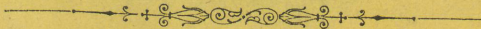


Cens. 11136.

Sammlung
von
Beispielen und Aufgaben
aus der
Buchstabenrechnung und Algebra

von
W. Nerling,
weil. Collegienrath und Ritter, Oberlehrer an dem Gymnasium zu Dorpat.

~~~~~  
Siebente Auflage.  
~~~~~



Dorpat und Riga.
Schnakenburg's Druck und Verlag.
1886.

ICA
-5720

Sammlung

von

Beispielen und Aufgaben

aus der

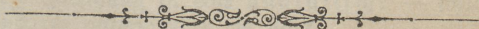
Buchstabenrechnung und Algebra

von

W. Nerling,

weil. Collegienrath und Ritter, Oberlehrer an dem Gymnasium zu Dorpat.

~~~~~  
Siebente Auflage.  
~~~~~



Dorpat und Riga.

Schnakenburg's Druck und Verlag.

1886.

Дозволено Цензурою. — Дерптъ, 7. Апрелья 1886 г.



619

Erklärungen.

Auf Wunsch einiger Lehrer sind in dieser Auflage solche Aufgaben hinzugefügt, in denen die vier ersten Rechnungsarten mit einander verbunden sind und Aufgaben über das Potenziren mit positiven Exponenten. Damit aber alle Auflagen ungehindert neben einander gebraucht werden können, ist keine Nummer geändert worden, weder die eines Paragraphen, noch die einer Aufgabe; sondern zwei neue Paragraphen sind eingeschoben worden und zwar „§ 6 A“ und „§ 13 A“.

§ 1.

- 1) Womit beschäftigt sich die Mathematik?
- 2) Was ist eine Größe? Wie theilt man die Größen ein? Was ist eine Raumgröße? — eine Zahlengröße? Wie unterscheiden sich beide von einander?
- 3) Was ist eine Zahl? Wie theilt man die Zahlen ein? Sieh den Unterschied zwischen benannten und unbenannten — bestimmten und unbestimmten Zahlen an. Durch welche Zeichen werden die bestimmten und durch welche die unbestimmten Zahlen ausgedrückt?
- 4) Welche Größen nennt man entgegengesetzte? Wodurch werden sie angedeutet?
- 5) Welche Zahlen sind absolute — relative — gleichstimmige?
- 6) Was ist eine Form oder ein Ausdruck? Was ist eine Gleichung? Was ist eine Ungleichung?
- 7) Was bedeuten die Ausdrücke: kleiner und größer? Welches Zeichen hat man dafür? Bei welchen Zahlen sind diese Ausdrücke anzuwenden, bei welchen nicht?
- 8) Wie theilt man die Mathematik ein? wie die Arithmetik? wie die allgemeine Arithmetik?
- 9) Welche Gleichung ist eine analytische — welche eine algebraische? Wodurch unterscheiden sie sich?
- 10) Was heißt rechnen? Wie viel Rechnungsarten giebt es? Wie heißen sie?
- 11) Was bedeuten die Klammern? Die Klammer auflösen heißt? —
- 12) Was ist ein Lehrsatz — was eine Aufgabe? Wozu dient der Beweis? — wozu die Auflösung? Was ist ein Zusatz? — was eine Folgerung? — was ein Grundsatz?
- 13) Was heißt eine mathematische Formel?
- 14) Wie heißen die Grundsätze?

A. Buchstabenrechnung.

§ 2. I. Addiren.

1) Was heißt addiren? Welches Zeichen und welche Benennungen kommen bei der Addition vor? Was heißt vermehren oder vergrößern? Vergrößere a) a um 5, b) 5 um a, c) $3n$ um $5m$, d) $8x$ um $15x$, e) $7a+1$ um $8a$, f) $3x+2$ um $5x+1$, g) $15a+5$ um $2a+3$, h) $3a+2b$ um $5c$, i) $7a+5b$ um $3a+4c$.

2) Die beiden Summanden einer Summe seien a und b; wie heißt die Summe? Wie groß ist die Summe, a) wenn $a=15$ und $b=22$; b) wenn $a=2n$ und $b=5n$; c) wenn $a=10$ und b um 7 größer als a; d) wenn $a=5x$ und b um $11x$ größer als a; e) wenn $a=13z$ und b um 9 größer als a; f) wenn $a=25x$ und b um 15y größer als a gesetzt wird?

3) Welche Größen können addirt werden? Was heißt Addition mit benannten Zahlen?

4) Wie groß ist die Summe folgender Summanden: a) $15a+5b$ und $18a+9b$; b) $22a+2b$ und $18a+15b+8$? Wie groß ist die Summe, wenn $a=\frac{5}{3}$ und $b=4$ gesetzt wird?

5) Gleiches zu Gleichem addirt giebt was? a) $3a=5x$ und $7a=11\frac{2}{3}x$; b) $5a+2b=3x+9y$ und $6a+8b=10x+15y$.

6) Was bedeuten folgende Formeln: a) $a+b=b+a$; b) $a+(b+c)$; c) $(b+c)+a$? Man löse die Klammern von b) und c) auf.

a) Mit absoluten Bahlen.

7) $8a+5b+2d+9a+6b+7d+a+3b+4d+11a+2b+9d+5a+4b+14d$. Wird für $a=\frac{2}{17}$, $b=\frac{3}{5}$, $d=\frac{3}{4}$, gesetzt, so ist die Summe wie groß?

8) $5a+7b+d+11g+6a+b+9d+2g+15a+4b+3d+8g+7a+3b+14d+5b+9d+20g$. Für $a=\frac{1}{3}$, $b=\frac{4}{5}$, $d=\frac{3}{4}$ und $g=2$.

9) $\frac{1}{2}a+\frac{3}{5}d+\frac{3}{7}f+\frac{5}{8}a+\frac{4}{5}d+\frac{1}{7}f+\frac{3}{4}a+\frac{3}{10}d+\frac{9}{14}f+\frac{1}{4}a+\frac{7}{15}d+\frac{5}{14}f$. Für $a=\frac{4}{5}$, $d=\frac{2}{3}$, $f=\frac{7}{22}$.

10) $\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}b+\frac{1}{4}d+\frac{1}{5}g+\frac{1}{6}a+\frac{2}{3}b+\frac{3}{4}d+\frac{2}{5}g+\frac{5}{6}a+\frac{1}{7}b+\frac{1}{8}d+\frac{3}{5}g+\frac{3}{8}a+\frac{2}{7}b+\frac{5}{8}d+\frac{4}{5}g+a+b+d+g$. Für $a=8$, $b=7$, $d=4$ und $g=\frac{1}{3}$.

11) $5\frac{1}{3}a + 2\frac{1}{6}b + 4\frac{1}{2}c + \frac{3}{8}d + \frac{1}{4}e + 8\frac{3}{5}a + 1\frac{3}{8}b + 16\frac{2}{3}c + 1\frac{5}{6}d + e + 4\frac{1}{3}a + 2\frac{1}{5}c + 6\frac{2}{3}e$. Für $a=5$, $b=4$, $c=1$, $d=48$ und $e=0$.

12) $3,4x + 2,03y + 15,6z + 0,04x + 15,3y + z + 14,093y + 2z + 22,5x + y + 1,2z$. Für $x=3$, $y=20$ und $z=10$.

13) $0,006a + 2,003b + 4,3d + 0,3a + 0,26b + 0,0001d + 0,34f + 0,02a + 3,006d + 0,3f + 4,007a + 3,09b + 2,39d + 8,00009a + 2,06b$. Für $a=0,04$, $b=10$, $d=2,03$, $f=0,01$.

14) $5,63a + 4,71b + 0,382c + 8,3a + 9,8b + 3,49c + 0,03a + 5,9b + 3,4673c + 54,139a + 0,63b + 20,13c$. Für $a=3,4$, $b=0,4$ und $c=10$.

15) Gleiches zu Ungleichem addirt oder umgekehrt, giebt was? Ungleiches zu Ungleichem mit demselben Ungleichheitszeichen addirt, giebt was? Man addire: a) $6a > 4b$ und $4a = 3b$; b) $9a + 12x > 5b + 2y$ und $3a + 4x = 2\frac{1}{2}b + y$; c) $7m + 23\frac{2}{3} > 3n + 4\frac{1}{2}$ und $9m + 14\frac{5}{6} > 2n + 9\frac{7}{8}$.

16) $3(4a + 2x) + 7(a + 2x) + 5(4a + 2x) + 19(a + 2x)$.

17) $\frac{5}{8}(a + b) + \frac{2}{3}(b + c) + \frac{2}{7}x + \frac{3}{5}(b + c) + \frac{3}{4}(a + b) + \frac{11}{14}x + \frac{1}{2}(a + b) + \frac{3}{4}x + \frac{5}{6}(b + c) + \frac{3}{6}(a + b) + \frac{10}{11}(b + c) + \frac{3}{7}x$.

β) Mit relativen Bahlen.

18) Jemand geht a) 86 Schritte vorwärts und hierauf 48 Schritte rückwärts, b) 23 Schritte rechts und hierauf 100 Schritte links; α) Wie viel Schritte hat er im Ganzen gemacht? β) Um wie viel Schritte ist er vom Ausgangspunkte entfernt? Wenn in a) und b) für die bestimmten Zahlen die allgemeinen Zahlen x und y gesetzt werden, wie lauten die Antworten von α) und β)?

19) Jemand gab a) a Rbl. aus und behielt noch b Rbl. übrig, b) $(3a + 5)$ Rbl. aus und behielt noch $(6a + 2)$ Rbl. übrig, c) $(2a + 5b + 1)$ Rbl. aus und behielt noch $(8a + 4b)$ Rbl. übrig; wie viel Geld besaß er?

20) Hat die entgegengesetzte Beschaffenheit der sog. entgegengesetzten Größen Einfluß auf den Werth ihrer Einheiten? Darf man sagen: 3 Werst rechts ist mehr als 3 Werst links, oder 5 Rbl. Vermögen ist mehr als 5 Rbl. Schulden, oder $+7$ ist größer als -7 ?

21) $-5a - 7b - d - 11g - 6a - b - 9d - 2g - 15a - 4b - 3d - 8g - 7a - 3b - 14d - 5b - 9d - 20g$. Für $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{1}{5}$, $d = \frac{3}{4}$, $g = 2$.

22) $-\frac{1}{2}a - \frac{1}{3}b - \frac{1}{4}d - \frac{1}{5}g - \frac{1}{6}a - \frac{2}{3}b - \frac{3}{4}d - \frac{2}{5}g - \frac{5}{6}a$
 $-\frac{1}{7}b - \frac{1}{8}d - \frac{3}{5}g - \frac{3}{8}a - \frac{2}{7}b - \frac{5}{8}d - \frac{1}{5}g - a - b - d - g.$ Für $a=8,$
 $b=7, d=4, g=\frac{1}{3}.$

23) $-3,4x - 2,03y - 15,6z - 0,04x - 15,3y - z - 14,093y - 2z.$
 $-22,5x - y - 1,2z.$ Für $x=3, y=20, z=10.$

24) Wie addirt man die entgegengesetzten Größen? Man löse die Klammern auf: a) $a + (-b),$ b) $a + (+b),$ c) $(a+b) + (-c),$ d) $(-b) + a,$ e) $(-a) + (-b).$ Was ist ein Monom — ein Polynom?

25) $8a + (-2a) + (+6a) + (-7a).$

26) $3a + (-2a) + (+5b) + (-2c) + (-7a) + (+8b) + (+8c)$
 $+ (-9a) + (-15b) + (-c) + (+3\frac{1}{4}a) + (-2\frac{1}{2}b) + (+\frac{2}{3}c).$

27) $7a - 5b + 3c - 12a + 7b - 5c - 6a - 2b + 9c + a + 9b$
 $- 4c - 19b - 8c - 18c.$ Für $a=3, b=5, c=1.$

28) $6a - 9b + 7d - 5g - 4a - b + 11d + 9g - 3a - 2b - d + 15g$
 $+ 10a - 5b + 4d - 20g.$ Für $a=\frac{2}{3}, b=4, d=\frac{2}{7}, g=9.$

29) $3,5f + 2,04g - 4,96h + 0,13f - 3,51g - 2,03h + 18,6f - 0,34g$
 $- 8,14h - 2,3f + 1,8g + 5,9h.$ Für $f=0,3, g=2,1, h=1,02.$

30) $2\frac{1}{4}a - \frac{1}{3}b + 8c - 11d - 9a + 5b + 13c - 10d + 4a + 8b$
 $+ 16c + 3d + a + 14b - 33c - d - a + 25b - c - 20d.$ Für $a=12$
 $b=3, c=5$ und $d=1.$

31) $-15x + 33y - z + 5t + 36x + 10y + 9z - 8t + 11x - 3y$
 $- z - 3t - 8x - 39y + 2z + 42x - y + 13z - 9t.$ Für $x=3, y=4,$
 $z=0$ und $t=2.$

32) $0,5902a - 12,0134d + 11,156f + 50,07a + 196,785d$
 $- 19,093f - 45,683a - 7,006d + 0,968f + 318,06a + 17,0833d - 17,031f.$
 $+ 40,7008a + 53,4166d - 23,28f - 0,69a - 25,58d - 47,291f.$ Für
 $a=2, d=0,3 f=0,04.$

33) $3\frac{1}{3}a + 5\frac{1}{2}b - 6\frac{1}{4}c + 2\frac{1}{5}d + g + 4\frac{1}{2}a + 3\frac{1}{6}c - 8\frac{1}{3}d + 2\frac{1}{4}g$
 $+ \frac{1}{2}f + 6\frac{1}{4}a - 2\frac{3}{5}b + 8\frac{1}{3}c + 2\frac{1}{2}d + \frac{1}{6}g - 5\frac{1}{3}f + 1\frac{1}{2}a - 3\frac{2}{3}b$
 $+ 1\frac{1}{6}d - 2\frac{1}{4}g - 3\frac{1}{8}f + 8\frac{1}{2}b - 5\frac{1}{3}g + \frac{1}{6}f.$ Für $a=\frac{2}{3}, b=1\frac{5}{6},$
 $c=4\frac{1}{2}, d=\frac{1}{8}, g=\frac{2}{5}, f=\frac{1}{2}.$

34) $2\frac{1}{3}a - 5\frac{1}{4}b + 2\frac{1}{8}c - 6\frac{1}{3}d + \frac{1}{12}e - 3\frac{2}{3}a - 4\frac{1}{6}b + 9\frac{1}{3}c$
 $- \frac{3}{4}e - 2\frac{1}{4}a - \frac{1}{2}b + \frac{5}{4}c - \frac{1}{6}d - \frac{2}{5}e + 1\frac{1}{2}a - \frac{3}{5}b + \frac{1}{3}c - 3d + 2e.$
 Für $a=0,03, b=0,021, c=0,1, d=\frac{3}{4}, e=\frac{1}{6}.$

35) $5,63a - 4,71b - 0,382c + 8,3a - 9,8b + 3,49c - 13,78a$
 $- 11,32b + 4,125c - 0,03a + 5,9b + 3,4673c + 54,139a - 0,63b - 20,13c.$
 Für $a=3,4, b=0,4$ und $c=10.$

36) $0,001a + 0,028b - 3,05d - e + 0,05a - 0,27b + 1,003d - 0,7a + 4,5b - 13,07d + 2,3e + 4,3a + 0,3b + 0,8d$. Für $a=2$, $b=3$, $d=1$ und $e=10$.

37) $2,8a + 5,04b - 0,4c - 0,3d + 3,05a + 1,6b + 13,2c - 2d - 7,4a - 8,01b - 0,81c + 0,001d + a + 0,3b + 8,1c - 0,14d$. Für $a=0,02$, $b=3$, $c=1,4$ und $d=0,8$.

§ 3. II. Subtrahiren.

1) Was heißt subtrahiren? Welches Zeichen und welche Benennungen kommen bei der Subtraction vor? Wie leitet man das Subtrahiren aus dem Addiren her?

2) Was heißt Subtraction mit benannten Zahlen?

3) Addirt man zur Differenz den Subtrahenden, so erhält man? Was bedeutet $a-a$? Warum haben Addition und Subtraction dieselben Zeichen wie die entgegengesetzten Größen?

4) Was heißt vermindern oder verkleinern? Vermindere a) n um m b) m um n , c) $15a$ um $3a$, d) $5a$ um $6b$, e) $7a$ um 1 , f) $12a+6$ um $8a+3$.

5) Wie heißt die Differenz, deren Subtrahend b und deren Minuend a ist; a) wenn $a=32$ und $b=18$, b) wenn $a=15n$ und $b=11n$, c) wenn $a=62n+5$ und $b=7n$, d) wenn $a=28$ und b um 9 kleiner als a , e) wenn $a=33x$ und b um $2x$ kleiner als a , f) wenn $a=15x+3\frac{1}{2}$ und b um $5x$ kleiner als a , g) wenn $a=13z$ und b um 9 kleiner als a , h) wenn $a=1,5z+3,8$ und b um 3 kleiner als a gesetzt wird?

6) Wenn a) x ; b) $x+2$; c) $3x+4$; d) $2x-3$ eine ganze Zahl bedeutet, wie heißt die nächst niedere und wie die nächst höhere ganze Zahl?

7) Die Summe zweier Zahlen ist a) d , b) $9a$, c) $16a+10$, der eine Summand a) e , b) $5a$, c) $2a+4$; wie groß ist der andere Summand?

8) Wie groß ist die Zahl x , wenn a) $x+9=34$, b) $x+15=138$, c) $x-6=14$, d) $x-23=12$, e) $124-x=36$, f) $239-x=144$ ist.

9) Jemand geht zuerst a) 365, b) 220 Schritte rechts und hierauf a) 127, b) 563 Schritte links; wie viel Schritte befindet er

sich von dem Ausgangspunkte an gerechnet? Jemand geht c) $413a + 2b$, d) $115a + 4$ Schritte vorwärts, darauf e) $210a + 5b$, d) $60a + 1$ Schritt rückwärts, ferner c) $149a + 10b$, d) $82a + 6$ Schritte vorwärts und zuletzt c) $91a + b$, d) $32a + 3$ Schritte rückwärts. Wie viel Schritte ist er von dem Orte entfernt, von dem er ausging?

10) Gleiches von Gleichem subtrahirt giebt was? Wenn a) $7a = 3x$ und $3a = 1\frac{2}{7}x$; b) $15a + 3b = 6x + 7y$ und $4a + b = 2x + 3y$ ist, so ist die Differenz wie groß?

11) Was bedeuten folgende Formeln: a) $a + (b - c)$, b) $(b - c) + a$, c) $a - (b + c)$, d) $(b + c) - a$, e) $a - (b - c)$, f) $(b - c) - a$? Man löse die Klammern auf.

12) a) $5a + (8a - 6b)$, b) $3,08a + (11,2a - 3,6b)$.

13) a) $(34a - 15b) + 20b$, b) $(12\frac{3}{4}a - 8\frac{1}{2}b) + 4\frac{5}{8}a$.

14) a) $67\frac{1}{2}a - (34\frac{3}{4}a + 14c)$, b) $146,42z - (42,9x + 86,034z)$.

15) a) $(30m + 5n) - 7m$, b) $(7m + 20n) - 49n$.

16) a) $36a - (7b - \frac{4}{5}a)$, b) $19a - (15\frac{1}{2}a - 51b)$, c) $1\frac{3}{7}a - (27\frac{3}{5}a - 8b)$.

17) a) $(1\frac{1}{2}x - 1\frac{3}{5}y) - 0,4x$, b) $(5x - 1\frac{2}{9}y) - 3,6y$.

18) Was bedeuten folgende Formeln: a) $(a - b) + b$, b) $(c + b) - b$, c) $a - (a - b)$, d) $(5a - 7b) + 7b$, e) $(6a + 3b) - 3b$, f) $9a - (9a - 11b)$.

α) Mit absoluten Zahlen.

19) $4a + 15b + 30d + 7f - (a + 11b + 8d + 5f)$.

20) $1\frac{1}{2}a + 4\frac{3}{7}b + d - (\frac{3}{4}a + \frac{5}{7}b + \frac{2}{3}d)$.

21) $10,25x + 8,04y + 42,3z - (4,03x + 2,8y + 3,42z)$.

22) $-46a - 7b - 28d - 9f - (-5a - 2b - 14d - 8f)$.

23) $-2\frac{3}{4}a - \frac{15}{4}b - 6d - 8g - 3h - (-\frac{7}{4}a - \frac{3}{2}b - d - \frac{3}{5}g)$.

24) $-5\frac{1}{2}a - 7\frac{2}{3}b - 1\frac{3}{4}d - \frac{9}{10}f - (-\frac{5}{6}a - \frac{7}{8}b - \frac{4}{5}f)$.

25) $4a + 7b - 52d - 11f - (3a + 2b - 7d - 8f)$.

26) Gleiches von Ungleichem subtrahirt, giebt was? Ungleiches von Gleichem subtrahirt, giebt was? Ungleiches von Ungleichem mit entgegengesetzten Ungleichheitszeichen subtrahirt, giebt was?

27) Man subtrahire: a) $6a + 7b < 5x - 6y$ und $3a + b = 2x - 4y$; b) $6x - 5 = 22a + 14b$ und $4x - 1 > 8a + b$; c) $5p - 17q < 21x + 17y$ und $3p - 5q > 2x + \frac{3}{4}y$.

β) Mit relativen Zahlen.

28) Wie subtrahirt man gleichnamige und ungleichnamige Zahlen mit verschiedenen Vorzeichen? Beweise folgende Ausdrücke: a) $a - (+b) = a + (-b)$; b) $a - (-b) = a + (+b)$.

29) $15x - (-0,5y) - (-4,6x) - (+6,8y) - (+2,3x) - (-0,07x)$.

30) $5a - (+b) - (-7c) - (-2a) - (+\frac{2}{3}b) - (+\frac{1}{5}c) - (+2\frac{3}{4}a) - (-1\frac{1}{4}b) - (-7c) - (-\frac{3}{6}b) - (+c)$.

31) $7\frac{1}{2}a + (-3\frac{1}{4}b) - (3,4c) - (-1\frac{1}{10}a) + (+2,5b) + (0,8c) + (-15a) - (\frac{1}{5}b) - (3\frac{1}{5}c) + (+a) - (+4\frac{1}{4}b) + (+3\frac{2}{5}c) - (-a) - (-6\frac{3}{4}c)$.

32) a) $29a - 52b - 13a + 48b$; b) $29a - (52b - 13a + 48b)$; c) $29a - 52b - (-13a + 48b)$; d) $(29a - 52b) - (-13a + 48b)$; e) $(29a - 52b - 13a) + 48b$; f) $29a - [(52b - 13a) + 48b]$; g) $29a - [52b - (-13a + 48b)]$. Sieh an, welche Ausdrücke gleich sind, und welche Folgerungen hieraus sich ergeben.

33) $4a - 6b - 3d + 5f - (9a - 2b + d - 11f + 3g)$.

34) $8a - 9b + 4d + 8f - h - (3a + b + 3d - 2f)$.

35) $-25p + 16q - 18r - s + 5t - (-p + 20q - 5r + s + 8t + 18u)$.

36) $\frac{1}{2}a + 5\frac{3}{4}b - \frac{7}{8}d + 6f - (\frac{3}{6}a - 2\frac{1}{2}b + \frac{3}{5}d)$.

37) $\frac{3}{4}a - \frac{5}{6}b + \frac{8}{3}d - (-\frac{1}{8}a + \frac{2}{3}b + 4d)$.

38) $3\frac{1}{2}a - 5\frac{2}{3}b + 6\frac{1}{8}c + \frac{1}{2}d + \frac{3}{4}e - (2\frac{3}{5}a - 4\frac{1}{4}b - 3\frac{1}{3}c + \frac{2}{5}d - e)$.

39) $3\frac{2}{5}b + \frac{1}{12}c - \frac{5}{36}d + \frac{3}{8}e - (5\frac{1}{6}b - 9\frac{3}{8}c - 5\frac{7}{12}d + \frac{1}{4}e - \frac{3}{8}f)$.

40) $3,001a + 0,034b - 2,9d - (4,03a - 0,0007b + 10,003d + 7,3f)$.

41) $0,56a - 5,03b + 9,206d - (5,321a + 4,002b + 11,035d - 0,005f)$.

42) $-0,07d + 5,001f - 3,7g + 3,04h - (-5,3d + 4,56f - 4,08g)$.

43) $3,28x - 52,34y - 0,002z - (5,08x + 8,2y - 8,0007z - 2,5t)$.

44) $4x + y - 2z - (4x - 13y - 5z) - (-18y + 4z) - (-15x - 3y - z)$.

45) $5\frac{1}{3}a - 2\frac{1}{6}b + 4\frac{1}{2}c + \frac{3}{8}d + \frac{1}{4}e - (8\frac{3}{5}a + 1\frac{3}{8}b + 16\frac{2}{3}c - \frac{5}{6}d - e) + (2\frac{1}{4}a - \frac{1}{3}b + 1\frac{1}{6}c - \frac{3}{8}e) - (4\frac{1}{3}a + 2\frac{1}{5}c) - 6\frac{2}{3}e$.

$$46) (5\frac{1}{3}b - 4\frac{1}{2}c + 6\frac{1}{6}d - \frac{2}{5}e + \frac{1}{2}f) + (3\frac{2}{5}b + \frac{1}{12}c - \frac{5}{36}d + \frac{3}{8}e) - (5\frac{1}{6}b - 9\frac{3}{8}c - 5\frac{7}{12}d + \frac{1}{4}e - \frac{3}{8}f) - (2\frac{1}{3}b + 5\frac{1}{6}c + \frac{3}{16}d - \frac{5}{6}e - \frac{1}{3}f) - 2\frac{3}{4}c.$$

$$47) -4,097a + 0,0607b - 10,567d - (-5,06a + 8,235b + 2,0304d - 1,3f). \text{ Für } a=0,1; b=0,02; d=0,003; f=1.$$

$$48) 3,05a - 4,6b - 2,08d + (-1,4a + 5,84b - 0,6d) - (-5,2a + 3,009b - 1,3d). \text{ Für } a=3,2; b=0,4; d=0,03.$$

$$49) 3,5a + 2,04b - 4,96c - (-0,13a + 3,51b + 2,03c) + (18,6a - 0,34b - 8,14c) - (2,3a - 1,08b - 5,9c).$$

$$50) \frac{1}{2}a - \frac{3}{5}b + \frac{3}{7}c + (\frac{5}{8}a + \frac{4}{5}b - \frac{1}{7}c) - (-\frac{3}{4}a - \frac{3}{10}b - \frac{9}{14}c) - (\frac{1}{4}a + \frac{7}{15}b + \frac{5}{14}c).$$

$$51) 3\frac{1}{3}a + 5\frac{1}{2}b - 6\frac{1}{4}c + 2\frac{1}{5}d + g + (4\frac{1}{2}a + 3\frac{1}{6}c - 8\frac{1}{3}d + 2\frac{1}{4}g) - (-6\frac{1}{4}a + 2\frac{3}{5}b - 8\frac{1}{3}c - 2\frac{1}{2}d - \frac{1}{6}g) - (-1\frac{1}{12}a + 3\frac{2}{3}b - 1\frac{1}{6}d + 2\frac{1}{4}g) + 8\frac{1}{2}b - 5\frac{1}{3}g.$$

§ 4. III. Multipliciren.

1) Was heißt Multipliciren? Welche Zeichen und welche Benennungen kommen bei der Multiplication vor? Darf das Zeichen der Multiplication weggelassen werden? Wie ist das Multipliciren aus dem Addiren abzuleiten?

2) Ist x der Multiplicator, y der Multiplicand, so ist das Produkt wie groß, wenn a) $x=14$ und $y=a$; b) $x=1$ und $y=b$; c) $x=6$ und $y=3a$; d) $x=4a$ und $y=9b$ angenommen wird?

3) Was versteht man unter Multiplication mit benannten Zahlen? In welchem Falle führen Multiplicand und Multiplicator einen Namen, und welchen? Warum ist der Multiplicator immer unbenannt?

4) Gleiches mit Gleichem multiplicirt, giebt was? Wenn wir a) $3a=5x$ und $7b=4y$; b) $1\frac{1}{2}m=2,8n$ und $4\frac{2}{3}m=8,71n$; c) $3\frac{2}{3}a=18\frac{1}{3}$ und $4\frac{7}{11}b=0,3c$; d) $9\frac{1}{2}a=5p$ und $7\frac{1}{2}b=18\frac{3}{5}q$ setzen, so ist das Produkt wie groß?

