Tartu Ülikool

Loodus- ja täppisteaduste valdkond

Matemaatika ja statistika instituut

Karolina Tammemaa

$\mathcal{J}$-triviaalsed monoidid ja tükiviisi testitavad keeled

Matemaatika eriala

Bakalaureusetöö (9 EAP)

Juhendaja: Lauri Tart

Tartu 2020

$\mathcal{J}$-triviaalsed monoidid ja tükiviisi testitavad keeled

Bakalaureusetöö
Karolina Tammemaa

Lühikokkuvõte. Bakalaureusetöös tutvustatakse lõplikke $\mathcal{J}$-triviaalsed monoide ja näidatakse, et iga lõplik $\mathcal{J}$-triviaalne monoid on sellise lõpliku järjestatud monoidi faktormonoid, mis rahuldab samasust $x \leq 1$. Käsitletakse regulaarseid keeli ja näidatakse, et nad on tükiviisi testitavad parajasti siis, kui nende süntaktiline monoid on lõplik ja $\mathcal{J}$-triviaalne.
CERCS teaduseriala: P120 Arvuteooria, väljateooria, algebraline geomeetria, algebra, rühmateooria.
Märksõnad. Monoidid, järjestatud hulgad, regulaarsed keeled.

$\mathcal{J}$-trivial monoids and piecewise testable languages

Bachelor's thesis
Karolina Tammemaa

Abstract. The purpose of this bachelor's thesis is to present an overwiev of finite $\mathcal{J}$-trivial monoids and show that every finite $\mathcal{J}$-trivial monoid is the quotient of an ordered monoid satisfying the identity $x \leq 1$. We also introduce the definition of regular languages and show that they are piecewise testable if and only if their syntactic monoid is finite $\mathcal{J}$-trivial monoid.
CERCS research specialisation: P120 Number theory, field theory, algebraic geometry, algebra, group theory.
Key words. Monoids, ordered sets, regular languages.

Sisukord

Sissejuhatus

$\mathcal{J}$-triviaalsed monoidid on kasulikud uurimaks tükiviisi testitavaid keeli. Tükiviis testitavatel keeletel on palju rakendusi. Nad on leidnud kasutust esimest järku predikaatarvutustes, arvutuslingvistikas ja õppimisteooriates [4]. Nad moodustavad suure osa regulaarsetest ja tärnivabadest keeltest (millel ka endal on palju rakendusi) ning lisaks moodustavad nad esimese taseme Straubing–Thérien hierarhias [7]. Straubing–Thérien hierarhiat on kasutatud näiteks lõplike monoidide klassifitseerimiseks [12].

Straubing ja Thérien tõestasid oma töös [11] $\mathcal{J}$-triviaalsete monoidide kohta järgmise teoreemi:

Teoreem 1. Iga lõplik monoid M on $\mathcal{J}$-triviaalne parajasti siis, kui ta on sellise lõpliku järjestatud monoidi faktormonoid, mis rahuldab samasust $x \leq 1$.

Lisaks tõestasid nad, et eelnevast teoreemist järeldub Simoni teoreem:

Teoreem 2. (**Simoni teoreem**) Regulaarne keel on tükiviisi testitav parajasti siis, kui selle keele süntaktiline monoid on lõplik $\mathcal{J}$-triviaalne monoid.

Henckell ja Pin andsid oma artiklis [2] uue tõestuse teoreemi 1 ühele osale. Nad näitasid, et iga lõplik $\mathcal{J}$-triviaalne monoid M on sellise lõpliku järjestatud monoidi faktormonoid, mis rahuldab samasust $x \leq 1$.

Käesoleva bakalaureusetöö eesmärgiks on anda referatiivne ülevaade artiklist [2] ja näidata artikli [11] abil, et teoreemist 1 järeldub teoreem 2.

Töö esimeses peatükis toome sisse $\mathcal{J}$-triviaalse monoidi mõiste ja tõestame mõned edasise töö jaoks vajalikud abitulemused.

Teises peatükis uurime seose $\leq_{\mathcal{J}}$ omadusi lõplikul $\mathcal{J}$-triviaalsel monoidil M. Vaatleme tähestikku A ja sõnade hulka A^* selliselt, et $\pi : A^* \to M$ oleks sürjektiivne homomorfism. Hulga A^* abil konstrueerime lõpuks sellise lõpliku järjestatud monoidi, mis rahuldab samasust $x \leq 1$ ning mille faktormonoidiks on monoid M.

Töö kolmandas peatükis toome sisse mõisted nagu keel, tükiviisi testitav keel, keele süntaktiline monoid, lõplik automaat ja regulaarne keel. Seejärel näitame, et teoreemist 1 järeldub teoreem 2.

1. Vajalikud eelteadmised

Selles peatükis on esitatud meile vajalikud definitsioonid ja omadused, mida kasutatakse edaspidises töös. Järgnevad definitsioonid on pärit õpikust [5] ja artiklist [1].

Olgu X suvaline hulk, $X \neq \emptyset$, mida me nimetame **tähestikuks**. Olgu X^+ kõikide **sõnade** hulk tähestikus X, see tähendab kõikvõimalike lõplike jadade $x_1x_2...x_n$ hulk, kus $x_i \in X$ ja $i \in \{1, ..., n\}$. Loeme sõnu $x_1x_2...x_n$ ja $y_1y_2...y_m$ võrdseteks siis ja ainult siis, kui $n = m$ ja $x_i = y_i$ iga $i \in \{1, ..., n\}$ korral. Defineerides sõnade korrutamise reegliga

$$(x_1x_2...x_n)(y_1y_2...y_m) = (x_1x_2...x_ny_1y_2...y_m)$$

muudame X^+ poolrühmaks. Seda poolrühma nimetatakse **vabaks poolrühmaks** baasiga X. Kui vabale poolrühmale X^+ juurde lisada n.ö. "tühi" sõna (ehk sõna, milles pole ühtegi tähte) on tulemuseks monoid, mida nimetatakse **vabaks monoidiks** baasiga X ja tähistatakse X^*.

Olgu meil monoid M ja $a \in M$, siis kirjutis MaM tähistab järgmist hulka:

$$MaM = \{xay \,|\, x, y \in M\}.$$

Definitsioon 1.1. Olgu $\mathcal{J}$ seos monoidil M, mis on defineeritud järgmiselt:

$$a\mathcal{J}b \Longleftrightarrow MaM = MbM$$

mistahes $a, b \in M$ korral. Seost $\mathcal{J}$ nimetatakse **Greeni $\mathcal{J}$-seoseks** monoidil M.

Greeni seoseid on tegelikult viis ($\mathcal{L}, \mathcal{R}, \mathcal{J}, \mathcal{H}$ ja $\mathcal{D}$), kuid teised seosed meid käesolevas töös ei huvita.

Kuna $\mathcal{J}$-seos on refleksiivne, sümmeetriline ja transitiivne, siis on tegu ekvivalentsiseosega. Ekvivalentsiseos moodustab monoidil M klassijaotuse, mille hulki $\mathcal{J}_a = \{b \in S \,|\, a\mathcal{J}b\}$ nimetatakse ekvivalentsiklassideks.

Definitsioon 1.2. Olgu P mingi hulk ja olgu sellel antud kahekohaline seos $\leq$. Ütleme, et $\leq$ on **eeljärjestus**, kui ta on refleksiivne ja transitiivne. Teiste sõnadega, $\leq$ on eeljärjestus, kui iga $a, b, c \in P$ korral kehtivad järgmised väited:

1. $a \leq a$,
2. kui $a \leq b$ ja $b \leq c$, siis $a \leq c$.

$\mathcal{J}$-seos defineerib monoidil M eeljärjestuse $\leq_{\mathcal{J}}$, kus $a \leq_{\mathcal{J}} b$ parajasti siis, kui $MaM \subseteq MbM$. Me edaspidi tähistame $a <_{\mathcal{J}} b$ kui sisalduvus $MaM \subset MbM$ on range.

Definitsioon 1.3. Monoidi M nimetatakse **$\mathcal{J}$-triviaalseks**, kui kõik selle monoidi $\mathcal{J}$-klassid on võimsusega 1.

Definitsioonist järeldub, et $\mathcal{J}$-triviaalse monoidi korral, kui $a\mathcal{J}b$ ehk $MaM = MbM$, siis $a = b$.

Toome näite $\mathcal{J}$-triviaalsest monoidist.

Näide 1.4. Olgu $M = \{1, a, b, c, ab, 0\}$ monoid, mis on määratud Cayley tabeliga:

	0	1	a	b	c	ab
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	a	b	c	ab
a	0	a	0	ab	0	0
b	0	b	0	0	b	0
c	0	c	0	0	c	0
ab	0	ab	0	0	ab	0

Tabeli abil võib veenduda, et tegu on tõepoolest monoidiga. Kirjutame välja igale monoidi M elemendile vastava $\mathcal{J}$-klassi:

$$\mathcal{J}_1 = M1M = M,$$

$$\mathcal{J}_a = McM = M\{c, 0\} = \{c, 0, b, ab\},$$

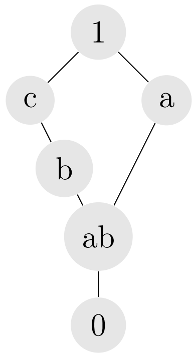
$$\mathcal{J}_b = MbM = M\{b, 0\} = \{b, 0, ab\},$$

$$\mathcal{J}_c = MaM = M\{a, 0, ab\} = \{a, 0, ab\},$$

$$\mathcal{J}_{ab} = MbcM = M\{ab, 0\} = \{ab, 0\},$$

$$\mathcal{J}_0 = M0M = \{0\}.$$

Monoidi $\mathcal{J}$-klasside struktuur on toodud joonisel 1.1.



Joonis 1.1: Monoidi M $\mathcal{J}$-klasside struktuur

Definitsioon 1.5. Olgu P mingi hulk ja olgu sellel määratud kahekohaline seos $\leq$. Ütleme, et $\leq$ on **osaline järjestus**, kui ta on refleksiivne, antisümmeetriline ja transitiivne. Teiste sõnadega, $\leq$ on osaline järjestus, kui iga $a, b, c \in P$ korral kehtivad järgmised väited:

1. $a \leq a$,
2. kui $a \leq b$ ja $b \leq a$, siis $a = b$,
3. kui $a \leq b$ ja $b \leq c$, siis $a \leq c$.

Lemma 1.6. Kui monoid M on $\mathcal{J}$-triviaalne, siis $\leq_\mathcal{J}$ on osaline järjestus hulgal M.

Tõestus. Peame ainult näitama antisümmeetrilisust, sest ülejäänud omadused tulevad sellest, et $\leq_\mathcal{J}$ on eeljärjestus. Olgu $a, b \in M$ sellised, et $a \leq_\mathcal{J} b$ ja $b \leq_\mathcal{J} a$, siis $MaM \subseteq MbM$ ja $MbM \subseteq MaM$, seega $MaM = MbM$. Vastavalt $\mathcal{J}$-triviaalsuse definitsioonile on nüüd $a = b$ ja seos on antisümmeetriline. □

Lemma 1.7. Kui monoid M on $\mathcal{J}$-triviaalne, siis iga $a \in M \setminus \{1\}$ korral on $a <_\mathcal{J} 1$.

Tõestus. Paneme tähele, et $M1M = M$ ja seega iga $a \in M \setminus \{1\}$ korral $MaM \subseteq M1M = M$. Seega $a \leq_\mathcal{J} 1$. Kuna $a \neq 1$, siis $MaM \neq M1M$, sest monoid M on $\mathcal{J}$-triviaalne ja seega kehtib range sisalduvus ning $a <_\mathcal{J} 1$. □

Lemma 1.8. Kui monoid M on $\mathcal{J}$-triviaalne, siis selle elementide korrutis, mis sisaldab ühikelemendist erinevat elementi, ei saa võrduda ühikelemendiga.

Tõestus. Olgu $a \in M \setminus \{1\}$ ja $b \in M$. Kui me oletame, et $ab = 1$ (juht $ba = 1$ on analoogiline), siis $M = M1 \subseteq MaM$ ehk $MaM = M$. Kuna $M1M = M$, siis $\mathcal{J}$-triviaalsusest järelduks, et $a = 1$, mis on vastuolu eeldusega. □

2. $\mathcal{J}$-triviaalsed monoidid ja järjestatud monoidid

Käesolevas peatükis esitatud materjal põhineb artiklil [2]. Siin peatükis uurime kõigepealt seose $\leq_{\mathcal{J}}$ omadusi lõplikul $\mathcal{J}$-triviaalsel monoidil, M ning vaatleme tähestikku A ja sõnade hulka A^* selliselt, et tekib lõplik faktormonoid $A^*/\!\sim$. Näitame, et $A^*/\!\sim$ on järjestatud monoid, mis rahuldab samasust $x \leq 1$ ja et algne $\mathcal{J}$-triviaalne monoid M on selle monoidi faktormonoid.

Definitsioon 2.1. Monoidi $(M, \cdot)$ elementi a nimetatakse **idempotendiks**, kui $a \cdot a = a$.

Fikseerime lõpliku $\mathcal{J}$-triviaalse monoidi M. Siis leidub lõplik tähestik A ja sürjektiivne homomorfism $\pi : A^* \to M$ nii, et iga $a \in A$ korral $\pi(a) \neq 1$. Selleks võib võtta näiteks $A = M \setminus \{1\}$ ja defineerida $\pi(a) = a$ iga $a \in A$ jaoks.

