TARTU ÜLIKOOL
LOODUS- JA TÄPPISTEADUSTE VALDKOND
Matemaatika ja statistika instituut
Matemaatika eriala

Ingeborg Virveste

Banachi ruumi Schuri omadus

Bakalaureusetöö (9 EAP)

Juhendajad: Julia Martsinkevitš
Märt Põldvere

Tartu 2018

Banachi ruumi Schuri omadus

Bakalaureusetöö

Ingeborg Virveste

Lühikokkuvõte. Bakalaureusetöös kirjutatakse detailselt lahti kaks tõestust klassikalisele I. Schuri teoreemile aastast 1921, mille kohaselt Banachi ruumis ℓ_1 on jadade nõrk koonduvus samaväärne nende normi järgi koonduvusega (teisisõnu, ruumil ℓ_1 on Schuri omadus). Esimene tõestus kasutab libiseva küüru meetodit ning teine toetub Baire'i teoreemile. Töö lõpetuseks veendutakse, et Banachi ruumidel c_0 ja ℓ_p, kus $1 < p < \infty$, pole Schuri omadust.

CERCS teaduseriala: P140 Read, Fourier analüüs, funktsionaalanalüüs.

Märksõnad: Banachi ruum, nõrk koonduvus, Schuri omadus, libiseva küüru meetod, Baire'i teoreem.

The Schur Property of Banach Spaces

Bachelor's thesis

Ingeborg Virveste

Abstract. In this bachelor's thesis, two proofs are presented in detail to a classical theorem of I. Schur from 1921 according to which weak and norm convergence of sequences in the Banach space ℓ_1 are the same (in other words, the space ℓ_1 has the Schur property). First of these proofs uses the gliding hump argument while the second is based on the Baire category theorem. To end with, it is shown that the Banach spaces c_0 and ℓ_p, where $1 < p < \infty$, lack the Schur property.

CERCS research specialisation: P140 Series, Fourier analysis, functional analysis.

Key words: Banach space, weak convergence, Schur property, gliding hump argument, Baire category theorem.

Sisukord

Sissejuhatus

Käesoleva bakalaureusetöö eesmärk on kirjutada üksikasjalikult lahti kaks tõestust I. Schuri[1] klassikalisele teoreemile aastast 1921 [S], mille kohaselt Banachi ruumis ℓ_1 on jadade nõrk koonduvus samaväärne nende normi järgi koonduvusega (teisisõnu, ruumil ℓ_1 on Schuri omadus). Esimene neist tõestustest kasutab libiseva küüru meetodit ning teine toetub Baire'i teoreemile.

Bakalaureusetöö koostamisel on toetutud peamiselt õpikutele [DJT] ja [M].

Töö koosneb kuuest paragrahvist.

Esimeses paragrahvis on välja toodud edasise töö jaoks vajalikud eelteadmised, mis on tuttavad funktsionaalanalüüsi põhikursustest. Kõigepealt tuletatakse meelde klassikalised jadaruumid c_0 ja ℓ_p, kus $1 \leqslant p \leqslant \infty$, ning seejärel kirjeldatakse nende kaasruume (v.a ruumi ℓ_∞ kaasruumi).

Teises paragrahvis defineeritakse jada nõrk koonduvus, tõestatakse, et jada normi järgi koonduvusest järeldub tema nõrk koonduvus ning et Banachi ruumis ℓ_1 järeldub jada nõrgast koonduvusest tema koordinaaditi koonduvus. Paragrahvi lõpus tuuakse sisse normeeritud ruumi Schuri omadus.

Kolmandas paragrahvis tõestatakse, et Banachi ruumil ℓ_1 on Schuri omadus (Schuri teoreem), kasutades libiseva küüru meetodit.

Neljandas paragrahvis defineeritakse ruumi ℓ_∞ kinnises ühikkeras B_{ℓ_∞} üks kaugus ρ ning näidatakse, et B_{ℓ_∞} on selle kauguse suhtes täielik meetriline ruum. Seejärel kirjeldatakse jadade koonduvust ruumis (B_{ℓ_∞}, ρ). Muuhulgas näidatakse, et jada koonduvus selle meetrika suhtes on samaväärne tema koordinaaditi koonduvusega.

Viiendas paragrahvis esitatakse Schuri teoreemile tõestus, mis toetub Baire'i teoreemile ja neljanda paragrahvi tulemustele.

Töö viimases, kuuendas paragrahvis näidatakse, et Banachi ruumidel c_0 ja ℓ_p, kus $1 < p < \infty$, pole Schuri omadust.

Töös on kasutatud järgmisi tähistusi.

Kui $x \in \mathbb{R}$, siis

$$\operatorname{sign}(x) := \begin{cases} 1, & \text{kui } x \geqslant 0, \\ -1, & \text{kui } x < 0. \end{cases}$$

[1]Issai Schur (1875–1941), saksa matemaatik.

Töös vaadeldakse ainult reaalseid normeeritud ruume. Kui X on normeeritud ruum, siis ruumi X kaasruumi (st pidevate lineaarsete funktsionaalide $X \to \mathbb{R}$ ruumi) tähistatakse sümboliga X^*. Sümboliga B_X tähistatakse ruumi X kinnist ühikkera, st

$$B_X := \{x \in X \colon \|x\| \leqslant 1\}.$$

1 Vajalikud eelteadmised

Selles paragrahvis toome välja edaspidi vajaminevad tähistused ja teoreemid. Kõik teoreemid kuuluvad funktsionaalanalüüsi põhikursustesse, seepärast on nad esitatud ilma tõestusteta (tõestused võib leida nt õpikust [OO] või [M]).

1.1 Klassikalised jadaruumid

Kõigi nulliks koonduvate arvjadade hulka tähistatakse sümboliga c_0. Niisiis,

$$c_0 := \left\{ (x_k)_{k=1}^{\infty} \colon\ x_k \in \mathbb{R}, \lim_{k\to\infty} x_k = 0 \right\}.$$

Paneme tähele, et hulk c_0 on vektorruum komponenthaaval defineeritud tehete suhtes. Vahetu kontroll näitab, et c_0 on normeeritud ruum järgmise normi suhtes:

$$\|x\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k|, \qquad x = (x_k)_{k=1}^{\infty} \in c_0.$$

Olgu $1 \leqslant p < \infty$. Sümboliga ℓ_p tähistatakse kõigi selliste arvjadade $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ hulka, mille korral $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty$. Niisiis,

$$\ell_p := \left\{ (x_k)_{k=1}^{\infty} \colon\ x_k \in \mathbb{R}, \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty \right\}.$$

Paneme tähele, et hulk ℓ_p on vektorruum komponenthaaval defineeritud tehete suhtes. Kasutades Minkowski[2] võrratust, saab näidata, et ℓ_p on normeeritud ruum järgmise normi suhtes:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \qquad x = (x_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_p.$$

Kõigi tõkestatud arvjadade hulka tähistatakse sümboliga ℓ_∞. Niisiis,

$$\ell_\infty := \left\{ (x_k)_{k=1}^{\infty} \colon\ x_k \in \mathbb{R}, \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k| < \infty \right\}.$$

Paneme tähele, et hulk ℓ_∞ on vektorruum komponenthaaval defineeritud tehete suh-

[2]Hermann Minkowski (1864–1909), saksa matemaatik.

tes. Vahetult on kontrollitav, et ℓ_∞ on normeeritud ruum järgmise normi suhtes:

$$\|x\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k|, \qquad x = (x_k)_{k=1}^\infty \in \ell_\infty.$$

1.2 Kaasruumide kirjeldusi

Selles punktis esitame jadaruumide c_0 ja l_p, kus $1 \leqslant p < \infty$, kaasruumide kirjeldused.