5) Darf man die Factoren eines Produkts mit einander vertauschen?

6) Wie multiplicirt man ein Produkt mit einer Zahl? Es sei a der Multiplicator und bc der Multiplicand; ist das Produkt $ab \cdot ac$ richtig? Wie muß das Produkt heißen? Wenn a) $a=18$, $b=2x$ und $c=5z$; b) $a=3\frac{1}{5}m$, $b=7\frac{1}{2}n$ und $c=3,02$; c) $a=2\frac{3}{5}p$, $b=q$ und

$c=4,15r$; d) $a=11\frac{1}{2}m$, $b=4m$ und $c=8m$; e) $a=7fg$, $b=14h$ und $c=\frac{5}{7}kl$ ist, wie groß ist das Produkt?

7) Wie viel erhält man, wenn a) m 10mal; b) $5m$ 13mal; c) $7m$ 8mal genommen wird? Jemand verdient täglich a) 70 Kop.; b) $13\frac{1}{2}m$ Kop.; wie viel verdient er in 1 Monat (30 Tage), in 5 Mt., in n Mt., in $3n$ Mt.?

8) Wie multiplicirt man eine Summe — wie eine Differenz mit einer Zahl — und wie umgekehrt? Wenn a) die Summe $x+y$ die Zahl z heißt, und α) $x=5a$, $y=3b$, $z=6c$; β) $x=\frac{1}{2}a$, $y=1\frac{3}{4}b$, $z=\frac{1}{5}d$; γ) $x=4a+3$, $y=7a+2$, $z=9b$; δ) $x=3,7a+5$, $y=0,04a+9$, $z=2,3b$ ist, wie groß wird das Produkt sein? — Ferner wenn b) die Differenz $x-y$ und die Zahl z heißt und α) $x=14a$, $y=2b$, $z=3c$; β) $x=5\frac{2}{3}a$, $y=1\frac{1}{8}b$, $z=\frac{4}{3}c$; γ) $x=2\frac{1}{2}a+5$, $y=4\frac{3}{4}a-3$, $z=4$; δ) $x=3a-7\frac{3}{7}$, $y=1,03a-4$, $z=10b$ ist, wie groß wird dann das Produkt sein?

9) Wenn a) $3a$ um 1 vermehrt, 5mal; b) $7a$ um 2 vermehrt, $3n$ mal; c) $9a$ um 3 vermindert, $\frac{1}{3}$ mal; d) $3\frac{3}{4}a$ um $\frac{1}{2}$ vermindert, $8n$ mal; e) $8a$ um 6 vermehrt und um 5 vermindert, $7b$ mal genommen wird; — wie groß ist das Produkt?

10) Wie groß ist $o \cdot a$ und $a \cdot o$? Welche Behauptung ergiebt sich hieraus?

11) Wie multiplicirt man Summen mit einander? a) $(3a+5b) \times (2c+9d)$; b) $(8\frac{1}{2}a+2\frac{1}{4}b) \times (3\frac{2}{17}a+4b)$; c) $(0,05x+3,7y) \times (0,8x+1,2y)$; d) $(9a+1)(4\frac{1}{3}b+11)$; e) $(1\frac{3}{5}p+2)(15+r)$.

12) Man multiplicire: a) $3a$ um 5 vermehrt, mit $12b$ um 8 vermehrt; b) $7\frac{1}{2}a$ um 1 vermehrt, mit $3\frac{2}{5}b$ um $\frac{4}{5}$ vermehrt; c) $2f$ um $3g$ vermehrt, mit $8h$ um $5k$ vermehrt.

13) Wie multiplicirt man eine Summe mit einer Differenz? Multiplicire a) $(6a+2b)(5c-3d)$; b) $(9,9f+4,4g) \cdot (2,3h-10k)$; c) $7a$ um 5 vermehrt, mit $14b$ um 3 vermindert.

14) Das Produkt von zwei — von drei gleichen Factoren nennt man wie? Diese Produkte werden abgekürzt wie geschrieben; a) $5a \cdot 5a$, b) $4b \cdot 4b \cdot 4b$.

15) Wie groß ist das Produkt aus der Summe und Differenz zweier Zahlen? a) $(3a+2b)(3a-2b)$; b) $(\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}b)(\frac{1}{2}a-\frac{1}{3}b)$; c) $(\frac{3}{5}x+\frac{2}{7}y)(\frac{3}{5}x-\frac{2}{7}y)$.

16) Wie multiplicirt man eine Differenz mit einer Summe? a) $(2a-5b)(3c+8d)$; b) $(3\frac{3}{4}x-7\frac{1}{8}y)(4\frac{1}{5}x+8y)$; c) $1\frac{1}{4}f$ um $\frac{3}{4}h$ vermindert mal $2\frac{1}{3}g$ um $\frac{4}{3}$ vermehrt.

17) Wie multiplicirt man eine Differenz mit einer Differenz? a) $(15m-0,8n)(5p-3q)$; b) $(23x-8)(14y-23)$.

18) Wie ist die Formel für eine gerade — wie für eine ungerade Zahl? Was bedeutet n in diesen Formeln.

a) Mit absoluten Bahlen.

19) a) $(3b + 5\frac{1}{2}c + 8\frac{1}{4}d) \cdot 4\frac{1}{3}f$; b) $(2,03e + 0,7f + g + \frac{1}{4}h) \cdot 0,6k$; c) $(0,005m + 0,06n + 4p) \cdot 0,62r$.

20) Ungleiches mit Gleichem multiplicirt, giebt was? a) $7x > 4y$ und $4z = 6t$; b) $14m < 23n$ und $3\frac{2}{7}p = 5\frac{1}{2}q$; c) $14d = 17a$ und $33c > 5d$.

21) Ungleiches mit Ungleichem bei einerlei Ungleichheitszeichen multiplicirt, giebt —? a) $26a > 5b$ und $12c > 8d$; b) $5x < 17y$ und $8a < 22b$. Kann man auch über die Multiplication von Ungleichem mit Ungleichem mit entgegengesetzten Ungleichheitszeichen etwas Bestimmtes aussagen?

β) Mit relativen Bahlen.

22) Nenne die Sätze über die Multiplication von Zahlen mit verschiedenen Vorzeichen.

23) a) $12ab \cdot 2cd \cdot -5dfg$; b) $-5xy \cdot -2x \cdot 8z$.

24) a) $-^3/4ab \cdot ^4/5cd \cdot ^2/3f$; b) $0,04a \cdot -2,03d \cdot 9,061 fg$.

25) a) $(3a+8b) 6a$; b) $(4x-11y) \cdot -5z$.

26) a) $(5a+7b-3d) \cdot 4a$; b) $(\frac{1}{2}a - ^3/4b + d) \cdot -^3/4b$; c) $(2,04g + 0,9h - 1,5k) \cdot 0,03l$.

27) $(15a-22b) \cdot (3a+14b)$.

28) $(18x-7y-13z) \cdot (9x-21z)$.

29) $(-41f+32g-9h) (8g-3h)$.

30) $(5a-11b+7d) (2a-3b+4d)$.

31) $(9x+3y-6z) (15x-5y+10z)$.

32) $(9a-12b-8d) (5a-7b-9d)$.

33) $(22x + 20y - 13z) (12x - 15y + 11z)$. Für $x = \frac{1}{4}$, $y = \frac{2}{3}$, $z = \frac{3}{4}$.

34) $(14b - 4d - 18) (9b - 33d)$. Für $b=8$, $d=2$.

- 35) $(a + \frac{1}{3}b)(a - \frac{3}{4}b)$.
 36) $(a + \frac{5}{3}b + \frac{7}{6}c)(2a - 4b + 18c)$.
 37) $(\frac{3}{4}a + 5b + 2d)(4a + \frac{3}{4}b)$.
 38) $(\frac{1}{2}a + \frac{3}{5}b - \frac{3}{4}d)(\frac{1}{4}a - \frac{4}{5}b)$.
 39) $(3c - 5d + \frac{3}{4}g - \frac{5}{3}h)(\frac{2}{3}c - d + 7g + \frac{1}{2}h)$.
 40) $(3,5a - 2,03b + 8,31d)(8,2a - 1,04b)$.
 41) $(5,32x + 8,4y - 7,09z)(-3,14x + 10,32y)$.
 42) $(2ab - 3bc + 5cd)(6ab + 9bc)$.
 43) $(\frac{1}{2}ab - \frac{2}{3}bcd)(\frac{2}{3}ab + \frac{8}{9}bcd)$.
 44) $(\frac{3}{4}ab - \frac{5}{7}cd + \frac{1}{2})(\frac{2}{3}ab + \frac{7}{9}cd - 4)$.
 45) $(2,04ab - 0,52bd)(0,3ab + 4,03bd)$.
 46) $(0,02xy + 0,03xz)(2,4xy - 3,6xz)$.
 47) $(\frac{4}{5}xy + 2\frac{1}{2}yz - 3\frac{1}{2}z)(3\frac{3}{5}xy - 11\frac{1}{4}yz + 15\frac{3}{4}z)$.
 48) $(0,03ab + 0,053b - 2,53c)(0,06ab - 0,106b + 5,06c)$.
 49) $[3a(x+y) - 5bcd](8ab - 7cd)$.
 50) $[7a(x+y) + 12bc][8a(x+y) - 5bc]$.
 51) a) $(3a - 5b + 2c - 8d) \cdot 9a$; b) $[3a - (5b + 2c - 8d)] \cdot 9a$;
 c) $[3a - 5b + (2c - 8d)] \cdot 9a$; d) $[(3a - 5b)9a + 2c - 8d]$; e) $[(3a - 5b + 2c)9a - 8d]2a$.
 52) $[-0,8a - (5\frac{3}{7}b - 7\frac{1}{2}c)] \cdot 5\frac{1}{4}ab$.
 53) $[3,42ab - (0,49ab + bc)] \cdot -1\frac{1}{4}abc$.
 54) $[1\frac{1}{5}xy - 3x(0,24y + 5z)] \cdot 1\frac{3}{7}yz$.
 55) $[-0,4ab - 2,5b(\frac{1}{2}c - \frac{1}{3}a)] \cdot -5abc$.
 56) $[((6a - 7b)3d - 4\frac{1}{2}c)6f + 2\frac{2}{3}g] \cdot 2d$.
 57) $[((3\frac{3}{4}a - \frac{1}{4}b)2c + \frac{1}{5}d)15f - \frac{1}{10}g] \cdot 2a$.
 58) $[6,04x - ((\frac{3}{4}y + 2z)\frac{4}{5}x - 1\frac{1}{5}z)1\frac{1}{2}t]5x$.
 59) $[(3ab - 5\frac{1}{2}bc)(8a + 1\frac{1}{3}c) - 40abc]b$.
 60) $3a(7\frac{1}{2}x - 0,16y + 4,8z) + \frac{2}{5}a(2\frac{1}{2}x - 3,45y + 8,46z) - 1,04a(3x - 6,1z)$.
 61) $4a(3x - 7y) + 5\frac{1}{2}a(6x - 11y) - 9\frac{3}{4}a(3x - 7y) + \frac{1}{2}a(6x - 11y) - \frac{3}{4}a(3x - 7y) - 4a(6x - 11y)$.

§ 5. Zerlegen in Faktoren.

- 1) a) $3ab + 6ac - 12ah$; b) $12abd - 6bcd + 8bd^2$.
 2) a) $12a^2 - 60ab + 24ad$; b) $70xy - 98y^2 - 140yz$.
 3) a) $-5bg - 10ag + 20cgh$; b) $-1482gk + 390hk - 156k^2$.

- 4) a) $6ad+10db-18af-30bf$; b) $20ad-35bd-8ax+14bx$.
 5) a) $6ad+9bd-8ag-12bg$; b) $24ag-32bg-6ah+8bh$.
 6) $33abdf-21d^2f+22abg-14dg$.
 7) $2ag+3bg-5gf+8ah+12bh-20fh$.
 8) $8af+20bf-12df-4ag-10bg+6dg$.
 9) $30af-16ab-2ag-105df+56bd+7dg$.
 10) $54abg-18dg+90fg-60abh+20dh-100fh$.
 11) $6abh+4cdh-6fgh+9abk+6cdk-9fgk$.
 12) $33a^2-36ab+66ad-220ag+240bg-440dg$.
 13) $\frac{9}{20}ad-\frac{12}{25}bd-\frac{21}{44}af+\frac{29}{55}bf$.
 14) $\frac{1}{6}ty+\frac{2}{9}xy-\frac{1}{8}tz-\frac{1}{6}xz$.
 15) a) $4a^2-9b^2$; b) $16x^2-25y^2$; c) $\frac{4}{9}a^2b^2-\frac{25}{49}c^2d^2$.
 16) a) $5a^2-180b^2$; b) $75a^2b^2-108c^2d^2$; c) $18a^2x^2-98b^2y^2$.
 17) a) $300abc^2-432abd^2$; b) $\frac{2}{4}ab^2-\frac{2}{9}ac^2$.
 18) a) $\frac{3}{9}ab^2-\frac{3}{25}ac^2$; b) $\frac{5}{4}xy^2-\frac{5}{25}xz^2$.
 19) a) $\frac{7}{16}abc^2-\frac{7}{36}abd^2$; b) $\frac{10}{25}abx^2y^2-\frac{10}{49}abz^2$.

§ 6. IV. Dividiren.

1) Was heißt Dividiren? Welche Zeichen und welche Benennungen kommen bei der Division vor? Wie leitet man das Dividiren aus dem Multipliciren her; Welcher Unterschied besteht zwischen den Ausdrücken „eine Zahl durch eine andere dividiren“ und „eine Zahl in eine andere dividiren“?

2) Ist x der Dividend und y der Divisor, so ist der Quotient wie groß? a) $x=24a$ und $y=7$; b) $x=1$ und $y=m$; c) $x=25a$ und $y=5b$; d) $x=3^3/4a$; und $y=5^5/8b$; e) $x=6,5a$ und $y=3^5/8b$; f) $x=17^2/3m$ und $y=9,6n$.

3) Multiplicirt man den Divisor mit dem Quotienten, so erhält man —? z. B. $\frac{3a}{5b} \cdot 5b$. Ist der Dividend gleich dem Divisor, so erhält man —? warum? — Wann kann die Eins beliebig weggelassen und hinzugefügt werden, als Dividend oder als Divisor?

4) Ist a) $38a$; b) $35ab$; c) $3\frac{1}{4}x$ der Dividend und a) $2a$; b) $7b$; c) $1\frac{1}{4}y$ der Quotient, — wie groß ist der Divisor? Ist a) $5a$; b) $3,4ab$; c) $4\frac{2}{5}x$ der Divisor und a) $8a$; b) $0,5b$; c) $2\frac{1}{2}y$ der Quotient, — wie groß ist der Dividend?

5) Was heißt: Division mit benannten Zahlen? Wie muß, wenn der Dividend eine benannte Zahl ist, der Divisor beschaffen sein, damit der Quotient eine benannte — wie, damit er eine unbenannte Zahl wird? Wie muß umgekehrt, wenn der Divisor eine benannte Zahl ist, der Dividend beschaffen sein, damit der Quotient eine benannte — wie, damit er eine unbenannte Zahl wird?

6) In welchem Falle nennt man das Dividiren ein Theilen — in welchem ein Messen? Wie werden Dividend, Divisor und Quotient beim Theilen — wie beim Messen genannt?

7) Es sei x der Dividend, y der Divisor und z der Quotient. — Wie groß wird a) z sein? wenn $\alpha) x=125$ Rbl. $y=5$ ist, $\beta) x=125$ Rbl., $y=5$ Rbl. ist; b) y ? wenn $\alpha) x=125$ Rbl., $z=25$, $\beta) x=125$ Rbl., $z=25$ Rbl. ist; c) x ? wenn $\alpha) y=6$, $z=96$ Rbl. ist, $\beta) y=6$ Rbl., $z=96$ Rbl., $\gamma) y=6$ Rbl., $z=96$ ist.

8) Gleiches durch Gleiches dividirt, giebt was? Wenn a) $5a=16x$ und $7b=20y$; b) $5\frac{1}{3}b=9\frac{1}{2}x$ und $2\frac{1}{3}d=11\frac{1}{2}y$; c) $4,6m=1,04n$ und $3,5p=0,8r$ ist, so sind die Quotienten wie groß?

9) Wie dividirt man ein Produkt durch eine Zahl? Wenn xy der Dividend und z der Divisor, so ist der Quotient —? Wenn a) $x=15$, $y=7a$ und $z=3b$; b) $x=9\frac{2}{3}a$, $y=1\frac{1}{11}b$ und $z=7\frac{3}{8}c$; c) $x=4,3m$, $y=5,4n$ und $z=6,5p$, so ist der Quotient wie groß?

10) Wie viel erhält man, wenn a) $3m$ 5 mal so klein; b) $28x$ 14 mal so klein genommen wird? Jemand giebt jährlich aus a) 346 Rbl.; b) $466x$ Rbl., wie viel giebt er in 1 Mt., wie viel in 6 Mt., wie viel in $8n$ Mt. aus?

11) Wie dividirt man eine Zahl durch ein Produkt? Wenn x der Dividend und yz der Divisor, so ist der Quotient —? Wenn a) $x=125a$, $y=25$ und $z=8$; b) $x=36a$, $y=3\frac{1}{4}b$ und $z=2\frac{3}{5}c$; c) $x=4\frac{1}{5}a$, $y=b$ und $z=4\frac{2}{3}c$ ist; — wie groß ist der Quotient;

12) Was bedeuten folgende Formeln: a) $a : b : c$; b) $\frac{a}{b} : c$; c) $\frac{a}{c} : \frac{a}{b}$; d) $\frac{a}{c} : \frac{a}{b}$; e) $(a : b) : c$; f) $a : (b : c)$; g) $a . b : c$; h) $a . (b : c)$; i) $(a . b) : c$; k) $a : b . c$; l) $(a : b) . c$; m) $a : (b . c)$. Welche Formeln sind einander gleich — welche zweifelhaft und warum? Welche Folgerungen lassen sich daraus herleiten?

13) Ist es gleichgültig, ob man eine Zahl zuerst durch eine zweite dividirt und dann mit einer dritten multiplicirt oder zuerst mit der dritten multiplicirt und dann durch die zweite dividirt?

14) Wenn man nur den Dividend eines Quotienten mit a) einer ganzen Zahl, b) einem ächten Bruche multiplicirt oder dividirt, so wird der Quotient was? Wenn man nur den Divisor eines Quotienten mit a) einer ganzen Zahl, b) einem ächten Bruche multiplicirt oder dividirt, so wird der Quotient was? Wenn man aber den Dividend und den Divisor eines Quotienten mit a) einer ganzen Zahl, b) einem ächten Bruche multiplicirt oder dividirt, so wird der Quotient was?

Es sei $\frac{x}{y} = z$. α) Man multiplicire x mit a) 5, b) $\frac{2}{3}$; man dividire x durch a) 5, b) $\frac{2}{3}$; wie groß wird z ? β) Man multiplicire y mit a) 8, b) $\frac{3}{4}$; man dividire y durch a) 8, b) $\frac{3}{4}$; wie groß wird z ? γ) Man multiplicire oder dividire x und y mit a) 6, b) $\frac{2}{5}$; wie groß wird z ? In welchen Fällen von α), β), γ) wird z größer, in welchen kleiner und in welchen bleibt es unverändert?

15) Wenn man eine Zahl a) in Null, b) durch Null dividirt, so erhält man zum Quotienten —? Null dividirt durch Null giebt — was?

16) Wie dividirt man eine Summe — wie eine Differenz durch eine Zahl? Wie wird der Werth des Quotienten geändert, wenn man zum Dividenden eins addirt oder von ihm subtrahirt — wie, wenn man zum Divisor eins addirt oder von ihm subtrahirt? Um wie viel wird er größer oder kleiner in jedem dieser Fälle? Wenn man aber zum Dividenden und Divisor eins addirt oder von ihnen subtrahirt — bleibt der Werth des Quotienten unverändert oder nicht? Welche Folgerungen lassen sich daraus herleiten?

17) Wie dividirt man ein Polynom durch ein Monom, — wie durch ein Polynom?

18) Was bedeuten folgende Formeln: a) $a \pm b : c$; b) $a : b \pm c$; c) $(a \pm b) : c$; d) $(a : b) \pm c$.

19) Desgleichen: a) $a \pm b \cdot c : d$; b) $(a \pm b) c : d$; c) $a \pm b : c \cdot d$; d) $[(a \pm b) : c] \cdot d$; e) $(a \pm b) : c \cdot d$; f) $a : c \cdot b \pm d$; g) $(a : c) b \pm d$.

20) Wie ist die mathematische Formel folgender Sätze: a) Man dividire x durch y und dann durch z ; b) man dividire x durch $y : z$; c) man multiplicire x mit $y : z$; d) man multiplicire x mit y und

dividire dann durch z ; e) man dividire x durch y und multiplicire dann mit z ; f) man dividire x durch das Produkt yz ?

21) Desgleichen: a) man subtrahire y von x und dividire dann durch z ; b) man addire x zu y und multiplicire dann mit z ; c) man addire zu x das Produkt yz ; d) man subtrahire von x den Quotienten $y:z$; e) man dividire x durch y und subtrahire dann z .

22) Desgleichen: a) man addire x zu t , multiplicire mit y und dividire durch z ; b) man subtrahire x von t , dividire durch y und multiplicire dann mit z ; c) man addire t zu x und dividire durch das Produkt $y \cdot z$; d) man multiplicire x mit y , dividire durch z und addire dann zu t ; e) man dividire x durch das Produkt yz und addire zu t ; f) man dividire x durch y , multiplicire mit z und subtrahire dann von t .

a) Mit absoluten Zahlen.

$$23) 3\frac{1}{2}d \mid 50\frac{3}{4}ad + 9\frac{5}{8}bd + 1,82cd \mid =$$

$$24) (20abc + 15abd + 14df) : 6ab.$$

$$25) 3a + 15b \mid 6ac + 30bc + 21ad + 105bd \mid =$$

$$26) 1\frac{2}{3}a + 3\frac{1}{4}b \mid 3\frac{16}{25}ac + 8\frac{9}{20}bc + 12\frac{1}{2}ad + 29\frac{1}{56}bd \mid =$$

$$27) 6\frac{2}{3}a + 5\frac{2}{5}b \mid 82\frac{2}{3}a^2 + 136\frac{24}{25}ab + 56\frac{7}{10}b^2 \mid =$$

$$28) (1,4a^2b^2 + 8,048ab^2c + 2,432b^2c^2) : (2,5ab + 0,8bc).$$

29) Ungleiches durch Gleiches dividirt, giebt was? Gleiches durch Ungleiches dividirt, giebt was? Ungleiches durch Ungleiches mit entgegengesetztem Ungleichtszeichen dividirt, giebt —?

β) Mit relativen Zahlen.

30) Wie dividirt man Zahlen mit verschiedenen Vorzeichen?

$$31) a) 36abc : -38bd; b) -156ag (x + y) : 26a (x + y);$$

$$c) -258 (a + b) (a - b) d : -150 (a - b) cd.$$

$$32) 10ab \mid 70abd - 160a^2b^2c - 160abcf \mid =$$

$$33) [42a^2b^2c - 15ab^2c (x + y) + 6ab (x - y) + 4\frac{5}{2}ab^2] : 3abc.$$

$$34) (21l^2 - 83lm - 27l + 22m^2 + 99m) : (3l - 11m).$$

$$35) (18a^2b - 30a^2b^2 - 87ab^2 + 27ab - 63b^2) : (6ab + 9b).$$

$$36) 2a - 3b \mid 4a^2 - ab + 26a - 1\frac{5}{2}b^2 - 39b \mid =$$

$$37) \frac{1}{2}x - 1 \mid 3\frac{1}{2}x^3 - 5\frac{1}{4}x^2 - 8x + 9 \mid =$$

$$38) \frac{1}{4}a - \frac{1}{2}bd \mid 3\frac{1}{16}a^2 - \frac{1}{6}abd - \frac{1}{8}afg - 5\frac{1}{12}b^2d^2 + \frac{1}{4}bdfg \mid =$$

$$39) (14,62a^2 - 10,065ag - 31,6762g^2) : (3,4a - 6,31g).$$

$$40) (27,1998x^2 - 6,5538xy + 0,21y^2) : (2,07x - 0,42y).$$

$$41) 1,04ab - 7,3df \mid 8,3252a^2b^2 - 53,2157abdf - 36,646d^2f^2 \mid =$$

- 42) $(8a^2 + 42ab - 40ad + 40b^2 - 83bd + 42d^2) : (2a + 8b - 7d)$.
- 43) $4a + 6b + 10d \mid 8a^2 + 40ad - 18b^2 + 50d^2 \mid =$
- 44) $(2^{1/8}a^2 - 5^{3/24}abd + 6^{1/4}af - 1^{1/9}b^2d^2 + 1^{7/6}bdf - 15f^2) : (3^{3/4}a - 2^{2/3}bd + 5f)$.
- 45) $5^{1/4}a - 3b + 3^{1/2}c \mid 15^{1/2}a^2 - 1^{13/6}ab + 9ac + 2b^2 - bc \mid =$
- 46) $(3^{3/8}a^2b + 6acd - 8^{2/3}bc^2 + 16c^2d - 1/2abd + 4^{1/3}bcd - 8cd^2) : (3^{3/2}a + 4c - 2d)$.
- 47) $6x - 8y + 14z \mid 18x^2 - 32y^2 + 112yz - 98z^2 \mid =$
- 48) $7x + 8^{3/4}y - 14z \mid 28x^2 - 43^{3/4}y^2 + 140yz - 112z^2 \mid =$
- 49) $2ab + 3cd - 8^{5/3}df \mid a^2b^2 - 9^{1/4}c^2d^2 + 12^{2/5}cd^2f - 16^{2/25}d^2f^2 \mid =$
- 50) $[32a^2(x+y)^2 - 52ab(x^2 - y^2) - 64a(x^2 - y^2) + 15b^2(x-y)^2 + 24b(x-y)^2] : (8a(x+y) - 3b(x-y))$.
- 51) $2^{2/3}c - d + 7g + 1/2h \mid 2c^2 - 19^{1/3}cd + 21^{1/2}cg + 7^{1/8}ch + 5d^2 - 14^{3/4}dg - 5^{1/6}dh + 5^{1/4}g^2 - 2^{71/24}gh - 5^{1/6}h^2 \mid =$
- 52) $(1^{13/25}a^2b^2 + 2^{7/60}ab^2d - 1^{19/30}abd - 1^{3/8}b^2d^2 + 1^{5/12}bd^2 - 1^{1/3}d^2) : (2^{2/5}ab + 3^{1/4}bd - 1^{1/2}d)$.

§ 6 A. Die vier ersten Rechnungsarten mit einander verbunden.