Tähistame monoidi M idempotentide hulka tähisega $E(M)$ ja sõnade hulka, mille kujutis on idempotent hulgas M, tähisega R. Ehk lühemalt $R = \pi^{-1}(E(M))$. Monoidi M elementide hulka, mis ei ole idempotendid, tähistame $N(M)$. Tähistame $B = A \setminus R$ tähtede hulka, mille kujutiseks on hulga $N(M)$ element. Tühi sõna on hulga A^* ühikelement korrutamise suhtes.

Tõestame nüüd mõned $\mathcal{J}$-triviaalsete monoidide omadused.

Lause 2.2. Olgu $a, b, c \in M$ ja $e \in E(M)$.

1. Kui $a \leq_{\mathcal{J}} b$ ja $ac \in E(M)$, siis $ac \leq_{\mathcal{J}} bc$.
2. Kui $e \leq_{\mathcal{J}} a$, siis $e = ea = ae$.
3. Kui $e \leq_{\mathcal{J}} a$ ja $e \leq_{\mathcal{J}} b$, siis $e \leq_{\mathcal{J}} ab$.
4. Kui $e \leq_{\mathcal{J}} abc$, siis $e \leq_{\mathcal{J}} ac$.

Tõestus. (1) Kui $a \leq_{\mathcal{J}} b$, siis $a = xby$, mingite $x, y \in M$ korral. Seega $xbyc = ac = (ac)(ac) = (xbyc)(xbyc)$. On selge, et $xbycx \leq_{\mathcal{J}} xbyc$ ja samas

$$xbyc = (xbyc)(xbyc) = (xbycx)(byc) \leq_{\mathcal{J}} xbycx.$$

Kuna $xbycx \leq_{\mathcal{J}} xbyc$ ja $xbyc \leq_{\mathcal{J}} xbycx$, siis tulnevalt monoidi M $\mathcal{J}$-triviaalsusest on $xbycx = xbyc$. Saame ka, et

$$xbyc = (xbyc)(xbyc) = (xbycxb)(yc) \leq_{\mathcal{J}} (xbycxb) = (xbycx)b = (xbyc)b$$

ńing kuna ka $(xbyc)b \leq_{\mathcal{J}} xbyc$, siis $xbycb = xbyc$. Seega

$$xbyc = xbycx = xbycb = xbycxb.$$

Kehtib ka

$$xbyc = (xbyc)(xbyc) \leq_{\mathcal{J}} (xbycxb)y = (xbyc)y \leq_{\mathcal{J}} xbyc$$

ja

$$xbyc = (xbyc)(xbyc) \leq_{\mathcal{J}} (xbycxby)c = (xbyc)c \leq_{\mathcal{J}} xbyc.$$

Seega $xbyc = (xbyc)y$ ja $xbyc = (xbyc)c$. Kokkuvõttes

$$ac = xbyc = (xbyc)c = (xbycb)c = (xbyc)bc$$

ja seega $ac \leq_{\mathcal{J}} bc$.

(2) Kui $e \leq_{\mathcal{J}} a$, siis $e = xay$ mingite $x, y \in M$ korral. Näitame kõigepealt, et $xay = xayx$. On selge, et $xayx \leq_{\mathcal{J}} xay$. Näitamaks et $xay \leq_{\mathcal{J}} xayx$ paneme tähele, et

$$xay = (xay)(xay) = (xayx) \cdot ay.$$

Seega ka $xay \leq_{\mathcal{J}} xayx$ ja tulenevalt monoidi M $\mathcal{J}$-triviaalsusest saame, et $xay = xayx$.

Näitame nüüd, et $xay = xaya$. Selleks paneme tähele, et

$$xay = (xay)(xay) = (xayx)ay = (xay)ay = (xaya)y$$

ja seega $xay \leq_{\mathcal{J}} xaya$. On selge, et $xaya \leq_{\mathcal{J}} xay$ ja seega $xay = xaya$ ehk $e = ea$. Võrduse $e = ae$ saab analoogiliselt.

(3) Kui $e \leq_{\mathcal{J}} a$ ja $e \leq_{\mathcal{J}} b$, siis $ea = e = eb$ vastavalt omadusele (2) ja seega $e = ea = eab$ kust saame, et $e \leq_{\mathcal{J}} ab$.

(4) Kui $e \leq_{\mathcal{J}} abc$, siis $e \leq_{\mathcal{J}} a$, kuna $abc \leq_{\mathcal{J}} a$. Analoogiliselt $e \leq_{\mathcal{J}} c$ ja vastavalt punktile (3) saame $e \leq_{\mathcal{J}} ac$. □

Lemma 2.3. Iga $u \in A^* \setminus \{1\}$ korral $\pi(u) <_{\mathcal{J}} 1$.

Tõestus. Kuna $u \in A^* \setminus \{1\}$, siis u ei ole tühi sõna ja järelikult on esitatav kujul $u = a_1...a_n$, kus $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$ ja $a_1, ..., a_n \in A$. Nüüd $\pi(u) = \pi(a_1...a_n) = \pi(a_1)...\pi(a_n)$ ja kuna iga $i \in \{1, ..., n\}$ korral $\pi(a_i) \neq 1$, siis vastavalt lemmale 1.8 ka $\pi(u) \neq 1$ ja seega $\pi(u) <_{\mathcal{J}} 1$. □

Definitsioon 2.4. Sõna $u \in A^*$ **heaks faktoriseeringuks** nimetatakse ühte järgnevatest kolmikutest:

1. (u_0, a, u_1) kus $u_0, u_1 \in A^*$, $a \in B$, $u = u_0 a u_1$, $\pi(u) <_{\mathcal{J}} \pi(u_0)$ ja $\pi(u) <_{\mathcal{J}} \pi(u_1)$.
2. $(u_0, 1, u_1)$ kus $u_0, u_1 \in A^*$, $u = u_0 u_1$, $\pi(u) <_{\mathcal{J}} \pi(u_0)$ ja $\pi(u) <_{\mathcal{J}} \pi(u_1)$.

Lause 2.5. Igal sõnal hulgast $A^* \setminus R$ leidub hea faktoriseering.

Tõestus. Olgu $u \in A^* \setminus R$. Kuna $\pi(u)$ ei ole idempotent, siis ei saa u olla tühi sõna ja koosneb vähemalt ühest hulga A elemendist. Tulenevalt lemmadest 1.7 ja 1.8 on $\pi(u) <_{\mathcal{J}} 1$. Olgu u_0 sõna u maksimaalse pikkusega eesliide, mille korral kehtib $\pi(u) <_{\mathcal{J}} \pi(u_0)$. Selline u_0 alati leidub, sest alati saame võtta eesliiteks tühja sõna ehk $u_0 = 1$. Maksimaalne eesliide leidub, sest u on hulga A elementide lõplik jada. Tähistame $u = u_0 a u_1$, kus $a \in A$ ja märkame, et $\pi(u_0 a) = \pi(u)$. Võrdus tuleb sellest, et u_0 oli maksimaalne selline eesliide, mille korral $\pi(u) <_{\mathcal{J}} \pi(u_0)$ ja kuna kehtib $\pi(u) \leq_{\mathcal{J}} \pi(u_0 a)$, siis $\pi(u) = \pi(u_0 a)$. Tulenevalt monoidi M $\mathcal{J}$-triviaalsusest on $\pi(u) = \pi(u_0 a)$. Kuna $\pi(u)$ ei ole idempotent, siis $\pi(u) \neq \pi(u_1)$, sest vastasel korral

$$\pi(u) = \pi(u_0 a u_1) = \pi(u_0 a)\pi(u_1) = \pi(u)\pi(u).$$

Seega $\pi(u) <_{\mathcal{J}} \pi(u_1)$.

Kui $a \in B$, siis (u_0, a, u_1) on sõna u hea faktoriseering.

Kui $a \notin B$, siis on $\pi(a)$ idempotent ja sellisel juhul on $(u_0, 1, a u_1)$ sõna u hea faktoriseering. Selle näitamiseks piisab, kui me tõestame, et $\pi(u) <_{\mathcal{J}} \pi(a u_1)$. Kuna $\pi(u) \leq_{\mathcal{J}} \pi(a u_1)$, siis piisab näidata, et $\pi(u) \neq \pi(a u_1)$. Oletame vastuväiteliselt, et $\pi(u) = \pi(a u_1)$ ja näitame järgmise võrduste ahela abil, et sellisel juhul on u idempotent:

$$\begin{aligned}\pi(u) &= \pi(u_0 a u_1) = \pi(u_0)\pi(a)\pi(u_1) = \pi(u_0)\pi(a)\pi(a)\pi(u_1) \\ &= \pi(u_0 a)\pi(a u_1) = \pi(u)\pi(u).\end{aligned}$$

See on vastuolu sellega, et $u \in A^* \setminus R$ ja seega $\pi(u) <_{\mathcal{J}} \pi(a u_1)$. $\square$

2.1 Kahendpuud

Siin alapeatükis toome sisse kahendpuu mõiste, mis aitab meil edasises defineerida faktoriseerimispuu. Selles ja järgmistes alapeatükkides kasutame ka üldisemat mõistet puu, mis võib olenevalt kontekstist viidata nii faktoriseerimispuule kui kahendpuule.

Olgu antud sümbolite hulk S ja muutujate hulk V. Kahendpuude hulk $T(S, V)$ üle hulkade S ja V on vähim selline hulk T, et:

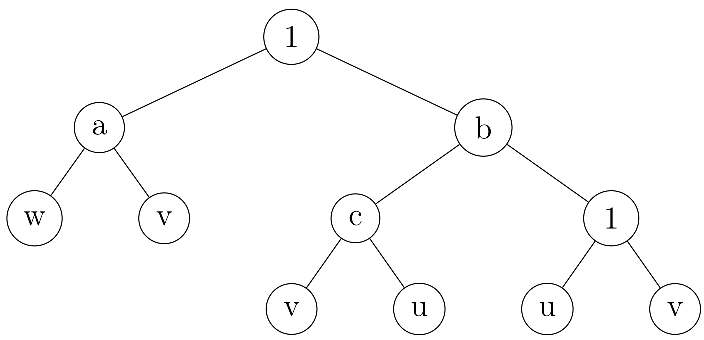
1. iga $v \in V$ korral $(v) \in T$,
2. kui $t_0, t_1 \in T$ ja $s \in S$, siis $(t_0, s, t_1) \in T$.

Puude hulka nimetatakse metsaks. Järgnevalt defineerime struktuurse induktsiooni abil puu juure, lehed ja sisetipud:

1. Kui $t = (v)$, siis v on puu t juur ja ainuke leht. Antud puul ei ole ühtegi sisetippu.
2. Kui $t = (t_0, s, t_1)$, siis s on puu t juur ja puu t lehtedeks on puude t_0 ja t_1 lehed. Puu t sisetippudeks on s ja puude t_1 ja t_0 sisetipud.

Niimoodi tähistatult on lehed muutujad ja sisetipud sümbolid. Joonistel tähistame tippu (a) kui ringi sisse kirjutatud sümbolit a.

Näide 2.6. Olgu $S = \{1, a, b, c\}$ ja $V = \{u, v, w\}$, siis hulka $T(S, V)$ kuulub puu $((w, a, v), 1, ((v, c, u), b, (u, 1, v)))$ mida on kujutatud joonisel 2.1.



Joonis 2.1: Puu

Tipu asukoha kahendpuul võib ette anda nullidest ja ühtedest koosneva sõnana $p \in \{0, 1\}^*$. Sõna p kirjeldab teekonda juurest antud tipuni, kus 0 tähendab tipus vasaku haru valimist ja 1 tähendab tipus parema haru valimist. Eelnevalt joonistatud puul on kolm tippu väärtusega v. Nende tippude asukohad puul saab kirja panna kujul 01, 100 ja 111. Kui meil on antud asukoht p puul t, siis kirjutame alampuu, mille juureks on tipp asukohaga p kujul $t_{|p}$. Olgu nüüd s mingi puu. Me tähistame puu, mis saadakse, kui puus t asendada alampuu $t_{|p}$ puuga s, tähisega $t[s]_p$. Eelneva saab rangelt defineerida järgnevalt:

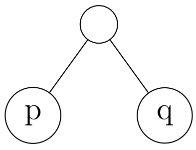
1. Kui p on tühi sõna, siis $t_p = t$ ja $t[s]_p = s$.
2. Kui $p = 0q$, kus q on mingi nullidest ja ühtedest koosnev sõna ja kui $t = (t_0, x, t_1)$, siis $t_{|p} = t_{0|q}$ ja $t[s]_p = (t_0[s]_q, x, t_1)$.
3. Kui $p = 1q$, kus q on mingi nullidest ja ühtedest koosnev sõna ja kui $t = (t_0, x, t_1)$, siis $t_{|p} = t_{1|q}$ ja $t[s]_p = (t_0, x, t_1[s]_q)$.

Definitsioon 2.7. Puu $t = (t_0, x, t_1)$ läbitakse **keskjärjestuses**, kui kõigepealt läbitakse puu t_0 keskjärjestuses, siis läbitakse tipp x ja siis läbitakse puu t_1 keskjärjestuses.

