

A. VIHMAN

ALGEBRA

ÕPIK

IX KLASSILE

RK

„PEDAGOOGILINE KIRJANDUS“

TALLINN 1946

A. VIHMAN

ALGEBRA

ÕPIK

IX KLASSILE

Kohustuslik kontrollieksemplar

~~3012~~

RK

„PEDAGOOGILINE KIRJANDUS“

TALLINN 1946

2



25341

A= 16166

Peatükk I.

RUUTVÖRRANDID JA NENDE SÜSTEEMID TÄHELISTE KORDAJATEGA.

§ 1. Täheliste kordajatega ruutvõrrand.

Kui ruutvõrrandis peale otsitava ruuduga liikme esineb veel otsitava esimese astmega liige ja otsitavast vaba liige, siis on meil tegemist täieliku ruutvõrrandiga. Nime-tame otsitava ruuduga liiget ruutvõrrandis ruutliik-meks, otsitava esimese astmega liiget — lineaarseks liikmeks ja otsitavast vaba liiget lihtsalt vabaliik-meks.

Peale teisendamist ja lihtsustamist kirjutatakse ruutvõrrand alati niisugusel kujul, et võrrandi kõik liikmed esinevad vasakul poolel, esikohal ruutliige, teisel kohal lineaarne liige ja kolmandal kohal vabaliige, paremal poolel on null. Siin-juures tuleb silmas pidada, et ruutliikme kordaja peab olema positiivne; kui ta tuleb negatiivne, siis korrutatakse võrrandi iga liige arvuga -1 .

Kui ruutvõrrand on teisendatud niisuguseks, et tema vasakul poolel on esikohal positiivse kordajaga ruutliige, teisel kohal lineaarne liige, viimasel kohal vabaliige ja paremal poolel null, siis ütleme, et ruutvõrrandil on normaal-kujulised. Näiteks ruutvõrrandid

$$3x^2 - 2x - 5 = 0 \text{ ja } (a - 1)x^2 + (a - b)x - b = 0$$

on normaalkujulised.

Lahendamiseks teisendatakse ruutvõrrand alati normaal-kujuliseks.

Täielikud ruutvõrrandid liigitatakse ruutliikme kordaja järgi kahte liiki, taandatud ja üldkujulisteks ruutvõrranditeks.

A. Kui ruutliikme kordaja on 1, siis kannab võrrand taandatud ruutvõrrandi nime. Näiteks

$$x^2 + px + q = 0$$

on taandatud ruutvõrrand.

Tema lahendid on

$$-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

ehk, lahendid eraldi kirjutades,

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

ja

$$x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

B. Kui ruutliikme kordaja ei ole võrdne arvuga 1, siis nimetame võrrandit üldkujuliseks ruutvõrrandiks; näiteks võrrand

$$ax^2 + bx + c = 0$$

on üldkujuline ruutvõrrand. Tema lahendid sisalduvad valemis

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ehk, lahendid eraldi kirjutades,

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ja

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Kui üldkujulises ruutvõrrandis

$$ax^2 + bx + c = 0$$

lineaarse liikme kordaja b on paarisarv, siis saab lahendusvalemit lihtsamaks teisendada. Paarisarvulise kordaja b võime kirjutada kujul

$$b = 2k.$$

Asetades lahendusvalemis b asemele $2k$, saame pärast lihtsustamist

$$x = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}.$$

Rakendades seda valemit näiteks võrrandi

$$3x^2 - 8x + 5 = 0$$

lahendamisel, saame

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 3 \cdot 5}}{3} = \frac{4 \pm 1}{3};$$

$$x_1 = \frac{4 + 1}{3} = 1\frac{2}{3};$$

$$x_2 = \frac{4 - 1}{3} = 1.$$

Muidugi, igale üldisele ruutvõrrandile võime anda taandatud ruutvõrrandi kuju, iga liiget jagades ruutliikme kordajaga, kuid enamasti see ei hõlbusta tööd.

Põhimõtteliselt võime kõik ruutvõrrandid lahendada, kasutades ühtainsat täieliku ruutvõrrandi lahendusvalemit.

Lahendame näiteks võrrandi

$$3x^2 - 2x - 5 = 0,$$

rakendades järgemööda igähte kolmest valemist.

Üldise ruutvõrrandi lahendusvalem annab:

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4 \cdot 3 \cdot 5}}{2 \cdot 3} = \frac{2 \pm \sqrt{64}}{6} = \frac{2 \pm 8}{6};$$

$$x_1 = \frac{2 + 8}{6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3};$$

$$x_2 = \frac{2 - 8}{6} = \frac{-6}{6} = -1.$$

Taandatud ruutvõrrandi lahendusvalemi rakendamiseks anname võrrandile taandatud ruutvõrrandi kuju, jagades iga liikme arvuga 3:

$$x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{5}{3} = 0.$$

Nüüd saame:

$$x = \frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{5}{3}} = \frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{1}{3} \pm \frac{4}{3};$$

$$x_1 = \frac{1}{3} + \frac{4}{3} = \frac{5}{3};$$

$$x_2 = \frac{1}{3} - \frac{4}{3} = -\frac{3}{3} = -1.$$

Lõpuks võime antud võrrandi lahendamisel kasutada ka lihtsustatud üldist valemit

$$x = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a},$$

sest lineaarse liikme kordaja on siin paarisarv, nimelt —2. Nii saame

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 3 \cdot 5}}{3} = \frac{1 \pm 4}{3};$$

$$x_1 = \frac{5}{3}; \quad x_2 = -1.$$

Endastmõistetavalt saime iga kord ühed ja samad lahendid.

Praktiliselt kasutame lahendamisel seda valemit, mille abil arvutamise on kergem. Igatahes mõne valemi ununemine ei takista ruutvõrrandite lahendamist.

Kui ruutvõrrandis

$$ax^2 + bx + c = 0$$

vabaliige c või kordaja b on null, siis jääb võrrandisse ainult kaks liiget; seepärast sellist võrrandit nimetatakse ka h e l i i k m e l i s e k s ehk m i t t e t ä i e l i k u k s ruutvõrrandiks. Neid võrrandeid saab lahendada küll ka lahendusvalemi abil, kuid kergemini läheb see ilma lahendusvalemit rakendamata.

Lahendame näidistena allpool kõrvuti numbriliste võrranditega mõned tähelised ruutvõrrandid.

Ü l e s a n n e 1. Lahendada võrrand

$$17x^2 + 2x = 0.$$

L a h e n d u s. Teisendame võrrandi vasaku poole korrutiseks, tuues x -i sulgude ette, saame

$$x(17x + 2) = 0.$$

Arvestades asjaolu, et korrutis ainult siis võrdub nulliga, kui üks teguritest on null, võime ütelda, et võrrand on rahuldatud, kui

$$x = 0,$$

ja võrrand on samuti rahuldatud, kui

$$17x + 2 = 0.$$

Esimene võrdus annab ühe lahendi,

$$x_1 = 0.$$

Teisest võrdusest saame, et

$$17x = -2,$$

$$x = -\frac{2}{17},$$

seega

$$x_2 = -\frac{2}{17}.$$

Ülesanne 2. Lahendada võrrand

$$(m + 3)x^2 - x = 0.$$

Lahendus: $x[(m + 3)x - 1] = 0$

$$x_1 = 0;$$

$$(m + 3)x - 1 = 0; (m + 3)x = 1;$$

$$x_2 = \frac{1}{m + 3}.$$

Ülesanne 3. Lahendada võrrand

$$5x^2 - 3 = 0.$$

Lahendus. $5x^2 = 3; x^2 = \frac{3}{5} = 0,6.$

$$x = \pm \sqrt{0,6}$$

Ruutjuure algoritmi või ruutjuurte tabeli abil leiame $\sqrt{0,6}$ ligikaudse väärtuse, saame

$$\sqrt{0,6} = 0,775.$$

Seega

$$x_1 = 0,775,$$

$$x_2 = -0,775.$$

Ülesanne 4. Lahendada võrrand

$$\frac{a^2 - b^2}{x} + bx = ax$$

Lahendus. Vabastame võrrandi nimetajast, korrutades iga liikme x -iga, saame

$$a^2 - b^2 + bx^2 = ax^2.$$

Kirjutame ruutliikmed vasakul poolel esikohale:

$$bx^2 - ax^2 + a^2 - b^2 = 0.$$

Viime x^2 sulgude taha:

$$(b - a)x^2 + a^2 - b^2 = 0.$$

Nüüd saame:

$$(b - a)x^2 = b^2 - a^2;$$

$$x^2 = \frac{b^2 - a^2}{b - a} = \frac{(b + a)(b - a)}{b - a} = a + b;$$

$$x = \pm \sqrt{a + b};$$

$$x_1 = \sqrt{a + b};$$

$$x_2 = -\sqrt{a + b}.$$

Ülesanne 5. Lahendada võrrand

$$(3x - 2)^2 = 5.$$

Lahendus. Ka selle võrrandi saab lahendada ilma lahendusvalemi rakendamiseta. Võttes ruutjuure võrrandi kummastki poolest, saame avaldada $3x - 2$, seega saame x -i suhtes lineaarsed võrrandid, millest leiamegi x -i väärtused:

$$3x - 2 = \pm \sqrt{5};$$

$$3x = 2 \pm \sqrt{5};$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{5}}{3};$$

$$x_1 = \frac{2 + \sqrt{5}}{3} = \frac{2 + 2,236}{3} = \frac{4,236}{3} = 1,412;$$

$$x_2 = \frac{2 - \sqrt{5}}{3} = \frac{2 - 2,236}{3} = \frac{-0,236}{3} = -0,079.$$

Ülesanne 6. Lahendada võrrand

$$(ax + b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Lahendus.

$$(ax + b)^2 = (a - b)^2$$

$$ax + b = \pm \sqrt{(a - b)^2} = \pm (a - b)$$

$$ax = -b \pm (a - b)$$

$$x = \frac{-b \pm (a - b)}{a}$$

$$x_1 = \frac{-b + (a - b)}{a} = \frac{-b + a - b}{a} = \frac{a - 2b}{a}$$

$$x_2 = \frac{-b - (a - b)}{a} = \frac{-b - a + b}{a} = -\frac{a}{a} = -1.$$

Kontrolli. Asetame esmalt esimese lahendi algvõrrandi vasakusse poolde x -i asemele, siis saame:

$$\begin{aligned} a \cdot \frac{a - 2b}{a} + b)^2 &= (a - 1 + b)^2 = (a - b)^2 = \\ &= a^2 - 2ab + b^2. \end{aligned}$$

Sama avaldis on algvõrrandi paremal poolel, järelikult lahend on õige.

Samal viisil kontrollime teist lahendit, asendades x -i nüüd arvuga -1 , saame:

$$(-a + b)^2 = a^2 - 2ab + b^2. \quad \text{Õige.}$$

Praktiliselt võib piirduda ühe lahendi kontrollimisega, sest kui üks lahend on õige, siis võib arvata, et ka teine on õige; viga peegelduks ju mõlemas lahendis.

Ülesanne 7. Lahendada võrrand

$$(x + a)^2 + (x + b)^2 = (a - b)^2.$$

Lahendus. Avame sulud ja lihtsustame, niipalju kui võimalik:

$$x^2 + 2ax + a^2 + x^2 + 2bx + b^2 = a^2 - 2ab + b^2;$$

$$2x^2 + 2ax + 2bx = -2ab;$$

$$x^2 + ax + bx = -ab;$$

$$x^2 + (a + b)x + ab = 0.$$

Rakendame taandatud ruutvõrrandi lahendusvalemit:

$$\begin{aligned}
 x &= -\frac{a+b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - ab} = -\frac{a+b}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2+2ab+b^2}{4} - \frac{4ab}{4}} = \\
 &= -\frac{a+b}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2+2ab+b^2-4ab}{4}} = -\frac{a+b}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2-2ab+b^2}{4}} = \\
 &= -\frac{a+b}{2} \pm \sqrt{\frac{(a-b)^2}{4}} = -\frac{a+b}{2} \pm \frac{a-b}{2};
 \end{aligned}$$

$$x_1 = -\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} = \frac{-a-b+a-b}{2} = \frac{-2b}{2} = -b;$$

$$x_2 = -\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2} = \frac{-a-b-a+b}{2} = \frac{-2a}{2} = -a.$$

Kontrolliks asetame näiteks esimese lahendi $-b$ algvõrrandi vasakul poolel x -i asemele, siis saame:

$$(-b+a)^2 + (-b+b)^2 = (a-b)^2 + 0 = (a-b)^2.$$

Et võrrandi parem pool on samuti $(a-b)^2$, siis meie lahend on õige. Samal viisil võime kontrollida teist lahendit.

Ülesanne 8. Lahendada võrrand

$$bx^2 + (2b-a)x - 2a = 0.$$

Lahendus. Üldkujulise ruutvõrrandi lahendusvalemit rakendades saame:

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{-(2b-a) \pm \sqrt{(2b-a)^2 + 4 \cdot b \cdot 2a}}{2b} = \\
 &= \frac{a-2b \pm \sqrt{4b^2 - 4ab + a^2 + 8ab}}{2b} = \\
 &= \frac{a-2b \pm \sqrt{4b^2 + 4ab + a^2}}{2b} = \\
 &= \frac{a-2b \pm \sqrt{(2b+a)^2}}{2b} = \frac{a-2b \pm (2b+a)}{2b}; \\
 x_1 &= \frac{a-2b+(2b+a)}{2b} = \frac{2a}{2b} = \frac{a}{b}; \\
 x_2 &= \frac{a-2b-(2b+a)}{2b} = \frac{-4b}{2b} = -2.
 \end{aligned}$$

Kontrolliks asetame esimese lahendi algvõrrandisse x -i asemele, siis saame:

$$b \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^2 + (2b - a) \cdot \frac{a}{b} - 2a = \frac{a^2 b}{b^2} + \frac{2ab}{b} - \frac{a^2}{b} - 2a = \\ = \frac{a^2}{b} + 2a - \frac{a^2}{b} - 2a = 0. \quad \text{Õige.}$$

Kokkuvõttes toimime täheliste kordajatega ruutvõrrandi lahendamisel järgmiselt:

Pärast võrrandis esinevate nimetajate kaotamist, tarvilikku sulgude avamist ja võimalikku koondamist toome kõik liikmed võrrandi vasakule poolele, rühmitades need nii, et esikohal on ruutliikmete, teisel kohal lineaarsete liikmete ja kolmandal kohal vabaliikmete rühm; esimeses rühmas viime sulgude taha otsitava ruudu, teises rühmas otsitava esimese astme. Saadud normaalkujulise võrrandi lahendame numbriliste võrrandite eeskujul.

Numbriliste võrrandite lahendamisel nägime, et kui lahendusvalemis esinev juurealune avaldis on positiivne, siis ruutvõrrandil on kaks erinevat lahendit; kui juurealune avaldis on null, siis on võrrandil kaks võrdset lahendit; kui juurealune avaldis on negatiivne, siis ruutvõrrandil ei ole lahendit. Täheliste kordajatega ruutvõrrandite puhul juurealuse avaldise positiivsus ja negatiivsus ei ole igakord määratud; kui juurealuse avaldise väärtus saab tähtede mõnesuguste arväärtuste puhul tulla positiivne, siis ütleme, et tähelisel ruutvõrrandil on kaks lahendit.

Ülesanded.

1. Lahendada järgmised ruutvõrrandid:

- | | |
|--------------------------|---|
| 1. $x^2 - 8x = 0$ | 6. $(x + 11)(x - 9) = 0$ |
| 2. $x(x - 3) = 0$ | 7. $(3x - 2)(2x + 3) = 0$ |
| 3. $(x + 3)(x - 5) = 0$ | 8. $(3 - \frac{8}{x})(2 - \frac{5}{x}) = 0$ |
| 4. $(x - 7)(x - 8) = 0$ | 9. $x^2 = x$ |
| 5. $2(x - 2)(x + 4) = 0$ | 10. $3(x + 5)(x - 6) = 0$ |

2. Lahendada järgmised võrrandid tähe x suhtes:

- | | |
|----------------------------|---|
| 1. $x^2 - ax = 0$ | 6. $(ax + b)(bx - a) = 0$ |
| 2. $x(x + b) = 0$ | 7. $\left(a - \frac{b}{x}\right)\left(b - \frac{a}{x}\right) = 0$ |
| 3. $(x + a)(x - b) = 0$ | 8. $ax^2 = x$ |
| 4. $a(x - a)(x + a) = 0$ | 9. $b(x + a)(x - b) = 0$ |
| 5. $(x - a)^2 = 2ax + a^2$ | 10. $(x + b)^2 = b^2 - 2bx$ |

3. Lahendada järgmised võrrandid:

- | | |
|---|---|
| 1. $5x^2 + 2 = 22$ | 6. $7x^2 - 3 = 60$ |
| 2. $(x + 1)^2 = 2x + 10$ | 7. $(x - 1)^2 = 26 - 2x$ |
| 3. $(x - 2)^2 = 53 - 4x$ | 8. $(x + 3)^2 = 6x + 25$ |
| 4. $\frac{4}{x-3} - \frac{4}{x+3} = \frac{1}{3}$ | 9. $\frac{x}{x+3} + \frac{x}{x-3} = \frac{9}{4}$ |
| 5. $\frac{2x^2}{3} - \frac{7x^2 - 5}{2} = 2\frac{1}{2}$ | 10. $\frac{x+2}{x-2} + \frac{x-2}{x+2} = \frac{34}{15}$ |

4. Lahendada järgmised võrrandid:

- | | |
|--|--------------------------------|
| 1. $ax^2 = b$ | 5. $x^2 - 3a^2 = a^2$ |
| 2. $ax^2 + b^2 = bx^2 + a^2$ | 6. $ax^2 + b = bx^2 + a$ |
| 3. $\frac{a}{x} - bx = cx$ | 7. $\frac{b-1}{x} + x = bx$ |
| 4. $\frac{x}{x+a} + \frac{x}{x-a} = -1$ | 8. $(x+a)^2 + (x-a)^2 = 10a^2$ |
| 9. $(ax + b)^2 + (bx - a)^2 = a^2 + b^2$ | |
| 10. $x^2 - ax(x - b) = abx + 1 - a$ | |

5. Lahendada järgmised võrrandid:

- | | |
|--------------------------------|--|
| 1. $(x - 8)^2 = 49$ | 6. $(x - a)^2 = b^2$ |
| 2. $(3x - 1)^2 = 25$ | 7. $(2x - n)^2 = 25n^2$ |
| 3. $3(x - 2)^2 = 48$ | 8. $5(my - 1)^2 = 20$ |
| 4. $\frac{1}{2}(x + 3)^2 = 18$ | 9. $\frac{1}{n}(x + n)^2 = 4n$ |
| 5. $\frac{(4x + 7)^2}{3} = 3$ | 10. $\frac{(ax + 1)^2}{a + 1} = a + 1$ |

6. Lahendada järgmised võrrandid:

1. $x^2 - 6x = 720$
2. $x^2 = 6x + 187$
3. $261 = x^2 - 20x$
4. $x - \frac{10}{x} = 3$
5. $5x^2 - 3x = 3x^2 + 7x - 8$
6. $(x + 2)^2 + (x + 3)^2 = (x + 4)^2$
7. $(x - 4)^2 + (x - 6)^2 = (x - 2)^2$
8. $(x + 10)^2 - (x + 8)^2 = (x + 1)^2$
9. $(x + 3)^3 - x^3 = 63$
10. $\frac{3}{x} - \frac{2}{x+1} = \frac{1}{2}$

7. Lahendada järgmised võrrandid:

1. $x^2 - ax - 2a^2 = 0$
2. $x^2 + 2ab - bx = 2ax$
3. $x^2 - 2ax + 6a^2 = 3ax$
4. $x + x^2 = b(1 + x)$
5. $x^2 + 2x = 2n(x + 2)$

3. Lahendada järgmised võrrandid:

- | | |
|---|--|
| 1. $2x + \frac{1}{x} = 3$ | 6. $3x - \frac{11}{2} = \frac{1}{x}$ |
| 2. $\frac{2}{x} + 3x = 7$ | 7. $5x - 12 = \frac{9}{x}$ |
| 3. $\frac{1}{x-1} + 2x = 5$ | 8. $24 = \frac{6}{x-1} + 7x$ |
| 4. $\frac{3x^2 + 5x + 1}{x^2 + 2x + 3} = \frac{3}{2}$ | 9. $\frac{7x^2 - 3x - 1}{2x^2 + 9x - 8} = \frac{7}{6}$ |
| 5. $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} = \frac{7}{12}$ | 10. $\frac{1}{x} - \frac{3}{2} = \frac{1}{1-x}$ |

9. Lahendada järgmised võrrandid:

$$1. x - \frac{a^2}{x} = \frac{3a}{2}$$

$$2. x + \frac{a^2}{x+a} = \frac{7a}{6}$$

$$3. \frac{a}{x} + \frac{a-b}{x-b} = 2$$

$$4. \frac{1}{x+a} + \frac{1}{x-a} = \frac{4}{3a}$$

$$5. \frac{a}{x} - \frac{b}{x+b^2} = \frac{2a-b}{2b^2}$$

10. Lahendada järgmised võrrandid:

$$1. 3x^2 - 10x + 3 = 0$$

$$6. 3x^2 - 8nx - 3n^2 = 0$$

$$2. 5x^2 + 36x + 7 = 0$$

$$7. x^2 + \frac{5b^2}{3} = \frac{16bx}{3}$$

$$3. x^2 + 6\frac{2}{3}x - 2\frac{1}{3} = 0$$

$$8. x^2 - \frac{24c}{5}x = c^2$$

$$4. 3x - \frac{1}{x+1} = \frac{7}{5}$$

$$9. n^2(x^2 + 1) = a^2 + 2n^2x$$

$$5. \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} = \frac{3}{4}$$

$$10. \frac{ax-2}{bx-1} = \frac{bx-1}{ax}$$

11. Lahendada järgmised võrrandid:

$$1. \frac{7}{x+1} + \frac{5}{x-1} = 2$$

$$2. (3x-2)^2 = 8x^2 - 31$$

$$3. \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{20}$$

$$4. \frac{1}{3x} + \frac{1}{2x+1} = \frac{7}{36}$$

$$5. \frac{1}{5x} - \frac{1}{7x-1} = \frac{1}{60}$$

$$6. \frac{x^2}{2} - \frac{x}{3} + 7\frac{3}{8} = 8$$

7. $\frac{x+4}{x+1} - \frac{2}{x-1} = 2 \frac{6}{x^2-1}$
8. $\frac{x+3}{3-x} - \frac{4+x}{3+x} = \frac{2x+1}{3+x} - \frac{x-1}{x^2-9}$
9. $\frac{1}{27} - \frac{13}{1-2x} = \frac{25}{4x^2-1} + \frac{x}{2x-1}$
10. $\frac{x-a}{x-b} + \frac{x+a}{x+b} = 1$
11. $x - \frac{a^2}{x-a} = a$
12. $ax + \frac{b}{x+a} = \frac{b}{a}$
13. $bx - \frac{a}{x-b} = \frac{a}{b}$
14. $(x+a)(x+b) + (x-a)(x-b) = 2ax + 2ab$
15. $(x+a)(x-b) + (x-a)(x+b) = 2bx - 2ab$
16. $\frac{a}{ax-b} = \frac{bx-a}{b}$
17. $x + \frac{a^2}{x} = 2a$
18. $6x^2 - 5ax + a^2 = 0$
19. $ax^2 + (a-b)x - b = 0$
20. $ax^2 + (a+1)x + 1 = 0$
21. $2nx - \frac{a}{x} = 2nb - \frac{a}{b}$
22. $x = \frac{3(n-1)^2 + 2nx}{x+2}$
23. $\frac{c}{x-d} + \frac{d}{x-c} = 2$
24. $\frac{2x}{x-d} = \frac{x-d}{d}$
25. $x + \frac{1}{x} = a + \frac{1}{a}$

12. Lahendada järgmised biruutvõrrandid:

1. $x^4 - 11x^2 + 28 = 0$

5. $x^4 - 7x^2 - 18 = 0$

2. $4x^4 - 37x^2 - 1575 = 0$

6. $3x^4 - 5x^2 - 688 = 0$

3. $9x^2 - \frac{16}{x^2} + 32 = 0$

7. $16x^2 + \frac{7}{x^2} - 113 = 0$

4. $15x^2 + \frac{4}{x^2} - 15\frac{2}{3} = 0$

8. $25x^2 - \frac{4}{x^2} - 9\frac{3}{4} = 0$

9. $x + 4\sqrt{x} + 3 = 0$

10. $x - \sqrt{x} - 12 = 0$

13. Rakendades taandatud ruutvõrrandi

$$x^2 + px + q = 0$$

lahendite omadusi, et lahendite summa võrdub lineaarse liikme vastasmärgilise kordajaga ja lahendite korrutis võrdub vabaliikmega, ehk sümbolites

$$x_1 + x_2 = -p$$

$$x_1 \cdot x_2 = q,$$

kirjutada ruutvõrrandid, mille lahenditeks on:

1. 2 ja 3

11. a^2 ja $-b^2$

2. 1 ja 4

12. m ja $m + 1$

3. -6 ja 8

13. a ja $\frac{1}{a}$

4. -1 ja -5

14. $\frac{a}{b^2}$ ja $\frac{b^2}{a}$

5. -10 ja 8

15. $2n + 1$ ja $2n - 1$

6. $\frac{1}{2}$ ja $\frac{2}{3}$

16. $p^2 - 1$ ja $p^2 + 1$

7. $-\frac{3}{8}$ ja $\frac{5}{6}$

17. ma^2 ja nb^2

8. $2,2$ ja $-3,5$

18. $a + b$ ja $a - b$

9. $\sqrt{3}$ ja $2\sqrt{3}$

19. \sqrt{a} ja $-2\sqrt{a}$

10. $1 + \sqrt{2}$ ja $1 - \sqrt{2}$

20. $2 + \sqrt{a}$ ja $2 - \sqrt{a}$

14. Kui ruutvõrrandi $x^2 + px + q = 0$ lahendid on x_1 ja x_2 , siis lahendite omaduse põhjal võrrandi vasak pool

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2).$$

Rakendades seda valemit, lahutada tegureiks järgmised ruuttrinoomid:

1. $x^2 + 12x + 35$

2. $x^2 + 7x + 10$

3. $x^2 + 5x + 6$

4. $x^2 - 9x + 14$

5. $x^2 - 7x - 30$

6. $x^2 - 3x - 10$

7. $x^2 + 4x - 5$

8. $x^2 + x - 56$

9. $6a^2 + 13a + 6$

10. $10b^2 - 2qb + 10$

11. $6n^2 + 7n - 5$

12. $10c^2 - 13c - 3$

15. Leida arv, mis oma pöördväärtusest on $\frac{5}{6}$ võrra suurem.

16. Leida arv, mis oma pöördväärtust ületab $\frac{7}{12}$ võrra.

17. Loomulikkude täisarvude reas kahe järjestikuse arvu pöördväärtuste summa on $\frac{11}{30}$. Leida need arvud.

18. Loomulikkude täisarvude reas kahe järjestikuse arvu pöördväärtuste vahe on $\frac{1}{20}$. Leida need arvud.

19. Kahe arvu vahe on 7, nende arvude ruutude summa on 445. Leida need arvud.

20. Kahe arvu vahe on 8, nende arvude pöördväärtuste vahe on $\frac{1}{48}$. Leida need arvud.

21. Jaotada arv 17 kaheks liidetavaks nii, et nende liidetavate kuupide summa võrdub 1853-ga.

22. Trapetsi üks alustest on võrdne trapetsi kõrgusega, teine alus on 8 cm; trapetsi pindala on 120 cm². Arvutada kõrgus.