- 1) a) $9a(2b - 5c) - 6a$; b) $(2b - 5c) \cdot 9a - 6a$; c) $(2b - 5c) \cdot (9a - 6a)$; d) $2b - 5c \cdot 9a - 6a$; e) $6a - 9a \cdot (2b - 5c)$; f) $(6a - 9a)(2b - 5c)$; g) $6a - 9a \cdot 2b - 5c$
- 2) a) $5a \cdot (2^{1/2}b + 3,2c) - 16ac$; b) $5a \cdot (2,5b - 3^{1/5}c) - 16ac$; c) $16ac - 5a(2^{1/2}b + 3,2c)$; d) $16ac - 5a(2^{1/2}b + 3,2c)$; e) $16ac - 5a \cdot 2,5b + 3,2c$; f) $16ac + 5a \cdot (2^{1/2}b - 3^{1/5}c)$; g) $16ac + 5a \cdot (2,5b + 3,2c)$.
- 3) a) $(7,4b - 31y) \cdot 0,2x + 5y$; b) $(7^{2/5}b - 31y) \cdot (0,2x + 5y)$; c) $5y + 1^{1/5}x \cdot 7,4b - 31y$; d) $7,4b - 31y \cdot (0,2x + 5y)$; e) $7,4b - 31y \cdot 0,2x + 5y$.
- 4) a) $5a \cdot 7b - 2b \cdot 4c + 16c : 4c - 9ab$; b) $5a \cdot (7b - 2b \cdot 4c) + 16c : 4c - 9ab$; c) $5a \cdot (7b - 2b) \cdot (4c + 16c) : 4c - 9ab$.
- 5) a) $2^{1/2}fg + 0,4x \cdot 1/2m - 1^{1/2}f \cdot 1/3g + 4,16m : 0,4$; b) $(2^{1/2}fg + 0,4x) \cdot 1/2m - (1^{1/2}f \cdot 1/3g + 4,16m) : 0,4$.
- 6) $(4ab + 7bc) : 0,2b - 1^{1/2}b + (21ax - 81^{2/3}cx) : 2^{1/3}x$.
- 7) $(4ab + 7bc) : (0,2b - 1/2b) + (21ax - 81^{2/3}cx) : 2^{1/3}x$.
- 8) $9ab - 2,4b(2^{1/4}a - 0,5c) + (43abc - 2,6bc^2) : 10c - (36a^2b^2 - 25b^2c^2) : (6ab + 5bc)$.
- 9) $(30a^3 - 124a^2b + 126ab^2) : (5a - 9b) - (9a^3 - 49ab^2) : (3a - 7b) + 7a \cdot 3b - 9x$.

$$10) (4^{2/3}a - 3^{3/5}b) \cdot 7^{1/2}c - 2^{2/3}c \cdot (2^{1/4}a + 2^{5/6}g) + (40^{1/2}abc^2 - 43^{1/2}a^2c^2) : 1^{1/2}ac + 2^{3/7}ac.$$

$$11) (0,6496ax + 0,464bx) : 0,32x + 2,5x \cdot (3,72b - 6,4c) - (0,31b - 0,24c) \cdot (30x + 0,5).$$

$$12) [3^{5/7}am + 4^{1/6}m \cdot (1^{3/5}p - 10^{1/2}s) - 3^{1/4}mp - (7^{3/4}a^2mp - 153^{1/8}amps) : 3^{1/2}ap] : \sqrt[3]{m} + (3af - 17ap) : 3a.$$

$$13) [(0,1bg - 0,376bm) : 0,016b - (93,5ag - 235gm) : 10g + 3,75g] \cdot 10m.$$

$$14) 6,3c^2 - (4,2c^2 - 25,63cd + 15,6d^2) : (1,2c - 6,5d) - (4,2c - 7,2x) \cdot (1^{1/2}c + \sqrt[5]{6x}) + (5^{1/4} - 10,95x) \cdot \sqrt[2]{3c}.$$

$$15) (44a^2 - 330ax - 3,96b^2 + 618,75x^2) : (1,1a + 0,33b - 4,125x) - 4b(3 - 2x) + (5a - 6) \cdot (7x - 8) - (2b - 48) \cdot (4x - 12).$$

$$16) [(3,6m - 15p) \cdot (1^{1/3}m + 2p) - 8m \cdot (0,5m - 1,6p)] \cdot 3d + 76,14dp^2.$$

$$17) [(1,6b^3x^2y + 1^{1/2}a^2by^3) : 0,4by - (3^{1/5}bx - 2^{1/4}ay) \cdot (1^{1/4}bx - 1^{2/3}ay) - 4^{1/4}abxz] : \sqrt[17]{24}ab - 17xz.$$

$$18) [(0,1bg - 0,376bm) : 0,016b - (93,5ag - 235gm) : (10g + 3,75g)] \cdot 10m.$$

$$19) 6,3c^2 - (4,2c^2 - 25,63cd + 15,6d^2) : (1,2c - 6,5d) - 4,2c - 7,2x \cdot 1^{1/2}c + \sqrt[5]{6x} + 5^{1/4} - 10,95x \cdot \sqrt[2]{3c}.$$

$$20) [(2,34ab - 0,2c) \cdot (3,4c + 0,456d) - (1,56a - 2,5d) \cdot (5,1c + 0,684d) \cdot b] : (7,5bd - 0,4c) - \sqrt[2]{5} \cdot (4,25c - 1,93d).$$

§ 7. Quotienten heben.

1) Wie hebt man einen Quotienten? Wie nennt man die Zahl, durch welche gehoben wird? Wann ist eine Zahl ohne Rest durch a) 2, 5, 10; b) 4, 25, 100; c) 8, 125, 1000; d) 3, 9; e) 6, 12, 15; f) 11 theilbar?

2) Welche Zahlen sind Primzahlen — welche relative Primzahlen?

3) Wie findet man den größten gemeinschaftlichen Theiler zwischen zwei Zahlen? Warum heißt er der größte?

$$4) a) \frac{3ab+6ac}{5bd+10dc}; \quad b) \frac{12a^2-60ab}{36a^2+12ab}$$

$$5) a) \frac{20ad-35bd-8ax+14bx}{15ad+10bd-6ax-4xb}; \quad b) \frac{6ac+10bc+9ad+15bd}{6c^2+9cd-2c-3d}$$

$$6) \frac{ac+bd+ad+bc}{af+2bx+2ax+bf} \quad | \quad 7) \frac{14bx-8ax-35bd+20ad}{6bx-15bd+14ax-35ad}$$

8)
$$\frac{6ac+10bc-21ad-35bd}{9ax+15bx-15ay-25by}$$

9)
$$\frac{20ac-10bc+32ad-16bd}{20ac-10bc+28ax-14bx}$$

10)
$$\frac{30ax+66ay+35bx+77by}{40cx+88cy+45dx+99dy}$$

11)
$$\frac{100ax-110bx-130ay+143by}{110a^2-121ab-120ab+132b^2}$$

12) a)
$$\frac{5a^2+5ax}{a^2-x^2}; \quad b) \frac{25ad+15bd+15af+9bf}{25a^2-9b^2}$$

13)
$$\frac{8ax-10ay+12bx-15by}{16x^2-25y^2}$$

14)
$$\frac{16abcd+40c^2d-20abcf-50c^2f}{8a^2b^2c-50c^3}$$

15)
$$\frac{18abx+30bdx-24aby-40bdy}{18a^2b^2-50b^2d^2}$$

16)
$$\frac{50ax-70bx+60ay-84by}{25a^2-49b^2}$$

17)
$$\frac{54a^2bx+63a^2by-126acdx-147acy}{27a^3b^2-147ac^2d^2}$$

§ 8. Quotienten addiren.

1) Welche Quotienten kann man addiren? Wie verfährt man bei Quotienten mit verschiedenen Divisoren? Eine Zahl, in welcher andere Zahlen ohne Rest enthalten sind, nennt man wie? Wie findet man den kleinsten gemeinschaftlichen Nenner von zwei und mehr Quotienten? Warum heißt er der kleinste?

2) Man suche von a) $2ab$, $3b^2c$, $10a^2$, $6b^2$ und $5ac$; b) $2mn$, $3n^2$, $22n^2p^2$, $11np$ und $33mp$; c) $10a+5b$, $6a-3b$, $30a+15b$ und $4a^2-b^2$; d) $5ab$, $30a-20b$, $6a^2-4ab$ und $6ab-4b^2$; e) $3a^2-ab$, $30ab$, $15a+5b$, $6a^2-2ab$ und $3ab+b^2$ das kleinste gemeinschaftliche Vielfache.

3)
$$\frac{5b}{a} + \frac{2a-6b}{a} + \frac{3b+7a}{a}$$

4)
$$\frac{6ab-2ad}{n} + \frac{3ab-5ad}{n} + \frac{7ad-2ab}{n}$$

$$5) \frac{ab-6dx+5bd}{x} + \frac{2ab+13dx}{x} + \frac{5dx-3ab-5bd}{x}$$

$$6) \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}$$

$$7) \frac{3\frac{1}{2}a-5b}{3a} + \frac{2\frac{3}{4}a+2\frac{3}{4}b}{3a} + \frac{4\frac{1}{4}b-3\frac{3}{4}a}{3a}$$

$$8) \frac{0,5ab-2,03bc}{5a} + \frac{3,04ab-3,8bc}{5a} + \frac{-1,3ab+6,23bc}{5a}$$

$$9) \frac{4\frac{1}{2}ab+3\frac{5}{8}c}{8x} + \frac{3\frac{5}{6}ab-4\frac{2}{3}c}{8x} + \frac{2\frac{2}{3}ab-6\frac{3}{4}c}{8x}$$

$$10) \frac{3,024xy-0,03xz}{2,5ab} + \frac{4,38xy-0,008xz}{2,5ab} + \frac{-12,07xy+8,05xz}{2,5ab}$$

$$11) a) \frac{3a}{2b} + \frac{4d}{5c}; \quad b) \frac{3a}{5b} + 4d,$$

$$12) a) \frac{5a}{3b} + \frac{2d}{3f}; \quad b) \frac{af}{4bg} + \frac{5cd}{12bh} + \frac{2}{3}$$

$$13) a) \frac{3a}{5b} + \frac{c}{4d} + h; \quad b) \frac{8m}{15n} + \frac{k}{3l} + \frac{2a}{5l}$$

$$14) \frac{3ab}{2df} + \frac{3xy}{4dg} + \frac{5d}{fg}$$

$$15) \frac{5ab-3y}{20y} + \frac{2ab-5x}{4x}$$

$$16) \frac{3a+b+z}{5a} + \frac{2a+b}{3b} + \frac{7a-2b}{9a}$$

$$17) \frac{3+10b}{21x} + \frac{8a^2y-15b}{14a^2xy} + \frac{5-b}{2x}$$

$$18) \frac{5bc-4a}{3abc} + \frac{15ab-7}{6a^2b} + \frac{-8+9bc}{10bc}$$

$$19) \frac{2a-5b}{15ab} + \frac{3a-7x}{10ax} + \frac{4b+2x}{5bx}$$

$$20) \frac{5x-3\frac{1}{4}b}{6x^2} + \frac{8\frac{1}{3}y^2z-7\frac{1}{2}b}{15xy^2z} + \frac{-20x+24\frac{2}{3}b}{4x^2}$$

$$21) \frac{3a-2b+5a^2z}{5a^2b} + \frac{8x-7az}{15abx} + \frac{-5xz+4\frac{2}{3}bz}{10b^2x}$$

$$22) \frac{3a+2x}{a+x} + \frac{5a-x}{a-x}$$

$$23) \frac{f+7g}{3f-2g} + \frac{5f-2g}{3f-5g}.$$

$$24) \frac{2a-5b}{a-3b} + \frac{4a-6b}{2a+b}.$$

$$25) \frac{ac}{a^2-4y^2} + \frac{bd}{ac+2cy}.$$

$$26) \frac{5xy}{4a^2-9b^2} + \frac{xy}{6ad-9db}.$$

$$27) \frac{7a}{10dx} + \frac{3a-5b}{30ax-10bx} + \frac{9}{20x}.$$

$$28) \frac{5xy}{4a^2-9b^2} + \frac{xy}{6ad-9bd} + \frac{3xy}{2ad+3bd}.$$

$$29) \frac{2a^2-5b^2}{4a^2-25b^2} + \frac{3a-4b}{2a-5b} + \frac{4a-5b}{2a+5b}.$$

$$30) \frac{5xy}{4a^2-9b^2} + \frac{xy-6b}{6ad-9bd} + \frac{\frac{1}{3}a-\frac{1}{3}xy}{2ad+3bd}.$$

$$31) \frac{3a+5b}{6a-21b} + \frac{6a-11b}{12a+42b} + \frac{-4a^2-24\frac{1}{2}b^2}{4a^2-49b^2}.$$

$$32) \frac{3a-5bx}{12a^2-300b^2} + \frac{6+x}{12a-60b} + \frac{-3d}{4ad+20bd}.$$

$$33) \frac{5a}{9a^2-25b^2} + \frac{2a+3b}{6ad+10bd} + \frac{4a-b}{6ad-10bd}.$$

$$34) \frac{2a^2-5b^2}{4a^2-25b^2} + \frac{3a-4b}{2a-5b} + \frac{4a+5b}{2a+5b}.$$

$$35) \frac{5a-2\frac{2}{5}b}{24ax-60bx} + \frac{8ax-15by}{60axy+160bxy} + \frac{-2\frac{2}{3}a+b}{20ay-50by}.$$

$$36) \frac{1\frac{3}{4}ax-0,5by}{6ax+15bx-8ay-20by} + \frac{\frac{2}{3}a-0,6b}{8a+20b} + \frac{-6,75x-0,12y}{18x-24y}.$$

$$37) \frac{1\frac{1}{4}ab-0,2x}{33ab+3b} + \frac{1\frac{5}{6}a^2b+\frac{17}{60}x}{121a^2b-b} + \frac{-2\frac{1}{3}ad-1,4x}{44ad-4d}.$$

§ 9. Quotienten subtrahiren.

1) Welche Quotienten kann man von einander subtrahiren? Wie verwandelt man das Subtrahiren mit Quotienten in ein Addiren?

$$2) \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}.$$

$$3) \frac{4a+7b}{3ab} - \frac{a-8b}{3ab}$$

$$4) \frac{7ab-5bd}{2dc} - \frac{-6ab-9bd}{2dc}$$

$$5) \frac{5ab-2df}{2x} - \frac{-5df+3ab+9k}{2x}$$

$$6) \frac{3\frac{1}{2}a-5b}{3a} - \frac{2\frac{2}{3}a+2\frac{3}{4}b}{3a} - \frac{4\frac{1}{4}b-3\frac{3}{4}a}{3a}$$

$$7) \frac{0,5ab-2,03bc}{5a} - \frac{3,04ab-3,8bc}{5a} - \frac{-1,3ab+6,23bc}{5a}$$

$$8) \frac{4\frac{1}{2}ab+3\frac{5}{8}c}{8x} - \frac{3\frac{5}{6}ab-4\frac{2}{3}c}{8x} - \frac{2\frac{2}{3}ab-6\frac{3}{4}c}{8x}$$

$$9) \frac{14a}{5b} - \frac{3d}{10b} - \frac{4c}{15ab} \quad | \quad 13) 8c - \frac{2d}{e} + 4f - \frac{3p}{cd}$$

$$10) \frac{3a}{4b} - \frac{5f}{81} - \frac{x}{7y} \quad | \quad 14) 18a - \frac{3c}{b} - \left(12a - \frac{2c}{d}\right)$$

$$11) \frac{a}{4bcd} - \frac{h}{2bcg} + \frac{2cd}{5bg} \quad | \quad 15) 6m - \frac{3c}{d} - \left(8m - \frac{5c}{d}\right)$$

$$12) 4a - \frac{3a}{b} - \frac{2a}{bc} \quad | \quad 16) \frac{5x-2y}{3xy} - \frac{4}{3x}$$

$$17) \frac{2a+3b}{5n} - \frac{-am-4b}{10nm}$$

$$18) \frac{5ab-3y}{20y} - \frac{2ab-5x}{4x} - \frac{11}{10}$$

$$19) \frac{13a-5ab}{4a^2b} - \frac{7a-2}{6a} - \frac{-2b^2-a}{5b^2}$$

$$20) \frac{3a^2c-4}{7a^2c} - \frac{2a-b-ab^2c}{3ab^2} - \frac{4c+5}{12}$$

$$21) \frac{a}{b} - \frac{a^2-b^2-ab}{bcd} - \frac{a+3b}{cd}$$

$$22) \frac{3+10b}{21x} - \frac{8a^2y-15b}{14a^2xy} - \frac{10-2b}{4x}$$

$$23) \frac{5x-3\frac{1}{4}b}{6x^2} - \frac{8\frac{1}{3}y^2z-7\frac{1}{2}b}{15xy^2z} - \frac{-20x+24\frac{2}{3}b}{4x^2}$$

$$24) \frac{2a-5b}{15ab} - \frac{3a-7x}{10ax} - \frac{4b+2x}{5bx}$$

$$25) \frac{5a-3b}{15ab} - \frac{8a-7}{6a^2} + \frac{23b-14a}{15ab} - \frac{-3b+2a}{5b^2}$$

$$26) \text{ a) } \frac{a}{a+z} - \frac{z}{a-z}; \quad \text{b) } \frac{a}{a-z} - \frac{z}{a+z}$$

$$27) \frac{f+g}{3f-2g} - \frac{5f-2g}{2f-9g}$$

$$28) \frac{6m-3n}{4m+2n} - \frac{m+2n}{4m-2n}$$

$$29) \frac{8ax+5ay-2by}{18a^2-50b^2} - \frac{-5x-4y}{18a+30b}$$

$$30) \frac{3d-2c}{a-b} - \frac{4d+5c}{a+b} - \frac{c(3b-7a)}{a^2-b^2}$$

$$31) \frac{5a}{9a^2-25b^2} - \frac{2a+3b}{6ad+10bd} - \frac{4a-b}{6ad-10bd}$$

$$32) \frac{2a^2-5b^2}{4a^2-25b^2} - \frac{3a-4b}{2a-5b} - \frac{4a-5b}{2a+5b}$$

$$33) \frac{5a-2/5b}{24ax-60bx} - \frac{8ax-15by}{60axy+160bxy} - \frac{-2^2/3a+b}{20ay-50by}$$

$$34) \frac{2/7ab-y}{30ab-20x} + \frac{2abx-1/2y^2}{140abx-175xy} - \frac{ab+2y}{42ab-28x}$$

$$35) \frac{a(6a-5b)}{(2a-b)(3a+2b)} - \frac{2a(d-a)}{d(2a-b)} - \frac{10a^2-5^1/3b}{4b}$$

$$36) \frac{6^2/3a-1^1/3b}{100x^2-121y^2} - \frac{8,6a+4b}{30x^2-33xy} - \frac{2a+1^1/3b}{10xy+11y^2}$$

§ 10. Quotienten multipliciren.

1) Wie multiplicirt man einen Quotienten mit einer Zahl — wie eine Zahl mit einem Quotienten — und wie einen Quotienten mit einem Quotienten?

$$2) \text{ a) } \frac{15ab}{4x} \cdot 8xd; \quad \text{b) } -\frac{16ab}{5x^2} \cdot 25xy.$$

$$3) \text{ a) } 3ab \cdot \frac{5df}{9a^2b}; \quad \text{b) } \frac{2ab}{5cd} \cdot \frac{3cf}{8ag}.$$

$$4) \text{ a) } \frac{15ab^2d}{22gh} \cdot \frac{14ghk}{25ab}; \quad \text{b) } \frac{33xyz}{75ab} \cdot -\frac{15ad}{22bz}.$$

$$5) \text{ a) } \frac{3c}{4d} \cdot \frac{2a}{15b} \cdot \frac{8d}{9c}; \quad \text{b) } \frac{8abd}{15cd} \cdot \frac{5abc}{6df} \cdot \frac{3df}{4ab}$$

- 6) $\frac{2-3a}{3} \cdot \frac{4b-3}{4}$.
- 7) $\frac{2x-5y}{x-y} \cdot \frac{2x+5y}{x+y}$.
- 8) $\frac{a-b}{b+c} \cdot \frac{a+b}{b-c} \cdot \frac{b+a}{a-b}$.
- 9) $\frac{10ab-6ad}{24bx+15by} \cdot \frac{72dx+45dy}{20b-12d} \cdot \frac{2b}{a}$.
- 10) $\frac{6ad+10db-18ae-30be}{12x^2-3} \cdot \frac{6yd+18ey}{12ax+20bx} \cdot \frac{10x+1}{4d^2-36e^2}$.
- 11) $\frac{6ax-15bx}{40ay+15dy} \cdot \frac{8ax+3dx}{4a^2-25b^2}$.
- 12) $\frac{24abx-15bcy}{20xz-70yz} \cdot \frac{4x^2-49y^2}{88abx-55bcy}$.
- 13) $\frac{20ad-35bd-8ax+14bx}{3ad+5bd-9af-15bf} \cdot \frac{5ad-15af}{50bd-20bx}$.
- 14) $\frac{6ad+9bd-8ag-12bg}{12ag-16bg-3ah+4bh} \cdot \frac{16g^2-h^2}{6ad-8ag}$.
- 15) $\frac{10ab-12ad}{6dx-15dy} \cdot \frac{24dx-60dy}{35b^2-42bd} \cdot \frac{7bd}{8a}$.
- 16) $\frac{4x^2-9y^2}{22a^2-10ab} \cdot \frac{33ab-15b^2}{6ax-9ay} \cdot \frac{12a^2}{10bx+15by}$.
- 17) $\left(\frac{5a}{b} - \frac{13c}{2d} - \frac{6h}{5bg} + 7d\right) \cdot \frac{3a}{5d}$.
- 18) $\left(\frac{8ab}{9cd} - \frac{2bg}{15df} + \frac{5bc}{6fg} - 8g\right) \cdot \frac{3cf}{4ag}$.
- 19) $\left(\frac{3a}{5b} - \frac{2c}{3d} + 5xy - \frac{d}{5c}\right) \cdot \frac{5a}{6x}$.
- 20) $\left(3a + \frac{2b}{3x}\right) \cdot \left(5d - \frac{9x}{16b}\right)$.
- 21) $\left(\frac{2a}{3b} - \frac{5x}{4}\right) \cdot \left(\frac{3a}{2d} - \frac{3x}{4b}\right)$.
- 22) $\left(\frac{5ab}{7xy} + \frac{3df}{4xz}\right) \cdot \left(\frac{2ab}{5xy} - \frac{4df}{5xz}\right)$.
- 23) $\left(\frac{5ab}{9cd} - \frac{5bg}{2df}\right) \cdot \left(\frac{6ab}{25cd} + \frac{27bg}{25df}\right)$.

$$24) \left(\frac{3ab}{10cd} - \frac{4xy}{7z} \right) \cdot \left(\frac{5ab}{6cd} - \frac{14xy}{15z} \right).$$

$$25) \left(\frac{2a}{5b} + \frac{3d}{4f} - \frac{a}{3f} \right) \cdot \left(\frac{4a}{5b} - \frac{8d}{9f} \right).$$

$$26) \left(\frac{3a}{5f} + \frac{8b}{7g} - \frac{6d}{5h} \right) \cdot \left(\frac{2a}{3f} - \frac{7b}{4g} - \frac{10d}{9h} \right).$$

$$27) \left(\frac{2a}{3x} - \frac{b}{5y} - \frac{5c}{6z} \right) \cdot \left(\frac{3a}{5x} + \frac{9b}{50y} + \frac{3c}{4z} \right).$$

§ 11. Quotienten dividiren.

1) Wie dividirt man einen Quotienten durch eine Zahl — wie eine Zahl durch einen Quotienten — und wie einen Quotienten durch einen Quotienten?

$$2) \text{ a) } \frac{24ab}{7x} : 8ay; \text{ b) } \frac{5ab}{2d} : 10a.$$

$$3) \text{ a) } \frac{6bx}{5dy} : 4bz; \text{ b) } 10a : \frac{5ab}{2d}.$$

$$4) \text{ a) } 25ab : \frac{10adx}{3by}; \text{ b) } \frac{5ab}{3xy} : \frac{10ad}{9xz}.$$

$$5) \text{ a) } \frac{8ab}{9df} : \frac{4bg}{3fh}; \text{ b) } \frac{1}{2}ab : \frac{3}{4}bh.$$

$$6) \text{ a) } \frac{2}{3}ab : \frac{1}{7}ag; \text{ b) } \frac{0,3xy}{0,5zt} : \frac{0,6ax}{2bz}.$$

$$7) \text{ a) } \frac{2,03cd}{1,5gh} : \frac{6,09ck}{7,5gm}; \text{ b) } \frac{1,02ab}{2,3xy} : \frac{5,1ad}{0,92xz}.$$

$$8) \frac{9a^2 - 16b^2}{15ax + 21ay} : \frac{6ab + 8b^2}{5x + 7y}.$$

$$9) \frac{12ax + 9ay}{14bx - 35by} : \frac{36dx + 27dy}{28gx - 70gy}.$$

$$10) \frac{24dx - 60dy}{35b^2 - 42bd} : \frac{6dx - 15dy}{10ab - 12ad}.$$

$$11) \frac{45dx - 9dy}{20abx - 10b^2x} : \frac{30x - 6y}{20a^2x - 5b^2x}.$$

$$12) \left(\frac{a}{b} + \frac{fd}{2c} - 3ac + 7 \right) : \frac{3c}{d}.$$

$$13) \left(\frac{a^2}{2bx} - \frac{5ac}{9dx} + \frac{25ay}{6} - \frac{ad}{6cx} \right) : \frac{5a}{6x}$$

$$14) \left(\frac{2c}{5d} - \frac{9b^2}{20ad} + \frac{3cb}{a} - \frac{3cb}{5ad} \right) : \frac{3cb}{5ad}$$

$$15) \left(\frac{3ak}{5bd} - \frac{k}{6g} + \frac{9h}{28d} - 6k \right) : \frac{3k}{4d}$$

$$16) \left(\frac{z}{6aby} - \frac{4}{15b} + \frac{2x}{7t} - \frac{10x^2z}{3ab} \right) : \frac{2xz}{3ab}$$

$$17) 3a + \frac{2b}{3x} \left| 15ad + \frac{10bd}{3x} - \frac{27ax}{16b} - \frac{3}{8} \right| =$$

$$18) \frac{a}{2b} + \frac{c}{d} \left| \frac{a^2}{4b^2} - \frac{c^2}{d^2} \right| =$$

$$19) \frac{x}{2y} - \frac{y}{z} \left| \frac{x^2}{4y^2} - \frac{x}{z} + \frac{y^2}{z^2} \right| =$$

$$20) \frac{2a}{3x} + \frac{4b}{5y} \left| \frac{4a}{9bx^2} + \frac{16}{15xy} + \frac{16b}{25ay^2} \right| =$$

$$21) \frac{5ab}{7xy} + \frac{3df}{4xz} \left| \frac{2a^2b^2}{7x^2y^2} - \frac{19abdf}{70x^2yz} - \frac{3d^2f^2}{5x^2z^2} \right| =$$

$$22) \frac{5ab}{9cd} - \frac{5bg}{2df} \left| \frac{2a^2b^2}{15c^2d^2} - \frac{27b^2g^2}{10d^2f^2} \right| =$$

$$23) \left(\frac{25a^2}{b^2} - \frac{28a}{3c} + \frac{ax}{by} + \frac{4b^2}{5c^2} - \frac{6bx}{25cy} \right) : \left(\frac{5a}{b} - \frac{6b}{5c} \right)$$

$$24) \left(\frac{3a^2}{20b^2} + \frac{51a^2d}{350b^2c} - \frac{18a^2d^2}{35b^2c^2} + \frac{ax}{6by} + \frac{2adx}{5bcy} \right)$$

$$: \left(\frac{a}{4b} + \frac{3ad}{5bc} \right)$$

$$25) \left(\frac{b^2}{8gl} - \frac{fb}{27am} + \frac{xyf}{10al} - \frac{5}{8} + \frac{5fgl}{27abm} - \frac{fgxy}{2ab^2} \right)$$

$$: \left(\frac{fb}{6al} - \frac{5fg}{6ab} \right)$$

$$26) \left(\frac{12a^2x^2}{25y^2} - \frac{7a^2}{10b} + \frac{2abz}{3y^2} - \frac{3a^2y^2}{b^2x^2} + \frac{5az}{4x^2} \right) : \left(\frac{4ax}{5y} + \frac{3ay}{2bx} \right)$$

$$27) \left(\frac{9a^2b^2}{4c^2} - \frac{25f^2m^2}{g^2} + \frac{70dfm}{g} - 49d^2 \right) : \left(\frac{3ab}{2c} + \frac{5fm}{g} - 7d \right)$$

$$28) \left(\frac{12a^2}{125g^2} - 15b^2 + \frac{15bc}{h} - \frac{15c^2}{4h^2} \right) : \left(\frac{2a}{5g} + 5b - \frac{5c}{2h} \right)$$

§ 12. Verhältnisse und Proportionen.

1) Was ist ein Verhältniß? Was versteht man unter dem Quotienten eines Verhältnisses? Wie nennt man diese Größe auch noch?

2) Zu folgenden Verhältnissen: a) 30 Rbl. : 5 Rbl.; b) 120 Rbl. : 45 Kop.; c) $24^3/4ab : 1^3/8a$; d) $ma : a$; e) $(4a^2 - 9b^2) : (10a - 15b)$ bestimme den Quotienten.

3) Was ist eine Proportion? Welche Benennungen werden den verschiedenen Gliedern derselben beigelegt? Welche Glieder nennt man homologe?

4) Was ist eine stetige — was eine beliebige Proportion? Wie wird das vierte Glied einer beliebigen — wie das einer stetigen Proportion genannt?

