7090.

Die

Formenlehre der Geometrie

nebst

dem Satze des Pythagoras und seinen Stützsätzen

von

Cand. W. Specht,
Oberlehrer an den Parallelklassen des Dörptschen Gymnasiums.

Dorpat.
Druck und Verlag von E. J. Karow, Universitätsbuchhändler.
1865.

Von der Censur gestattet.
Dorpat, den 8. April 1865.

Vorwort.

Um mehr Uebereinstimmung zwischen Lehrer und Lehrbuch in den Unterricht zu bringen, als es da möglich ist, wo das Lehrbuch nicht vom Lehrer selbst verfaßt ist und so das Lernen wie das Lehren zu erleichtern, sind vorliegende Blätter dem Drucke übergeben worden. Sie sind daher zunächst auch nur zum eigenen Gebrauche bestimmt.

Figuren finden sich hier nur so viele, als ich für nothwendig gehalten, dem Anfänger die Begriffe klar zu machen. Dieser muß vielmehr nach Angabe und unter Leitung des Lehrers alle Raumgebilde selbst — wo möglich — durch Zeichnung darstellen und zwar sowohl in der Schule, als auch nachher zu Hause

der Verfasser.

Dorpat, im Februar 1865.

Geometrie.

Einleitung.

Die Mathematik, (τὰ μαθήματα, das Gelernte, Erfahrene, die Kenntniß) *hat die Dinge* zum Gegenstande ihrer Betrachtung erwählt, durch welche sich vorzüglich herausstellt, wie der Mensch an die Endlichkeit gebunden ist: Raum (Geometrie), Zeit (Chronologie, Astronomie) Zahl (Arithmetik).

Die Geometrie hat ihren Namen von einer einzelnen Anwendung dieser Wissenschaft, dem Feldmessen (γῆ und μετρεῖν), vielleicht weil dieses die erste Veranlassung zu unserer Wissenschaft gab. Der Gegenstand ihrer Betrachtung ist der Raum und da dieser unendlich ist, unserer Beschränktheit und eigenen Endlichkeit wegen also nicht auf einmal erfaßt werden kann — die Theile des Raumes und ihre Begrenzungen.

Den Raum nehmen wir wahr an allen sichtbaren Dingen, insofern sie eine Gestalt haben und die Natur Gottes wie die Werke der Menschen zeigen uns die mannigfaltigsten Gestalten und Formen an den Dingen. In dieser Beziehung sagen wir von den Dingen: sie nehmen einen Raum ein oder haben einen Körper. Der Körper ist somit ein Theil des einen unendlichen Raumes. Andererseits vermag auch die Wissenschaft Formen zu erzeugen, welche uns bisdahin in der Wirklichkeit noch nicht begegnet sind. — Die Geometrie nun handelt von all' diesen Formen und Gestalten, doch eben nur insofern sie den Raum erfüllen ohne Rücksicht auf die anderen Eigenschaften der Dinge (**physischer** und **mathematischer** Körper). Vorzüglich aber sind es die Gesetze und Regeln, welche sich aus diesen Formen für die Dinge herleiten lassen, die diese Wissenschaft zu erforschen hat. Ehe wir aber hierauf eingehen können, müssen wir doch die verschiedenen Formen der Körper und ihre Begrenzungen —

wenigstens die vorzüglichsten und wichtigsten kennen lernen. Diesen Theil der Wissenschaft wollen wir nennen:

Die Formenlehre.

Der Raum ist unendlich, stetig (continuirlich, lückenlos), theilbar bis in's Unendliche, nur einer der Zahl und dem Wesen nach, nach allen Richtungen ausgedehnt.

Wir unterscheiden der leichtern Uebersicht wegen zunächst nur drei Ausdehnungen: Länge, Breite oder Dicke, Tiefe oder Höhe.

Einen Theil des Raumes, sobald er begrenzt gedacht ist, nennen wir **Körper**.

Jeder Körper wird von ein oder mehreren Flächen begrenzt. Da, wo zwei Flächen aneinanderstoßen oder — fortgesetzt gedacht — sich einander schneiden würden, finden wir eine Kante oder Linie; und da, wo zwei oder mehr Kanten oder wenigstens drei Flächen zusammentreffen oder — fortgesetzt gedacht — sich einander schneiden würden — finden wir eine Ecke oder Punkt. Daher nennt man

Fläche die Grenze zweier Raumtheile oder Körper, wo sie gleichsam aneinderstoßen oder sich berühren;

Linie die Grenze der Fläche;

Punkt die Grenze der Linie.

Wir haben so die vier Grundbegriffe: Körper, Fläche, Linie, Punkt erhalten, als etwas den Dingen Eigenthümliches, insofern dieselben einen Raum einnehmen. Schlagen wir den umgekehrten Weg von dem eben durchgemachten ein und gehen von dem einfachsten Begriffe, dem Punkte, aus; so können wir die complicirteren Begriffe aus den einfacheren durch Bewegung entstehen lassen:

Die Spur eines fortbewegt gedachten Punktes giebt uns die Linie;

wie z. B. die Spur der fortbewegten Federspitze auf dem Papiere, oder der Kreidespitze auf der Tafel.

Die Spur einer fortbewegt gedachten Linie giebt uns die Fläche:

z. B. die Schneide eines Meissels beim Drechseln.

Die Spur einer fortbewegt gedachten Fläche giebt uns den Körper.

Die Bewegung kann eine geregelte z. B. eine drehende sein, so daß der sich bewegende Punkt, Linie, Fläche wieder in dieselbe Lage zurückkehrt, von der man ausgegangen ist, wobei auch noch die Entfernung von und die Lage zu andern Punkten, Linien, Flächen nach bestimmten Gesetzen festgestellt sein kann oder nicht. Die Bewegung kann aber auch eine ganz regellose oder beliebige sein.

Betrachten wir nun diese vier Grundbegriffe näher:

A. Der Punkt

hat keine Ausdehnung. Er kann liegen am Ende (oder Anfang) einer Linie, **Endpunkt**, in, über, oder unter einer Linie; außerhalb oder innerhalb einer Fläche, eines Körpers; gerade in der Mitte einer Linie, einer Fläche, eines Körpers: **Mittelpunkt**, Centrum. — Treffpunkt, Schneidepunkt, Scheitelpunkt.

Der Schwerpunkt, Brennpunkt, Gefrierpunkt, Zenith, Nadir u. a.

B. Die Linie

hat eine Ausdehnung (Länge) und hat eine Richtung. Der Länge nach kann sie sein: begrenzt, unbegrenzt (unendlich). Die Richtung kann sein: 1) stets dieselbe: **grade**, (Ausgangspunkt und Zielpunkt), 2) an bestimmten Stellen sich ändernd: **gebrochen** (Scheitelpunkt), 3) stetig gebrochen oder **gekrümmt** (gebogen): **Curve**, Bogen, 4) gemischt.

Zu (1) gehört auch die wagerechte und senkrechte Linie oder Richtung. Wagerecht nennt man eine unbewegte Wasserfläche, senkrecht einen beschwerten hängenden Faden. — Bei (3) unterscheidet man offene, geschlossene, doppelt gekrümmte Curven.