Teoreem 1.1 (vt nt [OO, lk 161, teoreem 1])**.** *Kujutus* $T\colon\ \ell_\infty \to \ell_1^*$, *kus*

$$(Ty)(x) = \sum_{k=1}^\infty y_k x_k, \qquad y = (y_k)_{k=1}^\infty \in \ell_\infty,\ x = (x_k)_{k=1}^\infty \in \ell_1, \tag{1.1}$$

on isomeetriline isomorfism ruumide ℓ_∞ *ja* ℓ_1^* *vahel.*

Teoreem 1.1 ütleb, et ruumid ℓ_1^* ja ℓ_∞ on loomulikul viisil samastatavad ning seda märgitakse lühidalt võrdusega $\ell_1^* = \ell_\infty$. Kui funktsionaal $x^* \in \ell_1^*$ on samastatav jadaga $(y_k)_{k=1}^\infty \in \ell_\infty$, siis, kasutades võrdust (1.1), saame kirjutada, et

$$x^*(x) = \sum_{k=1}^\infty y_k x_k, \qquad x = (x_k)_{k=1}^\infty \in \ell_1.$$

Analoogiliselt teoreemiga 1.1 saab kirjeldada kaasruume c_0^* ja ℓ_p^*, kus $1 < p < \infty$.

Teoreem 1.2 (vt nt [OO, lk 163, teoreem 2] või [M, lk 86, näide 1.10.4])**.** *Kujutus* $T\colon\ \ell_1 \to c_0^*$, *kus*

$$(Ty)(x) = \sum_{k=1}^\infty y_k x_k, \qquad y = (y_k)_{k=1}^\infty \in \ell_1,\ x = (x_k)_{k=1}^\infty \in c_0,$$

on isomeetriline isomorfism ruumide ℓ_1 *ja* c_0^* *vahel.*

Teoreem 1.3 (vt nt [OO, lk 163, teoreem 3] või [M, lk 85, näide 1.10.3])**.** *Olgu* $1 < p < \infty$ *ja* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Kujutus* $T\colon\ \ell_q \to \ell_p^*$, *kus*

$$(Ty)(x) = \sum_{k=1}^\infty y_k x_k, \qquad y = (y_k)_{k=1}^\infty \in \ell_q,\ x = (x_k)_{k=1}^\infty \in \ell_p,$$

on isomeetriline isomorfism ruumide ℓ_q *ja* ℓ_p^* *vahel.*

Teoreemide 1.2 ja 1.3 sisu märgitakse lühidalt vastavalt võrdustega $c_0^* = \ell_1$ ja $\ell_p^* = \ell_q$ ($1 < p < \infty$ ja $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$).

2 Nõrgalt koonduvad jadad ja Schuri omadus

Kõikjal selles paragrahvis on X normeeritud ruum.

2.1 Nõrgalt koonduvad jadad

Definitsioon 2.1. Öeldakse, et ruumi X elementide jada $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *koondub nõrgalt* elemendiks $x \in X$, ja kirjutatakse $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{w} x$, kui

$$x^*(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} x^*(x) \qquad \text{iga } x^* \in X^* \text{ korral.}$$

On lihtne näidata, et jada koonduvusest normeeritud ruumis järeldub tema nõrk koonduvus. Selleks on otstarbekas eelnevalt tõestada järgnev lause, mida on mugav kasutada ka lause 2.5 tõestuses allpool.

Lause 2.1. *Olgu $x_n, x \in X$, $n \in \mathbb{N}$. Siis $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{w} x$ parajasti siis, kui $x_n - x \xrightarrow[n\to\infty]{w} 0$.*

Tõestus. Paneme tähele, et kui $x^* \in X^*$, siis funktsionaali x^* lineaarsuse tõttu

$$\begin{aligned}
x^*(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} x^*(x) \quad &\Longleftrightarrow \quad x^*(x_n) - x^*(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad x^*(x_n - x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad x^*(x_n - x) \xrightarrow[n\to\infty]{} x^*(0).
\end{aligned}$$

Järelikult $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{w} x$ parajasti siis, kui $x_n - x \xrightarrow[n\to\infty]{w} 0$. ∎

Lause 2.2. *Jada koonduvusest normeeritud ruumis järeldub tema nõrk koonduvus samaks piirväärtuseks.*

Tõestus. Olgu $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ koonduv jada ruumis X ning olgu $x \in X$ selle jada piirväärtus, st $\|x_n - x\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Koonduvuseks $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{w} x$ piisab lause 2.1 põhjal näidata, et $x_n - x \xrightarrow[n\to\infty]{w} 0$, st $x^*(x_n - x) \xrightarrow[n\to\infty]{} x^*(0) = 0$ iga $x^* \in X^*$ korral. Veendume selles: mis tahes $x^* \in X^*$ korral

$$|x^*(x_n - x)| \leqslant \|x^*\| \, \|x_n - x\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

seega $x^*(x_n - x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, nagu soovitud. ∎

Funktsionaalanalüüsi kursusest on teada, et kui ruumi X elementide jada $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ koondub elemendiks $x \in X$, siis jada $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ iga osajada koondub samaks piirelemendiks. Analoogiline tulemus kehtib ka nõrgalt koonduvate jadade puhul.

Lause 2.3. *Nõrgalt koonduva jada iga osajada koondub nõrgalt samaks piirväärtuseks.*

Tõestus. Koondugu ruumi X elementide jada $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ nõrgalt elemendiks $x \in X$. Olgu $(x_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ jada $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ suvaline osajada. Näitame, et osajada $(x_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ koondub nõrgalt elemendiks x. Olgu $x^* \in X^*$ ning olgu $\varepsilon > 0$. Kuna $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{w} x$, siis leidub $N \in \mathbb{N}$ nii, et kui $n \geqslant N$, siis $|x^*(x_n) - x^*(x)| < \varepsilon$. Paneme tähele, et $k_n \geqslant n$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral. Seega, kui $n \geqslant N$, siis ka $k_n \geqslant N$ ning järelikult $|x^*(x_{k_n}) - x^*(x)| < \varepsilon$. Seega $x_{k_n} \xrightarrow[n\to\infty]{w} x$. ∎

Järgmine lause ütleb, et ruumi ℓ_1 elementide jada nõrgast koonduvusest järeldub selle jada koordinaaditi koonduvus.

