamatult kas positiivses või negatiivses suunas, siis $\sin x$ ei lähene mingile kindlale väärtusele ega kasva ka tõkestamatult, vaid tema väärtused võnguvad -1 ja 1 vahel.

Kanname uurimistulemused tabelisse.

	Funktsioonid		
	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$
1. Määramispiirkond	$-\infty < x < \infty$		
2. Kas paaris- või paaritu funktsioon	paaritu		
3. a) Maksimumpunktid	$\frac{\pi}{2} + 2n\pi$		
Miinimumpunktid	$-\frac{\pi}{2} + 2n\pi$		
4. a) Kasvamispiirkonnad	$\left(-\frac{\pi}{2} + 2n\pi, \frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)$		
b) Kahanemispiirkonnad	$\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi, \frac{3}{2}\pi + 2n\pi\right)$		
5. Nullkohad	$n\pi$		
6. a) Positiivsuspiirkonnad	$(2n\pi, (2n+1)\pi)$		
b) Negatiivsuspiirkonnad	$((2n-1)\pi, 2n\pi)$		
7. Kui $x \to \infty$, siis	võngub		
Kui $x \to -\infty$, siis	võngub		

Ülesandeid.

330. Uuri funktsioone $\cos x$ ja $\tan x$ ning esita tulemused tabelis.

331. Uuri funktsioone $\sin 2x$ ja $\cos \frac{x}{2}$ ning esita tulemused tabelis.

VI. PÖÖRDFUNKTSIOON.

§ 52. PÖÖRDFUNKTSIOONI MÕISTE. PÖÖRDFUNKTSIOONI GRAAFIK.

Olgu antud lineaarne funktsioon $y=2x+4$. Avaldades sellest võrdusest argumendi x, saame

$$x=\frac{1}{2}y-2.$$

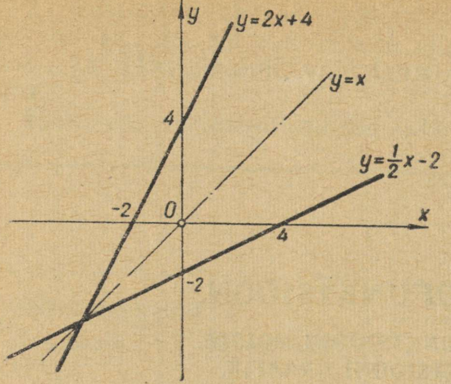
Kui loeme selles võrduses y argumendiks, siis võrduse vasak pool on funktsioon, mille tähiseks on x. Nii moodustatud uut funktsiooni nimetataksegi antud funktsiooni $y=2x+4$ **pöördfunktsiooniks.**

Üldiselt, kui on antud mingi funktsioon $y=f(x)$, siis avaldades siit x ja lugedes y argumendiks, saame antud funktsiooni pöördfunktsiooni, mille tähiseks on x, s. t. $x=g(y)$.

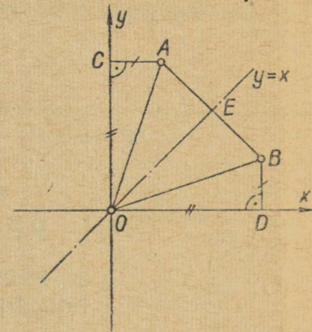
Et meil seni on x olnud ikka argumendi tähiseks ja y funktsiooni tähiseks, siis on otstarbekohane võtta saadud pöördfunktsiooni esitises samuti x argumendi tähiseks ja y funktsiooni tähiseks. Seega funktsiooni $y=2x+4$ pöördfunktsiooniks on $y=\frac{1}{2}x-2$.

Uurime nüüd pöördfunktsiooni graafikut võrreldes antud funktsiooni graafikuga. Selleks esitame antud funktsiooni $y=2x+4$ ja tema pöördfunktsiooni $y=\frac{1}{2}x-2$ graafikud ühes ja samas teljestikus (joon. 181). Tõmbame ka I ja III veerandi poolitaja, s. t. joonestame samas teljestikus veel funktsiooni $y=x$ graafiku. Näeme, et funktsiooni ja tema pöördfunktsiooni graafikud on sirge $y=x$ suhtes sümmeetrilised; tõepoolest, murdes joonise mööda sirget $y=x$ kokku, langevad funktsiooni ja tema pöördfunktsiooni graafikud ühte.

Võrdust $y=2x+4$ rahuldab arvupaar (1; 6). Sama arvupaar rahuldab ka võrdust $x=\frac{1}{2}y-2$. Kui viimases võrduses vahetame tähised x ja y, s. t. esitame selle võrduse kujus $y=\frac{1}{2}x-2$, siis seda võrdust rahuldab arvupaar (6; 1).



Joon. 181.



Joon. 182.

Kui teisendame funktsiooni $y=f(x)$ kujule $x=g(y)$, siis nii esimest kui ka teist võrdust rahuldavad ühed ja samad arvupaarid. Kui nüüd vahetame x ja y asukoha teises võrduses, siis peame vahetama kohad ka arvudel nendes arvupaarides, mis antud võrdust rahuldasid, et nad nüüd rahuldaksid saadud uut võrdust.

Seega vastab igale punktile $(a; b)$ antud funktsiooni graafikul punkt $(b; a)$ tema pöördfunktsiooni graafikul.

Tõestame nüüd, et

iga funktsiooni graafik ja tema pöördfunktsiooni graafik on sümmeetrilised sirge $y=x$ suhtes.

Olgu funktsiooni $y=f(x)$ graafikul mingi punkt $A(a; b)$, siis tema pöördfunktsiooni $y=g(x)$ graafikul on punkt $B(b; a)$.

Näitame, et punktid A ja B on sümmeetrilised sirge $y=x$ suhtes. Selleks peab $AE=EB$ ja $AB \perp OE$ (joon. 182). Mõlemad tingimused järelduvad kolmnurkade AOE ja BOE võrdsusest. Nende kolmnurkade võrdsus järeldub aga kolmnurkade ACO ja BDO võrdsusest. Seega kulgeb tõestus järgmiselt.

Vaatleme kolmnurki ACO ja BDO. Need on täisnurksed kolmnurgad vastavalt võrdsete kaatetitega $AC=BD=a$ ja $OC=$ $=OD=b$. Seega

$$\triangle ACO = \triangle BDO.$$

Edasi vaatleme kolmnurki AOE ja BOE. Nendel on ühine külg OE ning küljed AO ja BO on võrdsed (kui võrdsete täisnurksete kolmnurkade ACO ja BDO hüpotenuusid); edasi

$$\angle EOA = \angle EOB,$$

sest konstrueeritud võrdsetest nurkadest

$$\angle COE = \angle DOE$$

võrdseid nurki

$$\angle COA = \angle BOD$$

lahutades saame võrdsed nurgad

$$\angle EOA = \angle EOB.$$

Seega tunnuse knk järgi

$$\triangle AOE = \triangle BOE.$$

Siit järeldub kohe, et $AE = EB$ ja $\angle AEO = \angle BEO$. Et need võrdsed nurgad kokku moodustavad sirgnurga, siis on nad mõlemad täisnurgad. Seega $AB \perp OE$ ning järelikult punktid A ja B on tõesti sümmeetrilised sirge OE suhtes.

§ 53. RUUTFUNKTSIOONI PÖÖRDFUNKTSIOON.

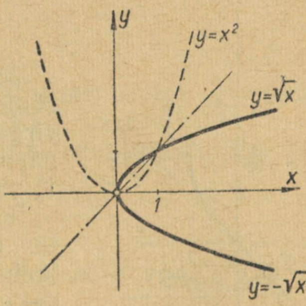
Vaatleme ruutfunktsiooni tema kõige lihtsamas kujus $y = x^2$. Kui siit avaldada x, saame kaks võrdust

$$x = \sqrt{y} \text{ ja } x = -\sqrt{y};$$

vahetades neis tähised, saame võrdused kujul

$$y = \sqrt{x} \text{ ja } y = -\sqrt{x},$$

milledest kumbki osutub ruutfunktsiooni pöördfunktsiooniks.



Joon. 183.

Antud ruutfunktsiooni graafikuks on teatavasti parabool, mille haripunkt on koordinaatide alguspunktis ning mille sümmeetriateljeks on y-telg (joon. 183). Peegeldades seda graafikut sirge $y = x$ suhtes, saame parabooli, mille sümmeetriateljeks on x-telg. Selle parabooli ülemine osa on graafikuks funktsioonile $y = \sqrt{x}$ ja alumine osa on graafikuks funktsioonile $y = -\sqrt{x}$.

Ülesanne.

Uuri funktsiooni $y = -\sqrt{x}$.

§ 54. TRIGONOMEETRILISTE FUNKTSIOONIDE PÖÖRDFUNKTSIOONID.

a) Siinusfunktsiooni pöördfunktsioon (ehk arkussiinusfunktsioon).

Nurga leidmisel $\sin\alpha$ antud väärtuse järgi tutvusime ka arkussiinuse mõistega: kui $\sin\alpha = m$, siis väikseima absoluutväärtusega nurka α, mis seda võrdust rahuldab, tähistasime sümboliga $\arcsin m$.

Matemaatikas on kasutusel veel sümbol $\text{Arcsin}\, m$, mis erineb eelmisest oma suure algustähe poolest ja millega tähistatakse kõigi nende nurkade hulka, mis antud võrdust $\sin\alpha = m$ rahuldab.

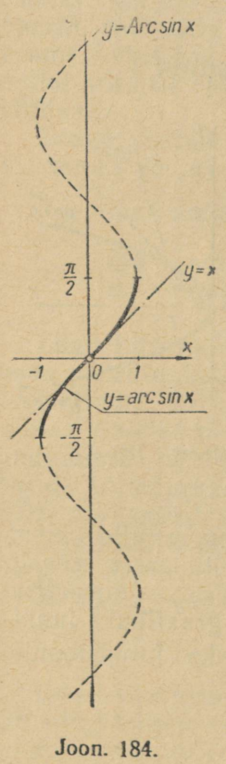
Olgu nüüd antud funktsioon $y = \sin x$. Kui vaatleme siin suurust x otsitavana, siis sellel võrrandil on lõpmata palju lahendeid, millede koguhulga võime üles kirjutada sümboliga $\text{Arcsin}\, y$.

Seega

$$x = \text{Arcsin}\, y.$$

Vahetades tähised, saame siinusfunktsiooni pöördfunktsioonina funktsiooni

$$y = \text{Arcsin}\, x.$$



Joon. 184.

Joonestame selle funktsiooni graafiku sümmeetrilisena siinusfunktsiooni graafikuga sirge $y = x$ suhtes (joon. 184). Jooniselt näeme, et igale x väärtusele vahemikus $(-1; 1)$ vastab lõpmata palju funktsiooni väärtusi.

Kui ruutfunktsiooni pöördfunktsioon esitus kahe funktsioonina (§ 53), siis siinusfunktsiooni pöördunktsioon esitub lõpmata paljude funktsioonidena. Et siinusfunktsiooni pöördfunktsioone on lõpmata palju, siis tähistataksegi neid ühise sümboliga $\text{Arcsin}\, x$. Nagu jooniselt näeme, on kõigi nende funktsioonide graafikud sümmeetrilised x-teljega paralleelsete sirgete $y = -\frac{\pi}{2}$; $y = \frac{\pi}{2}$ $y = \frac{3}{2}\pi$ jne. suhtes. Seetõttu võetaksegi ainult üks neist lähemale vaatlusele. Selleks võetakse tavaliselt see funktsioon, mille graafik on joonisel 184 kujutatud pideva joonena. Tema tähistamiseks kasutatakse sümbolit.

$$y = \arcsin x.$$

b) F u n k t s i o o n i $y = \arcsin x$ u u r i m i n e.

1) Jooniselt 184 näeme, et funktsioonide $y = \mathrm{Arcsin}\, x$ graafikud asuvad ribas -1 kuni 1. Seega ka $y = \arcsin x$ on määratud, kui $-1 \leqslant x \leqslant 1$.
2) Et $\arcsin(-x) = -\arcsin x$, siis on ta paaritu funktsioon.
3) Sellel funktsioonil on miinimumpunktiks $\left(-1; -\frac{\pi}{2}\right)$ ja maksimumpunktiks $\left(1; \frac{\pi}{2}\right)$.
4) Funktsioon $y = \arcsin x$ on kasvav kogu ulatuses.
5) $\arcsin x = 0$, kui $x = 0$.
6) $\arcsin x > 0$, kui $0 < x \leqslant 1$;
   $\arcsin x < 0$, kui $-1 \leqslant x < 0$.
7) Et argumendi väärtused on piiratud -1 ja 1-ga, siis pole mõtet uurida funktsiooni, kui $x \to \infty$ või $x \to -\infty$.

Joonesta vastav tabel ja esita uurimistulemused tabelis!

c) K o o s i n u s f u n k t s i o o n i p ö ö r d f u n k t s i o o n (e h k a r k u s k o o s i n u s f u n k t s i o o n).

Analoogiliselt arkussiinusfunktsiooni tuletamisega võime koosinusfunktsioonist $y = \cos x$ lähtudes saada pöördfunktsioonina arkuskoosinusfunktsiooni

$$y = \mathrm{Arccos}\, x,$$

mille graafik (joon. 185) osutub koosinusfunktsiooni graafiku peegelduseks sirgest $y = x$. Sellest graafikust kasutatakse harilikult ainult seda osa, mis joonisel on esitatud pidevjoonega ja mis on funktsiooni

$$y = \arccos x$$

graafikuks.

Graafikule tuginedes uuri selle funktsiooni käitumist ja kanna tulemused tabelisse!

c) T a n g e n s f u n k t s i o o n i p ö ö r d f u n k t s i o o n (e h k a r k u s t a n g e n s f u n k t s i o o n).

Eestpoolt tuttavate mõttekäikudega saame tangensfunktsioonist $y = \tan x$ lähtudes tuletada pöördfunktsioonina arkustangensfunktsiooni

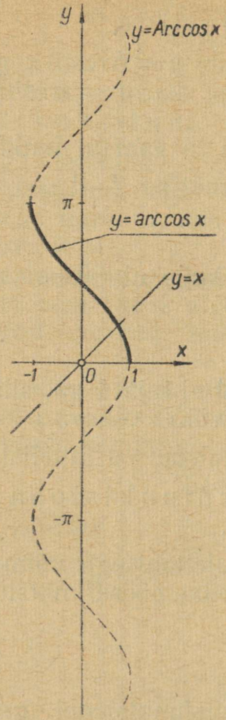
$$y = \mathrm{Arctan}\, x,$$

mille graafik (joon. 186) osutub tangensfunktsiooni graafiku peegelduseks sirgest $y = x$. Vaatleme jällegi ainult graafiku seda osa, mis joonisel on esitatud pidevjoonega. See on funktsiooni

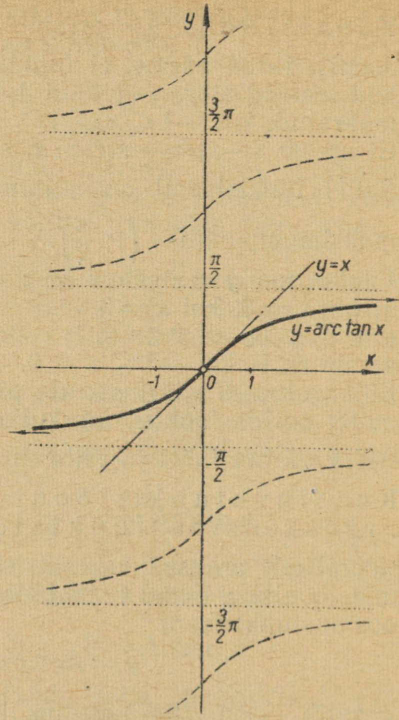
$$y = \arctan x$$

graafik.

Uuri seda funktsiooni ja esita tulemused tabelis.



Joon. 185.



Joon. 186.

Ülesandeid.

332. Leia järgmiste funktsioonide pöördfunktsioonid.

a) $y=\frac{3}{4}x-5$ d) $y=3x^2$ g) $y=\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x-2$

b) $y=-\frac{2}{3}x+\frac{13}{5}$ e) $y=-4x^2+6$ h) $y=\frac{3-x}{4+x}$

c) $y=35{,}2x+17{,}6$ f) $y=2x^2-3x$ i) $y=\frac{5}{x^2+1}$

333. Uuri järgmiste antud funktsioonide pöördfunktsioone.

a) $y=x^3$ b) $y=-2x^2$ c) $y=\sqrt[3]{x^2}$

Selleks: 1) joonesta antud funktsiooni graafik;

2) joonesta peegeldusteisenduse abil pöördfunktsiooni graafik;

3) uuri pöördfunktsiooni tema graafikule tuginedes.

VII. EKSPONENTFUNKTSIOON JA LOGARITM-FUNKTSIOON.

§ 55. EKSPONENTFUNKTSIOONI MÕISTE.

Ülesanne. Paberipoognast valmistatakse väikesi kaardikesi. Selleks murtakse poogen pooleks, saadud pooled omakorda pooleks jne. Kokku poolitati 8 korda. Mitu kaardikest saadakse? Mitu kaardikest saadakse pärast x-kordset poolitamist?

1.	poolitamise	tulemusena	saadakse	2^1	kaarti;
2.	„	„	„	2^2	„
3.	„	„	„	2^3	„
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
8.	„	„	„	2^8	„
x.	„	„	„	2^x	„

Seega pärast 8-kordset poolitamist saadakse $2^8 = 256$ kaarti ja pärast x-kordset poolitamist 2^x kaarti.

Kui paberipoognaid on näiteks 5, siis saadakse pärast 8-kordset poolitamist $5 \cdot 2^8$ ja pärast x-kordset poolitamist $5 \cdot 2^x$ kaarti. Kui antud paberipoognaid on 10, saadakse kaarte vastavalt $10 \cdot 2^8$ ja $10 \cdot 2^x$.

Kui paberipoogen ja tema osad tükeldatakse iga kord kolmeks, siis pärast x-kordset kolmeks jaotamist saadakse 3^x kaarti. Kui tükeldusarv oleks 5, siis saadakse 5^x kaarti jne.

Ülesande lahendamisel saadud tulemused on erijuhud nn. eksponentfunktsioonist

$$k \cdot a^x,$$

kus x on argument, k ja a aga konstandid.

Funktsiooni $y = k \cdot a^x$, kus x on argument ning k ja a on konstandid ($a \neq 0$ ja $k \neq 0$), nimetatakse eksponentfunktsiooniks.

Konstandi a suhtes kehtestatakse sageli tingimused $a > 0$ ja $a \neq 1$.

Tingimuse $a>0$ põhjustab asjaolu, et negatiivse a korral argumendi x teatud väärtuste puhul funktsioonil väärtus puudub; näiteks, kui $a=-4$ ja $x=\frac{1}{2}$, siis saame funktsiooni väärtuse arvutamisel avaldise

$$(-4)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{-4},$$

millel ei ole reaalset väärtust.

Juhul, kui $a=1$, taandub eksponentfunktsioon lihtsalt konstandiks k, sest $1^x=1$ iga x korral.

Eksponentfunktsiooni uurimisel piirdumegi funktsioonidega, kus nimetatud tingimused on täidetud.

§ 56. EKSPONENTFUNKTSIOONI UURIMINE.

Vaatleme eksponentfunktsiooni juhul, kui $k=1$ ja $a=2$. Vastava eksponentfunktsiooni $y=2^x$ graafiku joonestamiseks (joon. 187) koostame tabeli:

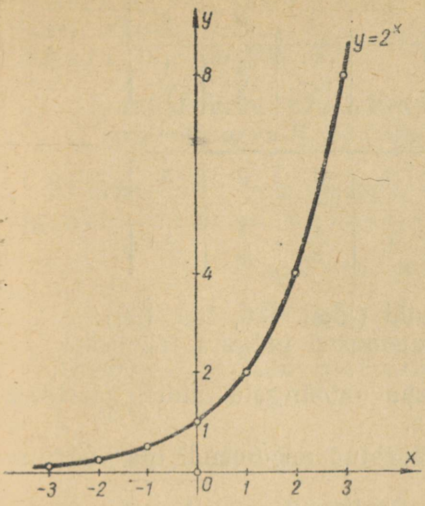
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
2^x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

Saadud graafikule tuginedes uurime funktsiooni $y=2^x$ ja esitame tulemused tabelis.

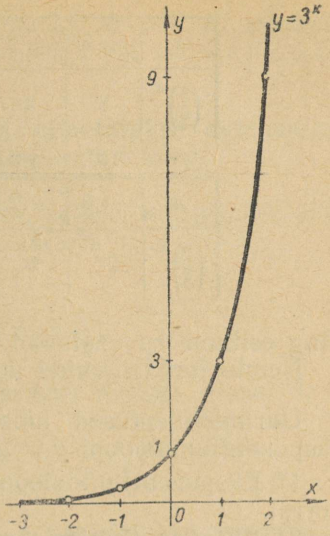
	Funktsioonid	
	2^x	3^x
1. Määramispiirkond	$-\infty<x<\infty$	
2. Paaris- või paaritu funktsioon	ei kumbki	
3. a) Maksimumpunktid	puuduvad	
b) Miinimumpunktid		
4. a) Kasvamispiirkond	$-\infty<x<\infty$	
b) Kahanemispiirkond	puudub	
5. Nullkohad	puuduvad	
6. a) Positiivsuspiirkond	$-\infty<x<\infty$	
b) Negatiivsuspiirkond	puudub	
7. Kui $x\to\infty$, siis	$2^x\to\infty$	
Kui $x\to-\infty$, siis	$2^x\to 0$	

Koostame nüüd funktsioonide $y=3^x$, $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ ja $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ väärtuste tabelid

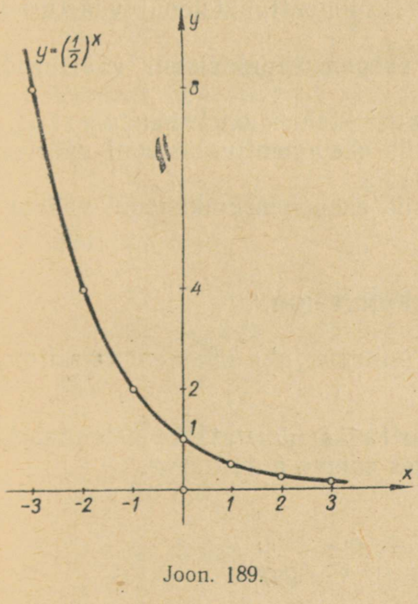
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
3^x	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27



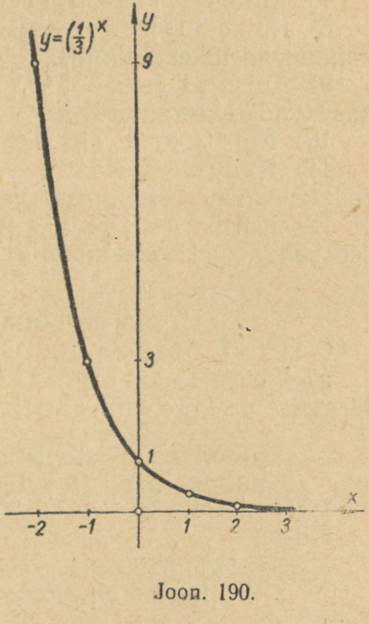
Joon. 187.