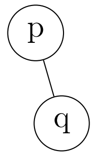
Ütleme, et asukoht q on paremal pool asukohast p, kui tippu q külastatakse peale tippu p puu keskjärjestusega läbimisel. See täendab, et peab kehtima üks järgmistest tingimustest:

1. $p = r0p'$ ja $q = r1q'$, kus $r, p', q' \in \{0,1\}^*$.
2. $q = p1q'$, mingi $q' \in \{0,1\}^*$ korral.
3. $p = q0p'$, mingi $p' \in \{0,1\}^*$ korral.

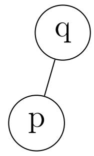
Iga juhu kohta on toodud lihtne näide joonistel 2.2, 2.3 ja 2.4.



Joonis 2.2: Juht 1



Joonis 2.3: Juht 2



Joonis 2.4: Juht 3

Juhul, kui asukoht q on paremal pool kõigist asukohtadest kujul $p\{0,1\}^*$, siis ütleme, et asukoht q on paremal pool alampuust juurega asukohas p.

2.2 Faktoriseerimispuud

Siin alapeatükis toomes sisse faktoriseerimispuu mõiste ja tõestame mõned faktoriseerimispuude omadused.

Faktoriseerimispuu on kindlaid tingimusi rahuldav puu, kus sümbolid on hulgast $(B \cup \{1\}) \times N(M)$ ja muutujad on hulgast $R \times E(M)$. Seega on sisetipud kujul (a, n), kus $a \in B \cup \{1\}$ ja $n \in N(M)$ ning lehed on kujul (u, e), kus $u \in R$ ja $e \in E(M)$. Tipu esimest komponenti, mis on alati hulgast A^*, nimetame **tulemiks** (ingl. *yield*). Tipu teist komponenti, mis on alati monoidi M element, nimetame tipu **märgendiks**. Puu t märgendiks nimetame selle puu juure märgendit ja tähistame seda $\lambda(t)$.

Anname nüüd faktoriseerimispuu range definitsiooni.

Definitsioon 2.8. Puu on **faktoriseerimispuu**, kui ta rahuldab ühte järgmisest tingimustest:

1. puu on kujul (u, e), kus $u \in R$ ja $e \in E(M)$, ning $e \leq_{\mathcal{J}} \pi(u)$,
2. puu on kujul $(t_0, (a, n), t_1)$, kus t_0 ja t_1 on faktoriseerimispuud, $a \in B \cup \{1\}$ ja $n \in N(M)$ ning lisaks $n <_{\mathcal{J}} \lambda(t_0)$, $n <_{\mathcal{J}} \lambda(t_1)$ ja $n \leq_{\mathcal{J}} \pi(a)$.

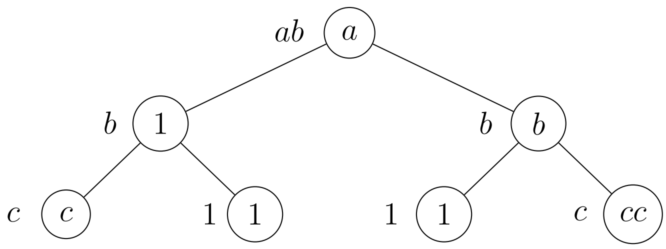
Teisest tingimusest selgub, et faktoriseerimispuu märgendid moodustavad kuhja järjestuse $>_{\mathcal{J}}$ suhtes. See tähendab, et kui tipul (p, n_1) on alluv tipp (q, n_2), siis $n_1 <_{\mathcal{J}} n_2$.

Oma joonistel kujutame me tippu (a,n) kui ringi sisse kirjutatud sümbolit a, millel on kõrval märgend n.

Näide 2.9. Näites 1.4 tutvusime monoidiga $M = \{1, b, c, ab, 0\}$. Olgu meil lõplik tähestik $A = \{a, b, c\}$. Vaatame homomorfismi $\pi : A^* \to M$, mis on defineeritud järgnevalt: $\pi(a) = a$, $\pi(b) = b$, $\pi(c) = c$. Seega on määratud hulgad $E(M) = \{1, c, 0\}$, $N(M) = \{a, b, ab\}$, $B = \{a, b\}$ ja $R = \pi^{-1}(E(M))$. Seda kõike teades saame kirja panna ühe faktoriseerimispuu:

$$(((1, c), (1, b), (1, 1)), (a, ab), ((1, 1), (b, b), (cc, c))).$$

Antud puud on graafiliselt kujutada joonisel 2.5.



Joonis 2.5: Faktoriseerimispuu

Puu t tulemiks nimetatakse sõna $\mu(t)$, mis saadakse, kui antud puu läbitakse keskjärjestuses. Selle saab rekursiivselt defineerida järgnevalt:

1. kui $t = (u, e)$, siis $\mu(t) = u$,
2. kui $t = (t_0, (a, n), t_1)$, siis $\mu(t) = \mu(t_0)a\mu(t_1)$.

Näiteks puu, mis on esitatud joonisel 2.5, läbimisel keskjärjestuses saame sõnad $c, 1, 1, a, 1, b, cc$. Seega selle puu tulemiks on $cabcc$.

Puu väärtuseks nimetame selle puu tulemi kujutist monoidis M. Me tähistame seda $\nu(t)$. On lihtne näha, et $\nu = \pi \circ \mu$. Tuletame meelde, et puu kõik lehed on hulga $R \times E(M)$ elemendid. Seega kui t on ühetipuline puu, siis $\nu(t)$ on idempotent hulgas M.

Kui puu tulemiks on u, siis seda puud nimetatakse sõna u faktoriseerimispuuks. Kõigi sõna u faktoriseerimispuude hulka nimetatakse selle sõna faktoriseerimismetsaks ja tähistatakse $F(u)$. Järgnevalt näitame, et $F(u)$ ei ole kunagi tühi.

Lause 2.10. Iga sõna u korral leidub faktoriseerimispuu, mille märgendiks on $\pi(u)$.

Tõestus. Tõestame väite induktsiooniga.

Baas. Kui $u \in R$ ja u on pikkusega 1 või $u = 1$ (ehk u on tühi sõna), siis vastavalt faktoriseerimispuu definitsioonile, on $(u, \pi(u))$ faktoriseerimispuu. Kui $u \in B$ ja u on pikkusega 1, siis $((1,1),(u,\pi(u)),(1,1))$ (tipus $(1,1)$ on esimene 1 tühi sõna ja teine 1 monoidi M ühikelement) on sobiv faktoriseerimispuu, sest $\pi(u) <_{\mathcal{J}} \pi(1) = 1$ ja $\pi(u) \leq_{\mathcal{J}} \pi(u)$.

Samm. Olgu nüüd u sõna pikkusega $k > 1$ ja oletame, et väide kehtib iga lühema sõna puhul. Kui $u \in R$, siis on $(u, \pi(u))$ faktoriseerimispuu. Olgu nüüd $u \in B$, siis vastavalt lemmale 2.4 on sõnal u olemas hea faktoriseering (u_0, a, u_1), kus $a \in B \cup \{1\}$. Nüüd vastavalt induktsiooni eeldusele on sõnadel u_0 ja u_1 olemas faktoriseerimispuud t_0 ja t_1 märgenditega $\pi(u_0)$ ja $\pi(u_1)$. Näitame, et $t = (t_0, (a, \pi(u)), t_1)$ on sõna u faktoriseerimispuu. On selge, et puu t tulemiks on u. Lisaks, kuna (u_0, a, u_1) on sõna u hea faktoriseering, siis $\pi(u) <_{\mathcal{J}} \pi(u_0) = \lambda(t_0)$, $\pi(u) <_{\mathcal{J}} \pi(u_1) = \lambda(t_1)$ ja $\pi(u) \leq_{\mathcal{J}} \pi(a)$. Sellega on väide tõestatud. □

Teatud tingimustel saab faktoriseerimispuus asendada alampuu teise faktoriseerimispuuga selliselt, et tekkiv uus puu on samuti fakoriseerimispuu.

Lause 2.11. Olgu meil kaks faktoriseerimispuud s ja s' ning olgu p selline asukoht puus s, et $\lambda(s_{|p}) \leq_{\mathcal{J}} \lambda(s')$. Sellisel juhul on ka $s[s']_p$ faktoriseerimispuu.

Tõestus. Tõestame väite induktsiooniga sõna $p \in \{0,1\}^*$ pikkuse järgi.

Baas. Kui p on tühi sõna, siis $s[s']_p = s'$ ja tegu on faktoriseerimispuuga.

Samm. Olgu p sõna pikkusega $k \in \mathbb{N}$ ja kehtigu väide iga lühema sõna korral. Olgu p kujul $p = 1q$ (juhul $p = 0q$ on tõestus analoogiline), siis faktoriseerimispuu s on kujul $(s_0, (a,n), s_1)$ ning $s[s']_p = (s_0, (a,n), s_1[s']_q)$. Kuna vastavalt faktoriseerimispuu definitsioonile on s_1 faktoriseerimispuu ja kuna $\lambda(s_{1_{|q}}) = \lambda(s_{|p}) \leq_{\mathcal{J}} \lambda(s')$, siis vastavalt induktsiooni eeldusele on $s_1[s']_q$ faktoriseerimispuu. Näitamaks, et $s[s']_p$ on faktoriseerimispuu, piisab näidata, et $n <_{\mathcal{J}} \lambda(s_1[s']_q)$. Siin on nüüd kaks võimalust. Kui q on tühi sõna, siis $s_1[s']_q = s'$ ja vastavalt eeldusele, $n <_{\mathcal{J}} \lambda(s_1) \leq_{\mathcal{J}} \lambda(s')$. Kui q ei ole tühi sõna, siis $\lambda(s_1[s']_q) = \lambda(s_1)$ ja väide kehtib, sest s on faktoriseerimispuu. □

2.3 Faktoriseerimispuude eeljärjestus

Siin alapeatükis defineerime faktoriseerimispuudel eeljärjestuse ja tõestame mõned sellega seotud omadused. Kogu selle peatüki jooksul on s ja t faktoriseerimispuud.

Me defineerime seose $\leq$ faktoriseerimispuudel järgmiselt:

1. Kui s on üksik tipp, siis $s \leq t$ parajasti siis, kui $\nu(s) \leq_{\mathcal{J}} \nu(t)$ ja $\lambda(s) \leq_{\mathcal{J}} \lambda(t)$.
2. Kui $s = (s_0, (a, n), s_1)$, siis $s \leq t$ parajasti siis, kui t on kujul $t = (t_0, (b, n), t_1)$ kusjuures $s_0 \leq t_0, s_1 \leq t_1$ ja $b \in \{1, a\}$.

Defineerime nüüd mõiste, mis aitab meid edasistes tõestustes.

Definitsioon 2.12. Kui puu on ühetipuline, siis on puu **kõrguseks** 0. Kui puus on rohkem kui üks tipp, siis on puu $t = (t_0, a, t_1)$ **kõrguseks**:

$$h(t) = 1 + \max\{h(t_0), h(t_1)\}.$$

Lause 2.13. Kehtivad järgmised omadused:

1. Kui $s \leq t$, siis $\lambda(s) \leq_{\mathcal{J}} \lambda(t)$.
2. Kui $e \leq_{\mathcal{J}} \nu(s)$ mõne idempotendi $e \in M$ korral ja $s \leq t$, siis $e \leq_{\mathcal{J}} \nu(t)$.
3. Seos $\leq$ on eeljärjestus faktoriseerimispuudel.

Tõestus. 1) Olgu $s \leq t$. Kui s on üksik tipp, siis tuleneb seose $\leq$ definitsioonist, et $\lambda(s) \leq_{\mathcal{J}} \lambda(t)$. Kui s on kujul $(s_0, (a, n), s_1)$, siis $\lambda(s) = n = \lambda(t)$ ja seega $\lambda(s) \leq_{\mathcal{J}} \lambda(t)$.

2) Tõestame väite induktsiooniga faktoriseerimispuu kõrguse järgi. Olgu s ja t sellised, et $s \leq t$.

Baas. Kui s on puu kõrgusega 0, siis on tegu üksiku tipuga ja $\nu(s) \leq_{\mathcal{J}} \nu(t)$ vastavalt seose $\leq$ definitsioonile. Kui $e \leq_{\mathcal{J}} \nu(s)$, siis seose $\leq_{\mathcal{J}}$ transitiivsuse tõttu ka $e \leq_{\mathcal{J}} \nu(t)$.

Samm. Olgu s puu kõrgusega $k \in \mathbb{N}$ ja kehtigu väide iga madalama puu korral. Olgu s kujul $(s_0, (a, n), s_1)$, siis $\nu(s) = \nu(s_0)\pi(a)\nu(s_1)$. Kuna $s \leq t$, siis t on kujul $(t_0, (b, n), t_1)$, kus $b \in \{1, a\}$ ja $s_0 \leq t_0$, $s_1 \leq t_1$. Kuna $e \leq_{\mathcal{J}} \nu(s) = \nu(s_0)\pi(a)\nu(s_1)$, siis ka $e \leq_{\mathcal{J}} \nu(s_0)$ ja tulenevalt induktsiooni eeldusest $e \leq_{\mathcal{J}} \nu(t_0)$. Analoogiliselt $e \leq_{\mathcal{J}} \nu(t_1)$. Teame, et $b \in \{1, a\}$. Kui $b = a$, siis $\pi(b) = \pi(a)$. Kui $b = 1$, siis $\pi(a) \leq_{\mathcal{J}} \pi(1)$. Kokkuvõttes on $\pi(a) \leq_{\mathcal{J}} \pi(b)$ ja seega $e \leq_{\mathcal{J}} \pi(b)$. Vastavalt lause 2.2 puntile 3 saame, et $e \leq_{\mathcal{J}} \nu(t_0)\pi(b)\nu(t_1) = \nu(t)$ ja seega väide kehtib.