Lause 2.4. *Olgu $(x_n)_{n=1}^{\infty} = \big((x_k^n)_{k=1}^{\infty}\big)_{n=1}^{\infty}$ ruumi ℓ_1 elementide jada, mis koondub nõrgalt elemendiks $z = (z_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_1$. Siis*

$$\lim_{n\to\infty} x_k^n = z_k \quad \textit{iga } k \in \mathbb{N} \textit{ korral.}$$

Tõestus. Iga naturaalarvu m korral defineerime funktsionaali $\varphi_m \colon \ell_1 \to \mathbb{R}$ võrdusega

$$\varphi_m(y) = y_m, \qquad y = (y_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_1.$$

Näitame, et iga $m \in \mathbb{N}$ korral on funktsionaal φ_m lineaarne ja tõkestatud. Fikseerime $m \in \mathbb{N}$. Olgu $\lambda \in \mathbb{R}$ ning olgu $y, w \in \ell_1$, kus $y = (y_k)_{k=1}^{\infty}$ ja $w = (w_k)_{k=1}^{\infty}$. Siis $\lambda y + w = (\lambda y_k + w_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_1$. Seega

$$\varphi_m(\lambda y + w) = \lambda y_m + w_m = \lambda\varphi_m(y) + \varphi_m(w).$$

Järelikult on funktsionaal φ_m lineaarne. Kuna

$$|\varphi_m(y)| = |y_m| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |y_k| = \|y\|,$$

siis φ_m on ka tõkestatud. Seega $\varphi_m \in \ell_1^*$ iga $m \in \mathbb{N}$ korral. Kuna jada $(x_n)_{n=1}^{\infty}$

koondub nõrgalt elemendiks z, siis iga $k \in \mathbb{N}$ korral

$$\lim_{n\to\infty} x_k^n = \lim_{n\to\infty} \varphi_k(x_n) = \varphi_k(z) = z_k. \qquad \blacksquare$$

2.2 Schuri omadus

Lause 2.2 põhjal järeldub jada koonduvusest normeeritud ruumis tema nõrk koonduvus. Vastupidine väide üldjuhul ei kehti (vt paragrahvi 6). Samas näiteks ruumis ℓ_1 järeldub jada nõrgast koonduvusest tema koonduvus – selle väite tõestas I. Schur aastal 1921 [S], mistõttu see väide on tänapäeval tuntud Schuri teoreemi nime all. Sellega on motiveeritud järgnev definitsioon.

Definitsioon 2.2. Öeldakse, et ruumil X on *Schuri omadus* (või et X on *Schuri ruum*), kui kehtib järgmine implikatsioon:

$$\left[x_n, x \in X, n \in \mathbb{N}, \quad x_n \xrightarrow[n\to\infty]{w} x\right] \qquad \Longrightarrow \qquad \left[x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x \quad \text{ruumis } X\right]. \tag{2.1}$$

Teisisõnu, ruumil X on Schuri omadus, kui selles ruumis jada nõrgast koonduvusest järeldub selle jada normi järgi koonduvus.

Järgmine lause ütleb, et Schuri omaduse definitsioonis võib piirduda ainult nullelemendiks nõrgalt koonduvate jadadega.

Lause 2.5. *Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *ruumil X on Schuri omadus;*

(ii) *kui jada $(x_n)_{n=1}^\infty$ ruumis X on selline, et $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{w} 0$, siis $\|x_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.*

Tõestus. (i)⇒(ii). Eeldame, et ruumil X on Schuri omadus. Olgu ruumi X elementide jada $(x_n)_{n=1}^\infty$ selline, et $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{w} 0$. Näitame, et $\|x_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Kuna ruumil X on Schuri omadus, siis $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ ruumis X, mis on samaväärne sellega, et $\|x_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

(ii)⇒(i). Kehtigu väide (ii). Näitame, et ruumil X on Schuri omadus. Olgu $x_n, x \in X, n \in \mathbb{N}$, sellised, et $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{w} x$. Tähistades iga $n \in \mathbb{N}$ korral $y_n := x_n - x$, saame lause 2.1 põhjal, et $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{w} 0$. Väite (ii) kohaselt $\|x_n - x\| = \|y_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, järelikult jada $(x_n)_{n=1}^\infty$ koondub elemendiks x ruumis X. Seega ruumil X on Schuri omadus. $\blacksquare$

3 Schuri teoreemi tõestus libiseva küüru meetodiga

Selles paragrahvis tõestame, et ruumil ℓ_1 on Schuri omadus, toetudes summeeruvusteoorias tihti kasutatavale abivahendile – libiseva küüru meetodile.

Teoreem 3.1. *Ruumil ℓ_1 on Schuri omadus.*

Märkus 3.1. Teoreemi 3.1 nimetatakse ka Schuri teoreemiks (vt nt [DJT]).

Teoreemi 3.1 tõestus libiseva küüru meetodiga (vrd [M, lk 218, näide 2.5.24]). Tõestamaks, et ruumil ℓ_1 on Schuri omadus, piisab lause 2.5 põhjal näidata, et kui ruumi ℓ_1 elementide jada $(x_n)_{n=1}^\infty$ koondub nõrgalt nullelemendiks, siis $\|x_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Olgu $(x_n)_{n=1}^\infty$ ruumi ℓ_1 elementide jada, mis koondub nõrgalt nullelemendiks. Oletame vastuväiteliselt, et arvjada $\big(\|x_n\|\big)_{n=1}^\infty$ ei koondu arvuks 0. Sel juhul leiduvad $\varepsilon > 0$ ja jada $(x_n)_{n=1}^\infty$ osajada $(u_n)_{n=1}^\infty = \big((u_k^n)_{k=1}^\infty\big)_{n=1}^\infty$ nii, et

$$\|u_n\| \geqslant 5\varepsilon \qquad \text{iga } n \in \mathbb{N} \text{ korral.} \tag{3.1}$$

Lause 2.3 põhjal osajada $(u_n)_{n=1}^\infty$ koondub nõrgalt ruumi ℓ_1 nullelemendiks, seega vastavalt lausele 2.4

$$\lim_{n\to\infty} u_k^n = 0 \qquad \text{iga } k \in \mathbb{N} \text{ korral.} \tag{3.2}$$

Meie eesmärk on leida jada $(u_n)_{n=1}^\infty$ osajada $(y_n)_{n=1}^\infty = \big((y_k^n)_{k=1}^\infty\big)_{n=1}^\infty$ ning indeksid[3] $0 = K_0 < K_1 < K_2 < \dots$ nii, et iga $n \in \mathbb{N}$ korral

(1) $\sum\limits_{k=1}^{K_{n-1}} |y_k^n| < \varepsilon$;

(2) $\sum\limits_{k=K_{n-1}+1}^{K_n} |y_k^n| > 3\varepsilon$;

(3) $\sum\limits_{k=K_n+1}^{\infty} |y_k^n| < \varepsilon$.

Oletame, et selline osajada $(y_n)_{n=1}^\infty = \big((y_k^n)_{k=1}^\infty\big)_{n=1}^\infty$ ja indeksid $0 = K_0 < K_1 < \dots$ on leitud. Defineerime elemendi $z = (z_k)_{k=1}^\infty \in \ell_\infty$ järgmiselt: kõikide $n \in \mathbb{N}$ ja $k \in \{K_{n-1}+1, \dots, K_n\}$ korral

$$z_k = \operatorname{sign}(y_k^n).$$

[3] Lepime kokku, et $\sum_{k=1}^0 |y_k^1| = 0$.