Joon. 188.



Joon. 189.



Joon. 190.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$\left(\frac{1}{2}\right)^x$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$\left(\frac{1}{3}\right)^x$	27	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$

ning esitame ka vastavad graafikud (joon. 188, 189, 190). Nende funktsioonide uurimistulemused paiguta tabelisse!

Uurimistulemused lubavad teha mõningaid üldisi järeldusi eksponentfunktsiooni $y=a^x$ kohta.

1) Eksponentfunktsioon on määratud argumendi iga väärtuse korral.

2) Eksponentfunktsioon ei ole ei paaris- ega paaritu funktsioon.

3) Eksponentfunktsioonil ei ole maksimum- ega miinimumpunkte.

4) Eksponentfunktsioonil ei ole nullkohti.

5) Eksponentfunktsioon on positiivne.

6) Kui $x=0$, siis $a^x=1$.

7) Kui $a>1$, siis eksponentfunktsioon on kasvav.

8) Kui $a>1$ ja $x\to-\infty$, siis eksponentfunktsiooni väärtused kahanevad tõkestamatult.

9) Kui $a>1$ ja $x\to+\infty$, siis eksponentfunktsiooni väärtused kasvavad tõkestamatult.

10) Kui $0<a<1$, siis eksponentfunktsioon on kahanev.

11) Kui $0<a<1$ ja $x\to-\infty$, siis eksponentfunktsiooni väärtused kasvavad tõkestamatult.

12) Kui $0<a<1$ ja $x\to+\infty$, siis eksponentfunktsiooni väärtused kahanevad tõkestamatult.

§ 57. LOGARITMFUNKTSIOON.

a) L o g a r i t m i m õ i s t e. Tunneme juba kümnendlogaritme järgmise definitsiooni alusel:

antud arvu kümnendlogaritmiks nimetatakse astendajat, millega arvu 10 astendades saame antud arvu.

Nii on

$$\log 100 = 2, \text{ sest } 10^2 = 100;$$
$$\log 0{,}0001 = -4, \text{ sest } 10^{-4} = 0{,}0001 \text{ jne.}$$

Analoogiliselt defineeritakse logaritme ka arvust 10 erineval alusel. Näiteks defineerime logaritme alusel 2 või nn. **kahendlogaritme** järgmiselt:

antud arvu kahendlogaritmiks nimetatakse astendajat, millega arvu 2 astendades saame antud arvu.

Et eristada erineva alusega logaritme, selleks märgitakse alus logaritmisümboli juurde indeksina. Nii näiteks

$$\log_2 8 = 3, \text{ sest } 2^3 = 8;$$
$$\log_2 \frac{1}{16} = -4, \text{ sest } 2^{-4} = \frac{1}{16}.$$

Analoogiliselt võib defineerida logaritme näiteks alusel 3, 5, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$ jne.

Defineerime lõpuks logaritmid alusel a:

antud arvu logaritmiks alusel a nimetatakse astendajat, millega tuleb alust a astendada, et saada antud arvu.

Kui b on antud arv ja a logaritmide alus, siis

$$\log_a b = c, \text{ kui } a^c = b,$$

millest

$$\boxed{a^{\log_a b} = b}$$

Viimast definitsiooni nimetatakse **logaritmi üldiseks definitsiooniks.**

Ülesandeid.

334. Leia:

a) $\log_7 49$; b) $\log_2 \frac{1}{32}$; c) $\log_6 216$; d) $\log_3 81$;
e) $\log_5 625$; f) $\log_{25} 625$; g) $\log_9 729$; h) $\log_4 64$.

335. Leia x, kui

a) $\log_2 x = 5$; b) $\log_{\frac{1}{2}} 4 = x$; c) $\log_x 2 = 2$;
d) $\log_{\frac{1}{3}} x = -3$; e) $\log_2 \frac{1}{8} = x$; f) $\log_x 0{,}125 = -2$;
g) $\log_2 x = 4$; h) $\log_{0{,}1} 10 = x$; i) $\log_x 8 = \frac{3}{4}$.

336. Leia: a) $2^{\log_2 8}$; b) $3^{\log_3 9}$; c) $36^{\log_6 2}$; d) $25^{\log_5 3}$; e) $81^{\log_9 7}$.

b) Logaritmfunktsiooni mõiste. Leiame eksponentfunktsiooni $y = 10^x$ pöördfunktsiooni. Selleks vaatleme antud võrdust võrrandina, milles tundmatuks on x; tundmatu x avaldamisel saame:

$$x = \log y.$$

Kui lugeda siin x funktsiooniks ja y argumendiks, siis esitab see võrdus antud eksponentfunktsiooni pöördfunktsiooni. Vahetades tähised, saame sellest logaritmfunktsiooni (alusel 10, mis jäetakse märkimata):

$$y = \log x.$$

Analoogiliselt võime tuletada teiste eksponentfunktsioonide pöördfunktsioonid. Olgu antud näiteks eksponentfunktsioonid

$$2^x, \ 3^x, \left(\frac{1}{2}\right)^x \text{ ja } \left(\frac{1}{3}\right)^x.$$

Vastavad pöördfunktsioonid on

$$y = \log_2 x, \quad y = \log_3 x, \quad y = \log_{\frac{1}{2}} x \text{ ja } y = \log_{\frac{1}{3}} x.$$

Olgu nüüd antud eksponentfunktsioon kujus $y = a^x$, kus $a > 0$ ja $a \neq 1$. Tema pöördfunktsiooniks on siis

$$y = \log_a x, \text{ kus } a > 0 \text{ ja } a \neq 1.$$

Funktsiooni $y = \log_a x$, kus $a > 0$ ja $a \neq 1$, nimetatakse logaritmfunktsiooniks.

Seega on logaritmfunktsioon $\log_a x$ eksponentfunktsiooni a^x pöördfunktsioon.

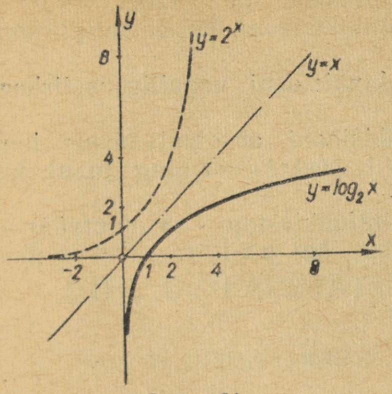
c) Logaritmfunktsiooni graafik. Lähtudes eksponentfunktsioonide

$$2^x, \ 3^x, \ \left(\frac{1}{2}\right)^x \text{ ja } \left(\frac{1}{3}\right)^x$$

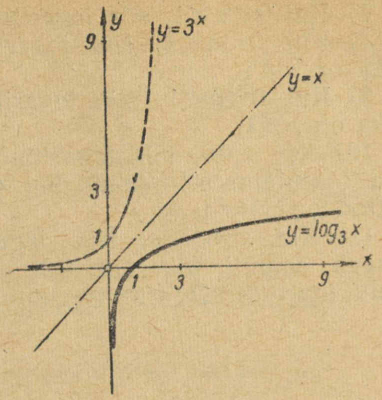
graafikuist (joon. 187—190), on hõlbus tuletada nende pöördfunktsioonide ehk vastavate logaritmfunktsioonide

$$y = \log_2 x, \ y = \log_3 x, \ y = \log_{\frac{1}{2}} x \text{ ja } y = \log_{\frac{1}{3}} x$$

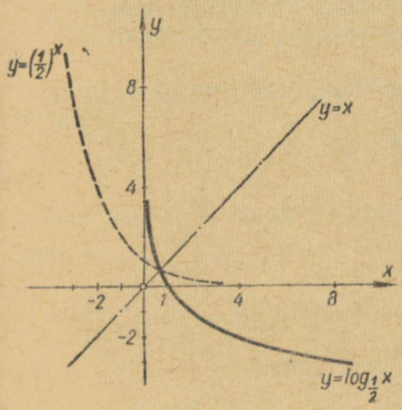
graafikud (joon. 191—194), kasutades peegeldamist sirgest $y = x$.



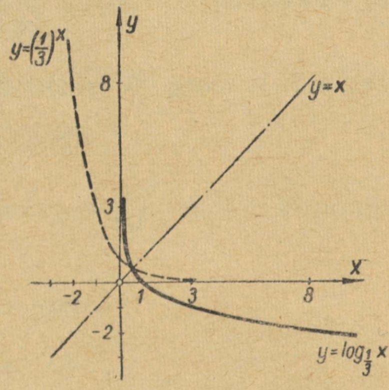
Joon. 191.



Joon. 192.



Joon. 193.



Joon. 194.

Tuginedes graafikuile uuri neid funktsioone ja esita tulemused tabelis!

Logaritmfunktsiooni omadused võtame lõpuks kokku järgmiselt.

1) Logaritmfunktsioon on määratud argumendi kõigi positiivsete väärtuste korral.

2) Logaritmfunktsioonil ei ole maksimum- ega miinimumpunkte.

3) $\log_a x=0$, kui $x=1$.

4) Kui $a>1$, siis logaritmfunktsioon on kasvav.

5) Kui $a>1$, siis logaritmfunktsiooni positiivsuspiirkonnaks on $x>1$.

6) Kui $a>1$, siis logaritmfunktsiooni negatiivsuspiirkonnaks on $x<1$.

7) Kui $0<a<1$, siis logaritmfunktsioon on kahanev.

8) Kui $0<a<1$, siis logaritmfunktsiooni positiivsuspiirkonnaks on $x<1$.

9) Kui $0<a<1$, siis logaritmfunktsiooni negatiivsuspiirkonnaks on $x>1$.

10) Kui $x \to 0$, siis logaritmfunktsiooni absoluutväärtus kasvab tõkestamatult: juhul, kui $a>1$, $f(x) \to -\infty$ ning juhul, kui $0<a<1$, $f(x) \to +\infty$.

11) Kui $x \to +\infty$, siis logaritmfunktsiooni absoluutväärtus kasvab samuti tõkestamatult: juhul, kui $a>1$, $f(x) \to +\infty$ ning juhul, kui $0<a<1$, $f(x) \to -\infty$.

VIII. GEOMEETRILINE PROGRESSIOON.

§ 58. GEOMEETRILISE PROGRESSIOONI MÕISTE.

Eksponentfunktsiooni $y = ka^x$ väärtuste jada, mis on saadud argumendi väärtustel 1, 2, 3, 4, . . ., nimetatakse geomeetriliseks progressiooniks.

Näiteks saame eksponentfunktsioonist 5^x geomeetrilise progressiooni:

$$5, \ 25, \ 125, \ 625, \ldots$$

Analoogiliselt saame funktsioonidest $\left(\frac{1}{4}\right)^x$ ja $0{,}3 \cdot 2^x$ progressioonid:

$$\frac{1}{4}, \ \frac{1}{16}, \ \frac{1}{64}, \ \frac{1}{256}, \ldots$$

$$0{,}6; \ 1{,}2; \ 2{,}4; \ 4{,}8; \ldots$$

Geomeetrilise progressiooni arve nimetatakse vastavalt tema esimeseks, teiseks, kolmandaks jne. **liikmeks.**

Toodud näidete juures võime tähele panna, et geomeetrilise progressiooni kahe järjestikuse liikme jagatis on jääv suurus. Nii on esimese näite puhul

$$\frac{25}{5} = \frac{125}{25} = \frac{625}{125} = 5,$$

teise näite puhul

$$\frac{1}{16} : \frac{1}{4} = \frac{1}{64} : \frac{1}{16} = \frac{1}{256} : \frac{1}{64} = \frac{1}{4}$$

ja kolmanda näite puhul

$$\frac{1{,}2}{0{,}6} = \frac{2{,}4}{1{,}2} = \frac{4{,}8}{2{,}4} = 2.$$

Paneme tähele, et saadud jagatis on võrdne vastavas eksponentfunktsiooni avaldises oleva astme alusega.

Näitame, et see omadus on üldine kõigile geomeetrilistele progressioonidele.

Olgu eksponentfunktsioon antud üldises kujus

$$ka^x.$$

Anname argumendile x kaks järjestikust naturaalarvulist väärtust n ja $n+1$ ning moodustame saadud väärtuste jagatise; selle taandamisel saamegi aluse a:

$$\frac{ka^{n+1}}{ka^n} = a.$$

Seega,

geomeetrilise progressiooni iga liikme jagatis eelnevaga on jääv ja võrdub lähteeksponentfunktsiooni avaldises esineva astme alusega.

Geomeetrilise progressiooni kahe järjestikuse liikme jagatist nimetatakse selle progressiooni **teguriks** ning seda tähistatakse tavaliselt tähega q. Niisiis, kui eksponentfunktsioon on ka^x, siis vastava geomeetrilise progressiooni tegur $q = a$. Edaspidi kirjutame eksponentfunktsiooni sageli kohe kujul kq^x.

§ 59. GEOMEETRILISE PROGRESSIOONI ÜLDLIIKME VALEM.

Olgu antud geomeetriline progressioon

$$-1, 2, -4, 8, -16, \ldots .$$

Leiame eksponentfunktsiooni, mille väärtuste jadaks see geomeetriline progressioon osutub.

Eksponentfunktsiooni üldine kuju on kq^x. Seega tulevad määrata konstandid k ja q. Progressiooni mingi liikme jagamisel eelmise liikmega leiame, et $q = -2$. Kordaja k määramiseks esitame otsitava eksponentfunktsiooni tabeli kujul:

x	1	2	3	4	5 ...
kq^x	-1	2	-4	8	-16 ...

Selle tabeli mistahes veeruga määratud arvupaar peab rahuldama võrdust

$$y = k(-2)^x.$$

Kasutades näiteks esimese veeruga määratud arvupaari, saame võrrandi

$$-1 = k(-2)^1,$$

millest

$$k = \frac{1}{2}.$$

Seega on otsitavaks eksponentfunktsiooniks

$$y = \frac{1}{2} \cdot (-2)^x.$$

Kontrolli, kas tabeli muud väärtuspaarid rahuldavad seda võrdust!

Lahendame oma ülesande ka üldkujul.

Olgu antud geomeetriline progressioon

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n.$$

Otsitava eksponentfunktsiooni tabelikujuline esitus on järgmine:

x	1	2	3	...	n
kq^x	a_1	a_2	a_3	...	a_n

Kordaja k määramiseks rakendame endisel viisil võrdust

$$y = kq^x,$$

mida peab rahuldama tabeli mistahes veerus leiduv väärtuspaar. Näiteks esimest väärtuspaari $(1;\ a_1)$ kasutades saame võrrandi

$$a_1 = kq,$$

millest

$$k = \frac{a_1}{q}.$$

Seega otsitav eksponentfunktsioon on

$$y = \frac{a_1}{q} \cdot q^x$$

ehk

$$y = a_1 q^{x-1}.$$

Et kõik tabelis antud väärtuspaarid rahuldavad seda võrdust, siis rahuldab seda ka paar $(n;\ a_n)$, s. t. kehtib seos

$$\boxed{a_n = a_1 q^{n-1}}$$

Seda võrdust nimetatakse geomeetrilise progressiooni **üldliikme valemiks.** Andes siin n-ile mingi väärtuse, võime leida progressiooni niisuguse liikme, mille järjekorranumbriks on see antud väärtus.

Nii on geomeetrilise progressiooni

$$2, \ 6, \ 18, \ 54, \ \ldots$$

üldliikme valemiks

$$a_n = 2 \cdot 3^{n-1}.$$

Kui tahame leida selle progressiooni kümnendat liiget, siis võtame viimases valemis $n = 10$ ja saame

$$a_{10} = 2 \cdot 3^9 = 2 \cdot 19\,683 = 39\,366.$$

Ülesandeid.

337. Leia eksponentfunktsioonidele

$$3^x; \quad \left(\frac{2}{3}\right)^x; \quad \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x; \quad 2{,}3 \cdot (1{,}2)^x$$

vastavate geomeetriliste progressioonide neli esimest liiget.

338. Leia alljärgnevatele progressioonidele vastavad eksponentfunktsioonid.

a) $1, \ 3, \ 9, \ 27, \ \ldots$

b) $64, \ 32, \ 16, \ 8, \ \ldots$

c) $10, \ 2, \ \frac{2}{5}, \ \frac{2}{25}, \ \ldots$

d) $\frac{5}{6}, \ 1\frac{2}{3}, \ 3\frac{1}{3}, \ 6\frac{2}{3}, \ \ldots$

e) $-1, \ 2, \ -4, \ 8, \ \ldots$

f) $0{,}7; \ 0{,}07; \ 0{,}007; \ 0{,}0007; \ \ldots$

339. Leia eelmises ülesandes toodud progressioonide üldliikme valemid.

340. Tee kindlaks, missugused järgmistest arvude jadadest on aritmeetilised ja missugused geomeetrilised progressioonid.

a) $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$

b) $2, 4, 8, 16, \ldots$

c) $-5, -1, 3, 7, \ldots$

d) $\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{12}, \ldots$

e) $4, 9, -6, -12, \ldots$

f) $-32, -16, 16, 32, \ldots$

g) $14, -7, 3{,}5, \frac{7}{4}, \ldots$

h) $456, 233, 10, -213, \ldots$

341. Leia geomeetrilise progressiooni nõutud elemendid.
a) 5. liige, kui $a_1 = 3$ ja $q = 2$;
b) 4. liige, kui $a_3 = 35$ ja $q = 5$;
c) 6. liige, kui $a_9 = \frac{2}{3}$ ja $q = \frac{1}{2}$
d) 1. liige, kui $a_8 = 256$ ja $q = 4$;
e) 13. liige, kui $a_7 = 0{,}2187$ ja $q = 1\frac{2}{3}$
f) 6. liige ja tegur, kui $a_5 = 4$ ja $a_4 = 169$;
g) 9. liige ja tegur, kui $a_8 = 64$ ja $a_{10} = 9$.

342. Leia geomeetrilise progressiooni esimene liige a_1, kui
a) $a_8 = 640$ ja $q = 2$;
b) $a_6 = 500$ ja $q = 1{,}2$;
c) $a_6 = 3125$ ja $q = 2{,}5$.

343. Leia geomeetrilise progressiooni tegur q, kui
a) $a_1 = \frac{1}{9}$ ja $a_{10} = 2187$;
b) $a_1 = 6{,}25$ ja $a_7 = 0{,}0256$;
c) $a_1 = \frac{1}{64}$ ja $a_{13} = 64$.

344. Leia geomeetrilise progressiooni liikmete arv n, kui
a) $a_1 = 6$, $a_n = 96$ ja $q = 4$;
b) $a_1 = 0{,}3$, $a_n = 0{,}108$ ja $q = 0{,}6$;
c) $a_1 = 74{,}67$, $a_n = 2{,}333$ ja $q = 0{,}5$.

345. Arvuta logaritmide abil
a) a_1, kui $q = 0{,}75$ ja $a_5 = 1{,}9$;
b) a_1, kui $q = 1{,}083$ ja $a_{41} = 239{,}6$;
c) a_{20}, kui $a_1 = 2$ ja $q = 1{,}229$;
d) a_{25}, kui $a_1 = 1$ ja $q = 1{,}334$.

§ 60. GEOMEETRILISE PROGRESSIOONI SUMMA VALEM.

Olgu antud geomeetriline progressioon

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n;$$

nõutakse leida summat

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n.$$

Kui liikmeid on vähe, siis on seda summat lihtne leida otsese liitmise teel. Näiteks

$$5 + 25 + 125 + 625 = 780.$$

Kui liikmeid on palju, siis otsene liitmine oleks tülikas ja aeganõudev. Seepärast on otstarbekohane siin samuti nagu aritmeetilise progressiooni puhulgi tuletada valem, mis hõlbustab otsitava summa arvutamist.

Kasutades üldliikme valemit, esitame summa S_n kõik liidetavad progressiooni esimese liikme ja teguri kaudu:

$$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \ldots + a_1q^{n-1}.$$

Korrutades selle võrduse mõlemad pooled q-ga, saame võrduse

$$S_nq = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \ldots + a_1q^n.$$

Lahutades teise võrduse pooltest esimese võrduse vastavad pooled, saame

$$S_nq - S_n = (a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \ldots + a_1q^n) - \\ - (a_1 + a_1q + a_1q^2 + \ldots + a_1q^{n-1}).$$

Avades sulud, saame pärast koondamist

$$S_nq - S_n = a_1q^n - a_1$$

ehk

$$S_n(q-1) = a_1(q^n - 1),$$

millest

$$\boxed{S_n = \frac{a_1(q^n-1)}{q-1}}$$

Kasutame, kui $q > 1$

ehk

$$\boxed{S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}}$$

Kasutame, kui $q < 1$

Saadud valem ongi geomeetrilise progressiooni **summa valem**. Leiame selle abil näiteks progressiooni

$$2,\ 6,\ 18,\ 54,\ \ldots$$

üheksa esimese liikme summa.

Siin on $a_1 = 2$, $q = 3$ ja $n = 9$. Seega

$$S_9 = \frac{(3^9-1)\cdot 2}{3-1} = 3^9 - 1 = 19\,683 - 1 = 19\,682.$$

Geomeetrilise progressiooni summa valemile võib anda ka teistsuguse kuju. Selleks avame kõigepealt lugejas sulud:

$$S_n = \frac{a_1q^n - a_1}{q-1};$$

rakendades saadud murru lugeja esimeses liikmes progressiooni üldliikme valemit $a_n = a_1 q^{n-1}$, saame selle liikme kirjutada kujul $a_n q$ ning summa valemi kujul:

$$\boxed{S_n = \frac{a_n q - a_1}{q - 1}}$$

Viimast summa valemi kuju kasutame juhul, kui on teada progressiooni viimane liige a_n.

Ülesandeid.