Man kann Linien abtragen, verlängern, addiren, subtrahiren, multipliciren, dividiren (theilen, halbiren).

Durch einen Punkt kann ich mir unendlich viele Linien gezogen denken; durch zwei Punkte kann ich mir auch unendlich viele Linien aber nur eine grade gezogen denken; durch je drei beliebige kann ich mir auch unendlich viele Linien aber keine gerade gezogen denken.

Zwei Linien, zunächst gerade, können haben

1) dieselbe Richtung und fallen dann der Lage nach entweder in eine Linie zusammen oder in zwei und sind dann **parallel** (παράλληλος);

2) entgegengesetzte Richtung und fallen dann der Lage nach entweder in eine Linie zusammen oder in zwei und sind dann **entgegengesetzt parallel;**

3) verschiedene Richtung und sind dann entweder **divergent** oder **convergent.**

Gehen von einem Punkte aus zwei (zunächst grade) Linien, oder treffen oder schneiden sich zwei Linien; so bilden sie einen Winkel.

Der **Winkel** ist der Richtungsunterschied (Abweichung) zweier Linien und bestimmt sonach ihre Lage zu einander.

Stellt man sich in der Ebene eine gerade Linie um einen ihrer als festgedachten Punkte gedreht vor, so bildet jede folgende Lage mit der ursprünglichen verschiedene Richtungsunterschiede oder verschieden große Winkel. Darnach unterscheidet man ganze, halbe, viertel Umdrehungen und theilt die ganze Umdrehuug in 360° u. s. w. Winkel von 0°.

Schenkel und **Gipfel** des Winkels (Scheitel): **gestreckter** [1], **rechter** [2], **schiefer, spitzer** [3], **stumpfer** [4], **überstumpfer** [5], Winkel. Complement- und Supplement-Winkel [6].

1) Haben die Schenkel entgegengesetzte Richtung, so nennt man den Winkel einen gestreckten = halbe Umdrehung = 180° = 2 R.

2) Die Hälfte eines gestreckten Winkels ist ein rechter Winkel = R = eine Viertelumdrehung = 90°.

Von den Schenkeln des rechten Winkels sagt man: sie stehen aufeinander senkrecht; und umgekehrt. — Eine Normale.

3) Spitzer Winkel < R oder < 90°.

4) Stumpfer Winkel > R oder > 90°.

5) Ueberstumpfer Winkel > 2 R oder > 180°, auch genannt erhabener oder einspringender Winkel; wogegen die Winkel, welche kleiner als 2 R (oder ein gestreckter) sind auch hohle genannt worden.

6) Ein Complementwinkel ergänzt einen andern zu einem R.

Ein Supplementwinkel ergänzt einen andern zu 2 R.

Bezeichnungen und Construktionen. — Sphärischer Winkel. Einfallswinkel, Ausfallswinkel. — Sehwinkel. (Perspektive).

Man kann Winkel abtragen und an eine Linie — in einem bestimmten Punkte derselben — antragen, addiren, subtrahiren, multipliciren, dividiren (theilen, halbiren).

Bei zwei sich schneidenden (beziehungsweise sich treffenden) Linien entstehen: **Nebenwinkel** [1], **Scheitelwinkel** [2].

[1]) Die Scheitel und ein Schenkelpaar fallen zusammen, das andere Schenkelpaar fällt der Lage nach in eine Gerade, aber in entgegengesetzte Richtung. — [2]) Die Scheitel fallen zusammen und je ein Schenkelpaar der Lage nach in dieselbe Gerade, aber entgegengesetzte Richtung.

Werden zwei Linien von einer dritten geschnitten, entstehen: **Innenwinkel, Außenwinkel, innere Gegenwinkel** [1]) **äußere Gegenwinkel** [2]), **correspondirende Winkel** [3]), **Wechselwinkel** [4]).

[1]) Winkel innerhalb der geschnittenen Linien und auf derselben Seite der Schneidenden. — [2]) Winkel außerhalb der geschnittenen Linien und auf derselben Seite der Schneidenden. — [3]) Ein Innenwinkel, ein Außenwinkel auf derselben Seite der Schneidenden, ohne Nebenwinkel zu sein. — [4]) Zwei Innenwinkel oder zwei Außenwinkel, auf verschiedenen Seiten der Schneidenden, ohne Nebenwinkel zu sein.

Oder: [1]) und [2]) Ein Schenkelpaar nach derselben Seite parallel, das andere Schenkelpaar der Lage nach in eine Gerade aber in entgegengesetzte Richtung fallend. — [3]) Beide Schenkelpaare haben dieselbe Richtung und das eine Paar fällt der Lage nach in eine Linie zusammen. — [4]) Beide Paare haben entgegengesetzte Richtung und das eine Paar fällt der Lage nach in eine Linie zusammen.

Durch Verlängerung einer Seite eines Dreiecks entsteht ein **Außenwinkel des Dreiecks.**

Man unterscheidet noch Linien in- und außerhalb einer Fläche, sie treffend (z. B. Normale), schneidend (Transversale), berührend (Tangente); Linien innerhalb oder außerhalb eines Körpers, ihn treffend, schneidend, berührend.

Projektionen, rechtwinklige und schiefwinklige.

C. Die Fläche

hat zwei Ausdehnungen, Länge und Breite. Sie kann sein begrenzt, unbegrenzt (unendlich), zum Theil begrenzt; gekrümmt und zwar concav oder hohl, convex oder erhaben, doppelt gekrümmt; plan oder eben (Ebene).

Wagerechte und senkrechte Ebenen. — Parallele, convergente, divergente, sich treffende oder sich schneidende Ebenen.

Durch eine grade Linie (oder durch zwei Punkte) kann ich mir unendlich viele Ebenen gelegt denken und von diesen sagt man, sie schneiden oder treffen sich und bilden dann Flächenwinkel; aber durch eine Linie und einen Punkt, oder durch zwei sich schneidende (treffende) grade Linien oder durch drei Punkte kann man sich nur eine Ebene gelegt denken.

Man unterscheidet noch Flächen (Ebenen) innerhalb oder außerhalb eines Körpers, denselben schneidend (Schnittflächen), berührend, treffend. — Normale.

Rechtwinklige und schiefwinklige Projektionen. — Rotationsflächen, entstanden durch Drehung einer graden oder gekrümmten Linie um eine gerade Linie als Achse, z. B. die Kegelfläche, die Kugelfläche. — Abwickelbare Flächen, z. B. die Schraubenfläche.

Die Flächen, zunächst die Ebenen, können von drei, vier, fünf u. s. w. Linien (Seiten) begrenzt sein und heißen dann: Dreiseit, Vierseit, Fünfseit u. s. w. Vielseit; oder nach der Anzahl der Winkel (Ecken): **Dreieck** (Triangel), **Viereck** (Tetragon). **Fünfeck** (Pentagon), **Sechseck** (Hexagon) u. s. w. **Vieleck** (Polygon).