Tõlgendades elementi z kaasruumi ℓ_1^* elemendina (vt teoreemi 1.1), saame, et iga $n \in \mathbb{N}$ korral

$$\begin{aligned}
|z(y_n)| &= \left|\sum_{k=1}^{\infty} y_k^n z_k\right| \geqslant \left|\sum_{k=K_{n-1}+1}^{K_n} y_k^n z_k\right| - \left|\sum_{k=1}^{K_{n-1}} y_k^n z_k\right| - \left|\sum_{k=K_n+1}^{\infty} y_k^n z_k\right| \\
&\geqslant \left|\sum_{k=K_{n-1}+1}^{K_n} y_k^n \operatorname{sign}(y_k^n)\right| - \sum_{k=1}^{K_{n-1}} |y_k^n z_k| - \sum_{k=K_n+1}^{\infty} |y_k^n z_k| \\
&= \sum_{k=K_{n-1}+1}^{K_n} |y_k^n| - \sum_{k=1}^{K_{n-1}} |y_k^n||z_k| - \sum_{k=K_n+1}^{\infty} |y_k^n||z_k| \\
&= \sum_{k=K_{n-1}+1}^{K_n} |y_k^n| - \sum_{k=1}^{K_{n-1}} |y_k^n| - \sum_{k=K_n+1}^{\infty} |y_k^n| \\
&> 3\varepsilon - \varepsilon - \varepsilon = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Seega arvjada $\big(z(y_n)\big)_{n=1}^{\infty}$ ei saa koonduda arvuks 0, millest järeldub, et jada $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ ei koondu nõrgalt nullelemendiks. Saime vastuolu jada $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ nõrga koonduvusega, sest nõrgalt koonduva jada iga osajada koondub nõrgalt samaks piirelemendiks.

Tõestuse lõpetuseks jääb leida jada $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ osajada $(y_n)_{n=1}^{\infty} = \big((y_k^n)_{k=1}^{\infty}\big)_{n=1}^{\infty}$ ning indeksid $0 = K_0 < K_1 < K_2 < \dots$ nii, et iga $n \in \mathbb{N}$ korral oleksid täidetud tingimused (1)–(3). Kuna $\|u_1\| = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |u_k^1|$ ning koonduva rea jääkliige koondub nulliks, siis leidub $K_1 \in \mathbb{N}$ nii, et

$$\sum_{k=K_1+1}^{\infty} |u_k^1| < \varepsilon. \tag{3.3}$$

Järelikult võrratuste (3.1) ja (3.3) põhjal

$$\sum_{k=1}^{K_1} |u_k^1| = \sum_{k=1}^{\infty} |u_k^1| - \sum_{k=K_1+1}^{\infty} |u_k^1| > 5\varepsilon - \varepsilon = 4\varepsilon.$$

Seosest (3.2) saame, et

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{K_1} |u_k^n| = \sum_{k=1}^{K_1} \lim_{n\to\infty} |u_k^n| = 0.$$

Seega leidub $i_2 \in \mathbb{N}$, $i_2 > 1$, nii, et $\sum\limits_{k=1}^{K_1} |u_k^{i_2}| < \varepsilon$. Järgmise sammuna valime naturaalarvu $K_2 > K_1$ nii, et

$$\sum_{k=K_2+1}^{\infty} |u_k^{i_2}| < \varepsilon.$$

Nüüd

$$\sum_{k=K_1+1}^{K_2} |u_k^{i_2}| = \sum_{k=1}^{\infty} |u_k^{i_2}| - \sum_{k=1}^{K_1} |u_k^{i_2}| - \sum_{k=K_2+1}^{\infty} |u_k^{i_2}| > 5\varepsilon - \varepsilon - \varepsilon = 3\varepsilon.$$

Seose (3.2) põhjal

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{K_2} |u_k^n| = \sum_{k=1}^{K_2} \lim_{n\to\infty} |u_k^n| = 0;$$

seega leidub $i_3 \in \mathbb{N}$, $i_3 > i_2$, nii, et $\sum\limits_{k=1}^{K_2} |u_k^{i_3}| < \varepsilon$. Valime naturaalarvu $K_3 > K_2$ nii, et

$$\sum_{k=K_3+1}^{\infty} |u_k^{i_3}| < \varepsilon;$$

siis

$$\sum_{k=K_2+1}^{K_3} |u_k^{i_3}| = \sum_{k=1}^{\infty} |u_k^{i_3}| - \sum_{k=1}^{K_2} |u_k^{i_3}| - \sum_{k=K_3+1}^{\infty} |u_k^{i_3}| > 5\varepsilon - \varepsilon - \varepsilon = 3\varepsilon.$$

Jätkates analoogiliselt ning tähistades

$$y_1 := u_1, \qquad y_2 := u_{i_2}, \qquad y_3 := u_{i_3}, \qquad \ldots,$$

saame jada $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ osajada $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ ning indeksid $0 = K_0 < K_1 < K_2 < \ldots$ nii, et osajada $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ rahuldab tingimusi (1)–(3). ■

Märkus 3.2. Teoreemi 3.1 tõestuses kasutatavat osajada $(y_n)_{n=1}^{\infty} = \big((y_k^n)_{k=1}^{\infty}\big)_{n=1}^{\infty}$ leidmise algoritmi nimetatakse *libiseva küüru meetodiks*. Meetodi idee seisneb selles, et iga $n \in \mathbb{N}$ korral koordinaatide jadal $(y_k^n)_{k=1}^{\infty}$ on "küür" lõigus $[K_{n-1}+1, K_n]$, st $\sum_{k=K_{n-1}+1}^{K_n} |y_k^n| > 3\varepsilon$, ning jada $(y_k^n)_{k=1}^{\infty}$ ülejäänud liikmete absoluutväärtuste summa on "tunduvalt väiksem" võrreldes "küüruga". Seejuures indeksi n kasvades "küür libiseb paremale" tänu sellele, et jada $(K_{n-1})_{n=1}^{\infty}$ on rangelt kasvav.

4 Üks meetrika ühikkeras B_{ℓ_∞}

Selles paragrahvis defineerime ruumi ℓ_∞ kinnises ühikkeras B_{ℓ_∞} ühe kauguse ρ ning näitame, et B_{ℓ_∞} on täielik meetriline ruum selle kauguse suhtes. Lähtudes nõrgalt koonduvast jadast ruumis ℓ_1, konstrueerime teatavat tüüpi kinnised hulgad ruumis (B_{ℓ_∞}, ρ) ning näitame, et ühikkera B_{ℓ_∞} esitub nende hulkade loenduva ühendina.

Lause 4.1. *Ruumi ℓ_∞ kinnine ühikkera B_{ℓ_∞} on täielik meetriline ruum kauguse*

$$\rho(y,z) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}|y_k - z_k|, \qquad y = (y_k)_{k=1}^{\infty}, z = (z_k)_{k=1}^{\infty} \in B_{\ell_\infty},$$

suhtes.

Tõestus. Paneme tähele, et funktsioon $\rho\colon B_{\ell_\infty} \times B_{\ell_\infty} \to \mathbb{R}$ on korrektselt defineeritud. Tõepoolest, olgu $(y_k)_{k=1}^{\infty}, (z_k)_{k=1}^{\infty} \in B_{\ell_\infty}$; siis

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} |y_k - z_k| \leqslant \sup_{k\in\mathbb{N}} |y_k| + \sup_{k\in\mathbb{N}} |z_k| \leqslant 1 + 1 = 2.$$

Kuna $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 1$, siis

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}|y_k - z_k| \leqslant \sup_{k\in\mathbb{N}} |y_k - z_k| \cdot \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \leqslant 2 \cdot 1 = 2.$$

Järelikult rida $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}|y_k - z_k|$ on koonduv.