346. Leia geomeetrilise progressiooni summa valemi abil järgmised summad.

a) $34 + 68 + 136 + 272 + 544 + 1088$

b) $7 + 3\frac{1}{2} + 1\frac{3}{4} + \frac{7}{8} + \frac{7}{16} + \frac{7}{32}$

c) $2 - 10 + 50 - 250 + 1250 - 6250$

d) $15 - 12 + 9{,}6 - 7{,}68 + 6{,}144$

347. Joonesta alljärgnev geomeetrilise progressiooni elementide tabel vihikusse ning täida lüngad.

a_1	q	n	a_n	S_n
2	3	15		
4	5		1 562 500	
1		9		6 725 601
	6	11	241 864 704	
	−2		262 144	174 763
1		20	−524 288	
32	$2\frac{1}{2}$			5 187
$\frac{1}{3}$		10		$3\,280\frac{4}{9}$
	2	13	64	
2 187	$\frac{2}{3}$	12		
	$1\frac{1}{2}$	13	$132\,860\frac{1}{4}$	
−0,256	−2,5			−11,1534
6,25		7	0,0256	
		13	6,25	51 193,75

348. Alljärgnevate summade liidetavad moodustavad geomeetrilise progressiooni. Leia igal antud juhul: 1) progressiooni tegur, 2) puuduvad liidetavad, 3) liidetavate arv ja 4) summa.

a) $a^{10}+a^9b+a^8b^2+\ldots+b^{10}$

b) $a^7-a^6b+a^5b^2-a^4b^3+\ldots-b^7$

c) $a+\sqrt[5]{a^4b}+\sqrt[5]{a^3b^2}+\ldots+b$

d) $a+\sqrt[7]{a^6b}+\sqrt[7]{a^5b^2}+\ldots+b$

e) $\sqrt[8]{a^7}+\sqrt[8]{a^6b}+\sqrt[8]{a^5b^2}+\ldots+\sqrt[8]{b^7}$.

349. Aednik tellis endale haruldase taime 20 seemet. Ta külvas esimesel ja igal järgmisel kevadel kõik seemned ja sai igal sügisel igalt taimelt 7 seemet. Oletades, et ükski seeme ei lähe kaduma, leia, mitmendal aastal saab aednik 5 kg seemneid, kui 40 seemet kaalub 1 g.

350. Päevalill annab aastas keskmiselt 2 000 seemet. Oletame, et kasvutingimused on päevalillele ühesugused üle kogu maakera, et iga taim vajab jõudsaks arenemiseks 1 m² pinda, et ükski seeme ei lähe kaduma, vaid idaneb ja annab uue taime, ning et taim annab aastas ühe lõikuse. Mitu aastat kuluks, et ühest päevalille-seemnest arenenud taimed kataksid planeet Maa kogu maismaa osa? Maakera raadius on 6 400 km ja mered moodustavad 72% maakera pinnast.

351. Geomeetrilises progressioonis on 20 liiget. Paarisarvulise indeksiga kohtadel olevate liikmete summa on a ja paarituarvulise indeksiga kohtadel olevate liikmete summa on b. Leia esimene liige ja progressiooni tegur.

352. Geomeetrilises progressioonis on 40 liiget. Esimese kahekümne liikme summa on a ja viimase kahekümne liikme summa on b. Leia esimene liige ja progressiooni tegur.

353. Keegi räägib uudise kahele tuttavale. Need räägivad selle edasi kumbki omakorda kahele tuttavale jne. Oletame, et edasirääkimine toimub veerand tunni jooksul ja ainult neile, kes seda uudist veel ei tea. Mis kella ajaks on see uudis 7-miljonilise elanikkonnaga linnas kõigile teada, kui esimene rääkimine toimub kell 7 hommikul?

354. Kolhoos suurendab igal aastal oma põllupinda $\frac{1}{15}$ osa võrra eelmise aasta pinnast. Mitmendal aastal ületab põllupinna kogukasv 50% lähtepinnast?

355. Positiivsete liikmetega geomeetrilise progressiooni kolme esimese liikme summa on 221. Selle progressiooni kolmanda ja esimese liikme vahe on 136. Leia selle progressiooni kuue esimese liikme summa.

356. Tõesta, et geomeetrilises progressioonis on iga liige (välja arvatud esimene) temale eelneva ja järgneva liikme geomeetriline keskmine.

357. Tõesta, et kui kolm arvu x, y ja z moodustavad geomeetrilise progressiooni, siis

$$(x+y+z)(x-y+z)=x^2+y^2+z^2.$$

358. Tõesta, et iga geomeetrilise progressiooni algusest ja lõpust võrdsetel kaugustel seisvate liikmete korrutis on jääv ning võrdub äärmiste liikmete korrutisega.

359. Kasutades eelmises ülesandes leitud omadust, tuleta geomeetrilise progressiooni n liikme korrutise valem.

360. Leia progressiooni 1, 4, 16, . . . kuue esimese liikme korrutis.

361. India prints Schiram oli malemängust nii vaimustatud, et lubas mängu leiutajale Sissa Ibn Dahirile autasuna iga summa, mille see peaks küsima. Mängu leiutaja palus endale autasu nisuterades ja nimelt: 1 tera malelaua esimesele ruudule, 2 tera teisele, 4 tera kolmandale, 8 tera neljandale jne. Mitu tera palus endale Sissa Ibn Dahir?

Terade hulgast kujutluse saamiseks olgu antud järgmised andmed: 1 kott (70 kg) sisaldab ligikaudu $1{,}6 \cdot 10^6$ tera; ühe kaubavaguni kandejõud on 16 tonni.

§ 61. TÕKESTAMATULT KAHANEVA GEOMEETRILISE PROGRESSIOONI MÕISTE.

Eksponentfunktsiooni a^x uurimiskäigust teame, et kui $0<a<1$, siis argumendi tõkestamatul kasvamisel eksponentfunktsioon osutub tõkestamatult kahanevaks suuruseks. Sellest järeldub, et kui geomeetrilise progressiooni tegur on lihtmurd, s. t. $|q|<1$, siis liikmete arvu tõkestamatul kasvamisel geomeetrilise progressiooni liikmed kahanevad tõkestamatult. Näiteks progressiooni

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots$$

puhul tegur $q=\frac{1}{2}$ ning seetõttu, kui $n \to \infty$, siis $a_n \to 0$.

Sama võib öelda progressiooni

$$3; -1; \frac{1}{3}; -\frac{1}{9}; \frac{1}{27}; -\frac{1}{81}; \ldots$$

kohta, milles tegur on negatiivne, kuid absoluutväärtuselt väiksem kui 1 $\left(\text{antud juhul } q=-\frac{1}{3}\right)$.

Progressiooni nimetatakse l õ p m a t u k s, kui tema liikmete arv n tõkestamatult kasvab, s. t. kui $n \to \infty$. Geomeetrilist progressiooni nimetatakse k a h a n e v a k s, kui tema teguri q absoluutväärtus $|q|<1$.

Paragrahvi algul toodud arutluse põhjal võime nüüd öelda, et lõpmatu ja kahaneva geomeetrilise progressiooni üldliige on tõkestamatult kahanev suurus. Sümboleis:

$$\text{kui } n \to \infty \text{ ja } |q| < 1, \text{ siis } a_n \to 0.$$

Seepärast võib lõpmatut ja kahanevat geomeetrilist progressiooni nimetada ka *tõkestamatult kahanevaks geomeetriliseks progressiooniks*. Seega,

lõpmatu geomeetriline progressioon osutub tõkestamatult kahanevaks, kui teguri absoluutväärtus on väiksem kui 1.

§ 62. TÕKESTAMATULT KAHANEVA GEOMEETRILISE PROGRESSIOONI SUMMA.

Olgu vaja leida lõpmatu geomeetrilise progressiooni

$$2;\quad 1;\quad 0{,}5;\quad 0{,}25;\quad 0{,}125;\quad \ldots$$

kõigi liikmete summa. Eespool tuletatud summa valemeid ei saa nüüd kasutada, sest need kõlbavad ainult siis, kui liikmete arv n on lõplik. Seepärast võtamegi liikmete arvu esialgu lõpliku ning uurime summa muutumist liikmete arvu järsul suurenemisel. Näiteks kümne, saja ja tuhande esimese liikme summa arvutamisel saaksime valemi põhjal:

$$S_{10} = \frac{2(1-0{,}5^{10})}{1-0{,}5} = 4(1 - 0{,}5^{10});$$
$$S_{100} = \quad = 4(1 - 0{,}5^{100});$$
$$S_{1000} = \quad = 4(1 - 0{,}5^{1000}).$$

Märkame, et liikmete arvu kasvamisel antud progressiooni summa järjest vähem erineb väärtusest 4, sest kui $n \to \infty$, siis $0{,}5^n \to 0$. Nii jõuame otsusele, et antud lõpmatu progressiooni *kõigi* liikmete summa peaks olema nimelt 4.

On kokku lepitud, et

tõkestamatult kahaneva geomeetrilise progressiooni summaks S loetakse arvu, millele läheneb progressiooni n liikme summa S_n, kui $n \to \infty$.

Uurime nüüd geomeetrilise progressiooni n liikme summa valemit

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}, \text{ kui } n \to \infty \text{ ja } |q| < 1.$$

Teame, et 1-st väiksema arvu aste läheneb astendaja tõkestamatul kasvamisel tõkestamatult nullile, s. t. kui $|q| < 1$ ja $n \to \infty$, siis $q^n \to 0$. Seepärast võib valemist antud tingimusil liikme q^n kustutada ning saame uue valemi

$$\boxed{S = \frac{a_1}{1-q}}$$

mis osutubki tõkestamatult kahaneva geomeetrilise progressiooni summa valemiks. Valemi rakendamise näitena arvutame järgmise lõpmatu progressiooni summa:

$$3 - 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} - \frac{1}{81} + \ldots$$

Siin $a_1 = 3$ ja $q = -\frac{1}{3}$, seega

$$S = \frac{3}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$$

Ülesandeid.

362. Leia iga järgmise lõpmatult kahaneva geomeetrilise progressiooni summa.

a) $1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \ldots$ c) $\frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \frac{9}{32} + \ldots$

b) $16 + 4 + 1 + \frac{1}{4} + \ldots$ d) $3 \cdot 2 + 2 + \frac{2}{3} + \ldots$

363. Joonesta tabelid vihikusse ja täida tühjad kohad, kui a_1 on tõkestamatult kahaneva geomeetrilise progressiooni esimene liige, q — tegur ja S — summa.

a_1	q	S
7	$\frac{1}{2}$	
	$-\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$
5		$7\frac{1}{2}$
14	$-\frac{2}{5}$	
	0,2	15

a_1	q	S
117		90
	0,96	250
0,88		0,5
0,94	0,53	
	—0,1	1,2

364. Leia tõkestamatult kahaneva geomeetrilise progressiooni esimene liige ja tegur, kui summaks on:

$$a)\ \frac{1}{2-y}; \quad b)\ \frac{1}{5+2y}; \quad c)\ \frac{3}{4+y}.$$

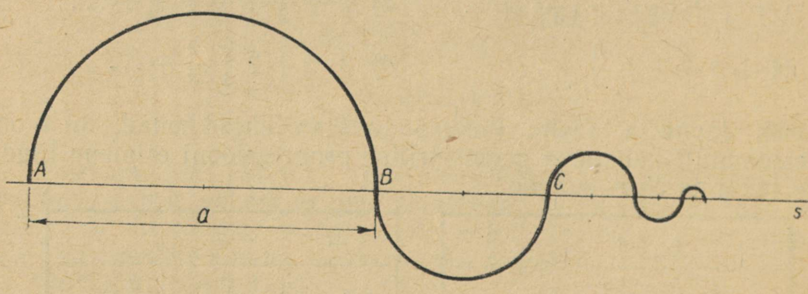
Missugust väärtust ei tohi $|y|$ ületada?

N ä i d e. Olgu $S=\frac{1}{8+3y}$. Et $S=\frac{a_1}{1-q}$, siis tuleb antud murd teisendada niisugusele kujule, kus nimetajas oleks esimeseks liikmeks 1. Selle kuju saame murru lugeja ja nimetaja jagamisel 8-ga:

$$S=\frac{\frac{1}{8}}{1+\frac{3}{8}y}.$$

Siit võime kirjutada, et $a_1=\frac{1}{8}$ ja $q=-\frac{3}{8}y$. Et rahuldada tingimust $|q|<1$, peab olema $|y|<\frac{8}{3}$.

365. 45°-se nurga haaral on võetud punkt, mis on nurga tipust kaugusel a. Sellest punktist on ehitatud ristlõik teisele haarale, selle ristlõigu aluspunktist on ehitatud ristlõik esimesele haarale jne. lõpmata. Leia nende ristlõikude pikkuste summa.



Joon. 195.

366. Sirgel s kujutatud lõiku $AB=a$ (joon. 195) pikendatakse tema poole võrra ja saadakse punkt C. Lõiku BC pikendatakse omakorda tema poole võrra jne., Kõigile nii saadud lõikudele kui diameetritele joonestatakse poolringjooned vaheldumisi üks ühele, teine teisele poole sirget s. Leia tekkiva kõverjoone kogupikkus p ning kõigi poolringide pindalade summa S.

IX. LÕPUTU KÜMNENDMURD.

§ 63. HARILIKU MURRU TEISENDAMINE KÜMNENDMURRUKS.

Hariliku murru teisendamisel kümnendmurruks jagatakse murru lugeja murru nimetajaga. See jagamine annab tulemuseks kas täpse arvu, nagu näiteks

$$\frac{5}{4} = 1{,}25,$$

või saame tulemuseks lõputu perioodilise kümnendmurru, nagu näiteks

$$\frac{4}{3} = 1{,}3333\ldots,$$

mida lühemalt kirjutatakse nii:

$$\frac{4}{3} = 1{,}(3).$$

Et kümnendmurd on võrdne hariliku murruga, mille nimetajaks on kümne aste, siis lõpliku kümnendmurruna avalduvad need harilikud murrud, mille nimetajas ei ole teisi tegureid peale 2 ja 5. Põhjenda seda!

Kui murru lugeja ei jagu täpselt nimetajaga, siis tekib jääk. Jäägile kirjutatakse juurde 0, saadud arv jagatakse uuesti nimetajaga, tekib uus jääk jne. Kui nimetaja teguriks on arv, mis ei ole 2 ega 5, siis jätkub jagamise protsess lõputult. Jagatiseks saame lõputu kümnendmurru. Jääk on alati väiksem kui nimetaja. Näiteks, kui on antud murd $\frac{a}{b}$, siis jääkideks võivad olla arvud $1, 2, \ldots, (b-1)$, s. t. võimalik jääkide arv on lõplik ja võrdub $(b-1)$-ga. Niisiis, kui jagamise protsess on lõputu, siis arv, mis on kord olnud jäägiks, kordub hiljem jälle jäägina. Siis korduvad aga ka temale järgnevad jäägid. Näiteks teisendame $\frac{37}{7}$ ja $\frac{19}{14}$ kümnendmurruks.

$$\begin{array}{r|l} 37 & 7 \\ \hline 20 & 5{,}285714\ldots \\ 60 & \\ 40 & \\ 50 & \\ 10 & \\ 30 & \\ 20 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 19 & 14 \\ \hline 50 & 1{,}3571428\ldots \\ 80 & \\ 100 & \\ 20 & \\ 60 & \\ 40 & \\ 120 & \\ 80 & \end{array}$$

Siin saime esimese ülesande jääkideks arvud 2, 6, 4, 5, 1, 3 ja siis tuli jäägiks jälle 2, millele järgnevad uuesti 6, 4, 5, 1, 3 ning jällegi 2. Nii kordub see lõputult.

Jääkidele 2, 6, 4, 5, 1, 3 vastavad jagatises numbrid 2, 8, 5, 7, 1, 4, mis samuti hakkavad korduma. Need numbrid, mis jagatises hakkavad korduma, moodustavad jagatise p e r i o o d i. Et jagatiseks on lõputu kümnendmurd, siis ei saa seda täielikult üles kirjutada. Seetõttu on kokku lepitud kirjutada jagatises ainult üks periood ja eraldada see sulgudega.

Nii kirjutame

$$\frac{37}{7}=5,(285714) \text{ ja } \frac{19}{14}=1,3(571428).$$

Kui periood algab kohe pärast koma, siis nimetatakse seda arvu **lõputuks puhtperioodiliseks kümnendmurruks.** Kui aga periood ei alga kohe pärast koma, siis nimetatakse seda arvu **lõputuks segaperioodiliseks kümnendmurruks.** Seega esimene toodud näidetest on lõputu puhtperioodiline ja teine lõputu segaperioodiline kümnendmurd.

Ülesandeid.

367. Missugused järgmistest murdudest on esitatavad lõpliku kümnendmurruna:

$$\frac{2}{5}, \frac{6}{25}, \frac{4}{35}, \frac{12}{17}, \frac{11}{8}, \frac{14}{15}, \frac{121}{16}, \frac{1024}{625}?$$

368. Esita järgmised murrud kümnendmurdudena:

$$\frac{9}{5}, \frac{29}{64}, \frac{132}{25}, \frac{17}{6}, \frac{35}{32}, \frac{16}{11}, \frac{87}{63}.$$

§ 64. LÕPUTU PERIOODILISE KÜMNENDMURRU ESITAMINE HARILIKU MURRUNA.

Olgu antud lõputu perioodiline kümnendmurd

$$4{,}5(62).$$

Vaatleme seda arvu summana

$$4{,}5+0{,}0(62).$$

Esitame teise liidetava harilike murdude abil:

$$0{,}0(62)=\frac{62}{1000}+\frac{62}{100\,000}+\frac{62}{10\,000\,000}+\ldots$$

Tulemuseks on tõkestamatult kahaneva geomeetrilise progressiooni summa, kus $a_1=\frac{62}{1000}$ ja $q=\frac{1}{100}$. Kasutades vastavat summa valemit, leiame, et

$$0{,}0(62)=\frac{\frac{62}{1000}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{62\cdot 100}{1000\cdot 99}=\frac{62}{990}.$$

Seega,

$$4{,}5(62)=4{,}5+\frac{62}{990}=\frac{45}{10}+\frac{62}{990}=\frac{4455+62}{990}=\frac{4517}{990}.$$

Ülesandeid.

369. Esita hariliku murruna järgmised lõputud puhtperioodilised kümnendmurrud: 0,(9); 0,(23); 0,(061); 2,(71); 63,(418).

370. Tuginedes eelmise ülesande lahendustele, sõnasta eeskiri lõputu puhtperioodilise kümnendmurru teisendamiseks harilikuks murruks.

371. Esita hariliku murruna järgmised lõputud segaperioodilised kümnendmurrud: 0,2(8); 0,3(54); 0,13(9); 2,65(15).

372. Tuginedes eelmise ülesande lahendustele, sõnasta eeskiri lõputu segaperioodilise kümnendmurru teisendamiseks harilikuks murruks.

373. Näita, et

$$0{,}11\ldots+0{,}222\ldots+0{,}333\ldots+\ldots+0{,}999\ldots=5.$$

§ 65. LIITINTRESS.

Hoiukassasse hoiule antud rahasummale, nn. h o i u s e l e, arvestatakse iga aasta lõpul juurde teatud kindel osa hoiusest. Näiteks, kui aasta algul anti hoiule 50 rubla ja juurde arvestatakse 2% hoiusest, s. o. 1 rubla, siis on järgmise aasta algul hoiul 51 rubla.

Juurdearvestatud summat nimetatakse **intressiks** ja arvu, mis näitab, mitmendik osa hoiusest kuulub juurdearvestamisele, nimetatakse **intressimääraks**.

Seega on toodud näites intressiks 1 rubla ja intressimääraks 0,02.

Ülesanne 1. Aasta algul on hoiul 60 rubla ning intressimäär on 3%. Kui suur on hoius järgmise aasta algul?

Lahendus. Aasta jooksul kasvab hoius 3% võrra 60-st rublast, s. o. 1,8 rubla; seega järgmise aasta alguseks on hoiul 61,8 rubla.

Ülesanne 2. Aasta algul viiakse hoiule k rubla; intressimäär on p%. Leida hoiuse väärtus esimese, teise, . . ., n-nda aasta lõpuks, kui intressi arvestatakse ainult esialgu hoiule viidud summalt.

Lahendus.

Esialgne hoiusumma: k;

esimese aasta lõpul: $k+\frac{kp}{100}$;

teise aasta lõpul: $k+\frac{kp}{100}+\frac{kp}{100}=k+2\cdot\frac{kp}{100}$;

kolmanda aasta lõpul: $k+3\cdot\frac{kp}{100}$;

. . . .

n-nda aasta lõpul: $k+n\cdot\frac{kp}{100}$.

Näeme, et sel viisil intressi arvestades moodustavad hoiuse väärtused aritmeetilise progressiooni, mille vaheks on aastaintress $\frac{kp}{100}$. Sel viisil n aasta jooksul saadavat koguintressi $\frac{nkp}{100}$ nimetatakse **lihtintressiks**.

Ülesanne 3. Aasta algul viiakse hoiule k rubla; intressimäär on p%. Leida hoiuse väärtus n-nda aasta lõpul, kui igal aastavahetusel liidetakse intress hoiuse senisele väärtusele juurde, s. t. kui intressi arvestatakse ka intressilt.

Lahendus.

Esialgne hoiusumma: k;

esimese aasta lõpul: $k+\frac{kp}{100}=k\left(1+\frac{p}{100}\right)$;

teise aasta lõpul: $k\left(1+\frac{p}{100}\right)+k\left(1+\frac{p}{100}\right)\frac{p}{100}=$

$$=k\left(1+\frac{p}{100}\right)\left(1+\frac{p}{100}\right)=k\left(1+\frac{p}{100}\right)^2;$$

kolmanda aasta lõpul: $k\left(1+\frac{p}{100}\right)^3$;

. . . .

n-nda aasta lõpul: $k\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$.

Kirjeldatud viisil arvestatavat intressi nimetatakse **liitintressiks**. Kirjutades sel viisil arvutatud hoiuse väärtused aastate järgi ritta, saame geomeetrilise progressiooni

$$k;\ k\left(1+\frac{p}{100}\right);\ k\left(1+\frac{p}{100}\right)^2, \ldots, k\left(1+\frac{p}{100}\right)^n.$$

Selle progressiooni tegurit $q = 1+\frac{p}{100}$ nimetatakse **intressiteguriks.** Niisiis,

liitintressi korral kasvab hoiule viidud rahasumma k n aasta jooksul intressiteguri n-nda astme kordseks.