Im Folgenden wollen wir zunächst nur die ebenen Flächen oder Ebenen betrachten.

a. Das Dreieck oder Dreiseit

enthält sechs Stücke: drei Seiten und drei Winkel. — Ein jeder Winkel wird von zwei Seiten eingeschlossen und die dritte Seite liegt ihm gegenüber; einer jeden Seite liegen zwei Winkel an und der dritte liegt ihr gegenüber; daher unterscheidet man: die einen Winkel einschließenden Seiten und die einem Winkel gegenüberliegende Seite; ferner die einer Seite anliegenden Winkel und den einer Seite gegenüberliegenden Winkel.

In jedem Dreiecke sind alle drei Winkel zusammen so groß als 2 R (durch

Drehung einer Linie anschaulich zu machen — eine halbe Umdrehung). Daher kann in einem Dreiecke nur ein Winkel = 1 R sein und dieses heißt dann ein rechtwinkliges (**Catheten**, die den rechten Winkel einschließenden, **Hypotenuse**, die dem rechten Wlnkel gegenüberliegende Seite), oder es kann nur ein Winkel ein stumpfer sein und das Dreieck heißt alsdann ein stumpfwinkliges; in jedem andern Falle nennt man das Dreieck ein spitzwinkliges

Nach der Größe (Länge) der Seiten untereinander und nach den Winkeln unterscheidet man ein

gleichseitiges	gleichschenkliges	ungleichseitiges
spitzwinkliges	spitzwinkliges	spitzwinkliges
	rechtwinkliges	rechtwinkliges
	stumpfwinkliges	stumpfwinkliges

Dreieck.

Warum es kein gleichseitiges recht- oder stumpfwinckliges Dreieck geben kann, muß die Planimetrie zeigen. — Ein überstumpfer Winkel kann im Dreieck nicht vorkommen.

Bei jedem Dreiecke unterscheidet man eine **Grundlinie** oder die Seite des Dreiecks, auf welcher man sich das Dreieck errichtet denkt, einen **Gipfel** oder den der Grundlinie gegenüberliegenden Eckpunkt, und eine **Höhe** oder die senkrechte vom Gipfel auf die Grundlinie oder deren Verlängerung (Normale).

1) die Höhe fällt in das Dreieck, wenn der Grundlinie nur spitze Winkel anliegen;

2) die Höhe fällt in eine Seite, wenn der Grundlinie ein rechter Winkel anliegt und man kann die beiden Catheten abwechselnd als Grundlinie und Höhe ansehen;

3) die Höhe fällt außerhalb des Dreiecks, wenn der Grundlinie ein stumpfer Winkel anliegt.

Außenwinkel und innere gegenüberliegende Winkel. — **Transversale** (Ecktransversale).

Bezeichnungen und Construktionen.

Alle übrigen Figuren lassen sich durch Linien zwischen je zwei nicht an derselben Seite liegende Scheitelpunkte (**Diagonalen** oder Transversalen, die durch zwei Eckpunkte gehen) in Dreiecke zerlegen.

b. Das Viereck oder Vierseit

enthält zwei Paar gegenüberliegende Seiten und zwei Paar gegenüberliegende Winkel. Man unterscheidet:

beide Seitenpaare parallel	ein Seitenpaar parallel	kein Seitenpaar parallel
Parallelogramm	**Paralleltrapez** (symmetrisches)	**Trapezoid**

Bei den Parallelogrammen unterscheidet man:

	Winkel rechte	Winkel schief
nur die gegenüberligenden Seiten gleich	**Rektangel** (Rechteck)	**Rhomboid**
alle Seiten gleich	**Quadrat**	**Rhombus**

Höhe und Grundlinien. — Bezeichnungen und Construktionen. — Die Ergänzungen des Parallelogramms.

c. Das regelmäßige (reguläre) Polygon

hat lauter untereinander gleiche Winkel und untereinander gleiche Seiten. — Alle regulären Polygone haben einen Mittelpunkt (Centrum), der von allen Eckpunkten und auch von allen Seiten gleich weit entfernt ist. — Man kann sie in Dreiecke zerlegen durch Diagonalen und Strahlen (Linien von dem Mittelpunkte zu den Eckpunkten).

Bezeichnung; Construktionen derselben besser mittelst des Kreises.

Die irregulären Polygonen werden wir nicht betrachten.

d. Der Kreis

ist ein reguläres Polygon von unendlich vielen Ecken und Seiten.

Denke ich mir in einer Ebene eine begrenzte Gerade um den einen feststehenden Endpunkt so lange gedreht, bis die Gerade wieder in ihre ursprüngliche Lage zurückkehrt, so bildet die Spur des beweglichen Endpunktes eine geschlossene Curve: die **Kreislinie** (Peripherie). — Der feststehende Punkt ist der **Mittelpunkt** (Centrum), die sich bewegende Grade der **Halbmesser** oder **Radius** (r oder ρ), die von der Kreislinie eingeschlossene Fläche die **Kreisfläche** oder **der Kreis.**

Die Peripherie ist vom Mittelpunkte überall gleich weit entfernt.

Eine Gerade, welche zwei Punkte innerhalb der Peripherie mit einander verbindet, nennt man **Sehne;** eine verlängerte Sehne nennt man **Sekante** (secans); eine Sehne, welche durch den Mittelpunkt geht, nennt man **Durchmesser** (Diameter = d = 2 . r). — Eine Gerade, welche, bei genugsamer Verlängerung, nur einen Punkt mit der Kreislinie gemeinsam hat und sonst ganz außerhalb des Kreises fällt, nennt man **Tangente** (tangens).

Der **Peripheriewinkel** hat zu Schenkeln: Sehnen und sein Scheitel liegt in der Peripherie, der **Centriwinkel** hat zu Schenkeln Radien und sein Scheitel liegt im Mittelpunkt. Der zwischen seinen Schenkeln liegende Theil des Kreises heißt **Kreisausschnitt** (Sektor), während die Sehne den Kreis in zwei **Kreisabschnitte** (Segmente) theilt und der Durchmesser in zwei gleich große Segmente oder Halbkreise.

Der Halbkreis kann sowohl ein Segment als auch ein Sektor sein.

Die ganze Kreislinie wird eingetheilt in 360 gleiche Theile oder Grade (zu 60 Minuten, zu 60 Sekunden); der Halbkreis ist also = 180°, der Viertelkreis oder Quadrant = 90°. In Bezug auf die entsprechenden Centriwinkel sagt man auch der Kreisumfang = 4 R (ganze Umdrehung), Halbkreis = 2 R (halbe Umdrehung), Quadrant = 1 R (viertel Umdrehung).

Concentrische Kreise haben einen gemeinsamen Mittelpunkt, sonst heißen sie excentrisch und die Grade, welche ihre Mittelpunkte verbindet: Centrale. — Zwei Kreise können sich berühren von innen, von außen, oder sich schneiden.

Polygone im Kreise haben zu Seiten lauter Sehnen und zu Winkeln: Peripheriewinkel.

Polygone um den Kreis haben zu Seiten: lauter Tangenten und zu Winkeln: Tangentenwinkel. — Die regulären Polygone sind am einfachsten in oder um den Kreis zu zeichnen.

Die Radlinie oder Cykloide, welche z. B. von der Mondbahn gebildet wird, ist die Spur eines bestimmten Punktes auf einer Kreislinie, welche als auf einer andern Linie rollend gedacht wird.