23. Trapetsi üks alus on niisama suur kui kõrgus, teine alus on 6 cm; trapetsi pindala on 93,5 cm². Arvutada kõrgus.

24. Aias on eraldatud ristküliku-kujuline väljak, mille pikkus on 80 m ja laius 50 m. Väljaku keskel on muruplats pindalaga 3256 m², mida piirab igalt poolt ühe ja sama laiune tee, kusjuures muruplats koos teega katavad kogu väljaku. Kui lai on tee?

25. Pilt mõõtmetega 84 cm ja 60 cm on asetatud ühtlase laiusega raami.

Leida raami laius, kui raami pindala on võrdne pildi pindalaga.

26. Kaks töolist, töötades koos, lõpetavad töö 12 tunniga; üksikult töötades lõpetaks esimene selle töö 10 tunni võrra lühema ajaga kui teine. Mitme tunniga lõpetaks kumbki selle töö üksikult töötades?

27. Bassein täitub veega kahe toru kaudu 6 tunniga. Kui kumbki toru oleks üksi avatud, siis täituks bassein esimese kaudu 5 tundi kiiremini kui teise kaudu. Mitme tunniga täituks bassein kummagi toru kaudu üksikult?

28. Arvutada õõnsa kuubi serva pikkus, kui tema seinapaksus on d cm, kaal on p grammi ja aine erikaal, millest kuup on valmistatud, on c .

1. $d = 1$; $p = 189,7$; $c = 0,7$;

2. $d = 2$; $p = 1107,4$; $c = 11,3$;

3. $d = 0,4$; $p = 158,88$; $c = 7,5$.

29. Võlg 820 rubla tasutakse pangale kahes osas aastaste tähtaegadega, kusjuures kummagi aasta lõpul maksti 441 rubla. Mitme protsendiline oli laen?

30. Võlg 2100 rubla tasutakse aastaste tähtaegadega kahes osas, makstes kummagi aasta lõpul 1210 rubla. Mitme protsendiga oli tehtud laen?

31. Kaks matkajat lähtuvad ühel ja samal ajal ühest linnast teise linna suunas. Esimene matkab tunnis 0,5 km rohkem kui teine ja jõuab sellepärast 1 tund varem siht-

kohta. Linnade vahemaa on 28 km. Mitu kilomeetrit käib kumbki matkaja tunnis?

§ 2. Ruutvõrrand-süsteem täheliste kordajatega.

Ülesanne 1. Lahendada võrrandsüsteem

$$\begin{cases} x + y = a \\ xy = b. \end{cases}$$

Lahendus. Astendame lineaarse võrrandi kummagi poole 2-ga; teise võrrandi kummagi poole korrutame 4-ga ja lahutame esimesest tulemusest teise. Sel viisil saame otsitava vahe ruudu, ning sellest ruutjuure võttes, leiame otsitava vahe. Niisiis

$$\begin{array}{r} x^2 + 2xy + y^2 = a^2 \\ \quad 4xy \quad = 4b \\ \hline x^2 - 2xy + y^2 = a^2 - 4b \\ (x - y)^2 = a^2 - 4b \\ x - y = \pm \sqrt{a^2 - 4b} \end{array}$$

Nüüd moodustame võrrandsüsteemi, mis koosneb algsüsteemi lineaarsest võrrandist ja praegu tuletatud uuest võrrandist. Et uuest võrrandist esineb kaks juhtumit (märgid pluss ja miinus), siis saame kaks võrrandsüsteemi:

$$\begin{cases} x + y = a \\ x - y = +\sqrt{a^2 - 4b} \end{cases} \text{ ja } \begin{cases} x + y = a \\ x - y = -\sqrt{a^2 - 4b} \end{cases}$$

Lahendades need võrrandsüsteemid, saame algsüsteemile kaks lahendit.

$$\begin{array}{l} x + y = a \\ x - y = +\sqrt{a^2 - 4b} \\ \hline 2x = a + \sqrt{a^2 - 4b} \\ x_1 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x + y = a \\ x - y = -\sqrt{a^2 - 4b} \\ \hline 2x = a - \sqrt{a^2 - 4b} \\ x_2 = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \end{array}$$

$$2y = a - \sqrt{a^2 - 4b}$$

$$y_1 = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

$$2y = a + \sqrt{a^2 - 4b}$$

$$y_2 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

Seega algsüsteemi üks lahend

$$\text{on } \begin{cases} x_1 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \\ y_1 = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \end{cases} \text{ ja teine } \begin{cases} x_2 = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \\ y_2 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \end{cases}.$$

Lahenduskaik kujuneb samalaadseks, kui antud on võrrandsüsteem

$$\begin{cases} x - y = a \\ xy = b, \end{cases}$$

see tähendab, kui on antud otsitavate vahe ja otsitavate korrutis.

Lahendite iseloom oleneb juurealusest avaldisest, diskriminandist $a^2 - 4b$.

1. Kui $b \leq 0$, siis süsteemil on kaks teineteisest erinevat lahendit.

2. Kui $b > 0$ ja seejuures

a) $b < \frac{a^2}{4}$, siis on võrrandsüsteemil kaks teineteisest erinevat lahendit;

b) $b = \frac{a^2}{4}$, siis võrrandsüsteemi kaks lahendit langevad ühte;

c) kui aga $b > \frac{a^2}{4}$, siis võrrandsüsteemil ei ole lahendeid.

Ülesanne 2. Lahendada võrrandsüsteem

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a \\ xy = b. \end{cases}$$

Lahendus. Tuletame antud süsteemist otsitavate summa ja vahe, teise võrrandi 2-ga korrutatud pooled esimese võrrandi pooltega liites või vastavalt lahutades. Nii saame otsitavate summa ruudu ja vahe ruudu; neist ruutu juured võttes leiamegi otsitavate summa ja vahe.

Niisiis

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= a \\ 2xy &= 2b \\ \hline x^2 + 2xy + y^2 &= a + 2b \\ (x + y)^2 &= a + 2b \\ \hline x + y &= \pm \sqrt{a + 2b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= a \\ 2xy &= 2b \\ \hline x^2 - 2xy + y^2 &= a - 2b \\ (x - y)^2 &= a - 2b \\ \hline x - y &= \pm \sqrt{a - 2b} \end{aligned}$$

Nüüd moodustame järgmised võrrandsüsteemid:

$$\begin{cases} x + y = +\sqrt{a + 2b} \\ x - y = +\sqrt{a - 2b} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = -\sqrt{a + 2b} \\ x - y = -\sqrt{a - 2b} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = +\sqrt{a + 2b} \\ x - y = -\sqrt{a - 2b} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = -\sqrt{a + 2b} \\ x - y = +\sqrt{a - 2b} \end{cases}$$

Neid süsteeme lahendades saame algsüsteemile neli lahendit:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\sqrt{a + 2b} + \sqrt{a - 2b}}{2} \\ y_1 = \frac{\sqrt{a + 2b} - \sqrt{a - 2b}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = \frac{-\sqrt{a + 2b} - \sqrt{a - 2b}}{2} \\ y_2 = \frac{-\sqrt{a + 2b} + \sqrt{a - 2b}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = \frac{\sqrt{a + 2b} - \sqrt{a - 2b}}{2} \\ y_3 = \frac{\sqrt{a + 2b} + \sqrt{a - 2b}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_4 = \frac{-\sqrt{a + 2b} + \sqrt{a - 2b}}{2} \\ y_4 = \frac{-\sqrt{a + 2b} - \sqrt{a - 2b}}{2} \end{cases}$$

Antud võrrandsüsteemi lahenduvus oleneb diskriminandist $a \pm 2b$.

1. Kui $a < 0$; siis võrrandsüsteemil lahendeid ei ole, ükskõik milline on arvu b absoluutväärtus ja märk. See kehtib ka siis, kui

$$a = 0 \text{ ja } b \neq 0.$$

2. Kui $a > 0$ ja seejuures

a) $a > 2b$, siis on võrrandsüsteemil neli lahendipaari;

b) $a = 2b$, siis saame kaks reaalselt lahendipaari,

c) $a < 2b$, siis võrrandsüsteemil lahendeid ei ole.

Ülesanne 3. Lahendada võrrandsüsteem

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a \\ x + y = b. \end{cases}$$

Lahendus. Antud süsteemist määrame otsitavate korrutise sel teel, et astendame lineaarse võrrandi pooled 2-ga ja tulemusest lahutame ruutvõrrandi vastavad pooled. Edasi lahendame, nagu eelmiste ülesannete lahendustes näidatud.

Samalaadselt saame lahendada võrrandsüsteemi

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a \\ x - y = b. \end{cases}$$

Ülesanne 4. Lahendada võrrandsüsteem

$$\begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 + dx + cy + f = 0 \\ \frac{x}{y} = \frac{m}{n}. \end{cases}$$

Lahendus. Rakendame abiotsitava võtet. Võtame abiotsitavaks t ; olgu

$$x = mt \text{ ja } y = nt.$$

Asetame need väärtused mt ja nt , mis teist võrrandit rahuldavad, esimesse võrrandisse x -i ja y -i asemele, siis saame uue võrrandi ühe otsitavaga. Niisiis

$$am^2t^2 + bmnt^2 + cn^2t^2 + dmt + cnt + f = 0;$$

$$(am^2 + bmn + cn^2)t^2 + (dm + cn)t + f = 0.$$

See on otsitava t suhtes ruutvõrrand.

Ruutvõrrandi lahendusvalemi abil leiame siit t väärtused.

Tähistame leitud t väärtused järgmiselt:

$$t_1 = k_1$$

$$t_2 = k_2.$$

Siis antud võrrandsüsteemi lahenditeks on

$$\begin{cases} x_1 = mk_1 \\ y_1 = nk_1 \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} x_2 = mk_2 \\ y_2 = nk_2. \end{cases}$$

Nagu näeme, antud võrrandsüsteemil on kaks lahendit või mitte ühtegi.

Otsitavate jagatise $\frac{x}{y}$ saame leida

1. kui võrde $\frac{x}{y} = \frac{m}{n}$ asemel on antud mõni tuletatud võrre; näiteks võrdest $\frac{x+y}{x-y} = \frac{m}{n}$ leiame, et $\frac{x}{y} = \frac{m+n}{m-n}$;

2. kui üks antud võrrandeist omab kuju

$$ax^2 + bxy + cy^2 = 0;$$

jagades siin iga liikme y^2 -ga, saame

$$a\left(\frac{x}{y}\right)^2 + b\left(\frac{x}{y}\right) + c = 0.$$

Lahendades saadud ruutvõrrandi $\frac{x}{y}$ suhtes, leiamegi $\frac{x}{y}$ väärtused.

Võrrandit, nagu $ax^2 + bxy + cy^2 = 0$, nimetatakse homogeneeks, mis tähendab, et kõik tema liikmed on ühe ja sama astmelised.

Ülesanne 5. Lahendada võrrandsüsteem

$$\begin{cases} ax^2 + by^2 = m \\ cx^2 + dy^2 = n. \end{cases}$$

Lahendus. Kui võrrandsüsteem sisaldab ainult otsitavate ruutusid, siis abiotsitavaid kasutades ruutvõrrandsüsteemi lahendamine taandub lineaarse võrrandsüsteemi lahendamiseks.

Tähistame x^2 ja y^2 vastavalt tähtedega u ja v , nii et

$$x^2 = u \text{ ja } y^2 = v.$$

Asetades need uued otsitavad algvõrrandsüsteemi, saame

$$\begin{cases} au + bv = m \\ cu + dv = n. \end{cases}$$

See on u ja v suhtes lineaarne võrrandsüsteem; seda lahendades leiame u ja v väärtused.

Tähistame leitud u ja v väärtused vastavalt tähtedega g ja h , siis on

$$x^2 = g \text{ ja } y^2 = h.$$

Siit leiame, et

$$x = \pm \sqrt{g} \text{ ja } y = \pm \sqrt{h}.$$

Nagu näeme, antud võrrandsüsteemil on lahendid ainult siis, kui g ja h ei ole negatiivsed, ning lahendid on järgmised:

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{g} \\ y_1 = \sqrt{h} \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = \sqrt{g} \\ y_2 = -\sqrt{h} \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = -\sqrt{g} \\ y_3 = \sqrt{h} \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = -\sqrt{g} \\ y_4 = -\sqrt{h}. \end{cases}$$

Üldist ruutvõrrandsüsteemi lahendamise juhust ei ole võimalik anda. Üldiselt võib ainult niipalju öelda, et kui üks antud võrrandsüsteemi võrrandeist on lineaarne, siis sellest lineaarsest võrrandist saab alati avaldada ühe otsitava teise kaudu. Saadud avaldise teise võrrandisse asetades leiame antud võrrandsüsteemi lahendid.

Ülesanded.

32. Lahendada järgmised võrrandsüsteemid:

$$1. \begin{cases} x + y = 12 \\ xy = 35 \end{cases} \quad 2. \begin{cases} x\left(1 + \frac{y}{x}\right) = 5 \\ 9xy = 50 \end{cases}$$

3. $\begin{cases} x + xy + y = 11 \\ xy = 6 \end{cases}$
4. $\begin{cases} (x+y)^2 - (x-y)^2 = 240 \\ x + 3xy + y = 197 \end{cases}$
5. $\begin{cases} x + y = 2a \\ xy = a^2 - b^2 \end{cases}$
6. $\begin{cases} x - y = 2 \\ xy = 48 \end{cases}$
7. $\begin{cases} x\left(1 - \frac{y}{x}\right) = 1\frac{1}{6} \\ xy = 4 \end{cases}$
8. $\begin{cases} x + xy - y = 16 \\ xy = 12 \end{cases}$
9. $\begin{cases} (x+y)^2 - (x-y)^2 = 28 \\ x - xy + y = 1 \end{cases}$
10. $\begin{cases} x - y = 2b \\ xy = a^2 - b^2 \end{cases}$

33. Lahendada võrrandsüsteemid:

1. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 50 \\ xy = 7 \end{cases}$
2. $\begin{cases} x^2 + 5xy + y^2 = 25 \\ xy = 3 \end{cases}$
3. $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 19 \\ x^2 - xy + y^2 = 7 \end{cases}$
4. $\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ xy = b^2 \end{cases}$
5. $\begin{cases} (x+y)^2 + (x-y)^2 = 4a^2 \\ xy = a^2 \end{cases}$
6. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 53 \\ xy = 14 \end{cases}$
7. $\begin{cases} x^2 + 3xy + y^2 = 31 \\ xy = 6 \end{cases}$
8. $\begin{cases} x^2 + 4xy + y^2 = 118 \\ x^2 - 5xy + y^2 = 37 \end{cases}$
9. $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = a^2 \\ xy = b^2 \end{cases}$
10. $\begin{cases} (x+y)^2 + (x-y)^2 = 82a^2 \\ x^2 + xy + y^2 = 61a^2 \end{cases}$

34. Lahendada võrrandsüsteemid:

1. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 29 \\ x + y = 7 \end{cases}$
2. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 100 \\ x - y = 7 \end{cases}$
3. $\begin{cases} x^2 + x + y^2 + y = 134 \\ x + y = 12 \end{cases}$
4. $\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ x + y = b \end{cases}$
5. $\begin{cases} x(x+1) + y(y+1) = a^2 \\ x + y = b \end{cases}$
6. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 130 \\ x + y = 16 \end{cases}$

$$7. \begin{cases} x^2 + y^2 = 61 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} x^2 + y^2 = 53a^2 \\ x - y = 5a \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} x(x+1) + y(y-1) = 194 \\ x - y = 9 \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} x(x+a) + y(y+a) = 36a^2 \\ x + y = 7a \end{cases}$$

35. Lahendada võrrandsüsteemid:

$$1. \begin{cases} x^2 + y^2 = 117 \\ \frac{x}{y} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x^2 - y^2 = 225 \\ \frac{x}{y} = \frac{5}{4} \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 333 \\ \frac{x}{y} = \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 1900 \\ \frac{x}{y} = \frac{2}{5} \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 2x^2 + 3xy + 5y^2 + 4x + 7y = 726 \\ \frac{x}{y} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 5x^2 - 8xy + 3y^2 - 2x + 9y = 320 \\ \frac{x}{y} = \frac{7}{4} \end{cases}$$

36. Lahendada võrrandsüsteemid:

$$1. \begin{cases} x^2 + y^2 = 148 \\ \frac{x+y}{x-y} = \frac{7}{5} \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 57 \\ \frac{x-y}{x+y} = \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 = 124 \\ \frac{x+y}{x-y} = \frac{7}{4} \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x^2 - 5xy + y^2 = 1107 \\ \frac{x-y}{x+y} = \frac{5}{9} \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 2x^2 - 5xy + 2y^2 = 0 \\ 3x^2 + 7y^2 = 76 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 3x^2 - 10xy + 3y^2 = 0 \\ 2x^2 - 5y^2 = 13 \end{cases}$$

37. Lahendada võrrandsüsteemid:

$$1. \begin{cases} 3x + 4y = 37 \\ xy = 28 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} xy + 2y = 4 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll}
3. \begin{cases} x^2 + y^2 + 3x + y = 20 \\ x - y = 2 \end{cases} & 12. \begin{cases} 5xy - 3x = 84 \\ 2x + 7y = 35 \end{cases} \\
4. \begin{cases} (x+2)^2 + (y+3)^2 = 32 \\ 5x + 4y = 14 \end{cases} & 13. \begin{cases} x^2 + y^2 + x - 5y = 24 \\ x + y = 7 \end{cases} \\
5. \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{3} \\ \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} = \frac{1}{4} \end{cases} & 14. \begin{cases} (x-4)^2 - (y-5)^2 = 8 \\ 3x + 8y = 69 \end{cases} \\
6. \begin{cases} x^2 + y^2 = 52 \\ x^2 - y^2 = 20 \end{cases} & 15. \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 7 \\ \frac{1}{xy} = 12 \end{cases} \\
7. \begin{cases} 15x^2 - 8y^2 = 29 \\ 3x^2 + 2y^2 = 13 \end{cases} & 16. \begin{cases} x^2 - 3y^2 = 4 \\ x^2 - y^2 = 12 \end{cases} \\
8. \begin{cases} \frac{x+y}{y} = a \\ 1 + \frac{xy}{a+1} = a^2 \end{cases} & 17. \begin{cases} 2x^2 - 7y^2 = 8 \\ 4y^2 - 9x^2 = 19 \end{cases} \\
9. \begin{cases} \frac{x-y}{a+1} = a \\ x - y^2 = 0 \end{cases} & 18. \begin{cases} x - y = 2b \\ \frac{x}{a-b} = \frac{a+b}{y} \end{cases} \\
10. \begin{cases} xy + y^2 = 2a^2 - 6a \\ xy - y^2 = 6a - 18 \end{cases} & 19. \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{4ab}{a^2 - b^2} \\ \frac{1}{xy} = 1 \end{cases} \\
11. \begin{cases} 6x - 5y = 14 \\ xy = 72 \end{cases} & 20. \begin{cases} xy - y^2 = n \\ xy - y = n^2 \end{cases}
\end{array}$$

38. Leida kaks arvu, teades, et nende summa on 30 ja nende korrutis on 221.

39. Kahe arvu vahe on 74 ja korrutis on 4107. Millised arvud need on?

40. Ristküliku ümbermõõt on 32 cm, pindala aga on 60 cm². Arvutada ristküliku pikkus ja laius.

41. Täisnurkse kolmnurga kaatetite summa on 23 cm; selle kolmnurga pindala on 45 cm². Arvutada kaatetite pikkused.

42. Rööpküliku alus ületab kõrgust 5 cm võrra; rööpküliku pindala on 204 cm^2 . Arvutada rööpküliku alus ja kõrgus.

43. Kahe arvu ruutude summa on 117, nende arvude korrutis on 54. Leida need arvud.

44. Täisnurkse kolmnurga kaatetite ruutude summa on 313, selle kolmnurga pindala on 78 cm^2 . Arvutada kaatetite pikkused.

45. Leida kaks arvu, teades, et nende summa on 18 ja nende ruutude summa on 194.

46. Ühe ruudu külg on teise omast 5 cm võrra pikem, nende ruutude pindalade summa on 53 cm^2 . Kui pikad on ruutude küljed?

47. Kui ristküliku pikemat külge lühendada ja teist külge pikendada 5 cm võrra, siis saame ruudu. Kui aga pikemat külge pikendada 5 cm võrra ja teist külge sama palju lühendada, siis saame ristküliku pindalaga 512 cm^2 .

Leida ristküliku küljed.

48. Väljakul on ristküliku kuju; kui teda lühendada ja laiendada 12 m võrra, siis saab väljak ruudu kuju; kui teda aga pikendada 12 m võrra ja sama palju kitsendada, siis tuleb väljaku pindala $15\,049 \text{ m}^2$.

Kui pikk ja kui lai on väljak?

49. Ruudukujulise põhjaga püstprisma täispindala on 34 cm^2 ; põhiserva ja kõrguse summa on 9 cm. Arvutada prisma servade pikkused.

50. Ühe kuubi ruumala on teise omast 117 cm^3 võrra suurem, kusjuures tema serv on teise omast 3 cm võrra pikem. Kui pikad on nende kuupide servad?

ASTE.

§ 3. Astendamine.

Nagu teada, korrutist

$$a \cdot a \cdot a \cdots a,$$

milles arv a esineb n korda tegurina, tähistatakse sümboliga

$$a^n$$

ja nimetatakse arvu a n -endaks astmeks. Nii, et

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ tegurit}} = a^n.$$

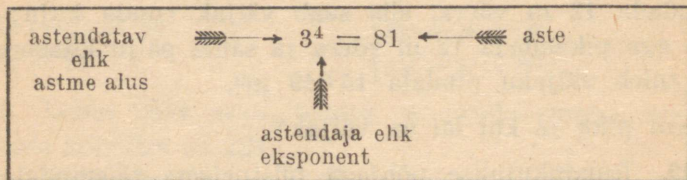
Seejuures arvu a nimetatakse astendatavaks ehk astme aluseks ja arvu n astendajaks ehk eksponentiks.

Näiteks

$$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81;$$

$$(-2)^5 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -32;$$

$$0,2^3 = 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,2 = 0,008.$$



Eespool-öeldust järeldeb, et

astendamine on võrdsetest teguritest koosneva korrutise arvutamine.