Sümboleis:

$$\boxed{L = k\left(1+\frac{p}{100}\right)^n}$$

kus L on hoiuse lõppväärtus.

Kui hoiusummat tahetakse aasta keskel suurendada või tahetakse osa summat välja võtta, siis on tarvis arvutada intressi ka kuude ja päevade eest. Rahanduslikes küsimustes loetakse aasta päevade arvuks 360. Seega, kui ühe aasta intress on $\frac{kp}{100}$ rubla, siis ühe kuu intress on $\frac{kp}{12\cdot 100}$ rubla ja ühe päeva intress on $\frac{kp}{360\cdot 100}$ rubla.

Hoiukassades makstakse hoiustelt, milliseid võib välja võtta ükskõik millal, nn. nõudmiseni-hoiustelt, 2% intressi ja tähtajalistelt hoiustelt, s. o. hoiustelt, mis on antud hoiule kuni kindla tähtajani, 3% intressi.

Kui hoiustusaeg on üle ühe aasta, siis arvestatakse intressi ikka liiteviisil, s. t. igal aastavahetusel liidetakse aastaintress hoiusummale juurde.

§ 66. SUURUSTE LIITPROTSENDILINE MUUTUMINE.

Liitintressiga analoogilise mõttekäigu juurde jõuame mitmete muude ülesannete lahendamisel. Need ülesanded kuuluvad s u u r u s t e l i i t p r o t s e n d i l i s e m u u t u m i s e valdkonda. Toome mõned näited.

N ä i d e 1. Kolhoosi aastast piimatoodangut k liitrit otsustati suurendada igal aastal p% võrra. Kui suur on kolhoosi piimatoodang m aasta pärast?

Esimese aasta jooksul suureneb piimatoodang $\frac{kp}{100}$ liitri võrra seega:

esimese aasta jooksul toodetakse piima $k\left(1+\frac{p}{100}\right)$ liitrit;

teise aasta jooksul toodetakse piima $k\left(1+\frac{p}{100}\right)^2$ liitrit.

. . . .

m-nda aasta jooksul toodetakse piima $k\left(1+\frac{p}{100}\right)^m$ liitrit.

N ä i d e 2. Õhurõhu kohta kehtib seadus: 100-meetrilisele tõusule vastab õhurõhu vähenemine 1,2% võrra. Arvutada õhurõhk 400 m kõrgusel, kui merepinnal valitseb normaalrõhk (760 mm).

Kui õhurõhk merepinnal tähistada a_1, 100 m kõrgusel a_2 jne., siis rõhud 100-meetriliste kõrgusvahede tagant moodustavad geomeetrilise progressiooni:

$$760;\ 760\left(1-\frac{1,2}{100}\right);\ 760\left(1-\frac{1,2}{100}\right)^2, \ldots$$

Selle progressiooni tegur

$$q = 1 - 0,012 = 0,988.$$

Vastuseks on progressiooni viies liige $760 \cdot 0,988^4 \approx 724$ (mm). Seega on õhurõhk 400 m kõrgusel 724 mm.

N ä i d e 3. Rahvaarvu aastane juurdekasv olgu 1%. Kui suur peab olema põllumajandussaaduste toodangu aastase juurdekasvu protsent, et 15 aasta pärast tuleks ühe elaniku kohta põllumajandussaadusi 2 korda rohkem kui praegu?

Eelkõige tuleb leida, mitmekordseks kasvab elanikkond 15 aasta jooksul.

Loeme praeguse elanike arvu ühikuks, siis $a_1 = 1$. Aastase juurdekasvu tegur $q = 1 + \frac{1}{100} = 1,01$. Otsitav on progressiooni kuueteistkümnes liige.

$$a_{16} = a_1 \cdot q^{15} = 1 \cdot 1,01^{15} \approx 1,16.$$

Seega kasvab elanikkond 15 aasta jooksul 1,16 kordseks. Põllumajandussaaduste toodang peab sama aja jooksul kasvama 2 korda suuremaks, s. o. 2,32 kordseks.

Kui praegune põllumajandussaaduste toodang lugeda ühikuks, siis $a_1 = 1$ ja $a_{16} = 2,32$

$$2,32 = 1 \cdot q^{15}$$

$$q \approx 1,06 = 1 + \frac{6}{100}.$$

Püstitatud nõue on seega täidetud siis, kui põllumajandussaaduste toodangu aastane juurdekasv on 6%.

Ülesandeid.

374. Õpilane pani 31. augustil oma suvisest teenistusest 25 rbl. hoiukassasse hoiule «nõudmiseni». Kui suur oli õpilase hoiuse väärtus järgmise aasta 31. augustiks?

375. Tööline kogus raha mööbli ja televiisori ostmiseks. Selleks pani ta iga aasta algul hoiukassasse hoiule «nõudmiseni» oma ühe kuu palga 95 rubla. Hoiukassa arvestab liitintressi määraga 2%. Kui suur oli töölise hoiusumma esimese aasta lõpul, teise aasta lõpul? Kui suure summa võis tööline välja võtta neljanda aasta lõpul?

376. Õpetaja viis hoiukassasse hoiule «nõudmiseni» iga kuu 12% oma palgast. Kui suur oli õpetaja hoiusumma 1 kuu pärast, 2 kuu pärast, 12 kuu pärast (kõik enne järjekordset sissemaksu), kui õpetaja kuupalk on 85 rubla?

377. 3. septembril 1963. a. toimunud raha- ja asjade loterii järjekordsel loosimisel võitis 8. klassi õpilane 65-rublase külmutuskapi. Ta võttis eseme väärtuse välja rahas ja andis hoiukassasse tähtajaliselt hoiule kuni kooli lõpetamiseni, s. o. 3. juulini 1967. a. Hoiukassa maksab liitintressi määraga 3%. Kui suur on tähtpäeval väljavõetav summa?

378. Isa pani temale makstud preemiast 24% tähtajaliselt (liitintressimääraga 3%) hoiule oma pojale, kes hakkas parajasti õppima 1. klassis. Kui suure summa saab poeg pärast kooli lõpetamist (11 aastat hiljem), kui isale makstud preemia oli 50 rubla?

379. Tööstuse sisseseade maksis uuena 15 000 rubla. Tema väärtuse iga-aastasel hindamisel kustutatakse sisseseade vananemise ja kulumise tõttu 8% eelmise aasta väärtusest. Kui suur on sisseseade väärtus 10 aasta pärast?

380. Ameerika Ühendriikide president ja teadlane Benjamin Franklin pärandas oma testamendiga 1790. aastal Bostoni linnale 1000 naela tingimusel, et see kapital liitintressi kandes kasvaks tähtajaliselt 100 aastat. Saadud summast, 130 000 naelast kuulus

100 000 naela linnale, jääk tuli aga jätta uuesti sajaks aastaks tähtajaliselt hoiule. Missugust intressimäära arvestas Franklin?

381. Puu kõrguse iga-aastane juurdekasv on 80% eelmise aasta juurdekasvust. Mitme sentimeetri võrra kasvab puu teisel aastal, viiendal aastal, kui ta esimesel aastal kasvas 25 cm võrra?

382. Tööstuse toodangut kavatsetakse suurendada igal aastal 15% võrra võrreldes eelneva aastaga. Mitme protsendi võrra suureneb tööstuse aastatoodang seitseaastaku jooksul?

383. Radioaktiivse aine aatomeist laguneb ööpäeva vältel 2,8%. Mitme ööpäeva vältel laguneb pool selle aine aatomeist?

384. Toas, mille temperatuur on 20°, on keha, mille temperatuur on 100°. Olgu keha soojusisolatsiooni tingimused sellised, et keha temperatuur langeb igas minutis 2% võrra keha temperatuuri ja toa temperatuuri vahest. Leia keha temperatuur poole tunni pärast.

385. Kuumutamisel laguneb vesinikülihapend (H_2O_2) veeks ja hapnikuks. 10 minutit pärast reaktsiooni algust oli vesinikülihapendi kontsentratsioon $8\frac{g}{l}$ ja 10 minutit hiljem $4{,}8\frac{g}{l}$. Arvuta vesinikülihapendi esialgne kontsentratsioon eeldusel, et kontsentratsioon väheneb iga minuti jooksul sama protsendi võrra minuti algul olnud kontsentratsioonist.

386. Kinnises anumas on vedela väävli kohal esialgu 1 g vesinikku. Reaktsiooni tõttu väheneb vesiniku hulk 12 tunni jooksul 0,832 grammini. Arvuta, kui palju vesinikku on anumas 24 tunni pärast, arvestades, et vesiniku hulk väheneb iga tunni jooksul sama % võrra tunni algul olnud hulgast.

X. FUNKTSIOONI PIIRVÄÄRTUS.

§ 67. LÕPLIKULE VÄÄRTUSELE LÄHENEMINE.

Igapäevases elus esineb sageli juhtumeid, kus mingi suurus läheneb teatavale kindlale (lõplikule) väärtusele. Tööstuses võimaldab tootmisprotsesside automatiseerimine ja mitmesuguste ratsionaliseerimisettepanekute realiseerimine alandada toodangu omahinda, lähendada seda teatud miinimumile. Sportlane, rakendades enam teaduslikult põhjendatud treeningumeetodeid, lähendab järjest oma sportlikke tulemusi rekordile. Kolhoosi agronoomi mureks on väetiste õige doseerimisega üksikutele põldudele lähendada hektarisaaki eesrindlike majandite vastavatele näitajatele.

Nii sportlase treener, tehase peainsener kui ka kolhoosi agronoom koostavad plaani, kus nähakse ette norm ning selle saavutamise tähtaeg.

Näiteks nähti ühes kolhoosis 1970. aastaks ette nisu hektarisaagiks 27 tsentnerit. Planeeriti ka hektarisaagi kasv vahepealseteks aastateks järgmiselt:

1963. a.	14	tsentnerit
1964. a.	16	„
1965. a.	20	„
1966. a.	22	„
1967. a.	24	„
1968. a.	25	„
1969. a.	26	„
1970. a.	27	„

Üks treener seadis aga oma hoolealustele eesmärgiks, et need püstitavad 1970. aastal 10 000 m uisutamise maailmarekordiks aja 15 min. 26 sek. Ühtlasi planeeris ta 10 000 m rekordaja parandamise ka vahepealseteks aastateks:

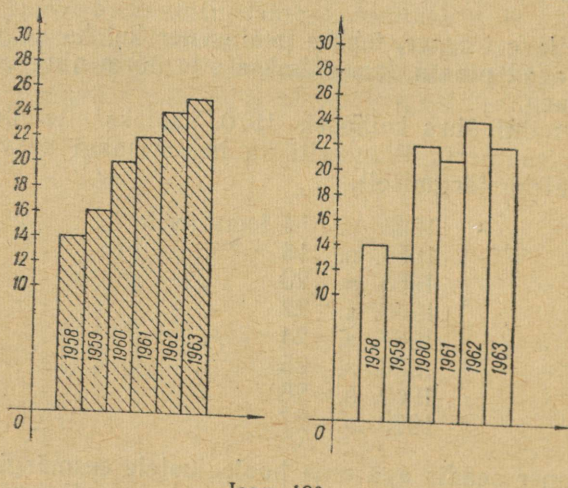
1963. a.	15 min. 40 sek.
1964. a.	15 min. 35 sek.
1965. a.	15 min. 33 sek.
1966. a.	15 min. 30 sek.

1967. a. 15 min. 29 sek.
1968. a. 15 min. 28 sek.
1969. a. 15 min. 27 sek.
1970. a. 15 min. 26 sek.

Iga järjekordse võistlusega, ratsionaliseerimisettepaneku rakendamisega või õigesti organiseeritud maa harimise ning väetisekülviga lähendatakse tulemust püstitatud normile ehk, teisiti, vahe saavutatud tulemuse ja normi vahel järjest väheneb.

Teatud juhuslikest põhjustest sõltuvalt, nagu näiteks haigus, põud jne., võib esineda plaani mittetäitmist, mistõttu lähenemine püstitatud eesmärgile ei pruugi kulgeda kogu aeg monotoonselt, s. t. kas kogu aeg tõusvas joones (hektarisaak) või kogu aeg langevas joones (10 000 m uisutamise aeg).

Tegelikus elus kohtume veel teistlaadi nähtustega. Nii näiteks toodangu omahinna või sportlike saavutuste piir, mis esialgu püstitatakse, võidakse aja jooksul ületada. Kui kunagi peeti kuulitõukes inimvõimete piiriks 17 meetrit ja 10 000 m uisutamises 17 minutit, siis nüüd on need piirid ammu ületatud. Kuuli on tõugatud juba üle 20 meetri ja 10 000 m uisutamise aeg läheneb 15 minutile.



Joon. 196.

Näiteks on joonisel 196 esitatud ühe kolhoosi hektarisaagi plaan ja tegelik saak tsentrites diagrammina. Siit nähtub, et kui plaanis esitatakse arvud kas monotoonselt kasvavatena või monotoonselt kahanevatena, siis tegelikkuses esineb nii plaani mittetäitmist kui ka selle ületamist.

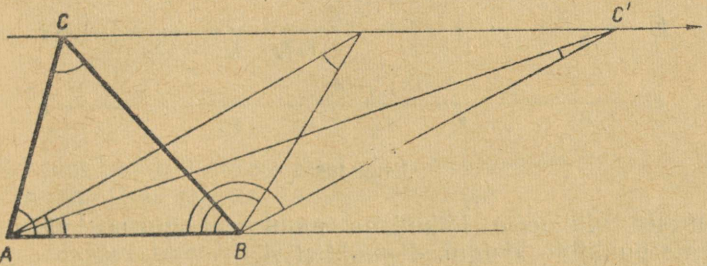
Teaduse arenemisega suudetakse aga tegelikus elus järjest täpsemini fikseerida niisuguseid piire, millistele toimub lähenemine.

Matemaatikas ja tema rakendustes saame anda ette väärtusi, mida vaadeldava muutuva suuruse väärtused enam ei ületa, küll aga lähenevad sellele tõkestamatult.

Järgnevalt vaatlemegi selliseid matemaatilisi suurusi, mis järjest lähenevad mingile lõplikule väärtusele.

§ 68. LÕPLIKULE VÄÄRTUSELE LÄHENEVAD SUURUSED.

Kolmnurga ABC tipp C hakkab nihkuma alusega AB paralleelset sirget mööda (joon. 197). Missugused kolmnurga elemendid osutuvad sel juhul tõkestamatult kasvavateks suurusteks, missugused tõkestamatult kahanevateks suurusteks?



Joon. 197.

Jälgime tipu B juures asetseva nurga muutumist. Paneme tähele, et tipu C kaugenemisel läheneb see nurk sirgnurgale ehk, teisiti, nurga B ja sirgnurga vahe läheneb nullile.

Seega,

kui $CC' \to \infty$, siis $\angle B \to \pi$ ehk, teisiti, $\angle B - \pi \to \infty$.

Muutuvat suurust nimetatakse lõplikule väärtusele lähenevaks suuruseks, kui selle muutuva suuruse väärtuste ja lõpliku väärtuse vahe on tõkestamatult kahanev suurus.

Et nurga B ja sirgnurga vahe läheneb nullile, s. t. see vahe on tõkestamatult kahanev suurus, siis on nurk B lõplikule väärtusele lähenev suurus.

Et ka null on lõplik väärtus, siis toodud näites on lõplikule väärtusele lähenevateks suurusteks veel nurgad A ja C, sest

$$\text{kui } CC' \to \infty, \text{ siis } \angle A \to 0;$$

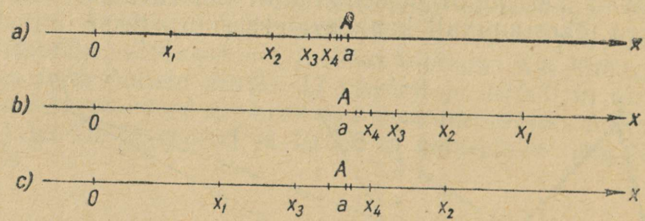
$$\text{kui } CC' \to \infty, \text{ siis } \angle B \to 0.$$

Seega, tõkestamatult kahanevad suurused kuuluvad lõplikule väärtusele lähenevate suuruste hulka.

Arvu, millele lähenevad lõplikule väärtusele läheneva suuruse väärtused, nimetatakse tema piirväärtuseks.

Nii on nurga B piirväärtuseks sirgnurk, nurga A ja nurga C piirväärtuseks aga 0.

Joonisel 198 on näidatud 3 võimalikku juhtu muutuva suuruse x väärtustele $x_1, x_2, x_3, \ldots$ vastavate punktide paigutuse kohta lõplikule väärtusele vastava punkti A suhtes.



Joon. 198.

Joonesta vihikusse lõikudena muutuva suuruse väärtustele vastavate punktide kaugused punktist A.

Näeme, et lõplikule väärtusele lähenevate suuruste korral selle suuruse väärtustele vastavate punktide ja lõplikule väärtusele vastava punkti vaheline kaugus läheneb nullile. Muutuva suuruse väärtusele vastavad punktid võivad lõplikule väärtusele vastavast punktist asetseda kas paremal (juht a) või vasakul (juht b) või kord paremal, kord vasakul (juht c).

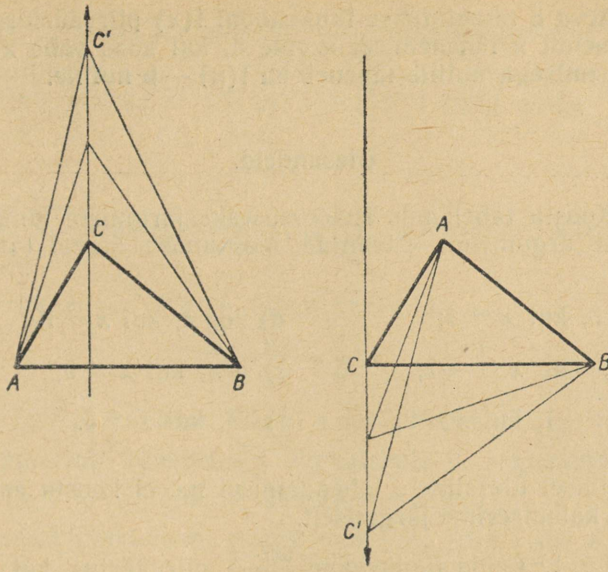
Seega, juhul a) on $x_i - a < 0$,
juhul b) on $x_i - a > 0$,
juhul c) on kord $x_i - a > 0$, kord $x_i - a < 0$.

Vaadeldav kaugus avaldub vastavate koordinaatide vahe absoluutväärtusena. See kaugus aga läheneb kõigil kolmel juhul nullile.

Märkus. Kui ei ole öeldud, kuidas muutuv suurus läheneb lõplikule väärtusele, siis mõistame lähenemist nii nagu juhul a).

Küsimusi ja ülesandeid.

387. Missuguseid suurusi nimetatakse tõkestamatult kasvavateks, missuguseid tõkestamatult kahanevateks suurusteks?



Joon. 199.

388. Joonisel 199 on esitatud mõnede kolmnurkade muutumine tipu C nihkumisel mööda joonisel näidatud sirget. Tee kindlaks, missugused elemendid osutuvad seal tõkestamatult kasvavaiks, missugused tõkestamatult kahanevaiks ja missugused neist omavad nullist erinevat piirväärtust.

§ 69. FUNKTSIOONI PIIRVÄÄRTUS.

Piirväärtuse mõistet rakendatakse funktsioonide uurimisel. Olgu näiteks teada, et argument $x \to 2$ ja meid huvitab, missugusele väärtusele läheneb sel juhul funktsioon $2x-1$. Selleks kirjutame välja rea 2-le lähenevaid argumendi väärtusi ja leiame neile vastavad funktsiooni väärtused.

x	1	1,2	1,5	1,7	1,8	1,9	1,95	1,98
$2x-1$	1	1,4	2	2,4	2,6	2,8	2,9	2,96

Paneme tähele, et funktsiooni väärtused lähenevad 3-le. Seega, kui vahe $x-2$ läheneb nullile, siis ka vahe $(2x-1)-3$ läheneb nullile.

Arvu b nimetatakse funktsiooni f(x) piirväärtuseks argumendi x lähenemisel arvule a, kui koos vahe x—a lähenemisega nullile läheneb ka f(x) — b nullile.

Ülesandeid.

389. Koosta tabel, mis iseloomustaks järgmiste funktsioonide muutumist argumendi etteantud muutumise korral (vt. märkus lk. 188):

a) $-x+3$, kui $x \to 1$;

b) $\frac{5x+2}{3x}$, kui $x \to -1$;

c) x^2+2x-1, kui $x \to 2$;

d) $\log x$, kui $x \to 10$;

e) $\sqrt{x}$, kui $x \to 9$;

f) 2^x, kui $x \to 3$.

Edaspidisel ülesannete lahendamisel me ei koosta enam tabeleid, vaid kalkuleerime järgmiselt.

N ä i d e 1. Leida funktsiooni $\frac{5x^2-1}{x+1}$ piirväärtus, kui $x \to 0$.

L a h e n d u s. Arutleme nii. Kui $x \to 0$, siis ka $x^2 \to 0$ ja samuti $5x^2 \to 0$. Kui aga $5x^2 \to 0$, siis $5x^2-1 \to -1$. Kui $x \to 0$, siis $x+1 \to 1$ ja seega $\frac{5x^2-1}{x+1} \to \frac{-1}{1} = -1$. See tähendab, et $\frac{5x^2-1}{x+1} - (-1) \to 0$ ja seega -1 on antud funktsiooni piirväärtuseks, kui $x \to 0$.

Esitatud arutlusest ilmneb, et piirväärtuse leidmisel kehtivad laused:

1) *summa piirväärtus võrdub liidetavate piirväärtuste summaga;*

2) *korrutise piirväärtus võrdub tegurite piirväärtuste korrutisega;*

3) *jagatise piirväärtus võrdub jagatava piirväärtuse ja jagaja piirväärtuse jagatisega, kui jagaja piirväärtus ei ole* 0.

Samad laused kehtivad ka siis, kui argument on tõkestamatult kasvav suurus. Siin me nende lausete tõestusi ei esita.

Leiame nüüd näitena ühe funktsiooni piirväärtuse argumendi mitme etteantud muutumise korral.

N ä i d e 2. Leida funktsiooni $\frac{1}{1+x^2}$ piirväärtus, kui argument läheneb lõpmatusele.