5) Was wird in jeder Proportion von den Produkten welcher Glieder behauptet? Wenn zwei Produkte zweier Faktoren einander gleich sind, so läßt sich — was bilden? Es sei a) $15ab = 26xy$; b) $63abc = 25x^2$; c) $4a^2 - b^2 = 33xy$; d) $12ab - 4bc = 49x^2y^2$ — wie lautet die Proportion? Welche Proportionen sind stetige? Wie findet man den Quotienten eines Verhältnisses?

6) Wie viele Proportionen lassen sich durch Umstellung der Glieder aus einer Proportion bilden?

7) Wie findet man das erste — zweite — dritte — vierte Glied einer beliebigen — und wie das mittlere Glied einer stetigen Proportion? Wenn 5m Pfd. 3n Rbl. kosten, wie viel kosten 8am Pfd.?

8) Aus welchen Gliedern einer Proportion bildet man durch Multiplication oder Division neue Proportionen?

9) Sind a) die Vorderglieder einer Proportion einander gleich, b) das erste Glied dem zweiten gleich — so wird was behauptet?

10) Kann man aus mehreren Proportionen eine neue bilden? Durch welche Rechnungsarten? Unter welchen Bedingungen durch die eine — unter welchen durch die andere?

11) Sind mehrere Verhältnisse einander gleich, so wird von den Summen welcher Glieder — was behauptet?

12) Durch Addition oder Subtraction welcher Glieder einer Proportion bildet man neue Proportionen? Man soll m so in drei Theile theilen, daß sie sich verhalten wie $a : b : c$ —, wie groß ist jeder Theil?

13) Wie bildet man aus einer Proportion durch Potenziren oder Extrahiren neue Proportionen?

§ 13. Kettenbrüche.

1) Was ist ein Kettenbruch? Wie verwandelt man einen ächten Bruch in einen Kettenbruch?

2) a) $\frac{857}{1878}$; b) $\frac{267}{683}$.

3) a) $\frac{5656}{18047}$; b) $\frac{385}{1021}$.

4) a) $\frac{421}{972}$; b) $\frac{3655}{11676}$.

5) a) $\frac{125}{216}$; b) $\frac{332^{15}}{104348}$; c) $\frac{100000}{314159}$.

6) a) 0,3187; b) 0,056382.

7) Wie führt man einen Kettenbruch auf einen gemeinen Bruch zurück?

8) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8}$.

9) $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9}$.

10) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11}$.

11) Was versteht man unter einem Näherungsbruche — was unter einem Näherungswerthe?

12) Geb die Näherungswerthe von 2—6 an. Nach welchem Gesetze bildet man aus den Quotienten die Näherungswerthe?

13) Sind die Näherungswerthe unter sich gleich? Welche sind größer, welche kleiner als der gegebene Bruch? Wie groß sind die Unterschiede?

V. Potenziren.

§ 13 A. Rechnungen mit Potenzen mit positiven Exponenten.

1) $(5ab)^2$. 2) $(-7bc)^3$. 3) $(-\frac{2}{3}fgm)^2$. 4) $(11abxy)^2$.

5) $(-\frac{2}{3}mx)^4$. 6) $(0,3fm)^2$. 7) $(0,5acy)^3$. 8) $(0,2by)^4$.

9) $(-0,4afx)^3$. 10) $(1\frac{1}{2}psx)^4$. 11) $(-\frac{9a^2bc}{6ab})^3$. 12) $(-\frac{15b^2cx}{9bx})^4$.

13) $(-\frac{2\frac{1}{3}a^2mx}{1\frac{1}{6}a})^6$. 14) $(\frac{13ab}{15cd})^2$. 15) $(\frac{21a^2b}{12ab^2})^3$. 16) $(-\frac{1,7amx}{0,18a^2})^2$.

17) $(-\frac{3,5fmp^2}{4,9m^2px})^4$. 18) $(-\frac{12^{\frac{3}{5}}x^2yz}{16^{\frac{1}{5}}xv})^5$. 19) $(\frac{18mpq}{0,9mp^2})^7$.

$$20) \left(-\frac{7^{1/2}ab}{3^{3/4}cd}\right)^9 \quad 21) \left(-\frac{14^{1/2}x^3y^2}{4^{5/6}x^2y^3}\right)^8 \quad 22) \left(\frac{0,09ab}{14,4ac}\right)^2$$

$$23) \left(-\frac{39,6abx}{4,62a^2y}\right)^3 \quad 24) \left(\frac{1^{1/35}fy}{2^{1/7}km}\right)^3 \quad 25) \left(\frac{8^{1/9}a^4b^2}{5^{3/9}a^3b^3}\right)^2$$

$$26) (3a^3b^4 - 12b^3c - 27a^2c^3) \cdot 11a^4b^2c^5.$$

$$27) (2^{1/2}f^3m^3 + 4^{2/3}a^5f^3 - 3^{5/6}a^2m^9) \cdot 6a^7f^9m^3.$$

$$28) (5^{1/3}a^2x^6 - 3^{3/5}b^6x^2 + 4^8/9a^7x^8) \cdot -3^{3/4}a^3b^5x^2.$$

$$29) (3,05x^2y^3 + 2,8a^3x^6 - 0,25a^5y^7) \cdot 0,04x^7y^8.$$

$$30) (1,3a^{2n+7} - 11a^3b^{6+5n} + 0,15b) \cdot 1,5a^{3n+4}b^{2n}.$$

$$31) (32,8x^{n+5}y^6 - 9,16x^9y^{3n}) \cdot -2^{1/2}x^8y^{2n}.$$

$$32) (41,4a^{4n+3}b^2 - 5,61a^{n+1}c - 0,81c^{3n+5}) \cdot 1^{5/6}a^{n+7}b^{3n}c^{2n+3}.$$

$$33) (4a^3b^5 + 6a^4b^4 - 10a^5b^3) \cdot (15a^3b - 10a^2b^2).$$

$$34) (12m^7p^2 - 9m^5p^4 - 15m^3p^6) \cdot (8m^2p^5 + 10^{2/3}m^4p^3 + 14^{2/9}m^6p).$$

$$35) (2,3x^2 + 0,3x^5 - 40x^8) \cdot (3,8x - 6,02x^5 + 0,79x^9).$$

$$36) 5a^9b^4 : 0,4a^5b^3.$$

$$37) 1^{7/9}f^{13}g^9 : 2^{2/3}f^6g^5.$$

$$38) 1,7a^2bc^8 : -\frac{1}{2}ac^3.$$

$$39) -3^{3/5}x^6y^{11} : -0,3x^4y^4.$$

$$44) (\frac{1}{2}a^{5n+6}b^{2n} - \frac{3}{4}a^{7n+8}b^{3n+1} + a^{6n}b^{n+3}) : -1^{1/3}a^{3n+4}b^5.$$

$$45) (0,0612x^{3n}y^{4s-2} + 0,027x^8y^{2s+1} - 0,045x^{2n-3}y^{3s}) : 0,03x^5y^{s+3}.$$

$$46) (135a^8b^8 - 15a^{10}b^6 + 60a^{11}b^5 - 60a^{12}b^4) : (9a^3b^6 + 3a^4b^5 - 6a^5b^4).$$

$$47) (0,0018x^{5n+1}y^{3n+2} - 0,005618x^{3n+11}y^{5n+2} + 0,53636x^{2n+13}y^{4n} - 12,8018x^{n+15}y^{3n-2}) : (0,06x^{3n+3}y^2 - 0,106x^{2n+8}y^{n+2} + 5,06x^{n+10}).$$

$$48) a) m^6 : m^4; \quad b) m^6 : m^5; \quad c) m^6 : m^6; \quad d) m^6 : m^7; \quad e) m^6 : m^8; \\ f) x^2 : x^5; \quad g) a^9 : a^{11}.$$

$$49) a) x^{n+1} : x^n; \quad b) x^{n+1} : x^{n+1}; \quad c) x^{n+1} : x^{n+2}; \quad d) a^{3n+4} : a^{3n+7}; \\ e) p^{2n+1} : p^{2n+6}; \quad f) y^{4n-3} : y^{4n+4}.$$

$$50) a) a^{4p} : a^{2p}; \quad b) a^{5p} : a^{5p}; \quad c) a^{6p} : a^{7p}; \quad d) a^{6p} : a^{9p}; \quad e) a^{3p} : a^{5p+3}; \\ f) a^{4p+3} : a^{5p+5}.$$

§ 14. Potenzieren von Produkten, Quotienten und Polynomen.

1) Was heißt potenzieren? Welche Benennungen kommen beim Potenzieren vor? Wie bezeichnet man das Potenzieren? Gib den Unterschied zwischen einem positiven und einem negativen Exponenten an. Aus welcher Rechnungsart leitet man das Potenzieren her?

2) Entwickle nach der Definition a) x^3 , b) x^5 , c) x^n , d) x^1 , e) x^0 .

3) Desgleichen a) x^{-3} , b) x^{-5} , c) x^{-n} , d) x^{-1} , e) x^{-0} .

4) Desgleichen a) $\left(\frac{1}{x}\right)^3$; b) $\left(\frac{1}{x}\right)^5$; c) $\left(\frac{1}{x}\right)^n$; d) $\left(\frac{1}{x}\right)^1$;

e) $\left(\frac{1}{x}\right)^0$.

5) Desgleichen a) $\left(\frac{1}{x}\right)^{-3}$; b) $\left(\frac{1}{x}\right)^{-5}$; c) $\left(\frac{1}{x}\right)^{-n}$;

d) $\left(\frac{1}{x}\right)^{-1}$; e) $\left(\frac{1}{x}\right)^{-0}$.

6) Man setze in 2—5 für x 2, 4, 3. Welche Ausdrücke in 2—5 sind einander gleich? Welche Sätze ergeben sich daraus?

7) Kann man eine benannte Zahl zu einer Potenz erheben? Warum nicht? Welche Potenzen sind gleichnamige?

8) Wird eine negative Zahl zu einer Potenz erhoben, so wird behauptet — a) $(-x)^{\pm 2}$; b) $(-x)^{\pm 3}$; c) $(-x)^{\pm 2n}$; d) $(-x)^{\pm (2n+1)}$; e) $-x^{\pm 2}$; f) $-x^{\pm 3}$. Man setze für x 2; 3; 5; 12.

9) Wie wird ein Produkt zu einer Potenz erhoben? a) $(\pm xy)^{\pm 2}$; b) $(\pm xy)^{\pm 3}$; c) $(\pm xy)^{\pm 2n}$; d) $(\pm xy)^{\pm (2n-1)}$; e) $(\pm xy)^{\pm 1}$; f) $(\pm xy)^{\pm 0}$. Man setzt für x α) 3, β) 2a, γ) 5a und für y α) 7, β) 3b, γ) 11b.

10) Wie wird ein Quotient zu einer Potenz erhoben?

a) $\left(\pm \frac{x}{y}\right)^{\pm 2}$; b) $\left(\pm \frac{x}{y}\right)^{\pm 3}$; c) $\left(\pm \frac{x}{y}\right)^{\pm 2n}$; d) $\left(\pm \frac{x}{y}\right)^{\pm (2n-1)}$;

e) $\left(\pm \frac{x}{y}\right)^{\pm 1}$; f) $\left(\pm \frac{x}{y}\right)^{\pm 0}$. Man setze für x α) 3, β) 4a, γ) 15a und für y α) 10, β) 5b, γ) 20b.

11) a) $(3ab)^2$; b) $(-4ab)^4$.

12) a) $(7ab)^{-2}$; b) $(-3ax)^3$.

13) a) $(-3/4ab)^{-3}$; b) $(-2/3ab)^{-4}$.

$$14) \text{ a) } \left(\frac{2ax}{9by}\right)^2; \text{ b) } \left(-\frac{5xy}{3ab}\right)^2.$$

$$15) \text{ a) } \left(\frac{3ab}{4cd}\right)^{-3}; \text{ b) } \left(-\frac{3ab}{5dg}\right)^{-4}.$$

$$16) \text{ a) } \left(-\frac{1/2ad}{1/4gh}\right)^{-3}; \text{ b) } \left(-\frac{2/3ab}{1/5xy}\right)^{-4}.$$

$$17) \left(\frac{0,01ab}{2,4cd}\right)^{-2} \quad \left| \quad 21) \left(\frac{-5xy}{5/7xz}\right)^{-3}.$$

$$18) \left(\frac{3/4ab}{6cd}\right)^{-2} \quad \left| \quad 22) \left(\frac{-2/3ab}{1/3bc}\right)^3.$$

$$19) \left(-\frac{12ax}{15by}\right)^{-4} \quad \left| \quad 23) \left(\frac{3^{2/5}ab}{17/10ay}\right)^2.$$

$$20) \left(-\frac{8ab}{1/5bc}\right)^{-4} \quad \left| \quad 24) \left(-\frac{2/3ad}{3/4gh}\right)^{-3}.$$

$$25) \left(\frac{3^{2/5}ab}{17/10ay}\right)^{-4}.$$

26) Wie wird eine Summe oder eine Differenz zur zweiten — wie zur dritten Potenz erhoben? Wie wird eine dreitheilige Zahl zur zweiten Potenz erhoben?

$$27) \text{ a) } (3a+5b)^2; \text{ b) } -(2/3x+3/4y)^2.$$

$$28) \text{ a) } (5/2c+4/15d)^2; \text{ b) } (7a-8b)^2.$$

$$29) \text{ a) } (3/7x-1/9y)^2; \text{ b) } (0,5x+1,3b)^2.$$

$$30) (0,02a-0,45b)^2.$$

$$31) (2,07ab-4,6x)^2.$$

$$32) (3\frac{1}{2}a+5\frac{2}{3}b)^2.$$

$$33) \left(\frac{3ab}{4xy} - \frac{4xz}{9bd}\right)^2.$$

$$34) \left(\frac{2ab}{3xy} - \frac{3xz}{4ad}\right)^2.$$

$$35) \text{ a) } (3a+7b)^3; \text{ b) } (4x-3y)^3.$$

$$36) \text{ a) } (14a-2b)^3; \text{ b) } (7x-8y)^3.$$

$$37) \text{ a) } (1/2x+1/2y)^3; \text{ b) } (1/3x-1/2y)^3.$$

$$38) \text{ a) } (0,3x+2,45y)^3; \text{ b) } (3/5h-0,004k)^3.$$

$$39) \left(\frac{2ab}{5xy} - \frac{25yz}{6bd}\right)^3.$$

$$40) \left(-\frac{3d}{5g} - \frac{7}{2bd}\right)^3.$$

41) $\left(\frac{2cd}{5a} - \frac{6f}{5c}\right)^3$.

42) $(3a + 4c + 6g)^2$.

43) $(\frac{1}{3}a - \frac{1}{4}b + \frac{1}{5}c)^2$.

44) $(\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y - \frac{3}{4}z)^2$.

45) $(1,6a - 4,3c - 0,02d)^2$.

46) $(0,4x - \frac{5}{2}y + 1,2z)^2$.

47) $\left(\frac{5ab}{c} - \frac{7d}{a} - \frac{3h}{8f}\right)^2$.

48) Wie wird eine Potenz zu einer Potenz erhoben? Folgende Formel $(a^n)^m = (a^m)^n$ enthält — welchen Satz? Wie unterscheiden sich die beiden Formeln $\left((a^n)^m\right)^p$ und $a^{n^m p}$ von einander?

49) a) $(3a^3)^2$; b) $(-2a^2)^5$.

50) a) $(-4b^{-3})^4$; b) $[(a^3bc^2)^5]^6$.

51) a) $[((-a)^3)^4]^5$; b) $[(-a)^{-3}]^{-5}$.

52) $[(-a)^{-4}]^{-6}$.

53) $\left[\left(-\frac{a}{b}\right)^{+3}\right]^{-4}$.

55) $\left(\frac{a^4b^5}{c^3df}\right)^4$.

54) $\left(\frac{a^m b^n c^p d^{-q}}{f^n g^{-m}}\right)^{-r}$.

56) $\left[\left(\frac{a^2b^3}{cd^5}\right)^{-1}\right]^{-2m}$.

§ 15. Potenzen zu addiren und subtrahiren.

1) Welche Potenzen können zu einander addirt und von einander subtrahirt werden?

2) $3a^2 - 5b^3 + 2c^4 - 2a^2 + 7b^3 - 3c^4 - 4m^2 + a^2 - 7b^3 + 6c^4 - 3m^2 - 6a^2 - 8b^3 - c^4 + 13m^2$. Für $a=4$, $b=3$, $c=2$, $m=5$.

3) $9\frac{1}{2}a^2x^4 - 2\frac{1}{3}a^3x^3 + 6\frac{1}{4}a^4x^2 - 5\frac{1}{3}a^5x + 2\frac{1}{3}a^2x^4 - 3\frac{1}{8}a^3x^3 + 2\frac{1}{5}a^4x^2 + \frac{1}{2}a^5x - 9\frac{1}{6}a^2x^4 - \frac{1}{3}a^3x^3 - 1\frac{3}{5}a^4x^2 + \frac{2}{7}a^5x$.
Für $a=1$, $x=2$.

4) $5\frac{1}{3}b^6c^3 - \frac{1}{2}b^5c^4 + 4\frac{2}{5}b^4c^5 + 2\frac{1}{6}b^3c^6 - 2\frac{1}{4}b^6c^3 - \frac{1}{3}b^5c^4 - \frac{1}{2}b^4c^5 + 2\frac{1}{3}b^3c^6 + 5\frac{2}{3}b^6c^3 - 3\frac{1}{5}b^5c^4 + 2\frac{1}{8}b^4c^5$.

5) $9b^n - d^{m+1} + 5f^{n-1} - 2b^n - 3d^{m+1} - 8f^{n-1} - 7b^n - 8d^{m+1} - 4f^{n-1} + 3b^n + 15d^{m+1} - 8b^n + 10f^{n-1}$. Für $b=3$, $d=5$, $f=10$, $n=3$, $m=2$.

$$6) 2\frac{1}{2}a^{n-2} + 1\frac{4}{5}a^{n-1} + \frac{5}{9}a^n + \frac{3}{4}a^{n-2} + 3\frac{2}{5}a^{n-1} + \frac{1}{3}a^n + \frac{1}{6}a^{n-2} + \frac{7}{10}a^{n-1} + \frac{5}{6}a^n + \frac{4}{3}a^{n-2} + \frac{3}{15}a^{n-1} + \frac{2}{3}a^n + \frac{1}{2}a^{n-2} + \frac{2}{5}a^{n-1} + a^n. \text{ Für } a=3, n=4.$$

$$7) (3\frac{2}{3}a^3 - 4\frac{1}{6}a^2x - \frac{3}{8}ax^2 - \frac{1}{12}x^3) - (5\frac{1}{4}a^3 + \frac{5}{6}ax^2 - \frac{15}{16}x^3) - (2\frac{1}{5}a^3 + \frac{2}{9}a^2x - \frac{5}{24}ax^2 + \frac{3}{32}x^3) + (\frac{1}{6}a^2x - \frac{2}{3}x^3). \\ \text{Für } a=-\frac{1}{6}, x=\frac{3}{4}.$$

$$8) (\frac{3}{2}a^3 - \frac{5}{4}a^2b + \frac{9}{8}ab^2 + \frac{1}{6}b^3) + (4\frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{6}ab^2 - \frac{3}{5}b^3) - (2\frac{1}{6}a^3 + \frac{5}{12}a^2b - \frac{3}{16}ab^2 + \frac{7}{3}b^3) - (4\frac{1}{2}a^3 - \frac{2}{5}a^2b + \frac{1}{12}b^3) - \frac{3}{4}b^3. \text{ Für } a=0,001, b=-0,02.$$

$$9) (3,05a^3 - 0,4a^2c + 1,6ac^2 - 2c^3) + (2,8a^3 + 5,04ac^2 - 0,3c^3) - (7,4a^3 - 13,2a^2c + 8,01ac^2 - 0,001c^3) - (0,81a^2c - 0,3ac^2 + 0,14c^3). \text{ Für } a=\frac{1}{2}, c=-\frac{2}{3}.$$

§ 16. Potenzen zu multipliciren.

1) Welche Fälle können beim Multipliciren mit Potenzen vorkommen? Wie multiplicirt man Potenzen mit einander, wenn die Wurzeln gleich, die Exponenten aber ungleich oder gleich sind?

a) $3a^4 \cdot 15a^5$; b) $\frac{1}{2}a^{14} \cdot \frac{3}{4}a^{14}$; c) $5a^{2n} \cdot \frac{3}{5}a^{3n}$; d) $a^{3n+1} \cdot 4a^{5n}$; e) $9,3a^6 \cdot 1,5a^{2n+3}$; f) $a^{3n+5} \cdot a^{4n+2}$. Wie, wenn die Wurzeln ungleich, die Exponenten aber gleich sind? a) $-2a^3 \cdot 11b^3$; b) $5 \cdot 3^4 \cdot 6 \cdot 7^4$; c) $\frac{2}{3} \cdot 8^n \cdot \frac{12}{17} \cdot 8^n$; d) $\frac{3}{4}a^n \cdot \frac{4}{5}b^n$; e) $3x^{n+1} \cdot 0,8y^{n+1}$. Wie endlich, wenn beide ungleich sind? a) $5x^5 \cdot 18y^7$; b) $na^p \cdot mb^q$.

2) a) $3a^2b^3 \cdot 5ab$; b) $\frac{7}{9}a^{-4} \cdot \frac{3}{16}ac^2$.

3) $-0,5a^{-5}b^4 \cdot 2,4a^{-7}b^{-5}$.

4) $-3a^4bc \cdot 0,23a^{-3}b^{-1} \cdot -0,4a^{-2}c^3$.

5) $4^2a^{2m}b^8 \cdot 20a^{3m+1}b^2$.

6) $-15a^{m-2}b^{-3} \cdot \frac{3}{5}a^{2m+5} \cdot b^8$.

7) $4\frac{3}{4}a^{2m-3n}b^{-2} \cdot 2,5a^{5n-4m}b^2$.

8) $\frac{3}{4}a^{4m-5n+1}b^{-p+3} \cdot 8,4a^{5n+6}b^{2p-7}$.

9) $(3a^2 - 5b^3 + 6c^4) \cdot 4a^3b$.

10) $(0,7a^{-3}b^8 - 1\frac{1}{2}a^{-5}b^6) \cdot 0,3a^{-2}b^4$.

11) $\left(\frac{3a^2}{5b^4} - \frac{4\frac{1}{2}a^{-1}x}{15by^2} + \frac{2\frac{3}{4}a^{-4}x^3}{3b^{-2}y^4}\right) \cdot -\frac{10a^5x}{9b^{-1}y}$.

12) $\left(4x^{-5}y - \frac{2x^2}{z} - 3x^{-2}y^3 + 8z\right) \cdot -7x^{-2}y^3$.

13) $(4\frac{2}{5}a^2b^4 - 5\frac{3}{10}b^8c^{-5} - 6\frac{7}{20}b^{12}c^{-7}) \cdot 3\frac{3}{4}a^{-5}b^{-8}$.

$$14) (2^{1/2}a^{-4}b^3c^{-2} + 0,42a^{-2}b^6c^{-1} - 2,03b^9c) \cdot 3^{3/5}a^2b^{-3}c^{-1}.$$

$$15) (3^{1/2}a^{n-1}b^2 - \frac{15}{1^{3/5}}a^{n-3}b^5 - \frac{4}{2^{3/4}}a^{n-5}b^{-3}) \cdot 5a^{2n+2}b^{4-p}.$$

$$16) \left(\frac{1^{3/5}}{2^{1/2}}a^{3-3n}b^{2p-1} - \frac{6a^{4-2n}}{3^{5/8}}b^{3p+4}c^m + \frac{2^{2/7}}{8}a^{5-n}b^{4p+6}c^{2m} \right)$$

mal $8^{3/4}a^{2n-3}b^{1-p}c.$

$$17) (3+2x)a^m \cdot (3-2x)a^{3m+2} \cdot (9+4x^2)a^{5-2m}.$$

$$18) 3a(x^2+y^2)^{-4} \cdot 5b(x^2+y^2)^5 \cdot \frac{2b}{3a}(x^2+y^2)^2.$$

$$19) -^{5/6}(a+2b-c)^5 \cdot 2^{2/3}(a+2b-c)^{-4} \cdot ^{3/5}(a+2b-c).$$

$$20) (4a^4-3a^2+2a) \cdot (3a^2-2a).$$

$$21) (a^4-2a^3b+4a^2b^2-8ab^3+16b^4) \cdot (a+2b).$$

$$22) (15a^{-6}b^2-7a^{-5}b^4+6a^{-4}b^6) \cdot (8a^{-2}b^2-3a^{-1}b^4).$$

$$23) (13a^{-5}b+10a^{-2}b^2-4ab^3) \cdot (6a^{-3}b^2-18b^3-7a^3b^4).$$

$$24) (14a^5c^2-6a^2bc^2+c^3) \cdot (14a^5c^2+6a^2bc^2-c^3).$$

$$25) (3^{1/2}a^4-2^{2/5}a^2b^2+^{11/3}ab^3-^{3/4}b^4) \cdot (^{4/3}a^3-^{2/3}ab^2+^{4/5}b^3).$$

$$26) (0,02a^5b-0,05a^3b^2+0,6ab^3) \cdot (3a^{-1}b^4+7,5a^{-3}b^5).$$

$$27) (^{3/8}a^{-3}b^4-^{5/4}a^{-4}b^5+^{2/3}a^{-5}b^6+^{4/3}a^{-7}b^8)$$

$$(^{4/3}a^5b^{-4}-^{2/3}a^3b^{-2}-^{1/2}a^2b^{-1}).$$

$$28) (3a^{2m-1}b^4-5a^{m-4}b^6) \cdot (4a^{2m+1}b^{-4}-6a^{m-2}b^{-2}).$$

$$29) (^{2/3}a^{2-m}b-^{1/2}a^{3-2m}b^{-1}+^{3/4}a^{4-3m}b^{-3}) \cdot (^{5/6}ab^{-2}+^{5/8}a^{2-m}b^{-4}).$$

$$30) (2a^{3-2m}b^{n+2}+3a^{m+1}b^{n+2}+c^p) \cdot (a^{m-1}b^{1-2m}-ca^p).$$

$$31) \left(3a^{n-2m}b^{3p+4} - \frac{4a^{4n-m}b^{5p+1}}{5} \right) \cdot (5a^{2n-4}b^{3-p} + 6a^{5n+m-4}b^p).$$

$$32) \left(\frac{5/7}{3^{4/7}}a^{2n+1}b^{p+2q} - \frac{3}{5^{1/4}}a^{n+2}b^{3q-p} + \frac{6^{3/5}}{5^{1/2}}a^3b^{4q-3p} \right)$$

$$\text{mal } \left(\frac{1}{2^{1/2}}a^{3n-1}b^{2p+q} + 1^{1/7}a^{2n}b^{2q} \right).$$

$$33) \left(\frac{9,06}{4/5}a^{3-4n}b^{2p-6q} + \frac{0,4}{1^{2/3}}a^{2,5-2n}b^{3p-5q} + \frac{0,3}{2,5}a^2b^{4p-4q} \right)$$

$$\text{mal } \left(\frac{0,8}{1^{1/2}}a^{3n+1}b^{4q} - \frac{0,1}{3/8}a^{5n+0,5}b^{p+5q} \right).$$

§ 17. Potenzen zu dividiren.

1) Welche Fälle können beim dividiren mit Potenzen vorkommen? Wie dividirt man Potenzen durch einander, wenn die Wurzeln gleich, die Exponenten aber ungleich oder gleich sind? a) $6a^{14} : 3a^5$; b) $\frac{2}{3}a^n : 5a^2$; c) $12a^{2n} : 6a^n$; d) $28a^{n+4} : 4a^{n+3}$; e) $33x^{3n+5} : 4x^{n+2}$; f) $ax^{4n+q} : bx^{2m+3}$; g) $3ax^{15n} : 5bx^{6m+8}$.

2) Wie dividirt man Potenzen durch einander, wenn die Wurzeln ungleich, die Exponenten aber gleich sind? a) $3^4 : 5^4$; b) $2 \cdot 15^3 : 4 \cdot 5^3$; c) $-4a^n : 3b^n$; d) $\frac{2}{3}a^{n+1} : \frac{15}{16}b^{n+1}$.

3) Wie dividirt man endlich Potenzen durch einander, wenn die Wurzeln und Exponenten ungleich sind? a) $5,6a^n : 3,2b^m$; b) $-1\frac{1}{5}x^{n+2} : 3\frac{2}{3}y^{m+3}$.