Negatiivsete arvude korrutamise juhisest järeldame, et

negatiivse arvu paarisarvulise astendajaga aste on positiivne ja paaritarvulise astendajaga aste on negatiivne.

Näiteks

$$(-4)^2 = 16;$$

$$(-4)^3 = -64;$$

$$(-a)^{2n} = a^{2n}, \text{ sest } 2n \text{ on paarisarv;}$$

$$(-a)^{2n-1} = -a^{2n-1}, \text{ sest } 2n-1 \text{ on paaritu arv.}$$

Astme definitsioonist on näha, et astendajaks võib olla iga positiivne täisarv, mis on suurem kui 1. Erijuhul, kui astendaja $n = 1$, mõistame astet a^n arvu a endana:

$$a^1 = a.$$

Ülesanded.

51. Arvutada järgmised astmed:

1. 2^6	2. $(-2)^2$	3. $0,2^2$	4. $(-0,9)^4$
2^{10}	$(-2)^3$	$0,3^2$	$(-0,02)^5$
3^5	$(-2)^6$	$0,4^3$	$(-0,1)^6$
4^5	$(-3)^5$	$0,5^3$	$(-1,1)^3$
5^5	$(-6)^4$	$0,01^4$	$(-1,2)^4$

52. Arvutada järgmised astmed:

1. 56^2	2. $(-12)^2$	3. $(-a)^2$	4. $(-a)^3$
$4,3^3$	$(-17)^3$	$(-b)^5$	$(-b)^6$
$1,7^4$	$(-4,2)^4$	$(-n)^8$	$(-n)^9$
$0,03^4$	$(-8,1)^5$	$(-a)^9$	$(-a)^{10}$
$1,02^5$	$(-0,2)^6$	$(-m)^{10}$	$(-m)^{11}$

53. Arvutada järgmised astmed:

1. 10^3	2. 20^2	3. $0,1^2$	4. $(-10)^8$
10^5	30^4	$0,1^3$	$(-0,1)^5$
10^6	40^3	$0,1^5$	$(-10)^{10}$
10^9	20^5	$0,1^6$	$(-0,1)^9$
10^{12}	50^4	$0,1^9$	$(-10)^7$

54. Arvutada järgmiste avaldiste väärtused:

- | | |
|--|-------------------------------|
| 1. $10^3 + 10^2 + 1$ | 2. $10^5 + 10^2 + 1$ |
| $3 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 4$ | $4^5 + 4^3 + 4^1$ |
| $7 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 5$ | $1,3^3 + 1,3^2 + 1,3$ |
| $8 \cdot 10^5 + 6 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10 + 1$ | $0,8^4 + 0,8^3 + 0,8^2 + 0,8$ |
| $9 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^2 + 7$ | $0,1^4 + 0,1^3 + 0,1^2 + 0,1$ |
3. $(-6)^2 + (-4)^3 + (-2)^5$
 $7^2 + (-5)^3 + (-1)^{10}$
 $(-1)^1 + (-2)^2 + (-3)^3$
 $1^4 \cdot 2^5 \cdot 3^6$
 $(-1)^{10} \cdot (-2)^5 \cdot (-3)^4$

55. Arendada järgmised astmed:

- | | |
|----------------|--------------------------|
| 1. $(+a)^{2n}$ | 2. $(+2)^3 \cdot (-3)^2$ |
| $(-b)^{2n}$ | $(+4)^2 \cdot (+5)^3$ |
| $(-c)^{2n+1}$ | $(-3)^3 \cdot (+2)^2$ |
| $(-x)^{2n}$ | $(-4)^4 \cdot (-2)^2$ |
| $(-x)^{2m-1}$ | $(-1)^5 \cdot (-2)^3$ |

§ 4. Korrutise astendamise ja võrdsete astendajatega astmete korrutamise.

Tõstame korrutise ab n -endasse astmesse. Rakendades korrutamise seadusi, saame:

$$\begin{aligned} (ab)^n &= \underbrace{(ab) \cdot (ab) \cdot (ab) \cdots (ab)}_{n \text{ teguripaari}} = \\ &= \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdots a)}_{n \text{ tegurit}} \cdot \underbrace{(b \cdot b \cdot b \cdots b)}_{n \text{ tegurit}} = \\ &= a^n b^n. \end{aligned}$$

Seega siis

$$(ab)^n = a^n b^n.$$

Endastmõistetavalt jääb arutelu samaks, kui tegureid on rohkem kui kaks, näiteks

$$(2abc)^3 = 8a^3b^3c^3.$$

Lühidalt sõnastame korrutise astendamise juhise nõnda:

Korrutise astendamisel astendatakse iga tema tegur ja saadud astmed korrutatakse.

Kui vahetame võrduse $(ab)^n = a^n b^n$ pooled, siis saame valemi võrdsete astendajatega astmete korrutamiseks:

$$a^n b^n = (ab)^n,$$

mida võime sõnastada järgmiselt:

Võrdsete astendajatega astmete korrutamisel astendatavad korrutatakse ja saadud korrutis astendatakse antud astendajaga.

Näited:

1. $5^4 \cdot 2^4 = (5 \cdot 2)^4 = 10^4 = 10000;$

2. $2,5^3 \cdot 8^3 = (2,5 \cdot 8)^3 = 20^3 = 8000.$

Ülesanded.

56. Arendada järgmised astmed:

1. $(4 \cdot 1,5)^2$	2. $(4n)^3$	3. $(-0,3Nu)^4$
$(2 \cdot 5)^5$	$(5mn)^3$	$(-2h)^4$
$(35 \cdot 2)^7$	$(-4ab)^2$	$(-5ac)^3$
$(4,5 \cdot 2)^3$	$(-4uv)^4$	$(-3ad)^5$
$(5 \cdot 4)^3$	$(2ax)^3$	$(-4cm)^3$

57. Leida lihtsaimal viisil järgmiste avaldiste väärtused:

1. $2^3 \cdot 5^3$	2. $3^2 \cdot \left(3\frac{1}{3}\right)^2$	3. $(35 \cdot 3)^2 \cdot \left(\frac{4}{7}\right)^2$
$5^4 \cdot 2^4$	$6^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5$	$(42 \cdot 81)^3 \cdot \left(\frac{1}{21 \cdot 27}\right)^3$
$4^2 \cdot 15^2$	$13^7 \cdot \left(\frac{2}{13}\right)^7$	$\left(4\frac{4}{5}\right)^4 \cdot \left(1\frac{7}{8}\right)^4$
$45^2 \cdot 2^2$	$\left(\frac{3}{4}\right)^4 \cdot \left(1\frac{1}{3}\right)^4$	$78^2 \cdot \left(\frac{1}{3,9}\right)^2$
$2,5^5 \cdot 4^5$	$\left(\frac{5}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2$	$4^3 \cdot 8^3 \left(\frac{5}{16}\right)^3$

§ 5. Jagatise astendamise ja võrdsete astendajatega astmete jagamine.

Tõstame n -endasse astmesse jagatise $\frac{a}{b}$. Rakendades siinjuures murdude korrutamise juhust, saame

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdots \frac{a}{b}}_{n \text{ tegurit}} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdots a}{b \cdot b \cdot b \cdots b} = \frac{a^n}{b^n}.$$

Niisiis

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Saadud tulemuse sõnastame nõnda:

Murru astendamisel astendatakse tema lugeja ning nimetaja ja esimene saadus jagatakse teisega.

Näited:

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81};$$

$$\left(-1\frac{1}{2}\right)^3 = \left(-\frac{3}{2}\right)^3 = -\frac{27}{8} = -3\frac{3}{8};$$

$$\left(\frac{2a}{5b}\right)^2 = \frac{4a^2}{25b^2}.$$

Kui vahetame võrduse $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ pooled, siis saame juhise võrdsete astendajatega astmete jagamiseks:

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n,$$

mida sõnastame nõnda:

Võrdsete astendajatega astmete jagamisel astendatav jagatavas jagatakse astendatavaga jagajas ja tulemus astendatakse antud astendajaga.

Näited:

1. $24^2 : 12^2 = (24 : 12)^2 = 4;$

2. $\frac{15^3}{5^3} = \left(\frac{15}{5}\right)^3 = 3^3 = 27;$

3. $\frac{(6ab)^5}{(3b)^5} = \left(\frac{6ab}{3b}\right)^5 = (2a)^5 = 32a^5.$

58. Arendada järgmised astmed:

1. $\left(\frac{5}{6}\right)^2$	2. $\left(2\frac{1}{2}\right)^2$	3. $\left(-\frac{4a}{7b}\right)^2$	4. $\left(-\frac{7am}{8bn}\right)^3$
$\left(-\frac{4}{5}\right)^3$	$\left(-3\frac{1}{3}\right)^2$	$\left(\frac{4x}{7y}\right)^2$	$\left(-\frac{er}{4d}\right)^5$
$\left(-\frac{6}{7}\right)^4$	$\left(-5\frac{2}{3}\right)^3$	$\left(-\frac{2x}{3a}\right)^2$	$\left(-\frac{3h}{5mn}\right)^3$
$\left(\frac{1}{2}\right)^6$	$\left(4\frac{1}{4}\right)^2$	$\left(\frac{5aQ}{6cR}\right)^3$	$\left(-\frac{0,7anx}{0,01bz}\right)^2$
$\left(-\frac{3}{7}\right)^2$	$\left(-3\frac{2}{3}\right)^3$	$-\left(\frac{0,2cn}{0,5d}\right)^4$	$\left(-\frac{3ad}{4cm}\right)^4$

59. Leida lihtsaimal viisil järgmiste avaldiste väärtused:

1. $16^3 : 4^3$	2. $\left(\frac{5}{7}\right) : \left(\frac{25}{21}\right)^2$	3. $\frac{2^4 \cdot 3^4}{12^4}$
$69^2 : 23^2$	$\left(\frac{1}{23}\right)^4 : \left(3\frac{1}{2}\right)^4$	$\frac{15^2 \cdot 4^2}{8^2 \cdot 5^2}$
$9^5 : 18^5$	$\left(1\frac{7}{8}\right)^3 : \left(6\frac{1}{4}\right)^3$	$\frac{5^3 \cdot 12^3}{6^3}$
$160^3 : 640^3$	$2,25^2 : 0,45^2$	$\left(1\frac{1}{4}\right)^5 \cdot \frac{2^5}{5^5}$
$24^3 : 16^3$	$0,72^3 : 2,4^3$	$\frac{2^{10} \cdot 6^{10}}{3^{10} \cdot 4^{10}}$

§ 6. Võrdsete alustega astmete korrutamine ja jagamine.

Astme astendamine.

Võrdsete alustega astmete korrutamisel astendajad liidetakse ja tulemusega astendatakse antud astendatav,

ehk sümbolites

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

Tõestus.

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdots a)}_{m \text{ tegurit}} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdots a)}_{n \text{ tegurit}} = a^{m+n}.$$

Näited:

$$8^2 \cdot 8^3 = 8^2 + 3 = 8^5;$$

$$a^3 \cdot a^7 = a^3 + 7 = a^{10}.$$

Võrdsete alustega astmete jagamisel astendaja jagajas lahutatakse astendajast jagatavas, kui viimane astendaja on eelmisest suurem, ja tulemusega astendatakse antud astendatav,

ehk sümbolites:

$$a^m : a^n = a^{m-n}, \text{ kui } m > n.$$

Viimase võrduse kehtivuse tõestamiseks rakendame jagatise kontrollimise juhust — jagatise on arv, mis jagajaga korrutamisel annab tulemuseks jagatava.

Niisiis:

$$a^{m-n} \cdot a^n = a^{m-n+n} = a^m.$$

Näited: $\frac{3^8}{3^5} = 3^{8-5} = 3^3 = 27;$

$$a^7 : a^5 = a^{7-5} = a^2.$$

Astme astendamisel astendajad korrutatakse ja saadud korrutisega astendatakse antud astendatav.

Sümbolites väljendub viimane teoreem nii:

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

Tõestus.

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot a^m \cdots a^m}_{n \text{ tegurit}} = \overbrace{a^{m+m+m+\cdots+m}}^{n \text{ liidetavat}} = a^{mn}.$$

Näited:

$$(2^3)^2 = 2^3 \cdot 2 = 2^6 = 64;$$

$$(2a^2b^3)^4 = 2^4 a^8 b^{12} = 16a^8 b^{12};$$

$$(a^3 + a^4)^2 = a^3 \cdot 2 + 2a^8 + 4 + a^4 \cdot 2 = a^6 + 2a^7 + a^8.$$

60. Kirjutada järgmised korrutised astmetena:

- | | | |
|--------------------|---|----------------------|
| 1. $x^2 \cdot x^3$ | 2. $c \cdot c^2 \cdot c^3$ | 3. $x^{m+1}x^{m+2}$ |
| $n^5 \cdot n^2$ | $d^2 \cdot d^4 \cdot d^6$ | $y^{n+3}y^{2n-1}$ |
| $a \cdot a^3$ | $k^2 \cdot k^3 \cdot k^3$ | $z^{p+5}z^{p-5}$ |
| $h^3 \cdot h^3$ | $u \cdot u^5 \cdot u$ | $w^r u^{2r} u^{3r}$ |
| $q^4 \cdot q^5$ | $n \cdot n^2 \cdot n^3 \cdot n^4 \cdot n^5$ | $v^q + 2v^3 v^{q-3}$ |

61. Kirjutada järgmised korrutised võimalikult lühidalt:

- | | |
|----------------------|---|
| 1. $x \cdot 3x$ | 2. $h \cdot 0,1h \cdot 0,2h$ |
| $5A \cdot 4A$ | $6x \cdot 0,4x^2 \cdot 0,1x^3$ |
| $3u \cdot 5u^2$ | $0,1D \cdot (-0,2D^2) \cdot 0,3D^3$ |
| $(-6r^2) \cdot 7r^3$ | $c \cdot 3\frac{1}{2}c \cdot \frac{2}{7}c^4$ |
| $aN^4 \cdot bN^3$ | $(-\frac{3}{5}w^2) \cdot 2\frac{1}{2}w^2 \cdot (-\frac{2}{3}w^2)$ |

62. Kirjutada järgmised jagatised astmetena:

- | | | |
|-------------------|---------------------|-----------------------|
| 1. $n^8 : n^5$ | 2. $f^4 : f^2$ | 3. $x^{3m} : x^m$ |
| $q^6 : q$ | $h^{10} : h^7$ | $y^{2n} : y$ |
| $x^7 : x^2$ | $p^n : p^{n-1}$ | $z^{2r} : z^{r+2}$ |
| $a^{11} : a^{10}$ | $q^{n+3} : q^n$ | $u^{3p+1} : u^{2p-1}$ |
| $r^4 : r^4$ | $d^{m+1} : d^{n+1}$ | $v^{4p-1} : v^{4p-4}$ |

63. Kirjutada järgmised jagatised võimalikult lühidalt:

- | | | |
|---|---|-----------------------------------|
| 1. $\frac{a^5 b^3}{a^2 b}$ | 2. $\frac{96x^m + 8y^{n+1}}{24x^m + 1y^{n-1}}$ | 3. $42a^5 b^7 : 14a^4 b^3$ |
| $\frac{15m^{10} n^3}{5m^6 n^2}$ | $\frac{a^{2n} b^{5m}}{a^n b^{3m}}$ | $51p^6 q^3 : 17p^2 q$ |
| $\frac{9x^4 y^3 z^2}{54x^2 y^2 z}$ | $\frac{u^{2n+3} v}{u^{2n+1} v^{3m-2}}$ | $3,6x^6 y^5 z^8 : 5,6x^2 y^3 z^4$ |
| $\frac{19m^8 n^7 p^6}{57m^5 n^4 p^3}$ | $\frac{x^m + 8y^n - 5}{x^m - 2y^n - 7}$ | $7n^{2q} : 0,14n^{q-8}$ |
| $\frac{8a^4}{5b^6} \cdot \frac{16a^2}{25b^8}$ | $\frac{a^{2n+2}}{b^{n-4}} : \frac{a^{n+3}}{b^{8n-1}}$ | $1,72m^{p+6} : 4,3m^{p+2}$ |

64. Arendada järgmised astmed:

1. $(4a)^3$ $(3mn)^3$ $\left(-\frac{4a}{7H}\right)^2$ $\left(\frac{4z^2}{7u^3}\right)^4$ $\left(-\frac{2x^3}{3a^4}\right)^2$	2. $(-0,3Nu)^4$ $(-2h)^4$ $\left(+\frac{5aQ}{6cR}\right)^3$ $\left(-\frac{0,2cU}{0,5d}\right)^4$ $\left(-\frac{0,7anx}{0,01bz}\right)^2$	3. $(-3aD)^5$ $(-4cmq)^3$ $\left(-\frac{7a^2M}{8b^2N^2}\right)^3$ $\left(-\frac{c^2r^2}{4d^4}\right)^5$ $\left(-\frac{3h^3}{5mnw}\right)^3$
--	--	---

65. Kirjutada järgmised avaldised võimalikult väheste sümbolitega:

1. $(3a)^2 \cdot (2a)^3$ $(-N^3) \cdot (2N)^5$ $(4u^2)^2 \cdot (-u^3)^3$ $\left(\frac{D}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{a}{D}\right)^4$ $\left(-\frac{2}{3}q\right)^3 \cdot (6q)^2$	2. $(-25f)^3 : (5f)^2$ $(96ax)^4 : (16x)^4$ $(63cN)^2 : (243c)^2$ $(36nD)^5 : (-81D)^5$ $\left(\frac{1}{2}L\right)^4 : \left(\frac{2}{3}\right)^4 L^4$
--	--

66. Arendada järgmised astmed:

1. $(m^2)^3$ $(a^4)^5$ $(N^3)^n$ $(u^{2n})^3$ $(Q^2)^{n+1}$	2. $(D^3)^2$ $(3q^2)^2$ $\left(\frac{4}{5}u\right)^3$ $(0,1H^3)^3$ $(0,7x^2)^4$	3. $\left(\frac{m}{2n}\right)^2$ $\left(\frac{2a^3}{3x^2}\right)^2$ $\left(\frac{4}{7} \cdot \frac{m}{q^2}\right)^3$ $\left(\frac{au^2}{bv^2}\right)^4$ $\left(\frac{cH^2}{10}\right)^5$
---	---	--

67. Lihtsustada järgmised avaldised:

$$\begin{array}{ll}
 1. \quad \left(\frac{2x}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{6x}{5a}\right)^2 & 2. \quad \left(-\frac{1}{N}\right)^3 : \left(\frac{N}{2}\right)^3 \\
 \left(-\frac{4m}{5n}\right)^3 \cdot \left(\frac{n}{m}\right)^4 & \frac{3}{4}\left(\frac{a}{x}\right)^2 : \frac{3}{4}\left(\frac{x}{a}\right)^2 \\
 \left(\frac{7u}{4v}\right)^4 \cdot \left(\frac{2Nv}{7u}\right)^3 & \left(\frac{4c}{5D^2}\right)^2 : \left(\frac{0,2}{D^3}\right)^2
 \end{array}$$

68. Lihtsustada järgmised avaldised:

$$\begin{array}{ll}
 1. \quad (ax)^m : (bx)^m & 2. \quad (8Nu)^{2a-1} : (-2u)^{2a-1} \\
 (3cu)^n : (cdv)^n & \left(\frac{2p}{3q}\right)^{2n+1} : \left(-\frac{3q}{2p}\right)^{2n+1} \\
 (-pqr)^{2t} : (-pq^2t) & \left(\frac{a^2}{5Q}\right)^{2m} : \left(\frac{5a}{Q}\right)^{m+2}
 \end{array}$$

69. Lihtsustada järgmised avaldised:

$$\begin{array}{ll}
 1. \quad \frac{2}{5}L^n \cdot \frac{3}{2}L \cdot 6L^3 & 2. \quad \frac{1}{4}x^p \cdot \frac{4}{5}x^{p+2} \cdot \frac{2}{5}x^{2p+1} \\
 u^a \cdot u^{a+b} \cdot u^{a+b+c} & 7H^m \cdot 0,2H^{m+1} \cdot 0,5H^{m+2} \\
 D^n \cdot D^{n-m} \cdot D^{m-p} & N^{x+2} \cdot N^{x-3} \cdot N^{2-2x}
 \end{array}$$

70. Arendada järgmised korrutised:

$$\begin{array}{ll}
 1. \quad (a^2 + a^4) \cdot (a + a^3) & 4. \quad (2p^4 + 5q^3) \cdot (2p^4 - 5q^3) \\
 2. \quad (a^6 - a^5) \cdot (a^5 + a^4) & 5. \quad \left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right) \cdot \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) \\
 3. \quad (u^3 + v^2) \cdot (u^3 - v^2) & 6. \quad \left(2s^3 + \frac{1}{t^3}\right) \cdot \left(s^3 - \frac{1}{t^3}\right)
 \end{array}$$

71. Arendada järgmised binoomide astmed:

$$\begin{array}{lll}
 1. \quad (a^2 + b^2)^2 & 6. \quad (3x^3 - 5x^5)^2 & 11. \quad (a^2 + b^2)^3 \\
 2. \quad (a^3 - b^3)^2 & 7. \quad (m^2n^3 + m^3n^2)^2 & 12. \quad (a^3 - b^3)^3 \\
 3. \quad (a^4 - a^2)^2 & 8. \quad (x^{m+1} - x^{m-1})^2 & 13. \quad (m^3 + m^2)^3 \\
 4. \quad (a^m + a^n)^2 & 9. \quad (y^{2n} + y^n)^2 & 14. \quad (u^{2m} - u^m)^3 \\
 5. \quad \left(\frac{a^3}{b^3} - \frac{a^2}{b^2}\right)^2 & 10. \quad \left(t^2 - \frac{1}{t^2}\right)^2 & 15. \quad \left(\frac{p^2}{q^4} + \frac{q^3}{p^5}\right)^3
 \end{array}$$

§ 7. Hulkliikme ruut.

Lähtudes kahe arvu summa ruudu valemist

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

saame tuletada valemi kolme arvu summa ruudu arvutamiseks. Lugeses avaldises $a + b + c$ kahe esimese liikme summa $(a + b)$ üheks arvuks, võime kahe arvu summa ruudu valemi põhjal kirjutada:

$$[(a + b) + c]^2 = (a + b)^2 + 2(a + b)c + c^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2(a + b)c + c^2.$$

Võrreldes kahe arvu summa ruutu kolme arvu summa ruuduga, näeme, et viimases on kahe arvu summa ruudule lisaks tulnud kahe eelmise arvu summa ja kolmanda arvu kahekordne korrutis ja veel kolmanda arvu ruut.

Sama arutlusviisi rakendades saame tuletada valemi nelja arvu summa ruudu arvutamiseks. Nimelt, lugeses avaldises $a + b + c + d$ kolme esimese arvu summa $(a + b + c)$ üheks arvuks, võime jälle kahe arvu summa ruudu valemi põhjal kirjutada:

$$[(a + b + c) + d]^2 = (a + b + c)^2 + 2(a + b + c)d + d^2.$$

Eelviimase võrduse põhjal võime viimase võrduse kirjutada järgmiselt:

$$[(a + b + c) + d]^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2(a + b)c + c^2 + 2(a + b + c)d + d^2.$$

Võrreldes nüüd kolme arvu summa ruudu arendit nelja arvu summa ruuduga, näeme, et eelmisele on lisaks tulnud kolme eelmise arvu summa ja neljanda arvu kahekordne korrutis ja neljanda arvu ruut.

Seda arutlusviisi jätkates võime saada mitme tahes arvu summa ruudu valemi, teiste sõnadega, niiviisi võime tuletada mitme tahes liikmega hulkliikme ruudu valemi.

Kui eelmistes arendites avame sulud ja liikmed vastavalt rühmitame, siis saame:

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc;$$

$$(a + b + c + d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd.$$

Kokkuvõttes võime hulkliikme ruutimise juhise sõnastada nõnda:

Hulkliikme ruudu saamiseks tuleb iga tema liige ruutu tõsta: peale selle tuleb paarikaupa korrutada iga liige temale järgneva iga liikmega, saadud korrutised korrutada kahega ja kõik tulemused liita.

Endastmõistetavalt võib hulkliikme ruudu arendis esineda ka miinus-märke.

Hulkliikme ruudu märkide kohta kehtib arusaadavalt põhjusil järgmine juhise:

Kõik hulkliikme liikmete ruudud ja samamärgiliste liikmete kahekordsed korrutised on positiivsed; vastasmärgiliste liikmete kahekordsed korrutised on negatiivsed.

Näited.

Ülesanne 1. Arendada järgmine hulkliikme ruut:
 $(2x^2 - 3x - 4)^2$.

Lahendus.

$$\begin{aligned} (2x^2 - 3x - 4)^2 &= (2x^2)^2 + (-3x)^2 + \\ &+ (-4)^2 + 2 \cdot 2x \cdot (-3x) + 2 \cdot 2x^2 \cdot (-4) + 2 \cdot (-3x) \cdot \\ &(-4) = 4x^4 + 9x^2 + 16 - 12x^3 - 16x^2 + 24x = 4x^4 - \\ &- 12x^3 - 7x^2 + 24x + 16. \end{aligned}$$

Ülesanne 2. Väljendada avaldis $9x^4 - 30x^3 + 37x^2 - 20x + 4$ järgmisel hulkliikme ruudu kujul: $(3x^2 + ax + b)^2$.