Kui $x \to \infty$, siis ka $x^2 \to \infty$ ja samuti $1+x^2 \to \infty$ ning seega

$$\frac{1}{1+x^2} \to 0.$$

Näide 3. Leida funktsiooni $\frac{1}{1+x^2}$ piirväärtus, kui argument läheneb nullile.

Kui $x \to 0$, siis ka $x^2 \to 0$ ja $1+x^2 \to 1$ ning seega

$$\frac{1}{1+x^2} \to 1.$$

Näide 4. Leida funktsiooni $\frac{1}{1+x^2}$ piirväärtus, kui argument läheneb 2-le.

Kui $x \to 2$, siis $x^2 \to 4$ ja $1+x^2 \to 5$ ning

$$\frac{1}{1+x^2} \to \frac{1}{5}.$$

Nii on toodud näidetes 2 kuni 4 funktsiooni $\frac{1}{1+x^2}$ piirväärtuseks argumendi lähenemisel lõpmatusele 0, argumendi lähenemisel nullile 1 ja argumendi lähenemisel 2-le $\frac{1}{5}$.

Leia antud funktsiooni piirväärtus veel juhul, kui $x \to -2$ ja kui $x \to \sqrt{2}$!

Funktsiooni piirväärtuse ülesmärkimiseks kasutatakse sümbolit lim, mis tuleneb ladinakeelsest sõnast *limes* (piir). Nii kirjutame eespool vaadeldud näiteid lühemalt järgmiselt:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{1+x^2} = 0, \quad \lim_{x \to 0} \frac{1}{1+x^2} = 1, \quad \lim_{x \to 2} \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{5}.$$

Üldiselt, *kui funktsiooni $f(x)$ piirväärtuseks argumendi lähenemisel a-le on b, siis kirjutame seda üles järgmiselt:*

$$\lim_{x \to a} f(x) = b.$$

Näide 5. Leida $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x}{1-x}$.

Kui $x \to 1$, siis $1-x \to 0$; seega murru nimetaja läheneb nullile ja lugeja 1-le. Et praegusel juhul murru nimetaja osutub tõkestamatult kahanevaks suuruseks, samal ajal kui lugeja jääb lõplikuks, siis on murd tõkestamatult kasvav suurus. Seega puudub temal lõplik piirväärtus. Seda tõsiasja märgime üles järgmiselt:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x}{1-x} = \infty$$

(loeme: argumendi lähenemisel 1-le kasvab funktsioon $\frac{x}{1-x}$ tõkestamatult või funktsiooni $\frac{x}{1-x}$ piirväärtuseks on lõpmatus).

Ülesandeid.

390. Leia järgmiste funktsioonide piirväärtused, kui $x \to 0$.

a)	b)	c)
$-4x+3$	$\frac{4}{x+6}$	$\frac{x^2+x+1}{3-2x}$
$7+\frac{1}{3}x$	$\frac{3-x}{2}$	$\frac{-x^2-x+5}{3+2x-x^2}$
x^2+2x-3	$\frac{4+2x}{3x-5}$	$\frac{(3x-2)^2}{6-3x}$
$(2x-1)^2$	$\frac{\frac{1}{3}x-6}{3-\frac{1}{6}x}$	$\left(\frac{0{,}14x-2{,}8}{0{,}7+8{,}6x}\right)^2$

391. Leia piirväärtused.

a) $\lim\limits_{x \to 4}(2x-3)$ e) $\lim\limits_{x \to 1}\frac{2}{3-x}$ i) $\lim\limits_{x \to 2}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x}\right)$

b) $\lim\limits_{x \to -1}(4-x^2)$ f) $\lim\limits_{x \to -2}\frac{x^2-1}{x}$ j) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}}\left(\frac{x^2}{3-x}+\frac{2x}{x^2+1}\right)$

c) $\lim\limits_{x \to 1}(x^4-x^2+1)$ g) $\lim\limits_{x \to 2}\frac{x+1}{x-1}$ k) $\lim\limits_{x \to \frac{3}{4}}\left[\frac{(4-x)^2}{3x}-\frac{3x^2}{4-x}\right]$

d) $\lim\limits_{x \to 0}(3x^3-2x^2-1)$ h) $\lim\limits_{x \to -1}\frac{x^2+2x-1}{x^2-2x+1}$ l) $\lim\limits_{x \to 2}(3x^2-4x^3+1)^3$

392. Leia järgmiste funktsioonide piirväärtused, kui $x \to \infty$.

a)	b)	c)
$3+x$	x^2+5	$\frac{1}{x}$
$5x$	$16-x$	$3+\frac{1}{x}$
x^2	x^3-1	$x+\frac{3}{x}$

393. Leia järgmised piirväärtused.

a) $\lim\limits_{x \to 2}\frac{x^2+5}{x^2+3}$ b) $\lim\limits_{x \to \sqrt{3}}\frac{x^2-3}{x^4+x^2-1}$ c) $\lim\limits_{x \to 2}\frac{x^2-4x+1}{2x+1}$

d) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}}\frac{1+\sin 2x}{1-\cos 4x}$ e) $\lim\limits_{x \to 0}\frac{\sin x+\tan x}{\cos x}$ f) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x}{\sin x}$

§ 70. FUNKTSIOONI PIDEVUS.

Seni lahendatud funktsiooni piirväärtuse leidmise ülesannetes osutus funktsiooni piirväärtus võrdseks funktsiooni enda väärtusega vastaval kohal, s. t. et

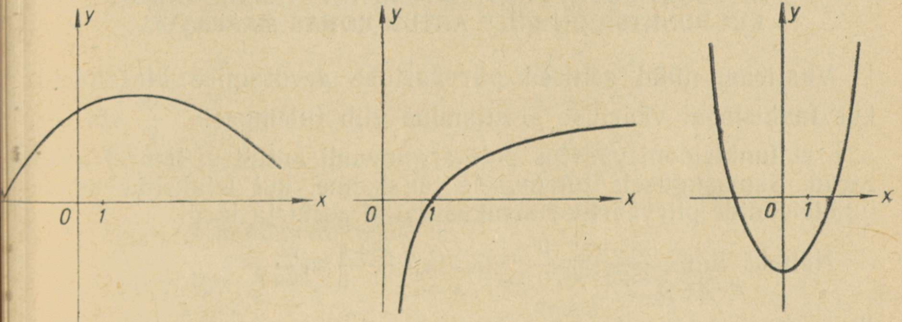
$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Kontrolli seda mõnede lahendatud ülesannete juures!

Kui eksisteerib $f(a)$ ja see on ka funktsiooni $f(x)$ piirväärtuseks tingimusel, et $x \to a$, siis öeldakse, et funktsioon on kohal a **pidev.**

Kui see seos kehtib argumendi kõigi väärtuste juures c-st d-ni, siis öeldakse, et funktsioon $f(x)$ on pidev vahemikus c-st d-ni ehk, teisiti, *funktsioon $f(x)$ on pidev vahemikus $c < x < d$.*

Kui see seos kehtib argumendi kõigi väärtuste puhul, mis kuuluvad funktsiooni määramispiirkonda, siis öeldakse, et *funktsioon $f(x)$ on pidev.*

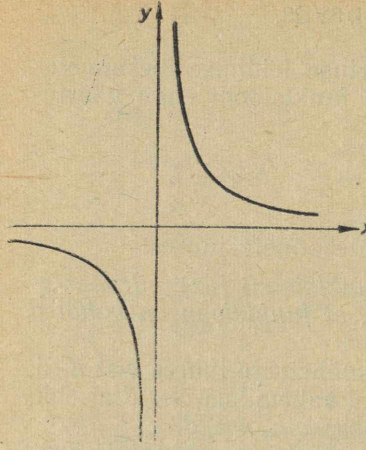


Joon. 200.

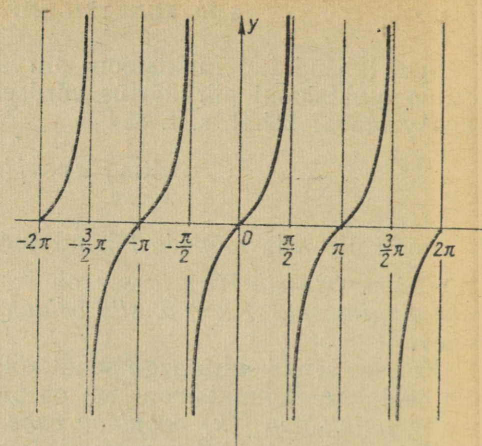
Funktsiooni graafikul kajastub pidevus joone katkematuses (joon. 200). Seni tundma õpitud funktsioonidest on lineaarne, ruut- ja teised astmefunktsioonid, samuti eksponent- ja logaritmfunktsioon ning siinus- ja koosinusfunktsioon pidevad, s. t. et näiteks lineaarne funktsioon $y = ax + b$ on pidev vahemikus $-\infty < x < \infty$ ja logaritmfunktsioon $y = \log x$ vahemikus $0 < x < \infty$.

Funktsioon $y = \frac{a}{x}$ on aga kohal $x = 0$ katkev funktsioon, sest 0-ga ei saa jagada — funktsioonil puudub väärtus kohal $x = 0$ (joon. 201).

Samuti puudub väärtus tangensfunktsioonil, kui $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, kus k on täisarv (joon. 202).



Joon. 201.



Joon. 202.

§ 71. FUNKTSIOONI PIIRVÄÄRTUSE ARVUTAMINE JUHUL, KUI FUNKTSIOON POLE ANTUD KOHAS MÄÄRATUD.

Vaatleme nüüd sellised piirväärtuse arvutamise ülesandeid, kus funktsiooni väärtuse arvutamine viib tulemusele $\frac{0}{0}$ või $\frac{\infty}{\infty}$, s. t. et funktsiooni väärtus pole argumendi antud väärtusel määratud. Samasugusele tulemusele jõuaksime, kui leiaksime nende funktsioonide piirväärtuse senikasutatud eeskirja järgi.

Näiteks $\lim\limits_{x \to -3} \frac{x^2-9}{x+3} = \frac{0}{0}$ või $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2+1}{x^3-1} = \frac{\infty}{\infty}$.

$\frac{0}{0}$ ja $\frac{\infty}{\infty}$ ei määra tulemust. Et selgusele jõuda, mis on neil juhtudel jagatise piirväärtuseks, selleks tuleb funktsiooni avaldist teisendada nii, et vabaneksime tegurist, mis lugejas ja nimetajas läheneb samaaegselt nullile või lõpmatusele.

Näide 1. $\lim\limits_{x \to -3} \frac{x^2-9}{x+3} = \lim\limits_{x \to -3} \frac{(x+3)(x-3)}{x+3}$.

Et $x \to -3$, siis $x \neq -3$ ja $x+3 \neq 0$. See annab võimaluse taandada murdu $(x+3)$-ga, s. o. teguriga, mis läheneb nullile, ja otsida piirväärtust:

$$\lim_{x \to -3} (x-3).$$

Seega,

$$\lim_{x \to -3} \frac{x^2-9}{x+3} = \lim_{x \to -3} (x-3) = -6.$$

Näide 2. Leida $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2+1}{x^3-1}$.

Juhul, kui argumendi tõkestamata kasvamise korral murru lugeja ja nimetaja mõlemad lähenevad lõpmatusele, siis taandatakse murdu argumendi suurima astendajaga astmega, mis esineb selles murrus.

Antud ülesande puhul taandame murdu x^3-ga.

Seega

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2+1}{x^3-1} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}{1-\frac{1}{x^3}} = \frac{0}{1} = 0,$$

sest, kui $x \to \infty$, siis $\frac{1}{x} \to 0$ ja samuti $\frac{1}{x^3} \to 0$.

Ülesandeid.

394. Leia piirväärtused.

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{4x}{5x}$ d) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{4x}{5x}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2}{3x}$ e) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2}{3x}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2x}{x^3}$ f) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x}{x^3}$

395. Leia piirväärtused.

a) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{2x-2}{x-1}$ e) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-6x+8}$

b) $\lim\limits_{x \to -3} \frac{x+3}{12+4x}$ f) $\lim\limits_{x \to -3} \frac{x^2-x-12}{x^2-2x-15}$

c) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2-x}{x-1}$ g) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2+3x-4}{x^2+4x-5}$

d) $\lim\limits_{x \to -5} \frac{x^3+5x^2}{x^2+5x}$ h) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2-9}{x^2-2x-3}$

396. Leia piirväärtused.

a) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2-2x+1}{x^3-x}$ c) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2+x-2}{x^3-x^2-x+1}$

b) $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$ d) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \frac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$

397. Leia piirväärtused.

a) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x-1}{x^2+1}$

c) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{4x^4-5x}{x^2-3x+1}$

b) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x-1}{x^2+1}$

d) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1+x-3x^3}{1+x^2+3x^3}$

398. Leia järgmiste funktsioonide piirväärtused, kui $x \to 0$ ja kui $x \to \infty$.

a) $\frac{2x-5}{x+3}$

b) $\frac{3x^2+5x-2}{4x^2-3x+1}$

399. Leia piirväärtused.

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{\cos x}$

c) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1+\tan x}{1-\tan x}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{\sin x}$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan x-\sin x}{\tan x+\sin x}$

§ 72. FUNKTSIOONI PIIRVÄÄRTUSE RAKENDUSI. RINGJOONE PIKKUS.

a) Ringjoone pikkuse mõiste.

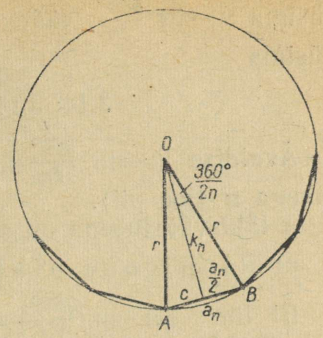
Ringjoon on kõverjoon, pikkusühik aga sirglõigu pikkus (näiteks 1 mm, 1 cm, 1 dm jne.), seetõttu ei ole võimalik ringjoone pikkust otseselt mõõta ja on vaja defineerida, mida mõista ringjoone pikkuse all.

Kui ringi sisse joonestada korrapärane hulknurk, siis tema ümbermõõt, mida saab pikkusühiku abil mõõta, on lühem ringjoone pikkusest, sest hulknurga küljed on lühemad neile vastavatest ringjoone kaartest. Kui hulknurga tippude arvu kahekordistada, saame uue hulknurga, mille ümbermõõt on pikem eelmise hulknurga ümbermõõdust ja lühem ringjoone pikkusest. Miks? Seda kahekordistamise protsessi jätkates saame hulknurgad, millede ümbermõõdud ikka enam ja enam lähenevad ringjoone pikkusele.

Seda tähelepanekut aluseks võttes defineeritaksegi ringjoone pikkus järgmiselt.

Ringjoone pikkuseks nimetatakse ringi sisse joonestatud korrapäraste hulknurkade ümbermõõtude piirväärtust, kui hulknurga tippude arv tõkestamatult kasvab.

Olgu ringi sisse joonestatud korrapärane n-nurk (joon. 203). Ühendades hulknurga tipud ringi keskpunktiga, tekivad võrdhaarsed kolmnurgad alusega a_n ja haaraga r. Selle kolmnurga tipunurk on $\frac{360°}{n}$. Tõmbame hulknurga apoteemi, mis on ka vaadeldava võrdhaarse kolmnurga kõrguseks. See apoteem jaotab antud kolmnurga OAB kaheks võrdseks täisnurkseks kolmnurgaks OAC ja OBC. Nendes kolmnurkades on üks nurk $\frac{360°}{2n}$ ja selle nurga vastaskaatet $\frac{a_n}{2}$. Täisnurksest kolmnurgast OBC võime kirjutada:



Joon. 203.

$$\frac{\frac{a_n}{2}}{r} = \sin\frac{360°}{2n}$$

ehk

$$\frac{a_n}{2r} = \sin\frac{360°}{2n}$$

Korrutades nüüd võrduse mõlemad pooled arvuga $2rn$, saame

$$n \cdot a_n = 2r \cdot n \cdot \sin\frac{360°}{2n}.$$

Et $n \cdot a_n$ esitab ringi sisse joonestatud korrapärase hulknurga ümbermõõtu, siis on ringjoone pikkuseks

$$\lim_{n \to \infty} (n \cdot a_n) \text{ ehk } \lim_{n \to \infty} \left(2r \cdot n \cdot \sin\frac{360°}{2n}\right).$$

b) Arv π.

Vaatame, kuidas muutub avaldis $n \cdot \sin\frac{360°}{2n}$, kui n kasvab. Selleks koostame alljärgneva tabeli.

n	$\frac{360°}{2n}$	$\sin\frac{360°}{2n}$	$n \cdot \sin\frac{360°}{2n}$
3	60°	0,8660	2,5980
6	30°	0,5	3,0
12	15°	0,2588	3,1056
24	7°30′	0,1305	3,1320
48	3°45′	0,0654	3,1392

Selle tabeli jätkamiseks ei piisa enam neljakohalisest siinuste tabelist. Kui aga kasutada järjest suurema arvu kohtadega tabeleid, siis võib tähele panna, et peale 3,1, mis jäi juba antud tabelis püsima $n \cdot \sin \frac{360^\circ}{2n}$ väärtusena, jäävad edaspidi n suurenemisel püsima

3,14; 3,141; 31415; 3,14159; jne.

Avaldise $n \cdot \sin \frac{360^\circ}{2n}$ piirväärtust tähistatakse kreeka keele tähega π (loe pii).

π lähisväärtusena on kõige enam kasutusel arv 3,14.

c) Ringjoone pikkus.

Et $\lim\limits_{n \to \infty} \left(n \cdot \sin \frac{360^\circ}{2n}\right) = \pi$ ja ringjoone pikkus on $\lim\limits_{n \to \infty} \left(2r \cdot n \cdot \sin \frac{360^\circ}{2n}\right)$, siis tähistades ringjoone pikkuse tähega c, võime kirjutada

$$c = \lim_{n \to \infty} (n \cdot a_n) = \lim_{n \to \infty} 2r \cdot \left(n \cdot \sin \frac{360^\circ}{2n}\right) = 2r \cdot \pi$$

ehk, jättes vahepealsed kirjutused ära,

$$\boxed{c = 2\pi r}$$

Et $2r = d$, siis ka

$$c = \pi d.$$

Avaldades sellest võrdusest π, saame

$$\pi = \frac{c}{d},$$

mis ütleb, et *iga ringjoone pikkuse ja läbimõõdu suhe on konstantne ja võrdub π-ga*

d) Ringi pindala.

Ringi pindala S all mõistame ringi sisse joonestatud korrapäraste hulknurkade pindalade S_n piirväärtust, kui hulknurga tippude arv tõkestamatult kasvab, s. t.

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n.$$

Teades, et korrapärase hulknurga pindala avaldub tema ümbermõõdu ja apoteemi poole korrutisega, võime kirjutada (joon. 203):

$$S_n = (n \cdot a_n) \cdot \frac{k_n}{2}$$

ja

$$S = \lim_{n \to \infty}(n \cdot a_n) \cdot \frac{k_n}{2}.$$

Et $\lim\limits_{n \to \infty}(n \cdot a_n) = 2\pi r$ ja $\lim\limits_{n \to \infty} k_n = r$, siis

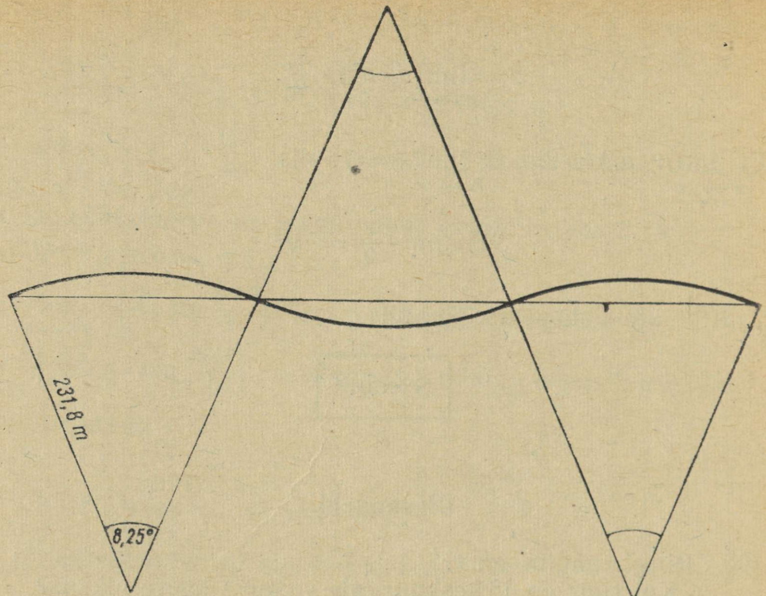
$$S = 2\pi r \cdot \frac{r}{2} = \pi r^2$$

ehk, jättes ära vahepealse avaldise,

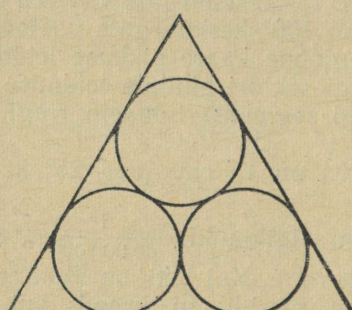
$$\boxed{S = \pi r^2}$$

Ülesandeid.

400. Ringi raadius on r.
a) Kui suur on 1° kesknurgale vastava kaare pikkus?
b) Kui suur on 1° kesknurgale vastava sektori pindala?
401. Ringi raadius on 10 cm.
a) Kui suur on 15° kesknurgale vastava kaare pikkus?
b) Kui suur on 100° kesknurgale vastava sektori pindala?
402. Sõnasta ringjoone kaare pikkuse leidmise eeskiri.
403. Sõnasta ringi sektori pindala leidmise eeskiri.
404. Mis on ringi segment? Sõnasta ringi segmendi pindala leidmise eeskiri.
405. Ringi raadius on 15 cm. Leia 25° kesknurgale vastava segmendi pindala.
406. 1 meeter on ligikaudu $\frac{1}{40\,000\,000}$ Maa ümbermõõdust, kui Maad vaadelda kerana. Kui pikk on Maa raadius?
407. Kui pikk on meridiaani kraad, kui Maa raadius on 6 370 km?
408. Meridiaani minuti pikkust nimetatakse m e r e m i i l i k s. Leia meremiili pikkus meetrites, kasutades eelmise ülesande andmeid.
409. Mitu pööret teeb vaguniratas minutis, kui tema diameeter on 0,85 m ja rong sõidab kiirusega 80 km tunnis?
410. Poiss käib ümber ringikujulise tiigi 7 minutiga. Kui suur on tiigi pindala, kui poiss käib 10 minutiga 900 m?
411. Sportlane ei jookse 100 meetrit mitte oma raja keskjoont mööda, vaid joonisel 204 näidatud kolme võrdse ringjoone kaart mööda, kusjuures vastavate ringide raadiused on 231,8 m ja kaartele vastav kesknurk 8,25°. Kui pika maa jooksis sportlane tege-



Joon. 204.