4) a) $8a^{10} : 4a^3$; b) $6a^{-14} : 2a^{-20}$.

5) $\frac{2a^{-5}}{3b^3} : \frac{4a^{-6}}{5b^2}$.

6) $\frac{3\frac{1}{2}a^{-4}}{4b^5} : \frac{2a^6}{1\frac{3}{4}b^{-4}}$.

7) $\frac{1\frac{2}{5}a^3b^{-10}}{1\frac{13}{15}b^{-4}x^{-1}} : \frac{2\frac{2}{3}a^3b^5}{4b^{-1}x^3}$.

8) $\frac{2\frac{3}{5}a^4b^{-5}}{5\frac{1}{5}a^{-2}x^{-6}} : \frac{2\frac{2}{3}a^{-2}b^{-3}}{5\frac{1}{3}b^5x^{-8}}$.

9) $\frac{2a^{3n-1}}{5b^{5p-q}} : \frac{8a^{4n-3}c}{15b^{p-2q}}$.

10) $\frac{1\frac{1}{2}a^{2p-3}x^q+1}{5\frac{1}{4}a^{4-3p}y^{5-q}} : \frac{2\frac{3}{4}a^{3p+4}x^6}{5\frac{1}{2}x^{2-3q}y^{-2q}}$.

11) $\left(\frac{1\frac{2}{3}x^{m+3n}y^{7m-8n}}{3\frac{1}{4}x^{4m-7n}y^{3m-11n}} \right) : \left(\frac{3\frac{1}{3}x^{2m-6n}y^{5m+6n}}{2\frac{3}{4}x^{6m-17n}y^{2m+4n}} \right)$.

12) $(-\frac{1}{2}a^{-1}b^{-1}+1\frac{5}{16}ab^{-4}-3\frac{3}{4}a^3b^{-7}) : -\frac{3}{4}a^{-3}b^2$.

13) $(20a^5-88a^4x+47a^3x^2-6a^2x^3) : (5a^3-2a^2x)$.

14) $(x^4-13x^2+18x-5) : (x^2-3x+1)$.

15) $(32y^5-243x^5) : (2y-3x)$.

16) $4y^2+6y-5 \mid 16y^4-52y^2+36y-5 \mid =$

17) $3b^2+\frac{1}{2}a^2 \mid 243b^{10}+\frac{1}{32}a^{10} \mid =$

18) $(32a^{10}-80a^8b^2+80a^6b^4-40a^4b^6+10a^2b^8-b^{10}) : (4a^4-4a^2b^2+b^4)$.

19) $(81z^8-90b^4z^4+81b^6z^2-20b^8) : (9z^4+9b^2z^2-5b^4)$.

- 20) $(\sqrt[4]{9}x^5 - \sqrt[11]{3}x^4 + \sqrt[26]{3}x^3 - \sqrt[517]{72}x^2 + \sqrt[5]{24}x + 1)^2$
 $(\sqrt[2]{3}x^2 - \sqrt[5]{2}x + \sqrt[8]{2})$.
- 21) $8a^{-2}b^2 - 3a^{-1}b^4 \mid 120a^{-8}b^4 - 101a^{-7}b^6 + 69a^{-6}b^8$
 $- 18a^{-5}b^{10} \mid =$
- 22) $4a^4b^3 + 6a^5b \mid 12a^6 - 2a^7b^2 + 18a^8b^4 + 72a^9b^6 \mid =$
- 23) $\sqrt[4]{5}a^{-3}b^{-5} - 2a^{-4}b^{-7} \mid \sqrt[3]{5}a^{-1}b^{-8} - \sqrt[11]{10}a^{-2}b^{-10} - 5a^{-3}b^{-12}$
 $+ 10a^{-4}b^{-14} \mid =$
- 24) $\left(\frac{a^{10}}{36} - \frac{11a^8}{24} + \frac{7a^6}{3} - \frac{517a^4}{144} + \frac{5a^2}{24} + 2\right)$
 $:\left(\frac{a^6}{12} - \frac{3a^4}{4} + \frac{5a^2}{8} + \frac{2}{3}\right)$.
- 25) $\left(\frac{64z^7}{729} - \frac{32z^6}{27} + \frac{20z^5}{3} - 20z^4 + \frac{135z^3}{4} - \frac{243z^2}{8}\right.$
 $\left.+ \frac{729z}{64}\right) : \left(\frac{16z^4}{81} - \frac{16z^3}{9} + 6z^2 - 9z + \frac{81}{16}\right)$.
- 26) $\left(\frac{a^5}{2b^3} - \frac{63a^6}{20b^4} - \frac{1499a^7}{1440b^5} - \frac{205a^8}{192b^6} - \frac{31a^9}{32b^7} + \frac{5a^{10}}{24b^8}\right)$
 $:\left(\frac{3a^2}{8b} - \frac{9a^3}{4b^2} - \frac{5a^4}{3b^3}\right)$.
- 27) $\frac{4a}{5b} - 1 \mid \frac{64a^3}{125b^3} - 1 \mid =$
- 28) $(\sqrt[4]{35}a^{-14}b^{-1} - 79\sqrt[23]{84}a^{-6}b^{-7} + 13\sqrt[3]{4}a^{-2}b^{-10})$
 $:\left(\sqrt[2]{7}a^{-1}b^{-7} - 7\sqrt[1]{2}a^3b^{-10}\right)$.
- 29) $\left(\frac{32z^5x^{-5}}{243} - \frac{20z^4x^{-4}}{27} + \frac{5z^3x^{-3}}{3} - \frac{15z^2x^{-2}}{8} + \frac{135zx^{-1}}{128}\right.$
 $\left.- \frac{243}{1024}\right) : \left(\frac{8z^3x^{-3}}{27} - z^2x^{-2} + \frac{9zx^{-1}}{8} - \frac{27}{64}\right)$.
- 30) $\left(\frac{243x^{10}y^{-10}}{32} - \frac{135x^6y^{-6}}{4} + 60x^2y^{-2} - \frac{160}{3}x^{-2}y^2\right.$
 $\left.+ \frac{640y^6x^{-6}}{27} - \frac{1024y^{10}x^{-10}}{243}\right) : \left(\frac{9x^4y^{-4}}{4} - 4 + \frac{16y^4x^{-4}}{9}\right)$.
- 31) $\left(\frac{4a^{8m-2n}b^{3m-4n}}{7} - \frac{7a^{5m-6n}b^{7m-8n}}{10}\right) : \frac{2a^{6n-m}b^{5n-m}}{5}$.
- 32) $(\frac{1}{3} - 6y^{2m+4n} + 27y^{4m+8n}) : (\frac{1}{3} + 2y^{m+2n} + 3y^{2m+4n})$.
- 33) $(6a^{4n+1}b^{m+6} - \sqrt[5]{2}a^{4n}b^{m+5} + \sqrt[1]{6}a^{4n-1}b^{m+4} + \sqrt[9]{4}a^{4n-2}b$
 $- \sqrt[3]{16}a^{4n-3}) : (3a^{2n+1}b^{m+1} - \sqrt[1]{4}a^{2n}b^m)$.

34) $\frac{c}{a-b}$

35) $\frac{c}{a+b}$

36) $\frac{x}{1+x}$

37) $\frac{1}{1+b}$

38) $\frac{1+x}{1-x}$

39) $\frac{db}{ad+1}$

40) $\frac{b^2}{b+4c}$

41) $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$

42) $\frac{3a^2+5b^2}{2a^2-8b^2}$

43) $\frac{x^5-a^5}{x-a}$

44) $\frac{x^n-a^n}{x-a}$

§ 18. Potenzen zu potenziren.

1) $\left[\left(\frac{3^2a^4}{6^3b^5}\right)^{-2}\right]^3$

2) $\left(\frac{-2^3a^{-3}}{4b^5}\right)^{-2}$

3) $\left(\frac{-15/16a^3b^{-4}}{35/32a^{-2}b^{-5}x^2}\right)^{-2}$

4) $\left(-\frac{3^{1/5}a^{-1}b^5}{4^{1/5}a^{-5}b^3x^{-2}}\right)^{-3}$

5) $\left(\frac{4^2a^3b^{-3}}{6^2x^{-1}y^{-2}}\right)^{-3}$

6) $\left[\left(\frac{3^2a^{-5}b}{9^3b^{-2}d^n}\right)^{-3}\right]^4$

7) $\left[\left(\frac{4^3x^2y^{-n}}{8^2z^{-3}}\right)^3\right]^{-1}$

8) $\left[\left(\frac{15a^{n-1}b^2}{6^2a^4b^n}\right)^{-2}\right]^3$

9) $\left(\frac{-6^{-3}a^{-5}b^3}{18^{-2}a^2b^4}\right)^{-5}$

10) $\left(\frac{-4a^{-1}b^3}{6b^{-2}y^{-3}}\right)^{-3}$

11) $\left[\left(-\frac{10^{-3}a^5b^{-2}x}{25^{-2}a^{-3}b^{-5}y^2}\right)^{-1}\right]^{-4}$

12) $\left[\left(\frac{-3^3/4a^2b^{-5}x}{4^3/8a^4b^{-6}x^4y^{-2}}\right)^3\right]^4$

13) $\left[\left(-\frac{8a^2b^{-1}}{6^2x^4y^{-2}}\right)^{-2}\right]^3$

14) $(3a^3x - 1/2x^4)^2$

15) $(1/3x^2 - 3/4xy)^2$

16) $\left(\frac{3a^3}{5b^3} + \frac{2a}{9b}\right)^2$

17) $(5a^n x^2 + 3a^{n-1} x^3)^2$

18) $(2/3a^{2m-1}b^2 - 5/6a^m + 1b^{-3})^2$

19) $(2/3x^2 - 3/4y^2)^3$

20) $(8a^3 + 3b^3)^3$

21) $(1/2a^{2n-1}b^n - 2/3a^3b^{n-1})^3$

22) $(5/6a^{m-4}b + 3/5a^5b^m)^3$

§ 19. VI. Extrahiren.

1) Was heißt extrahiren? Was versteht man unter Radicand, Wurzelexponent und Wurzel? Aus welcher Rechnung leitet man das Extrahiren her?

2) Was bedeutet der Ausdruck: „aus einer Zahl die zweite, dritte, n te, (n+1) te Wurzel ausziehen?“ Wie wird die m te Wurzel aus a bezeichnet?

3) Man bezeichne und berechne: a) die 2te Wurzel aus 81; b) die 3te Wurzel aus 125; c) die 5te Wurzel aus 32. Was versteht man unter der Quadrat-, was unter der Cubikwurzel einer Zahl?

4) Wenn a) 81 in 4, b) a in n, c) b in n + 1 gleiche Faktoren zerlegt wird, wie groß ist jeder Faktor? Wenn a) 5; b) n gleiche Faktoren sind, jeder Faktor α) 3; β) $\sqrt[n]{a}$ oder $a^{\frac{1}{n}}$ ist, wie groß ist die Potenz (der Radicand)?

5) Was bedeuten die Formen a) $(\sqrt[n]{a})^n = a$ oder $(a^{\frac{1}{n}})^n = a$; b) $\sqrt[n]{a^n} = a$ oder $(a^n)^{\frac{1}{n}} = a$? Welche Folgerungen lassen sich aus a und b ziehen? c) $\sqrt{a^2}$; d) $\sqrt[3]{a^3}$; e) $(a^4)^{\frac{1}{4}}$; f) $(8^{\frac{1}{5}})^5$.

6) Wie groß ist a) $\sqrt[1]{25}$; b) $\sqrt[1]{x}$; c) $\sqrt[5]{1}$; d) $\sqrt[n]{1}$? Welche Folgerungen ergeben sich hieraus?

7) Kann man aus einer benannten Zahl die Wurzel ziehen? Warum nicht?

8) Welche Wurzeln sind gleichnamige — welche ungleichnamige? Sieh den Unterschied zwischen rationalen und irrationalen Zahlen an. Desgleichen zwischen imaginären und reellen.

9) Eine Wurzel aus einer positiven Zahl giebt — was? Desgleichen aus einer negativen Zahl —? a) $\sqrt{16}$; b) $\sqrt[3]{216}$; c) $\sqrt[3]{-343}$; d) $\sqrt{-25}$; e) $(-a)^{\frac{1}{4}}$; f) $-a^{\frac{1}{4}}$; g) $\sqrt[5]{-1}$; h) $(-a)^{\frac{1}{2}}$; i) $-a^{\frac{1}{2}}$; k) $\sqrt[2n]{a}$; l) $(-a)^{\frac{1}{2n}}$; m) $a^{\frac{1}{2n+1}}$; n) $(-a)^{\frac{1}{2n+1}}$.

10) Wie wird ein Produkt extrahirt? a) $\sqrt[n]{xy}$ oder $(xy)^{\frac{1}{n}}$; b) $\sqrt{16a}$; c) $(4ab)^{\frac{1}{2}}$; d) $(8a)^{\frac{1}{3}}$; e) $\sqrt[3]{27ab}$; f) $\sqrt{-8a}$; g) $\sqrt[3]{-125a}$.

11) Wie wird ein Quotient extrahirt: a) $\sqrt[m]{\frac{x}{y}}$ oder $\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{m}}$;

b) $\sqrt{\frac{16a}{25b}}$; c) $\left(\frac{125a}{216b}\right)^{\frac{1}{3}}$; d) $\sqrt[3]{\frac{-8a}{27b}}$; e) $\left(-\frac{100a}{121b}\right)^{\frac{1}{2}}$;

f) $\left(\frac{50a}{48b}\right)^{-\frac{1}{2}}$.

12) Wie extrahirt man eine Potenz? a) $(a^3)^{\frac{1}{6}}$; b) $(343a^2)^{\frac{1}{2}}$;

c) $(-27a^2b^3c)^{\frac{1}{3}}$; d) $\sqrt{32ab^2c^2}$; e) $\sqrt{\frac{18ab^2c^2}{50b}}$; f) $(4a^{2n})^{\frac{1}{2}}$;

g) $\sqrt[5]{-a^{15}}$.

13) a) $\left(\frac{-24a^4b^2c}{81ab}\right)^{\frac{1}{3}}$; b) $\left(\frac{625a^3b^2c}{1080ac^3}\right)^{\frac{1}{2}}$.

14) a) $(-27a^{18})^{\frac{1}{3}}$; b) $(-25a^4)^{\frac{1}{2}}$.

15) a) $(-a^{15}b^{14})^{\frac{1}{6}}$; b) $\sqrt[10]{a^{20}b^{30}}$.

16) a) $(a^{2n})^{\frac{1}{n}}$; b) $(a^{nm})^{\frac{1}{m}}$.

17) a) $(a^{nm+1})^{\frac{1}{m}}$; b) $\sqrt{\frac{125a^3b^2}{64c^4d^2}}$.

18) a) $(a^{4n}b^{6m})^{\frac{1}{2n}}$; b) $(a^{2n+6}b^{4n+12})^{\frac{1}{n+5}}$.

19) a) $(-a^5)^{\frac{1}{2}}$; b) $\sqrt{-36}$.

20) $\left(\frac{81a^6b^5}{8x^3y^9}\right)^{\frac{1}{3}}$.

21) $\left(\frac{16a^8b^5}{81x^{11}y^9}\right)^{\frac{1}{4}}$.

22) $\sqrt{\frac{12a^3b^5}{245x^2y}}$.

23) $\sqrt[3]{\frac{54a^7b^9}{375x^6y^5}}$.

24) $\left(\frac{3a^4}{5b^{-2}}\right)^{\frac{1}{3}}$.

25) $\left(\frac{4x^2}{9y^2}\right)^{\frac{3}{2}}$.

26) $\left(\frac{25z^4}{16y^2}\right)^{-\frac{5}{2}}$.

27) $\sqrt[3]{\left(\frac{27b^3}{8x^3}\right)^{-2}}$.

28) $\left(-\frac{64y^9}{x^9}\right)^{-\frac{5}{3}}$.

29) $\sqrt[3]{\left(\frac{36x^4}{y^2}\right)^3}$.

30) $\left(-\frac{27a^6}{64b^3}\right)^{\frac{2}{3}}$.

31) $\sqrt[3]{\left(-\frac{8x^9}{y^6}\right)^5}$.

32) $(4x^8y^4z^{-2})^{-\frac{1}{2}}$.

33) $(-27x^{-6})^{-\frac{2}{3}}$.

34) $(8x^{-9}z^3)^{\frac{2}{3}}$.

35) $(25z^2y^4)^{3/2}$.

36) $\left(-\frac{x^3y^6}{27}\right)^{-2/3}$.

37) $\left(\frac{b^2y^4}{4}\right)^{-3/2}$.

38) $\left(\frac{125a^{-3}b^6}{8-x^9y^9}\right)^{-2/3}$.

39) $\left(\frac{18a^6b^3}{32x^5b^4}\right)^{1/2}$.

40) $\sqrt[3]{\left(-\frac{250b^{-6}z^6x^2}{16b^{-3}x^6}\right)^{-2}}$.

41) $\left(\frac{48a^7b^5}{1875x^4y^8}\right)^{3/4}$.

42) $\left(-\frac{4a^3b^2}{9x^4y^2}\right)^{3/2}$.

43) $((a+b)^2c)^{1/2}$.

44) $\sqrt{\frac{4c^6x^{2m}+4y^{4p-8}}{25}}$.

45) $\left(\frac{27u^9x^{12}(a^2+x^2)^{-6n}}{8b^{-3n}h^9}\right)^{1/3}$.

46) $\sqrt{a^2x+a^2y}$.

47) Wie bringt man eine Zahl unter das Wurzelzeichen? a)

3 \sqrt{a} ; b) $2a\sqrt[5]{ab}$; c) $4\sqrt[5]{1/2}$; d) $3a^2b(2ab)^{1/n}$.

48) $\frac{3a}{4b}\sqrt{\frac{48b}{18a}}$.

50) $\frac{a+b}{a-b}\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$.

49) $\frac{2a}{5b}\sqrt[3]{\frac{25b^2}{16a^2}}$.

51) $\frac{a-b}{a+b}\sqrt{\frac{ac}{(a-b)^2}}$.

52) $(a-bx)\sqrt{\frac{a+bx}{a-bx}}$.

§ 20. Quadrat- und Cubikwurzel aus Polynomen.

1) Aus welchen Formen kann man genau die Quadrat-, aus welchen die Cubikwurzel ausziehen.

2) $(9x^2+12xy+4y^2)^{1/2}$.

3) $\sqrt{\frac{4a^2}{9} - \frac{b}{d} + \frac{9b^2}{16a^2d^2}}$.

4) $\sqrt{\frac{81}{16a^2} + \frac{27x}{ac} + \frac{36x^2}{c^2}}$.

5) $\left(\frac{16a^4x^6}{y^4} - 40a^3xy + \frac{25a^2y^6}{x^4}\right)^{1/2}$.

6) $(25a^{-4}x^{-6} - 70a^{-1}b^4 + 49a^2b^8x^6)^{1/2}$.

7) $\sqrt{4a^4 - 2a^3 + \frac{13}{4}a^2 - \frac{3}{4}a + \frac{9}{16}}$.

8) $(\frac{1}{4}x^6 - 2x^4 - \frac{3}{5}x^3 + 4x^2 + \frac{12}{5}x + \frac{9}{25})^{1/2}$.

- 9) $(16x^6 + 16x^5 + 4x^4 - 16x^3 - 8x^2 + 4)^{1/2}$.
- 10) $(4x^2 + 8ax^2 + 4a^2x^2 + 16b^2x + 16ab^2x + 16b^4)^{1/2}$.
- 11) $(25x^8 - 30x^7 - 31x^6 + 114x^5 - 38x^4 - 72x^3 + 81x^2)^{1/2}$.
- 12) $\sqrt{(36a^{12} - 60a^{10} + a^8 + 56a^6 - 26a^4 - 12a^2 + 9)}$.
- 13) $\sqrt{(1 - 6x^2 + 27x^4 - 108x^6 + 243x^8 - 486x^{10} + 729x^{12})}$.
- 14) $\left(\frac{4x^2}{25a^2} - \frac{4bx}{5ac} + \frac{b^2}{c^2} - \frac{12dx}{5af} + \frac{6bd}{cf} + \frac{9d^2}{f^2}\right)^{1/2}$.
- 15) $\sqrt{(a^{2m}x^{2n} + 10ca^{2m-2}x^{2n+1} - 6a^{m+1}x^{n-1} + 25c^2a^{2m-4}x^{2n+2} - 30ca^{m-1}x^n + 9a^2x^{-2})}$.
- 16) $\sqrt{\left(\frac{9a^{2m-2}c^2}{4d^{6p}} - \frac{3a^{m+n-1}b^{2n-1}c}{d^{3p-3}} - \frac{28a^{m-1}b^2c}{d^{3p}} + a^{2n}b^{4n-2}d^6 + \frac{2^9}{3}a^nb^{x+2n-1}d^3 + \frac{2^{16}b^{2x}}{9}\right)}$.
- 17) $\sqrt{a^2 - x^2}$.
- 18) $(1-x)^{1/2}$.
- 19) $\sqrt{4a^2 + 9b^2}$.
- 20) $\sqrt[3]{(125x^3 + 75x^2 + 15x + 1)}$.
- 21) $(64 - 240y + 300y^2 - 125y^3)^{1/3}$.
- 22) $(\frac{8}{27}a^6 - a^4x^3 + \frac{9}{8}a^2x^6 - \frac{27}{64}x^9)^{1/3}$.
- 23) $(8a^3 - 84a^2x + 294ax^2 - 343x^3)^{1/3}$.
- 24) $\sqrt[3]{\left(\frac{8a^6b^3}{27c^9} - \frac{a^3}{3c^4} + \frac{c}{8b^3} - \frac{c^6}{64a^3b^6}\right)}$.
- 25) $(\frac{1}{8}a^{-12}b^{-6} + \frac{1}{2}a^{-9} + \frac{2}{3}a^{-6}b^6 + \frac{8}{27}a^{-3}b^{12})^{1/3}$.
- 26) $\sqrt[3]{(8a^3 + 36a^2b - 48a^2d + 54ab^2 - 144abd + 96ad^2 + 27b^3 - 108b^2d + 144bd^2 - 64d^3)}$.
- 27) $\sqrt[3]{(27x^9 - 54x^8y + 36x^7y^2 + 19x^6y^3 - 36x^5y^4 + 12x^4y^5 + 9x^3y^6 - 6x^2y^7 + y^9)}$.
- 28) $(x^3 - 6x^4 + 21x^5 - 44x^6 + 63x^7 - 54x^8 + 27x^9)^{1/3}$.
- 29) $\sqrt[3]{(8 - 36a + 78a^2 - 99a^3 + 78a^4 - 36a^5 + 8a^6)}$.
- 30) $(27 - 27x + 90x^2 - 55x^3 + 90x^4 - 27x^5 + 27x^6)^{1/3}$.
- 31) $(a^{3m} - 6a^{2m+1}x^n + 12a^{m+2}x^{2n} - 8a^3x^{3n})^{1/3}$.
- 32) $(8 - 12x^{3n-1} + 6x^{6n-2} - x^{9n-3})^{1/3}$.

33) $\sqrt[3]{(z^{6m}x^3 + 6z^{4m}cax^2 + 12z^{2m}c^2a^{2p}x + 8c^3a^{3p})}$.

34) $\sqrt[3]{a^3 + x^3}$.

35) $\sqrt[3]{1 + x}$.

36) $\sqrt[3]{a^3 - x^3}$.

§ 21. Quadrat- und Cubikwurzel aus dekadischen Zahlen.

1) a) $\sqrt{1296}$; b) $\sqrt{6561}$.

2) a) $(7396)^{1/2}$; b) $3481^{1/2}$.

3) a) $667489^{1/2}$; b) $\sqrt{51529}$.

4) a) $\sqrt{170569}$; b) $\sqrt{166464}$.

5) a) $\sqrt{582169}$; b) $\sqrt{956484}$.

6) $57198969^{1/2}$.

7) $\sqrt{68492176}$.

8) $\sqrt{25836889}$.

9) $\sqrt{1607448649}$.

10) $\sqrt{41605800625}$.

11) a) $\sqrt{7}$; b) $11^{1/2}$.

12) a) $35^{1/2}$; b) $\sqrt{122}$.

13) $\sqrt{334}$.

14) $\sqrt{1446,2809}$.

15) $\sqrt{810054,0009}$.

16) $\sqrt{0,0005326864}$.

17) $\sqrt{375,182}$.

18) $\sqrt{0,00074}$.

19) $\sqrt{71,505}$.

20) $\sqrt{0,086742}$.

21) $\sqrt{0,0016698}$.

22) $\sqrt{0,9}$.

23) $\sqrt{0,003}$.

24) a) $\sqrt{121/144}$; b) $\sqrt{3/4}$.

25) $\sqrt{5/9}$.

26) $\sqrt{11^{11/16}}$.

27) a) $\sqrt{5/3}$; b) $\sqrt{7/8}$.

28) a) $\sqrt{5/12}$; b) $\sqrt{1/17}$.

29) $\sqrt[3]{110592}$.

30) $148877^{1/3}$.

31) $\sqrt[3]{59319}$.

32) $\sqrt[3]{328509}$.

33) $\sqrt[3]{2460375}$.

34) $\sqrt[3]{11089567}$.

35) $\sqrt[3]{1191016}$.

36) $\sqrt[3]{64481201}$.

37) $74088000^{1/3}$.

38) $\sqrt[3]{340068392}$.

39) $\sqrt[3]{6372783864}$.

40) $\sqrt[3]{115145914625}$.

41) a) $\sqrt[3]{4}$; b) $\sqrt[3]{21}$.

42) $227^{1/3}$.

43) $\sqrt[3]{734}$.

44) $\sqrt[3]{71,505}$.

45) $\sqrt[3]{5,8514}$.

46) $\sqrt[3]{0,086742}$.

47) $\sqrt[3]{61506,01}$.

48) $\sqrt[3]{573,52}$.

49) $\sqrt[3]{0,0863774}$.

50) $\sqrt[3]{0,07}$.

51) a) $\sqrt[3]{125/729}$; b) $\sqrt[3]{2/3}$.

52) a) $\sqrt[3]{5/6}$; b) $\sqrt[3]{5/14}$.

53) $\sqrt[3]{15^2/5}$.

§ 22. Wurzeln zu addiren und zu subtrahiren.

1) Welche Wurzeln kann man zu einander addiren und von einander subtrahiren?

$$2) 4 \cdot 3^{1/2} - 8 \cdot 4^{1/3} + 9 \cdot 6^{1/5} + 8 \cdot 3^{1/2} - 11 \cdot 4^{1/3} - 10 \cdot 6^{1/5} - 2 \cdot 3^{1/2} + 5 \cdot 4^{1/3} + 5 \cdot 6^{1/5} + 3^{1/2} - 2 \cdot 4^{1/3} - 3 \cdot 6^{1/5}$$

$$3) (6^{1/3}\sqrt{a} - 5^{1/4}\sqrt{ab} + 3^{1/2}\sqrt[3]{b}) - (8^{1/4}\sqrt{a} + 3^{1/2}\sqrt{ab} - 1^{1/6}\sqrt[3]{b}) - (4^{1/5}\sqrt{ab} - 2^{1/3}\sqrt[3]{b}) + (9^{1/6}\sqrt{a} - 3^{1/3}\sqrt[3]{b}) - 9^{1/2}\sqrt{ab}$$

4) $147^{1/2} + 27^{1/2} - 48^{1/2}$.

5) $\sqrt{24} + \sqrt{54} - \sqrt{6} + \sqrt{150}$.

6) $2\sqrt{8} + 5\sqrt{72} - 7\sqrt{18} - \sqrt{50}$.

7) $\sqrt{12} + 2\sqrt{27} + 3\sqrt{75} - 9\sqrt{48}$.

8) $5\sqrt{3} - 2\sqrt{48} + 5\sqrt{108} - 4\sqrt{27}$.

9) $3 \cdot 50^{1/2} + 2 \cdot 72^{1/2} - 128^{1/2} - 2 \cdot 18^{1/2}$.

10) $80^{1/2} + 20^{1/2} - 3 \cdot 45^{1/2} + 2\sqrt{180}$.

11) $3\sqrt{75} + 4^{1/2}\sqrt{192} - 2^{3/4}\sqrt{12} + \sqrt{27}$.

12) $4,5\sqrt{162} - 3,2\sqrt{50} - 0,04\sqrt{18} + 5,03\sqrt{98}$.