Lahendus. Arendame antud hulkliikme ruudu. Saame:

$$\begin{aligned} (3x^2 + ax + b)^2 &= 9x^4 + a^2x^2 + b^2 + 6ax^3 + \\ &+ 6bx^2 + 2abx = 9x^4 + 6ax^3 + (a^2 + 6b)x^2 + 2abx + b^2. \end{aligned}$$

Kordajate a ja b väärtuste leidmisel lähtume seisukohast, et kui kaks polünoomi on võrdsed, siis peavad olema võrdsed nende vastavate liikmete kordajad. Seepärast, kui

$$9x^4 - 30x^3 + 37x^2 - 20x + 4 = 9x^4 + 6ax^3 + (a^2 + 6b)x^2 + 2abx + b^2,$$

siis

$$6a = -30, \text{ siit } a = -5;$$

$$a^2 + 6b = 37;$$

asendades siin a leitud väärtusega -5 , saame

$$25 + 6b = 37, \text{ siit } 6b = 12 \text{ ja } b = 2.$$

Kontrolliks võrdleme veel ülejäänud kordajaid:

$$2ab = 2 \cdot (-5) \cdot 2 = -20$$

$$b^2 = 4.$$

Vastus.

$$9x^4 - 30x^3 + 37x^2 - 20x + 4 = (3x^2 - 5x + 2)^2.$$

Ülesanne 3. Näidata, et polünoom

$$x^4 - 6x^3 + 9x^2 - 30x + 25$$

ei ole täisruut.

Lahendus. Oletame nõudele vastupidiselt, et on olemas hulkliige, mille ruut on võrdne antud polünoomiga. Otsitav polünoom peaks olema teiseastmeline, sest teiseastmeline liige annab ruutu tõstmisel 4-nda-astmelise liikme, nagu see antud polünoomis ongi.

Seega siis meie oletuse järgi

$$x^4 - 6x^3 + 9x^2 - 30x + 25 = (ax^2 + bx + c)^2.$$

Katsume nüüd määrata kordajad a , b ja c .

$$(ax^2 + bx + c)^2 = a^2x^4 + b^2x^2 + c^2 + 2abx^3 + 2acx^2 + 2bcx = a^2x^4 + 2abx^3 + (b^2 + 2ac)x^2 + 2bcx + c^2.$$

Siin peavad vastavad kordajad olema võrdsed. Seega

$$a^2 = 1, \text{ siit } a = 1 \text{ või } a = -1.$$

Vaatleme esimest juhtu:

$$a = 1.$$

Edasi peab olema

$$2ab = -6; \text{ et } a = 1, \text{ siis } 2b = -6; b = -3.$$

$$b^2 + 2ac = 9; \text{ et } b = -3, \text{ siis } 9 + 2ac = 9 \text{ ehk } 2ac = 0.$$

Kui $a = -1$, siis saame $2ab = -6$, millest järeldub, et $b = 3$.

Edasi peab olema

$b^2 + 2ac = 9$; et nüüd $b = 3$ ja $a = -1$, siis $9 - 2ac = 9$, siit $c = 0$.

Korrutis on ainult siis null, kui vähemalt üks tegureist on null. Avaldises $2ac \neq 0$; $a \neq 0$, sest eespool leidsime, et $a = 1$; ka $c \neq 0$, sest meie arendis c^2 on vabaliige, antud polünoomi vabaliige on aga 25, seepärast

$$c^2 = 25 \text{ ehk } c = \pm 5.$$

Seega võrdus $2ac = 0$, mis järeldus meie nõudele vastupidisest oletusest, ei ole kehtiv. Seepärast meie oletus on vale ning antud polünoom ei ole täisruut.

Ülesanded.

72. Arendada järgmiste hulkliikmete ruudud:

1. $(m + n + p)^2$

4. $(2a^2 - \frac{1}{2}a + 4)^2$

2. $(u - v + t - s)^2$

5. $(-5a^3 + 3a^2 - \frac{1}{3}a + 3)^2$

3. $(x^2 - x - 1)^2$

6. $(x + y + z)^2$

7. $(a - b - c - d)^2$

8. $(n^2 - 2n - 1)^2$

9. $(\frac{1}{2}x^2 - 4x - 2)^2$

10. $(\frac{1}{3}x^3 - x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{2})^2$

73. Näidata järgmiste näidete abil, et hulkliikme ruut ei muutu, kui enne ruutimist kõigi liikmete märgid muuta vastupidiseks:

1. $(a - b + c)^2 = (-a + b - c)^2$

2. $(2a^3 - a^2 - 3a + 1)^2 = (-2a^3 + a^2 + 3a - 1)^2$

3. $(x^3 + 2x^2 - x - 1)^2 = (-x - 2x^2 + x + 1)^2$

74. Näidata, et polünoomi

$$4x^4 - 12x^3 + 25x^2 - 24x + 16$$

saab väljendada kujul $(2x^2 + ax + b)^2$.

75. Avaldada polünoom

$$x^4 - 6x^3 + 5x^2 + 12x + 4$$

kujul $(x^2 + ax + b)^2$.

76. Avaldada polünoom

$$x^4 + 10x^3 + 11x^2 - 70x + 49$$

kujul $(x^2 + ax + b)^2$.

77. Näidata, et

$$9x^4 + 6x^3 - 11x - 4x + 4$$

on täisruut.

78. Näidata, et

$$25x^4 - 20x^3 - 26x^2 + 12x + 9$$

on täisruut.

79. Näidata, et

$$x^4 - 10x^3 + 21x^2 + 10x + 4$$

ei ole täisruut.

80. Näidata, et

$$4x^4 + 16x^3 - 12x^2 - 8x + 1$$

ei ole täisruut.

JUUR.

§ 8. Juurimine.

Sümboliga $\sqrt[3]{a}$ tähistatakse arvu, mille kolmas aste on arv a . Nii on:

$$\sqrt[3]{1000} = 10, \text{ sest } 10^3 = 1000;$$

$$\sqrt[3]{-64} = -4, \text{ sest } (-4)^3 = -64;$$

$$\sqrt[3]{\frac{27}{64}} = \frac{3}{4}; \text{ sest } \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{3^3}{4^3} = \frac{27}{64}.$$

Arvu $\sqrt[3]{a}$ nimetatakse arvu a kuupjuureks ehk kolmandaks juureks.

Üldiselt arvu a n -endaks juureks nimetatakse arvu, mille n -esaste on arv a .

Arvu a n -endat juurt tähistatakse sümboliga $\sqrt[n]{a}$. Nii on:

$$\sqrt[4]{2401} = 7, \text{ sest } 7^4 = 2401;$$

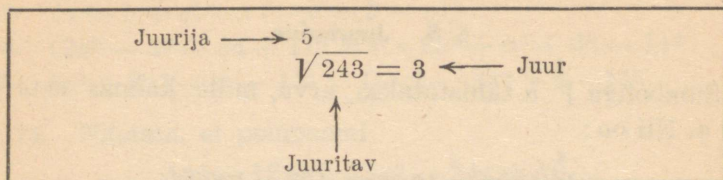
$$\sqrt[7]{-128} = -2, \text{ sest } (-2)^7 = -128;$$

$$\sqrt[5]{0,00243} = 0,3, \text{ sest } 0,3^5 = 0,00243.$$

n -enda juure leidmist mingist arvust nimetatakse selle arvu juurimiseks arvuga n . Juurimine on astendamise pöördtehe. Astendamine seisneb astme leidmises antud astendatava ja astendaja järgi, juurimine aga seisneb selles, et antud astme a ja astendaja n järgi leitakse niisugune asten-

datav x , et $x^n = a$. Seega juur $\sqrt[n]{a}$ on otsitav astendatav x , kui on antud aste a ja astendaja n . Sel puhul astet a ehk

arvu, mida juuritakse, nimetatakse juuritavaks ja astendajat n ehk arvu, millega juuritakse, — juurijaks.



Juure definitsiooni järgi juurel $\sqrt[n]{a}$ on n -es aste võrdne juuritavaga a . Seega juure definitsiooni järelalusena saame samasuse:

$$(\sqrt[n]{a})^n = a.$$

Juure definitsioonist järeljub ka samasus:

$$\sqrt[n]{a^n} = a,$$

sest arv, mille n -es aste on a^n , on a .

Juurija n võib olla kas paarisarv või paaritu arv. Kui n on paarisarv, siis peab juuritav a olema positiivne arv; tõepoolest, võrduse

$$(\sqrt[n]{a})^n = a$$

vasak pool on paarisarvulise n -i puhul ikka positiivne arv, millest järeljub, et ka a on positiivne arv. Seega

negatiivsetel arvudel ei ole paarisarvuliste juurijatega juuri.

Negatiivseil arvudel on paarituarvulise juurijaga juur negatiivne, sest positiivse arvu või nulli astendamine ei annaks negatiivseid arve.

Juure definitsioonist järeljub, et sümbolil $\sqrt[n]{a}$ on esialgu kaks tähendust, kui a on positiivne ja n on paarisarv.

Tõepoolest, olgu n paarisarv, nii et $n = 2p$; märgime $\sqrt[2p]{a}$ tähega x . Juure definitsiooni järgi on siis

$$x^{2p} = a.$$

Kuid samuti on ka

$$(-x)^{2p} = a,$$

sest

$$(-x)^{2p} = x^{2p}.$$

Seega ka

$$\sqrt[2p]{a} = -x.$$

Et ära hoida ühe ja sellesama sümboli mitmeti mõistmist, siis positiivse a ja paarisarvulise n -i puhul tähendagu $\sqrt[n]{a}$ seda positiivset arvu, mille n -es aste on a .

Mõistes juurt positiivsest arvust ikka positiivse arvuna, saame näidata, et

võrdsete juurijatega juurtest on see juur suurem, millel juuritav on suurem.

s. t. kui

$$a > b,$$

siis ka

$$\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}.$$

Tõestus. Kui $\sqrt[n]{a}$ ei oleks suurem kui $\sqrt[n]{b}$, siis oleks

$$\sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{b};$$

kuid siis oleks ka

$$(\sqrt[n]{a})^n \leq (\sqrt[n]{b})^n,$$

ehk, rakendades juure definitsiooni,

$$a \leq b,$$

mis on vastuolus eeldusega, et $a > b$. Seega siis

$$\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}.$$

Tõestatust järeldame, et

arvust 1 suurema arvu n -es juur on suurem kui 1.

Tõepoolest, kui

$$a > 1,$$

siis

$$\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{1}$$

ehk, et

$$\sqrt[n]{1} = 1,$$

siis

$$\sqrt[n]{a} > 1.$$

Ülesanded.

81. Teisendada järgmised juur-avaldised ratsionaalseiks avaldisteks:

1. $(\sqrt{5})^2$	2. $(\sqrt[3]{17})^3$	3. $(\sqrt[5]{37})^5$	4. $(\sqrt[n]{A})^n$
$\sqrt{19^2}$	$\sqrt[3]{12^3}$	$\sqrt[4]{7^4}$	$\sqrt[m]{c^m}$
$(\sqrt{23})^4$	$(\sqrt[3]{16})^6$	$(\sqrt[5]{7})^{10}$	$(\sqrt[n]{Q})^{2n}$
$8\sqrt{49}$	$4\sqrt[3]{27}$	$8\sqrt[4]{256}$	$R\sqrt[p]{R^p}$
$(5\sqrt{N})^2$	$(2\sqrt[3]{5})^3$	$(h^2\sqrt[3]{u})^3$	$(f^3\sqrt[n]{f^{2n}})^n$

82. Lahendada järgmised võrrandid:

1. $x^3 = 8$	2. $x^5 = -1$	3. $x^3 = \frac{8}{27}$
$y^4 = 81$	$y^4 = -16$	$s^4 = 0,0081$
$z^3 = -27$	$z^6 = 1$	$t^5 = \frac{243}{32}$
$u^5 = 32$	$u^{10} = 1024$	$q^3 = -1$
$v^6 = 729$	$v^6 = -100$	$r^4 = 0,4096$

§ 9. Juure leidmine proovimise teel.

Ruutjuure leidmiseks on olemas algoritm. Teiste juurte leidmiseks puuduvad lihtsad, kiiret tööd võimaldavad algoritmid. Nende juurte leidmine võib toimuda proovimise teel.

Ülesanne 1. Leida $\sqrt[5]{161051}$.

Lahendus. Peame leidma niisuguse arvu, mille 5. aste on 161051. Proovides järjest arve 1, 2, 3, ... leiame: $1^5 < 161051$, $2^5 < 161051$, $3^5 < 161051$, ..., $11^5 = 161051$; järelikult

$$\sqrt[5]{161051} = 11.$$

Ülesanne 2. Leida $\sqrt[3]{17}$.

Lahendus. Peame leidma niisuguse arvu, mille kuup on 17. Proovides järjest arve 1, 2, 3, ... leiame:

$$1^3 < 17, \quad 2^3 < 17, \quad 3^3 > 17;$$

arvud 4, 5, 6, ... omavad veelgi suuremaid kuupe, seega ükski

neist ei ole $\sqrt[3]{17}$. Nii näeme, et ei leidu täisarvu, mille kuup

on 17. Kui tähistame otsitava arvu $\sqrt[3]{17}$ sümboliga x , siis

$$2^3 < x^3 < 3^3$$

ehk

$$2 < x < 3.$$

Näeme, et arv x asetseb arvude 2 ja 3 vahel.

Katsume nõuet $x^3 = 17$ rahuldada kohaselt valitud murdarvuga. Tähistame selle arvu sümboliga $\frac{a}{b}$ ja eeldame, et see murd on kirjutatud oma lihtsaimal, see on taandatud kujul; sel puhul lugeja ja nimetaja on ühistegurita arvud. Nõude kohaselt peab olema

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = 17 \text{ ehk } \frac{a^3}{b^3} = 17.$$

Et arvudel a ja b pole ühiseid tegureid (peale arvu 1), siis pole ühiseid tegureid ka arvudel aaa ja bbb ehk arvudel a^3 ja b^3 ; järelikult murd $\frac{a^3}{b^3}$ on taandumatu. Nõude kohaselt peab murd $\frac{a^3}{b^3}$ olema võrdne täisarvuga 17. Et murd ei saa olla ühtaegu taandumatu ja võrdne täisarvuga, siis ei leidu ka murdarvu, mis rahuldab nõuet $x^3 = 17$. Seega pole võimalik leida ei täisarvu ega murdarvu x , mille puhul oleks täpselt $x^3 = 17$.

Küll aga on võimalik leida niisuguseid arve, mis seda nõuet rahuldavad ligikaudu; teiste sõnadega: leidub arve, mille kuup on ligikaudu võrdne arvuga 17.

Tõepoolest, niisugusteks arvudeks on näiteks 2 ja 3; esimene annab nõutava arvu puudusega, teine liiaga. Paremate lähisväärtuste saamiseks arvu x jaoks jaotame vahemiku 2 ja 3 vahel kümneks võrdseks osaks ja proovime nõuet $x^3 = 17$ rahuldada arvudega

$$2,1 \quad 2,2 \quad 2,3 \quad \dots \quad 2,8 \quad 2,9.$$

Nende arvude kuupide arvutamine näitab, et $2,5^3$ ehk 15,625 on väiksem kui 17, seevastu $2,6^3$ ehk 17,576 on aga juba suurem kui 17. Järelikult

$$2,5 < x < 2,6.$$

Jaotame saadud vahemiku 2,5 ja 2,6 vahel uuesti kümneks võrdseks osaks ja proovime nõuet $x^3 = 17$ rahuldada arvudega

$$2,51 \quad 2,52 \quad 2,53 \quad \dots \quad 2,58 \quad 2,59.$$

Nende arvude kuupide arvutamine näitab, et

$$2,57 < x < 2,58.$$

Selsamal viisil edasi minnes näeme, et

$$2,571 < x < 2,572.$$

Võrratused

$$2 < x < 3$$

$$2,5 < x < 2,6$$

$$2,57 < x < 2,58$$

$$2,571 < x < 2,572$$

suruvad otsitava x ikka kitsamasse ja kitsamasse vahemikku: esimese vahemiku pikkus on 1, teise pikkus 0,1, kolmanda 0,01, neljanda 0,001 jne. Nende vahemikkude jada määrab meile kümnendmurru

$$x = 2,571 \dots;$$

ülalsetatud viisil saame määrata selle murru nii mitu kümnendkohta, kui iganes soovime. Mida enam selles kümnendmurrus on kümnendkohti, seda vähem selle murru kuup erineb arvust 17. Kümnendmurru 2,571... kohtade jada ei saa lõppeda; tõepoolest, vastasel korral me saaksime murru, mille kuup on 17, mis eelneva põhjal on võimatu. Seega x on lõpmatu kümnendmurd. Seda murdu me kirjutame sümboliga

Ex bibl. univ. Tai

$$\sqrt[3]{17}.$$

Et seda juurt ei saa avaldada ei täis- ega murdarvuga, siis on ta irratsionaalarv.

Võib näidata, et iga n -es juur, mille juuritav pole mõne

ratsionaalarvu n -es aste, avaldub lõpmatu kümnendmurruna ja on irratsionaalarv. Niisugusteks juurteks on näiteks

$$\sqrt[4]{10} \quad \sqrt[5]{1,82} \quad \sqrt[6]{11} \quad \sqrt[7]{\frac{3}{4}}$$

Kui on leitud juure kaks lähisväärtust (üks puudusega ja teine liiaga), mille vahe on näiteks 0,01, siis juure tõeline väärtus erineb kummastki lähisväärtusest vähem kui 0,01 võrra. Seega, kasutades ühte neist juure ligikaudse väärtusena, teeme vea, mis on väiksem kui 0,01. Nii võib $\sqrt[3]{17}$ ligikaudse väärtusena veaga alla 0,01 kasutada nii tema lähisväärtust 2,57 kui ka 2,58. Sama arvu ligikaudse väärtusena veaga alla 0,001 võib kasutada kas lähisväärtust 2,571 või 2,572.

Ülesanded.

83. Leida proovimise teel järgmised juured:

1. $\sqrt{169}$	2. $\sqrt{361}$	3. $\sqrt{529}$
$\sqrt[3]{512}$	$\sqrt[3]{1331}$	$\sqrt[3]{3,375}$
$\sqrt[4]{81}$	$\sqrt[4]{2401}$	$\sqrt[4]{0,00256}$
$\sqrt[5]{32}$	$\sqrt[5]{243}$	$\sqrt[5]{3125}$
$\sqrt[6]{0}$	$\sqrt[7]{1}$	$\sqrt[4]{0,6561}$

84. Leida proovimise teel järgmised juured veaga alla 0,01:

1. $\sqrt{28}$	2. $\sqrt[3]{15}$	3. $\sqrt{3,4}$
$\sqrt{10}$	$\sqrt[3]{100}$	$\sqrt[3]{24,2}$
$\sqrt{0,1}$	$\sqrt[3]{0,9}$	$\sqrt[4]{25}$

§ 10. Tehted juurtega.

Allpool tõestame viis teoreemi, mille järgi toimuvad tehted juurtega.

1. Juurte korrutamise teoreem:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab},$$

s. t.

võrdsete juurijatega juurte korrutamisel juuritavad korrutatakse ja tulemus juuritakse antud juurijaga.

Tõestus.

Tähistame juurte korrutise tähega x , nii et

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = x.$$

Astendades selle võrduse mõlemad pooled arvuga n , saame

$$(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n = x^n,$$

ehk, korrutise astendamise juhise põhjal

$$(\sqrt[n]{a})^n \cdot (\sqrt[n]{b})^n = x^n;$$

et juure definitsiooni põhjal $(\sqrt[n]{a})^n = a$ ja $(\sqrt[n]{b})^n = b$, siis tähendab eelmine võrdus lihtsalt, et

$$ab = x^n.$$

Seega x on arv, mille n -es aste on ab ; juure definitsiooni kohaselt siis

$$x = \sqrt[n]{ab}.$$

Võttes nüüd arvesse, et tähega x oli meil tähistatud $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

saame võrduse

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab},$$

mida oligi tarvis tõestada.

Näide.

$$\sqrt[3]{16cm^2} \cdot \sqrt[3]{4c^2m} = \sqrt[3]{64c^3m^3} = \sqrt[3]{(4cm)^3} = 4cm.$$

Vahetades ülaltõestatud võrduse pooled, saame korrutise juurimise teoreemi:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b},$$

s. t.

korrutise juurimisel juuritakse iga tema tegur ja tulemused korrutatakse.

Näide.

$$\sqrt[5]{32x^{10}} = \sqrt[5]{32} \cdot \sqrt[5]{x^{10}} = \sqrt[5]{2^5} \cdot \sqrt[5]{(x^2)^5} = 2 \cdot x^2 = 2x^2.$$

Korrutise juurimise teoreemi rakendamisel peame arvestama asjaolu, et paarisarvulise juurija puhul ei saa seda teoreemi alati kasutada. Nimelt see teoreem ei ole rakendatav juhul, kui juurija on paarisarv ja kui juuritav teisendatakse korrutiseks, mille mõned tegurid on negatiivsed. Näiteks $\sqrt{30}$ on küll esitatav kujul $\sqrt{2 \cdot (-3) \cdot (-5)}$, kuid mitte $\sqrt{2} \cdot \sqrt{-3} \cdot \sqrt{-5}$, sest negatiivsel arvul ei ole paarisarvulise juurijaga juurt.

2. Juurte jagamise teoreem:

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}},$$

s. t.

võrdsete juurijatega juurte jagamisel juuritav jagatavas jagatakse juuritavaga jagajas ja tulemus juuritakse antud juurijaga.

Tõestus. Tähistame antud juurte jagatise tähega x , siis on

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = x.$$

Astendame saadud võrduse kummagi poole arvuga n , siis saame

$$\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = x^n,$$

ehk, jagatise astendamise eeskirja põhjal,

$$\frac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n} = x^n,$$

ehk, juure definitsiooni põhjal,

$$\frac{a}{b} = x^n.$$

Et x on arv, mille n -es aste on $\frac{a}{b}$, siis juure definitsiooni järgi

$$x = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

Võrdustest

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = x \text{ ja } x = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

järeldame, et

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

Näide.

$$\frac{\sqrt[3]{cu^4}}{\sqrt[3]{c^4u}} = \sqrt[3]{\frac{cu^4}{c^4u}} = \sqrt[3]{\frac{u^3}{c^3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{u}{c}\right)^3} = \frac{u}{c}.$$

Vahetades ülaltõestatud võrduse pooled, saame jagatise juurimise teoreemi:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}},$$

s. t.

murru juurimisel juuritakse tema lugeja ja nimetaja ning arvutatakse tulemuste jagatis.

Näide.

$$\sqrt[4]{\frac{256}{a^4x^8}} = \frac{\sqrt[4]{256}}{\sqrt[4]{a^4x^8}} = \frac{\sqrt[4]{4^4}}{\sqrt[4]{(ax^2)^4}} = \frac{4}{ax^2}.$$

Jagatise juurimise teoreemi ei saa kasutada siis, kui juurija on paarisarv ja kui juurealune jagatav ja jagaja on negatiivsed.

3. Juure astendamise teoreem:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m},$$

s. t.

juure astendamisel astendatakse juuritav ja tulemus juuritakse antud juurijaga.

Tõestus.

Kirjutame astme $(\sqrt[n]{a})^m$ korrutisena, siis saame

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \underbrace{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdots \sqrt[n]{a}}_{m \text{ tegurit}}.$$

Juurte korrutamise teoreemi põhjal võime nüüd kirjutada:

$$\underbrace{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdots \sqrt[n]{a}}_{m \text{ tegurit}} = \underbrace{\sqrt[n]{a \cdot a \cdot a \cdots a}}_{m \text{ tegurit}} = \sqrt[n]{a^m}; \quad \text{seega}$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m},$$

m. o. t. t.

Näide.

$$\left(\sqrt{5a^8}\right)^3 = \sqrt{5^3a^9} = \sqrt{5^2a^8 \cdot 5a} = 5a^4 \sqrt{5a}.$$

Vahetades ülaltõestatud võrduse pooled, saame:

$$\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m;$$

selle võrduse mõtet võime sõnastada nii:

Arvu astendamise ja saadud astme juurimise asemel võib arvu juurida ja siis saadud juurt astendada.

Näide.

$$\sqrt{\left(\frac{a^2h^2}{16}\right)^3} = \sqrt{\left(\frac{a^2h^2}{4^2}\right)^3} = \left(\sqrt{\frac{a^2h^2}{4^2}}\right)^3 = \left(\frac{ah}{4}\right)^3 = \frac{a^3h^3}{64}.$$

Valemit $\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$ ei ole võimalik kasutada siis, kui juurija n on paarisarv ja kui juurealune astendatav arv a on negatiivne.