3) Peame näitama, et seos $\leq$ on refleksiivne ja transitiivne. Refleksiivus on ilmne. Näitame, et seos on transitiivne. Olgu $r \leq s$ ja $s \leq t$, näitame et siis $r \leq t$. Tõestame selle induktsiooniga faktoriseerimispuu r kõrguse järgi.

Baas. Kui r on puu kõrgusega 0, siis on tegu üksiku tipuga ja vastavalt faktoriseerimispuu definitsioonile on $\nu(r) = \pi(r) = e$ idempotent. Kuna $r \leq s$, siis $\nu(r) = e \leq_{\mathcal{J}} \nu(s)$ ja vastavalt 2. punktile $e \leq_{\mathcal{J}} \nu(t)$. Kuna $\lambda(r) \leq_{\mathcal{J}} \lambda(s)$ ja vastavalt 1. punktile $\lambda(s) \leq_{\mathcal{J}} \lambda(t)$, siis ka $\lambda(r) \leq_{\mathcal{J}} \lambda(t)$. Kokkuvõttes $r \leq t$.

Samm. Olgu r puu kõrgusega $k \in \mathbb{N}$ ja kehtigu väide iga madalama puu korral. Olgu $r = (r_0, (a, n), r_1)$, $s = (s_0, (b, n), s_1)$ ja $t = (t_0, (c, n), t_1)$, kus

$b \in \{1, a\}$ ja $c \in \{1, b\} = \{1, a\}$. Vastavalt induktsiooni eeldusele on $r_0 \leq t_0$ ja $r_1 \leq t_1$. Kuna lisaks ka $c \in \{1, a\}$, siis vastavalt seose $\leq$ definitsioonile on $r \leq t$. $\square$

Järeldus 2.14. Olgu s ja t sellised puud, et $s \leq t$.

1. Kui $\nu(s)$ on idempotent, siis $\nu(s) \leq_{\mathcal{J}} \nu(t)$
2. Kui puu s juure tulem on 1, siis puu t juure tulem on ka 1.

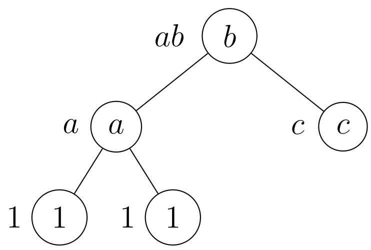
Tõestus. 1) Järeldub otse eelmise lause punktist 2.

2) Kui s on ühetipuline puu, siis $\nu(s) = 1$ ja kuna 1 on idempotent, siis vastavalt eelmisele punktile on $\nu(s) \leq_{\mathcal{J}} \nu(t)$. Seega $1 \leq_{\mathcal{J}} \nu(t)$ ja kuna M on $\mathcal{J}$-triviaalne, siis $\nu(t) = 1$. Oletame vastuväiteliselt, et puu t juure tulem ei ole 1. Kui t on ühetipuline puu, siis ta on kujul (a, n), aga kuna $\pi(a) \neq 1$ iga $a \in A^* \setminus \{1\}$ korral, siis $\nu(t) = \pi(a) \neq 1$ ja oleme jõudnud vastuoluni. Kui t ei ole ühetipuline puu, siis ta on kujul $t = (t_0, (a, n), t_1)$ ning $\nu(t) = \nu(t_0)\pi(a)\nu(t_0)$. Vastavalt lemmale 1.8 ei saa korrutis mis sisaldab tegurit $\pi(a) \neq 1$ olla võrdne 1-ga. Seega $\pi(a) = 1$.

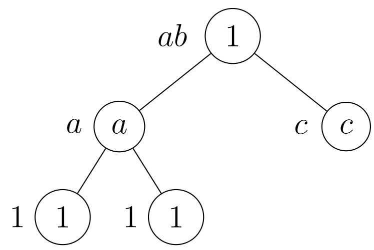
Kui $s = (s_0, (1, n), s_1)$ ei ole ühtetipuline puu, siis vastavalt seose $\leq$ definitsioonile on t kujul $t = (t_0, (1, n), t_1)$ ja seega on puu t juure tulem 1. $\square$

Järelduse 2.14 esimene punkt üldjuhul ei kehti, kui $\nu(s)$ ei ole idempotent. Toome selle illustreerimiseks näite.

Näide 2.15. Kasutame sama monodi nagu näites 1.4. Olgu puud s ja t antud joonistel 2.6 ja 2.7. Siis $s \leq t$, aga $\nu(s) = ab \not\leq_{\mathcal{J}} \nu(t) = 0$.



Joonis 2.6: Puu s



Joonis 2.7: Puu t

Võtame faktoriseerimispuudel kasutusele uue seose $\sim$. Me kirjutame $s \sim t$ parajasti siis, kui $s \leq t$ ja $t \leq s$.

Teoreem 2.16. Kui $s \sim t$, siis $\nu(s) = \nu(t)$.

Tõestus. Tõestame väite induktsiooniga puu s kõrguse järgi.

Baas. Olgu puu s kõrgusega 0. Kuna $t \leq s$, siis ka t on puu kõrgusega 0. Sellest, et $s \leq t$ saame, et $\nu(s) \leq_{\mathcal{J}} \nu(t)$ ja sellest, et $t \leq s$ saame, et $\nu(t) \leq_{\mathcal{J}} \nu(s)$. Kuna monoid M on $\mathcal{J}$-triviaalne, siis saame, et $\nu(s) = \nu(t)$.

Samm. Olgu puu s kõrgusega $k \in \mathbb{N}$ ja kehtigu väide iga madalama puu korral. Olgu s kujul $s = (s_0, (a, n), s_1)$ ja t kujul $t = (t_0, (b, n), t_1)$. Kuna $s \leq t$ ja $t \leq s$, siis $s_0 \leq t_0$, $s_1 \leq t_1$, $t_0 \leq s_0$ ja $t_1 \leq s_1$. Seega $s_0 \sim t_0$ ja $s_1 \sim t_1$ ja vastavalt induktsiooni eeldusele $\nu(s_0) = \nu(t_0)$ ja $\nu(s_1) = \nu(t_1)$. Kuna $s \leq t$, siis $b \in \{1, a\}$. Kui $a = b$, siis oleme saanud, et

$$\nu(s) = \nu(s_0)\pi(a)\nu(s_1) = \nu(t_0)\pi(b)\nu(t_1) = \nu(t).$$

Oletades, et $b \neq a$ saame, et $b = 1$. Kuna aga $t \leq s$, siis $a \in \{1, b\} = \{1\}$ ja seega $a = 1$, $a = b$ ja kokkuvõttes $\nu(s) = \nu(t)$. □

Järgmine lause näitab, et eeljärjestus laieneb ka alampuudele.

Lause 2.17. Olgu s ja t sellised puud, et $s \leq t$.

1. Kui $p \in \{0, 1\}^*$ on asukoht puus s, siis ta on ka asukoht puus t ja $s_{|p} \leq t_{|p}$ ning $\lambda(s_{|p}) \leq_{\mathcal{J}} \lambda(t_{|p})$
2. Kui asukoht $p \in \{0, 1\}^*$ on puu s sisetipu asukoht, siis ta on ka puu t sisetipu asukoht. Kui tipp asukohaga p puus s on kujul (a, n), siis tipp asukohaga p puus t on kujul (b, n), kus $b \in \{1, a\}$.

Tõestus. Tõestame väited induktsiooniga sõna p pikkuse järgi. Tõestame kõigepealt esimese väite.

Baas. Kui p on tühi sõna, siis esimene väide kehtib, sest $s_{|p} = s$ ja $t_{|p} = t$.

Samm. Oletame, et p on mingi sõna pikkusega $k \in \mathbb{N}$ ja väide kehtib kõigi lühemate sõnade korral. Kuna p ei ole tühi sõna, siis s ei ole üksik tipp ja on seega kujul $s = (s_0, (a, n), s_1)$. Seega t on kujul $(t_0, (b, n), t_1)$, kus $s_0 \leq t_0$ ja $s_1 \leq t_1$. Kui p on kujul $p = 0q$, siis $s_{|p} = s_{0_{|q}}$ ja $t_{|p} = t_{0_{|q}}$ ning induktsiooni eelduse põhjal $s_{0_{|q}} \leq t_{0_{|q}}$. Seega $s_{|p} \leq t_{|p}$ ning lause 2.13 punktist 1 järeldub, et $\lambda(s_{|p}) \leq_{\mathcal{J}} \lambda(t_{|p})$.

Tõestame nüüd teise väite. Selleks, et p saaks olla mingi sisetipu asukoht, peab s olema kujul $s = (s_0, (a, n), s_1)$. Seega t on kujul $t = (t_0, (b, n), t_1)$, kus $s_0 \leq t_0$, $s_1 \leq t_1$ ja $b \in \{a, 1\}$.

Baas. Kui p on tühi sõna, siis teame, et tipud (a, n) ja (b, n) on sisetipud ja $b \in \{1, a\}$.

Samm. Oletame, et p on mingi sõna pikkusega $k \in \mathbb{N}$ ja väide kehtib kõigi lühemate sõnade korral. Kui p on kujul $p = 0q$, siis $s_{|p} = s_{0_{|q}}$ ja see, et p on sisetipp puus s on samaväärne sellega, et q on sisetipp puus s_0. Kuna ka $t_{|p} = t_{0_{|q}}$, siis p on sisetipp puus t parajasti siis, kui q on sisetipp puus

t_0. Olgu p sisetipp puus s, siis q on sisetipp puus s_0 ja induktsiooni eelduse põhjal ka puus t_0 ning seega on p sisetipp puus t.

Kuna eelmise punkti põhjal $s_{|p} \leq t_{|p}$, siis kui tipp asukohaga p puus s on kujul (a_1, n_1), siis vastavalt eeljärjestuse definitsioonile puudel on tipp asukohaga p puus t kujul (b_1, n_1), kus $b_1 \in \{1, a_1\}$.

Kõik tõestused juhu $p = 1q$ jaoks on analoogilised. $\square$

Definitsioon 2.18. Seost $\leq$ poolrühmal S nimetatakse **stabiilseks**, kui iga $x, y, z \in S$ korral sellest, et $x \leq y$ järeldub, et $xz \leq yz$ ja $zx \leq zy$.

Järgnevalt tõestame, et seos $\leq$ faktoriseerimispuudel on teatud tingimustel alampuude sisse asendamise suhtes stabiilne.

Lause 2.19. Olgu s ja t sellised puud, et $s \leq t$ ning olgu p mingi asukoht puus s. Kui s' ja t' on sellised faktoriseerimispuud, et $s' \leq t'$, $\lambda(s_{|p}) \leq_{\mathcal{J}} \lambda(s')$ ja $\lambda(t_{|p}) \leq_{\mathcal{J}} \lambda(t')$, siis $s[s']_{|p}$ ja $t[t']_{|p}$ on faktoriseerimispuud ja $s[s']_{|p} \leq t[t']_{|p}$.

Tõestus. See, et $s[s']_{|p}$ ja $t[t']_{|p}$ on faktoriseerimispuud tuleneb lausest 2.11. Tõestame ülejäänud väite induktsiooniga sõna p pikkuse järgi.

Baas. Kui p on tühi sõna, siis $s[s']_{|p} = s'$ ja $t[t']_{|p} = t'$ ja väide kehtib.

Samm. Olgu p on mingi sõna pikkusega $k \in \mathbb{N}$ ja kehtigu väide kõigi lühemate sõnade korral. Puud s ja t on kujul $(s_0, (a, n), s_1)$ ja $(t_0, (b, n), t_1)$, kus $s_0 \leq t_0$ ja $s_1 \leq t_1$. Olgu p kujul $p = 0q$, siis $s[s']_{|p} = (s_0[s']_{|q}, (a, n), s_1)$ ja $t[t']_{|p} = (t_0[t']_{|q}, (b, n), t_1)$. Induktsiooni eelduse põhjal $s_0[s']_{|q} \leq t_0[t']_{|q}$ ja seega $s[s']_{|p} \leq t[t']_{|p}$. Juht $p = 1q$ tõestatakse analoogiliselt. $\square$

Olgu (a, n) sisetipp puus s asukohaga p. Iga $b \in B \cup \{1\}$ korral, kus $n \leq_{\mathcal{J}} \pi(b)$ saame me teha asenduse, kus me asendame puus s tipu (a, n) tipuga (b, n). Me tähistame selle asenduse käigus tekkinud puud $s[a \to b]_{|p}$.

Järeldus 2.20. Olgu s ja t sellised puud, et $s \leq t$. Oletame lisaks, et neil on mõlemal asukohas p sama sisetipp (a, n). Siis iga $b \in B \cup \{1\}$ korral, kus $n \leq_{\mathcal{J}} \pi(b)$, kehtib $s[a \to b]_{|p} \leq t[a \to b]_{|p}$.