13) $8\sqrt[3]{4} - 1^{1/2}\sqrt{12} + 4\sqrt{27} - 2\sqrt[3]{16}$.

14) $\sqrt{2^9/20} + \sqrt{5^{41}/80} - \sqrt[9]{5}$.

15) $4\sqrt[3]{4} - 2^{1/7}\sqrt[3]{16} + 5\sqrt{75} - 2\sqrt{27}$.

16) $2\sqrt[5]{3} + \sqrt{60} - \sqrt{15} + \sqrt[3]{5}$.

17) $243^{1/2} - 6 \cdot (1/3)^{1/2} + (3/4)^{1/2} - 300^{1/2}$.

18) $\sqrt{2^9/20} + \sqrt{5^{41}/80} - \sqrt[9]{5} - \sqrt{5}$.

19) $8\sqrt[3]{40} + 3\sqrt[3]{135} - 2\sqrt[3]{625} - \sqrt[3]{5}$.

20) $7\sqrt[3]{54} + 3 \cdot \sqrt[3]{16} + 2^{1/3} - 5 \cdot 128^{1/3}$.

$$21) 2 \cdot 81^{1/3} - 7 \cdot 24^{1/3} - 5 \cdot 375^{1/3} + 192^{1/3}.$$

$$22) 5\sqrt[3]{54} + 9\sqrt[3]{250} - \sqrt[3]{686} + 4\sqrt[3]{16}.$$

$$23) 3 \cdot 56^{1/3} - 2 \cdot \sqrt[3]{189} + 3\sqrt[3]{7} - 4\sqrt[3]{875}.$$

$$24) 2^{3/5}\sqrt[3]{500} + 1^{3/4}\sqrt[3]{256} - 3^{1/2}\sqrt[3]{32} - 2^{2/3}\sqrt[3]{108}.$$

$$25) 1^{1/3}\sqrt[3]{135/8} + 3\sqrt[3]{135} - 2\sqrt[3]{625} - \sqrt[3]{5} + 8\sqrt[3]{40}.$$

$$26) 6a\sqrt[3]{63ab^3} - 5b\sqrt[3]{28a^3b} + 2ab\sqrt[3]{343ab}.$$

$$27) 3mn\sqrt[3]{52n} - 3n\sqrt[3]{117m^2n} + \sqrt[3]{13m^2n^3}.$$

$$28) 5x^2y\sqrt[3]{288} - 30y\sqrt[3]{8x^4} + x^2\sqrt[3]{50y^2} + \frac{3y}{x}\sqrt[3]{18x^6}.$$

$$29) ab\sqrt[3]{242ab} - 3b\sqrt[3]{32a^3b} + a\sqrt[3]{18ab^3} - \frac{2}{ab^2}\sqrt[3]{50a^5b^7}.$$

$$30) 6bc\sqrt[3]{28c} - 2c\sqrt[3]{63b^2c} + \sqrt[3]{112b^2c^3} + \frac{3b}{11c^2}\sqrt[3]{847c^7}.$$

$$31) 5x\sqrt[3]{12a^3} - 2a\sqrt[3]{27ax^2} - 2x\sqrt[3]{75a^5} + ax\sqrt[3]{48a} \\ + 4a\sqrt[3]{108a^3x^2}.$$

$$32) \sqrt[3]{a^3b^7} + \sqrt[3]{a^5b^3} - \sqrt[3]{a^3b^3} + \sqrt[3]{a^2b^25}.$$

$$33) 3z\sqrt[3]{250xz^2} - 5x\sqrt[3]{128xz^5} + 3xz\sqrt[3]{16xz^2}.$$

$$34) 5ab\sqrt[3]{243a^2b} + 3\sqrt[3]{72a^5b^4} - 2b\sqrt[3]{1125a^5b}.$$

$$35) 3a^2b\sqrt[3]{32a^2b} + 5\sqrt[3]{108a^9b^4} - ab\sqrt[3]{500a^5b}.$$

$$36) 8b(432a^4b^2)^{1/3} - 2b(686ab^2)^{1/3} + (1024a^4b^5)^{1/3}.$$

$$37) 5\sqrt[3]{625x^4y^7} + 3xy^2\sqrt[3]{40xy} - xy\sqrt[3]{135xy^4}.$$

$$38) x\sqrt[3]{\frac{8a^4}{27b^3} + \frac{16a^3}{27b^2}}.$$

$$39) a\sqrt[3]{(a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3)} + b^2\sqrt[3]{(a - b)}.$$

$$40) 6\sqrt[3]{(x^3 + 6x^2 + 12x + 8)} - \sqrt[3]{(4x + 8)}.$$

$$41) 5b\sqrt[3]{(9a^3 + 6a^2b + ab^2)} + \sqrt[3]{(a^5 - 10a^3b^2 + 25ab^4)}.$$

$$42) 3x(4x^3 - 4x^2y + xy^2)^{1/2} - 3(4x^5)^{1/2}.$$

$$43) 6m\sqrt[3]{(2m^3 + 4m^2n + 2mn^2)} + m\sqrt[3]{(72m^3 - 144m^2n \\ + 72mn^2)}.$$

$$44) m\sqrt[3]{(m^3 + 4m^2n + 4mn^2)} - (m - 2n)\sqrt[3]{m^3}.$$

$$45) 6a\sqrt{-63ab^3} - 5\sqrt{-28a^3b^3} - 5b\sqrt{-28a^3b} \\ + 2ab\sqrt{-343ab}.$$

$$46) 4\sqrt{(-12a^3 - 36a^2b - 27ab^2)} - 2\sqrt{(-3a^3 + 24a^2b - 48ab^2)}.$$

47) $\sqrt{9} + \sqrt{16}$ ist nicht gleich $\sqrt{9 + 16}$. Wie groß ist a) $\sqrt{144} + \sqrt{25}$ und wie groß $\sqrt{144 + 25}$; b) $\sqrt{225} + \sqrt{64}$ und $\sqrt{225 + 64}$; c) $\sqrt{3025} + \sqrt{2304}$ und $\sqrt{3025 + 2304}$?

§ 23. Wurzeln zu Multiplizieren.

1) Wie werden Wurzeln mit gleichen Zahlen (Radicalen) und ungleichen Wurzelexponenten mit einander multiplicirt? a) $3x^{1/2} \cdot 5x^{1/3}$;

b) $\frac{1}{4}ac^{\frac{1}{n}} \cdot \frac{2}{3}bc^{\frac{1}{m}}$; c) $a^{3/4} \cdot a^{1/3}$; d) $5^{2^{3/4}} \cdot 15^{7/8} \cdot 15^{-5/8}$; e)

$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{-\frac{p}{q}}$; f) $a^{-\frac{m}{n}} \cdot a^{-\frac{p}{q}}$; g) $\sqrt{6a} \cdot \sqrt[3]{45a}$; h) $4b\sqrt{10a}$.

$\sqrt[4]{10a}$ i) $3^{1/5}\sqrt{-5a} \cdot 4^{3/8}\sqrt{-5a}$; k) $0,4x\sqrt[4]{-3a} \cdot 2,5y\sqrt[6]{-3a}$.

2) Wie werden Wurzeln mit ungleichen Zahlen und gleichen Wurzelexponenten mit einander multiplicirt? a) $4 \cdot 3^{1/2} \cdot 5 \cdot 4^{1/2}$; b)

$3ac^{1/3} \cdot 3bd^{1/3}$; c) $fa^{\frac{1}{n}} \cdot gb^{\frac{1}{n}}$.

3) a) $a\sqrt[n]{x} \cdot b\sqrt[m]{y}$; b) $6 \cdot 3^{1/2} \cdot 2 \cdot 5^{1/2}$.

4) $4\sqrt{7} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$.

5) $5 \cdot 3^{1/2} \cdot 7(\frac{8}{3})^{1/2}\sqrt{2}$.

6) $\sqrt{-15a} \cdot 5\sqrt{-35b}$.

7) $4\sqrt{3} \cdot 5\sqrt{-12} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{-27}$.

8) $9a\sqrt{-3a} \cdot \frac{2}{3}a\sqrt{12b}$.

9) Wie werden Wurzeln mit gleichen Zahlen und gleichen Wurzelexponenten mit einander multiplicirt? a) $5^{1/2} \cdot 5^{1/2}$; b) $3a^{1/3} \cdot$

$7a^{1/3}$; c) $5\sqrt[n]{a} \cdot 6\sqrt[n]{a}$; d) $a\sqrt{-a} \cdot b\sqrt{-a}$.

10) Womit muß a) $\sqrt{10}$; b) \sqrt{a} ; c) $\sqrt{2b}$ multiplicirt werden, damit man a) 10; b) a; c) 2b erhält?

11) Womit muß a) $\sqrt[3]{10}$; b) $\sqrt[4]{a}$; c) $\sqrt[3]{2b}$ multiplicirt werden, damit man a) 10; b) a; c) 2b erhält?

12) Wie werden Wurzeln mit ungleichen Zahlen (Radicalen) und ungleichen Wurzelexponenten mit einander multipliziert? a) $8a^{1/2} \cdot 7b^{2/3}$; b) $3ax^{2/5} \cdot 4by^{3/5}$; c) $4a^2x^{3/5} \cdot 5ay^{7/10}$; d) $5a^nx^{2/n} \cdot ba^3y^{5/n}$
 e) $6ax^{3/n} \cdot 7by^{5/m}$; f) $2a\sqrt{3x} \cdot 8a^3\sqrt[3]{5y}$; g) $0,1\sqrt{-3x} \cdot 0,2\sqrt[3]{-5y}$;
 h) $0,01a\sqrt[4]{-3x} \cdot 5a\sqrt[6]{-5y}$.

$$13) 6\sqrt{3} \cdot 2\sqrt[3]{4}$$

$$14) 3\sqrt{2} \cdot 5\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt{12}$$

$$15) \sqrt[8]{5^3} \cdot \sqrt[8]{7^3}$$

$$16) \frac{a}{\sqrt{b} \sqrt[4]{c^3}} \cdot \frac{b^8 \sqrt{a^7}}{\sqrt{c^{-1}}}$$

$$17) 3\sqrt{5} \cdot -4\sqrt[4]{100} \cdot 5\sqrt{2}$$

$$18) 2\sqrt[3]{5} \cdot 3\sqrt[4]{20} \cdot \sqrt{10}$$

$$19) (\sqrt{8} + \sqrt{5} - 3\sqrt{2}) \cdot 2\sqrt{3}$$

$$20) (3^{1/3}\sqrt{6} + 2\sqrt{12} - 4\sqrt{15}) \cdot 4\sqrt{3}$$

$$21) (4\sqrt[3]{9} - 2^{3/4}\sqrt[3]{36} + 5^{3/5}\sqrt[3]{225}) \cdot 2\sqrt[3]{30}$$

$$22) (3 + \sqrt{5}) \cdot (2 - \sqrt{5})$$

$$23) (9 - 7\sqrt{13}) (5 - 6\sqrt{13})$$

$$24) (13 - \sqrt{5}) (7 + 3\sqrt{5})$$

$$25) (\sqrt{2} + \sqrt{3}) (2\sqrt{2} - \sqrt{3})$$

$$26) (7\sqrt{6} + \sqrt{3}) (\sqrt{5} + \sqrt{6})$$

$$27) (3\sqrt{8} + 3\sqrt{5} - 7\sqrt{2}) (\sqrt{72} - 5\sqrt{20} - 2\sqrt{2})$$

$$28) (\sqrt{a} + \sqrt{b}) (\sqrt{a} - \sqrt{b})$$

$$29) (ca^{1/2} + db^{1/2}) (ca^{1/2} - db^{1/2})$$

$$30) (a^{1/2} + cb^{1/3}) (a^{1/2} - cb^{1/3})$$

$$31) (2\sqrt{3} + \sqrt[3]{2}) (2 + \sqrt[3]{9})$$

$$32) (5 + \sqrt[3]{4} - 2\sqrt[4]{5}) (\sqrt{6} + \sqrt{5})$$

$$33) (1^{1/3}\sqrt{3} - 4\sqrt[3]{9}) \cdot (2^{1/4}\sqrt{3} + 3\sqrt[3]{9})$$

$$34) (3\sqrt{2} - 9\sqrt[3]{4}) \cdot (4^{1/2}\sqrt{2} + 5\sqrt[3]{4})$$

- 35) $(2\sqrt{3} + \sqrt[3]{4}) \cdot (4\sqrt[3]{9} - 2\sqrt{6})$.
- 36) $(2\sqrt{3} + \sqrt[3]{2}) \cdot (2\sqrt{3} - \sqrt[3]{4})$.
- 37) $(\sqrt{2} - 3\sqrt[3]{4}) \cdot (\sqrt[3]{4^2} + \sqrt{2})$.
- 38) $(\sqrt{3} - 5\sqrt[3]{6}) \cdot (\sqrt[3]{9^2} - 2\sqrt{27})$.
- 39) $(\sqrt[3]{10} \sqrt[4]{25^3} - 4\sqrt[3]{(3/16)^2}) \cdot (\sqrt[4]{5} \sqrt{5} - 8\sqrt[3]{(9/4)^4})$.
- 40) $\sqrt[4]{(5 + 2\sqrt{6})} \cdot \sqrt{(3 + \sqrt{6})}$.
- 41) $\sqrt[3]{(2 - 3\sqrt{3})} \cdot \sqrt{(1 + \sqrt{3})}$.
- 42) $\frac{x^3}{2y^3} \sqrt{\frac{3b^3}{2c}} \cdot \frac{4y}{x} \sqrt[3]{\frac{4c^4}{9b^3}}$.
- 43) $\frac{x+1}{x-2} \sqrt[3]{\frac{4a}{3c}} \cdot \frac{x^2-4}{x^2-1} \sqrt{\frac{3c}{2a}}$.
- 44) $\frac{3x^2-27}{x+4} \sqrt{\frac{5a}{3x}} \cdot \frac{2x+8}{x+3} \sqrt[3]{\frac{2x}{5a}}$.
- 45) $(\frac{3a^3}{8b^2})^{1/4} \cdot \frac{b}{a} (\frac{a}{2b})^{1/2}$.
- 46) $5a(6 + 3\sqrt{5})^{1/2} \cdot 2a(5 - \sqrt{5})^{1/2}$.
- 47) $(16 - 3\sqrt{7})^{1/2} \cdot 2(5 + 2\sqrt{7})^{1/2}$.
- 48) $6\sqrt{(7 + 4\sqrt{2})} \cdot \frac{1}{9}\sqrt{(7 - 4\sqrt{2})}$.
- 49) $\frac{9a}{5b} \sqrt{(5 + 2\sqrt{3})} \cdot \frac{b^2}{6a^2} \sqrt{(8 + 3\sqrt{3})}$.
- 50) $\frac{3x^2}{y} (11 - 3\sqrt{2})^{1/2} \cdot \frac{y^2}{9x} (8 + 3\sqrt{2})^{1/2}$.
- 51) $(4a^2 - b^2) \sqrt{9a^2 - b^2} \cdot \frac{a}{2a+b} \sqrt{3a^2 + ab}$.
- 52) $(25a^2 - 16b^2)^{1/2} \cdot \frac{a^2(10ab - 8b^2)^{1/2}}{25a^2 - 40ab + 16b^2}$.
- 53) $(\frac{x^2 - y^2}{x^2 - 9y^2}) \cdot (x^2 - 6xy + 9y^2)^{1/3} \cdot (x + 3y) \cdot (x^2 - 3xy)^{1/3}$.

$$54) \frac{a^2 - 25m^2}{4a^2 - 9m^2} \sqrt[3]{\frac{4a^2 - 12am + 9m^2}{a^2 + 10am + 25m^2}}$$

$$\sqrt[3]{\frac{4a^2 - 12am + 9m^2}{a^2 + 5am}}$$

$$55) \frac{a^2 - 4ay + 4y^2}{a^3 - 27y^3} \sqrt{\frac{a^3 + 3a^2y + 9ay^2}{ay - 2y^2}}$$

$$\times \frac{a - 3y}{a - 2y} \sqrt{\frac{a^2y + 3ay^2 + 9y^3}{a^2 - 2ay}}$$

$$56) \left(\frac{9a^2 - 30ab + 25b^2}{a^4 - 81b^4} \right) \left(\frac{a^2 - 3ab}{9a^2 - 25b^2} \right)^{1/2}$$

$$\times \left(\frac{a^3 + 3a^2b + 9ab^2 + 27b^3}{3ab - 5b^2} \right) \left(\frac{a^2 - 9b^2}{3ab - 5b^2} \right)^{1/2}$$

$$57) b \sqrt[5]{(8b^3 - 12b^2y + 6by^2 - y^3)} \cdot \sqrt[5]{(4b^3 - 4b^2y + by^2)}$$

$$58) \frac{x^3 - 8z^3}{\sqrt{(x^3 + 2x^2z + 4xz^2)}} \cdot \frac{x^2}{x - 2z} \sqrt{\frac{xz}{x^2 + 2xz + 4z^2}}$$

$$59) \frac{2m^3}{3n^4} \left(\frac{x+1}{x-2} \right)^{1/2} \cdot \frac{3n^3}{5m^4} \left(\frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 + 2x + 1} \right)^{1/3}$$

$$60) \frac{4a^2 - b^2}{a^3 + b^3} \sqrt{(a^2 + 2b\sqrt{a^2 - b^2})} \cdot \frac{a^2 - ab + b^2}{4a^2 + 4ab + b^2}$$

$$\times \sqrt{(a^2 - 2b\sqrt{a^2 - b^2})}$$

$$61) \sqrt{-m} \cdot \sqrt{-3n} \cdot \sqrt{-5n}$$

$$62) \sqrt{-2x} \cdot \sqrt{5x} \cdot \sqrt{-x}$$

$$63) \sqrt{-5b} \cdot \sqrt{-2c} \cdot \sqrt{-2a}$$

$$64) \sqrt{-n} \cdot \sqrt{-m} \cdot \sqrt{-b} \cdot \sqrt{-c}$$

$$65) \sqrt{(a+3b)} \cdot 2\sqrt{-a-3b} \cdot \sqrt{-c}$$

$$66) a \left(\frac{a^2 - 2b^2}{4a^2 + b^2} \right)^{1/2} \cdot \left(\frac{-a^2 + 2b^2}{4a^2 + b^2} \right)^{1/2} \cdot (-a^2 - b^2)^{1/2}$$

$$67) \frac{a^2}{b} (a - 2b)^{1/2} \cdot \frac{3b}{a} \left(\frac{2b - a}{a} \right)^{1/2}$$

$$68) \frac{x^2}{y} \sqrt{(-x^2 + 6xy - 9y^2)} \cdot \frac{\sqrt{x}}{x - 3y}$$

$$69) \frac{\sqrt{(-z^2 + 10yz - 25y^2)}}{z + 2y} \cdot \frac{\sqrt{(-z^2 - 4yz - 4y^2)}}{2z}$$

$$70) \frac{\sqrt{(-x^2 + 12xy - 36y^2)}}{2x - 5y} \cdot \frac{\sqrt{(-4x^2 + 20xy - 25y^2)}}{x^2 - 6xy}$$

§ 24. Wurzeln zu dividiren.

1) Wie werden zwei Wurzeln mit gleichen Zahlen und ungleichen Wurzelexponenten durch einander dividirt? a) $20a^{1/2} : 4a^{1/3}$; b) $0,34\sqrt[3]{a} : 1,5\sqrt{a}$; c) $3b^{1/n} : 5b^{1/m}$; d) $4ax^{2/3} : 5ax^{3/5}$.

2) Wie werden zwei Wurzeln mit ungleichen Radicanden und gleichen Wurzelexponenten durch einander dividirt? a) $a^{1/2} : b^{1/2}$; b) $b\sqrt[3]{81a^2} : \sqrt[3]{3a}$; c) $5a^{2/3}b^{1/4} : 7x^{2/3}y^{1/4}$.

3) Wie werden zwei Wurzeln mit gleichen Radicanden und gleichen Wurzelexponenten durch einander dividirt? a) $6ax^{1/2} : 14bx^{1/2}$; b) $24a^2\sqrt[n]{x} : 8a\sqrt[n]{x}$.

4) Wie werden zwei Wurzeln mit ungleichen Radicanden und ungleichen Wurzelexponenten durch einander dividirt? a) $18a^{1/n} : 3b^{1/m}$.

$$5) \frac{15\sqrt{12}}{3\sqrt{3}}$$

$$6) \frac{2ab^2c^3}{4\sqrt[3]{a^3bc^5d}}$$

$$7) \left(\frac{fg^2}{dx^5}\right)^{\frac{1}{n}} : \left(\frac{fg}{dx}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$8) ca^{3/4} : da^{5/6}$$

$$9) \frac{a^{3/5}b^{1/2}}{a^{-1/6}b^{-1/4}c}$$

$$10) a^{-5/6} : a^{-3/4}$$

$$11) a^{-5/6} : a^{3/4}$$

$$12) a^{5/6} : a^{-3/4}$$

$$13) (\sqrt{72} + \sqrt{32} - 4) : \sqrt{8}$$

$$14) (2\sqrt{32} + 3\sqrt{2} + 4) : 4\sqrt{8}$$

$$15) (a^{3/4} - b^{3/4}) : (a^{1/4} - b^{1/4})$$

$$16) (15a^{4/3}b - 14a^{3/2}b^{1/2} - 16a^{5/3}) : (3a^{1/2}b^{3/4} + 2a^{2/3}b^{1/4})$$

$$17) 2a^{1/4}b^{3/2} + 4ab \mid 6a^{3/2}b^2 + 2a^{9/4}b^{3/2} - 8a^3b + 24a^{15/4}b^{1/2} \mid =$$

$$18) (4x^{4/3} - 9y^{1/2}) : (2x^{2/3} - 3y^{1/4})$$

$$19) 4a^{3/4}b + 5a^{5/4}b^{2/3} \mid 20a^{17/12}b^{1/2} - 7a^{23/12}b^{1/6} \\ + 50a^{35/12}b^{-1/2} \mid =$$

20) Wie schafft man in einem Quotienten den Wurzelexponenten aus dem Divisor fort.

Ex lib. univ. Tart.

$$21) a) \frac{5\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}; b) \frac{1}{3\sqrt{5}}$$

$$22) a) \frac{a}{\sqrt{a}}; b) \frac{3a^2}{bc^{1/2}}$$

$$23) a) \frac{5m^3}{n(c+3)^{1/2}}; b) \frac{3x^2}{5(2x)^{1/3}}$$

$$24) a) \frac{2x^2y^{1/2}}{5(2y)^{1/3}}; b) \frac{6xy}{7\sqrt[4]{2x}}$$

$$25) a) \frac{5x\sqrt{2c}}{3y\sqrt{2m}}; b) \frac{3y\sqrt{5x}}{2\sqrt[4]{2x}}$$

$$26) \frac{1}{2-\sqrt{3}}$$

$$27) \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{5}-3\sqrt{2}}$$

$$28) \frac{1/2\sqrt{1/2}}{\sqrt{2}+3\sqrt{1/2}}$$

$$29) \frac{3}{1+\sqrt{2}}$$

$$30) \frac{12}{5-\sqrt{21}}$$

$$31) \frac{7}{\sqrt{8}-2}$$

$$32) \frac{3\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{2\sqrt{5}-\sqrt{18}}$$

$$33) \frac{1+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$$

$$34) \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$$

$$35) \frac{3/4\sqrt[3]{5/6}}{\sqrt{1/2}-2}$$

$$36) \frac{5-7\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$$

$$37) \frac{6-3\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}$$

$$38) \frac{5+2\sqrt{3}}{8-2\sqrt{3}}$$

$$39) \frac{6+2\sqrt{5}}{6-2\sqrt{5}}$$

$$40) \frac{16-3\sqrt{2}}{11+2\sqrt{2}}$$

$$41) \frac{8}{5-2\sqrt{3}}$$

$$42) \frac{9+\sqrt{8}}{10-3\sqrt{8}}$$

$$43) \frac{4ab-c\sqrt{bc}}{3a+5\sqrt{bc}}$$

$$44) \frac{2a-3\sqrt{ac}}{3c-2\sqrt{ac}}$$

$$45) \frac{3a^2-2a\sqrt{ab}}{3a+2\sqrt{ab}}$$

$$46) \frac{\sqrt{31}}{\sqrt{10-2\sqrt{3}}}$$

$$47) \frac{7}{\sqrt{4+\sqrt{3}}}$$

$$48) \frac{\sqrt{2m+3n}}{\sqrt{2m-3n}}$$

$$49) \frac{8\sqrt{5}}{(7+2\sqrt{5})^{1/2}}$$

$$50) \left(\frac{13}{10-5\sqrt{3}}\right)^{1/2}$$

$$51) \frac{\sqrt{a^2 + \sqrt{a^4 - b^4}}}{\sqrt{a^2 - \sqrt{a^4 - b^4}}}$$

$$52) \frac{\sqrt{m^2 - \sqrt{m^4 - n^4}}}{\sqrt{m^2 + \sqrt{m^4 - n^4}}}$$

$$53) \frac{2 - 4\sqrt[3]{25}}{3 + 2\sqrt[3]{5}}$$

$$54) \frac{17\sqrt[3]{4}}{2\sqrt[3]{4+5}\sqrt[3]{6}}$$

$$55) \frac{-4\sqrt{5}}{1-3\sqrt[4]{5}}$$

$$56) \frac{53 \cdot 2^{1/2}}{3 \cdot 2^{1/4} + 3^{1/4}}$$

$$57) \frac{2 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$$

$$58) \frac{3 + 4\sqrt{3}}{\sqrt{6 + \sqrt{2 - \sqrt{5}}}}$$

$$59) \frac{1}{\sqrt{2 + \sqrt{3 - \sqrt{5}}}}$$

$$60) \frac{7}{\sqrt{10 - \sqrt{2 - \sqrt{3}}}}$$

$$61) [(a^2 - b^2)\sqrt{a^2 - 25b^2}] : [(a + b)\sqrt{a^2 + 5ab}]$$

$$62) (x^3 - 20x^2y + 100xy^2)^{1/3} : \frac{x+y}{x-y} (x^2 - 10xy)^{1/3}$$

$$63) \left[\left(\frac{a^3 - 125b^3}{a^2 - 9b^2} \right) \sqrt{\frac{a^2 - 3ab}{a^2 + 5ab + 25b^2}} \right]$$

$$: \left[\left(\frac{a-5b}{a+3b} \right) \sqrt{\frac{a^2b + 5ab^2 + 25b^3}{a-3b}} \right]$$

$$64) \frac{n^3}{3m^3} \sqrt[3]{\frac{5b^2}{3c^2}} : \frac{n}{3m} \sqrt{\frac{b^2}{c^3}}$$

$$65) \frac{3a^3}{b} \sqrt{\frac{3a}{5}} : \frac{2a}{5b} \sqrt[3]{\frac{a}{3}}$$

$$66) \frac{m^4}{3n^4} \sqrt[4]{\frac{5x-4}{y}} : \frac{m}{3} \sqrt{\frac{10x-8}{y}}$$

$$67) (x+3) \sqrt[3]{\frac{5x}{4z}} : \frac{x+4}{x-3} \sqrt{\frac{3y}{2z}}$$

$$68) \sqrt{-2a} : \sqrt{-3a} \cdot \sqrt{-b}$$

$$69) \sqrt{a} \cdot \sqrt{-b} : \sqrt{-2d}$$

70) $\sqrt{-3a} \cdot 5\sqrt{b} : \sqrt{-2a}$.

71) $\sqrt{-5} : \sqrt{-3x} \cdot \sqrt{-2x}$.

72) $\left(\frac{a^2 - x^2}{x}\right)^{1/2} : \left(\frac{x^2 - a^2}{a}\right)^{1/2}$.

73) $(a^2 - b^2) (-a^4 + 10a^2b^2 - 25b^4)^{1/2} : (a^4 - 25b^4) (-a^4 + 2a^2b^2 - b^4)^{1/2}$.

§ 25. Wurzeln zu potenziren.

1) Wie potenzirt man Wurzeln? a) $(a^{1/2})^5$; b) $\left(-a^{1/p}\right)^{2n}$;

c) $\left(-a^{3/4}\right)^2$.

2) Wie den Unterschied zwischen $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}$ und $(\sqrt{a})^2$ an?3) Zu welcher Potenz muß $\sqrt{-1}$ erhoben werden, damit man erhält: a) $+1$; b) $+\sqrt{-1}$; c) -1 und d) $-\sqrt{-1}$?