4. Astme juurimise teoreem:

Astme juurimise puhul väärub kõigepealt märkimist see juhtum, kus juuremärgi all seisev astendaja on juurija kordne, see tähendab, kui avaldises $\sqrt[n]{a^m}$ on $m = kn$. Sel juhul saab näidata, et

$$\sqrt[n]{a^{kn}} = a^k,$$

s. t. kui astendaja on jaguv juurijaga, siis

astme juurimisel astendaja jagatakse juurijaga ja saadud jagatisega astendatakse juurealune astendatav.

Tõestus. Avaldise a^{kn} võime kirjutada kujul $(a^k)^n$. Eelmise teoreemi ja juure definitsiooni põhjal saame nüüd, et

$$\sqrt[n]{a^{kn}} = \sqrt[n]{(a^k)^n} = (\sqrt[n]{a^k})^n = a^k.$$

Näide.

$$\sqrt[7]{x^{21}} = x^{\frac{21}{7}} = x^3.$$

Teiseks juhtumiks, mis astme juurimisel märkimist väärrib, on see juhtum, kus juurijal ja juuremärgi all seisval astendajal on ühine tegur. Sel juhul saab juurt taandada, s. t.

juurijat ja juuremärgi all seisvat astendajat võib jagada nende ühise teguriga.

Olgu juurija ja juuremärgi all seisva astendaja ühine tegur märgitud tähega k ; siis võime neid arve kirjutada kujul km ja kn ja juure taandamise teoreem avaldub kujul

$$\sqrt[km]{a^{kn}} = \sqrt[m]{a^n}.$$

Tõestus. Tähistame $\sqrt[km]{a^{kn}}$ tähega x ; teatavasti aga $a^{kn} = (a^n)^k$, mistõttu ka

$$\sqrt[kn]{(a^n)^k} = x$$

ehk eelmise teoreemi põhjal

$$(\sqrt[m]{a^n})^k = x.$$

Astendame nüüd võrduse mõlemad pooled arvuga m ; saame

$$(\sqrt[km]{a^n})^{km} = x^m$$

ehk

$$a^n = x^m.$$

Et x on niisugune arv, mille m -es aste on a^n , siis juure definitsiooni järgi

$$x = \sqrt[m]{a^n}.$$

Võttes arvesse, et tähega x tähistasime tõestuse alguses aval-

dist $\sqrt[km]{a^{kn}}$, saamegi võrduse

$$\sqrt[km]{a^{kn}} = \sqrt[m]{a^n}.$$

Näited.

$$1. \quad \sqrt[9]{a^6} = \sqrt[3 \cdot 3]{a^3 \cdot 2} = \sqrt[3]{a^2}.$$

$$2. \quad \sqrt[8]{4x^6y^4} = \sqrt[8]{2^2x^6y^4} = \sqrt[8]{(2x^3y^2)^2} = \sqrt[4]{2x^3y^2}.$$

Vahetades võrduse

$$\sqrt[km]{a^{kn}} = \sqrt[m]{a^n}$$

pooled, saame juure laiendamise teoreemi:

$$\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[km]{a^{kn}},$$

s. t.

juurijat ja juuremärgi all seisvat astendajat võib korrutada ühe ning sama arvuga.

Näited.

$$\sqrt[3]{a^2} = \sqrt[15]{a^{10}}; \quad \sqrt[5]{a^3} = \sqrt[15]{a^9}.$$

5. Juurejuurimise teoreem:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a},$$

s. t.

juure juurimisel juurijad korrutatakse ja tulemusega juuritakse antud juurealune arv.

Tõestus.

Tähistame avaldise $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$ tähega x , nii et

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = x.$$

Astendame selle võrduse pooled arvuga m , saame

$$\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^m = x^m,$$

ehk

$$\sqrt[n]{a} = x^m.$$

Astendame nüüd saadud võrduse kummagi poole veel arvuga n , siis saame

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = (x^m)^n,$$

ehk

$$a = x^{mn}.$$

Juure definitsiooni põhjal ongi nüüd

$$x = \sqrt[mn]{a}.$$

Viimasest võrdusest ja võrdusest

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = x$$

järeldame, et

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a},$$

m. o. t. t.

Näide.

$$\sqrt[3]{\sqrt[5]{D^{30}}} = \sqrt[15]{D^{30}} = D^{\frac{30}{15}} = D^2.$$

Nagu varem-käsiteldud võrdustes, nii võib ka kõnesolevas võrduses vahetada pooled; siis saame

$$\sqrt[mn]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$$

või ka

$$\sqrt[mn]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}.$$

Seega on alati võimalik juurimist mingi kordarvuga mn teostada sel teel, et enne juuritakse näiteks arvuga n ja tulemust juuritakse arvuga m . Nii võime 4-nda juure arvust 625 leida sel teel, et leiame arvu 625 ruutjuure ja tulemusest leiame veel kord ruutjuure:

$$\sqrt[4]{625} = \sqrt{\sqrt{625}} = \sqrt{25} = 5.$$

Analoogiliselt leiame $\sqrt[6]{27}$:

$$\sqrt[6]{27} = \sqrt[3]{\sqrt[2]{27}} = \sqrt[3]{3} = 1,732.$$

85. Leida järgmiste avaldiste väärtused, kasutades arvutamise hõlbustamiseks juurte korrutamise teoreemi:

1. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$

$$\sqrt{162} \cdot \sqrt{0,5}$$

$$\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{9}$$

$$\sqrt[3]{32} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$$

$$\sqrt[4]{64} \cdot \sqrt[4]{4}$$

2. $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12}$

$$\sqrt{0,8} \cdot \sqrt{45}$$

$$\sqrt[3]{-7} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{7}}$$

$$\sqrt[3]{40\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$$

$$\sqrt[4]{\frac{1}{6}} \cdot \sqrt[4]{486}$$

3. $\sqrt{5} \cdot \sqrt{20}$

$$\sqrt{2,4} \cdot \sqrt{0,6}$$

$$\sqrt[3]{-12} \cdot \sqrt[3]{18}$$

$$\sqrt[3]{0,32} \cdot \sqrt[3]{-200}$$

$$\sqrt[5]{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[5]{48}$$

86. Lihtsustada järgmised avaldised, kasutades korrutise juurimise teoreemi:

1. $\sqrt{49a^2}$

$$\sqrt[3]{125u^3}$$

$$\sqrt[4]{256g^4}$$

2. $\sqrt{121x^4}$

$$\sqrt[3]{-343f^6}$$

$$\sqrt[5]{k^5x^{10}}$$

3. $\sqrt{a^2b^2}$

$$\sqrt[3]{-p^3q^9}$$

$$\sqrt[7]{-128r^7}$$

87. Kirjutada järgmised juurte korrutised võimalikult väheste sümbolitega:

1. $\sqrt{2a} \cdot \sqrt{8a}$

$$\sqrt[3]{4c} \cdot \sqrt[3]{2c^2}$$

$$\sqrt[4]{3N^2} \cdot \sqrt[4]{27N^2}$$

$$\sqrt[5]{16a} \cdot \sqrt[5]{64a^4}$$

2. $\sqrt{3b} \cdot \sqrt{27b^3}$

$$\sqrt[3]{9u} \cdot \sqrt[3]{-3u^5}$$

$$\sqrt[4]{48x^3} \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{3}x^5}$$

$$\sqrt[4]{\frac{243}{x}} \cdot \sqrt[4]{\frac{x^9}{3}}$$

3. $\sqrt{\frac{1}{2}ax^3} \cdot \sqrt{288ax}$

$$\sqrt[3]{24m^2n^4} \cdot \sqrt[3]{9m^4n^5}$$

$$\sqrt[5]{9H^3} \cdot \sqrt[5]{27H^7}$$

$$\sqrt[3]{m^{14}n^2} \cdot \sqrt[3]{\frac{n^7}{m^2}}$$

88. Kirjutada järgmised juurte korrutised võimalikult väheste sümbolitega:

<p>1. $\sqrt{3} \cdot \sqrt{5}$</p> <p>$\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{15}$</p> <p>$\sqrt{10} \cdot \sqrt{a}$</p> <p>$\sqrt[4]{15a} \cdot \sqrt[4]{4a^2}$</p> <p>$\sqrt[7]{u} \cdot \sqrt[7]{2v}$</p>	<p>2. $\sqrt{7} \cdot \sqrt{6}$</p> <p>$\sqrt[3]{-4,6} \cdot \sqrt[3]{2,5}$</p> <p>$\sqrt[8]{5x} \cdot \sqrt[8]{3y}$</p> <p>$\sqrt[6]{-\frac{x^2}{a}} \cdot \sqrt[6]{\frac{a^2}{x^2}}$</p> <p>$\sqrt[6]{2a} \cdot \sqrt[9]{3b^2}$</p>	<p>3. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{13,5}$</p> <p>$\sqrt[3]{1\frac{3}{4}} \cdot \sqrt[3]{80}$</p> <p>$\sqrt[3]{-m} \cdot \sqrt[3]{-n}$</p> <p>$\sqrt[5]{a} \cdot \sqrt[5]{a+1}$</p> <p>$\sqrt[4]{x-1} \cdot \sqrt[4]{x+1}$</p>
--	--	---

89. Leida järgmiste avaldiste väärtused, kasutades arvutamise hõlbustamiseks korrutise juurimise teoreemi:

<p>1. $\sqrt{81 \cdot 169}$</p> <p>$\sqrt[3]{216 \cdot 27}$</p> <p>$\sqrt{225 \cdot 100}$</p> <p>$\sqrt[3]{729 \cdot 1000}$</p> <p>$\sqrt{196 \cdot 10^4}$</p>	<p>2. $\sqrt{441 \cdot 144}$</p> <p>$\sqrt[3]{125 \cdot 4096}$</p> <p>$\sqrt{484 \cdot 10000}$</p> <p>$\sqrt[3]{64 \cdot 1000000}$</p> <p>$\sqrt[3]{1728 \cdot 10^9}$</p>	<p>3. $\sqrt{7,29 \cdot 121}$</p> <p>$\sqrt[3]{3375 \cdot 1331}$</p> <p>$\sqrt{57600}$</p> <p>$\sqrt[3]{512000}$</p> <p>$\sqrt[4]{81 \cdot 10^{12}}$</p>
---	--	---

90. Teisendada järgmised avaldised nii, et juuremärgi alla jääks võimalikult väike täisarv:

<p>1. $\sqrt{50}$</p> <p>$\sqrt{72}$</p> <p>$\sqrt[3]{54}$</p> <p>$\sqrt[3]{-24}$</p> <p>$\sqrt[4]{512}$</p>	<p>2. $\sqrt{45}$</p> <p>$\sqrt{245}$</p> <p>$\sqrt[3]{375}$</p> <p>$\sqrt[3]{320}$</p> <p>$\sqrt[4]{240}$</p>	<p>3. $\sqrt{32}$</p> <p>$\sqrt[3]{300}$</p> <p>$\sqrt[3]{108}$</p> <p>$\sqrt[3]{-1024}$</p> <p>$\sqrt[5]{486}$</p>	<p>4. $\sqrt{63}$</p> <p>$\sqrt{768}$</p> <p>$\sqrt[3]{1512}$</p> <p>$\sqrt[3]{2000}$</p> <p>$\sqrt[5]{-96}$</p>
---	---	--	---

91. Teisendada järgmised avaldised nii, et juuremärgi alla jääks võimalikult vähe tegureid:

1. $\sqrt{N^3}$	2. $\sqrt{a^5}$	3. $\sqrt{c^2n^3}$	4. $\sqrt{ax^4}$
$\sqrt{c^5h}$	$\sqrt{7m^2x^2}$	$\sqrt{4a^4b}$	$\sqrt{25f^4g^3}$
$\sqrt[3]{27c^5}$	$\sqrt[3]{16a^4}$	$\sqrt[3]{2a^2x^3}$	$\sqrt[3]{8a^3b^2}$
$\sqrt[3]{40cu^4}$	$\sqrt[3]{54h^6k}$	$\sqrt[3]{135u^3v^3}$	$\sqrt[3]{-64N^3}$
$\sqrt[4]{6a^4}$	$\sqrt[4]{64n^5}$	$\sqrt[5]{32P^6}$	$\sqrt[5]{81a^5x}$

92. Kirjutada järgmised avaldised üheainsa juuremärgi abil ja teisendada tulemus nii, et juuremärgi alla jääks võimalikult vähe tegureid:

1. $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3a}$	2. $\sqrt{\frac{n}{2}} \cdot \sqrt{10n}$	3. $\sqrt{5A} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{3A}$
$\sqrt[3]{h^2} \cdot \sqrt[3]{ah}$	$\sqrt[3]{pq^2r^2} \cdot \sqrt[4]{p^2q}$	$\sqrt[3]{6x^2} \cdot \sqrt[3]{\frac{6}{x}} \cdot \sqrt[3]{4x^3}$
$\sqrt{7} \cdot \sqrt{14}$	$\sqrt{10} \cdot \sqrt{15}$	$\sqrt{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{240}$
$\sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[3]{36}$	$\sqrt[3]{25} \cdot \sqrt[3]{75}$	$\sqrt[3]{64} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$
$\sqrt[4]{49} \cdot \sqrt[4]{98}$	$\sqrt[5]{\frac{4}{3}} \cdot \sqrt[5]{96}$	$\sqrt[6]{2,5} \cdot \sqrt[6]{1,6} \cdot \sqrt[6]{48}$

93. Kirjutada järgmised avaldised juurtena üheainsa juuremärgi abil, võimaluse korral juuremärgita:

1. $\sqrt{72} : \sqrt{2}$	2. $\sqrt{ab} : \sqrt{b}$	3. $\sqrt[4]{b} : \sqrt[4]{\frac{a}{b}}$
$\sqrt[3]{625} : \sqrt[3]{5}$	$\sqrt[3]{c^2} : \sqrt[3]{c}$	$\sqrt[3]{N^2} : \sqrt[3]{\frac{1}{N}}$
$\sqrt[3]{102} : \sqrt[3]{17}$	$\sqrt[3]{H^2u^2} : \sqrt[3]{Hu^2}$	$\sqrt[3]{\frac{P}{Q^2}} : \sqrt[3]{\frac{Q}{P^2}}$

94. Kirjutada järgmised avaldised üheainsa juuremärgi abil, võimaluse korral juuremärgita:

$$\begin{array}{lll}
 1. \sqrt[4]{8N^3u} : \sqrt[4]{\frac{N^2u}{2}} & 2. \sqrt{\frac{9ax^3}{25n^6}} : \sqrt{\frac{a^5x}{n^2}} & 3. \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a+b}} \\
 \sqrt[3]{\frac{H^2}{25u}} : \sqrt[3]{\frac{5u^2}{H}} & \frac{\sqrt{a^2b-a^2c}}{\sqrt{b-c}} & \frac{\sqrt{(u+v)^2}}{\sqrt{u^2-v^2}} \\
 \sqrt[3]{ab^2c^3} : \sqrt[3]{\frac{27c^6}{64a^5b}} & \frac{\sqrt{m+n}}{\sqrt{m^2-n^2}} & \frac{\sqrt[3]{a^2(a^2-b^2)}}{\sqrt[3]{a(a+b)}}
 \end{array}$$

95. Kirjutada järgmised juurte jagatised võimalikult väheste sümbolitega:

$$\begin{array}{llll}
 1. \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{5}} & 2. \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{7}} & 3. \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{6}} & 4. \frac{\sqrt{aN}}{\sqrt{N}} \\
 \sqrt[3]{\frac{25}{5}} & \sqrt[3]{\frac{n^2}{n}} & \sqrt[3]{\frac{h^7}{h}} & \sqrt[3]{\frac{a^2h}{ah^2}} \\
 \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{63}} & \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{44}} & \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{ac^2}} & \frac{\sqrt{px^3}}{\sqrt{p^2x^2}} \\
 \sqrt[3]{\frac{9}{72}} & \sqrt[3]{\frac{7}{56}} & \sqrt[3]{\frac{u}{c^2u^2}} & \sqrt[3]{\frac{mx^2}{m^4x^5}}
 \end{array}$$

96. Leida järgmiste avaldiste väärtused, kasutades arvutamise hõlbustamiseks jagatise juurimise teoreemi:

$$\begin{array}{llll}
 1. \sqrt{\frac{9}{64}} & 2. \sqrt{\frac{49}{81}} & 3. \sqrt{\frac{144}{25}} & 4. \sqrt{\frac{169}{289}} \\
 \sqrt{6\frac{1}{4}} & \sqrt{3\frac{1}{16}} & \sqrt{7\frac{9}{16}} & \sqrt{4\frac{21}{25}} \\
 \sqrt[3]{2\frac{10}{27}} & \sqrt[3]{-15\frac{5}{8}} & \sqrt[3]{5\frac{23}{64}} & \sqrt[3]{-4\frac{17}{27}}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
 5. & \sqrt{\frac{5^2}{6^4}} & 6. & \sqrt[3]{\frac{2^6}{7^3}} & 7. & \sqrt[4]{\frac{236}{10^8}} & 8. & \sqrt[5]{\frac{243}{10^{15}}} \\
 & \sqrt[3]{\left(\frac{27}{8}\right)^2} & & \sqrt[4]{\left(1\frac{9}{16}\right)^3} & & \sqrt[4]{\left(3\frac{13}{81}\right)^2} & & \sqrt[5]{\left(-\frac{32}{243}\right)^3}
 \end{array}$$

97. Teisendada järgmised avaldised nii, et juuremärgi all oleksid võimalikult lihtsad avaldised:

$$\begin{array}{lll}
 1. & \sqrt{\frac{18}{25}} & 2. & \sqrt[3]{\frac{16}{27}} & 3. & \sqrt[3]{\frac{125a}{27x^3}} \\
 & 12\sqrt{\frac{a^3}{16x^2}} & & \sqrt{1\frac{9}{16}a^3} & & 0,2\sqrt[3]{1000Nu^3} \\
 & 10\sqrt[3]{\frac{1}{8}M} & & \sqrt[2]{\frac{3}{4}m^2n^4} & & 10\sqrt[3]{\frac{H^2}{0,008}}
 \end{array}$$

98. Kirjutada järgmised astmed võimalikult väheste sümbolitega:

$$\begin{array}{lll}
 1. & (\sqrt{5})^4 & 2. & \sqrt[3]{(\sqrt{7})^5} & 3. & (\sqrt{2} \cdot \sqrt{5})^6 \\
 & (\sqrt{3})^3 & & \sqrt[5]{(\sqrt{a})^6} & & \sqrt[3]{\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}}^6 \\
 & (\sqrt{2})^{10} & & \sqrt[4]{(\sqrt{x})^5} & & (\sqrt{x} : \sqrt{y})^5 \\
 & \sqrt[3]{(\sqrt{3})^6} & & \sqrt[5]{(\sqrt{b^2})^7} & & (\sqrt[4]{27} : \sqrt[4]{3})^2 \\
 & \sqrt[9]{(\sqrt{5})^9} & & \sqrt[10]{(\sqrt{x^2})^5} & & (\sqrt[5]{u^2} : \sqrt[5]{v^2})^3
 \end{array}$$

99. Arendada järgmised korrutised ja astmed:

$$\begin{array}{ll}
 1. & (\sqrt{3} - 1) \cdot \sqrt{3} \\
 & (\sqrt{7} + \sqrt{5}) \cdot \sqrt{5} \\
 & (\sqrt{7} - 1)^2 \\
 & (\sqrt{10} - \sqrt{8})^2 \\
 & \sqrt[3]{(\sqrt{3} - 1)^3} \\
 2. & (\sqrt{11} + \sqrt{10})(\sqrt{11} - \sqrt{10}) \\
 & (\sqrt{3} + 2\sqrt{2})(\sqrt{3} - 2\sqrt{2}) \\
 & (2\sqrt{5} - 3\sqrt{2})^2 \\
 & (2\sqrt{8} - 3)(9 + 4\sqrt{8}) \\
 & \sqrt[3]{(2\sqrt{6} - 4\sqrt{3})^3}
 \end{array}$$

100. Teisendada järgmised astmed nii, et juuremärgi all oleks võimalikult vähe tegureid:

<p>1. $(\sqrt{2a^2})^3$</p> <p>$(\sqrt{3hu^2})^5$</p> <p>$(\sqrt[3]{5c^2N^2})^2$</p> <p>$(\sqrt[4]{7p^4q^2})^4$</p> <p>$(ax^2\sqrt{2ax})^2$</p>	<p>2. $(\sqrt[3]{4x^2})^2$</p> <p>$(2\sqrt[3]{cu^6})^3$</p> <p>$(\sqrt[4]{6R^2})^2$</p> <p>$(\sqrt[4]{\pi R^3h})^2$</p> <p>$(2N\sqrt[3]{3N^2u})^4$</p>	<p>3. $(\sqrt[3]{\frac{bc^3}{3a}})^3$</p> <p>$(\sqrt[3]{\frac{a^3x}{5u^3}})^3$</p> <p>$(\sqrt[3]{\frac{2m^3x^5}{n^4}})^3$</p> <p>$(\sqrt[3]{\frac{3c^5x^2}{4f^3}})^4$</p> <p>$(\frac{1}{2c} \sqrt[3]{5a^2x^3})^5$</p>
--	---	--

101. Taandada järgmised juured:

<p>1. $\sqrt[4]{a^2}$</p> <p>$\sqrt[6]{a^2}$</p> <p>$\sqrt[4]{a^2x^6}$</p> <p>$\sqrt[6]{a^2b^4}$</p> <p>$\sqrt[2n]{a^{2m}}$</p>	<p>2. $\sqrt[9]{a^6}$</p> <p>$\sqrt[12]{a^4b^8}$</p> <p>$\sqrt[12]{\frac{x^6}{y^3}}$</p> <p>$\sqrt[15]{u^5v^{10}}$</p> <p>$\sqrt[3n]{a^{3p}b^9q}$</p>	<p>3. $\sqrt[4]{5^2}$</p> <p>$\sqrt[4]{64}$</p> <p>$\sqrt[6]{9}$</p> <p>$\sqrt[6]{1000}$</p> <p>$\sqrt[6]{\frac{25}{81}}$</p>	<p>4. $\sqrt[2]{\sqrt[3]{a^3}}$</p> <p>$\sqrt[3]{\sqrt{x^2}}$</p> <p>$\sqrt[3]{b\sqrt{b}}$</p> <p>$\sqrt[3]{a\sqrt{a}}$</p> <p>$\sqrt[3]{x^2\sqrt{x}}$</p>
--	--	--	---

102. Arvutada järgmiste juurte väärtused, kasutades ruut- ja kuupjuurte tabelleid:

<p>1. $\sqrt[4]{4}$</p> <p>$\sqrt[6]{36}$</p> <p>$\sqrt[8]{81}$</p>	<p>2. $\sqrt[4]{16}$</p> <p>$\sqrt[6]{27}$</p> <p>$\sqrt[8]{625}$</p>	<p>3. $\sqrt[6]{25}$</p> <p>$\sqrt[6]{144}$</p> <p>$\sqrt[8]{1296}$</p>	<p>4. $\sqrt[4]{100}$</p> <p>$\sqrt[6]{1331}$</p> <p>$\sqrt[12]{10000}$</p>
--	--	--	--

103. Kirjutada järgmised avaldised üheainsa juuremärgiga:

1. $\sqrt{\sqrt{5}}$	2. $\sqrt{\sqrt{N^3}}$	3. $\sqrt[3]{\sqrt{ab^3}}$
$\sqrt[3]{\sqrt{7}}$	$\sqrt[3]{\sqrt{h^3}}$	$\sqrt[5]{\sqrt{(3c^4)}}$
$\sqrt[3]{\sqrt[3]{13}}$	$\sqrt[5]{\sqrt{c^{10}}}$	$\sqrt[3]{\sqrt{a^3b^6c^9}}$
$\sqrt[4]{\sqrt[3]{29}}$	$\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^4x^3}}$	$\sqrt[5]{\sqrt[3]{N^{10}f^{15}}}$
$\sqrt{2\sqrt{3}}$	$\sqrt[3]{a\sqrt{a}}$	$\sqrt[3]{2x\sqrt{\frac{a}{2}}}$

§ 11. Juur-avaldiste teisendamisi.

Juur-avaldisteks nimetame niisuguseid avaldisi, mis sisaldavad juuri. Näiteks

$$\sqrt{2} + \sqrt[3]{3} \quad \left(10 - 2\sqrt[5]{100}\right)^2 \quad \frac{1}{3 - \sqrt{5}}$$

on juur-avaldised.

Nende avaldiste väärtusi saab arvutada vaid ligikaudu; selleks asendame avaldises esinevad irratsionaalsed suurused nende ligikaudsete väärtustega, tavaliselt 2-, 3- või 4-kohaliste kümnendmurdudega, ja teostame avaldises näidatud tehted. Töö hõlbustamiseks on sageli kohane avaldist enne teisendada. Teisendamise võtteist käsitame kahte:

1. teguri toomine juuremärgi alt juuremärgi ette;
2. juure kaotamine murru nimetajast.