Näitame, et funktsioon ρ rahuldab meetrika aksioome.

1° Olgu $y, z \in B_{\ell_\infty}$, kus $y = (y_k)_{k=1}^{\infty}$ ja $z = (z_k)_{k=1}^{\infty}$. Kuna $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}|y_k - z_k|$ on mittenegatiivsete liikmetega rida, siis

$$\begin{aligned}
\rho(y,z) = 0 \quad &\iff \quad \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}|y_k - z_k| = 0 \\
&\iff \quad |y_k - z_k| = 0 \quad \text{iga } k \in \mathbb{N} \text{ korral} \\
&\iff \quad y_k = z_k \quad \text{iga } k \in \mathbb{N} \text{ korral} \\
&\iff \quad y = z.
\end{aligned}$$

2° Olgu $y, z \in B_{\ell_\infty}$, kus $y = (y_k)_{k=1}^\infty$ ja $z = (z_k)_{k=1}^\infty$; siis

$$\rho(y,z) = \sum_{k=1}^\infty 2^{-k}|y_k - z_k| = \sum_{k=1}^\infty 2^{-k}|-(y_k - z_k)| = \sum_{k=1}^\infty 2^{-k}|z_k - y_k| = \rho(z,y).$$

3° Olgu $y, z, v \in B_{\ell_\infty}$, kus $y = (y_k)_{k=1}^\infty$, $z = (z_k)_{k=1}^\infty$ ja $v = (v_k)_{k=1}^\infty$. Paneme tähele, et iga $n \in \mathbb{N}$ korral

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n 2^{-k}|y_k - z_k| &= \sum_{k=1}^n 2^{-k}|y_k - v_k + v_k - z_k| \\ &\leqslant \sum_{k=1}^n 2^{-k}\big(|y_k - v_k| + |v_k - z_k|\big) \\ &= \sum_{k=1}^n 2^{-k}|y_k - v_k| + \sum_{k=1}^n 2^{-k}|v_k - z_k|.\end{aligned}$$

Seega piirväärtuse monotoonsuse tõttu

$$\begin{aligned}\rho(y,z) = \sum_{k=1}^\infty 2^{-k}|y_k - z_k| &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n 2^{-k}|y_k - z_k| \\ &\leqslant \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n 2^{-k}|y_k - v_k| + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n 2^{-k}|v_k - z_k| \\ &= \sum_{k=1}^\infty 2^{-k}|y_k - v_k| + \sum_{k=1}^\infty 2^{-k}|v_k - z_k| = \rho(y,v) + \rho(v,z).\end{aligned}$$

Kokkuvõttes oleme näidanud, et (B_{ℓ_∞}, ρ) on meetriline ruum.

Järgmisena näitame, et ruum (B_{ℓ_∞}, ρ) on täielik. Olgu $(y_n)_{n=1}^\infty = \big((y_k^n)_{k=1}^\infty\big)_{n=1}^\infty$ Cauchy jada ruumis (B_{ℓ_∞}, ρ), st

$$\rho(y_n, y_m) = \sum_{k=1}^\infty 2^{-k}|y_k^n - y_k^m| \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0. \tag{4.1}$$

Siis iga $k \in \mathbb{N}$ korral

$$|y_k^n - y_k^m| = 2^k \cdot 2^{-k}|y_k^n - y_k^m| \leqslant 2^k \sum_{l=1}^\infty 2^{-l}|y_l^n - y_l^m| \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0.$$

Seega iga $k \in \mathbb{N}$ korral $(y_k^n)_{n=1}^\infty$ on Cauchy jada ruumis $\mathbb{R}$. Ruumi $\mathbb{R}$ täielikkuse tõttu on jada $(y_k^n)_{n=1}^\infty$ koonduv iga $k \in \mathbb{N}$ korral. Olgu $z_k := \lim_{n\to\infty} y_k^n$, $k \in \mathbb{N}$. Tähistame $z := (z_k)_{k=1}^\infty$ ning näitame, et $z \in B_{\ell_\infty}$ ja $\rho(y_n, z) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Kuna iga $n \in \mathbb{N}$ korral $\sup_{k\in\mathbb{N}} |y_k^n| \leqslant 1$ (sest $y_n \in B_{\ell_\infty}$), siis

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} |z_k| = \sup_{k\in\mathbb{N}} |\lim_{n\to\infty} y_k^n| = \sup_{k\in\mathbb{N}} \lim_{n\to\infty} |y_k^n| \leqslant \sup_{k\in\mathbb{N}} \sup_{n\in\mathbb{N}} |y_k^n| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\in\mathbb{N}} |y_k^n| \leqslant 1,$$

järelikult $z \in B_{\ell_\infty}$.

Näitame, et $\rho(y_n, z) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Olgu $\varepsilon > 0$. Tingimuse (4.1) põhjal leidub $N \in \mathbb{N}$ nii, et kui $n, m \geqslant N$, siis $\sum_{k=1}^\infty 2^{-k}|y_k^n - y_k^m| < \frac{\varepsilon}{2}$. Seega iga $l \in \mathbb{N}$ korral

$$\sum_{k=1}^{l} 2^{-k}|y_k^n - y_k^m| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}|y_k^n - y_k^m| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{kõikide } n, m \geqslant N \text{ korral.}$$

Järelikult iga $n \geqslant N$ ja iga $l \in \mathbb{N}$ korral saame piirprotsessis $m \to \infty$, et

$$\sum_{k=1}^{l} 2^{-k}|y_k^n - z_k| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Kui $n \geqslant N$, siis piirväärtuse monotoonsuse tõttu

$$\rho(y_n, z) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}|y_k^n - z_k| = \lim_{l\to\infty} \sum_{k=1}^{l} 2^{-k}|y_k^n - z_k| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Oleme näidanud, et $\rho(y_n, z) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. ■

Järgmine lause kirjeldab koonduvust meetrilises ruumis (B_{ℓ_∞}, ρ).

Lause 4.2. *Olgu $y_n, z \in B_{\ell_\infty}$, $n \in \mathbb{N}$, kus $y_n = (y_k^n)_{k=1}^\infty$ ja $z = (z_k)_{k=1}^\infty$. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) $\rho(y_n, z) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ *(st jada $(y_n)_{n=1}^\infty$ koondub elemendiks z meetrilises ruumis (B_{ℓ_∞}, ρ));*

(ii) $y_k^n \xrightarrow[n\to\infty]{} z_k$ *iga $k \in \mathbb{N}$ korral (st jada $(y_n)_{n=1}^\infty$ koondub elemendiks z koordinaaditi);*

(iii) $\sum_{k=1}^\infty |y_k^n - z_k|\,|x_k| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ *iga $(x_k)_{k=1}^\infty \in \ell_1$ korral;*

(iv) $\sum_{k=1}^\infty (y_k^n - z_k)x_k \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ *iga $(x_k)_{k=1}^\infty \in \ell_1$ korral.*

Tõestus. Kõigepealt märgime, et iga $n \in \mathbb{N}$ korral read $\sum_{k=1}^{\infty} |y_k^n - z_k|\,|x_k|$ ja $\sum_{k=1}^{\infty}(y_k^n - z_k)x_k$ tingimustes (iii) ja (iv) koonduvad, sest nad koonduvad absoluutselt. Tõepoolest, olgu $n \in \mathbb{N}$, siis

$$|(y_k^n - z_k)x_k| = |y_k^n - z_k|\,|x_k| \leqslant \|y_n - z\|_\infty |x_k| \quad \text{iga } k \in \mathbb{N} \text{ korral;}$$

seejuures rida $\sum_{k=1}^{\infty} \|y_n - z\|_\infty |x_k|$ koondub – selle rea summa on

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|y_n - z\|_\infty |x_k| = \|y_n - z\|_\infty \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| = \|y_n - z\|_\infty \|(x_k)_{k=1}^{\infty}\|_1;$$

seega koondub ka rida $\sum_{k=1}^{\infty} |(y_k^n - z_k)x_k|$ ehk, teisisõnu, read $\sum_{k=1}^{\infty} |y_k^n - z_k|\,|x_k|$ ja $\sum_{k=1}^{\infty}(y_k^n - z_k)x_k$ koonduvad absoluutselt.