Joon. 205.

likult? Kui palju kaotas sportlane aega, kui sirgjoont mööda joostes oleks ta läbinud 100 m 11 sekundiga?

412. Võrdkülgsesse kolmnurka, mille külg on a, on joonestatud kolm võrdset ringi, mis puudutavad üksteist ja kolmnurga külge (joon. 205). Leia nende ringide vahele jääva kõverjoonse kolmnurga pindala.

XI. ARVU MÕISTE ÜLDISTAMINE.

§ 73. NATURAALARVUD.

Arvud 1, 2, 3, 4, 5, . . . on **naturaalarvud** ja nad moodustavad naturaalarvude hulga.

Tutvume naturaalarvude hulga omadustega.

1° a) Kahe naturaalarvu liitmise tulemuseks on jälle naturaalarv, näiteks:

$$3+16=19, \quad 5639+872=6511.$$

Et iga kahe naturaalarvu summa on ka naturaalarv, siis ütleme, et

naturaalarvude hulgas on teostatav liitmise tehe.

b) Korrutades kaht naturaalarvu, saame tulemuseks jälle naturaalarvu, näiteks

$$15\cdot 63=945 \quad 413\cdot 2675=1\,104\,775.$$

Et iga kahe naturaalarvu korrutis on naturaalarv, siis

naturaalarvude hulgas on teostatav ka korrutamise tehe.

c) Kahe naturaalarvu vahe ei pruugi olla naturaalarv. Kui näiteks lahutamisel

$$36-24=12$$

vahe on naturaalarv, siis lahutamisel

$$92-100=-8$$

vahe ei ole naturaalarv.

Seetõttu me ütleme, et

naturaalarvude hulgas pole lahutamise tehe alati teostatav.

d) Teostades jagamisi

$$100 : 4 = 25, \quad 846 : 9 = 94,$$

saame jagatiseks naturaalarvu, kuid jagades näiteks

$$39 : 6 = 6\frac{1}{2} \quad \text{või} \quad 8 : 9 = 0,(8)$$

ei saa me jagatiseks naturaalarvu.

Seega

naturaalarvude hulgas pole jagamise tehe alati teostatav.

2° Naturaalarvude hulgas on olemas kõige väiksem arv 1, kuid ei ole kõige suuremat arvu. Tõepoolest, kui suure naturaalarvu me ka võtaksime, ei ole ta ikkagi suurim, sest liites temaga näiteks ühe, saame temast suurema naturaalarvu. Seega

naturaalarvude hulk sisaldab lõpmata palju arve.

3° Olgu antud mõned naturaalarvud:

5; 6 722; 382; 163 480; 16; 999 888 777; 59; 451.

Järjestame need arvud suuruse järgi:

5; 16; 59; 382; 451; 6 722; 163 480; 999 888 777.

Kui oleks antud kuitahes palju naturaalarve, ikka saab neid järjestada suuruse järgi. Lühidalt ütleme:

naturaalarvud on järjestatavad suuruse järgi.

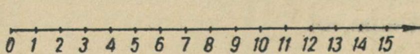
4° Olgu antud mingi naturaalarv, näiteks 495. Sel juhul on meil teada ka naturaalarvude jadas temale eelnev naturaalarv 494 ja temale järgnev naturaalarv 496. Kui naturaalarvuks on n, siis temale eelneb naturaalarvude jadas arv $n - 1$ ja järgneb $n + 1$.

Arvu a nimetatakse antud arvuhulgas arvu b naaberarvuks, kui arvude a ja b vahel ei ole ühtegi sellesse arvuhulka kuuluvat arvu.

Nii on arvud $n - 1$ ja $n + 1$ naturaalarvude hulgas arvu n naaberarvudeks.

Seega

igal naturaalarvul (välja arvatud 1) on kaks kindlat naaberarvu; arvul 1 on üks naaberarv (2).



Joon. 206.

5° Kui kujutame naturaalarvud arvteljel, siis vastab seal igale arvule kindel punkt (joon. 206). Need punktid ei asetse tihedalt üksteise kõrval, vaid iga kahe punkti vahel on teatud vahe. Seetõttu öeldaksegi, et

naturaalarvude hulk on diskreetne[1].

§ 74. TÄISARVUD.

Arvuhulga laiendamist teostame eesmärgiga saada niisugune uus arvuhulk, milles on teostatav tehe, mis esialgses hulgas ei ole teostatav. Nii näiteks, kui tahame laiendada naturaalarvude hulka sellise arvuhulgani, milles lahutamise tehe oleks alati teostatav, siis tuleb juurde võtta arv 0, et saaks arvutada kahe võrdse arvu vahet, ning veel arvud $-1, -2, -3, \ldots$, et väiksemast arvust saaks lahutada suuremat.

Naturaalarvude hulga laiendamine täisarvude hulgaks

$$\ldots -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$$

toimubki eesmärgiga saada arvuhulk, milles peale liitmise ja korrutamise on ka lahutamise tehe alati teostatav.

Tutvume täisarvude hulga omadustega.

1° a) Osutub, et uues arvuhulgas ei ole mitte ainult võimalik iga kahe naturaalarvu lahutamine, vaid ka uusi juurdevõetud arve liites, lahutades ja korrutades saame alati täisarvu, näiteks

$$(-2)+(-4)=-6 \qquad (-2)+4=2$$
$$(-10)-(-3)=-7 \qquad (-10)-3=-13$$
$$(-4)\cdot(-3)=12 \qquad (-4)\cdot 3=-12.$$

Seega

täisarvude hulgas on teostatav liitmise, lahutamise ja korrutamise tehe.

b) Jagades täisarvu täisarvuga võib jagatiseks olla täisarv või mitte.

Näiteks

$$(-16):(-8)=2; \quad (-5):(-6)=\frac{5}{6}.$$

Seega

täisarvude hulgas pole jagamise tehe alati teostatav.

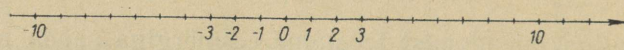
---

[1] diskreetne (lad. k. *discretus)* — eraldatud.

2° Et juba naturaalarvude hulk sisaldab lõpmata palju arve, nüüd aga lisandub neile veel lõpmata palju negatiivseid arve, siis

täisarvude hulk sisaldab lõpmata palju arve.

Kas täisarvude hulgas on olemas kõige väiksem arv?



Joon. 207.

Selgita näidete ja joonise 207 abil, et täisarvude hulgas kehtivad ka järgmised omadused:

3° **täisarvud on järjestatavad suuruse järgi;**
4° **igal täisarvul on täisarvude hulgas kaks kindlat naaberarvu;**
5° **täisarvude hulk on dikreetne.**

Ülesandeid.

413. Nimeta 10 naturaalarvu. Kirjuta need suuruse järgi.
414. Missugustele naturaalarvudele on arv *n* naaberarvuks?
415. Missugustele täisarvudele on arv 0 naaberarvuks?
416. Kirjuta üles naturaalarvude

10 400; 1 001 000; 3 040 500; 1 000 100

naaberarvud ja järjesta kõik need arvud suuruse järgi.
417. Leia ülesandes 416 antud arvude summa ja kirjuta üles summa naaberarvud.
418. Nimeta 10 täisarvu. Järjesta need suuruse järgi.
419. Kirjuta üles täisarvude

30 401; —41 000; 1 800 100; —190 001

naaberarvud ning järjesta antud ja üleskirjutatud arvud suuruse järgi.
420. Leia ülesandes 419 antud arvude summa ja kirjuta üles selle arvu naaberarvud.
421. Leia ülesandes 416 ja ülesandes 419 antud vastavate arvude vahe ning kirjuta üles nende arvude naaberarvud. Järjesta need arvud suuruse järgi.

§ 75. RATSIONAALARVUD.

Et saada arvuhulk, milles ka jagamine on teostatav, laiendatakse täisarvude hulka murdarvudega ja saadakse **ratsionaalarvude hulk.**

Igat ratsionaalarvu saab kirjutada taandatud murruna $\frac{a}{b}$, kus a ja b on täisarvud ja $b \neq 0$.

Kui ratsionaalarv on täisarv, siis on $b = 1$.

Tutvume ratsionaalarvude hulga omadustega.

1° Kahe ratsionaalarvu summa, vahe, korrutis ja jagatis on ratsionaalarvud (muidugi juhul, kui jagamisel on mõte, s. o. kui jagaja ei ole null).

Näiteks

$$\frac{3}{4}+\frac{15}{8}=\frac{21}{8}$$

$$\frac{4}{3}-\frac{11}{6}=-\frac{1}{2}$$

$$8\cdot\frac{6}{11}=\frac{48}{11}$$

$$\left(-\frac{5}{6}\right):4=-\frac{5}{24}.$$

Seega

ratsionaalarvude hulgas on teostatav liitmise, lahutamise, korrutamise ja jagamise tehe.

2° Et nüüd on täisarvude hulgale, mis sisaldab lõpmata palju arve, juurde lisatud lõpmata palju uusi arve — murde, siis ka

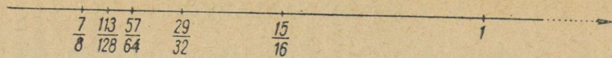
ratsionaalarvude hulk sisaldab lõpmata palju arve.

Selgita näidete abil, et ka ratsionaalarvude hulgas kehtib omadus:

3° **ratsionaalarvud on järjestatavad suuruse järgi.**

4° Seame nüüd ülesandeks leida antud ratsionaalarvu naaberarve.

Näiteks olgu antud arv $\frac{7}{8}$, siis temale järgnevaks ratsionaalarvuks ei ole $\frac{8}{8}=1$, sest $\frac{7}{8}$ ja 1 vahel asetseb näiteks arv $\frac{15}{16}$ (vt. joonis 208).



Joon. 208.

$$\frac{7}{8} < \frac{15}{16} < 1.$$

Kuid ka $\frac{15}{16}$ ei ole $\frac{7}{8}$ -le järgnev ratsionaalarv, sest nende vahel asetseb näiteks arv $\frac{29}{32}$.

$$\frac{7}{8} < \frac{29}{32} < \frac{15}{16}.$$

Samuti jätkates võime kirjutada:

$$\frac{7}{8} < \frac{57}{64} < \frac{29}{32},$$

$$\frac{7}{8} < \frac{113}{128} < \frac{57}{64}$$

jne.

Nii võime lõputult jätkata arvule $\frac{7}{8}$ järgneva ratsionaalarvu otsimist, kuid me ei leia seda, sest ikka võib üles kirjutada ratsionaalarvu, mis on küll suurem kui $\frac{7}{8}$, kuid samal ajal ka väiksem ükskõik kui vähe $\frac{7}{8}$ -st erinevast suuremast arvust.

Täpselt samuti on tulemuseta antud ratsionaalarvule eelneva arvu otsimine.

Seega täisarvude hulgale murdarvude juurdelisamine paisutas arvuhulga nii suureks, et

ratsionaalarvude hulgas ei ole võimalik kindlaks määrata naaberarve

ehk, teisiti,

iga kahe ratsionaalarvu vahel on lõpmata palju ratsionaalarve.

5° Kui esitada arvteljel ratsionaalarvudele vastavad punktid (joon. 208), siis asetsevadki need seal tihedalt üksteise kõrval. Seetõttu öeldakse, et

ratsionaalarvude hulk on tihe.

Ülesandeid.

422. Kirjuta 3 kümnendmurruna avalduvat ratsionaalarvu; 3 hariliku murruna avalduvat ratsionaalarvu, 3 täisarvuna avalduvat ratsionaalarvu; 3 naturaalarvuna avalduvat ratsionaalarvu.

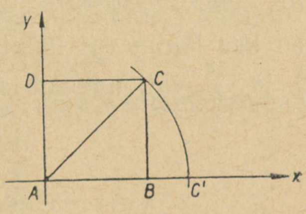
Järjesta need arvud suuruse järgi.

Leia nende arvude summa.

§ 76. RATSIONAALARVUDE HULGA LAIENDAMISE VAJADUS.

Osutub, et ratsionaalarvudele vastavad punktid ei kata arvtelge täielikult. Arvteljel leidub punkte, millele ei vasta ühtki ratsionaalarvu. Tõestame seda.

Olgu antud koordinaatteljestikus ruut, mille tipud asetsevad punktides $A(0; 0)$, $B(1; 0)$, $C(1; 1)$, $D(0; 1)$ (joon. 209). Asetame sirkli teraviku punkti A ja kanname kauguse AC x-teljele, saame seal punkti C'. Väidame, et punktile C' ei vasta ühtki ratsionaalarvu.



Joon. 209.

Tõestus toimub vastuväiteliselt. Oletame, et leidub niisugune ratsionaalarv, s. o. taandatud murd $\frac{a}{b}$, mis esitab ühikruudu diagonaali pikkust.

Pütagorase teoreemi kohaselt on siis

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 1 + 1$$

ja siit

$$a^2 = 2b^2.$$

Et ainult paarisarvu ruut on paarisarv, siis peab a olema paarisarv. Olgu $a = 2m$. Asendades saame

$$4m^2 = 2b^2$$

ja siit

$$2m^2 = b^2.$$

Sellest võrdusest järeldub omakorda, et b peab olema paarisarv. Olgu $b = 2n$. Siis on aga murd

$$\frac{a}{b} = \frac{2m}{2n}$$

taanduv, mis on vastuolus eeldusega.

Seega oletus, et leidub ratsionaalarve, millele vastab x-teljel punkt C', viib vastuolule.

Järelikult ei leidu niisugust ratsionaalarvu, mille abil saaks avaldada ühikruudu diagonaali pikkust.

§ 77. IRRATSIONAALARVUD.

Olles laiendanud täisarvude valla ratsionaalarvude vallaks, jõudsime arvuhulgani, milles on teostatav nii liitmise, lahutamise, korrutamise kui ka jagamise tehe. Samas ilmnes aga, et sellest arvuvallast veel ei piisa kõigi pikkuste avaldamiseks ja seetõttu kerkibki vajadus arvuvalla edasiseks laiendamiseks niisuguste arvudega, et igale arvtelje punktile vastaks kindel arv.

Nagu juba nimetatud, saab ratsionaalarve esitada kujul $\frac{a}{b}$, kus a ja b on täisarvud ja $b \neq 0$. Igat harilikku murdu on aga võimalik esitada kümnendmurruna, kusjuures see kümnendmurd on kas lõplik või lõputu perioodiline (vt. § 63). Näiteks murrud $\frac{1}{2}$ ja $\frac{14}{5}$ väljenduvad lõplike kümnendmurdudena:

$$\frac{1}{2}=0{,}5 \text{ ja } \frac{14}{5}=2{,}8.$$

Sealjuures aga murrud $\frac{4}{9}$ ja $\frac{16}{7}$ on väljendatavad lõputute perioodiliste kümnendmurdudena:

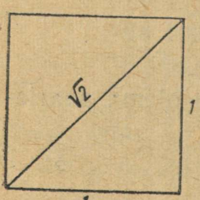
$$\frac{4}{9}=0{,}(4) \quad \text{ja} \quad \frac{16}{7}=2{,}(285714).$$

Seega, *ratsionaalarvud väljenduvad kas täisarvudena, lõplike kümnendmurdudena või lõputute perioodiliste kümnendmurdudena.*

Arvuvalla edasiseks laiendamiseks on niisiis reserv olemas — lõputud mitteperioodilised kümnendmurrud.

Ühikruudu diagonaali pikkuseks saame $\sqrt{2}$ (joon. 210). Kui hakkame seda ruutjuurt arvutama, saame

$$\sqrt{2}=1{,}414213562373\ldots$$



Joon. 210.

Seda juurimisprotsessi saab aga jätkata. Tekib küsimus: kas see juurimisprotsess võib lõppeda, s. t. kas $\sqrt{2}$ võib võrduda lõpliku kümnendmurruga või kas saabub koht, millest alates numbrid hakkavad korduma, s. t. kas $\sqrt{2}$ võib võrduda lõputu perioodilise kümnendmurruga?

Vastus on kindlasti eitav. Kui $\sqrt{2}$ võrduks lõpliku või lõputu perioodilise kümnendmurruga, siis peaks ta olema ratsionaalarv. Eespool tõestasime aga, et ühikruudu diagonaali pikkus ei avaldu ratsionaalarvuna.

Et aga $\sqrt{2}$ avaldub koma abil kirjutatud arvuna, siis saab see olla ainult lõputu mitteperioodiline kümnendmurd.

Samuti avalduvad lõputute mitteperioodiliste kümnendmurdudena näiteks $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{7}$, sin 16°, tan 382°, log 4,32, π jne.

Kõiki neid arve, mis avalduvad lõputute mitteperioodiliste kümnendmurdudena, nimetatakse irratsionaalarvudeks.

Nägime, et irratsionaalarvule $\sqrt{2}$ vastas arvteljel kindel punkt. Saab näidata, et

igale irratsionaalarvule vastab arvteljel kindel punkt

ning et

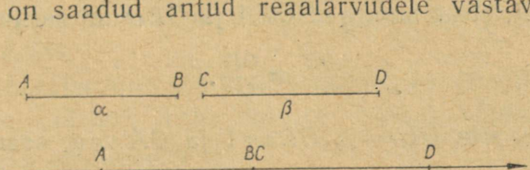
arvtelje igale punktile vastab kas kindel ratsionaalarv või kindel irratsionaalarv.

§ 78. REAALARVUD.

Ratsionaalarvud koos irratsionaalarvudega moodustavad reaalarvude hulga.

Tutvume reaalarvude hulga omadustega.

1° a) Et igale reaalarvule vastab arvteljel kindla pikkusega lõik, siis kahe reaalarvu summa all mõistame niisuguse lõigu pikkust, mis on saadud antud reaalarvudele vastavate lõikude liitmisel.



Joon. 211.

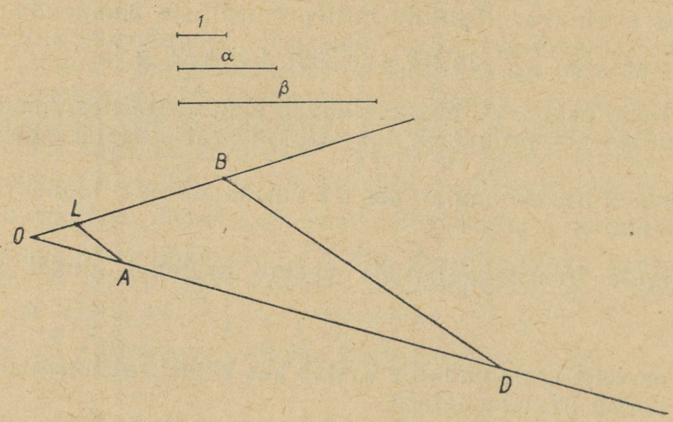
Asetame reaalarvule α vastava lõigu AB arvteljele nii, et alguspunkt A ühtib arvtelje nullpunktiga (joon. 211). Teisele reaalarvule β vastava lõigu CD asetame arvteljele nii, et tema alguspunkt C ühtiks esimese lõigu lõpp-punktiga B. Teise lõigu lõpp-punktile D vastav reaalarv γ on siis antud lõikudele vastavate reaalarvude summaks, s. t.

$$\alpha + \beta = \gamma.$$

Niisiis,

reaalarvude hulgas on teostatav liitmise tehe.

b) Kahe reaalarvu korrutise all mõistame niisuguse lõigu pikkust, mis on saadud antud reaalarvudele vastavate lõikude korrutamisel.



Joon. 212.

Lõikugu kaks arvtelge nii, et lõikepunktis on nende mõlema alguspunktid (joon. 212). Ühele teljele kanname ühiku pikkuse lõigu OL ja reaalarvule β vastava lõigu OB. Teisele küljele kanname reaalarvule α vastava lõigu OA. Ühendame punktid L ja A ning tõmbame punktist B lõiguga LA paralleelse lõigu BD, siis lõik OD ongi reaalarvule $\alpha\beta$ vastav lõik.

Tõepoolest, et kolmnurgad OLA ja OBD on sarnased, siis

$$\frac{OB}{OL}=\frac{OD}{OA}.$$

Asendades siin $OB=\beta$, $OL=1$ ja $OA=\alpha$, saame

$$\frac{\beta}{1}=\frac{OD}{\alpha},$$

kust

$$OD=\alpha\beta.$$

Seega

reaalarvude hulgas on teostatav korrutamise tehe.

c) Näita, et

reaalarvude hulgas on teostatav ka lahutamise ja jagamise tehe.

Lõputu mitteperioodilise kümnendmurru väljakirjutamine on võimatu. Seega, kui irratsionaalarvud on esitatud lõputute perioodiliste kümnendmurdudena, siis ei saa nendega sooritada tehteid täpselt, vaid tuleb piirduda nende ligikaudsete väärtustega sellises ulatuses, mis praktiliselt vajalikuks osutub. Näiteks, kui ülesandeks on leida ringjoone pikkus $2\pi r$ ja on teada, et $r=\sqrt{5}$ dm, siis arvutamisel võime piirduda väärtusega 2,24, mis on raadiuse pikkuseks millimeetrise täpsusega, samuti piirdume siis π avaldises kahe kohaga pärast koma — 3,14. Vastuseks saame 14,1 (dm), s. t. et vastuse viga ei ületa viit sajandikku.

d) Selgita näidete abil, et reaalarvude hulgas jäävad kehtima veel järgmised ratsionaalarvude hulgas kehtivad omadused:

2° **reaalarvude hulk sisaldab lõpmata palju arve;**

3° **reaalarvud on järjestatavad suuruse järgi;**

4° **reaalarvude hulgas ei ole võimalik kindlaks määrata ühegi arvu naaberarve;**

5° kuna igale arvtelje punktile vastab kindel reaalarv, siis ütleme, et

reaalarvude hulk on pidev.

Ülesandeid.

423. Leia graafiliselt reaalarvudele $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{8}$ ja $\sqrt{13}$ vastavad lõigud.

424. Leia graafiliselt reaalarvude $\sqrt{5}$ ja $\sqrt{13}$ summa, vahe, korrutis ja jagatis.

425. Leia reaalarvude $\sqrt{5}$ ja 3,14 summa ja korrutis, võttes ka $\sqrt{5}$ ligikaudse väärtuse kahe kohaga pärast koma, juhul, kui

a) 3,14 on täpne arv;
b) 3,14 on ligikaudne arv.