Esimene teisendus põhineb kas korrutise või jagatise juurimise teoreemil ja vastavalt sellele teostub see kas nii:

$$\sqrt[n]{a^n b} = \sqrt[n]{a^n} \cdot \sqrt[n]{b} = a \sqrt[n]{b},$$

või nii:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b^n}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b^n}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{b} = \frac{1}{b} \sqrt[n]{a}.$$

Teine teisendus — juure kaotamine murru nimetajast — toimub murru lugeja ja nimetaja korrutamisel kohaselt valitud juur-avaldisega.

Näited.

$$1. \quad \frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a \cdot \sqrt{b}}{\sqrt{b} \cdot \sqrt{b}} = \frac{a \cdot \sqrt{b}}{\sqrt{b^2}} = \frac{a \cdot \sqrt{b}}{b} = \frac{a}{b} \sqrt{b}.$$

$$2. \quad \frac{a}{\sqrt[3]{b}} = \frac{a \cdot \sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{b} \cdot \sqrt[3]{b^2}} = \frac{a \sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{b^3}} = \frac{a \sqrt[3]{b^2}}{b} = \frac{a}{b} \sqrt[3]{b^2}.$$

$$3. \quad \frac{a}{\sqrt{b} - \sqrt{c}} = \frac{a(\sqrt{b} + \sqrt{c})}{(\sqrt{b} - \sqrt{c})(\sqrt{b} + \sqrt{c})} = \\ = \frac{a(\sqrt{b} + \sqrt{c})}{(\sqrt{b})^2 - (\sqrt{c})^2} = \frac{a(\sqrt{b} + \sqrt{c})}{b - c}.$$

$$4. \quad \frac{a}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} = \frac{a(\sqrt{b} - \sqrt{c})}{(\sqrt{b} + \sqrt{c})(\sqrt{b} - \sqrt{c})} = \\ = \frac{a(\sqrt{b} - \sqrt{c})}{(\sqrt{b})^2 - (\sqrt{c})^2} = \frac{a(\sqrt{b} - \sqrt{c})}{b - c}.$$

Nende teisendusvõtete kasutamist selgitavad järgmised ülesanded.

Ülesanne 1. Arvutada avaldise

$$4\sqrt{63} - 5\sqrt{28} - 2\sqrt{7} + \sqrt{20}$$

väärtus.

Lahendus. Ülesannet on võimalik lahendada nii, et kõigepealt määrame ruutjuure algoritmi või tabeli abil kõik antud avaldises esinevad juured, siis teostame nõutavad korrutamised ja lõpuks teostame liitmised ja lahutamised. Tunduvalt hõlpsamini jõuame eesmärgile antud avaldist teisendades. Nii saame:

$$\begin{aligned} & 4\sqrt{63} - 5\sqrt{28} - 2\sqrt{7} + \sqrt{20} = \\ & = 4\sqrt{9 \cdot 7} - 5\sqrt{4 \cdot 7} - 2\sqrt{7} + \sqrt{4 \cdot 5} = \\ & = 4 \cdot 3\sqrt{7} - 5 \cdot 2\sqrt{7} - 2\sqrt{7} + 2\sqrt{5} = \\ & = 12\sqrt{7} - 10\sqrt{7} - 2\sqrt{7} + 2\sqrt{5} = \\ & = 2\sqrt{5}. \end{aligned}$$

Avaldise väärtuse arvutamine algkuju järgi nõuab 4 juurimise, 3 korrutamise, 2 lahutamise ja 1 liitmise, seega kokku 10 tehte teostamist. Avaldise väärtuse arvutamine avaldise teisendatud kuju järgi nõuab kõigest üht juure leidmist ja üht korrutamist. Võttes tabelist $\sqrt{5}$ lähisväärtuse 2,236, leiame kõnesoleva avaldise väärtusena 4,472. Kontrolliks märgime, et $2\sqrt{5} = \sqrt{4 \cdot 5} = \sqrt{20}$, ehk tabeli järgi 4,472.

Ülesanne 2. Arvutada avaldise $\frac{26}{5\sqrt{13}}$ väärtus.

Lahendus. Ülesannet on võimalik lahendada nii, et tabelist võtame $\sqrt{13}$ näiteks neljakohalise lähisväärtuse,

korrutame selle 5-ga ja jagame 26 saadud korrutisega. Et hoiduda tülikast jagamisest mitmekohalise arvuga, kaotame nimetajast juure. Selleks korrutame murru lugejat ja nimetajat arvuga $\sqrt{13}$. Nii saame:

$$\frac{26}{5\sqrt{13}} = \frac{26 \cdot \sqrt{13}}{5 \cdot 13} = \frac{2}{5} \sqrt{13} = 0,4\sqrt{13}.$$

Avaldise väärtuse arvutamine avaldise teisendatud kuju järgi nõuab ühtainsat korrutamist, kui $\sqrt{13}$ lähisväärtus võetakse tabelist.

Ülesanne 3. Arvutada avaldise

$$\frac{8}{\sqrt{19} - \sqrt{15}}$$

väärtus.

Lahendus. Ülesannet on võimalik lahendada nii, et tabelist leiame $\sqrt{19}$ ja $\sqrt{15}$ näiteks neljakohalised lähisväärtused, arvutame nende vahe ja jagame 8 selle vahega. Et hoiduda tülikast jagamisest mitmekohalise arvuga, kaotame nimetajast juured. Selleks korrutame murru lugeja ja nimetaja summaga $\sqrt{19} + \sqrt{15}$:

$$\begin{aligned} \frac{8}{\sqrt{19} - \sqrt{15}} &= \frac{8(\sqrt{19} + \sqrt{15})}{(\sqrt{19} - \sqrt{15})(\sqrt{19} + \sqrt{15})} = \\ &= \frac{8(\sqrt{19} + \sqrt{15})}{19 - 15} = \frac{8}{4}(\sqrt{19} + \sqrt{15}) = 2(\sqrt{19} + \sqrt{15}). \end{aligned}$$

Antud avaldise väärtuse arvutamine avaldise teisendatud kuju järgi nõuab vaid üht liitmist ja üht korrutamist, kui $\sqrt{19}$ ja $\sqrt{15}$ lähisväärtused on teada.

104. Teisendada järgmised avaldised nii, et juuremärgi alla jääks võimalikult väike täisarv:

$$\begin{array}{cccc}
 1. \sqrt{\frac{1}{2}} & 2. \sqrt{\frac{2}{3}} & 3. \sqrt{2\frac{1}{2}} & 4. \sqrt{3\frac{1}{7}} \\
 \sqrt{\frac{3}{20}} & \sqrt{\frac{5}{12}} & \sqrt{1\frac{5}{18}} & \sqrt{2\frac{1}{50}} \\
 \sqrt[3]{\frac{1}{9}} & \sqrt[3]{\frac{3}{4}} & \sqrt[3]{\frac{1}{2}} & \sqrt[3]{\frac{2}{3}}
 \end{array}$$

105. Teisendada järgmised avaldised nii, et juuremärgi alla jääks võimalikult lihtne täisavaldis:

$$\begin{array}{cccc}
 1. \sqrt{\frac{a}{b}} & 2. \sqrt{\frac{m}{2n}} & 3. \sqrt{\frac{5x}{8a}} & 4. \sqrt{\frac{p}{q^3}} \\
 \sqrt[3]{\frac{a}{b}} & \sqrt[3]{\frac{a}{b^2}} & \sqrt[4]{\frac{5x}{y^2}} & \sqrt[5]{\frac{a^2}{d^3}} \\
 \sqrt[4]{\frac{x}{y^3}} & \sqrt[4]{\frac{m^5}{n}} & \sqrt[3]{\frac{250}{3x}} & \sqrt[5]{\frac{243}{49a^3}}
 \end{array}$$

106. Kirjutada järgmised juur-avaldised kujul, milles nimetaja on ratsionaalne, ja arvutada nende väärtused:

$$\begin{array}{cccc}
 1. \frac{1}{\sqrt{2}} & 2. \frac{3}{\sqrt{5}} & 3. \frac{1}{\sqrt[3]{2}} & 4. \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\
 \frac{3}{\sqrt{3}} & \frac{7}{2\sqrt{7}} & \frac{2}{\sqrt[3]{4}} & \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{27}} \\
 \frac{6}{\sqrt{6}} & \frac{6}{\sqrt{18}} & \frac{10}{\sqrt[3]{25}} & \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{16}}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
 5. & \frac{9}{2\sqrt{27}} & 6. & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{21}} & 7. & \frac{18}{5\sqrt{3}} & 8. & \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{50}} \\
 & & & & & & & \frac{\sqrt[4]{25}}{\sqrt[4]{27}} \\
 & \frac{16}{5\sqrt{8}} & & \frac{3\sqrt{10}}{2\sqrt{15}} & & \frac{3}{\sqrt[4]{9}} & &
 \end{array}$$

107. Kirjutada järgmised avaldised kujul, milles nime-taja on ratsionaalne:

$$\begin{array}{llll}
 1. & \frac{1}{\sqrt{a}} & 2. & \frac{a}{\sqrt{a}} & 3. & \frac{m}{\sqrt{2n}} & 4. & \frac{3\rho}{\sqrt{3q}} \\
 & \frac{1}{\sqrt{a^2x}} & & \frac{a}{\sqrt{a^3}} & & \frac{b^4}{\sqrt{b^5}} & & \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2a^3}} \\
 & \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{8}} & & \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{125}} & & \frac{a^2}{x\sqrt{ax}} & & \frac{4xy}{\sqrt{2xy^3}} \\
 & \frac{1}{\sqrt[3]{a}} & & \frac{x}{\sqrt{x^2}} & & \frac{3}{\sqrt{6}} & & \frac{1}{\sqrt{2a^2}} \\
 & \frac{\sqrt[3]{10}}{\sqrt[3]{25}} & & \frac{6\sqrt{x}}{\sqrt[3]{2xy^2}} & & \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a^4}} & & \frac{\sqrt{ab^2}}{\sqrt{a^2b^5}}
 \end{array}$$

108. Kirjutada järgmised avaldised kujul, milles nime-taja on ratsionaalne, ja arvutada nende väärtused:

$$\begin{array}{lll}
 1. & \frac{1}{\sqrt{3}-1} & 2. & \frac{21}{5+\sqrt{2}} & 3. & \frac{12}{5-\sqrt{13}} \\
 & \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} & & \frac{8}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} & & \frac{8}{\sqrt{15}-\sqrt{13}} \\
 & \frac{1}{3\sqrt{2}-\sqrt{3}} & & \frac{19}{3\sqrt{11}-4\sqrt{5}} & & \frac{5\sqrt{5}}{3\sqrt{5}-4} \\
 & \frac{\sqrt{9}-\sqrt{5}}{\sqrt{5}} & & \frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}} & & \frac{8+\sqrt{15}}{8-2\sqrt{15}}
 \end{array}$$

109. Anda järgmistele murdudele kuju, milles nimetaja on ratsionaalne:

$1. \frac{\frac{u}{\sqrt{u}-1}}{\frac{3N}{\sqrt{N}+2}} \cdot \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{u}-\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-1}$	$2. \frac{\frac{w}{w\sqrt{w}+1}}{\frac{3m}{m\sqrt{u}-2}} \cdot \frac{10x}{\sqrt{x}+\sqrt{5x}} \cdot \frac{3H}{2\sqrt{H}-\sqrt{5}} \cdot \frac{2\sqrt{a}-3\sqrt{b}}{3\sqrt{a}+2\sqrt{b}}$	$3. \frac{\frac{a^2-b}{a-\sqrt{b}}}{\frac{x^4-a^2}{x-\sqrt{a}}} \cdot \frac{a+2\sqrt{x}}{a-2\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{c}}{3\sqrt{c}+1} \cdot \frac{u-2\sqrt{u}}{u+3\sqrt{u}}$
---	--	---

110. Koondada järgmised juur-avaldised:

$1. 6\sqrt{2} + 3\sqrt{2}$ $8\sqrt{3} - 5\sqrt{3}$ $m\sqrt{7} + n\sqrt{7}$ $a\sqrt{z} - 2\sqrt{z}$	$2. 10\sqrt[3]{5} - 9\sqrt[3]{5}$ $\sqrt[5]{4} + 4\sqrt[5]{4}$ $a\sqrt[3]{x} + b\sqrt[3]{x}$ $k\sqrt[n]{a} + \frac{\sqrt[n]{a}}{k}$	$3. a\sqrt{x} + \sqrt{x}$ $m\sqrt[3]{d} - 2n\sqrt[3]{d}$ $\sqrt[4]{3f} - 5\sqrt[4]{3f}$ $a^2\sqrt[5]{b} - a\sqrt[5]{b}$
--	---	---

111. Kirjutada järgmised avaldised võimalikult väheste ja võimalikult lihtsate juurte abil:

$$1. 8\sqrt{7} + 5\sqrt[3]{7} - 10,7\sqrt{7} - \sqrt[3]{7}$$

$$3\sqrt{10} + \sqrt[3]{10} - 5,5\sqrt{10} - 0,7\sqrt{10}$$

$$2\sqrt{N} - \sqrt{M} + 4\sqrt{N} - 6\sqrt{M}$$

$$\sqrt[3]{H} + 3\sqrt{H} - 2\sqrt{H} + \sqrt[3]{H}$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad & 6\sqrt[3]{3} - 7\sqrt{12} + \sqrt{75} - 3\sqrt{48} + 3\sqrt{108} + \sqrt{300} \\
 & \sqrt[3]{5} - 3\sqrt[3]{40} + 9\sqrt{250} - 2\sqrt[3]{128} + 2\sqrt[3]{432} \\
 & 6\sqrt{18} - 5\sqrt[3]{54} - 4\sqrt{72} + 4\sqrt[3]{1024} \\
 & 5\sqrt[3]{72} - 7\sqrt{45} + 11\sqrt[3]{9000} - 10\sqrt{180}
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll}
 3. \quad 4\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{8} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} & 4. \quad 5\sqrt[3]{3} : (2\sqrt{12}) \\
 2\sqrt[3]{2} \cdot 5\sqrt[3]{12} \cdot \frac{3}{5}\sqrt[3]{32} & \sqrt{48} : \left(\frac{1}{3}\sqrt[3]{3}\right) \\
 5\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{18} \cdot \frac{2}{3}\sqrt{20} & \frac{3}{5}\sqrt[3]{56} : (3\sqrt{8}) \\
 \frac{2}{3}\sqrt[3]{3} \cdot 7\sqrt[3]{18} \cdot \frac{3}{4}\sqrt[3]{16} & \sqrt{91} : \left(\frac{3}{4}\sqrt[3]{39}\right)
 \end{array}$$

112. Võttes tabelist vastavate arvude ruut- ja kuupjuured, arvutada järgmiste juur-avaldiste väärtused:

$$\begin{array}{lll}
 1. \quad \sqrt{3} + \sqrt{5} & 2. \quad \sqrt{7} - \sqrt{5} & 3. \quad \sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{2} \\
 \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3} & \sqrt{14} & \sqrt{35} \\
 \sqrt{21} & \sqrt{98} & \sqrt[3]{45}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 4. \quad \sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{3} & 5. \quad \sqrt{50} - \sqrt{28} + \sqrt{35} \\
 \sqrt[3]{49} & 2\sqrt{15} + \sqrt{27} - 2\sqrt{75} \\
 \sqrt[3]{448} & \sqrt[3]{18} + \sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{200}
 \end{array}$$

113. Teisendada järgmised korrutised nii, et kõik tegurid oleksid juuremärgi all:

1. $2\sqrt{5}$	2. $b\sqrt[3]{c^2}$	3. $ax^2\sqrt[3]{a}$
$a\sqrt{b^3}$	$h\sqrt[4]{3h}$	$c^2u\sqrt[3]{c^2u}$
$h^2\sqrt{u}$	$N^2\sqrt[5]{N}$	$3D^2\sqrt[3]{3D}$
$3\sqrt{\frac{1}{27}}$	$\frac{5}{2}\sqrt{10}$	$\frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{9}{2}}$
$c^2\sqrt{\frac{b}{c}}$	$4x\sqrt[3]{\frac{m}{16x^2}}$	$\frac{1}{2}a^2u^3\sqrt[3]{\frac{4}{au^2}}$

114. Teisendada järgmised avaldised nii, et juuremärgi alla jääks võimalikult lihtne avaldis:

1. $\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}}$	2. $3N\sqrt{N^2 - \frac{5}{9}N^2}$
$\sqrt{b^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}$	$\sqrt{4x^2 - \frac{19}{25}x^6}$
$2\pi\sqrt{r^2 - \frac{3}{8}r^2}$	$\sqrt{\frac{12}{25}R^4 - \frac{4}{25}R^2}$

115. Lihtsustada järgmised korrutised:

1. $\frac{a}{2}\sqrt{3x} \cdot \frac{5}{a}\sqrt{6x}$	2. $\sqrt{N}(\sqrt{N} - a\sqrt{aN})$
$m^2\sqrt{\frac{2}{m}} \cdot 3\sqrt{m}$	$\sqrt{2x}(\sqrt{2} + \sqrt{x})$
$h^2\sqrt[3]{2u} \cdot \frac{1}{2}\sqrt[3]{4u^2}$	$m\sqrt{n}(\sqrt{mn} - 5m\sqrt{n})$
$\pi\sqrt{aR^2} \cdot \frac{5R^2}{3}\sqrt[3]{a^2R}$	$3\sqrt{cD}(\sqrt{cD} + 2\sqrt{aD})$

116. Arendada järgmised korrutised:

$$1. (\sqrt{A} + \sqrt{B})(\sqrt{A} - \sqrt{B}) \\ (3\sqrt{h} - 2\sqrt{k})(3\sqrt{h} + 2\sqrt{k}) \\ (\sqrt{ab} - 1)(\sqrt{ab} + 1)$$

$$2. (t - 2\sqrt{uv})(t + 2\sqrt{uv}) \\ \left(\sqrt{\frac{p}{2}} + \sqrt{\frac{q}{3}}\right) \left(\sqrt{\frac{p}{2}} - \sqrt{\frac{q}{3}}\right) \\ \left(1 + \frac{\sqrt{uv}}{s}\right) \left(1 - \frac{\sqrt{uv}}{s}\right)$$

§ 12. Juurvõrrandid.

Võrrandit, milles tundmatu esineb juuritavas, nimetatakse juurvõrrandiks ehk irratsionaalseks võrrandiks.

Juurvõrrandid on näiteks võrrandid

$$\sqrt{x} + \sqrt{2x} = 3$$

ja

$$\sqrt[3]{x + 50} = 4.$$

Seevastu võrrand

$$x\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{6}$$

ei ole juurvõrrand, sest tundmatu ei esine juuremärgi all. See on irratsionaalsete kordajatega ratsionaalne võrrand.

Et lahendada juurvõrrand, selleks tuleb teda enne teisendada ratsionaalseks, s. o. anda talle niisugune kuju, et üheski juuritavas ei esineks tundmatut.

Selle saavutamiseks püütakse esmalt anda võrrandile niisugune kuju, et võrrandi ühel poolel oleks üksainus juur, mille juuritav sisaldab tundmatut, ja teisel poolel oleks samuti üksainus juur või ratsionaalseist liikmeist koosnev avaldis (milles võib esineda irratsionaalseid kordajaid), nagu näiteks võrrandid

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + 8} &= 4\sqrt{x + 7}, & \sqrt{x + 4} &= 3, \\ \sqrt[3]{x} &= 2\sqrt[3]{2x - 10}, & \sqrt[3]{x^3 + 19} &= x + \sqrt[3]{2}. \end{aligned}$$

Et võrdsete arvude ruudud on võrdsed ja nende kuubid on võrdsed, siis võime iga niisuguse võrrandi asemel kirjutada uue võrrandi, mille saame, kui võrrandi mõlemad pooled astendame vastava juurijaga. Nii saame näiteina toodud võrranditest pärast astendamist ratsionaalsed võrrandid:

$$\begin{aligned} x^2 + 8 &= 16(x + 7), & x + 4 &= 9, \\ x &= 8(2x - 10), & x^3 + 19 &= (x + \sqrt[3]{2})^3, \end{aligned}$$

mille lahendamine võimaldab leida juurvõrrandi lahendid.

Allpool selgitame lähemalt juurvõrrandite lahendamise võtteid mõne näite varal. Näiteina kasutame ruut-irratsionaalseid võrrandeid kui kõige lihtsamaid ja kõige sagedamini esinevaid juurvõrrandeid. Kõrgemate, s. o. suurema juurijaga juurvõrrandite lahendamise võtted on näidatud võtetega analoogilised.

N ä i d e 1. Olgu vaja lahendada võrrand

$$x - \sqrt{x + 2} = 10.$$

Kui võrrandi vabastamiseks juurest tõstaksime ruutu selle võrrandi pooled, siis võrrandi vasakul poolel peale ratsionaalsete liikmete saaksime ka liikmete x ja $-\sqrt{x + 2}$

kahekordse korrutise; seega jääks juur $\sqrt{x+2}$ ikkagi võrrandisse püsima. Seepärast talitame nii, nagu eespool öeldud: juure viime võrrandi ühele poolele, ja kogume kõik ratsionaalsed liikmed teisele poolele; siis võrrand omandab kuju:

$$x - 10 = \sqrt{x + 2}.$$

Tõstes ruutu selle võrrandi pooled, saame juba ratsionaalse võrrandi

$$(x - 10)^2 = x + 2$$

ehk, pärast sulgude avamist ja koondamist,

$$x^2 - 21x + 98 = 0.$$

Selle võrrandi lahendid on 14 ja 7.

Asendades lähtevõrrandis tähe x ruutvõrrandi lahendiga 14, saame võrrandi vasakul poolel $14 - \sqrt{14 + 2}$ ehk 10, s. o. sama arvu, mis seisab paremal poolel. Seega ruutvõrrandi lahend 14 on ka antud juurvõrrandi lahendiks.

Tehes sedasama ruutvõrrandi teise lahendiga, arvuga 7, saame juurvõrrandi vasakul poolel $7 - \sqrt{7 + 2}$ ehk 4. Et aga paremal poolel seisab 10, siis arv 7 juurvõrrandit ei rahulda. Kuid ta rahuldab võrrandit

$$(x - 10)^2 = x + 2,$$

mille saime lähtevõrrandist pärast liikmete ümberpaigutamist ja poolte ruutimist. Asendades selles võrrandis tähe x arvuga 7, saame vasakul poolel $(7 - 10)^2$ ehk 9 ja paremal poolel $7 + 2$ ehk samuti 9.

Sellest nähtub, et lähtevõrrand ja temast poolte astendamisel saadud võrrand pole samaväärsed, s. o. mitte kõik astendamisel saadud võrrandi lahendid pole ühtlasi ka lähtevõrrandi lahenditeks. Pärast poolte ruutu tõstmist saadud võrrandi lahendite hulgas on peale lähtevõrrandi lahen-

dite veel ühe teise niisuguse võrrandi lahendid, mille poolte ruutu tõstmisel tekib sama võrrand mis lähtevõrrandist. Praegusel juhul on niisuguseks võrrandiks

$$x - 10 = -\sqrt{x + 2}.$$

Arv 7 ongi just selle võrrandi lahend: tehes selles võrrandis asenduse $x = 7$, saame vasakul poolel $7 - 10$ ehk -3 ja paremal poolel $-\sqrt{7 + 2}$ ehk samuti -3 . Lõppvõrrandi lahendit, mis ei rahulda lähtevõrrandit, nimetatakse lähtevõrrandi v õ õ r l a h e n d i k s. Arv 7 on seega antud juurvõrrandi v õ õ r l a h e n d ja selle võrrandi ainsaks tõeliseks lahendiks on 14.

Et võrrandi poolte astendamise tagajärjel võib tekkida v õ õ r l a h e n d e i d, seda näitame veel järgmise üldisema näite abil.

Olgu antud võrrand

$$x - a = 0,$$

milles ainus lahend on a . Viies võrrandi vabaliikme paremale poolele, saame võrrandi

$$x = a;$$

tõstes ruutu selle võrrandi mõlemad pooled, saame uue võrrandi

$$x^2 = a^2$$

ehk

$$x^2 - a^2 = 0.$$

Selle võrrandi võime esitada kujul

$$(x + a)(x - a) = 0,$$

millest järeldame, et peab olema

$$\text{kas } x - a = 0 \quad \text{või } x + a = 0,$$

ehk

$$\text{kas } x = a \quad \text{või } x = -a.$$

Neist kahest arvust rahuldab lähtevõrrandit ainult esimene; teine rahuldab küll teisendatud võrrandit $x^2 - a^2 = 0$, mitte aga lähtevõrrandit. Ta on võrrandi $x + a = 0$ lahend; lähtevõrrandi suhtes on ta v õ õ r l a h e n d.

Kõigest öeldust järeldub, et võrrandi teisendamisel astendamise teel võib tekkida vöörlahendeid. Seepärast

tuleb igal juhul selgitada, missugused juurvõrrandi lahendamise tulemustest rahuldavad seda võrrandit.