Märgime, et ridade $\sum_{k=1}^{\infty} |y_k^n - z_k|\,|x_k|$ ja $\sum_{k=1}^{\infty}(y_k^n - z_k)x_k$ koonduvus järeldub implitsiitselt ka teoreemist 1.1.

(i)⇒(ii). Kehtigu (i). Siis iga $k \in \mathbb{N}$ korral

$$|y_k^n - z_k| = 2^k \cdot 2^{-k}|y_k^n - z_k| \leqslant 2^k \sum_{l=1}^{\infty} 2^{-l}|y_l^n - z_l| = 2^k \rho(y_n, z) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

seega $|y_k^n - z_k| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ ehk, teisisõnu, $y_k^n \xrightarrow[n\to\infty]{} z_k$, st tingimus (ii) kehtib.

(ii)⇒(iii). Kehtigu (ii) ning olgu $(x_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_1$ ja $\varepsilon > 0$. Implikatsiooni tõestuseks piisab leida $N \in \mathbb{N}$ nii, et

$$\sum_{k=1}^{\infty} |y_k^n - z_k||x_k| < \varepsilon \qquad \text{iga } n \geqslant N \text{ korral.}$$

Mis tahes $n, K \in \mathbb{N}$ korral

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} |y_k^n - z_k||x_k| &= \sum_{k=1}^{K} |y_k^n - z_k||x_k| + \sum_{k=K+1}^{\infty} |y_k^n - z_k||x_k| \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{K} |y_k^n - z_k||x_k| + \sum_{k=K+1}^{\infty} \big(|y_k^n| + |z_k|\big)|x_k| \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{K} |y_k^n - z_k||x_k| + 2 \sum_{k=K+1}^{\infty} |x_k|.
\end{aligned}$$

Kuna $(x_k)_{k=1}^\infty \in \ell_1$, siis leidub $K \in \mathbb{N}$ nii, et $\sum_{k=K+1}^\infty |x_k| < \frac{\varepsilon}{4}$. Tingimuse (ii) põhjal iga $k \in \{1, \dots, K\}$ korral $|y_k^n - z_k| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, seega ka $\sum_{k=1}^K |y_k^n - z_k||x_k| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, järelikult leidub $N \in \mathbb{N}$ nii, et

$$\sum_{k=1}^K |y_k^n - z_k||x_k| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{iga } n \geqslant N \text{ korral.}$$

Kui nüüd $n \geqslant N$, siis

$$\sum_{k=1}^\infty |y_k^n - z_k||x_k| \leqslant \sum_{k=1}^K |y_k^n - z_k||x_k| + 2 \sum_{k=K+1}^\infty |x_k| < \frac{\varepsilon}{2} + 2 \cdot \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon,$$

nagu soovitud.

(iii)⇒(iv). Kehtigu (iii) ning olgu $(x_k)_{k=1}^\infty \in \ell_1$. Siis tingimuse (iii) põhjal

$$\left| \sum_{k=1}^\infty (y_k^n - z_k) x_k \right| \leqslant \sum_{k=1}^\infty |y_k^n - z_k|\, |x_k| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

seega $|\sum_{k=1}^\infty (y_k^n - z_k) x_k| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, järelikult kehtib ka tingimus (iv).

(iv)⇒(i). Kehtigu (iv). Defineerime iga $k \in \mathbb{N}$ korral $x_k := 2^{-k} \operatorname{sign}(y_k^n - z_k)$; siis $(x_k)_{k=1}^\infty \in \ell_1$, sest $\sum_{k=1}^\infty |x_k| = \sum_{k=1}^\infty 2^{-k} = 1$, järelikult tingimuse (iv) põhjal

$$\begin{aligned} \rho(y_n, z) &= \sum_{k=1}^\infty 2^{-k} |y_k^n - z_k| = \sum_{k=1}^\infty 2^{-k} (y_k^n - z_k) \operatorname{sign}(y_k^n - z_k) \\ &= \sum_{k=1}^\infty (y_k^n - z_k) x_k \xrightarrow[n\to\infty]{} 0; \end{aligned}$$

niisiis, tingimus (i) kehtib. ■

Märkus 4.1. Kui X on normeeritud ruum ja $x_n^*, x^* \in X^*$, $n \in \mathbb{N}$, siis öeldakse, et jada $(x_n^*)_{n=1}^\infty$ *koondub $*$-nõrgalt* elemendiks x^*, kui

$$x_n^*(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} x^*(x) \qquad \text{iga } x \in X \text{ korral.}$$

Tõlgendades ruumi ℓ_∞ teoreemi 1.1 abil ruumi ℓ_1 kaasruumina, st lugedes $\ell_\infty = \ell_1^*$, ütleb lause 4.2 samaväärsus (i)⇔(iv), et jada koonduvus meetrilises ruumis (B_{ℓ_∞}, ρ) tähendab tema $*$-nõrka koonduvust.

Schuri teoreemi tõestamisel Baire'i teoreemi abil on mugav toetuda järgmisele lausele. Kui $v \in B_{\ell_\infty}$ ja $r > 0$, siis sümboliga $B_\rho(v,r)$ tähistame lahtist kera meetrilises ruumis (B_{ℓ_∞}, ρ) keskpunktiga v ja raadiusega r, st

$$B_\rho(v,r) = \{y \in B_{\ell_\infty} : \ \rho(y,v) < r\}.$$

Lause 4.3. *Olgu $(x_n)_{n=1}^\infty = \big((x_k^n)_{k=1}^\infty\big)_{n=1}^\infty$ ruumi ℓ_1 elementide jada, mis koondub nõrgalt nullelemendiks, ning olgu $\varepsilon > 0$. Tähistame iga $n \in \mathbb{N}$ korral*

$$B_n := \left\{ (y_k)_{k=1}^\infty \in B_{\ell_\infty} : \ \left| \sum_{k=1}^\infty y_k\, x_k^n \right| \leqslant \varepsilon \right\}.$$

Siis

(a) $B_{\ell_\infty} = \bigcup_{m=1}^\infty \bigcap_{n=m}^\infty B_n$*;*

(b) *hulk $\bigcap_{n=m}^\infty B_n$ on kinnine ruumis (B_{ℓ_∞}, ρ) iga $m \in \mathbb{N}$ korral;*