Construktionen und Bezeichnungen.

D. Der Körper

hat drei Ausdehnungen. Er kann sein begrenzt, zum Theil begrenzt. Man unterscheidet an ihm: Kanten, Ecken, Seitenflächen (auch Seiten genannt), Grundflächen, Gipfel, Höhe, Flächenwinkel. — Polarecke.

Wir werden im Folgenden aus der großen Anzahl aller möglichen Formen nur die wichtigsten Körperformen (Polyëder) hervorheben.

a. Regelmäßige Körper

sind solche, welche von lauter regelmäßigen Ebenen (das gleichseitige Dreieck, das Quadrat, das reguläre Fünfeck) eingeschlossen sind: **reguläre Polyëder**.

Jeder Winkel im gleichseitigen Dreieck ist = 60°, im Quadrat = 90°, im Fünfeck = 108°, im Sechseck = 120°; also kann man höchstens 3, 4 oder 5 Dreiecke, 3 Quadrate, 3 Fünfecke zu einer Ecke verbinden; denn 6 Dreiecke oder 4 Quadrate oder 3 Sechsecke gäben schon 360° und fielen daher in eine Ebene, könnten also keinen Körper umschließen. So erhalten wir folgende Körper:

An jeder Ecke	gleichseitige Dreiecke	Quadrate	Fünfecke
3	Tetraëder (4)	Cubus (6) oder	Dodekaëder (12)
4	Oktaëder (8)	Würfel oder	
5	Ikosaëder (20)	Hexaëder	

Construktionen und Bezeichnungen.

b. Die Kugel

wäre ein von unendlich vielen, regelmäßigen Flächen eingeschlossener Körper. — Dreht sich ein Kreis (Halbkreis) um seinen als feststehend gedachten Durchmesser, so bildet die Spur der Kreislinie die **Kugelfläche** (eine Rotationsfläche) und der von dieser eingeschlossene Raum ist die **Kugel**. Der drehend gedachte Kreis heißt: Erzeugungskreis. Sein Mittelpunkt, Halbmesser (Radius) Durchmesser sind auch zugleich **Mittelpunkt**, **Halbmesser** und **Durchmesser** der Kugel.

Alle Punkte der Kugelfläche sind vom Mittelpunkte der Kugel gleich weit entfernt. — Der Durchmesser des Erzeugungskreises, um welchen man sich denselben gedreht denkt, heißt auch: Kugelachse und seine Endpunkte: Pole. — Parallelkreise, Aequator.

Eine Gerade und eine Ebene, welche bei genugsamer Verlängerung nur einen Punkt mit der Kugelfläche gemeinsam haben und sonst ganz außerhalb derselben fallen nennt man: Kugeltangente und **Tangentialebene**. — Kugelsehne, Kugelsekante. — Jede Schnittfläche der Kugel bildet auf ihrer Oberfläche einen Kreis, geht sie durch den Mittelpunkt (**Diametralebene**): einen **größten Kreis.**

Zwei sich schneidende größte Kreise bilden auf der Kugelfläche vier Kugelzweiecke, drei sich schneidende größte Kreise: acht sphärische Dreiecke. —

Jede Schnittfläche der Kugel theilt diese in zwei **Kugelsegmente** oder **Kugelabschnitte,** die Diametralebene: in zwei **Halbkugeln.** Die dazu gehörigen Theile der Kugelfläche nennt man: **Kalotte** oder Kugelhaube.

Zwei parallele Schnittflächen schließen eine **körperliche Zone** ein und bilden auf der Kugelfläche: eine **Kugelzone**. — Drei oder mehr größte Kreise schließen einen **Kugelsektor** (Kugelausschnitt) ein, welcher auf der Kugelfläche ein sphärisches Dreieck, 4, 5.... neck (Kreis) bildet.

Im letztern Falle kann man sich den Kugelsektor entstanden denken durch Drehung eines Sektors des Erzeugungskreises um einen als fest stehend gedachten Radius; und er wird von einer Kalotte begrenzt und einer Kegelfläche darüber, welche zum Gipfel den Kugelmittelpunkt hat. — Die Halbkugel kann auch als Kugelsektor angesehen werden.

Der Kugel eingeschriebene Körper sind solche, deren sämmtliche Eckpunkte die Kugel von innen berühren, wie z. B. die regulären Polyëder. Die Kugel umschreibende Körper sind solche, deren Ebenen Tangentialebenen der Kugel sind.

Construktionen und Bezeichnungen.

c. Die Pyramide.

Denken wir uns die Eckpunkte eines beliebigen Polygons (**Grundfläche**) mit einem Punkte (**Gipfel**) über demselben durch gerade Linien verbunden, so erhalten wir eine **Pyramide**, welche je nach der Seitenzahl der Grundfläche eine drei-, vier-, fünf-, ... nseitige genannt wird. Die die Pyramide zwischen dem Gipfel und der Grundfläche umgränzenden Dreiecke nennt man die **Seiten** (Seitenflächen) der Pyramide.

Man kann sich die Pyramide auch entstanden denken durch Bewegung einer Geraden, von der ein Punkt (Gipfel) fest stehend gedacht wird, während ein anderer Punkt die Peripherie eines Polygons (Grundfläche) beschreibt. —

Ist die Grundfläche eine regelmäßige und eine vom Gipfel auf die Grundfläche gefällte Senkrechte (**Höhe**) trifft gerade deren Mittelpunkt, so wird die Pyramide eine gerade genannt, sonst eine schiefe; und fällt die Höhe ganz außerhalb der Grundfläche, eine überhängende.

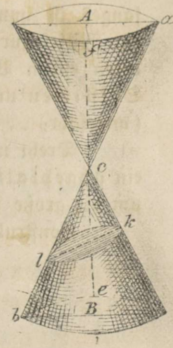
Sind Grundflächen und Seitenflächen gleichseitige Dreiecke, erhalten wir das Tetraëder.

Wird durch irgend eine (ebene) Schnittfläche der obere Theil der Pyramide, welcher den Gipfel enthält, abgeschnitten, so bleibt übrig eine **abgestumpfte Pyramide.**

Zwei Pyramiden — und im allgemeinen alle Körper — heißen symmetrisch, wenn alle Bestandtheile derselben, wie Ecken, Seitenflächen u. s. w. einzeln genommen, vollkommen gleich sind, jedoch in der Zusammensetzung gerade entgegengesetzte Lage haben oder in umgekehrter Reihenfolge an einander stoßen (Polarecke). — Obgleich solche symmetrische Körper sonst vollkommen gleich sind (z. B. ein Paar Stiefel, ein Paar Hände, oder durch eine Polarecke entstandene Körper), so können sie doch wegen der entgegengesetzten Lage ihrer gleichen Theile nicht in einander gesteckt oder gelegt gedacht werden d. h. nicht congruent sein. —

Construktionen und Bezeichnungen.

d. Der Kegel



ist eine Pyramide von unendlich vielen Seiten. — Dreht sich eine Gerade ab (erzeugende Gerade) um einen ihrer als feststehend gedachten Punkte c (**Kegelmittelpunkt,** Gipfel, Spitze), während jeder andere Punkt eine Curve beschreibt, so bildet ihre Spur eine **Kegelfläche (Kegelmantel).** — Schneide ich diese Fläche durch zwei parallele Ebenen A und B (**Grundflächen**), so entsteht der **Kegel,** während die erzeugende Grade in jeder ihrer Lagen z. B. ef eine **Kegelseite** heißt.