426. Teosta järgmised tehted, võttes tabelist irratsionaalarvud kolme kohaga pärast koma.

a) 4π

b) $3 \sin 18°16'$

c) $\frac{1}{2} \log 36{,}25$

d) $\sqrt{3} \cdot \tan 73°12'$

e) $\pi \cdot \log 0{,}346$

f) $\sqrt[3]{18}+\sqrt{5} \cdot \log \pi-\cos \frac{\pi}{4}$

427. Kui võimalik, siis leia tulemus täpselt, kui ei, siis sajandiku täpsusega.

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$ c) $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{25}$ e) $\sqrt{6} \cdot \sqrt[3]{12}$

b) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{9}$ d) $\cos\frac{\pi}{4} \cdot b \sin\frac{\pi}{4}$ f) π^2

428. Kumb on suurem?

a) π või 3,14

b) $\sqrt{2}$ või 1,42

c) $\sqrt{3}$ või 1,8

d) log 31 või 1,5

e) sin 50°30′ või 0,77

f) π või $\sqrt{10}$

g) 3,4842 või $6\sqrt{2}$

h) $\sqrt{3}$ või $\frac{97}{56}$ või $\frac{71}{41}$

§ 79. KOMPLEKSARVUD.

1) Ruutvõrrandi lahendamine.

Ruutvõrrandi

$$x^2 + px + q = 0$$

lahendid on

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Ruutvõrrandil on kaks erinevat reaalarvulist lahendit, kui $\frac{p^2}{4} - q > 0$, ja kaks võrdset reaalarvulist lahendit, kui $\frac{p^2}{4} - q = 0$.

Juhul, kui $\frac{p^2}{4} - q < 0$, me ütlesime, et ruutvõrrandil lahendid puuduvad.

Arvuvalla edasine laiendamine toimubki eesmärgiga saada niisugune arvuvald, milles ka sel juhul, kui $\frac{p^2}{4} - q < 0$, oleks ruutvõrrandil lahendid.

2) Imaginaararvud.

Arvuvalla laiendamiseks nii, et ruutvõrrandil oleks lahendid juhul, kui $\frac{p^2}{2} - q < 0$, defineeritakse uus ühik, nn. **imaginaarühik** i (ld. *imaginarius* — näilik, kujutletud) arvuna, mille ruut on —1, s. t.

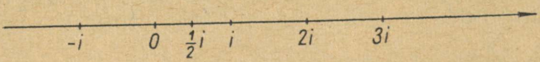
$$i^2 = -1.$$

Selle ühiku abil saame avaldada ruutjuurt negatiivsest arvust, näiteks

$$\sqrt{-4} = \sqrt{4 \cdot (-1)} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1} = 2i.$$

Arve bi, kus b on reaalarv ja i imaginaarühik, nimetatakse **puhtimaginaararvudeks.**

Juhul, kui $b = 0$, taandub puhtimaginaararv reaalarvuks 0.



Joon. 213.

Võtame nüüd uue arvtelje, millel ühikuks on i (joon. 213). Sellele saame kanda kõik puhtimaginaararvud. Seda arvtelge nimetame **imaginaarteljeks.**

Et puhtimaginaararvu kordajaks on reaalarv, siis igale puhtimaginaararvule vastab kindel imaginaartelje punkt ja, vastupidi, igale imaginaartelje punktile vastab kindel puhtimaginaararv.

Ülesandeid.

429. Lahenda võrrandid.

a) $x^2 - 5x + 8 = 0$
b) $3x^2 + 2x + 1 = 0$
c) $2x^2 - 4x + 7 = 0$
d) $3x^2 - 2x + 1 = 0$.

3) K o m p l e k s a r v u d.

Puhtimaginaararvud üksi ei laienda olemasolevat reaalarvude hulka nii, et igal ruutvõrrandil oleksid lahendid. Ruutvõrrandi $x^2 + px + q = 0$ lahendid juhul, kui $\frac{p^2}{4} - q < 0$, väljenduvad kujus $u \pm vi$, kus $u = -\frac{p}{2}$ ja $v = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$. Näiteks on ruutvõrrandi $x^2 + 2x + 5 = 0$ lahenditeks $x = -1 \pm \sqrt{1-5} = -1 \pm 2i$.

Arve kujus a + bi, kus a ja b on reaalarvud ja i on imaginaarühik, nimetatakse imaginaararvudeks.

Imaginaararv koosneb reaalosast a ja imaginaarosast bi. Imaginaararv $a + bi$ taandub puhtimaginaararvuks bi, kui $a = 0$, ja reaalarvuks a, kui $b = 0$.

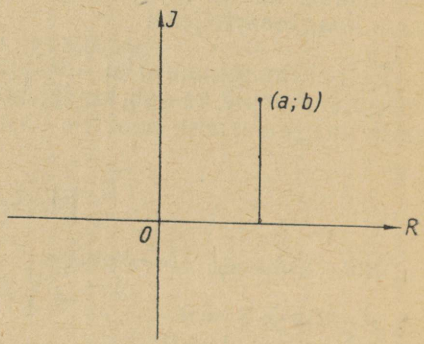
Reaalarvud, puhtimaginaararvud ja imaginaararvud koos moodustavad kompleksarvude hulga.

Seega võime öelda, et ruutvõrrand $x^2 + px + q = 0$ on kompleksarvude hulgas alati lahenduv.

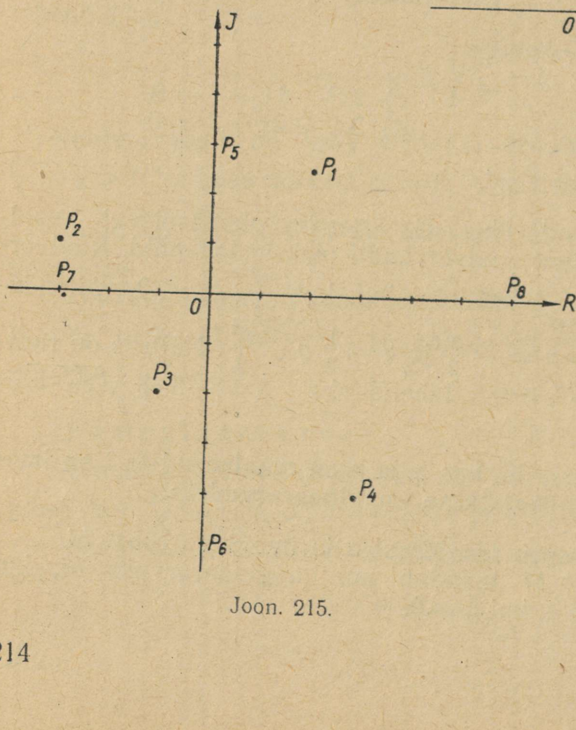
4) K o m p l e k s a r v u d e   g e o m e e t r i l i n e   k u j u t a m i n e.

Joonisel 214 on esitatud koordinaatteljestik. Abstsissteljel kujutame reaalarve ja ordinaatteljel puhtimaginaararve. Imaginaararvule $a + bi$ loeme vastavaks punktiks punkti $(a; b)$. Seega vastavad imaginaararvudele tasapinna punktid, mis ei asetse telgedel.

Joonisel 215 on kujutatud punktid P_1, P_2, P_3 ja P_4, mis vastavad imaginaararvudele $2 + 2{,}5i$, $-3 + i$, $-1 - 2i$ ja $3 - 4i$. Punktidele P_5 ja P_6 vastavad puhtimaginaararvud $3i$ ja $-5i$ ning punktidele P_7 ja P_8 reaalarvud -3 ja 6.



Joon. 214.



Joon. 215.

Igale reaalarvule vastab kindel punkt abstsissteljel. Igale puhtimaginaararvule vastab kindel punkt ordinaatteljel. Igale imaginaararvule vastab kindel tasapinna punkt, mis ei asetse telgedel.

Lühidalt võime öelda, et

igale kompleksarvule vastab kindel punkt tasapinnal.

Ülesandeid.

430. Esita tasapinnal punktid, mis vastavad kompleksarvudele:

$$2{,}5i, -\frac{4}{3}i,\ 2,\ -5,\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i,\ 3-\frac{3}{4}i,\ -1{,}5-2{,}5i,\ -3{,}5+2{,}5i.$$

431. Missugused kompleksarvud vastavad ruudu tippudele, kui ruudu diagonaalide lõikepunkt asetseb koordinaatide alguspunktis ja ruudu küljed pikkusega 2 on paralleelsed telgedega.

432. Leia korrapärase kuusnurga tippudele vastavad kompleksarvud, kui kuusnurga diagonaalid lõikuvad koordinaatide alguspunktis ja tema kaks tippu asetsevad abstsissteljel.

5) K o m p l e k s a r v u d e v õ r d s u s.

Kaht kompleksarvu $a+bi$ ja $c+di$ nimetatakse võrdseteks, kui nende geomeetriliseks kujutiseks on üks ja sama punkt, s. t. et punktide $(a; b)$ ja $(c; d)$ vastavad koordinaadid peavad olema võrdsed:

$$a=c \quad \text{ja} \quad b=d.$$

Seega

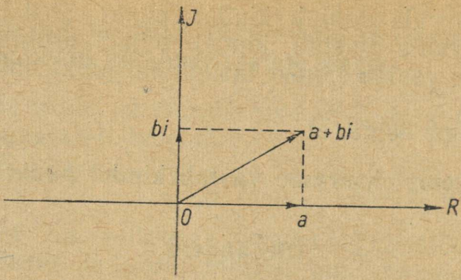
kaks kompleksarvu on võrdsed, kui nende reaalosad on võrdsed ja imaginaarosade kordajad on võrdsed.

6) R e a a l a r v u j a p u h t i m a g i n a a r a r v u s u m m a.

Nägime, et imaginaaraarv $a+bi$ esitub reaalarvu a ja puhtimaginaararvu bi summana. Kumbki liidetavaist on avaldatud erineva ühiku (üks reaalse, teine imaginaarse) kaudu. Leiame niisugusele summale geomeetrilise tõlgenduse.

Igale kompleksarvule vastab tasapinnal kindel punkt. Igale tasapinna punktile (välja arvatud alguspunkt) vastab oma kohavektor. Joonisel 216 on esitatud arvudele a, bi ja $a+bi$ vastavad kohavektorid. Ühtlasi ilmneb sealt, et imaginaararvule $a+bi$ vastav kohavektor on reaalarvule a ja puhtimaginaararvule bi vastavate kohavektorite summaks. Seega reaalarvu ja puhtimaginaararvu summa on tõlgendatav vastavate kohavektorite summana.

Näita, et tõlgendus kohavektorite abil kehtib ka kahe reaalarvu liitmisel ja kahe puhtimaginaararvu liitmisel!



Joon. 216.

7) Kompleksarvude liitmine ja lahutamine. Tehted kompleksarvude vallas defineeritakse nii, et jääksid kehtima reaalarvude vallas kehtivad sulgude avamise ja sarnaste liikmete koondamise eeskirjad.

Seega

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$$

ja

$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i.$$

Kahe kompleksarvu summa on kompleksarv, mille reaalosa on võrdne liidetavate reaalosade summaga ja imaginaarosa kordaja on liidetavate imaginaarosade kordajate summa.

Lahutamist mõistame ka kompleksarvude vallas liitmise pöördtehtena.

Olgu ülesandeks leida vahe

$$(a+bi)-(c+di),$$

s. t. tuleb leida niisugune kompleksarv $x+yi$, et

$$(x+yi)+(c+di)=a+bi.$$

Liitmise eeskirja järgi

$$x+c=a \quad \text{ja} \quad y+d=b$$

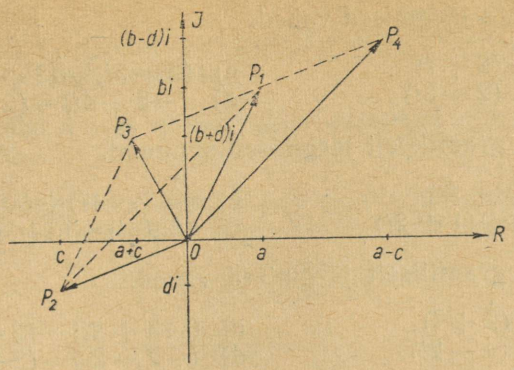
ning siit

$$x=a-c \quad \text{ja} \quad y=b-d.$$

Seega

$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i.$$

Kahe kompleksarvu vahe on kompleksarv, mille reaalosa on võrdne antud arvude reaalosade vahega ja imaginaarosa kordaja on antud arvude imaginaarosade kordajate vahe.



Joon. 217.

Joonisel 217 on esitatud kompleksarvudele $a+bi$ ja $c+di$ vastavad punktid P_1 ja P_2; samuti kompleksarvudele $(a+c)+(b+d)i$ ja $(a-c)+(b-d)i$ vastavad punktid P_3 ja P_4. Jooniselt näeme, et

$$\overrightarrow{OP}_1+\overrightarrow{OP}_2=\overrightarrow{OP}_3$$

ja

$$\overrightarrow{OP}_1-\overrightarrow{OP}_2=\overrightarrow{OP}_4, \text{ s. t. } \overrightarrow{OP}_2+\overrightarrow{OP}_4=\overrightarrow{OP}_1.$$

Seega

iga kahe kompleksarvu liitmine on tõlgendatav vastavate kohavektorite liitmisena ja vahe — vastavate kohavektorite lahutamisena.

Ülesandeid.

433. Liida järgmised kompleksarvud.

a) $(2+3i)+4i$
b) $5i+2i$
c) $(5+4i)+(3-7i)$
d) $(2+5i)+(-2-2i)$
e) $(1+i)+(2+i)+(3+i)$
f) $(0{,}3-3{,}2i)+(1{,}5-0{,}8i)+(-4-i)$
g) $\left(1\frac{3}{4}+\frac{2}{3}i\right)+\left(1\frac{1}{2}-\frac{5}{6}i\right)+\left(-\frac{3}{4}-2i\right)$
h) $(0{,}8-0{,}2i)+(0{,}1-1{,}3i)+(1{,}5+0{,}7i)+(2{,}3-0{,}6i)$

434. Arvuta järgmised vahed.

a) $(5+3i)-(2+i)$
b) $(5+4i)-(2-3i)$
c) $(2-3i)-(2+3i)$
d) $(-2+4i)-(2+i)$

435. Leia graafiliselt järgmised summad.

a) $(4-i)+(3+2i)$
b) $(-2+3i)+(1+2i)$
c) $(-3-4i)+(-2-i)$
d) $(2+i)+(3+3i)$

436. Leia graafiliselt järgmised vahed.

a) $(3-2i)-(2+i)$
b) $(2+3i)-(4-2i)$
c) $(-3+2i)-(2-3i)$
d) $(-2-2i)-(2+2i)$

437. Liida ja lahuta.

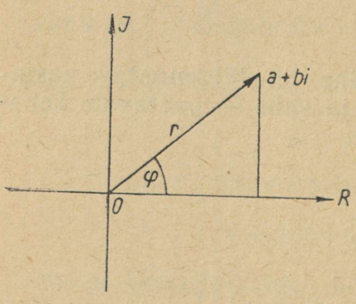
a) $(5x-3yi)+(-2+8yi)-(2x-yi)-(7x-2yi)$
b) $(2c-8di)-(5c-2di)+(c-di)-(-4c+3di)$

438. Leia x ja y väärtused nii, et kehtiks võrdus:

a) $2+5ix-3iy=14i+3x-5y$;

b) $\frac{8}{x}+iy-2=7i-\frac{10}{x}+y$.

8) Kompleksarvu trigonomeetriline kuju.



Joon. 218.

Esitame tasapinnal asetsevad punktid uute koordinaatide kaudu. Nendeks koordinaatideks võtame punkti kohavektori pikkuse r ja nurga φ, mille see kohavektor moodustab x-teljega (joon. 218). r kui vektori pikkus on alati positiivne ja φ muutub 0-st 2π-ni.

Jooniselt näeme, et täisnurksest kolmnurgast saame välja kirjutada seosed:

$$a=r\cos\varphi;$$
$$b=r\sin\varphi.$$

Seega

$$a+bi=r\cos\varphi+ir\sin\varphi.$$

Võttes r sulgude ette, saame

$$a+bi=r(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

Avaldist $r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ nimetame kompleksarvu trigonomeetriliseks kujuks.

Koordinaati r nimetatakse kompleksarvu **mooduliks** *ja nurka φ kompleksarvu* **argumendiks.**

Avaldist a + bi nimetatakse kompleksarvu algebraliseks kujuks

Kui kompleksarv on antud algebralisel kujul $a + bi$ ja tahame saada tema trigonomeetrilist kuju, siis r ja φ leiame seostest:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2};$$

$$\tan \varphi = \frac{b}{a}.$$

Nurga φ määramise juures arvestame veel a (või b) märki. Miks?

N ä i d e 1. Leida kompleksarvu $2 + 5i$ trigonomeetriline kuju.

Antud kompleksarvu trigonomeetrilise kuju saamiseks leiame r ja φ.

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29},$$

$$\tan \varphi = \frac{5}{2} = 2{,}5;$$

$$\varphi = 68°12' \quad \text{või} \quad \varphi = 248°12'.$$

Et φ omab väärtuse 0°-st 360°-ni ja tangensi väärtused on positiivsed I ja III veerandi nurkade puhul, siis tuleb selgitada, mitmendas veerandis asub vastav punkt. Et $a > 0$, siis on punkt I veerandis ja seega $\varphi = 68°12'$.

Niisiis,

$$2 + 5i = \sqrt{29}(\cos 68°12' + i \sin 68°12').$$

N ä i d e 2. Teisendada trigonomeetrilisele kujule arv $-4 - 2i$.

$$r = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2} = \sqrt{20};$$

$$\tan \varphi = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}.$$

Et $b < 0$, siis asub punkt kolmandas veerandis ja

$$\varphi = 180° + 26°34' = 206°34'.$$

Niisiis,

$$-4 - 2i = \sqrt{20}(\cos 206°34' + i \sin 206°34').$$

Ülesandeid.

439. Mitmendas veerandis asetsevad järgmistele kompleksarvudele vastavad punktid?

a) $4-3i$ c) $5+3i$ e) $-3+8i$
b) $-2+3i$ d) $-2-i$ f) $2-i$

440. Leia eelmises ülesandes antud kompleksarvude trigonomeetriline kuju.

441. Teisenda antud kompleksarvud trigonomeetrilisele kujule.

a) i c) 5 e) $3i$
b) $-4i$ d) -2 f) 1.

442. Teisenda antud kompleksarvud algebralisele kujule.

a) $2(\cos 45° + i \sin 45°)$ e) $5(\cos 18°35' + i \sin 18°35')$

b) $3(\cos 120° + i \sin 120°)$ f) $2{,}6(\cos 104°20' + i \sin 104°20')$

c) $8(\cos 225° + i \sin 225°)$ g) $\frac{7}{12}(\cos 222°22' + i \sin 222°22')$

d) $12(\cos 300° + i \sin 300°)$ h) $\frac{13}{5}(\cos 314°48' + i \sin 314°48')$

443. Teisenda antud kompleksarvud algebralisele kujule.

a) $\cos 0° + i \sin 0°$ e) $\cos \frac{4}{3}\pi + i \sin \frac{4}{3}\pi$

b) $\cos 90° + i \sin 90°$ f) $\pi(\cos \pi + i \sin \pi)$

c) $\cos 180° + i \sin 180°$ g) $\frac{5}{6}\left(\cos \frac{5}{6}\pi + i \sin \frac{5}{6}\pi\right)$

d) $\cos 270° + i \sin 270°$ h) $\frac{\pi}{2}\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)$

9) Kompleksarvude korrutamine.

Olgu antud kaks kompleksarvu $a+bi$ ja $c+di$. Leiame nende korrutise, tuginedes eespool (lk. 216) toodud märkusele, et sulgude avamine toimub kompleksarvude vallas täpselt samuti kui reaalarvude vallas.

Seega,

$$(a+bi)\cdot(c+di) = ac + adi + bci + bdi^2 =$$
$$= (ac-bd) + (ad+bc)i.$$

Olgu näiteks antud kompleksarvud

$$4-3i \quad \text{ja} \quad -2-5i.$$

Nende korrutiseks on

$$(4-3i)\cdot(-2-5i)=(-8-15)+(-20+6)i=-23-14i.$$

Anname nüüd kompleksarvude korrutisele geomeetrilise tõlgenduse. Selleks leiame kõigepealt kompleksarvude korrutamise reegli ka juhul, kui tegurid on antud trigonomeetrilises kujus.

Olgu antud kompleksarvud

$$r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1) \quad \text{ja} \quad r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2).$$

Nende korrutis on siis

$$\begin{aligned}
&r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)= \\
&=r_1r_2(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)= \\
&=r_1r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2+i\cos\varphi_1\sin\varphi_2+i\sin\varphi_1\cos\varphi_2+ \\
&+i^2\sin\varphi_1\sin\varphi_2)=r_1r_2[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2)+ \\
&+i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2+\cos\varphi_1\sin\varphi_2)]=r_1r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+ \\
&+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)].
\end{aligned}$$

Seega

kahe trigonomeetrilisel kujul antud kompleksarvu korrutis on kompleksarv, mille mooduliks on antud kompleksarvude moodulite korrutis ja argumendiks antud kompleksarvude argumentide summa.

Näiteks olgu antud kompleksarvud

$$2(\cos 15^\circ+i\sin 15^\circ) \quad \text{ja} \quad 3(\cos 110^\circ+i\sin 110^\circ),$$

siis nende korrutiseks on

$$6(\cos 125^\circ+i\sin 125^\circ).$$

Kui $\begin{aligned} a&=r_1\cos\varphi_1 \\ b&=r_1\sin\varphi_1 \end{aligned}$ ja $\begin{aligned} c&=r_2\cos\varphi_2 \\ d&=r_2\sin\varphi_2, \end{aligned}$

siis

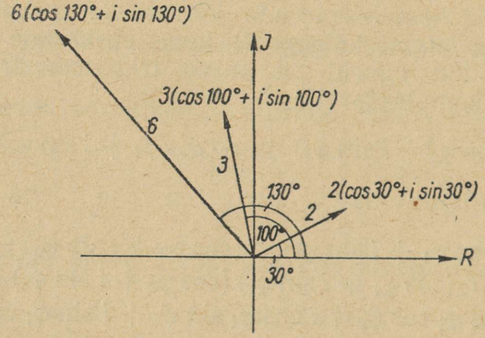
$$(ac-bd)+(ad+bc)i=r_1r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)].$$

Kontrolli selle võrduse kehtivust!