Tõestus. Vastavalt lause 2.17 punktile 1 kehtib $s_p \leq t_p$. Saame kirjutada $s_{|p} = (s_0, (a, n), s_1)$ ja $t_{|p} = (t_0, (a, n), t_1)$, kus $s_0 \leq t_0$ ja $s_1 \leq t_1$. Tähistame, $s' = (s_0, (b, n), s_1)$ ja $t' = (t_0, (b, n), t_1)$. Kuna $s_0 \leq t_0$, $s_1 \leq t_1$ ja $b \in \{1, b\}$, siis $s' \leq t'$. Kuna $\lambda(s_{|p}) = \lambda(s')$ ja $\lambda(t_{|p}) = \lambda(t')$, siis kõik lause 2.19 tingimused on täidetud ja

$$s[a \to b]_{|p} = s[s']_{|p} \leq t[t']_{|p} = t[a \to b]_{|p}.$$

$\square$

2.4 Sõnade eeljärjestus

Siin alapeatükis näitame, kuidas saame eeljärjestuse faktoriseerimispuudelt üle kanda eeljärjestuseks sõnadel ning tõestame mõned selle eeljärjestuse omadused.

Me defineerime eeljärjestuse hulgal A^* järgmiselt.

Definitsioon 2.21. Olgu $u, v \in A^*$. Siis $u \leq v$ siis ja ainult siis, kui iga puu $s \in F(u)$ korral leidub puu $t \in F(v)$ selliselt, et $s \leq t$.

Tõestame nüüd mõned omadused selle seose kohta.

Lause 2.22. Kehtivad järgmised väited:

1. Kui mingi idempotendi $e \in M$ korral $e \leq_{\mathcal{J}} \pi(u)$ ja $u \leq v$, siis $e \leq_{\mathcal{J}} \pi(v)$.
2. Seos $\leq$ on eeljärjestus hulgal A^*.
3. Iga $u \in A^*$ korral kehtib $u \leq 1$.

Tõestus. 1) Olgu $u \leq v$ ja $s \in F(u)$, siis leidub selline $t \in F(v)$, et $s \leq t$. Nüüd $\pi(u) = \nu(s)$ ja seega $e \leq_{\mathcal{J}} \nu(s)$. Tulenevalt lausest 2.13 on $e \leq_{\mathcal{J}} \nu(t) = \pi(v)$.

2) On selge, et seos on refleksiivne, sest iga $s \in F(u)$ korral võime võtta $s \in F(u)$ ja $s \leq s$.

Näitame, et seos on transitiivne. Olgu $u, v, w \in A^*$ sellised, et $u \leq v$ ja $v \leq w$. Siis iga $s \in F(u)$ korral leidub $t \in F(v)$ selliselt, et $s \leq t$. Lisaks leidub $r \in F(w)$ nii, et $t \leq r$. Kuna seos $\leq$ on faktoriseerimispuudel eeljärjestus, siis $s \leq r$. Seega on seos $\leq$ sõnadel transitiivne ja kokkuvõttes on tegu eeljärjestusega.

3) Piisab näidata, et iga $s \in F(u)$ korral leidub selline $t \in F(1)$, et $s \leq t$ ja $\lambda(s) = \lambda(t)$. Tõestame väite induktsiooniga puu s kõrguse järgi.

Baas. Olgu $s = (u, e)$. Me saame võtta $t = (1, e)$. Siis $s \leq t$ ja $\lambda(s) = \lambda(t)$.

Samm. Olgu s puu kõrgusega $k \in \mathbb{N}$. Oletame, et väide kehtib iga lühema puu korral. Nüüd $s = (s_0, (a, n), s_1)$ ja vastavalt eeldusele, leiduvad sellised $t_0, t_1 \in F(1)$, et $s_0 \leq t_0$, $s_1 \leq t_1$ ja $\lambda(s_0) = \lambda(t_0)$ ning $\lambda(s_1) = \lambda(t_1)$. Võtame nüüd $t = (t_0, (1, n), t_1)$, siis t on faktoriseerimispuu, sest $n <_{\mathcal{J}} \lambda(s_0) = \lambda(t_0)$, $n <_{\mathcal{J}} \lambda(s_1) = \lambda(t_1)$ ja $n \leq_{\mathcal{J}} \pi(1) = 1$. On selge, et $s \leq t$ ning $\lambda(s) = \lambda(t)$. Peame veel näitama, et $t \in F(1)$. Selleks paneme tähele, et $\nu(t) = \nu(t_0)\pi(1)\nu(t_1) = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$ ja seega tõesti $t \in F(1)$. $\square$

Definitsioon 2.23. Olgu $u, v \in A^*$. Ütleme, et sõnad u ja v on **ekvivalentsed** ja tähistame $u \sim v$, kui $u \leq v$ ja $v \leq u$.

On selge, et seos $\sim$ on ekvivalentsiseos hulgal A^*. Tuletame meelde, et ka faktoriseerimispuudel oli defineeritud seos $\sim$. Puud s ja t on ekvivalentsed parajasti siis, kui $s \leq t$ ja $t \leq s$.

Definitsioon 2.24. Olgu t faktoriseerimispuu. Kui me asendame puus t iga lehe (u, e) lehega $(\pi(u), e)$, siis me saame uue puu, mille muutujad on hulgast $E(M) \times E(M)$. Nimetame selliselt saadud puud "t modulo π" ja tähistame $t \pmod{\pi}$.

Definitsioon 2.25. Olgu q ekvivalentsiseos mingil hulgal P. Nimetame seose q **indeksiks** selle seose järgi tekkinud ekvivalentsiklasside arvu.

Teoreem 2.26. Hulgal A^* määratud seosel $\sim$ on lõplik indeks.

Tõestus. Näitame kõigepealt, et kui kaks faktoriseerimispuud s ja t on võrdsed modulo π, siis $s \sim t$. Tõestame selle väite induktsiooniga puu s kõrguse järgi.

Baas. Kui $s = (u_1, e) \equiv t \pmod{\pi}$, siis $t = (u_2, e)$ nii, et $\pi(u_2) = \pi(u_1)$. Kuna $\nu(s) = \pi(u_1) = \nu(t)$ ja $\lambda(s) = e = \lambda(t)$, siis $s \leq t$ ja $t \leq s$ ning kokkuvõttes $s \sim t$.

Samm. Olgu s puu kõrgusega $k \in N$. Oletame, et väide kehtib iga madalama puu korral. Olgu $s = (s_0, (a, n), s_1)$ ja $s \equiv t \pmod{\pi}$, siis $t = (t_0, (a, n), t_1)$, kusjuures $s_0 \equiv t_0 \pmod{\pi}$ ja $s_1 \equiv t_1 \pmod{\pi}$. Vastavalt induktsiooni eeldusele, nüüd $s_0 \leq t_0$, $t_0 \leq s_0$, $s_1 \leq t_1$ ja $t_1 \leq s_1$. Seega ka $s \leq t$ ja $t \leq s$ ning kokkuvõttes $s \sim t$.

Olgu kahel sõnal u ja v võrdsed faktoriseerimismetsad modulo π, näitame et siis $u \sim v$. Olgu $s \in F(u)$, siis leidub $t \in F(v)$ selliselt, $s \equiv t \pmod{\pi}$. Eelneva põhjal $s \sim t$ ning seega $s \leq t$ ja kuna s oli valitud vabalt, siis $u \leq v$. Analoogiliselt saame, et $v \leq u$ ja seega $u \sim v$.

Iga faktoriseerimispuu modulo π on kahendpuu, mis rahuldab järgmisi tingimusi:

1. Selle kõrgus on tõkestatud monoidi M $\mathcal{J}$-sügavusega (näites 1.4 antud monoidi $\mathcal{J}$-sügavus on 5);
2. Selle sisetipud on hulgast $B \cup \{1\} \times N(M)$;
3. Selle lehed on hulgast $E(M) \times E(M)$.

Kuna M on lõplik hulk, siis ka $B, N(M)$ ja $E(M)$ on lõplikud hulgad. Selliseid puid saab olla ainult mingi lõplik hulk ja seega on ekvivalentsiklasse seose $\sim$ järgi lõplik hulk. Kui mingi kahe sõna $u, v \in A^*$ korral nende faktoriseerimismetsad modulo π on erinevad, aga $u \sim v$, siis see ei suurenda ekvivalentsiklasside arvu ja seega on seose $\sim$ indeks ikka lõplik. $\square$

Definitsioon 2.27. Olgu X mingi hulk, kus on defineeritud osaline järjestus $\leq$. Elementi $x_0 \in X$ nimetatakse hulga X **maksimaalseks** elemendiks, kui iga $x \in X$ korral, sellest et $x_0 \leq x$ järeldub, et $x = x_0$.

Lemma 2.28. Olgu $u \in A^*$. Hulgas $F(u)$ leidub maksimaalne element.

Tõestus. Näitamaks, et seal leidub maksimaalne element, piisab näidata, et $F(u)$ koosneb lõplikust hulgast faktoriseerimispuudest. Iga puu hulgast $F(u)$ rahuldab järgmisi tingimusi:

1. Selle kõrgus on tõkestatud monoidi M $\mathcal{J}$-sügavusega;
2. Selle sisetipud on hulgast $B \cup \{1\} \times N(M)$;
3. Selle lehed on hulgast $K \times E(M)$.

kus $K = \{a' \in R \mid \exists b, c \in A^*, u = ba'c\}$. On selge, et K on lõplik hulk ja seega on ka $F(u)$ lõplik hulk. □

Teoreem 2.29. Olgu $u, v \in A^*$. Kui $u \sim v$, siis $\pi(u) = \pi(v)$.

Tõestus. Olgu $s \in F(u)$ hulga $F(u)$ maksimaalne element. Kuna $u \leq v$, siis leidub selline $t \in F(v)$, et $s \leq t$. Kuna $v \leq u$, siis leidub selline $s' \in F(u)$, et $t \leq s'$. Seega $s \leq t \leq s'$. Kuna s oli hulga $F(u)$ maksimaalne element, siis ka $s' \leq s$ ja seega $s' \sim s$. Kokkuvõttes saame, et $s \sim t \sim s'$. Teoreemist 2.16 järeldub, et $\pi(u) = \nu(s) = \nu(t) = \pi(v)$. □

Lemma 2.30. Olgu s ja t sellised faktoriseerimispuud, et $s \leq t$. Olgu $p \in \{0,1\}^*$ kõige parempoolsema tipu asukoht puus s, mille tulem on erinev elemendist 1. Kui p on sisetipu asukoht puus s, siis ka puus t iga asukohast p parempoolsema tipu tulem on 1.

Tõestus. Täitku tipp asukohaga p puus s vajalikke eeldusi. Seega alampuu $s_{|p1}$ iga tipu tulem on 1 ja seega $\nu(s_{|p1}) = 1$. Kuna 1 on idempotent, $1 \leq_{\mathcal{J}} \nu(s_{|p1})$ ja $s_{|p1} \leq t_{|p1}$ siis vastavalt lause 2.13 punktile 2 on $1 \leq_{\mathcal{J}} \nu(t_{|p1})$. Kuna monoid M on $\mathcal{J}$-triviaalne, siis sellest järeldub, et $\nu(t_{|p1}) = 1$. Olgu meil $\mu(t_{|p1}) = a_1...a_n$, kus $n \in \mathbb{N}$ ja elemendid a_i on kõigi puu $t_{|p1}$ tippude tulemid. Sellisel juhul

$$\nu(t_{|p1}) = \pi(\mu(t_{|p1})) = \pi(a_1...a_n) = \pi(a_1)...\pi(a_n) = 1$$

Kuna M on $\mathcal{J}$-triviaalne, siis tulenevalt lemmast 1.8 on

$$\pi(a_1) = ... = \pi(a_n) = 1.$$

Millest järeldub, et $a_1 = ... = a_n = 1$ ja puu $t_{|p1}$ iga tipu tulem on 1.

Teame et $p \in \{0,1\}^*$. Märgime, et puus t on kõik asukohst p paremal pool asuvad tipud kas alampuus $t_{|p1}$ või, kui p on kujul $p = p'0q$, on nad asukohtadega p' ja $p'1q'$, kus $p', q', q \in \{0,1\}^*$. Antud tõestuses vaatame läbi kõik need juhud.

Kui sõna p ei sisalda ühtegi sümbolit 0, siis on kõik asukohast p paremal pool asuvad tipud puus $s_{|p1}$ (ja vastavalt ka puus $t_{|p1}$) ja me ei pea rohkem midagi näitama.

Oletame et p on kujul $p = p'0q$, kus $p', q \in \{0,1\}^*$. Kuna p' on paremal pool asukohast p, siis on asukohaga p' tipu tulem 1 (ja vastavalt lause 2.17 punktile 2 on ka puus $t_{|p'}$ juure tulem 1). Kuna s on kahendpuu, siis on p' sisetipu asukoht. Analoogiliselt eelnevaga on alampuu $s_{|p'1}$ tulem 1 ja seega on ka alampuu $t_{|p'1}$ tulem 1. Sellest järeldub, et alampuus $t_{|p'1}$ on iga tipu tulem 1.

Seega on näidatud, et ka puus t on iga asukohast p paremal pool asuva tipu tulem 1.

□

Järeldus 2.31. Olgu s ja t sellised faktoriseerimispuud, et $s \leq t$. Olgu $p \in \{0,1\}^*$ sellise tipu asukoht puus s, et iga alampuust $s_{|p}$ paremale poole jääva tipu tulem on 1. Siis ka puus t on iga alampuust $t_{|p}$ paremale poole jääva tipu tulem 1.