N ä i d e 2. Olgu antud lahendada võrrand

$$\sqrt{3x + 4} - \sqrt{x + 5} = 1,$$

milles peale ratsionaalse liikme esineb kaks ruutjuurt tundmatuga juuritavas.

Kui tõstaksime ruutu selle võrrandi mõlemad pooled, siis vasakul poolel saaksime peale ratsionaalsete liikmete ka juurte kahekordse korrutise. Et vältida selle keerulise avaldise tekkimist, teisendame võrrandit, jättes vasakule poolele ainult ühe juure, näiteks esimese:

$$\sqrt{3x + 4} = 1 + \sqrt{x + 5}.$$

Tõstes nüüd võrrandi pooled ruutu saame:

$$3x + 4 = 1 + 2\sqrt{x + 5} + x + 5$$

ehk pärast koondamist ja taandamist

$$x - 1 = \sqrt{x + 5}.$$

Tõstes uuesti mõlemad pooled ruutu, tekib juba ratsionaalne võrrand, mille koondamisel saame

$$x^2 - 3x - 4 = 0.$$

Selle võrrandi lahendid on 4 ja -1 .

Tehes lähtevõrrandis asendused $x = 4$ ja $x = -1$, veendume, et esimene neist rahuldab seda võrrandit, teine aga ei rahulda. Seega antud võrrandi ainsaks lahendiks on 4.

117. Lahendada järgmised võrrandid:

1. $\sqrt{5x} = 10$

6. $\sqrt{x^2 + 8} = \sqrt{2x^2 - 2x}$

2. $x - \sqrt{3x} = 0$

7. $\sqrt[3]{10x + 46} = \sqrt[3]{7x + 43}$

3. $\sqrt{x} - \sqrt{2} = \sqrt{3}$

8. $\sqrt{x^2 + 10x} = 12$

4. $\sqrt[3]{2x^2} = x$

9. $\sqrt{x + 6} = x$

5. $\sqrt{3x + 6} = 6$

10. $\sqrt{x^2 - 9} = \frac{4}{5}x$

118. Lahendada järgmised võrrandid:

1. $\sqrt{x + 8} = x + 2$

6. $\sqrt{2x} - x = 4$

2. $\sqrt{x + 8} = -x - 2$

7. $4x + 2\sqrt{5 - 4x} = 5$

3. $\sqrt{x^2 + 16} + x = 8$

8. $2a - \sqrt{x^2 - 8a} = 1$

4. $2\sqrt{x^2 + 11} - 7 = x$

9. $a^2 - nx = n\sqrt{x^2 + a^2}$

5. $\sqrt{5x + 10} + x = 8$

10. $x + \sqrt{x(x - 4a)} = 5a$

119. Lahendada järgmised võrrandid:

1. $\sqrt{8x} - \sqrt{2x} = 2$

4. $\sqrt{x} + \sqrt{6x} = 5$

2. $\sqrt{5x} + 2\sqrt{x} = 12$

5. $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2x} = 1$

3. $\sqrt{x} + \sqrt{7x} = 4x$

6. $\sqrt{x} + \sqrt{2x} + \sqrt{3x} = 10$

120. Lahendada järgmised võrrandid:

1. $\sqrt{x - 5} - \sqrt{x} + 1 = 0$

2. $\sqrt{x} - \sqrt{x - 28} = 2$

3. $\sqrt{x + 1} + \sqrt{x} = \sqrt{6}$

4. $\sqrt{x + 7} = \sqrt{x} + \sqrt{5}$

5. $\sqrt{x+13} - \sqrt{3x} = 1$
6. $3\sqrt{x-2} - \sqrt{x+5} = 5$
7. $\sqrt{2x} + \sqrt{6x-4} - 2 = 0$
8. $\sqrt{x-a} + \sqrt{x-b} = \sqrt{a-b}$
9. $\sqrt{a^2+x} + \sqrt{b^2-x} = a+b$
10. $\sqrt{x} + \sqrt{3x-a} = \sqrt{a}$

121. Lahendada järgmised võrrandid:

1. $2\sqrt{x} = \sqrt{x-3} + \sqrt{2x+1}$
2. $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} = \sqrt{x+2}$
3. $\sqrt{1+3x} + \sqrt{1-3x} - \sqrt{6x} = 0$
4. $\sqrt{3x+3} + \sqrt{\frac{1}{3}x} - \sqrt{\frac{x}{3}+7} = 0$
5. $\sqrt{x-2} - \sqrt{6x-11} + \sqrt{x+3} = 0$
6. $3\sqrt{x+4} - 2\sqrt{x+9} = 6\sqrt{x+1}$

122. Lahendada järgmised võrrandid:

1. $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = 4$
2. $\sqrt{\frac{2}{x}} - \sqrt{\frac{x}{2}} = 1$
3. $\frac{x-1}{1+\sqrt{x}} = 4 - \frac{1-\sqrt{x}}{2}$
4. $\sqrt{5x} - \frac{4}{\sqrt{3x+1}} = \sqrt{3x+1}$
5. $\frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} = \frac{3}{2}$
6. $\frac{1}{\sqrt{x+3}} + \frac{2}{\sqrt{x^2-9}} - \frac{1}{\sqrt{x-3}} = 0$

123. Täisnurkse kolmnurga hüpotenuus on 1 cm võrra pikem kui üks kaatetest ja kolmnurga übermõõt on 56 cm. Leida kolmnurga küljed.

124. Täisnurkse kolmnurga kaatete vahe on 7 cm ja kolmnurga übermõõt on 30 cm. Leida kolmnurga küljed.

125. Kolmnurga kahe külje suhe on 5 : 8, kolmas külg on 39 cm ja sellele tõmmatud kõrgus on 24 cm. Leida kolmnurga esimesed kaks külge.

Peatükk IV.

NEGATIIVSETE JA MURRULISTE ASTENDAJATEGA ASTMED.

§ 13. Negatiivsete täisarvuliste astendajatega astmed.

Olgu a mingi arv ja m ning n kaks positiivset täisarvu. Me teame, et siis

$$a^m : a^n = a^{m-n}, \text{ kui } m > n$$

ja

$$a^m : a^n = 1, \text{ kui } m = n.$$

Kui $m < n$, kirjutame astmete jagatise murru kujul ja taandame selle murru arvuga a^m :

$$a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = \frac{a^m : a^m}{a^n : a^m} = \frac{1}{a^{n-m}};$$

seega

$$a^m : a^n = \frac{1}{a^{n-m}}, \text{ kui } m < n.$$

Selleks, et kõik need kolm juhtu avaldada üheainsa võrdusega, laiendame astme mõistet. Kirjutame nimelt igal juhul, see on, ka siis, kui $m = n$ või $m < n$, et

$$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

Kui $m = n$, seisab vasakul pool võrdusmärki kahe võrdse arvu jagatis ja paremal pool sümbol a^0 . Viimasel ei ole astme definitsiooni järgi mõtet: ei ole võimalik võtta arvu a null korda tegurina. Et kahe võrdse arvu jagatis on 1, siis tuleb sümbolit a^0 mõista arvuna 1:

$$a^0 = 1.$$

Nii on

$$7^0 = 1 \quad (-9)^0 = 1 \quad \left(\frac{5}{8}\right)^0 = 1.$$

Võrdust $a^0 = 1$ loetakse õigeaks ainult siis, kui $a \neq 0$; aga 0^0 jäetakse ilma arvu tähenduseta.

Kui $m < n$, siis ülalantud võrduse vasak pool $a^m : a^n$ kujutab murdu $\frac{1}{a^{n-m}}$; sellesama võrduse parema poole a^{m-n} võime kirjutada kujul $a^{-(n-m)}$. Ka sellel sümbolil kui negatiivse astendajaga astmel pole astme definitsiooni järgi mõtet, kuid ülalantud võrduse järgi tähendab ta murdu lugejaga 1:

$$a^{-(n-m)} = \frac{1}{a^{n-m}}.$$

Tähistades vahet $n - m$ üheainsa tähega r , näeme, et

$$a^{-r} = \frac{1}{a^r}.$$

Nii on

$$4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$$

ja

$$\left(2\frac{1}{2}\right)^{-1} = \left(\frac{5}{2}\right)^{-1} = 1 : \frac{5}{2} = \frac{2}{5}.$$

Saab näidata, et tehted astmetega toimuvad ühtede ning samade teoreemide järgi, olenemata sellest, kas astendajad on positiivsed või negatiivsed täisarvud.

Näiteks on

$$a^{-m} \cdot a^{-n} = a^{-m + (-n)} = a^{-m-n}.$$

Tõepoolest,

$$a^{-m} \cdot a^{-n} = \frac{1}{a^m} \cdot \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^{m+n}} = a^{-(m+n)} = a^{-m-n}.$$

$$(a^{-m})^n = a^{-mn}.$$

Tõepoolest,

$$(a^{-m})^n = \left(\frac{1}{a^m}\right)^n = \frac{1}{(a^m)^n} = \frac{1}{a^{mn}} = a^{-mn}.$$

Iga avaldist, milles esineb negatiivseid astendajaid, saame murrujoone abiksvõtmisel kirjutada nii, et esineksid vaid positiivsed astendajad. Näiteks

$$n^2 x^3 \cdot \frac{2}{5} n^{-3} x^{-2} = \frac{2}{5} n^{-1} x = \frac{2x}{5n}.$$

Ülesanded.

126. Arvutada järgmiste avaldiste väärtused:

1. 3^{-2}	2. 6^{-2}	3. 2^{-5}	4. 10^{-7}
$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$	$\left(\frac{3}{4}\right)^{-3}$	$\left(1\frac{3}{5}\right)^{-2}$	$\left(3\frac{1}{3}\right)^{-3}$
$1,7^{-2}$	$0,9^{-1}$	$2,4^{-3}$	$3,6^{-2}$
$4^0 \cdot 5^{-2}$	$2^5 \cdot 3^{-4}$	$(-1)^4 \cdot 8^{-2}$	$(-4)^{-1} \cdot 10^{-3}$
$\left(\frac{3}{8}\right)^{-1} \cdot 2^{-3}$	$\left(-\frac{16}{7}\right)^{-2} \cdot 4^4$	$\left(\frac{7}{12}\right)^{-2} \cdot 6^0$	$(-0,2)^{-5} \cdot 10^3$

127. Kirjutada järgmised murrud nimetajaist vabade avaldistena:

1. $\frac{1}{a^2}$	2. $\frac{1}{x^3}$	3. $\frac{1}{m}$	4. $\frac{1}{u^5}$
$\frac{2}{n^3}$	$\frac{4}{v}$	$\frac{5}{N^6}$	$\frac{a}{b^4}$
$\frac{1}{ab^3}$	$\frac{1}{2x^3}$	$\frac{u}{3v^4}$	$\frac{m}{p^2q^5}$
$\frac{0,7}{cx^2}$	$\frac{5a}{z^3}$	$\frac{9a}{8b^2u^3}$	$\frac{8}{10c^2u^4}$
$\frac{100}{\pi D^2}$	$\frac{3c^3}{10gh^2}$	$\frac{0,2p}{q^2r^3}$	$\frac{7s^3}{23rh^2}$

128. Kirjutada järgmised avaldised nõnda, et neis esineksid ainult positiivsed astendajad:

1. a^{-1}	2. $3b^0$	3. $2^{-1}c^{-1}$
N^{-2}	$5u^{-3}$	$7^{-1}m^{-2}$
$4h^{-3}$	$8ab^{-2}$	$0,9a^{-2}x^{-3}$
$\frac{3^0}{x^{-4}}$	$\frac{m}{2n^{-3}}$	$\frac{4a}{5bc^{-2}}$
$\frac{7a^{-1}}{N^{-2}u^{-3}}$	$\frac{m^{-2}n^{-3}}{15p^{-2}}$	$\frac{7au^{-5}}{3a^{-3}u^0}$

129. Kasutades arvu 10 astmeid avaldada:

- | | |
|--------------------------|-------------------------------|
| 1. 1 km meetrites | 2. l m millimeetrites |
| 1 mm sentimeetrites | a cm meetrites |
| 1 kg milligrammides | s m ² aarides |
| 0,7 ha ruutmeetrites | V cm ³ liitrites |
| 1,4 l kuupsentimeetrites | P g tonnides |

130. Arvutada järgmiste avaldiste väärtused:

1. $7^3 \cdot 7^{-4}$	2. $3 \cdot 5^6 \cdot 5^{-8}$	3. $7,2 \cdot 10^3 \cdot 2,5 \cdot 10^{-4}$
$5^3 : 5^{-1}$	$2 \cdot 10^6 : 10^{-6}$	$3,43 \cdot 10^{-6} : (0,49 \cdot 10^{-8})$
$4^5 \cdot 4^{-3}$	$5,7 \cdot 9^{-3} : 9^0$	$8 \cdot 10^{-9} \cdot 0,125 \cdot 10^{12}$
$3^{-6} : 3^{-4}$	$10^4 : (5 \cdot 10^{-2})$	$1,74 \cdot 10^{-2} \cdot 5 \cdot 10^0$
$10^{-4} : 10^{-7}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^0 : (2 \cdot 10^{-3})$	$2,25 \cdot 10^{-1} \cdot 4 \cdot 10^3$

131. Kirjutada järgmised arvud kümne astme kordsetena:

1. 70	900	3. 1400	4. 1750 000
$\frac{9}{10}$	$\frac{13}{100}$	$\frac{325}{1000}$	$\frac{283}{10000}$
$\frac{11}{20}$	$\frac{7}{500}$	$\frac{15}{4000}$	$\frac{112}{500000}$
0,72	3,2	1,11	0,033
0,025	1,375	5,0081	0,000 765

132. Teostada järgmised tehted ja kirjutada tulemus, kasutades vaid positiivseid astendajaid:

1. $a^5 : a^0$	2. $n^0 : n^2$	3. $5a^{-4}x^2 : a^2$
$c^0 \cdot u^{-3}$	$10p^{-5} \cdot 0,2p^8$	$3a^0b^{-2} \cdot \frac{2}{3} b^{-3}$
$g^0 \cdot f^0$	$\frac{3}{2} u^3 : 6u^{-2}$	$4n^2x^2 : 5n^6x^{-3}$
$h^{10} : (-h)^0$	$8,5q^{-3} : 1,5q^{-5}$	$10c^2D^{-2} : 0,7c^{-1}D^{-2}$
$3m^5 \cdot (-n)^{-1}$	$12,1N^{-4} \cdot 0,1N^7$	$f^0g^1h^2 \cdot \frac{7}{18} f^{-2}g^{-1}h^0$

133. Lihtsustada järgmised avaldised ja teisendada tulemused nõnda, et neis esineksid üksnes positiivsed astendajad:

1. $(N^{-2})^2$	2. $(\frac{1}{2} m^3)^{-2}$	3. $(0,1a^2x^{-1})^2$
$(a^{-1})^{-3}$	$(0,3h^{-2})^{-1}$	$(1,2H \cdot 5H)^{-2}$
$(cu^{-2})^{-2}$	$(3ax^4)^{-3}$	$(\frac{1}{2} x^{-1} \cdot 3x^{-2})^{-4}$
$(2Q^{-3})^{-2}$	$(\frac{4}{5} c^2u^{-3})^{-2}$	$(\frac{7}{22} R^{-2}h^{-1})^{-2}$
$[(-a)^2]^{-2}$	$[(-3u)^{-1}]^{-2}$	$[(-0,1f)^{-2}]^{-3}$

§ 14. Murruliste astendajatega astmed.

Olgu a mingi positiivne arv ja m ning n kaks positiivset täisarvu. Astme juurimise teoreemi järgi

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}},$$

kui arv m on arvu n kordne. Astendaja $\frac{m}{n}$ on siis täisarv.

Sel puhul sümbol $a^{\frac{m}{n}}$ tähendab $\frac{m}{n}$ teguri korrutist, milles kõik tegurid on võrdsed arvuga a .

Sümbolil $a^{\frac{m}{n}}$ pole esiotsa mingit mõtet, kui $\frac{m}{n}$ on m u r d a r v: ei ole ju võimalik võtta arvu a tegurina murdarv

korda. Et saada sellele sümboolile mõtet ka siis, kui $\frac{m}{n}$ on murdarv, lepime kokku, et iga juurt $\sqrt[n]{a^m}$ võib kirjutada kujul $a^{\frac{m}{n}}$; seega igal juhul

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}.$$

Selle kokkuleppe kohaselt

$$49^{\frac{1}{2}} = \sqrt{49} = 7,$$

$$27^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(27)^2} = \left(\sqrt[3]{27}\right)^2 = 3^2 = 9,$$

$$125^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{125^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{125}} = \frac{1}{5}.$$

Saab näidata, et kõik tehted astmetega toimuvad ühtede ja samade teoreemide järgi, olenemata sellest, kas astendajad on täis- või murdarvud.

Näiteks on

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}}.$$

Tõepoolest,

$$\begin{aligned} a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} &= \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq}} \cdot \sqrt[nq]{a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq+np}} = \\ &= a^{\frac{mq+np}{nq}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}}. \end{aligned}$$

Iga avaldist, milles esineb murrulisi astendajaid, saab kirjutada juuremärgi abiksvõtmisel nii, et esineksid vaid täisarvulised astendajad.

N ä i d e.

$$\left(x^{-\frac{5}{6}}\right)^{\frac{2}{5}} = x^{\frac{5 \cdot 2}{6 \cdot 5}} = x^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}.$$

134. Leida järgmiste sümbolite väärtused:

1.	$9^{\frac{1}{2}}$	2.	$16^{\frac{3}{2}}$	3.	$27^{\frac{1}{3}}$	4.	$64^{\frac{2}{3}}$
	$125^{\frac{2}{3}}$		$169^{\frac{5}{2}}$		$216^{\frac{2}{3}}$		$121^{\frac{3}{2}}$
	$1,44^{\frac{1}{2}}$		$0,001^{\frac{5}{3}}$		$0,343^{\frac{4}{3}}$		$0,729^{\frac{2}{3}}$
	$\left(\frac{16}{9}\right)^{\frac{3}{2}}$		$\left(\frac{25}{49}\right)^{\frac{1}{2}}$		$\left(\frac{27}{64}\right)^{\frac{2}{3}}$		$\left(\frac{1}{512}\right)^{\frac{4}{3}}$

135. Kirjutada järgmised avaldised juuremärgi kasutamata:

1.	\sqrt{N}	2.	$\sqrt[3]{u}$	3.	$\sqrt{x^3}$	4.	$\sqrt[3]{h^2}$
	$\sqrt{5x}$		$\sqrt[3]{7c^2}$		$0,1\sqrt{D^2}$		$\sqrt[5]{(3cu)^3}$
	$\sqrt{cn^3}$		$\sqrt[4]{AVa^2}$		$u\sqrt{u^3}$		$\sqrt{ab^2c^3}$
	$0,7\sqrt[5]{a^2b^3}$		$\frac{3}{4}\sqrt[4]{H^2u^4}$		$\frac{1}{2}x\sqrt[3]{N^4x}$		$\sqrt[5]{A^3x^5}$
	$\sqrt[3]{\frac{1}{a^2}}$		$\frac{1}{5\sqrt{k}}$		$\frac{1}{\sqrt[5]{u^2}}$		$\sqrt[3]{\frac{m}{n^2}}$

136. Kirjutada järgmised avaldised juurtena:

1.	$19^{\frac{1}{2}}$	2.	$7^{\frac{1}{2}}$	3.	$83^{\frac{1}{4}}$	4.	$100^{\frac{1}{5}}$
	$1,3^{\frac{3}{2}}$		$0,58^{\frac{2}{3}}$		$9,2^{\frac{3}{4}}$		$0,06^{\frac{4}{5}}$
	$N^{\frac{1}{3}}$		$u^{\frac{4}{3}}$		$a^{\frac{3}{5}}$		$x^{\frac{5}{2}}$
	$(2h)^{\frac{4}{3}}$		$\left(\frac{m}{2}\right)^{\frac{5}{3}}$		$(10f)^{0,1}$		$(mn^2)^{0,3}$
	$aI^{0,5}$		$3QR^{2,4}$		$c\left(\frac{G}{H}\right)^{1,5}$		$m\left(\frac{ax^2}{n}\right)^{0,7}$

137. Kirjutada järgmised avaldised juuremärki kasutamata:

1. $\sqrt[3]{a^{-2}}$	2. $\sqrt[5]{x^{-3}}$	3. $\sqrt[4]{N^{-5}}$	4. $\sqrt[4]{c^{-1}d^{-3}}$
$\frac{1}{\sqrt{H^3}}$	$\frac{a}{\sqrt[3]{b^2}}$	$\frac{5}{\sqrt{2px}}$	$\frac{7}{10\sqrt[3]{mn^2}}$
$\sqrt[5]{\left(\frac{2}{N}\right)^3}$	$\sqrt[3]{\frac{u^3}{v^2}}$	$\sqrt[3]{\frac{a^2}{cx}}$	$\sqrt[4]{\frac{\pi D^2}{S^3}}$
$\frac{a}{\sqrt{a+bx}}$	$\sqrt{\frac{b}{a+bx}}$	$\frac{\sqrt{(a+bx)^3}}{a}$	$\frac{\sqrt[3]{a-b}}{\sqrt{(a+bx)^3}}$

138. Kirjutada järgmised avaldised, kasutamata negatiivseid ja murrulisi astendajaid:

1. $27^{-\frac{2}{3}}$	2. $36^{-\frac{1}{2}}$	3. $8^{-\frac{4}{3}}$	4. $64^{-\frac{3}{4}}$
$0,343^{-\frac{1}{3}}$	$0,01^{-\frac{1}{2}}$	$0,0016^{-\frac{3}{4}}$	$0,0169^{-\frac{3}{2}}$
$\left(\frac{25}{64}\right)^{-\frac{1}{2}}$	$\left(\frac{1}{121}\right)^{-\frac{3}{2}}$	$\left(\frac{216}{125}\right)^{-\frac{2}{3}}$	$\left(\frac{625}{256}\right)^{-\frac{3}{4}}$
$7D^{-\frac{3}{2}}$	$(2S)^{-\frac{2}{3}}$	$(a^2v)^{-\frac{4}{3}}$	$(\pi R^2 H)^{-\frac{5}{3}}$
$3a^{-\frac{3}{4}}f^{-\frac{3}{4}}$	$\left(\frac{3c}{x}\right)^{-\frac{3}{2}}$	$(5kw^3)^{-\frac{1}{3}}$	$\left(\frac{22}{7}ah^3\right)^{-\frac{2}{3}}$

139. Kirjutada järgmised avaldised võimalikult lihtsate astmetena:

1. $a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}}$	2. $d^{\frac{1}{2}} \cdot d^{\frac{1}{3}}$	3. $f^{\frac{1}{3}} \cdot f^{\frac{2}{3}}$	4. $h^0 \cdot h^{\frac{3}{4}}$
$N^{\frac{1}{2}} \cdot N^{-\frac{1}{4}}$	$u \cdot u^{-\frac{2}{3}}$	$p^{-\frac{1}{2}} \cdot p^0$	$x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{-\frac{1}{2}}$
$x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{3}{4}}$	$l^0 \cdot l^{-\frac{3}{2}}$	$D^{\frac{1}{3}} \cdot D^{-\frac{3}{4}}$	$c^{-\frac{1}{2}} \cdot c^{-\frac{2}{3}}$

140. Kirjutada järgmised avaldised võimalikult lihtsate astmetena:

$$\begin{array}{llll}
 1. & A : A^{\frac{1}{2}} & 2. & c^2 : c^{\frac{1}{3}} & 3. & x^{\frac{2}{3}} : x^{\frac{3}{2}} & 4. & a^{\frac{3}{5}} : a^{\frac{2}{3}} \\
 & c^2 : c^{-\frac{1}{3}} & & f^{\frac{5}{6}} : f^{\frac{1}{2}} & & h^{\frac{3}{4}} : h^{\frac{2}{3}} & & u^{\frac{2}{3}} : u^{-2} \\
 & N^{-1} : N^{\frac{3}{2}} & & z^{\frac{4}{5}} : z^{-1} & & q^0 : q^{-\frac{1}{2}} & & l^{\frac{2}{3}} : l^{-\frac{5}{6}}
 \end{array}$$

141. Kirjutada järgmised avaldised juuremärki kasutamata, toimetada nõutavad tehted ja anda tulemus juure kujul:

$$\begin{array}{lll}
 1. & \sqrt[3]{N} \cdot \sqrt{N} & 2. & \sqrt[3]{A^2} : \sqrt{A^3} & 3. & \sqrt{x} \cdot \sqrt[4]{x} \\
 & \sqrt[3]{u} \cdot \sqrt[4]{u^2} & & \sqrt[3]{c^3} : \sqrt[4]{c} & & \sqrt{3x} \cdot \sqrt[3]{9x^2} \\
 & \sqrt[3]{D^2} \cdot \sqrt{D^3} & & \sqrt[3]{h^4} : \sqrt{h} & & \sqrt[4]{a^3x^2} : \sqrt[3]{a^2x^2}
 \end{array}$$

142. Kirjutada järgmised avaldised, kasutades ainult positiivseid täisarvulisi astendajaid:

$$\begin{array}{llll}
 1. & (x^0)^{\frac{1}{2}} & 2. & (h^2)^{\frac{3}{2}} & 3. & (u^{-1})^{\frac{2}{3}} & 4. & (D^{-1})^{-\frac{1}{2}} \\
 & (a^{\frac{2}{3}})^3 & & (N^{-1})^{\frac{2}{3}} & & (c^{-2})^{-\frac{1}{3}} & & (x^{-\frac{1}{3}})^6 \\
 & (I^{-\frac{3}{4}})^{-\frac{4}{3}} & & (u^{-\frac{1}{2}})^9 & & (F^8)^{\frac{3}{4}} & & (c^0)^0 \\
 & N^{\frac{2}{3}} \cdot N^{\frac{3}{5}} & & (2u^{\frac{3}{4}})^4 & & x : x^{-\frac{3}{4}} & & H^2 : H^{\frac{2}{3}} \\
 & \frac{(4D^2)^{\frac{3}{2}}}{(3D^3)^{\frac{2}{3}}} & & \frac{(a^{-3})^{\frac{1}{3}}}{(8b)^{-\frac{2}{3}}} & & \left(\frac{a^{\frac{5}{6}}}{a^{\frac{1}{3}}} \right)^4 & & \left(\frac{x^{\frac{1}{6}}}{x^{\frac{1}{2}}} \right)^9
 \end{array}$$

KORDAMISÜLESANDED.