(c) *kui $n \in \mathbb{N}$ ja $r > 0$ on sellised, et mingi $v \in B_{\ell_\infty}$ korral $B_\rho(v,r) \subset B_n$, siis ka $B_\rho(0,r) \subset B_n$, kus 0 on ruumi B_{ℓ_∞} nullelement.*

Tõestus. (a). Kuna $B_n \subset B_{\ell_\infty}$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral, siis $\bigcup_{m=1}^\infty \bigcap_{n=m}^\infty B_n \subset B_{\ell_\infty}$. Vastupidise sisalduvuse näitamiseks fikseerime $(y_k)_{k=1}^\infty \in B_{\ell_\infty}$. Kuna $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{w} 0$, siis teoreemi 1.1 põhjal

$$\sum_{k=1}^\infty y_k\, x_k^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Järelikult leidub $N \in \mathbb{N}$ nii, et kui $n \geqslant N$, siis $|\sum_{k=1}^\infty y_k\, x_k^n| < \varepsilon$. Seega iga $n \geqslant N$ korral $(y_k)_{k=1}^\infty \in B_n$, millest järeldub, et $(y_k)_{k=1}^\infty \in \bigcap_{n=N}^\infty B_n \subset \bigcup_{m=1}^\infty \bigcap_{n=m}^\infty B_n$. Järelikult $B_{\ell_\infty} \subset \bigcup_{m=1}^\infty \bigcap_{n=m}^\infty B_n$.

(b). Olgu $m \in \mathbb{N}$. Tähistame $\mathcal{M} := \bigcap_{n=m}^\infty B_n$. Olgu $y_i = (y_k^i)_{k=1}^\infty \in \mathcal{M}$, $i \in \mathbb{N}$, ja $z = (z_k)_{k=1}^\infty \in B_{\ell_\infty}$ sellised, et $\rho(y_i, z) \xrightarrow[i\to\infty]{} 0$. Hulga $\mathcal{M}$ kinnisuseks (ruumis (B_{ℓ_∞}, ρ)) piisab näidata, et $z \in \mathcal{M}$.

Fikseerime $n \geqslant m$. Väite tõestuseks piisab näidata, et $z \in B_n$. Kuna $y_i \in \mathcal{M}$ iga $i \in \mathbb{N}$ korral, siis

$$\left| \sum_{k=1}^\infty y_k^i\, x_k^n \right| \leqslant \varepsilon \qquad \text{iga } i \in \mathbb{N} \text{ korral.}$$

Seega iga $i \in \mathbb{N}$ korral

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} z_k\, x_k^n\right| = \left|\sum_{k=1}^{\infty}\big((z_k - y_k^i)x_k^n + y_k^i x_k^n\big)\right| \leqslant \left|\sum_{k=1}^{\infty}(z_k - y_k^i)x_k^n\right| + \left|\sum_{k=1}^{\infty} y_k^i x_k^n\right|$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |z_k - y_k^i||x_k^n| + \left|\sum_{k=1}^{\infty} y_k^i x_k^n\right| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |z_k - y_k^i||x_k^n| + \varepsilon.$$

Kuna $(x_k^n)_{k=1}^{\infty} \in \ell_1$ ja $\rho(y_i, z) \xrightarrow[i\to\infty]{} 0$, siis lause 4.2 põhjal

$$\sum_{k=1}^{\infty} |z_k - y_k^i||x_k^n| \xrightarrow[i\to\infty]{} 0.$$

Seega $|\sum_{k=1}^{\infty} z_k\, x_k^n| \leqslant \varepsilon$ ning järelikult $z \in B_n$.

(c). Olgu $n \in \mathbb{N}$, $r > 0$ ja $v = (v_k)_{k=1}^{\infty} \in B_{\ell_\infty}$ sellised, et $B_\rho(v, r) \subset B_n$, ja olgu $y = (y_k)_{k=1}^{\infty} \in B_\rho(0, r)$. Väite tõestuseks piisab näidata, et $y \in B_n$, st

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} y_k\, x_k^n\right| \leqslant \varepsilon.$$

Selleks märgime, et $w^{\pm} := (v_k \pm y_k)_{k=1}^{\infty} \in B_\rho(v, r)$, sest

$$\rho(w^{\pm}, v) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}|(v_k \pm y_k) - v_k| = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}|y_k| = \rho(y, 0) < r.$$

Niisiis, $w^{\pm} \in B_\rho(v, r) \subset B_n$, järelikult $|\sum_{k=1}^{\infty}(v_k \pm y_k)x_k^n| \leqslant \varepsilon$ ning seega

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} y_k\, x_k^n\right| = \left|\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}(v_k + y_k) - \frac{1}{2}(v_k - y_k)\right) x_k^n\right|$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\left|\sum_{k=1}^{\infty}(v_k + y_k)x_k^n\right| + \frac{1}{2}\left|\sum_{k=1}^{\infty}(v_k - y_k)x_k^n\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

nagu soovitud. ■

5 Schuri teoreemi tõestus Baire'i teoreemi abil

Selles paragrahvis anname teoreemile 3.1 alternatiivse tõestuse, mille põhiliseks abivahendiks on tuntud Baire'i teoreem. Kõigepealt meenutame Baire'i teoreemi.

Teoreem 5.1 (Baire'i[4] teoreem, vt nt [M, lk 37, teoreem 1.5.4] või [OO, lk 33])**.** *Kui mittetühi täielik meetriline ruum esitub kinniste hulkade loenduva ühendina, siis vähemalt üks neist hulkadest sisaldab mingi kera.*

Teoreemi 3.1 tõestus Baire'i teoreemi abil (vt [DJT, lk 6, teoreem 1.7]). Tõestamaks, et ruumil ℓ_1 on Schuri omadus, piisab lause 2.5 põhjal näidata, et kui ruumi ℓ_1 elementide jada $(x_n)_{n=1}^\infty$ koondub nõrgalt nullelemendiks, siis $\|x_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Olgu $(x_n)_{n=1}^\infty = \big((x_k^n)_{k=1}^\infty\big)_{n=1}^\infty$ ruumi ℓ_1 elementide jada, mis koondub nõrgalt nullelemendiks. Fikseerime $\varepsilon > 0$. Meie eesmärk on leida $m_0 \in \mathbb{N}$ nii, et kui $n \geqslant m_0$, siis $\|x_n\| < \varepsilon$.

Lause 4.1 põhjal on (B_{ℓ_∞}, ρ) täielik meetriline ruum. Defineerime iga $n \in \mathbb{N}$ korral

$$B_n := \left\{ (y_k)_{k=1}^\infty \in B_{\ell_\infty} \colon \ \left| \sum_{k=1}^\infty y_k \, x_k^n \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \right\}.$$

Lause 4.3 põhjal $B_{\ell_\infty} = \bigcup_{m=1}^\infty \bigcap_{n=m}^\infty B_n$, kusjuures hulgad $\bigcap_{n=m}^\infty B_n$, $m \in \mathbb{N}$, on kinnised ruumis (B_{ℓ_∞}, ρ). Seega täielik meetriline ruum (B_{ℓ_∞}, ρ) esitub kinniste hulkade loenduva ühendina. Baire'i teoreemi 5.1 põhjal leiduvad $m_0 \in \mathbb{N}$, $v = (v_k)_{k=1}^\infty \in B_{\ell_\infty}$ ja $r > 0$ nii, et $B_\rho(v, r) \subset \bigcap_{n=m_0}^\infty B_n$. Lause 4.3, (c), põhjal ka $B_\rho(0, r) \subset \bigcap_{n=m_0}^\infty B_n$.