Tõestus. Tõestus on analoogiline eelneva lemma lõpus tehtule. □

Definitsioon 2.32. Olgu (a, n) tipp asukohaga p puus s. Kui p ei ole tühi sõna ja on kas kujul $p = p'0$ või $p = p'1$, siis tipu (a, n) ülemtipuks nimetame tippu asukohaga p'.

Järgnevas tõestuses kujutame joonistel alampuid kolmnurkadena. Näiteks alampuud s_1 kujutame, kui kolmnurga sisse kirjutatud sümbolit s_1. Juhul kui teame alampuu märgendit, siis kirjutame selle kolmnurga kõrvale.

Teoreem 2.33. Eeljärjestus $\leq$ on stabiilne hulgal A^*.

Tõestus. Olgu $u, v \in A^*$ selliselt, et $u \leq v$. Olgu $a \in A$. Näitame, et $ua \leq va$ (tõestus juhu $au \leq av$ jaoks on analoogiline). Olgu $s \in F(ua)$. Olgu $p \in \{0,1\}^*$ kõige parempoolsema tipu asukoht puus s, mille tulemiks ei ole element 1. See tähendab, et kõik asukohast p paremal pool asuvate tippude tulemid on tühjad sõnad.

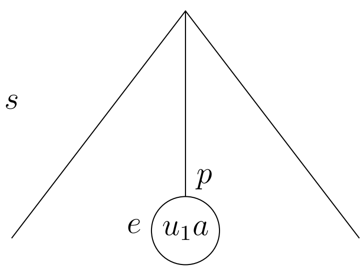
Kui tipp N asukohaga p on sisetipp, siis on ta kujul (a, n), kus $n \in N(M)$ ja $a \in B$. Sellisel juhul $s' = s[a \to 1]_p$ on sõna u faktoriseermispuu. Kuna $u \leq v$, siis leidub selline $t' \in F(v)$, et $s' \leq t'$. Kuna puu $s'_{|p}$ juure tulem on 1, siis vastavalt järeldusele 2.14 ka puu $t'_{|p}$ juure tulem on 1. Kuna $n \leq_{\mathcal{J}} \pi(a)$ ja puudel s' ja t' on sama sisetipp asukohas p, siis saame kasutada järeldust 2.20. Võttes $t = t'[1 \to a]_{|p}$ ja $s = s'[1 \to a]_{|p}$ saame järelduse 2.20 abil, et $s \leq t$. Kuna p on sisetipu asukoht puus s, siis tänu lemmale 2.30 teame, et puus t' on iga asukohast p paremale poole jääva tipu tulem 1. Seega puu t tulem on va.

Oletame nüüd, et N on leht. Vaatame kõigepealt juhtu, kus s ei ole ühetipuline puu. Asukoha p valiku tõttu on tipu N tulem sõna ua järelliide.

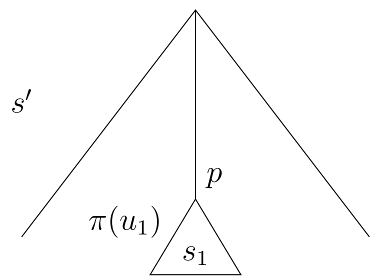
Seega $N = (u_1a, e)$, kus $e \in E(M)$, $u_1a \in R$ ja u_1 on sõna u mingi järelliide. Olgu (b, n) tipu N ülemtipp, siis faktoriseerimispuu definitsiooni järgi $n <_{\mathcal{J}} e$. Tulenevalt lausest 2.10 leidub sõnal u_1 faktoriseerimispuu $s_1 \in F(u_1)$ märgendiga $\pi(u_1)$. Saame

$$e \leq_{\mathcal{J}} \pi(u_1a) \leq_{\mathcal{J}} \pi(u_1) = \lambda(s_1) = \nu(s_1),$$

kus teine seos kehtib, sest $\pi(u_1a) = \pi(u_1)\pi(a)$. Seega $\lambda(s_{|p}) = e \leq_{\mathcal{J}} \lambda(s_1)$ ja seega vastavalt lausele 2.11 on $s' = s[s_1]_{|p}$ sõna u faktoriseerimispuu. Paneme tähele, et ka puus s' on tipule asukohaga p eelnev tipp (b, n).



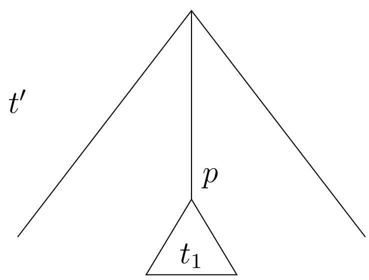
Joonis 2.8: Puu s



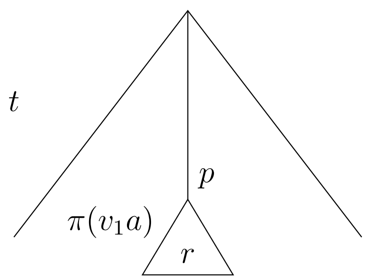
Joonis 2.9: puu s'

Kuna $u \leq v$, siis leidub selline $t' \in F(v)$, et $s' \leq t'$. Vastavalt seosele $\leq$ faktoriseerimispuudel teame, et ka puus t' on asukohale p eelneva tipu märgend n.

Tähistame $t_1 = t'_{|p}$. Kasutades teadmist, et $s' \leq t'$ saame, et $s_1 \leq t_1$ vastavalt lausele 2.17. Kuna puus s' on iga alampuust s_1 paremale poole jääva tipu tulem 1, siis vastavalt järeldusele 2.31 on ka puus t' iga alampuust t_1 paremale jääva tipu tulem 1. Seega puu t_1 tulem v_1 on sõna v järelliide.



Joonis 2.10: Puu t'



Joonis 2.11: Puu t

Kuna $\pi(u_1a) \in E(M)$, $\pi(u_1a) \leq_{\mathcal{J}} \nu(s_1)$ ja $s_1 \leq t_1$, siis vastavalt lausele 2.13 kehtib

$$e \leq_{\mathcal{J}} \pi(u_1a) \leq_{\mathcal{J}} \nu(t_1) = \pi(v_1).$$

Kuna lisaks ka $e \leq_{\mathcal{J}} \pi(u_1 a) \leq_{\mathcal{J}} \pi(a)$, siis vastavalt lausele 2.2 on

$$e \leq_{\mathcal{J}} \pi(u_1 a) \leq_{\mathcal{J}} \pi(v_1)\pi(a) = \pi(v_1 a). \tag{2.1}$$

Vastavalt lausele 2.10 on sõnal $v_1 a$ faktoriseerimispuu r märgendiga $\pi(v_1 a)$.

Kuna $n <_{\mathcal{J}} e$ ja $e \leq_{\mathcal{J}} \pi(v_1 a)$, siis $n <_{\mathcal{J}} \pi(v_1 a)$. Seega, kui me teeme asenduse $t = t'[r]_{|p}$, siis me saame faktoriseerimispuu, sest märgendid moodustavad endiselt kuhja ja ka ülejäänud faktoriseerimispuuks olemise nõuded on täidetud. Puu t on sõna va faktoriseerimispuu.

Näitame, et $(u_1 a, e) \leq r$. Tänu võrdusele 2.1 saame

$$\nu((u_1 a, e)) = \pi(u_1 a) \leq_{\mathcal{J}} \pi(v_1 a) = \nu(r)$$

ja

$$\lambda((u_1 a, e)) = e \leq_{\mathcal{J}} \pi(v_1 a) = \lambda(r).$$

Seega $(u_1 a, e) \leq r$.

Näitame, et $s \leq t$. Võtame puudes s ja t asukohaga p tipu ülemtipu (asukohaga p'). Oletame, et $p = p'0$ (juht $p = p'1$ on analoogiline), siis $s_{|p'} = ((u_1 a, e), (b, n), s_2)$ ja $t_{|p'} = (r, (c, n), t_2)$. Kehtib $c \in \{1, b\}$ ja $s_2 \leq t_2$, sest need alampuud ja tipud kuuluvad ka puudesse s' ja t'. Kuna ka $(u_1 a, e) \leq r$, siis $s_{|p'} \leq t_{p'}$. Niimoodi jätkates saame, et $s \leq t$.

Kui N on leht, aga s on ühetipuline puu, siis $N = (ua, e)$. Eelnevast tõestusest saame, et $e \leq_{\mathcal{J}} \pi(ua) \leq_{\mathcal{J}} \pi(va)$. Vastavalt lausele 2.10 leidub sõnal ua faktoriseerimispuu t märgendiga $\pi(ua)$. Seega $s \leq t$.

$\square$

2.5 Põhitulemus

Enne, kui kirjutame välja selle peatüki põhitulemuse, defineerime veel mõned mõisted.

Definitsioon 2.34. Olgu M monoid ja $a, b, c, d \in M$. Seost $\sim$ monoidil M nimetatakse **kongruentsiks**, kui see seos on ekvivalentsiseos ja sellest, et $a \sim b$ ja $c \sim d$ järeldub, et $ac \sim bd$.

Definitsioon 2.35. Monoidi M **faktormonodiks** kongruentsi $\sim$ järgi nimetatakse monoidi, mille elementideks on seose $\sim$ järgi tekkinud kõrvalklassid $\overline{u} = \{v \in M \mid v \sim u\}$, $u \in M$ ja millel korrutamine toimub eeskirjaga:

$$\overline{u} \cdot \overline{v} = \overline{uv}.$$

Seda monoidi tähsitatakse $M/\sim$. Selle monoidi ühikelemendiks on $\overline{1} = \{v \in M \mid v \sim 1\}$.

Lemma 2.36. Seos $\sim$ hulgal A^* on kongruents.

Tõestus. Me juba teame, et see seos on ekvivalentsiseos. Olgu $u, v, w, x \in A^*$ ja $u \sim v$ ning $w \sim x$. Kuna $u \sim v$, siis $u \leq v$ ja $v \leq u$. Vastavalt teoreemile 2.33 on nüüd $uw \leq vw$ ja $vw \leq uw$ ning seega $uw \sim vw$. Nüüd piisab näidata, et $vw \sim vx$. Selleks märkame, et kuna $w \leq x$ ja $x \leq w$, siis $vw \leq vx$ ja $vx \leq vw$ ning kokkuvõttes $vw \sim vx$. Seega $uw \sim vx$ ja väide on tõestatud. $\square$

Definitsioon 2.37. Järjestatud monoidiks nimetatakse monoidi $(M, \cdot)$ koos sellel defineeritud osalise järjestuse seosega $\leq$, mis on korrutamise suhtes stabiilne.

Teoreem 2.38. Iga lõplik $\mathcal{J}$-triviaalne monoid M on sellise lõpliku järjestatud monoidi faktormonoid, mis rahuldab samasust $x \leq 1$.

Tõestus. Lemmast 2.36 järeldub, et $N = A^*/{\sim}$ on faktormonoid. Teoreemis 2.26 tõestasime, et monoid N on lõplik. Tähistame monoidi N elemente ülakriipsuga. Olgu $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w} \in N$, siis $\overline{u} = \{t \in A^* \,|\, t \sim u\}$, $\overline{v} = \{t \in A^* \,|\, t \sim v\}$ ja $\overline{w} = \{t \in A^* \,|\, t \sim w\}$. Defineerime seose $\leq$ hulgal N nii, et $\overline{u} \leq \overline{v}$, kui mingi $u \in \overline{u}$ ja $v \in \overline{v}$ korral $u \leq v$. See seos on korrektselt defineeritud, sest ka iga $u_1 \in \overline{u}$ ja $v_1 \in \overline{v}$ korral $u_1 \leq u$ ja $v \leq v_1$ ning seose $\leq$ transitiivsuse tõttu $u_1 \leq v_1$. Näitame nüüd, et seos $\leq$ on hulgal N osalise järjestuse seos:

1. On selge, et $\overline{u} \leq \overline{u}$, sest iga $u_1, u_2 \in \overline{u}$ korral $u_1 \leq u_2$.
2. Olgu $\overline{u} \leq \overline{v}$ ja $\overline{v} \leq \overline{u}$ ning $u \in \overline{u}$ ja $v \in \overline{v}$. Siis $u \leq v$ ja $v \leq u$. Vastavalt seose $\sim$ definitsioonile on nüüd $u \sim v$ ja seega $\overline{u} = \overline{v}$.
3. Olgu $\overline{u} \leq \overline{v}$ ja $\overline{v} \leq \overline{w}$ ning $u \in \overline{u}$, $v \in \overline{v}$ ja $w \in \overline{w}$. Siis $u \leq v$ ja $v \leq w$, ning seose $\leq$ transitiivsuse tõttu hulgal A^* on $u \leq w$ ja seega $\overline{u} \leq \overline{w}$.

Seega on monoidil N defineeritud osalise järjestuse seos.

Seos $\leq$ on stabiilne monoidil N. Olgu $\overline{u} \leq \overline{v}$ ja $u \in \overline{u}$, $v \in \overline{v}$, $w \in \overline{w}$. Teame, et $u \leq v$ ning vastavalt teoreemile 2.33 on $uw \leq vw$ ja seega $\overline{uw} \leq \overline{vw}$. Analoogiliselt $\overline{wu} \leq \overline{wv}$. Seega on seos $\leq$ stabiilne ja $(N, \leq)$ on järjestatud monoid.