4) $(3\sqrt[3]{2})^2$.

5) $(3\sqrt{2})^2$.

6) $(3^{1/2} + 2^{1/2})^2$.

7) $(2\sqrt{a} + 3\sqrt{b})^2$.

8) $(3\sqrt{2} - 5\sqrt{5})^2$.

9) $(3\sqrt{2} + 4\sqrt{3})^3$.

10) $(-1/2 x^{1/6})^{-3}$.

11) $(2/3 x^{-5/12})^{-4}$.

12) $\left(\frac{-5z^{1/4}}{3x^{1/2}y^{2/3}}\right)^{-2}$.

13) $(-2b^{1/3}c^{5/3})^{-6}$.

14) $(5a^2\sqrt[3]{-3b^2})^6$.

15) $\left(\frac{-2a^2\sqrt{2a}}{x}\right)^4$.

16) $\left[2x^2\left(\frac{b}{2x}\right)^{1/2}\right]^3$.

17) $\left[\frac{-6m^2}{n^2}\left(\frac{5b^2}{3m^2}\right)^{1/3}\right]^4$.

18) $\left[\frac{5x^2}{3y^2}\left(\frac{3y}{10x}\right)^{1/2}\right]^5$.

19) $(-3/4 y^{3/5})^{-3}$.

20) $\left(\sqrt[5]{\frac{32a^2b^{2/3}}{ab}}\right)^6$.

21) $(\sqrt{3} - 2\sqrt[3]{2})^3$.

22) $(3 - 1/2\sqrt{2})^3$.

23) $(4a^{-3}\sqrt{2a} - 3/4ab\sqrt[3]{16a^2})^2$.

24) a) $(\sqrt{-3})^5$ b) $(\sqrt{-10})^{-3}$.

- 25) a) $(\sqrt{-6})^4$; b) $(\sqrt{-5})^7$. | 29) $(\sqrt{5} + 2\sqrt{-2})^2$.
- 26) a) $(\sqrt[4]{-3})^8$; b) $[(-5)^{1/6}]^7$. | 30) $(3 - 2\sqrt{-1})^3$.
- 27) $[(-2)^{1/2}]^{-7}$. | 31) $(5 - 2\sqrt{-2})^3$.
- 28) $(\sqrt{-3} + \sqrt{-2})^2$. | 32) $(3\sqrt{10} - 2\sqrt{-10})^3$.
- 33) $[\sqrt{\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}} - \sqrt{\sqrt{a+b} - \sqrt{a-b}}]^2$.
- 34) $(\sqrt{\sqrt{2x+y} + \sqrt{2x-y}} + \sqrt{\sqrt{2x+y} - \sqrt{2x-y}})^2$.
- 35) $(\sqrt{\sqrt{-13} - 2\sqrt{-3}} - \sqrt{\sqrt{13} + 2\sqrt{-3}})^2$.
- 36) $(\sqrt{\sqrt{-3} + \sqrt{-1}} + \sqrt{\sqrt{-3} - \sqrt{-1}})^2$.
- 37) $(\sqrt{a^2 + a\sqrt{a^2 - b^2}} - \sqrt{a^2 - a\sqrt{a^2 - b^2}})^2$.
- 38) $(\sqrt{4x^4 - 2x^2\sqrt{4x^4 - y^4}} + \sqrt{4x^4 + 2x^2\sqrt{4x^4 - y^4}})^2$.

§ 26. Wurzeln zu extrahieren.

- 1) Wie extrahirt man eine Wurzel? a) $(x^{1/2})^{1/3}$; b) $(6a^{1/n})^{1/3}$;
- c) $(75a^{1/n})^{1/2}$.
- 2) $(\frac{9x^{4/3}}{16y^{2/3}})^{3/2}$.
- 3) $(\frac{25x^{4/5}}{9y^{2/3}})^{-3/2}$.
- 4) $(\frac{-64b^{3/2}m^{6/5}}{27z^{9/2}})^{-5/3}$.
- 5) $(\frac{25x^{3/4}y^{1/4}}{9z^{1/2}})^{-3/2}$.
- 6) $(\frac{-32x\sqrt{x^2}}{y^3\sqrt[3]{y}})^{6/5}$.
- 7) $\sqrt[12]{4096}$.
- 8) $(\frac{16b^{2/5}}{x^{1/5}})^{-5/4}$.
- 9) $(-32b^{10/3}c^{4/3}m^{-5/2})^{3/5}$.
- 10) $(\frac{-b^6\sqrt{64a^3}}{a^{-3}x^9})^{-2/3}$.
- 11) $(\frac{x^3a^{-2}}{x^9\sqrt[4]{81^3a^6}})^{-2/3}$.
- 12) $(\frac{25b^{8/5}c^{2/3}}{36m^{4/5}})^{-3/2}$.
- 13) $(\frac{64x^{4/3}y^{2/5}}{81z^{8/3}})^{-3/2}$.
- 14) $(\frac{-125x^{9/4}y^{3/4}}{27z^{1/2}})^{-2/3}$.
- 15) $(\frac{-m^{3/2}x^{9/2}}{8z^{3/2}})^{-2/3}$.

- | | |
|--|--|
| 16) Wie zieht man die zweite Wurzel aus der Form $a \pm \sqrt{b}$? Desgleichen aus $a \pm b\sqrt{-1}$? | 24) $\sqrt{114 - 80\sqrt{2}}$. |
| 17) $\sqrt{12 + 8\sqrt{2}}$. | 25) $(39 + 12\sqrt{3})^{1/2}$. |
| 18) $\sqrt{9 - \sqrt{17}}$. | 26) $(369 - 136\sqrt{5})^{1/2}$. |
| 19) $\sqrt{2 + \sqrt{3}}$. | 27) $\sqrt{109 - 36\sqrt{7}}$. |
| 20) $\sqrt{18 + 8\sqrt{2}}$. | 28) $\sqrt{106 + 20\sqrt{6}}$. |
| 21) $\sqrt{43 - 15\sqrt{8}}$. | 29) $\sqrt{2a + 3b + 2\sqrt{6ab}}$. |
| 22) $\sqrt[3]{2} + \sqrt{2}$. | 30) $\sqrt{10x^4 + x^2y^2 + 6x^3\sqrt{x^2 + y^2}}$. |
| 23) $\sqrt{37 + 20\sqrt{3}}$. | 31) $(89 + 104\sqrt{-5})^{1/2}$. |
| | 32) $(-83 - 112\sqrt{-3})^{1/2}$. |
| | 33) $\sqrt{90a^2\sqrt{-7 - 542a^2}}$. |

§ 27. VII. Exponiren (Logarithmiren).

1) Was heißt logarithmiren? Wie und aus welcher Rechnungsart leitet man das Logarithmiren her? Was heißt Numerus, Basis, Logarithmus? Wie könnte man das Logarithmiren auch noch nennen?

2) Welche Formel wird der Logarithmus von y haben, wenn x die Basis, n der Exponent und y die Potenz ist? Ist a) $x = 10$, $y = 1000$; b) $x = 2$, $y = 32$; c) $x = 5$, $y = 25$; d) $x = 8$, $y = 2$; e) $x = 81$, $y = 3$; so ist der Logarithmus von y von der Basis x , wie groß?

3) Kann man von einer benannten Zahl den Logarithmus nehmen? Kann der Logarithmus oder die Basis eine benannte Zahl sein?

4) Was versteht man unter einem Logarithmensystem? Kann man die Basis bei der Formel des Logarithmus weglassen? a) Für die Grundzahl 9 ist: log. 1; log. 3; log. 9; log. 27; log. 81; log. 243 — wie groß? b) Für die Grundzahl 16 ist: log. 1; log. 2; log. 4; log. 8; log. 16; log. 32; log. 64; log. 128 — wie groß?

5) Kann jede Zahl zur Basis genommen werden? Warum nicht? Welche Zahlen nimmt man zur Basis?

6) Der Logarithmus von 1 ist für jede Grundzahl — wie groß? Der Logarithmus der Grundzahl selbst ist — wie groß?

7) Der Logarithmus eines Produkts ist gleich —? Die Summe der Logarithmen mehrerer Zahlen ist gleich dem Logarithmus welcher Zahl? Wie groß wird a) $\log. 360$; b) $\log. 108$ sein, wenn a) $\log. 15 = 1,1760913$ und $\log. 24 = 1,3802112$; b) $\log. 9 = 1,5$ und $\log. 12 = 1,9$ ist?

8) Der Logarithmus eines Quotienten ist gleich —? Die Differenz der Logarithmen zweier Zahlen ist gleich dem Logarithmus welcher Zahl? Wie groß ist $\log. 12$, wenn $\log. 24 = 1,3802112$ und $\log. 2 = 0,30103$ ist? Wie groß und dem Logarithmus welcher Zahl gleich ist die Differenz von $\log. 35 = 1,544068$ und $\log. 5 = 0,69897$? Die Logarithmen der achten Brüche haben welches Vorzeichen? a) $\log. \frac{1}{8} = -\log.$ welcher Zahl? b) $-\log. \frac{9}{8} = \log.$ welcher Zahl? c) $\log. \frac{1}{9} = -\log.$ welcher Zahl? d) $-\log. 5 = \log.$ welcher Zahl? e) $-\log. a = \log.$ welcher Zahl?

9) Der Logarithmus einer Potenz ist gleich —? Das Produkt einer Zahl mit dem Logarithmus einer andern Zahl ist gleich dem Logarithmus welcher Zahl? a) $m \log. a = \log.$ welcher Zahl? b) Es sei $m = 3$, $a = 2$ und $\log. 2 = 0,30103$, so ist $\alpha) \log. 8$ und $\beta) \log. \frac{1}{8}$ wie groß? c) Es sei $m = 2$, $a = 11$ und $\log. 11 = 1,0413927$, so ist das Produkt $\pm 2,0827854 = \log.$ welcher Zahl? d) $m = 3$, $a = 5$ und $\log. 5 = 0,69897$, so ist das Produkt $\pm 2,09691 = \log.$ welcher Zahl?

10) Der Logarithmus einer Wurzel ist gleich —? Wenn der Logarithmus einer Zahl durch eine andere Zahl dividirt wird, so ist der Quotient gleich dem Logarithmus welcher Zahl? $\frac{\log. a}{m} = \log.$ welcher Zahl? Es sei a) $m = 3$, $a = 64$ und $\log. 64 = 1,80618$, so ist $\alpha) \log. 4$ und $\beta) \log. \frac{1}{4}$ wie groß? b) $m = 2$, $a = 169$ und $\log. 169 = 2,2278867$, so ist der Quotient $\pm 1,1139434 = \log.$ welcher Zahl? c) $m = 3$, $a = 1728$ und $\log. 1728 = 3,2375437$, so ist der Quotient $\pm 1,0791812 = \log.$ welcher Zahl?

11) Wenn man die Logarithmen eines Systems hat, wie berechnet man die Logarithmen anderer Systeme? Was bedeutet der Ausdruck „Modulus“?

12) Wie berechnet man die Logarithmen aller positiven ganzen Zahlen für die Basis a ?

13) Welche Logarithmen sind die gemeinen? Wie heißen sie auch noch? Welche Logarithmen sind natürliche?

14) Wie groß sind, für die Basis 10, folgende Werthe? $\log. 1$; $\log. 10$; $\log. 100$; $\log. 1000$; $\log. \frac{1}{10}$; $\log. \frac{1}{100}$; $\log. 10^n$; $\log. 10^{n+1}$; $\log. \frac{1}{10^n}$; $\log. \frac{1}{10^{2n}}$.

15) Was versteht man unter der Charakteristik —? was unter der Mantisse eines Logarithmen? Findet man die Charakteristik oder die Mantisse der Logarithmen in den Tafeln? Welche Zahlen stehen nicht in den Tafeln und müssen daher hinzugefügt werden? Nach welchem Gesetze muß das geschehen?

16) Nur für welche Zahlen braucht man die Logarithmen zu berechnen? Für welche kann man sie aus diesen ersteren leicht bestimmen? Wenn z. B. $\log. 2 = 0,3010300$, $\log. 3 = 0,4771213$, $\log. 5 = 0,6989700$ und $\log. 7 = 0,8450980$ berechnet worden sind, — die Logarithmen welcher Zahlen sind mir hiermit zugleich noch gegeben?

17) Gebrauch der Tafeln a) $\log. 28$, b) $\log. 280$.

18) a) $\log. 1079$, b) $\log. 10790$.

19) a) $\log. 2984$, b) $\log. 298400$.

20) a) $\log. 1273$, b) $\log. 1273000$.

21) Was bedeutet in den Tafeln ein Sternchen oder ein Strich bei den Logarithmen? a) $\log. 11562$, b) $\log. 1156200$.

22) $\log. 14899$.

23) $\log. 21828$.

24) $\log. 42547$.

25) $\log. 50935$.

26) $\log. 78705$.

27) Wie groß ist x ?

$\log. x = 1,4623980$.

28) $\log. x = 2,6946052$.

29) $\log. x = 3,1752218$.

30) $\log. x = 3,2415465$.

31) $\log. x = 4,3596458$.

32) $\log. x = 4,4288634$.

33) $\log. x = 4,5263134$.

34) num. $\log. 4,5757304$.

35) num. $\log. 4,6309260$.

36) num. $\log. 4,7460033$.

37) $\log. x = 4,8180146$.

38) $\log. x = 4,9570083$.

39) $\log. x = 4,9856330$.

40) $\log. x = 4,7430156$.

41) $\log. 102743$.

42) $\log. 107826$.

- 43) log. 640023.
 44) log. 2382863.
 45) log. 348067.
 46) log. 4867321.
 47) log. 5900469.
 48) log. 6342067.
 49) log. 7834208.
 50) log. 8321507.
 51) log. $x = 7,9431679$.
 52) log. $x = 8,9230107$.
 53) log. $x = 6,7430313$.
 54) num. log. 8,00646176.
 55) log. $x = 6,6005137$.
 56) log. 826,4.
 57) log. 5,3826.
 58) log. 539,58.
 59) log. 77,984.
 60) log. 10114,4.
 61) log. $x = 2,9486281$.
 62) log. $x = 3,8564147$.
 63) num. log. 1,8014312.
 64) num. log. 2,9585925.
 65) num. log. 0,9405563.
 66) num. log. 0,3470762.
 67) num. log. 4,0092681.
 68) log. 0,05673.
 69) log. 0,0010567.
 70) log. 0,50096.
 71) log. 0,0093426.
 72) log. 0,093978.
 73) log. 0,000038909.
 74) log. $x = 0,5880139 - 2$.
- 75) log. $x = 0,2950390 - 3$.
 76) log. $x = 0,1250256 - 4$.
 77) num. log. 0,0546131 - 3.
 78) num. log. 0,0689647 - 2.
 79) num. log. 0,0770771 - 1.
 80) log. 7089,27.
 81) log. 42,3879.
 82) log. 42957,4.
 83) log. 0,234005.
 84) log. 4,677755.
 85) log. 3,00007.
 86) log. 0,00304578.
 87) log. 30,90007.
 88) log. $x = 5,7038510$.
 89) log. $x = 4,7325379$.
 90) log. $x = 0,4732078$.
 91) num. log. 2,0567391.
 92) num. log. 0,3998732 - 1.
 93) log. $x = 0,4131057 - 2$.
 94) log. $x = 0,9870089 - 4$.
 95) log. - 56,338.
 96) - log. 6738,2.
 97) log. - 7384,73.
 98) - log. 7890,42.
 99) log. - 8499,999.
 100) - log. 9000,56.
 101) log. $x = - 4,6789206$.
 102) log. $x = 4,6789206$ n.
 103) log. $x = - 1,8909156$.
 104) log. $x = 1,8909156$ n.
 105) log. - 563,2087.
 106) log. $\frac{1}{563,2087}$.

§ 28. Aufgaben mit Logarithmen zu berechnen.

- 1) $\log. \frac{abc}{df}$
- 2) $\log. a^m b^n$
- 3) $\log. \frac{a^m b^{-n}}{c^p}$
- 4) $\log. a^{\frac{n}{p}} b^{\frac{n}{n+1}}$
- 5) $\log. \sqrt[n]{\frac{2^m b^q}{c^q}}$
- 6) $\log. \frac{a^{\frac{n}{p}} \sqrt{c^m}}{b \sqrt{d}}$
- 7) Ist $\log. (a + b) = \log. a + \log. b$ richtig? Warum nicht?
 $\log. ab (c + d)$?
- 8) $\log. \frac{(a + b)^n c^m}{(c + d) \sqrt{d^3}}$
- 9) $\log. \left(\frac{1}{a + b^n} \right)^m$
- 10) $\log. \sqrt[m]{a^2 - x^2}$
- 11) $\frac{43190 \cdot 7650}{21381}$
- 12) $53,726 \cdot 5,9378$
- 13) $\frac{7385,6}{473,75}$
- 14) $\frac{34,2 \cdot 98,5}{137,6}$
- 15) $\frac{67384,5 \cdot 9034,27 \cdot 4374}{2396,7 \cdot 1047,39}$
- 16) $\frac{32,0476 \cdot 145,357}{25678 \cdot 0,357891}$
- 17) $\frac{4700 \cdot 0,653 \cdot 12^{5/6}}{3576 \cdot 1520}$
- 18) $\left(\frac{15}{13} \right)^{16}$
- 19) $\left(\frac{3}{4} \right)^{30}$
- 20) $(0,0534)^3 \cdot \left(\frac{32768}{3875} \right)^{10}$
- 21) $\frac{17^4 \cdot 12^3}{302^2}$
- 22) $\frac{1}{3,842^5 \cdot 0,05^6}$
- 23) $0,627839^{-0,12} \cdot 9,012^{0,06}$
- 24) $\frac{785,8 \cdot 85,06^2}{5,089 \cdot 368,4 \cdot 78,96}$
- 25) $\frac{28,086 \cdot 7,86^3}{1518^{3/4} \cdot 0,79854 \cdot 40,082}$
- 26) $\left(\frac{234 \frac{1}{9}}{0,5867} \right)^5 \cdot \left(\frac{2,334^4}{2163^{4/5}} \right)^{-6}$
- 27) $\frac{991,767^5 \cdot 12,34}{(20,358 \cdot 10,1575)^6}$
- 28) $\sqrt[3]{135}$
- 29) $\sqrt[10]{398,4}$
- 30) $\sqrt[4]{\frac{728 \cdot 5930}{2,48}}$
- 31) $(0,572)^{1/3}$
- 32) $\sqrt[100]{13}$
- 33) $\sqrt[5]{35107}$
- 34) $\sqrt[16]{\frac{3587}{20593}}$
- 35) $\sqrt[35]{\frac{803}{91056}}$
- 36) $\sqrt[17]{954^{12}}$
- 37) $\sqrt[11]{\left(\frac{12}{7} \right)^{28}}$

- 38) $\sqrt[13]{\left(\frac{547}{935}\right)^{207}}$
- 39) $\sqrt[80]{0,00534}$
- 40) $\sqrt[540]{0,00007}$
- 41) $\sqrt[12]{0,34576^7}$
- 42) $\sqrt[32]{356,27^{11}}$
- 43) $\sqrt[4]{35246}$
- 44) $\sqrt[12]{567348}$
- 45) $\sqrt[6]{235,78}$
- 46) $\left(\frac{13}{16}\right)^{1/5}$
- 47) $\sqrt[9]{1350^{7/8}}$
- 48) $(317^{3/4})^{0,6}$
- 49) $\left(\frac{167}{53}\right)^{0,92}$
- 50) $\left(\frac{5}{7}\right)^{0,0537}$
- 51) $\sqrt[6]{\left(\frac{16}{17}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{20}\right)^9}$
- 52) $\sqrt[5]{2^{1/3} \sqrt[4]{6}}$
- 53) $\sqrt[5]{\frac{0,365 \sqrt{2}}{788}}$
- 54) $\sqrt[10]{\frac{78563 \sqrt[3]{5/3}}{15 \sqrt[4]{0,2}}}$
- 55) $\left[2 \sqrt[5]{\frac{0,2 \sqrt[4]{6}}{3 \sqrt[3]{0,3}}}\right]^2$
- 56) $\frac{52072^{13} \cdot 0,000734^{9/2}}{255608^8}$
- 57) $\sqrt[5]{7/3 \cdot 6^{1/4}}$
- 58) $\sqrt[3]{0,26 \sqrt[2/3]{}}$
- 59) $\left[\frac{347 \sqrt[7]{0,0073}}{126(4/9)^{1/3}}\right]^{1/9}$
- 60) $\sqrt[13]{\frac{78563 \sqrt[3]{5/3}}{15 \sqrt[4]{0,2}}}$
- 61) $\sqrt[5]{\frac{3425 \sqrt[7]{136}}{0,00034}}$
- 62) $253 \sqrt[3]{\frac{716,5}{\sqrt{2}}}$
- 63) $\left[\frac{132 \cdot (7,356)^9}{(3,25)^{5/2}}\right]^{1/4}$
- 64) $\frac{\sqrt[6]{23,476} \cdot \sqrt[3]{0,213^7}}{(4,0296)^5 \cdot \sqrt[4]{3456^{1/4}}}$
- 65) $\sqrt[7]{\frac{466871^6 \cdot \sqrt[9]{3576^{16}}}{996003 \cdot \sqrt{0,0071}}}$
- 66) $\frac{\sqrt[6]{7930,4^5} \cdot \sqrt[3]{-1,7652}}{\sqrt[9]{(3,04 \sqrt[3]{-0,059647})^4}}$
- 67) $\sqrt[3]{503 + \sqrt[5]{0,2}}$
- 68) $(9,921 - 3 \sqrt[5]{0,2})^{1/5}$
- 69) $\sqrt[16]{\frac{43 + 5 \sqrt[3]{278}}{\sqrt[5]{17}}}$
- 70) $\left[\frac{15}{32} - \left(\frac{3}{1144}\right)^{1/5}\right]^{1/15}$
- 71) $(2,459^{6,5} + 8,74^{2,3})^{1/15}$
- 72) $\sqrt[10]{2,1663 - \sqrt[11]{4920,1}}$
- 73) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{9,23476 - \sqrt[4]{0,063808}}}$

§ 29. Verschiedene Aufgaben.

1) $\frac{5}{8}(x+y) + \frac{2}{3}at + \frac{3}{7}\frac{1}{m} + \frac{3}{5}at + \frac{3}{4}(x+y) + \frac{11}{14}\frac{1}{m}$
 $+ \frac{1}{2}(x+y) + \frac{3}{4}\frac{1}{m} + \frac{5}{6}at + \frac{5}{6}(x+y) + \frac{10}{21}at + \frac{3}{7}\frac{1}{m}$. Für $a=5$, $l=14$, $m=2$, $x=40$, $y=8$, $t=7$.

2) $-15gh + 21kn + 5\frac{a}{b} - 10mp - 22gh - 41kn + 15\frac{a}{b}$
 $-mp + 8gh - 12kn + 18\frac{a}{b} - 9mp + 5nq - 20gh + kn - 3\frac{a}{b} + 2mp$
 $- 3nq + 2gh - 3kn + 4\frac{a}{b} - 5mp + 6nq$. Für $g=2$, $h=3$, $k=\frac{1}{2}$,
 $a=2$, $b=2$, $m=4$, $n=2$, $p=5$, $q=\frac{1}{4}$.

3) $\frac{1}{2}ab - \frac{3}{5}de + \frac{3}{7}fg + \frac{5}{8}ab + \frac{4}{5}de - \frac{1}{7}fg + \frac{3}{4}ab$
 $+ \frac{3}{10}de + \frac{9}{14}fg - \frac{1}{4}ab - \frac{1}{15}de - \frac{5}{14}fg$. Für $a=\frac{3}{4}$, $b=4$, $d=\frac{5}{3}$,
 $e=10$, $f=7$, $g=\frac{2}{5}$.

4) $5ab + 127df + 81fgh - 147lmn - (8ab - 98df + 30fgh$
 $- 200lmn)$. Für $a=1$, $b=2$, $d=3$, $f=\frac{3}{5}$, $g=4$, $h=5$, $l=\frac{1}{2}$,
 $m=6$, $n=7$.

5) $\frac{4}{5}(a+b) - \frac{6}{7}bd + \frac{15}{32}xy - [-\frac{3}{8}(a+b) - \frac{3}{14}bd$
 $+ \frac{3}{4}xy]$.

6) $\frac{a^2b^2 + 3d^2c^2}{4a^2b^2 + 12abdc + 9d^2c^2} - \frac{3\frac{2}{3}ab - 5dc}{4ab + 6dc} - \frac{3\frac{1}{2}}{3}$.

7) $\frac{1}{3}\frac{a}{b} + \frac{4}{5}\frac{c}{d} - \frac{2}{3}\frac{x}{y} + \frac{5}{6}\frac{a}{b} - 3\frac{1}{5}\frac{c}{d} + \frac{2}{5}\frac{x}{y} + 3\frac{1}{2}\frac{a}{b}$
 $- 2\frac{3}{10}\frac{c}{d} - \frac{7}{15}\frac{x}{y} - \frac{5}{9}\frac{a}{b} - 5\frac{2}{5}\frac{c}{d} + \frac{3}{5}\frac{x}{y} + \frac{2}{3}\frac{a}{b} + 7\frac{3}{5}\frac{c}{d}$
 $+ 4\frac{1}{3}\frac{x}{y}$. Für $a=3$, $b=22$, $c=4$, $d=55$, $x=10$, $y=77$.

8) $-4\frac{3}{5}(a+b) + 2\frac{3}{4}\frac{c}{d} - \frac{1}{2}\frac{h}{k} + 3\frac{3}{10}(a+b) + 4\frac{1}{2}\frac{c}{d}$
 $+ 3\frac{2}{3}\frac{h}{k} + 1\frac{2}{3}(a+b) - 1\frac{5}{8}\frac{c}{d} - 2\frac{3}{4}\frac{h}{k} + 8\frac{5}{6}(a+b) - 3\frac{3}{8}\frac{c}{d}$
 $- 5\frac{5}{6}\frac{h}{k} + 7\frac{7}{10}(a+b) - 2\frac{1}{2}\frac{c}{d} + 1\frac{1}{12}\frac{h}{k}$. Für $a=2$, $b=8$, $c=2$,
 $d=3$, $h=4$, $k=3$.

9) $3,05(a-b) - 0,007\frac{x}{y} + 4,82\frac{a}{f} + 4,002(a-b) + 2,08\frac{x}{y}$
 $+ 2,3\frac{a}{f} - 5,8(a-b) - 0,53\frac{x}{y} - 0,006\frac{a}{f} - 2,31(a-b) - 8,9\frac{x}{y}$
 $+ 9,0008\frac{a}{f} + 0,05(a-b) + 3,1\frac{x}{y} - 4,01\frac{a}{f}$. Für $a=3$, $b=1$,
 $x=3$, $y=5$, $d=5$, $f=8$.

10) $-4\frac{5}{6}(a+b) - 19\frac{5}{8}(f-g) + 3\frac{1}{2}(k+1) - [-11\frac{3}{4}$
 $(a+b) + 20\frac{2}{3}(f-g) - 17\frac{7}{8}(k+1)]$.