Im Folgenden werden wir nur einen solchen Kegel betrachten, dessen Grundflächen Kreise sind.

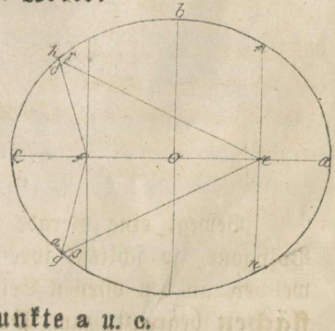
Die Linie, welche die Kegelgipfel mit den Mittelpunkten der Grundflächen verbindet, nennt man **Kegelachse.** Steht diese senkrecht auf den Grundflächen, oder geht die Senkrechte vom Gipfel auf die Grundflächen (die Höhe) durch deren Mittelpunkt, so ist der Kegel ein gerader, sonst ein schiefer, oder fällt die Höhe mit ihrem Fußpunkte außerhalb der Grundflächen: ein überhängender.

Die Hälfte eines geraden Kegels kann man sich auch entstanden denken durch Drehung eines rechtwinkligen Dreiecks um eine seiner — als feststehend gedachten — Katheten.

Wird von einem Kegel ein Theil mit dem Gipfel abgeschnitten, so bleibt ein **abgestumpfter Kegel** nach.

Kegelschnitte.

Legt man durch einen Kreiskegel eine Ebene parallel der Grundfläche, so ist die Schnittfläche ein **Kreis.**

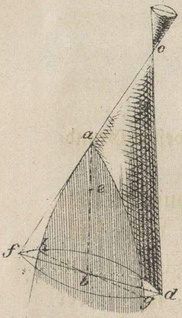


Legt man durch einen Kegel eine Ebene nicht parallel der Grundfläche, doch so, daß zwei gegenüberstehende Seiten geschnitten werden, so ist die Schnittfläche eine **Ellipse** (lk) Peripherie, Brennpunkte e u. f (Fig. II.) Leitstrahlen (radii vectores) eg, fg; eh, fh. Große Achse ac; kleine Achse bd; Mittelpunkt o; Excentricität of = oe; Parameter mn; Scheitelpunkte a u. c.

Die Summe je zweier beliebiger Leitstrahlen nach einem Punkte des Umfanges ist immer gleich groß und immer gleich der großen Achse: das giebt uns ein Mittel zur Construktion der Ellipse. — Die Erdbahn ist eine Ellipse, in deren einem Brennpunkte die Sonne steht, die Scheitelpunkte sind die Orte der Solstitien und die Endpunkte der kleinen Achse sind die Orte der Aequinoctien (ungefähr) . . $\angle \alpha = \beta$ und $\angle \gamma = \angle \delta$, wichtig für Licht- und Schallwellen.

Dreht man die Ellipse um ihre kleine Achse, so entsteht als Rotationsfläche ein abgeplattetes Ellipsoid (Sphäroid, Apfelsine, Erdkugel); dreht man sie um die große Achse, erhält man ein gestrecktes Ellipsoid (Citrone).

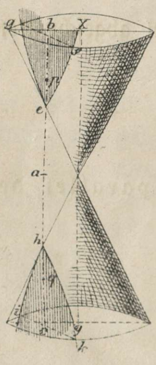
Constructionen und Bezeichnungen.



Legt man durch einen Kegel eine Ebene parallel einer Seite (cd), erhält man als Schnittfläche die **Parabel**. — Zwei Arme ag u. ah, welche mit der Verlängerung der Kegelfläche sich bis ins Unendliche fortsetzen lassen. Achse ab, unendlich. Brennpunkt e, der andere in unendlicher Entfernung. Scheitelpunkt a; Leitstrahlen, Leitlinie; Parameter.

Die Entfernung jedes Punktes der Parabel vom Brennpunkte ist gleich der Entfernung desselben von der Leitlinie. Dieses giebt uns ein Mittel zur Construktion der Parabel. — Parabolische Kometenbahnen.

Construktionen und Bezeichnungen.



Legt man durch einen Kegel eine Ebene parallel der Achse (xy), so ist die Schnittfläche eine **Hyperbel**. Mittelpunkt a, Achse eh, Leitstrahlen, Brennpunkte p, q, vier unendlich große Arme (ef, eg; hi, hk), Scheitelpunkte e und h.

Hyperbolische Kometenbahnen. — Die Differenz zweier Leitstrahlen (nach demselben Punkte der Peripherie) ist immergleich der großen Achse. Dieses giebt uns ein Mittel zur Konstruktion der Hyperbel. Assymptoten.

Construktionen und Bezeichnungen.

e. Das Prisma.

Bewegt eine Gerade sich selbst parallel in der Peripherie eines Polygons, so schließt ihre Spur einen prismatischen Raum ein, welcher, an den offenen Seiten durch zwei einander parallele **Grundflächen** begrenzt, zum **Prisma** wird. Dieses ist je nach der Seitenzahl seiner Grundflächen ein 3, 4, 5 . . . nseitiges. Die **Seitenflächen** oder Seiten sind immer lauter Parallelogramme.

Sind die Grundflächen reguläre Polygone, nennt man das Prisma ein regelmäßiges und die Gerade, welche die Mittelpunkte beider Grundflächen verbindet: Achse. Steht diese, also auch die Seitenlinien (Kanten) auf den Grundflächen senkrecht, nennt man das Prisma ein gerades, sonst ein schiefes. — Die Höhe.

Beim geraden Prisma sind die Seitenflächen lauter Rektangel und die Höhe ist gleichlang mit den Seitenlinien und gleichlang mit der Achse.

Sind die Grundflächen eines Prismas Parallelogramme, nennt man es: **Parallelepipedum,** und zwar ein rechtwinkliges, wenn Grundflächen und Seiten Rektangel oder Quadrate sind; sonst ein schiefes.

Sind Grundflächen und Seiten lauter Quadrate, erhält man den Cubus oder Würfel.

Eine Diagonalebene verbindet zwei einander gegenüberliegende Seitenlinien und eine Diagonale zwei einander gegenüberliegende Ecken. — Ein schiefabgeschnittenes Prisma.

f. Der Cylinder

ist ein Prisma von unendlich vielen Seiten, bei dem also die Grundflächen von Curven begrenzte Ebenen sind. — Die Spur einer sich selbst parallel fortbewegten Geraden — in der Richtung einer Curve — giebt die **Cylinderfläche,** welche von zwei einander parallelen Ebenen geschnitten den Cylinder als Körper einschließt. Diese parallelen Ebenen nennt man **Grundflächen,** die sich selbst parallel fortbewegte Gerade: die erzeugende Gerade.

In der Elementar-Geometrie kommt nur der Fall vor, daß die Grundflächen Kreise sind und man nennt sie alsdann: Grundkreise.