Olgu $N \in \mathbb{N}$ selline, et $\frac{1}{2^N} < r$. Kuna $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{w} 0$, siis lause 2.4 põhjal $x_k^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ iga $k \in \mathbb{N}$ korral. Seega iga $k \in \{1, \ldots, N\}$ korral leidub $K(k) \in \mathbb{N}$ nii, et kui $n \geqslant K(k)$, siis $|x_k^n| < \frac{\varepsilon}{2N}$. Tähistades $K := \max\{K(1), \ldots, K(N)\}$, saame, et

$$\sum_{k=1}^N |x_k^n| < \frac{\varepsilon}{2N} N = \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{iga } n \geqslant K \text{ korral.}$$

Üldisust kitsendamata võime eeldada, et $m_0 \geqslant K$.

[4] René-Louis Baire (1874–1932), prantsuse matemaatik.

Näitame, et kui $n \geqslant m_0$, siis $\|x_n\| < \varepsilon$. Fikseerime $n \geqslant m_0$. Defineerime jada $z = (z_k)_{k=1}^{\infty}$ järgmiselt:

$$z_k = \begin{cases} 0, & \text{kui } 1 \leqslant k \leqslant N, \\ \operatorname{sign}(x_k^n), & \text{kui } k > N. \end{cases}$$

Paneme tähele, et $z \in B_\rho(0, r)$. Tõepoolest, kuna $\|z\|_\infty = \sup_{k \in \mathbb{N}} |z_k| = 1$, siis $z \in B_{\ell_\infty}$. Kuna

$$\rho(z, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}|z_k| = \sum_{k=N+1}^{\infty} 2^{-k}|z_k| = \sum_{k=N+1}^{\infty} 2^{-k} = \frac{1}{2^N} < r,$$

siis $z \in B_\rho(0, r)$. Kuna $B_\rho(0, r) \subset \bigcap_{i=m_0}^{\infty} B_i \subset B_n$, siis $z \in B_n$ ning seega $|\sum_{k=1}^{\infty} z_k\, x_k^n| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Järelikult

$$\begin{aligned} \|x_n\| &= \sum_{k=1}^{\infty} |x_k^n| = \sum_{k=1}^{N} |x_k^n| + \sum_{k=N+1}^{\infty} |x_k^n| = \sum_{k=1}^{N} |x_k^n| + \sum_{k=N+1}^{\infty} \operatorname{sign}(x_k^n) x_k^n \\ &= \sum_{k=1}^{N} |x_k^n| + \sum_{k=N+1}^{\infty} z_k x_k^n < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

■

6 Näited ruumidest, millel pole Schuri omadust

Näitame, et jadaruumidel c_0 ja ℓ_p, $1 < p < \infty$, ei ole Schuri omadust.

Tähistame iga $n \in \mathbb{N}$ korral $e_n := (e_k^n)_{k=1}^\infty$, kus

$$e_k^n = \begin{cases} 1, & \text{kui } k = n, \\ 0, & \text{kui } k \neq n. \end{cases}$$

Lause 6.1. *Ruumil c_0 ei ole Schuri omadust.*

Tõestus. Kõigepealt märgime, et iga $n \in \mathbb{N}$ korral $e_n \in c_0$, sest $e_k^n \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$. Näitame, et jada $(e_n)_{n=1}^\infty$ koondub nõrgalt nullelemendiks ruumis c_0, kuid ei koondu nullelemendiks normi järgi.

Näitame, et $e_n \xrightarrow[n\to\infty]{w} 0$ ruumis c_0. Olgu $y = (y_k)_{k=1}^\infty \in \ell_1 = c_0^*$ (vt teoreemi 1.2); siis rida $\sum_{k=1}^\infty |y_k|$ koondub. Rea koonduvuse tarviliku tingimuse põhjal $|y_k| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$, seega ka $y_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ ning järelikult

$$y(e_n) = \sum_{k=1}^\infty y_k e_k^n = y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Niisiis, $e_n \xrightarrow[n\to\infty]{w} 0$.

Teiselt poolt, jada $(e_n)_{n=1}^\infty$ ei koondu nullelemendiks normi järgi, sest iga $n \in \mathbb{N}$ korral

$$\|e_n\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} |e_k^n| = 1,$$

ning järelikult $\|e_n\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$. Kokkuvõttes oleme näidanud, et ruumil c_0 puudub Schuri omadus. ∎

Lause 6.2. *Ruumidel ℓ_p, $1 < p < \infty$, ei ole Schuri omadust.*

Tõestus. Olgu $1 < p < \infty$. Kõigepealt märgime, et iga $n \in \mathbb{N}$ korral $e_n \in \ell_p$, sest $\sum_{k=1}^\infty |e_k^n|^p = |e_n^n|^p = 1$. Näitame, et jada $(e_n)_{n=1}^\infty$ koondub nõrgalt nullelemendiks ruumis ℓ_p, kuid ei koondu nullelemendiks normi järgi.

Näitame, et $e_n \xrightarrow[n\to\infty]{w} 0$ ruumis ℓ_p. Olgu $y = (y_k)_{k=1}^\infty \in \ell_q = \ell_p^*$, kus $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (vt teoreemi 1.3); siis rida $\sum_{k=1}^\infty |y_k|^q$ koondub. Rea koonduvuse tarviliku tingimuse põhjal $|y_k|^q \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$, seega ka $|y_k| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$, järelikult $y_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ ja

$$y(e_n) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k e_k^n = y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Niisiis, $e_n \xrightarrow[n\to\infty]{w} 0$.

Teiselt poolt, jada $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ ei koondu nullelemendiks normi järgi, sest iga $n \in \mathbb{N}$ korral

$$\|e_n\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |e_k^n|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |e_n^n| = 1,$$

ning järelikult $\|e_n\|_p \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$. Kokkuvõttes oleme näidanud, et ruumil ℓ_p ei ole Schuri omadust. ■

Kirjandus

[DJT] J. DIESTEL, H. JARCHOW, A. TONGE, *Absolutely Summing Operators*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 43, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[M] R. E. MEGGINSON, *An Introduction to Banach Space Theory*, Graduate Texts in Mathematics, 183, Springer, New York, 1998.

[OO] E. OJA, P. OJA, *Funktsionaalanalüüs*, Tartu Ülikool, Tartu, 1991.

[S] J. SCHUR, *Über lineare Transformationen in der Theorie der unendlichen Reihen*, J. Reine Angew. Math. **151** (1921), 79–111.

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Ingeborg Virveste (sünnikuupäev: 08.01.1995),

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose "Banachi ruumi Schuri omadus", mille juhendajad on Julia Martsinkevitš ja Märt Põldvere,

   1.1. reprodutseerimiseks säilitamise ja üldsusele kättesaadavaks tegemise eesmärgil, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace'i lisamise eesmärgil kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni;

   1.2. üldsusele kättesaadavaks tegemiseks Tartu Ülikooli veebikeskkonna kaudu, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace'i kaudu kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni.

2. olen teadlik, et punktis 1 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

3. kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.

Tartus, **08.05.2018**