Näitame, et iga $\overline{u} \in N$ korral $\overline{u} \leq \overline{1}$. Olgu $\overline{u} \in N$, siis iga $u \in \overline{u}$ korral on vastavalt lausele 2.22 $u \leq 1$. Seega $\overline{u} \leq \overline{1}$ ja kuna $\overline{u}$ oli valitud vabalt, siis kehtib see iga monoidi N elemendi korral.

Defineerime monoidil N seose ρ selliselt, et $\overline{u} \rho \overline{v}$ parajasti siis, kui $\pi(u) = \pi(v)$ mingi $u \in \overline{u}$ ja $v \in \overline{v}$ korral. See seos on korrektselt defineeritud, sest iga $\overline{u}, \overline{v} \in N$ ja iga $u_1, u_2 \in \overline{u}$, $v_1, v_2 \in \overline{v}$ korral $\pi(u_1) = \pi(u_2)$ ja $\pi(v_1) = \pi(v_2)$ vastavalt teoreemile 2.29. On üsna selge, et ρ on ekvivalentsiseos monoidil N. Lisaks, kuna π on homomorfism, on seos ρ ka kongruents. Seega on N/ρ faktormonoid. Tähistame monoidi N/ρ elemente lainelise ülakriipsuga.

Näitame, et $N/\rho \simeq M$. Selleks näitame, et $\varphi : N/\rho \to M$, $\widetilde{u} \mapsto \pi(u)$ on isomorfism. Tänu ρ definitsioonile on kujutus φ injektiivne. Näitame, et ta on ka sürjektiivne. Olgu $a \in M$, kuna homomorfism $\pi : A^* \to M$ on sürjektiivne, siis leidub selline $u \in A^*$, et $\pi(u) = a$. Kuna $u \in A^*$, siis $\overline{u} \in N$ ja $\widetilde{u} \in N/\rho$ ning seega $\varphi(\widetilde{u}) = \pi(u)$. Seega on kujutus φ sürjektiivne. Piisab veel näidata, et φ on homomorfism. Olgu $\widetilde{u}, \widetilde{v} \in N/\rho$, siis

$$\varphi(\widetilde{u} \cdot \widetilde{v}) = \varphi(\widetilde{uv}) = \pi(uv) = \pi(u) \cdot \pi(v) = \varphi(\widetilde{u}) \cdot \varphi(\widetilde{v})$$

ja seega on φ homomorfism ja kokkuvõttes ka isomorfism. $\square$

3. Simoni teoreem

3.1 Tarvilikke eelteadmisi keeltest

Selles alapeatükis defineerime keele ja erinevad keelega seotud mõisted, mis on tarvilikud Simoni teoreemi mõistmiseks.

Järgnevad keeltega seotud mõisted on pärit artiklist [6].

Definitsioon 3.1. Olgu A lõplik mittetühi tähestik, A^* on sõnade hulk üle tähestiku A (sisaldades ka tühja sõna). Mistahes hulka $L \subseteq A^*$ nimetatakse **keeleks**.

Definitsioon 3.2. Olgu meil kaks sõna $u, v \in A^*$. Ütleme, et sõna u on sõna v **tükiti alamsõna**, kui leiduvad sellised $u_1, \ldots, u_n, w_0, w_1, \ldots, w_n \in A^*$, et $u = u_1 \ldots u_n$ ja $v = w_0 u_1 w_1 \ldots u_n w_n$. Tähistame seda $u \lhd v$.

Olgu $k \in \mathbb{N}$, tähistame sõna v kõigi pikkusega k tükiti alamsõnade hulka

$$\mathrm{Sub}_k(v) = \{w \in A^* \mid w \lhd v, |w| \leq k\}.$$

Iga k korral defineerime hulgal A^* seose $\sim_k$ järgmiselt:

$$u \sim_k v \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Sub}_k(u) = \mathrm{Sub}_k(v),$$

kus $u, v \in A^*$. On lihtne näha, et seos $\sim_k$ on ekvivalentsusseos hulgal A^*. Paneme tähele, et ekvivalentsiklasse hulgas A^* on lõplik arv. Seda seetõttu, et lõpliku tähestiku korral on kuni pikkusega k sõnu lõplik arv ja nendest sõnadest moodustatud kõikvõimalikke osahulki on samuti lõplik arv. Seega on faktorhulgas $A^*/{\sim_k}$ lõplik arv elemente. Paneme lisaks tähele, et iga $u, v, w \in A^*$ korral sellest, et $\mathrm{Sub}_k(u) = \mathrm{Sub}_k(v)$ järeldub, et $\mathrm{Sub}_k(wu) = \mathrm{Sub}_k(wv)$ ja $\mathrm{Sub}_k(uw) = \mathrm{Sub}_k(vw)$. Ehk sellest, et $u \sim_k v$ järeldub, et $uw \sim_k vw$ ja $wu \sim_k wv$. Seega, kui $w \sim_k x$, siis on meil $uw \sim_k vw$ ja $vw \sim_k vx$ ning kokkuvõttes $uw \sim_k vx$ ja seos $\sim_k$ on kongruentsiks monoidil A^*. Seega $A^*/{\sim_k}$ on faktormonoid.

Definitsioon 3.3. Keelt L nimetatakse **tükiviisi testitavaks** parajasti siis, kui leidub selline $k \in \mathbb{N}$, et kui $u \sim_k v$, siis

$$u \in L \Longleftrightarrow v \in L.$$

Defineerime seose $\sim_L$ hulgal A^*. Iga $u, v \in A^*$ korral:

$$u \sim_L v \quad \text{parajasti siis, kui} \quad (\forall p, q \in A^*)(puq \in L \Longleftrightarrow pvq \in L).$$

On lihtne veenduda, et seos $\sim_L$ on kongruents monoidil A^*.

Definitsioon 3.4. Faktormonoidi $A^*/{\sim_L}$ nimetatakse keele L **süntaktiliseks monoidiks**.

Järgnevad mõisted ja näide on pärit käsikirjast [8, lk. 77-78].

Definitsioon 3.5. Olgu M ja N monoidid, ning olgu $\varphi : M \to N$ sürjektiivne homomorfism. Ütleme, et kujutus φ **tunneb ära** osahulga $L \subseteq M$, kui leidub selline alamhulk $P \subseteq N$, et

$$L = \varphi^{-1}(P).$$

Kui φ on sürjektiivne, siis ütleme, et φ **tunneb täielikult ära** osahulga L.

Definitsioon 3.6. Olgu M ja N monoidid, ning olgu $L \subseteq M$. Ütleme, et monoid N **tunneb täielikult ära** hulga L, kui leidub selline homomorfism $\varphi : M \to N$, mis tunneb täielikult ära osahulga L.

Näide 3.7. Olgu meil tähestik $A = \{a, b\}$ ja monoid $M = \{0, 1, a, b, ab, ba\}$, kus korrutamine on defineeritud järgnevalt: $aba = a, bab = b$, $aa = bb = 0$ ning nulliga korrutamise tulemus on alati 0. Vaatame homomorfismi $\varphi : A^* \to M$, mis on defineeritud järgnevalt: $\varphi(a) = a$, $\varphi(b) = b$.

Kujutus φ tunneb täielikult ära keele $L = (ab)^*a$, sest $\varphi^{-1}(a) = (ab)^*a$. Samuti tunneb kujuts φ täielikult ära keele $L = b(ab)^*a$, sest $\varphi^{-1}(ba) = b(ab)^*a$. Kuid kujutus φ ei tunne ära keelt $L = A^*aaA^*$, sest $\varphi(L) = 0$, aga $\varphi^{-1}(0) = A^*aaA^* \cup A^*bbA^*$

Selleks, et rääkida regulaarsetest keeltest, peame kõigepealt tutvustame automadi mõistet. Viimasega seotud mõisted on pärit loengukonspektist [10].

Definitsioon 3.8. **Lõplik automaat** on viisik $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, kus:

- Q on lõplik olekute hulk;
- Σ on lõplik sümbolite hulk (tähestik);

- $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ on üleminekufunktsioon;
- $q_0 \in Q$ on algolek;
- $F \subset Q$ on aktsepteerivate olekute hulk.

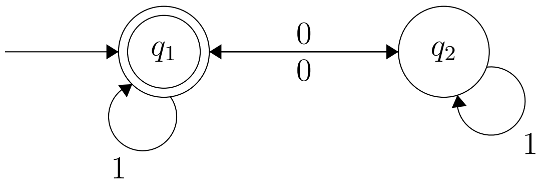
Automaat saab igal hetkel olla täpselt ühes hulga Q olekutest, kuid ta võib vastavalt sisendile suunduda ühest olekust teise. Sisend saab koosneda ainult tähestiku Σ abil koostatud sõnadest.

Toome näite ühest lihtsast lõplikust automaadist.

Näide 3.9. Olgu $Q\{q_1, q_2\}$, $\Sigma = \{0, 1\}$, algolekuks on $q_0 = q_1$ ning aktsepteerivate olekute hulk on $F = \{q_1\}$. Üleminekufunktsioon δ on määratud järgnevalt:

$$\delta(q_1, 0) = q_2, \quad \delta(q_1, 1) = q_1, \quad \delta(q_2, 0) = q_1, \quad \delta(q_2, 1) = q_2.$$

Selle automaadi olekudiagramm on antud joonisel 3.1, kus ringid tähistavad



Joonis 3.1: Olekudiagramm

automaadi olekuid ja nooled tähistavad üleminekufunktsioone. Topeltring tähistab aktsepteerivat olekut ja ilma alguseta nool viib algolekusse.

Definitsioon 3.10. Ütleme, et automaat **aktsepteerib** sõna $w \in \Sigma^*$, kui selle sõna andmisel automaadi sisendiks lõpetab automaat aktsepteerivas olekus.

Näites 3.9 olnud automaat aktsepteerib näiteks sõnasid 00 ja 0101, aga mitte sõnasid 000 ja 101.

Definitsioon 3.11. Kui keel L koosneb parajasti kõigist nendest sõnadest, mida lõplik automaat M aktsepteerib, siis ütleme, et automaat M **aktsepteerib** (ehk tunneb ära) keelt L.

Näites 3.9 toodud automaat aktsepteerib keelt L, mis koosneb sõnadest, kus on paarisarv nulle.

Definitsioon 3.12. Keelt L nimetatakse **regulaarseks**, kui leidub selline lõplik automaat, mis keelt L aktsepteerib.

Järgneva lause tõestus ning sellele järgnev näide on leitavad raamatust [3, lk. 160-161].

Lause 3.13. Keel L on regulaarne parajasti siis, kui selle keele süntaktiline monoid on lõplik.

Toome näite keelest, mille süntaktiline monoid ei ole lõplik ja mis seetõttu ei ole regulaarne.

Näide 3.14. Olgu meil tähestik $A = \{0, 1\}$ ja vaatleme keelt $L = \{0^n 10^n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset A^*$. Näitame, et sõnad $0, 0^2, ..., 0^n, ..$ kuuluvad kõik erinevatesse kongruentsiklassidesse seose $\sim_L$ järgi. Selleks oletame, et $0^p \sim_L 0^q$ mingite $p, q \in \mathbb{N}, p < q$ korral. Kuna

$$0^p(10^p) = 0^p 10^p \in L$$

siis vastavalt seose $\sim_L$ definitsioonile ka $0^q(10^p) = 0^q 10^p \in L$. Kuid $p \neq q$ ja seega $0^q 10^p \notin L$. Niisiis sisaldab keele L süntaktiline monoid lõpmata palju elemente ja keel L pole regulaarne.

3.2 Simoni teoreem

Antud alapeatükk põhineb artiklitel [11] ja [9] ning käsikirjal [8, lk. 89].Meenutame sissejuhatuses toodud teoreemi:

Teoreem 1. Iga lõplik monoid M on $\mathcal{J}$-triviaalne parajasti siis, kui ta on sellise lõpliku järjestatud monoidi faktormonoid, kus kehtib samasus $x \leq 1$.

Meie tõestasime eelnevalt selle teoreemi ühe poole. Teise poole jätame käesolevas töös tõestamata, kuid illustreerimaks tulemuse olulisust näitame, et teoreemist 1 järeldub Simoni teoreem. Selleks toome kõigepealt sisse ühe abilemma, mida me siinkohal ei tõesta, kuid mille tõestus on leitav käsikirjast [8, lk. 89].

Lemma 3.15. Olgu hulk L monoidi M alamhulk. Monoid N tunneb täielikult ära alamhulga L parajasti siis, kui hulga L süntaktiline monoid on monoidi N faktormonoid.

Atiklist [11] on pärit järgmine teadmine.

Lemma 3.16. Olgu M lõplik ja $\mathcal{J}$-triviaalne monoid. Monoidil M leidub osaline järjestus $\leq$, mis on korrutamise suhtes stabiilne ja millel kehtib samasus $x \leq 1$.

Teoreem 2. (**Simoni teoreem**) Regulaarne keel on tükiviisi testitav parajasti siis, kui selle keele süntaktiline monoid on lõplik $\mathcal{J}$-triviaalne monoid.

Tõestus. Olgu meil lõplik tähestik A ja keel $L \subset A^*$.

Oletame kõigepealt, et regulaarne keel L on tükiviisi testitav. Seega leidub selline $k \in \mathbb{N}$, et kui $u \sim_k v$ siis

$$u \in L \Longleftrightarrow v \in L.$$

Kuna $\sim_k$ on kongruents monoidil A^*, siis $N = A^*/\sim_k$ on faktormonoid. Tähistame monoidi N elemente ülakriipsuga.