Die die Mittelpunkte der beiden Grundkreise verbindende Gerade heißt: **Cylinder-Achse.** Steht diese auf den Grundflächen senkrecht, so ist der Cylinder ein gerader, sonst ein schiefer. — Höhe.

Den geraden Cylinder kann man sich auch entstanden denken durch Drehung eines Rektangels um eine seiner — als feststehend gedachten — Seiten. — Ein schief abgeschnittener Cylinder.

Die Geometrie der Ebene nennt man **Planimetrie,** die Geometrie des Raumes (Körpers) **Stereometrie,** während man unter **Trigonometrie** (ebene und sphärische) zunächst die Ausmessung und Berechnung der Dreiecke versteht.

Das wesentliche Geschäft der Geometrie ist aber nicht, diese Raumgestalten aufzuzählen und sie nach ihren Theilen zu beschreiben; sondern sie hat zu untersuchen und anzugeben, in wie weit und in welcher Hinsicht sich Gesetzmäßigkeit an den Raumgestalten findet und von welcher Art diese Gesetzmäßigkeit ist.

Die Gesetzmäßigkeit — welche hier nicht mit Regelmäßigkeit zu verwechseln ist — kommt allen Raumgestalten in einem gewissen Grade zu, und kann ein Mal in der Erfahrung begründet sein, dann kann sie aber auch bewiesen sein. Dieses Letztere ist vorzüglich Sache der Geometrie, während jene — die Erfahrung — nicht zum eigentlichen Beweisen, wol aber — und das nicht ohne Nutzen — zur Verdeutlichung und Erklärung des Bewiesenen angewendet werden kann.

Zu jedem **Beweise** gehören **gegebene** Bestimmungen, aus denen andere — die **zu beweisenden** — mit Nothwendigkeit gefolgert werden. Dieses geschieht einerseits mit Hülfe der **Definitionen**, welche an einzelne wesentliche Eigenschaften der Raumgestalten anknüpfend dieselben von allen übrigen Raumgestalten vollkommen und zweifellos unterscheiden lehren; während es dem weitern Gange der Wissenschaft überlassen bleibt, alle übrigen Eigenschaften derselben Raumgestalten aus den in den Definitionen gegebenen Eigenschaften durch Beweise zu finden und herzuleiten. Andererseits dienen zur Durchführung der Beweise die mathematischen **Grundsätze** oder Axiome, d. h. allgemein anerkannte mathematische Wahrheiten, und endlich die aus den Beweisen hervorgegangenen **Lehrsätze**, welche in kurzen Worten das Bewiesene wiedergeben.

Der Satz des Pythagoras und seine Stützsätze.

Ehe wir an die einzelnen Beweise selbst gehen, zunächst die dazu nöthigen Grundsätze und Definitionen.

Grundsätze.

1) Jede Größe ist sich selbst gleich.
2) Das Ganze ist seinen Theilen zusammengenommen gleich, also größer als jeder Theil desselben.
3) Gleiches läßt sich für einander setzen.
4) Gleiches zu Gleichem addirt giebt Gleiches, eben so Gleiches von Gleichem subtrahirt, Gleiches mit Gleichem multiplicirt, Gleiches durch Gleiches dividirt.
5) Gleiches zu Ungleichem addirt, Gleiches von Ungleichem subtrahirt, mit Gleichem Ungleiches multiplicirt, durch Gleiches Ungleiches dividirt, giebt Ungleiches und zwar das Größere, wo zuvor das Größere war.

6) Ungleiches von Gleichem subtrahirt, durch Ungleiches Gleiches dividirt, giebt Ungleiches und da das Kleinere, wo im ersten Falle das Größere subtrahirt, im zweiten durch das Größere dividirt ist.
7) Zwei Größen, von denen jede derselben dritten Größe gleich ist, sind einander gleich. (Man denkt drei gleiche Größen).

Definitionen.

1. Die gerade Linie ist die Spur eines in derselben Richtung fortbewegt gedachten Punktes. Dazu gehören zwei Punkte, Ausgangspunkt und Zielpunkt. Also die gerade Linie wird bestimmt a) durch zwei Punkte b) durch einen Punkt und die Richtung.

2. Der Winkel (der geradlinige) ist der Richtungsunterschied (d. Abweichung) zweier gerader Linien.

3. Der gestreckte Winkel ist ein Winkel, bei dem die Schenkel der Lage nach in eine Gerade aber in entgegengesetzte Richtung fallen.

4. Raumgebilde sind identisch (congruent oder $\cong$), wenn sie aufeinandergelegt sich in allen ihren Theilen decken; und gleich, wenn sie gleichen Inhalt haben.

5. Der rechte Winkel ist die Hälfte des gestreckten Winkels.

6. Nebenwinkel sind solche Winkel, welche den Scheitel und einen Schenkel gemeinsam haben und deren beide anderen Schenkel der Lage nach in eine gerade Linie aber in entgegengesetzte Richtung fallen.

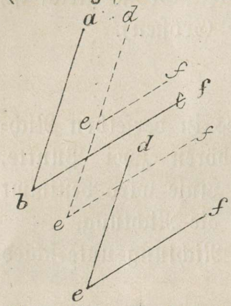
7. Scheitelwinkel sind solche Winkel, die den Scheitelpunkt gemeinsam haben, und deren je zwei Schenkel der Lage nach in eine gerade Linie aber in entgegengesetzte Richtung fallen; die also von zwei sich schneidenden Geraden gebildet werden.

8. Innere Gegenwinkel sind solche Winkel, welche auf derselben Seite der schneidenden Linie liegen, und innerhalb der beiden Parallelen. Aeußere Gegenwinkel sind solche Winkel, die auf derselben Seite der schneidenden Linie liegen und außerhalb der beiden Parallelen. Correspondirende Winkel sind solche Winkel, die auf derselben Seite der schneidenden Linie liegen, von denen der eine ein Außenwinkel, der andere ein Innenwinkel ist und die nicht Nebenwinkel sind. Wechselwinkel sind solche Winkel, die auf verschiedenen Seiten der schneidenden Linie liegen und beide Außen- oder beide Innenwinkel aber nicht Nebenwinkel sind.

9. Ein Parallelogramm ist eine vierseitige Figur, in der die gegenüberliegenden Seiten einander parallel sind.

10. Parallel nennt man zwei Linien, wenn sie dieselbe oder entgegengesetzte Richtung haben und nicht in eine Linie zusammenfallen.

11. Ein Complementwinkel ist ein solcher Winkel, welcher einen andern zu einem Rechten oder 90° ergänzt; ein Supplementwinkel ist ein solcher Winkel, welcher einen andern zu zwei Rechten (einem gestreckten Winkel) oder 180° ergänzt.



Lehrsätze.

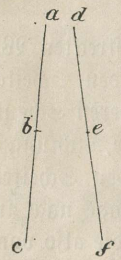
Satz 1. Haben die Schenkelpaare zweier Winkel dieselbe Richtung, so sind die Winkel gleich.

Gegeben: $\angle$ abc u. def
L. ba hat dieselbe Richtung mit ed
L. bc hat dieselbe Richtung mit ef
zu beweisen: $\angle$ abc = $\angle$ def

Beweis. L. ba hat dieselbe Richtung mit ed
L. bc hat dieselbe Richtung mit ef } Gegeben

der Richtungsunterschied von ba u. bc derselbe wie von ed u. ef.