Tuginedes trigonomeetrilises kujus antud kompleksarvude korrutamise eeskirjale, saame kompleksarvude korrutamist tõlgendada geomeetriliselt järgmiselt.

Kujutame koordinaatteljestikus ühele tegurile vastava kohavektori. Korrutisele vastava kohavektori saamiseks tuleb antud vektorit pöörata teise teguri argumendi võrra ja muuta siis vektori pikkust teise teguri mooduli kordseks. Joonisel 219 on esitatud geomeetriliselt kompleksarvude

$2(\cos 30° + i \sin 30°)$ ja $3(\cos 100° + i \sin 100°)$ korrutis.



Joon. 219.

Kompleksarve $a + bi$ ja $a - bi$ nimetatakse kaaskompleksarvudeks.

Nii on näiteks arvu $-3+2i$ kaaskompleksarvuks $-3-2i$. Korrutame kompleksarvu oma kaaskompleksarvuga

$$(a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2.$$

Tulemuseks on reaalarv. Näita seda ka geomeetriliselt!

See võrdus näitab, et kompleksarvude vallas on võimalik ruutude summat tegureiks lahutada.

Näiteks

$$9 + x^2 = (3 + xi)(3 - xi).$$

Ülesandeid.

444. Leia järgmiste kompleksarvude korrutised.

a) $3(\cos 72° + i \sin 72°) \cdot 5(\cos 68° + i \sin 68°)$

b) $4(\cos 113° + i \sin 113°) \cdot 2{,}3(\cos 118° + i \sin 118°)$

c) $2\left(\cos \frac{4}{3}\pi + i \sin \frac{4}{3}\pi\right) \cdot \frac{1}{2}\left(\cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi\right)$

d) $19(\cos 36° + i \sin 36°) \cdot 16\left(\cos \frac{6}{5}\pi + i \sin \frac{6}{5}\pi\right)$

445. Leia järgmiste kompleksarvude korrutised.

a) $2{,}5i \cdot 4i$

b) $(3+5i) \cdot 2$

c) $(-8-7i) \cdot (-3i)$

d) $(\sqrt{2}-i) \cdot (\sqrt{3}+i\sqrt{2})$

e) $(5+i\sqrt{3})(5-i\sqrt{3})$

f) $(\sqrt{k}+i\sqrt{n})(\sqrt{k}-i\sqrt{n})$

g) $(0{,}5+0{,}2i)(2+3i)$

h) $(1-2i)(5-i)$

446. Leia geomeetriliselt järgmiste kompleksarvude korrutis.

a) $2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right) \cdot 3\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$

b) $4(\cos 160^\circ+i\sin 160^\circ) \cdot \frac{1}{2}(\cos 80^\circ+i\sin 80^\circ)$

447. Lahutada tegureiks.

a) a^2+4

b) $1+c^2$

c) a^2+4b^2

d) $4m^2+9n^2$

e) $a+b$

f) $a+2$

10) Kompleksarvude jagamine.

Jagamist mõistame ka kompleksarvude vallas korrutamise pöördtehtena.

Olgu ülesandeks jagada

$$(a+bi):(c+di),$$

s. t. tuleb leida niisugune kompleksarv $x+yi$, mille korrutamisel jagajaga saame jagatava, s. t. et

$$(x+yi) \cdot (c+di) = a+bi.$$

Kompleksarvude korrutamise eeskirjade kohaselt peavad kehtima võrdused:

$$xc-yd=a;$$
$$xd+yc=b.$$

Lahendades selle võrrandisüsteemi, saame

$$x=\frac{ac+bd}{c^2+d^2} \quad \text{ja} \quad y=\frac{bc-ad}{c^2+d^2}.$$

Seega,

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i.$$

Näiteks jagame $(4-3i):(-2-i)$.

$$\frac{4-3i}{-2-i}=\frac{-8+3}{5}+\frac{6-(-4)}{5}i=-1+2i.$$

Leiame kompleksarvude jagamise eeskirja ka juhul, kui kompleksarvud on antud trigonomeetrilises kujus.

Olgu ülesandeks jagada

$$\frac{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)},$$

s. t. tuleb leida niisugune kompleksarv $r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$, mille korrutamisel nimetajaga saame lugeja, s. t. et

$$r_2r_1=r \quad \text{ja siit} \quad r_2=\frac{r}{r_1},$$

$$\varphi_1+\varphi_2=\varphi \quad \text{ja siit} \quad \varphi_2=\varphi-\varphi_1.$$

Niisiis,

$$\frac{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}=\frac{r}{r_1}[\cos(\varphi-\varphi_1)+i\sin(\varphi-\varphi_1)].$$

Kui osutub, et $\varphi-\varphi_1<0$, siis tuleb see nurk asendada vastava positiivse nurgaga $360°+(\varphi-\varphi_1)$, mis kuulub argumendi võimalike väärtuste piirkonda.

N ä i d e.

$$\frac{2(\cos 20°+i\sin 20°)}{5(\cos 300°+i\sin 300°)}=0{,}4(\cos 80°+i\sin 80°).$$

Et $20°-300°=-280°$, siis tuleb argumendiks $360°-280°=80°$.

Kui $a=r_1\cos\varphi_1$ ja $c=r_2\cos\varphi_2$
$b=r_1\sin\varphi_1$ $d=r_2\sin\varphi_2$,

siis

$$\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)].$$

Kontrolli selle võrduse kehtivust!

Ülesandeid.

448. Leia jagatis.

a) $\dfrac{3(\cos 80°+i\sin 80°)}{2(\cos 20°+i\sin 20°)}$

b) $\dfrac{10(\cos 292°+i\sin 292°)}{4(\cos 186°+i\sin 186°)}$

c) $\dfrac{\frac{5}{6}\left(\cos\frac{17}{36}\pi+i\sin\frac{17}{36}\pi\right)}{\frac{2}{3}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)}$

d) $\dfrac{5{,}16(\cos 1{,}8\pi+i\sin 1{,}8\pi)}{1{,}11\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)}$

449. Leia jagatis.

a) $\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$ d) $\frac{-2\sqrt{3}i+1}{1+2i\sqrt{3}}$ e) $\frac{a}{a+2i\sqrt{a}}$

b) $\frac{5+2i}{5-2i}$ e) $\frac{6-i}{6-2i}$ f) $\frac{a-bi}{b+ai}$

c) $\frac{3}{2+4i}$ f) $\frac{5-2i}{3i}$ h) $\frac{bi}{a+bi}$

450. Leia geomeetriliselt järgmiste kompleksarvude jagatis:

a) $4\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)\cdot 2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$;

b) $0{,}5(\cos 320^\circ+i\sin 320^\circ):0{,}2(\cos 35^\circ+i\sin 35^\circ)$.

11) K o m p l e k s a r v u d e o m a d u s i.

1° Nagu nägime, on kahe kompleksarvu summa, vahe, korrutis ja jagatis kompleksarv, s. t. et

kompleksarvude hulgas on teostatav liitmise, lahutamise, korrutamise ja jagamise tehe.

2° Juba reaalarvude hulk sisaldas lõpmata palju arve, nüüd lisandusid neile puhtimaginaararvud ja imaginaararvud. Seega

kompleksarvude hulk sisaldab lõpmata palju arve.

3° Reaalarvudele vastavad punktid asetsesid arvteljel. See võimaldas järjestada neid arve suuruse järgi ja otsida antud arvu naaberarve. Kompleksarvudele vastavad punktid asetsevad tasapinnal. Siin ei ole võimalik öelda, kummale kahest punktist vastab suurem kompleksarv. Seetõttu

kompleksarve ei saa järjestada suuruse järgi.

4° Samuti

antud kompleksarvul pole naaberarve.

5° Et tasapinna igale punktile vastab kindel kompleksarv, siis **kompleksarvude hulk on pidev.**

§ 80. KOMPLEKSARVUDE KASUTAMINE KOLMANDA JA NELJANDA ASTME KAKSLIIKMELISTE VÕRRANDITE LAHENDAMISEKS.

1) K a k s l i i k m e l i s e v õ r r a n d i m õ i s t e.

Võrrandit nimetatakse kaksliikmeliseks, kui temale saab anda kuju

$$x^n+m=0,$$

kus n on naturaalarv ja m on reaalarv.

Näiteks võrrandid:

$$x + b = 0,$$
$$x^2 + d = 0,$$
$$x^3 + f = 0,$$
$$x^4 + k = 0$$

on vastavalt esimese, teise, kolmanda ja neljanda astme kaksliikmelised võrrandid.

Võrrandi $x + b = 0$ lahendiks on $x = -b$.

Võrrandi $x^2 + d = 0$ lahendiks on $x_1 = \sqrt{-d}$ ja $x_2 = -\sqrt{-d}$.

Kui d on negatiivne, siis on juurealune avaldis positiivne ja saame lahendeiks kaks märgilt erinevat reaalarvu.

Kui aga d on positiivne, siis saame lahendeiks imaginaararvud $i\sqrt{d}$ ja $-i\sqrt{d}$.

2) V õ r r a n d i $x^3 + a^3 = 0$ l a h e n d a m i n e.

Kolmanda astme kaksliikmelise võrrandi $x^3 + f = 0$ lahendite leidmiseks tähistame vabaliikme a^3-ga, kus $a > 0$, s. t. $f = a^3$, ja vaatleme nüüd võrrandi

$$x^3 + a^3 = 0$$

lahendamist.

Võrrandi vasaku poole kui kuupide vahe saame lahutada tegureiks:

$$(x + a)(x^2 - ax + a^2) = 0.$$

Seega antud võrrandi lahendamine taandub kahe uue võrrandi lahendamisele:

$$x + a = 0,$$

mille lahendiks on

$$x_1 = -a$$

ja

$$x^2 - ax + a^2 = 0,$$

mille lahendeiks on

$$x_{2,3} = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - a^2} = \frac{a}{2} \pm \sqrt{-\frac{3}{4}a^2} = \frac{a}{2} \pm \frac{a}{2}\sqrt{-3} =$$
$$= \frac{a}{2}(1 \pm i\sqrt{3}).$$

Seega võrrandi $x^3 + a^3 = 0$ lahendeiks on (kui $a > 0$):

$$x_1 = -a; \qquad x_2 = \frac{a}{2}(1 + i\sqrt{3}); \qquad x_3 = \frac{a}{2}(1 - i\sqrt{3}).$$

N ä i d e. Lahendada võrrand $3x^3+4=0$.

Teisendame selle võrrandi kujule $x^3+\frac{4}{3}=0$.

Siin on $a^3=\frac{4}{3}$ ja seega $a=\sqrt[3]{\frac{4}{3}}$.

Antud võrrandi lahendeiks on:

$$x_1=-\sqrt[3]{\frac{4}{3}};$$

$$x_2=\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{4}{3}}(1+i\sqrt{3});$$

$$x_3=\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{4}{3}}(1-i\sqrt{3}).$$

3) V õ r r a n d i $x^3-a^3=0$ l a h e n d a m i n e.

Tähistame võrrandis $x^3+f=0$ vabaliikme $-a^3$-ga, kus $a>0$, s. t. $f=-a^3$.

Lahendada tuleb seega võrrand

$$x^3-a^3=0.$$

Selle võrrandi lahendame nii nagu eelmisegi võrrandi. Lahendeiks saame:

$$x_1=a;$$

$$x_2=\frac{a}{2}(-1+i\sqrt{3});$$

$$x_3=\frac{a}{2}(-1-i\sqrt{3}).$$

5) V õ r r a n d i $x^4+a^4=0$ l a h e n d a m i n e.

Neljanda astme kaksliikmelised võrrandid on esitatavad kujus $x^4+a^4=0$ ja $x^4-a^4=0$.

Ka siin lahutame kõigepealt võrrandi vasaku poole tegureiks. Selleks liidame ja lahutame kaksliikmele x^4+a^4 avaldise $2a^2x^2$ ja seejärel lahutame ruutude vahe tegureiks:

$$x^4+a^4=x^4+a^4+2a^2x^2-2a^2x^2=(x^2+a^2)^2-(\sqrt{2}\,ax)^2=$$
$$=(x^2+a^2-\sqrt{2}\,ax)(x^2+a^2+\sqrt{2}\,ax).$$

Seega taandub antud võrrandi lahendamine võrrandi

$$(x^2-\sqrt{2}\,ax+a^2)(x^2+\sqrt{2}\,ax+a^2)=0$$

lahendamisele.

Kui siin

$$x^2 - \sqrt{2}\,ax + a^2 = 0,$$

siis saame lahendeiks

$$x_{1,2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,a \pm \sqrt{\frac{1}{2}\,a^2 - a^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,a \pm \sqrt{-\frac{1}{2}\,a^2} = \frac{a}{\sqrt{2}}\,(1 \pm i).$$

Kui aga

$$x^2 + \sqrt{2}\,ax + a^2 = 0,$$

siis on lahendeiks

$$x_{3,4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\,a \pm \sqrt{\frac{1}{2}a^2 - a^2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \pm \sqrt{-\frac{1}{2}\,a^2} = -\frac{a}{\sqrt{2}}\,(1 \mp i).$$

6) V õ r r a n d i $x^4 - a^4 = 0$ l a h e n d a m i n e.

Lahutades $x^4 - a^4$ tegureiks, saame

$$x^4 - a^4 = (x^2 - a^2)\,(x^2 + a^2) = (x - a)\,(x + a)\,(x^2 + a^2).$$

Võrrandi

$$(x - a)\,(x + a)\,(x^2 + a^2) = 0$$

lahendeiks on:

$$x_1 = a;$$
$$x_2 = -a;$$
$$x_3 = ai;$$
$$x_4 = -ai.$$

Ülesandeid.

451. Lahenda järgmised kaksliikmelised võrrandid.

a) $x^3 - 27 = 0$ e) $4x^3 + 15 = 0$

b) $x^3 + 729 = 0$ f) $-2x^3 + 7 = 0$

c) $x^4 - 625 = 0$ g) $-\frac{3}{4}\,x^4 + \frac{5}{8} = 0$

d) $x^4 + 256 = 0$ h) $3{,}2x^4 + 10{,}1 = 0$

7) A l g e b r a p õ h i l a u s e.

Linaarvõrrandite lahendamisel saame alati ühe lahendi. Pärast arvuvalla laiendamist kompleksarvudega saame igale ruutvõrrandile kaks lahendit.

Eespool nägime, et igal vaadeldud kaksliikmelisel võrrandil on kompleksarvude vallas just niipalju lahendeid, kui suur on võrrandi aste.

See omadus on üldine, s. t. kehtib kolmanda, neljanda, viienda jne. astme võrrandite puhul ka siis, kui see võrrand sisaldab liikmeid, kus tundmatu esineb madalamas astmes kui on võrrandi aste. See tõsiasi, mida siinkohal ei tõestata, ongi tuntud algebra põhilause nime all.

Nii on näiteks võrrandil

$$x^3-2x^2+x-2=0$$

kolm lahendit, 2, i ja $-i$, ja võrrandil

$$x^5+3x^4-5x^3-15x^2+4x+12=0$$

on viis lahendit: ± 1, ± 2 ja -3.

Kontrolli neid lahendeid!

Kõrgema astme võrrandeid (nende lahendeiks pole enamikel juhtudel täisarvud) lahendatakse tavaliselt ligikaudselt, s. t. leitakse lahendid teatud täpsusega. Võrrandite täpseks lahendamiseks on vajalik vastava lahenduseeskirja — valemi — olemasolu. Juba 21-aastaselt duellil surma saanud prantsuse andekas matemaatik d'Evariste Galois (1811—1832) tõestas, et niisuguse eeskirja andmine on võimalik ainult kuni neljanda astme võrranditeni.

Võrrandite ligikaudse lahendamise kohta on välja töötatud palju meetodeid. XI klassis tutvume neist ühega, mis pärineb tuntud inglise füüsikult ja matemaatikult Isaac Newtonilt.

§ 81. ARVUVALLA LAIENDAMISEST.

Seni tundma õpitud matemaatika kursuses on mitmel korral teostatud arvuvalla laiendamist. Algklassides arvutati ainult naturaalarvudega. Hiljem õpiti tundma positiivseid murdarve ja negatiivseid täis- ja murdarve.

Positiivsed ja negatiivsed täis- ja murdarvud moodustavad nn. ratsionaalarvude valla.

$\sqrt{2}$, log 5, sin 10° jne. on arvud, mis ei kuulu ratsionaalarvude hulka. Seega õppides tundma juurimist, logaritmimist ja trigonomeetrilisi funktsioone, täienes arvuvald irratsionaalarvudega.

Irratsionaalarvud koos ratsionaalarvudega moodustavad reaalarvude valla.

Analoogiliselt on kulgenud arvuvalla laiendamine ka ajaloolisest seisukohast vaadatuna. Vana-Kreeka matemaatikud kasutasid naturaalarve ja positiivseid murdarve. Positiivse ja negatiivse arvu mõistet kasutasid esimestena hindud VI ja VII sajandil. Möödus aga veel palju sajandeid, enne kui need arvud leidsid täit tunnustust. Näiteks taandatud ruutvõrrandi $x^2+px+q=0$ kordajate ja tema lahendite x_1 ja x_2 vahelised seosed tuletati XVI sajandil prantsuse matemaatiku François Viète poolt ainult positiivsete lahendite puhul. Alles XVII sajandil muutuvad negatiivsed arvud matemaatikas üldkasutatavaks.

Mitteratsionaalarvu olemasolu oli selge juba Vana-Kreeka matemaatikuile ja Eukleides oma suure tähtsusega töös «Elemendid» püüdis anda nende arvude kohta teatud teooria, tuginedes geomeetrilisele kujutusele ühismõõdutuist lõikudest. Uue matemaatikaharu — matemaatilise analüüsi — tekkimise ja arenemisega XVII ja XVIII sajandil kerkis väga teravalt päevakorrale vajadus anda range reaalarvude teooria. Selle ülesande lahendasid XIX sajandil üksteisest sõltumatult saksa matemaatikud Richard Dedekind, Georg Cantor ja Karl Weierstrass.

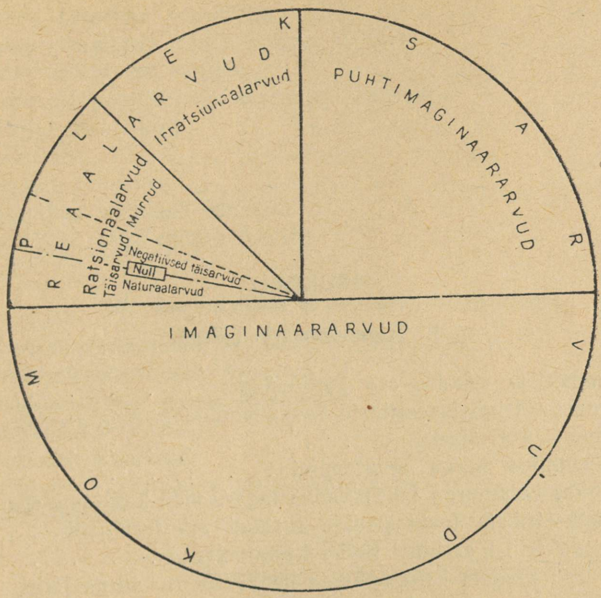
Itaalia matemaatik Geronimo Cardano avaldas XVI sajandil kuupvõrrandi $x^3+px+q=0$ lahendamiseks valemi:

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}},$$

mille rakendamine juhul, kui kuupvõrrandi kõik kordajad on reaalarvud, nõuab kompleksarvude tundmist. Cardano nimetas neid arve «valedeks arvudeks». Üldise tunnustuse said kompleksarvud pärast saksa matemaatiku Gaussi poolt antud kompleksarvude teooria põhjendust 1831. aastal. Kompleksarvude baasil, mis esialgu näisid olevat mingid «valed arvud», areneb hiljem välja kompleksmuutuja funktsioonide teooria, mille rakendused on eriti hinnatavad aerodünaamikas. Selles on suuri teeneid tuntud vene teadlasel Nikolai Žukovskil.

Kompleksmuutuja funktsioonide teooriat rakendatakse suure eduga ka elektrotehnikas, tuumafüüsikas ja elastusteoorias. Viimasel alal on silmapaistvaid tulemusi saavutanud ka endine Tartu Ülikooli rakendusmatemaatika professor Guri Kolossov (1867—1931).

Matemaatikas kui teaduses toimub loogilise arutluse lihtsustamise huvides arvuvalla laiendamine naturaalarvudelt ratsionaalarvudeni teisiti kui siin kirjeldatud. See kulgeb nii, nagu seda on tehtud eespool, naturaalarvudelt esmalt täisarvudele ja siis sealt ratsionaalarvudele. Edasi laieneb arvuvald reaalarvudele, kompleksarvudele jne. Joonis 220 iseloomustabki just seda fakti, et iga uus arvuvald hõlmab endas temale eelneva arvuvalla.



Joon. 220.

Arvuvalla edasist laiendamist nii, et igale ruumipunktile vastaks kindel arv, põhjendas iiri matemaatik ja astronoom William Rowan Hamilton 1843. aastal. Uusi arve nimetatakse kvaternioonideks.

SISUKORD

I. Trigonomeetria (järg).

II. Geomeetrilised teisendused tasapinnal.

III. Sirged ja tasapinnad.

IV. Ruumikujundite paralleelprojektsioonid.

V. Funktsioonide uurimine.

VI. Pöördfunktsioon.

VII. Eksponentfunktsioon ja logaritmfunktsioon.

VIII. Geomeetriline progressioon.

Этверк Элмар Германович

Принитс Олаф Иоханнесович

Вихман Арнольд Юрьевич

МАТЕМАТИКА ДЛЯ X КЛ.

На эстонском языке

Обложка Л. Круусма

Министерство просвещения Эстонской ССР

*

Toimetaja K. Kallaste

Ladumisele antud 12. VI 1964. Trükkimisele antud 11. VIII 1964. Paber 60×90, 1/16. Trükipoognaid 14,75. Arvestuspoognaid 12,43. Trükiarv 1700. Tellimise nr. 4992. Hans Heidemanni nim. trükikoda, Tartu, Ülikooli 17/19. I.

Hind 23 kop.

23 kop.

23 kop.

MATEMAATIKA X KLASSILE

E. ETVERK
O. PRINITS
A. VIHMAN

MATEMAATIKA

X KLASSILE