Näitame, et N on järjestatud monoid. Olgu $\overline{u}, \overline{v} \in N$, kus $\overline{u} = \{w \in A^* \,|\, w \sim_k u\}$, $\overline{v} = \{w \in A^* \,|\, w \sim_k v\}$. Defineerime järjestuse monoidil N selliselt, et $\overline{u} \leq \overline{v}$ parajasti siis, kui $\mathrm{Sub}_k(v) \subset \mathrm{Sub}_k(u)$. Olgu $\overline{1} \in N$, siis $\mathrm{Sub}_k(1) = \{1\}$ (kus 1 tähistab tühja sõna) ja on selge, et iga $\overline{u} \in N$ korral $\overline{u} \leq \overline{1}$. Samuti on selge, et järjestus $\leq$ on hulgal refleksiivne. Seos on antisümmeetriline, sest kui $\mathrm{Sub}_k(v) \subset \mathrm{Sub}_k(u)$ ja $\mathrm{Sub}_k(u) \subset \mathrm{Sub}_k(v)$, siis $\mathrm{Sub}_k(v) = \mathrm{Sub}_k(u)$ ja vastavalt seose $\sim_k$ definitsioonile $u \sim_k v$ ning seega $\overline{u} = \overline{v}$ hulgas N. On selge, et seos on transitiivne ja seega on seos $\leq$ hulgal N järjestus. Näitamaks, et N on järjestatud monoid on veel vaja näidata, et $\leq$ on stabiilne hulgal N. Selleks piisab näidata, et ta on stabiilne paremalt poolt korrutamise suhtes (teistpidi on analoogiline). Olgu $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w} \in N$ sellised, et $\overline{u} \leq \overline{v}$. Kuna $\mathrm{Sub}_k(u) \subset \mathrm{Sub}_k(v)$, siis ka $\mathrm{Sub}_k(uw) \subset \mathrm{Sub}_k(vw)$ ja $\overline{uw} \leq \overline{vw}$ ning seos on stabiilne hulgal N. Seega on N järjestatud monoid.

Näitamaks, et $A^*/\sim_L$ on $\mathcal{J}$-triviaalne, piisab näidata, et ta on monoidi N faktormonoid. Tänu lemmale 3.15 piisab selleks näidata, et monoid N tunneb täielikult ära keele L.

Olgu $\varphi : A^* \to N$, $u \mapsto \overline{u}$. Kujutus φ on homomorfism, sest iga $u, v \in A^*$ korral

$$\varphi(uv) = \overline{uv} = \overline{u} \cdot \overline{v} = \varphi(u) \cdot \varphi(v).$$

On selge, et φ on sürjektiivne. Näitame, et φ tunneb ära keele L. Selleks võtame $P \subseteq N$ selliselt, et $P = \{\overline{u} \in N \,|\, u \in L\}$. On selge, et $L \subseteq \varphi^{-1}(P)$. Oletame nüüd, et leidub $v \in A^*$ selliselt, et $\overline{v} \in P$, aga $v \notin L$. Kuna $\overline{v} \in P$, siis leidub $u \in L$ nii, et $\overline{u} = \overline{v}$. Seega $v \sim_k u$ ja kuna keel on tükiviisi testitav ja $u \in L$ siis ka $v \in L$. Oleme jõudnud vastuoluni ja seega sellist sõna v ei leidu. Seega $L = \varphi^{-1}(P)$ ja järelikult monoid N tunneb ära keele L. Seega on $A^*/\sim_L$ monoidi N faktormonoid. Vastavalt teoreemile 1 on keele süntaktiline monoid $\mathcal{J}$-triviaalne.

Oletame nüüd, et keele süntaktiline monoid $M = A^*/\sim_L$ on lõplik ja $\mathcal{J}$-triviaalne. Tähistame monodi M elemente ülakriipsuga ja iga $\overline{u} \in M$ korral

$\overline{u} = \{v \in A^* \,|\, v \sim_L u\}$. Olgu $\pi : A^* \to A^*/{\sim_L}$, $u \mapsto \overline{u}$. Kujutus π on homomorfism, sest

$$\pi(uv) = \overline{uv} = \overline{u} \cdot \overline{v} = \pi(u) \cdot \pi(v).$$

Vastavalt Lemmale 3.16 on monoidil M olemas stabiilne osaline järjestus $\leq$, kusjuures kehtib samasus $\overline{x} \leq \overline{1}$ iga $\overline{x} \in M$ korral. Kuna järjestus on antisümmeetriline, siis iga $\overline{x} \in M$ korral, kus $\overline{x} \neq \overline{1}$ kehtib $\overline{x} < \overline{1}$. Olgu pikima võimaliku ahela pikkus seose $<$ järgi $r + 1$, kus $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Kui $r = 0$, siis on pikima ahela pikkus 1 ja seega koosneb monoid M ühest elemendist. See tähendab, et $L = A^*$ või $L = \emptyset$. Seega iga $k \in \mathbb{N}$ korral sellest, et mingi $u, v \in A^*$ korral $u \sim_k v$ saame, et $u \in L$ parajasti siis, kui $v \in L$, sest kas kõik sõnad kuuluvad keelde L või mitte ükski ei kuulu.

Olgu $r \geq 1$. Olgu $w_1, w_2 \in A^*$ sellised, et $w_1 \sim_r w_2$. Kui $\pi(w_1) = 1$, siis $\pi(w_2) \leq 1 = \pi(w_1)$. Kui me oletame, et $\pi(w_2) \neq 1$, siis leidub sõnas w_2 täht $a \in A$ selliselt, et $\pi(a) < 1$. Kuid siis ka sõnas w_1 leidub selline täht, sest $w_1 \sim_r w_2$. Sellisel juhul, aga $\pi(w_1) \neq 1$. Seega oleme jõudnud vastuoluni ja $\pi(w_2) = 1$ ning $\overline{w_1} = \overline{w_2}$.

Oletame nüüd, et $\pi(w_1) \neq 1$. Olgu w_1' sõna w_1 selline maksimaalse pikkusega eesliide, et $\pi(w_1') > \pi(w_1)$. Oluline on just see, et järjestus oleks range, sest $\pi(w_1') \geq \pi(w_1)$ kehtib alati (see järeldub seose $\leq$ stabiilsusest ja sellest, et $\overline{x} \leq \overline{1}$). Selline eesliide alati leidub, sest vajadusel võime selleks võtta $1 \in A^*$ ehk tühja sõna. Seega $w_1 = w_1' v_1'$, kus $w_1', v_1' \in A^*$. Sõna v_1' saame esitada kujul $v_1' = a_1 v_1$, kus $a_1 \in A$ ja $v_1 \in A^*$. Selline a_1 leidub, sest $w_1' \neq w_1$ ja seega v_1' sisaldab vähemalt ühte tähte. Tulenevalt w_1' definitsioonist on $\pi(w_1' a_1) = \pi(w_1' a_1 v_1) = \pi(w_1)$. Sama protsessi saame jätkata sõnal w_1', et esitada ta kujul $w_1' = w_2' a_2 v_2$. Jätkame seda protsessi nii kaua kui võimalik, aga kuna pikima ahela pikkus seose $<$ järgi on $r + 1$, siis ei saa see protsess lõputult kesta. Lõpuks saame $w_1 = v_{s+1} a_s v_s ... a_1 v_1$ selliselt, et:

$$1 = \pi(v_{s+1}) > \pi(v_{s+1} a_s) = \pi(v_{s+1} a_s v_s) > \pi(v_{s+1} a_s v_s a_{s-1}) = ... = \pi(w_1).$$

Kusjuures $s \leq r$, sest maksimaalne ahela pikkus on $r + 1$. Tulenevalt meie konstruktsioonist ja sellest, et π on homomorfism saame nüüd, et

$$\begin{aligned}
\pi(w_1) &= \pi(v_{s+1} a_s v_s \ldots a_1 v_1) = \pi(v_{s+1} a_s v_s \ldots a_1) = \pi(v_{s+1} a_s v_s \ldots a_2 v_2) \pi(a_1) \\
&= \pi(v_{s+1} a_s v_s \ldots a_2) \pi(a_1) = \pi(v_{s+1} a_s v_s \ldots a_3 v_3) \pi(a_2) \pi(a_1) \\
&= \pi(v_{s+1}) \pi(a_s) \ldots \pi(a_2) \pi(a_1) = \pi(a_s) \ldots \pi(a_2) \pi(a_1) \\
&= \pi(a_s \ldots a_2 a_1).
\end{aligned}$$

Kuna $w_1 \sim_r w_2$, siis leiduvad sellised $u_1, ..., u_{s+1} \in A^*$, et $w_2 = u_{s+1} a_s v_s ... a_1 u_1$. Nüüd kasutades seda, et $\leq$ on korrutamise suhtes stabiilne saame, et

$$\pi(w_2) = \pi(u_{s+1}) \cdot \pi(a_s) \cdot \pi(u_s) \cdot ... \cdot \pi(a_1) \cdot \pi(u_1) \leq 1 \cdot \pi(a_s) \cdot 1 \cdot ... \cdot \pi(a_1) \cdot 1 = \pi(w_1).$$

Analoogiliselt saab näidata, et $\pi(w_1) \leq \pi(w_2)$ ja seega $\overline{w_1} = \pi(w_1) = \pi(w_2) = \overline{w_2}$, kust järeldub et $w_1 \in L$ parajasti siis, kui $w_2 \in L$. Seega on L tükiviisi testitav. $\square$

Märkus 3.17. Teame lausest 3.13, et keel on regulaarne parajasti siis, kui selle keele süntaktiline monoid on lõplik. Seega saab Simoni teoreemi sõnastada ka ilma nõudeta, et keele süntaktiline monoid on lõplik, kui jätame alles nõude, et keel L on regulaarne. Analoogiliselt saab ära jätta nõude, et keel L on regulaarne, kui jätame alles tingimuse, et keele süntaktiline monoid on lõplik.

Näide 3.18. Vaatame keelt abc^* üle tähestiku $A = \{a, b, c\}$. Selle keele süntaktiline monoid on $M = \{1, a, b, c, ab, 0\}$. See $\mathcal{J}$-triviaalne monoid on sama, mida vaatasime näites 1.4 ja seega on keel abc^* tükiviisi testitav.

Kasutatud kirjandus

[1] T. Denton *et al.* “On the representation theory of finite J-trivial monoids”. *Seminaire Lotharingien de Combinatoire* 64 (2011), Art. B64d, 44.

[2] K. Henckell ja J.-E. Pin. “Ordered Monoids and J-Trivial Monoids”. Teoses: *Algorithmic Problems in Groups and Semigroups*. Toim. J.-C. Birget *et al.* Birkhäuser, Boston, 2000, lk. 121–137.

[3] M. Holcombe. *Algebraic Automata Theory*. Cambridge University Press, 1982.

[4] P. Karandikar, M. Kufleitner ja Ph. Schnoebelen. “On the index of Simon’s congruence for piecewise testability”. *Inform. Process. Lett.* 115.4 (2015), lk. 515–519.

[5] M. Kilp. *Algebra II*. Paar, Tartu, 1998.

[6] O. Klíma. “Piecewise testable languages via combinatorics on words”. *Discrete Math.* 311.20 (2011), lk. 2124–2127.

[7] T. Masopust. “Separability by piecewise testable languages is PTime-complete”. *Theoret. Comput. Sci.* 711 (2018), lk. 109–114.

[8] J.-E. Pin. *Mathematical Foundations of Automata Theory*. URL: `https://www.irif.fr/~jep/PDF/MPRI/MPRI.pdf`. Viimati külastatud 10.05.2020.

[9] I. Simon. “Piecewise testable events”. Teoses: *Automata Theory and Formal Languages*. Toim. H. Brakhage. Lecture Notes in Computer Science 33. Springer, Berlin, Heidelberg, 1975, lk. 214–222.

[10] V. Skachek ja R. Palm. *Sissejuhatus teoreetilisse informaatikasse, Loengukonspekt: 5. Automaaditeooria*. URL: `https://courses.cs.ut.ee/LTAT.04.001/2020_spring/uploads/Main/Week_5_EST_r.pdf`. Viimati külastatud 10.05.2020.

[11] H. Straubing ja D. Thérien. “Partially ordered finite monoids and a theorem of I. Simon”. *J. Algebra* 119.2 (1988), lk. 393–399.

[12] D. Thérien. "Classification of finite monoids: the language approach". *Theoret. Comput. Sci.* 14.2 (1981), lk. 195–208.

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Karolina Tammemaa

1. Annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) minu loodud teose "$\mathcal{J}$-triviaalsed monoidid ja tükiviisi testitavad keeled", mille juhendaja on Lauri Tart, reprodutseerimiseks eesmärgiga seda säilitada, sealhulgas lisada digitaalarhiivi DSpace kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.

2. Annan Tartu Ülikoolile loa teha punktis 1 nimetatud teos üldsusele kättesaadavaks Tartu Ülikooli veebikeskkonna, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace kaudu Creative Commonsi litsentsiga CC BY NC ND 3.0, mis lubab autorile viidates teost reprodutseerida, levitada ja üldsusele suunata ning keelab luua tuletatud teost ja kasutada teost ärieesmärgil, kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.

3. Olen teadlik, et punktides 1 ja 2 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

4. Kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei riku ma teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse õigusaktidest tulenevaid õigusi.

Karolina Tammemaa

19.05.2020