$\angle$ abc = $\angle$ def (Def. 2.)



Satz 2. Alle gestreckten Winkel sind einander gleich.

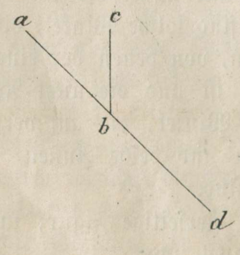
Ggb. $\angle$ abc u. def als gestreckte Winkel
z. b. $\angle$ abc = $\angle$ def

Beweis. Lege $\angle$ abc auf $\angle$ def so daß
P. b auf P. e
L. bc entl. L. ef fällt

L. ba entl. L. ed (Def. 3.)

$\angle$ abc = $\angle$ def (Def. 4.)

Zus. 1. Alle rechte Winkel sind einander gleich. (Def. 5.)
Zus. 2. Gleiche Winkel haben gleiche Complementwinkel. (Def. 11)



Satz 3. Nebenwinkel sind zusammen gleich 2 R.

Ggb. $\angle$ abc u. cbd als Nebenwinkel
z. b. $\angle$ abc + cbd = 2 R.

Bew. $\angle$ abc + cbd = $\angle$ abd (Grds. 2.)
$\angle$ abd = 1 gestr. $\angle$ (Def. 3 u. 6)

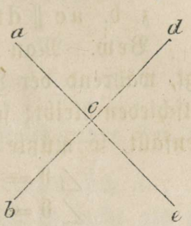
$\angle$ abc + cbd = 1 gestr. $\angle$ (Grds. 7)
2 R = 1 gestr. $\angle$ (Def. 5)

$\angle$ abc + cbd = 2 R. (Grds. 5)

Zus. 1. Der Nebenwinkel eines spitzen Winkels ist ein stumpfer Winkel; der Nebenwinkel eines stumpfen Winkels ist ein spitzer Winkel.

Zus. 2. Der Nebenwinkel eines rechten Winkels ist auch ein rechter Winkel, oder sind Nebenwinkel einander gleich, ist jeder von ihnen ein rechter Winkel.

Zus. 3. Gleiche Winkel haben gleiche Nebenwinkel oder gleiche Supplementwinkel.



Satz 4. Scheitelwinkel sind einander gleich.

Ggb. $\angle$ acb u. dce als Scheitelwinkel

z. b. $\angle$ acb $=$ $\angle$ dce

Bew. $\left.\begin{array}{l}\angle acb + acd = 2 R. \\ \angle dce + acd = 2 R.\end{array}\right\}$ S. 3.

$\angle$ acb $+$ acd $=$ $\angle$ dce $+$ acd (Grds. 7.)

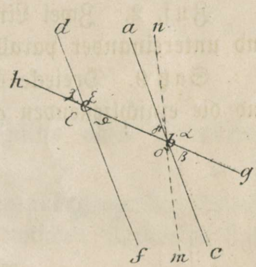
acd $=$ acd (Grds. 1.)

$\angle$ acb $=$ $\angle$ dce (Grds. 4.)

Oder: $\angle$ acd $=$ $\angle$ acd (Grds. 1.)

$\angle$ acb u. ecd sind Nebenwinkel von acd (Def. 6 u. 7.)

$\angle$ acb $=$ $\angle$ ecd (S. 3., Zus. 3.)



Satz 5. Correspondirende Winkel sind einander gleich.

Ggb. L. ac $\#$ L. df

z. b. $\beta = \vartheta$

Beweis. L. bg u. eb haben dieselbe Richtung (gegeben).

bc u. ef haben dieselbe Richtung (Def. 10.)

$\beta = \vartheta$ (Satz 1.)

Satz 6. Wechselwinkel sind einander gleich.

Ggb. L. ac $\parallel$ df

z. b. $\delta = \varepsilon$ u. $\alpha = \zeta$

Beweis. $\delta = \zeta$; $\delta = \zeta$ (S. 5.)

$\varepsilon = \zeta$; $\delta = \alpha$ (S. 4.)

$\delta = \varepsilon$; $\alpha = \zeta$ (Grds. 7.)

Satz 7. Die Summe zweier inneren oder zweier äußeren Gegenwinkel ist gleich 2 R.

Gegeben: ac $\parallel$ df

z. b. $\delta + \vartheta = 2R$; u. $\alpha + \eta = 2R$.

Bew. $\delta + \beta = 2R$; $\alpha + \gamma = 2R$. (S. 3)

$\beta = \vartheta$; $\gamma = \eta$ (S. 5)

$\delta + \vartheta = 2R$; $\alpha + \eta = 2R$. (Grds. 3)

Satz 8. Wenn zwei Linien von einer dritten so geschnitten werden, daß die correspondirenden Winkel einander gleich sind, so sind die geschnittenen Linien parallel.

Ggb. $\beta = \vartheta$

z. b. $ac \parallel df$

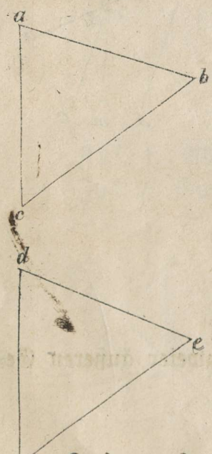
Bew. Man denke sich durch den P. b eine Linie $mn \parallel df$ gelegt, während der Richtungsunterschied von ac u. mn vorläufig unentschieden bleibt; sollte aber bewiesen werden, daß ac mit mn zusammenfällt, so müßte dann auch $ac \parallel df$ sein.

$\angle \vartheta = \angle mbg$ (S. 5)
$\angle \vartheta = \angle cbg = \beta$ (gegeben)
$\angle mbg = \angle cbg$ (Grds. 7)
$\angle mbc = 0$ oder bc und bm fallen zusammen
L. bc oder $ac \parallel df$.

Zus. 1. Wenn zwei Linien von einer dritten so geschnitten werden, daß die Wechselwinkel einander gleich sind, oder die Summe der innern oder äußern Gegenwinkel gleich 2 R ist; so sind die geschnittenen Linien einander parallel.

Zus. 2. Zwei Linien, die jede derselben dritten parallel sind, sind untereinander parallel.

Satz 9. Dreiecke sind congruent (identisch), wenn je ein Winkel und die einschließenden gleich sind.



Ggb. $\angle cab = \angle fde$
S. ac = S. df u. S. ab = de

z. b. $\triangle abc \cong \triangle def$

Bew. Lege $\triangle abc$ auf $\triangle def$, so daß
P. a auf P. d und
L. ab entlang L. de fällt
fällt P. b auf P. e (weil die L. gleich lang sind nach dem Gegebenen) und
ac entlang df (weil d. $\angle$ gleich sind u. Def. 2)
fällt P. c auf P. f (weil nach dem Gegebenen die L. gleich lang sind)
L. bc auf L. ef (weil zwischen 2 P. nur eine Gerade möglich ist. Def. 1)
$\triangle abc \cong def$ (Def. 4).

Zus. 1. In congruenten Dreiecken sind die homologen (ähnlich liegenden) Winkel und die homologen Seiten einander gleich.