143. Lahendada järgmised võrrandid:

1. $\frac{9}{9x^2 + x - 3} = \frac{4}{4x^2 - 5x + 15}$
2. $\frac{3}{3y^2 + 2y + 1} = \frac{7}{7y^2 - 2y + 9}$
3. $\frac{7}{x + 4} + \frac{5}{x - 5} = \frac{11x - 13}{x^2 - x - 20}$
4. $\frac{4}{y + 2} + \frac{3}{y - 7} = \frac{3(y + 1)}{y^2 - 5y - 14}$
5. $\frac{6x + 4}{3x - 2} + \frac{4x - 3}{6x^2 - 5x - 6} = \frac{4x - 5}{2x - 3}$
6. $\frac{5}{4x + 5} + \frac{31}{8x^2 - 18x - 35} = \frac{2}{2x - 7}$
7. $\frac{5}{3x - 4} - \frac{11x + 14}{9x^2 - 16} = \frac{7}{3x + 4}$
8. $\frac{3}{x + 3} + \frac{2}{x - 3} = \frac{x + 5}{x^2 - 9}$

144. Lahendada järgmised võrrandid:

1. $\frac{5}{x + a} = \frac{3}{a - x} + \frac{2x}{x^2 - a^2}$
2. $\frac{y}{4a - 3} + \frac{y}{4a + 3} = \frac{4a}{16a^2 - 9}$
3. $\frac{1}{px - pq} + \frac{1}{px - pr} = \frac{1}{qx - qr} + \frac{1}{qx - q^2}$
4. $\frac{y}{(m - n)n} - \frac{y}{(m - n)m} = \frac{m + n}{mn}$
5. $\frac{x}{m - 4} + 5 = m + \frac{8}{m + 4} - \frac{y}{16 - m^2}$

145. Lahendada järgmised võrrandid:

1. $(3x - 2)(4x - 3) = 0$
2. $(x - 9)(x + 9) = 0$

3. $(3x - 2)^2 = 0$
4. $(x + 11)^2 = 0$
5. $(6x - 1)^2 = 4$
6. $(x - 6)^2 = 9$
7. $\frac{7}{5x} - \frac{1}{2x} = \frac{x-7}{20}$
8. $\frac{2x+11}{4} = \frac{x-7}{2} + x^2$
9. $\frac{x^2+2}{2} = \frac{x(x+1)}{3} + \frac{x+3}{4}$
10. $\frac{x+2}{x+3} = 2 + \frac{x+4}{x-3}$

146. Lahendada järgmised võrrandid:

1. $\frac{3}{x+3} + \frac{4}{x-3} = \frac{4x-3}{x^2-9}$
2. $\frac{3}{(x+1)(x+3)} = \frac{5}{(x+3)(2x+3)}$
3. $\frac{x+1}{(x-3)(x+2)} = \frac{x+2}{(x-3)(x+4)}$
4. $\frac{x-5}{2x^2+x-1} = \frac{x-6}{2x^2+3x-2}$
5. $\frac{x-1}{2x-5} + \frac{2x-1}{2x+5} = \frac{3(x-2)}{4x^2-25}$
6. $\frac{x^2}{x^3-1} = \frac{1}{x^2+x+1} + \frac{1}{x-1}$
7. $\frac{1}{x^2-1} + \frac{x+4}{x^3+1} = \frac{3}{x^2-x+1}$
8. $\frac{5(x+1)}{2x+1} = \frac{2x+3}{x} + \frac{x^2+6}{2x^2+x}$

147. Lahendada järgmised võrrandid:

1. $\frac{x+1}{3} + \frac{3(x-1)}{4} = (x-3)^2 + 1$
2. $\frac{x(x-9)}{18} + \frac{(x-12)^2}{6} - \frac{x}{9} = 5 + \frac{(x-14)^2}{2}$

$$3. \frac{x^2 - 30x + 200}{10} = \frac{(34 - x)(40 - x)}{2} + \frac{(x - 30)(5 - x)}{3}$$

$$4. \frac{6}{x^2 - 1} - \frac{2}{x - 1} = 2 - \frac{x + 4}{x + 1}$$

$$5. \frac{x + 1}{x - 1} + \frac{x + 2}{x - 2} = \frac{2x + 13}{x + 1}$$

148. Lahendada järgmised võrrandid:

$$1. x^2 - 2cx + (c^2 - d^2) = 0$$

$$2. x^2 - (a - b)x - ab = 0$$

$$3. x^2 - (h + 2k)x + k(h + k) = 0$$

$$4. \frac{n}{x} + \frac{n - 1}{x - 2} = 1$$

$$5. \frac{1}{x + m} + \frac{1}{x - m} = \frac{4}{3m}$$

$$6. \frac{x + n}{x - n} + \frac{x - n}{x + n} = \frac{7}{12}$$

149. Üks kaatet on 120 cm pikk, teine 80 cm lühem kui hüpotenuus. Kui pikk on hüpotenuus?

150. Pool rombi pikemast diagonaalist on 2 cm lühem kui rombi külge; lühem diagonaal on 12 cm pikk. Kui pikk on külge?

151. Ruudukujulise tiigi keskpaigas kasvab pilliroog, mille veepealne osa on 1 jalg pikk. Kui selle roo tipp tõm-mati tiigi külje keskkoha, puudutas tipp parajasti veepinda. Tiigi külje pikkus on 10 jalga. Eeldades, et pilliroog jäi sir-geks, leida, kui sügav on tiik. (T s i n K i u T š a o n, umbes 2600 a. e. m. a.).

152. Oja ääres, mille laius on 4 m, kasvas pappel. Torm on ta murdnud 3 jala kõrguselt, nii et latv just üle oja teisele kaldale ulatab. Kui kõrge oli pappel? (B h a s k a r a, umbes a. 1150.)

153. Kas on olemas kolm järjestikulist paarisarvu, mis võiksid olla täisnurkse kolmnurga külgede mõõtarmudeks?

154. Täisnurkse kolmnurga hüpotenuus on 25 cm; üks kaatet on teisest 17 cm võrra pikem. Kui pikk on lühem kaatet?

155. Mitu punkti, milledest ükski kolmik ei asetse sirgjoonel, määravad

1. 351 sirgjoont?

2. 465 „

156. Võrdhaarse kolmnurga kõrgus on h cm; aluse ja haara summa on s cm. Kui pikk on haar?

1. $h = 24$; $s = 39$;

2. $h = 40$; $s = 59$.

157. Reisija kavatseb matkata 1200 km. Kui ta iga päev matkab 10 km vähem kui kavatsetud, siis kestab reis 6 päeva rohkem kui kavatsetud. Mitu km kavatses ta matkata iga päev?

158. Veepaak täitub kahe avatud kraani kaudu m minutiga. Esimene kraan üksi täidab veepaagi t minuti võrra kiiremini kui teine kraan. Mitme minutiga täitub veepaak, kui esimene kraan on üksi avatud?

1. $m = 9$; $t = 24$

2. $m = 10$; $t = 48$.

159. Lahendada järgmised võrrandsüsteemid:

1.
$$\begin{cases} 2y^2 = 9x \\ 3x - 5y + 9 = 0 \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 6x - 4y = 12 \\ x + 3y + 2 = 0 \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 20x - 16y + 139 = 0 \\ 4x - 3y - 16 = 0 \end{cases}$$

4.
$$\begin{cases} x + y = 7 \\ (x + 3)(y + 4) = 48 \end{cases}$$
5.
$$\begin{cases} x - y = 5 \\ (x + 5)(y + 8) = 168 \end{cases}$$
6.
$$\begin{cases} (x + y)^2 - (x - y)^2 = 36 \\ x^2 + 3xy + y^2 = 109 \end{cases}$$
7.
$$\begin{cases} (x + y)^2 - (x - y)^2 = 96 \\ x^2 - 3xy + y^2 = 1 \end{cases}$$
8.
$$\begin{cases} (x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 45 \\ (x + 1) + (y + 2) = 9 \end{cases}$$
9.
$$\begin{cases} (x + 3)^2 + (y + 5)^2 = 136 \\ (x + 3) - (y + 5) = 4 \end{cases}$$
10.
$$\begin{cases} 5x^2 - 8xy + 3y^2 - 2x + 9y = 320 \\ x : y = 7 : 4 \end{cases}$$
11.
$$\begin{cases} 9x^2 - 12xy - 7y^2 - 15x + 12y = 206 \\ \frac{x + y}{x - y} = \frac{7}{3} \end{cases}$$

160. Lahendada järgmised võrrandsüsteemid:

1.
$$\begin{cases} (x + y)^2 - (x - y)^2 = 4(a - b)^2 \\ x + xy + y = (a - b)^2 + 2(a - b) \end{cases}$$
2.
$$\begin{cases} (x + y)^2 - (x - y)^2 = 4(a + b)^2 \\ x + xy - y = a^2 + 2ab + b^2 \end{cases}$$
3.
$$\begin{cases} (x + y)^2 - (x - y)^2 = 4(a^2 - b^2) \\ x^2 + 3xy + y^2 = 5a^2 - b^2 \end{cases}$$
4.
$$\begin{cases} x(x + 1) + y(y - 1) = 2(a^2 + b + b^2) \\ x - y = 2b \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x(x+a) + y(y+a) = 36a^2 \\ x+y = 7a \end{cases}$$

161. Ristküliku diagonaali pikkus on d cm; tema pindala on S cm². Kui pikad on küljed?

1. $d = 17$; $S = 120$;
2. $d = 109$; $S = 5460$.

162. Täisnurkse kolmnurga hüpotenuusi pikkus on c cm; pindala on S cm². Kui pikad on kaatetid?

1. $c = 13$; $S = 30$;
2. $c = 89$; $S = 1560$.

163. Võrdhaarse kolmnurga haara pikkus on b cm; tema pindala on S cm². Arvutada alus ja kõrgus.

1. $b = 25$; $S = 168$;
2. $b = 4,49$; $S = 9,828$.

164. Vankri esiratas teeb 240-meetrilisel teel 20 pööret rohkem kui tagumine ratas. Kui kummagi ratta ümbermõõt oleks 1 m võrra pikem, siis teeks esimene ratas samal teel 12 pööret rohkem kui tagumine ratas.

Leida kummagi ratta ümbermõõt.

165. Arendada järgmiste hulkliikmete ruudud:

1. $(1 - a + 2a^2)^2$
2. $\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2}\right)^2$
3. $\left(2x^3 - \frac{x^2}{2} + x - 4\right)^2$
4. $\left(a^3 - \frac{2a^2}{3} - \frac{a}{2} - 6\right)^2$

166. Lihtsustada järgmised avaldised:

$$\begin{array}{ll}
 1. \quad \left(\frac{2}{3}a^2\right)^3 \cdot \left(-\frac{3}{4a^2}\right)^2 & 3. \quad \left(\frac{2u}{v}\right) \cdot \left(\frac{3v}{2u}\right)^3 \\
 2. \quad \left(\frac{4x^3}{y^2}\right)^2 : \left(-\frac{2x}{y}\right)^3 & 4. \quad \left(\frac{5c^2}{2d}\right)^{n+1} : \left(-\frac{5c^2}{2d}\right)^{n+1}
 \end{array}$$

167. Lihtsustada järgmised avaldised:

$$\begin{array}{lll}
 1. \quad \sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[4]{32} & 2. \quad \sqrt[4]{a^{-13}} : \sqrt[4]{a^{-1}} & 3. \quad \sqrt[n]{a^{-3n}b^{2n}} \\
 \sqrt[3]{750} : \sqrt[3]{6} & \sqrt[3]{a^{3n+3}} : \sqrt[3]{a^{n+3}} & \sqrt[5]{-a^{16}} : \sqrt[5]{a}
 \end{array}$$

168. Lihtsustada järgmised avaldised:

$$\begin{array}{ll}
 1. \quad \sqrt[3]{\frac{27a^3}{64}} + 2\sqrt[4]{\frac{81b^8}{16}} & 2. \quad \left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}}\right) : \left(\frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{a}}\right) \\
 (\sqrt{2} + \sqrt[4]{2})(\sqrt{2} - \sqrt[4]{2}) & \frac{\sqrt{m^2p - m^2q} - \sqrt{n^2p - n^2q}}{\sqrt{p - q}}
 \end{array}$$

169. Vabastada järgmiste murdude nimetajad irratsionaalseist arvudest:

$$\begin{array}{lll}
 1. \quad \frac{3}{\sqrt{2}} & 2. \quad \frac{1}{\sqrt{5+1}} & 3. \quad \frac{8-3\sqrt{2}}{8+3\sqrt{2}} \\
 \frac{1}{\sqrt[3]{25}} & \frac{12}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} & \frac{2\sqrt{2} + 5\sqrt{5}}{2\sqrt{2} - 5\sqrt{5}}
 \end{array}$$

170. Lihtsustada järgmised avaldised:

$$\begin{array}{llll}
 1. \quad \frac{3}{\sqrt{3}} & 2. \quad \frac{16}{\sqrt{8}} & 3. \quad \frac{21}{\sqrt{7}} & 4. \quad \frac{30}{\sqrt{25}} \\
 \frac{h}{\sqrt[3]{h}} & \frac{a}{b\sqrt{a^2}} & \frac{c^2}{a\sqrt{c}} & \frac{x}{\sqrt{x^2}}
 \end{array}$$

171. Lihtsustada järgmised juured ning leida nende väärtused ruut- ja kuupjuurte tabelite abil:

$$\begin{array}{llll}
 1. \sqrt{\frac{2}{25}} & 2. \sqrt[3]{\frac{3}{8}} & 3. \sqrt[4]{\frac{10}{81}} & 4. \sqrt[4]{\frac{1}{625}} \\
 \sqrt{\frac{9}{5}} & \sqrt[3]{\frac{27}{6}} & \sqrt[3]{\frac{1}{4 \cdot 2}} & \sqrt[3]{\frac{1}{9 \cdot 64}}
 \end{array}$$

172. Kirjutada järgmised avaldised võimalikult lihtsate juurte abil ja koondada:

$$\begin{array}{l}
 1. \sqrt{11\frac{1}{4}} - \sqrt{20} - 5\sqrt{\frac{1}{18}} - \frac{1}{6}\sqrt{245} - \sqrt{24\frac{1}{2}} \\
 2. \sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{\frac{a^5}{8}} - 3a\sqrt[3]{\frac{1}{a}}
 \end{array}$$

173. Arendada järgmiste kakslükkmete ruudud:

$$\begin{array}{l}
 1. (\sqrt{11+6\sqrt{2}} - \sqrt{11-6\sqrt{2}})^2 \\
 2. \left(\frac{a}{2}\sqrt{\frac{a}{b}} - \frac{3}{\sqrt{ab}}\right)^2
 \end{array}$$

174. Lihtsustada järgmised avaldised:

$$\begin{array}{l}
 1. \sqrt{\frac{25}{27}} : 10 - \frac{\sqrt{3}}{6} \\
 2. \sqrt{3 - \frac{6a}{b} + \frac{3a^2}{b^2}} \\
 3. \frac{5}{4 - \sqrt{11}} - \frac{4}{\sqrt{11} - \sqrt{7}} - \frac{2}{3 + \sqrt{7}} \\
 4. \left(\frac{1}{\sqrt{1+x}} + \sqrt{1-x}\right) : \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + 1\right)
 \end{array}$$

175. Lihtsustada avaldised:

$$\frac{\sqrt{x+a}}{\sqrt{x-a}} - \frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}}, \quad \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{\sqrt{x-a}}, \quad \frac{\sqrt[3]{a^5}}{\sqrt{a^4}}.$$

176. Näidata, et $\sqrt{8} + \sqrt{2} = \sqrt{18}$.

177. Koostada ruutvõrrandid, mille lahendid on:

$$1. \quad 2 + \sqrt{3} \text{ ja } 2 - \sqrt{3} \qquad 2. \quad -3 + \sqrt{5} \text{ ja } -3 - \sqrt{5}$$
$$\frac{5 + \sqrt{7}}{6} \text{ ja } \frac{5 - \sqrt{7}}{6} \qquad \frac{-9 + \sqrt{11}}{10} \text{ ja } \frac{-9 - \sqrt{11}}{10}$$

178. Teisendada järgmised avaldised nii, et saaduses nimetaja oleks ratsionaalne:

$$\frac{1}{n\sqrt{3}-1} - \frac{1}{n\sqrt{3}}, \quad \frac{\sqrt{2}}{p-\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

179. Arvutada järgmiste avaldiste väärtused:

$$(-5)^3 - (-2)^0 + (-1)^3 + \left(\frac{1}{5}\right)^{-3} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-6} - \left(\frac{1}{4}\right)^{-8},$$
$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^{-1} - \left(\frac{5}{6}\right)^0.$$

180. Vabastada järgmised avaldised negatiivseist astendajaist ja lihtsustada tulemus:

$$(a^5 - a^{-3}) : (a - a^{-3}), \quad (a^{-4} - a^{-6}) : (a^{-2} + a^{-3}).$$

181. Näidata, et $a = b^{\pm 1}$, kui $a + a^{-1} = b + b^{-1}$.

182. Näidata, et

$$(a - b)^{-2} - (a + b)^{-2} = 4ab(a^2 - b^2)^{-2}.$$

183. Arendada avaldis $(a^x - a^{-x})^2$.

184. Kirjutada järgmised avaldised juuremärgita:

$$\sqrt[4]{\left(\frac{2}{x}\right)^3}, \quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a}}, \quad \frac{a+x}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

185. Kirjutada järgmised avaldised juurtena, kasutades ainult positiivseid juurijaid:

$$1. \quad ax^{\frac{1}{2}} \qquad 2. \quad (ab)^{\frac{2}{3}} \qquad 3. \quad (x-y)^{1\frac{1}{2}}$$

$$a^{-\frac{1}{3}} \qquad a(2n)^{-\frac{3}{4}} \qquad (u+v^{-\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}$$

186. Arendada korrutis $(x^{\frac{1}{2}} - 5)(x^{\frac{1}{2}} + 4)$.

187. Arendada avaldis $(a^x - a^{\frac{1}{x}})^2$.

188. Taandada murd $\frac{x-y}{x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}}$.

189. Näidata, et

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{2}, \quad \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \sqrt[3]{9}, \quad \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

190. Lihtsustada avaldised:

$$\sqrt[3]{10} : 0,81^{-\frac{1}{4}}, \quad \sqrt[3]{25} \cdot (0,04)^{-\frac{1}{6}}, \quad 0,16^{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt{5}.$$

191. Leida avaldise $\left(7\frac{19}{32}\right)^{-0,4}$ väärtus.

192. Lihtsustada järgmised korrutised ja jagatised:

$$1. \quad (\sqrt[3]{3x^2})^2 \cdot \sqrt[5]{\frac{2y}{81x^5}} \qquad 4. \quad 5c^2 : \left(2,5c \sqrt[3]{\frac{4a^2}{25}}\right)$$

$$2. \quad \sqrt{\frac{2x}{9}} : \left(\frac{1}{3} \sqrt{6x}\right) \qquad 5. \quad \sqrt[3]{\frac{s}{t}} : (5s)^{\frac{1}{3}}$$

$$3. \quad \frac{3}{7} a^3 \sqrt[3]{2x^2} : (6 \sqrt{a}) \qquad 6. \quad \left(\frac{1,5}{2} a\right)^8 : \left(\frac{0,375}{a}\right)^3$$

193. Kirjutada järgmised avaldised võimalikult lihtsate ja väheste juurte abil:

$$1. \quad 6 \sqrt{\frac{2}{3}} - 2 \sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{4\frac{1}{6}} + \sqrt{16\frac{2}{3}} + \frac{2 \sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$2. \quad 8,5\sqrt{4\sqrt{63}} - 10\sqrt{3\sqrt{7}} - 3\sqrt{6\sqrt{28}}$$

$$3. \quad \sqrt{x^3} - \sqrt{4x} + \frac{3x}{\sqrt{x}} - 4x^3\sqrt{\frac{1}{x^3}}$$

194. Leida järgmiste avaldiste väärtused:

$$1. \quad 144^3 : 72^3$$

$$\left(-5\frac{1}{2}\right)^{-2}$$

$$\left(4\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} : 2^{\frac{1}{2}}$$

$$9^{-\frac{1}{2}} - 8^{-1\frac{1}{3}} + 0,25^{-1\frac{1}{2}}$$

$$2. \quad \sqrt[3]{\left(\frac{8}{343}\right)^{-2}}$$

$$\left(\frac{9}{16}\right)^{\frac{1}{2}} : \left(1\frac{7}{9}\right)^{-1}$$

$$\left(\frac{5}{3} - \frac{\sqrt[3]{4}}{3}\right)^3$$

195. Kirjutada avaldis ainult ühe juuremärgi abil:

$$\sqrt{\frac{1}{a} \sqrt[3]{\frac{4}{a^5} \sqrt{\frac{1}{a}}}}$$

196. Arendada binoomi ruut:

$$\left(\frac{a}{b}\sqrt{\frac{a}{b}} - \frac{3}{\sqrt{b}}\right)^2.$$

197. Lihtsustada avaldis:

$$\frac{a-b}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{a^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{3}{2}}}{a-b}.$$

198. Lahendada järgmised võrrandid:

$$1. \quad x + \sqrt{16 + x^2} = 8$$

$$2. \quad \sqrt{x-7} - \sqrt{x+1} = -2$$

$$3. \quad \sqrt{x+20} - \sqrt{x-1} = 3$$

$$4. \quad \frac{x-1}{1+\sqrt{x}} = 4 - \frac{1-\sqrt{x}}{2}$$

$$5. \quad \frac{\sqrt{x+4}}{\sqrt{x-4}} - 2\sqrt{\frac{x-4}{x+4}} = \frac{7}{3}$$

SISUKORD.

Lk.

Peatükk I. Ruutvõrrandid ja nende süsteemid täheliste kordajatega	
§ 1. Täheliste kordajatega ruutvõrrand	3
§ 2. Ruutvõrrand-süsteem täheliste kordajatega	20
Peatükk II. Aste	
§ 3. Astendamine	30
§ 4. Korrutise astendamine ja võrdsete astendajatega astmete korrutamine	32
§ 5. Jagatise astendamine ja võrdsete astendajatega astmete jagamine	34
§ 6. Võrdsete alustega astmete korrutamine ja jagamine. Astme astendamine	35
§ 7. Hulkliikme ruut	40
Peatükk III. Juur	
§ 8. Juurimine	45
§ 9. Juure leidmine proovimise teel	49
§ 10. Tehted juurtega	53
§ 11. Juur-avaldiste teisendamisi	68
§ 12. Juurvõrrandid	77
Peatükk IV. Negatiivsete ja murruliste astendajatega astmed	
§ 13. Negatiivsete täisarvuliste astendajatega astmed	84
§ 14. Murruliste astendajatega astmed	88
Peatükk V. Kordamisülesanded	93

2. trükk.

Vastutav toimetaja A. Humal.

Ladumisele antud 16. XI. 1946. Trükkimisele antud 24. V 1946. Trükiarv 8700. Paber $56 \times 79, \frac{1}{16}$. Trükipoognaid 6,5. Trükitähti trükipoognas 32640. Arvutuspoognaid 5,2. MB 01795. Tellimise nr. 1514.

Trükikoda „Hans Heidemann“, Tartu Vallikraavi 4.

На эстонском языке. А. Вихман, Алгебра для IX класса.

A-16166

Rbl. 6.—

TÜ RAAMATUKOGU



1 0300 00422510 0