Satz 10. Dreiecke sind congruent (identisch), wenn je eine Seite und die anliegenden Winkel einander gleich sind.

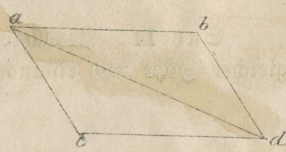
Ggb. S. ab = S. de
$\angle$ cab = $\angle$ fde u. $\angle$ cba = $\angle$ fed
z. b. $\triangle$ abc $\cong$ dfe

Beweis. Ich denke mir $\triangle$ abc auf $\triangle$ def gelegt, so daß
P. a auf P. d und
S. ab entl. S. de . . . fällt

fällt P. b auf P. e (Gegeben)
u. S. ac entl. S. df } (Weil die $\angle$ gleich sind n. Def. 2)
u. S. bc entl. S. ef }

fällt P. e auf P. f, weil zwei gerade Linien sich nur in einem Punkte schneiden können; denn würden sie sich in mehr als in einem Punkte z. B. in 2 P. schneiden, müßten sie eine grade Linie bilden; da durch 2 Punkte eine grade Linie bestimmt wird. (Def. 1).

Satz 11. Die Diagonale theilt das Parallelogramm in zwei congruente Dreiecke.



Ggb. Prllgr. cb u. Diagonale ad
z. b. $\triangle$ abd $\cong$ adc
Beweis. ad = ad (Grds. 1.)
$\angle$ bad = $\angle$ adc } S. 6.
$\angle$ adb = $\angle$ cad }

$\triangle$ abd $\cong$ adc. S. 10.

Zus. 1. Jedes Dreieck kann als die Hälfte eines Parallelogramms angesehen werden.

Zus. 2. Im Parallelogramm sind die gegenüberliegenden Seiten und Winkel einander gleich; oder Parallelen zwischen Parallelen sind einander gleich.

Satz 12. Sind in einer vierseitigen Figur zwei gegenüberliegende Seiten einander parallel und gleich; so sind auch die beiden andern einander parallel und gleich oder die Figur ist ein Parallelogramm.

Ggb. ab $\parallel$ u. = cd
z. b. ac $\parallel$ u. = bd; Construktion ad
Bew. ab = cd (gegeben)
ad = ad (Grds. 1.)
$\angle$ bad = $\angle$ adc (S. 6.)

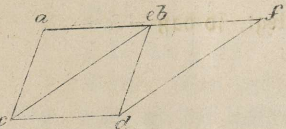
$\triangle$ abd $\cong$ $\triangle$ dac (S. 9.)

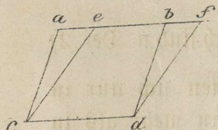
bd = ac } S. 9., Zus. 1.
u. $\angle$ adb = $\angle$ dac }

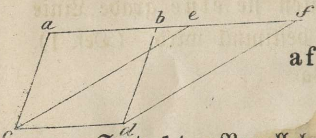
bd $\parallel$ ac (S. 8., Zus. 1.)

Satz 13. Parallelogramme von derselben Grundlinie und gleicher Höhe (oder zwischen denselben Parallelen) sind einander gleich.

Drei Fälle nach der Figur.







Ggb.: Die Parallelogramme ad und cf auf derselben Grundlinie cd und zwischen denselben Parallelen af und cd.

z. b. ad = cf.

Bw. L. ac = bd, ec = fd (S. 11., Zus. 2.)

∠ ace = ∠ bdf S. 1.

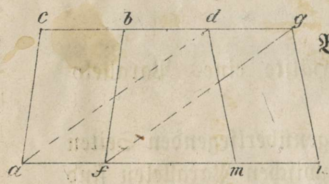
△ ace ≅ bdf S. 9.

afdc = afdc Grds. 1.

afdc — △ ace = afdc — △ bdf (Grds. 4.)

ad = cf Grds. 3.

Satz 14. Parallelogramme von gleicher Grundlinie und von gleicher Höhe sind einander gleich.



Ggb.: cg ∥ an Constr. ad und fg

af = mn

z. b. ab = dn

Bew. af ∥ u. = dg (gegeben) S. 11., Zus. 2.

ad ∥ u. = fg S. 12

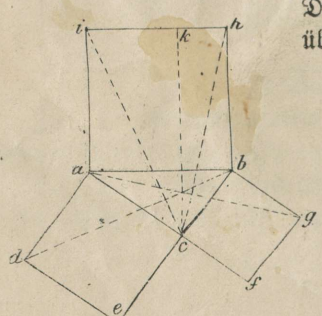
cf = ag, dn = ag (S. 13)

cf = dn Grds. 7.

Zus. 1. Jedes Dreieck ist die Hälfte von einem Parallelogramm, mit dem es gleiche Grundlinie und gleiche Höhe hat. (S. 11., Zus. 1.)

Zus. 2. Dreiecke von gleicher Grundlinie und Höhe sind einander gleich.

Satz 15. Das Quadrat über der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ist gleich der Summe der Quadrate über den beiden Katheten. (Pythagoras).



Ggb.: △ acb u. ∠ acb = 1 R

ab, ae u. cg Quadrate

z. b. ah = ae + cg

Constr. ck ∥ ai u. bh

L. ci, ch, bd, ag

Beweis:

$$\angle iab = \angle cad$$
$$bac = \angle bac$$
$$\underbrace{\angle iab + bac}_{\angle iac} = \underbrace{\angle cad + bac}_{dab}$$
$$\angle iac = dab$$
$$\text{S. } ia = ab$$
$$\text{S. } ac = ad$$
$$\triangle iac \cong \triangle dab$$
$$\triangle iac = \tfrac{1}{2}\, ka$$
$$\triangle dab = \tfrac{1}{2}\, ae$$
$$\tfrac{1}{2}\, ka = \tfrac{1}{2}\, ae$$
$$ka = ae$$

$$\angle hba = \angle gbc \quad \text{S. 2, Zus. 1.}$$
$$\angle abc = \angle abc \quad \text{Grds. 1}$$
$$\underbrace{\angle hba + abc}_{\angle hbc} = \underbrace{\angle gbc + abc}_{\angle abg} \quad \text{Grds. 4.}$$
$$\angle hbc = \angle abg \quad \text{Grds. 2 u. 3.}$$
$$\left.\begin{array}{l} \text{S. } hb = ba \\ \text{S. } bc = bg \end{array}\right\} \text{Seiten der Quadrate.}$$
$$\triangle hbc \cong \triangle abg \quad \text{S. 9.}$$
$$\left.\begin{array}{l} \triangle hbc = \tfrac{1}{2}\, kb \\ \triangle abg = \tfrac{1}{2}\, cg \end{array}\right\} \text{S. 14, Zus. 1.}$$
$$\tfrac{1}{2}\, kb = \tfrac{1}{2}\, cg \quad \text{Grds. 3.}$$
$$kb = cg \quad \text{Grds. 4.}$$

$$kb = cg$$
$$\underbrace{ka + kb}_{ha} = ae + cg \quad \text{Grds. 4.}$$
$$ha = ae + cg \quad \text{Grds. 2 u. 3.}$$

Cand. d. V. [illegible]