11) $-9,4ab + 11,08cd - 0,007dg - (4,09ab + 2,3cd - 4,3dg)$.

$$12) \frac{21a^2 + 8ab - 45b^2}{7ax + 9bx + 7a + 9b} \cdot \frac{x^2 - 1}{9a^2 + 30ab + 25b^2}$$

$$\times \frac{15ah + 25bh}{98a^2d - 162b^2d}$$

$$13) 3a^2 + 11ab + 10b^2.$$

$$14) 5a^2 - 17ab - 12b^2.$$

$$15) 7a^2 + 33ab - 10b^2.$$

$$16) 4a^2 - 21ab + 5b^2.$$

$$17) 12x^2 + 43xy + 35y^2.$$

$$18) 35x^2 + 92xy + 33y^2.$$

$$19) 15x^2 + 29xy - 26y^2.$$

$$20) 5x^2 - 8xy - 21y^2.$$

$$21) 55x^2 - 142xy + 91y^2.$$

$$22) 91x^2 - 262xy + 187y^2.$$

In Faktoren zu zerlegen.

$$23) 3^{1/2} \sqrt{a} - 5^{2/3} \sqrt[3]{b} + 6^{1/8} \sqrt[8]{c} + \frac{1}{2} \sqrt[n]{d} + \frac{3}{4} \sqrt[3]{3} \\ - (2^{3/5} \sqrt[5]{a} - 4^{1/4} \sqrt[4]{b} - 3^{1/3} \sqrt[3]{c} + \frac{2}{5} \sqrt[n]{d} - \sqrt[3]{3}) + \frac{1}{8} \sqrt{a} \\ - \frac{3}{5} \sqrt[5]{b} + \frac{1}{6} \sqrt[6]{c} - \frac{1}{2} \sqrt[2]{3} + 7 \sqrt[7]{3}. \text{ Für } a=2, b=5, c=3, \\ d=1.$$

$$24) \frac{3n^2x - 6nx + 3x}{4n^2 + 8n + 4} \cdot \frac{15ny + 5y}{n^2 - 1} \cdot \frac{4n + 4}{3n^2 - 2n - 1}$$

$$25) \frac{1}{2} a^{3m-n} + \frac{5}{8} a^{2m} b^m + \frac{1}{8} a^m b^{2m} - \frac{1}{6} a^{-n} b^{3m} - (\frac{1}{5} a^{3m-n} \\ + \frac{1}{2} a^{2m} b^m + \frac{1}{4} a^m b^{2m} + \frac{2}{3} a^{-n} b^{3m}).$$

$$26) 3a^{-7} + 5b^{-2} - 7d^8 + f^m - 10g^n - (-5a^{-7} + b^{-2} \\ - 9d^8 + 5f^m + 2g^n).$$

$$27) [(3b^2 - 2bc)y^4 - (5b^2 - 3bc)y^5 + (b^2 - 2bc)y^6 - (3b^2 \\ - 4bc)y^7] + [(2b^2 + 5bc)y^4 + (2b^2 - bc)y^5 - 7bcy^6 + (4b^2 - 7bc)y^7] \\ + [(5b^2 - bc)y^4 - (6b^2 - 5bc)y^5 + (2b^2 + bc)y^6 - 3b^2y^7].$$

$$28) \frac{6a^2 + 3ab - 30b^2}{10a^2 + 7ab - 45b^2}$$

$$29) \frac{15a^2 - 56ab + 48b^2}{21a^2 - 13ab - 20b^2}$$

$$30) \frac{27a^2c + 132abc - 15b^2c}{6a^2d + 39abd + 45b^2d}$$

$$31) \frac{4a^2 - 4ab - 2ac - 15b^2 + 5bc}{6a^2 + 7ab - 3ac - 3b^2 + bc}$$

Quotienten heben.

$$32) \left. \frac{14a^2 + 17ab + 2ac - 6b^2 + 3bc}{21a^2 - 62ab + 3ac + 16b^2 - 8bc} \right\} \text{ Quotienten heben.}$$

33) Wie lautet der binomische Lehrsatz? Was versteht man unter Binomialkoeffizienten?

$$34) (a \pm b)^7.$$

$$35) (a \pm b)^{10}.$$

$$36) (0,05^a - 0,27c + 1,003d) - (0,7^a - 4,5c + 13,07d - 2,3e) + (0,001^a + 0,028c - 3,05d - e) + 0,3c. \quad \text{Für } a = 3, \\ b = 8, c = 0,04, d = 0, e = 0,102.$$

$$37) ({}^{3/2}b^{m+1}x^{-n} + {}^{1/5}b^m x^{-n+1} - {}^{2/3}b^{m-1}x^{-n+2} + {}^{7/6}b^{m-2}x^{-n+3}) \times ({}^{6/5}b^{-m}x^{n-1} - {}^{3/4}b^{-(m+1)}x^n + {}^{1/2}b^{-(m+2)}x^{n+1}). \quad \text{Für } \\ b = 15 \text{ und } x = 3.$$

$$38) ({}^{9/4}a^{3m-n+1} + {}^{2/3}a^{2m+1}b^{m-n})^2.$$

$$39) (1 \pm x)^{12}.$$

$$40) (5 - 4x)^4.$$

$$41) [(6m^4 - 3mn^3)y^2 - (5m^3n + 3m^2n^2)y^4 - (11m^2n^2 - mn^3)y^6] + [-(4m^4 + mn^3)y^2 + (3m^3n - 5m^2n^2)y^4 - (2m^2n^2 + mn^3)y^6] - [8m^4y^2 - (13m^3n - m^2n^2)y^4 + (3m^2n^2 - 7mn^3)y^6].$$

$$42) (9a^{2m} + {}^{1/3}a^{2m-1}b)^2.$$

$$43) \frac{a^4 - 3b^4}{a^4 - 9b^4} - \frac{4a^2 + b^2}{4a^2 + 12b^2} - \frac{0,5a^2 - 1,5b^2}{2a^2 - 6b^2} - \frac{1}{4}.$$

$$44) \left(\frac{12a^{-4}b^6}{18x^{-8}y} \right)^{-3/4} \quad \left| \quad 46) ({}^{1/2}x + 2y)^7.$$

$$47) (3 + {}^{2/5}x)^4.$$

$$45) \left(\frac{36a^{2/3}b^{5/6}}{100x^2b^{-1/2}} \right)^{3/4} \quad \left| \quad 48) (x - {}^{1/5}y)^5.$$

$$49) (3,4 \log a - 0,52 \log b + 4 \log c) - (2,3 \log a - 5,3 \log b + 2,9 \log c) - (0,5 \log a + 6,1 \log b). \quad \text{Für } \\ a = 0,8, b = 5,32, c = 0,92.$$

$$50) ({}^{5/3}a^{-3}b^2 - {}^{3/4}a^{-1} + {}^{2/5}ab^{-2} + {}^{3/8}a^3b^{-4}) \times ({}^{2/5}a^2b^{-1} - {}^{3/4}a^4b^{-3} - a^6b^{-5}).$$

$$51) \left(\frac{2a^m}{9b^m} + \frac{3a^{m-1}c^2}{8b^{m+1}} \right)^3.$$

$$52) \left. \frac{6x + 15x^{7/6}y^{1/2} - 8x^{1/2}y^{1/2} - 20x^{2/3}y}{15x^{7/6} - 18xy^{2/3} - 20x^{2/3}y^{1/2} + 24x^{1/2}y^{7/6}} \right\} \text{ Auffindung des } \\ \text{größten gemein-} \\ \text{schaftlichen} \\ \text{Teilers zweier} \\ \text{Polynome.}$$

$$53) \frac{4a^5 - a^3b^2 - 22a^2b^3 + 15ab^4}{4a^4 - 18a^3b + 22a^2b^2 - 6ab^3}.$$

$$54) \frac{a^4 - 4a^2 + 14a - 3}{a^3 - 10a - 3}$$

$$55) \frac{a^5x - 6a^4x^2 + 7a^3x^3 - 3a^2x^4 + 2ax^5 - x^6}{a^4x + a^3x^2 - 3a^2x^3 + ax^4}$$

$$56) \frac{b^7c^7 - 14b^5c^5d^4 - 14b^4c^4d^6 + 3b^3c^3d^8}{3b^6c^6 + 3b^5c^5d^2 - 21b^4c^4d^4 - 9b^3c^3d^6}$$

$$57) \frac{4x^5 - x^3 - 22x^2 + 15x}{4x^4 - 18x^3 + 22x^2 - 6x}$$

$$58) \frac{2x + 3b}{x^4 - 16b^4} - \frac{2 - bx}{x^3 + 4b^2x + 2bx^2 + 8b^3} - \frac{5b - x}{5x^2 - 20b^2}$$

59) $(3,5 \log x - 2 \log y + 3,52 \log z) + (-4,51 \log x - 0,5 \log y - 3,04 \log z) - (-9,02 \log x + 0,03 \log y + 0,8 \log z)$. Für $x = 3,405$, $y = 0,82$, $z = 0,064$.

$$60) (3ac - 2bd)^5.$$

$$61) ({}^{2/3}x^3 - {}^{3/4}x^2y)^4.$$

$$62) \left(-\frac{5000a^{-20}b^{-1}}{1125x^{-10}y^0} \right)^{-3/5}$$

63) $({}^{2/5}a^{3m-2} - {}^{3/4}a^{3m-4} + {}^{1/2}a^{3m-6} + {}^{3/8}a^{3m-8}) \cdot ({}^{1/2}a^{p-m+1} - {}^{3/8}a^{p-m-1} + {}^{1/6}a^{p-m-3})$. Für $a = 2$, $m = 4$, $p = 3$.

$$64) \left(\frac{5a^3b^2}{3c^2d^2} + \frac{2a^2b^3}{5cd^3} + \frac{6ab^4}{7d^4} - \frac{2b^5c}{3d^5} \right)$$

$$\times \left(\frac{3c^3d^3}{2a^2b^3} - \frac{2c^4d^2}{3a^3b^2} + \frac{4c^5d}{3a^4b} \right).$$

$$65) \left(\frac{x^3}{5y^3} - \frac{241x^2}{360y^2} + \frac{91x}{60y} - \frac{91}{60} + \frac{3y^2}{5x^2} \right) : \left(\frac{3x}{10y} - \frac{2}{3} + \frac{2y}{5x} \right).$$

$$66) [(2ab - b^2x^2) - (3ab + 2b^2)x^3]^2.$$

$$67) 3x\sqrt{x+5} + 5\sqrt{xy}^2.$$

$$68) \frac{x^3 - 2x^2 + x + 1}{x^4 - 1} + \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 + x^2 + x + 1}$$

$$69) \left(\frac{54a^{-2/5}b^{3/5}x^{-1}}{72a^{-4/5}b^{1/2}y^{-3/5}} \right)^{5/4}$$

$$70) (2a^4 + {}^{1/4}a^2b^2)^5.$$

$$71) \sqrt{(3a^2c + 6abc + 3b^2c)}$$

$$72) \sqrt{\frac{x^3 + 2x^2 + x}{a^3 + a^2b}}$$

$$73) \left(\frac{2}{9a^3} - \frac{3}{2a^2b} - \frac{5}{3ab^2} + \frac{1}{4b^3} \right) \cdot \left(\frac{a^2b}{3} - \frac{3a^3}{4} + \frac{5a^4}{3b} - \frac{2a^5}{3b^2} \right)$$

Auflösung des
 größten gemeinschaftlichen
 Theilers
 zweier Polynome.

$$74) \left(\frac{y^3 z^{-3}}{3} - \frac{7y^2 z^{-2}}{8} - \frac{3yz^{-1}}{16} + \frac{35}{36} - zy^{-1} + \frac{z^2 y^{-2}}{6} \right)$$

$$: \left(\frac{2yz^{-1}}{3} - \frac{3}{4} + \frac{zy^{-1}}{2} \right).$$

$$75) [(4bc - c^2) - (2bc - 3c^2)y]^2.$$

76) $1 : (1 - a)$. Wie groß muß a sein, wenn bei der weitem Entwicklung der Restbruch immer kleiner werden soll?

$$77) 1 : (1 + 2b).$$

$$78) c : (1 - m).$$

$$79) a^3 : (a^2 - 9b^2).$$

$$80) (4a^2 - 3y^2) : (9a^2 + y^2).$$

$$81) (z^4 - 3a^2 z^2) : (z^2 - 25a^2).$$

Desgleichen.

$$82) \frac{32a^5 - 240a^4b + 720a^3b^2 - 1080a^2b^3 + 810ab^4 - 243b^5}{16a^4 - 81b^4}$$

$$83) \frac{3b^7 - 192bm^6}{b^5 - 10b^4m + 40b^3m^2 - 8b^2m^3 + 80bm^4 - 320m^5}$$

Ausführung des größten gemeinschaftlichen Theilers.

$$84) [(a + b)x^3 + (a - b)x^2 + (2a + b)x - (a - 2b)] \times [(a - b)x^2 - (2a + b)x + a + 2b].$$

$$85) [(m + n)y^6 - (m - n)y^4 + (m + n)y^2 - (m - n)] \times [(m - n)y^4 - (m + n)y^2 + (m - n)].$$

$$86) [(8a^3 - b^3)y^4 - (3a^3 - 2b^3)y^5]^2.$$

$$87) (3a^{2/3}b^{5/6} - a^{5/3}b^{2/3})^3.$$

$$88) \frac{a^2 + 3ab - b^2}{a^2 + 4ab + 4b^2} + \frac{a - b}{a + 2b}.$$

$$89) \left(\frac{4x^{2m} - 1}{9x^{2m} - 6x^m + 1} \right) \cdot \left(\frac{3x^{m+1} - x}{2x^m + 1} \right)$$

$$90) [(a - c)x^2 - (a + 2c)x + (a - 3c) - (a + 4c)\frac{1}{x}] \cdot [(a + c)x - (a + 2c) + (a + 3c)\frac{1}{x}].$$

$$91) [(2a^2 - b^2)x^3 - (3a^2 + b^2)x^2 + (5a^2 - b^2)x + (a^2 + 2b^2)] \times [(3a^2 - b^2)x^2 - (2a^2 + b^2)x + (a^2 - 2b^2)].$$

$$92) \left(\frac{32x^{10}}{243a^{10}} - \frac{20x^6}{27a^6} + \frac{5x^2}{3a^2} - \frac{15a^2}{8x^2} + \frac{135a^6}{128x^6} - \frac{243a^{10}}{1024x^{10}} \right)$$

$$: \left(\frac{8x^6}{27a^6} - \frac{x^2}{a^2} + \frac{9a^2}{8x^2} - \frac{27a^6}{64x^6} \right).$$

93) $(x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16)^2$.

94) $\frac{b^3 + 2}{b^4 - b^3 + b^2 - b + 1} - \frac{b^4 + 2}{b^5 + 1}$.

95) $16a^4 - 25a^2b^2$.

96) $121z^{4v^2} - 9v^6$.

97) $\frac{75x^5}{4y^2} - \frac{12x^3}{49}$.

98) $\frac{27z^6}{20b^5} - \frac{147z^4}{180b^3}$.

99) $\frac{32a^3}{27b^3} - \frac{50a}{363b}$.

100) $8x^3 - 125y^3$.

101) $64b^6 - 27c^6$.

102) $216x^6 - 343x^3y^3$.

103) $\frac{2a^2x^4 - ax^3 + 1}{a^4x^4 - a^2x^6} - \frac{2}{a^2 - x^2}$.

104) $\frac{12a^{2n+3} - 3a^3}{16a^{4m} + 2a^m} : \frac{6a^{2n+1} + 3a^{n+1}}{4a^{2m} - 2a^m + 1}$.

105) $[(a^2 - 3ab)x^4 - (2a^2 + ab)x^3 + (2a^2 - 2ab)x^2 - (5a^2 - ab)x] \cdot [(3a^2 + 2ab)x^5 + (2a^2 - ab)x^4 - (5a^2 + ab)x^3]$.

106) $[(3a + 2c)(4a + 3c) + (3a - 2c)(4a - 3c)] - [(3a - 2c)(4a + 3c) + (3a + 2c)(4a - 3c)]$.

107) $(5\sqrt{ab} - 6a\sqrt{ab^2})^2$.

108) $(a^2 + 2b^2)^4$.

109) $\frac{m^4 - 2m^2n^2}{m^5 + n^5} + \frac{1}{m+n}$.

110) $[(5m + 2n)(m + 3n) - (5m - 2n)(m - 3n)] + [(5m - 2n)(m + 3n) - (5m + 2n)(m - 3n)]$.

111) $\left(\frac{128}{729} \sqrt[3]{\left(\frac{x}{y}\right)^{10}} - \frac{80}{81} \sqrt[3]{\left(\frac{x}{y}\right)^8} + \frac{20}{9} \sqrt[3]{\left(\frac{x}{y}\right)^6} + \frac{45}{32} \sqrt[3]{\left(\frac{x}{y}\right)^2} - \frac{5}{2} \sqrt[3]{\left(\frac{x}{y}\right)^4} - \frac{81}{256} \right) : \left(\frac{4}{9} \sqrt[3]{\left(\frac{x}{y}\right)^4} - \sqrt[3]{\left(\frac{x}{y}\right)^2} + \frac{9}{16} \right)$.

Zu Faktoren zu zerlegen.

112) $(2a\sqrt{ab} - 7\sqrt[3]{a^2b})^3.$

113) $(\frac{3}{4}m^5 - \frac{2}{3}m^3n^2)^4.$

114) $\frac{4a^{m+1} - 4}{a^{2m+2} + 2} - \frac{a^{2m+2} + 2}{a^{m+1} + 1}.$

115) $27x^6 + y^6.$

116) $125c^3 + 8g^3.$

117) $\frac{216x^6}{125y^6} - \frac{125x^3}{27y^3}.$

118) $\frac{8a^3}{27b^3} + \frac{27b^3}{8a^3}.$

119) $108a^5 - 500a^2b^3.$

120) $24x^4 + 81xy^3.$

121) $[(5m^2 - 2mn) - (3m^2 - 2mn)x - (4mn + n^2)x^2]$

$\times [(2m^2 - 3mn)\sqrt{x} + (3m^2 + 2mn)\sqrt{x^3} - m^2\sqrt{x^5}].$

122) $\left(\frac{\sqrt[5]{x^{-7}}}{2} - \frac{11\sqrt[5]{x^{-9}}}{20} - \frac{289\sqrt[5]{x^{-11}}}{360} + \frac{47\sqrt[5]{x^{-13}}}{60}\right.$

$\left. + \frac{11x^{-3}}{45} - \frac{\sqrt[5]{x^{-17}}}{12}\right) : \left(\frac{3\sqrt[5]{x^{-4}}}{4} - \frac{3\sqrt[5]{x^{-6}}}{2} + \frac{\sqrt[5]{x^{-8}}}{3} + \frac{x^{-2}}{2}\right).$

123) $(4 - 2\sqrt{3})^4.$

124) $[(9a^2 - 6ab + b^2)\sqrt[3]{y^2} + (6a^2 + ab - b^2)\sqrt{y} + (4a^2 + 4ab + b^2)\sqrt[3]{y}] \cdot [(3a - b)\sqrt{y} - (2a + b)\sqrt[3]{y}].$

125) $(5 + 2\sqrt{3})^5.$

126) $\frac{3a^2 - 5ax}{2a - 3x} - 2a + x - \frac{a^2 + ax}{5a + x}.$

127) $135b^4 - 40b.$

128) $7 + 56x^6.$

129) $a^4 - 16b^4.$

130) $81m^4 - 625n^4.$

131) $405x^6 - 80x^2y^4.$

132) $8a^{7/6}b - 22a^{5/6}b^{4/5} + 20ab^{7/5} - 55a^{2/3}b^{6/5}.$

133) $12a^{5/4}b^{9/10} - 14a^{3/4}b^{11/10} + 30a^{13/12}b^{13/10}$

$- 35a^{7/12}b^{3/2}.$

134) $(\sqrt[3]{a^3 + \sqrt{a^6 - b^6}} - \sqrt[3]{a^3 - \sqrt{a^6 - b^6}})^3.$

In Faktoren zu zerlegen.

In Faktoren zu zerlegen.

135) $(x^2 + 2xy)^6$.

136) $(a^2 + \frac{1}{2}b^2)^8$.

137) $(a^2 - b^2)^{3/2}$.

138) $\frac{3x^2 - 2xy}{2x + 3y} - x + 2y - \frac{2x^2 - 3xy}{3x + 2y}$.

139) $\left(\frac{a^2 - 2ab}{4a^2b - b^3} - \frac{3ab - b^2}{4a^3 - 4a^2b + ab^2} \right)$

$$\times \left(\frac{3a^2}{8a^3 - b^3} + \frac{5a}{12a^2 - 3b^2} \right).$$

140) $(a^3 + a^2b)^{2/3}$.

141) $\frac{3a - b\sqrt{x}}{8a^2\sqrt{x} + 4abx} + \frac{2 + 9ba^{-1}\sqrt{x}}{10a\sqrt{x} + 5bx}$.

142) $\left(\frac{x^2 + 3xy}{9x^2 - y^2} - \frac{x^2 - xy}{9x^2 - 6xy + y^2} \right)$

$$: \left(\frac{x^2}{27x^3 - y^3} + \frac{5x}{18x^2 - 2y^2} \right).$$

B. Algebra.

§ 30.

1) Was ist eine Gleichung? Was versteht man unter: „Seiten einer Gleichung?“

2) Was ist eine algebraische — was eine analytische Gleichung? Welche von den Gleichungen a) $(a + x)^2 = a^2 + 2ax + x^2$;

b) $a + x = b$; c) $\frac{9}{b+x} = cx$; d) $3a(a + x) + 5a^2 = 8a^2 + 3ax$;

e) $a^2 - x^2 = a + x$ ist eine analytische — welche eine algebraische?

3) Wie theilt man die algebraischen Gleichungen ein? Was ist eine bestimmte — was eine unbestimmte Gleichung? Welche von den Gleichungen: a) $9x - 3x = 20$; b) $x - 3y = 20$; c) $3x - 5a = 2a - 4x$; d) $3x + (5a - 2x)3 = 4x$ ist eine bestimmte, — welche eine unbestimmte?

4) Was versteht man unter Gleichungen mit mehreren unbekanntem Zahlen?

5) Was versteht man unter einer Gleichung des ersten — was unter einer Gleichung des zweiten Grades? Ist folgende Erklärung: „Kommt die unbekannte Zahl in einer algebraischen Gleichung in der ersten Potenz vor, so nennt man sie eine Gleichung des ersten Grades“ richtig? Ist z. B. $ax = bx$ eine Gleichung des ersten Grades? Warum nicht?

6) Was bedeutet der Ausdruck: eine Gleichung ordnen? Nach welchen Lehrrsätzen verfährt man dabei? Ist folgender Satz: „Wenn man eine Zahl von der einen Seite einer Gleichung auf die andere transponirt, so ändert man die Vorzeichen“ richtig? Warum nicht?

7) Was bedeutet der Ausdruck: eine Gleichung auflösen?

§ 31. I. Gleichungen vom ersten Grade.

Gleichungen mit einer unbekanntem Zahl.

1) Wie löst man eine Summengleichung auf? a) $15a + x = 28a$; b) $x + 3 = 8$.

2) Desgleichen ein Differenzgleichung? a) $x - 3a = 16a$; b) $4 - x = 1$.

3) Desgleichen eine Produktgleichung? a) $3x = 27$; b) $5x + 8 = 68$; c) $4x - 5a = 15a$; d) $ax + b = c$.

4) Desgleichen eine Quotientgleichung? a) $\frac{x}{5} = 23$; b) $\frac{4x}{3a} = 8a$;

c) $\frac{3x}{5a} + 7b = 22b$; d) $\frac{8}{x} = 40$; e) $\frac{2a}{5x} = 4a$; f) $\frac{3a}{2x} - 5b = 7b$.

5) $4x + 36 = 5x + 34$.

6) $3x - 15 = 5x - 27$.

7) $36 - 9z = 116 + 11z$.

8) $5x - 47 = 8x - 59$.

9) $61 - 5y = 7y + 85$.

10) $19x + 13 = 59 - 4x$.

11) $3x^2 - 10x = 8x + x^2$.

12) $41x - 7x^2 = 5x^2 - 31x$.

13) $8x - 18 = x + 12 - 3x$.

14) $x - 7 = \frac{x}{5} + \frac{x}{3}$.

$$15) \frac{x}{2} + \frac{x}{3} = \frac{x}{4} + 7.$$

$$16) 5\frac{1}{4}x - 43\frac{2}{5} = 7\frac{1}{3}x - 53\frac{1}{6}.$$

$$17) 13\frac{2}{5} - 4\frac{1}{6}y = 2\frac{1}{2}y + 12\frac{17}{30}.$$

$$18) 3x + 4 - \frac{x}{3} = 46 - 2x.$$

$$19) 4x - 15\frac{1}{2} + \frac{2}{3}x + 8\frac{3}{4} = 5\frac{1}{4}x - 7.$$

$$20) \frac{3}{4}x - 2x - \frac{3}{5}x + \frac{1}{2}x = -9.$$

$$21) -6 + \frac{3}{2}x + 12\frac{1}{4} - \frac{3}{8}x = \frac{7}{6}x - 5\frac{3}{8}.$$

$$22) 9 - \frac{x}{6} + 4\frac{2}{3} - \frac{3}{4}x = -\frac{x}{10} - 15 + \frac{x}{4}.$$

$$23) 3,4x - 0,35 = 2,05x + 2,485.$$

$$24) 15,04x + 3,2 - 3,6x = 4,00688 - 2,008x.$$

$$25) 9x - 3(25 + 18x) = 35 - 13(30 + 5x).$$

$$26) 15x - 14(10 - 7x) = 95 + 7(14x - 25).$$

$$27) 5(\frac{1}{2} - 7x) + 3x = 3(\frac{3}{2}x + 5\frac{1}{4}).$$

$$28) \frac{3}{4}x + \frac{3}{4}(6\frac{2}{9} - \frac{2}{3}x) = 5\frac{5}{6} - \frac{2}{3}\left(\frac{x}{2} - 35\right).$$

$$29) (5 + x)^2 + 9 = 3x(9 + \frac{1}{3}x).$$

$$30) 2x^2 + 17x - (8 + 2x)^2 = -67 - x(3 + 2x).$$

$$31) 81x - 5[4 - 8(3 + 2x)] = 10.$$

$$32) (x + 4)^3 - 6x^2 = x(x^2 + 6x + 20) + 68.$$

$$33) 56x^3 - 4x(4x - 7)^2 = 164x^2 - (2x - 5)^3.$$

$$34) \frac{x-5}{4} + 6x = \frac{284-x}{5}.$$

$$35) x + \frac{11-x}{3} = \frac{19-x}{2}.$$

$$36) 3x + \frac{2x+6}{5} = 5 + \frac{11x-37}{2}.$$

$$37) \frac{6x-4}{3} - 2 = \frac{18-4x}{3} + x.$$

$$38) 21 + \frac{3x-11}{16} = \frac{5x-5}{8} + \frac{97-7x}{2}.$$

$$39) x + \frac{3x-5}{2} = 12 - \frac{2x-4}{3}.$$

$$40) 3x - \frac{x-4}{4} - 4 = \frac{5x+14}{3} - \frac{1}{12}.$$

- 41) $\frac{x-1}{7} + \frac{23-x}{5} = 7 - \frac{4+x}{4}$.
- 42) $\frac{7x+5}{3} - \frac{16+4x}{5} + 6 = \frac{3x+9}{2}$.
- 43) $\frac{3x+4}{5} - \frac{7x-3}{2} = \frac{x-16}{4}$.
- 44) $\frac{17-3x}{5} - \frac{4x+2}{3} = 5 - 6x + \frac{7x+14}{3}$.
- 45) $x - \frac{3x-3}{5} + 4 = \frac{20-x}{2} - \frac{6x-8}{7} + \frac{4x-4}{5}$.
- 46) $\frac{4x-21}{9} + 3\frac{3}{4} + \frac{57-3x}{4} = 241 - \frac{5x-96}{12} - 11x$.
- 47) $(12-x) : \frac{x}{2} = 4 : 1$.
- 48) $\frac{5x+4}{2} : \frac{18-x}{4} = 7 : 4$.
- 49) $x^3 + 15x^2 = 35x^2 - 3x^3$.
- 50) $\frac{x^2}{6} - \frac{1}{4}x^2 + 10x = \frac{1}{3}x^2 - \frac{x^2}{2} + 11x$.
- 51) $\frac{x+1}{5} + 3 = \frac{2x-3}{3}$.
- 52) $\frac{7x+2}{3} + 5x = 28 + \frac{5x-6}{7}$.
- 53) $\frac{3x+4}{5} + 2x = \frac{22-x}{5} + 16$.
- 54) $\frac{7x+16}{21} - \frac{x+8}{4x-11} = \frac{x}{3}$.
- 55) $\frac{6x+7}{9} + \frac{7x-13}{6x+3} = \frac{2x+4}{3}$.
- 56) $\frac{4x+3}{9} + \frac{7x-29}{5x-12} = \frac{8x+19}{18}$.
- 57) $\frac{7-x}{2} + 4 = \frac{3x-11}{4} + \frac{8x+15}{6}$.
- 58) $\frac{2x-5}{18} + \frac{19-x}{3} = \frac{10x-7}{9} - \frac{5}{2}$.
- 59) $x - \frac{2x+1}{3} = \frac{x+3}{4}$.

$$60) \frac{3x+5}{8} - \frac{21+x}{3} = 39 - 5x.$$

$$61) 4x - \frac{19+2x}{5} = 15 - \frac{7x+11}{4}.$$

$$62) \frac{21-3x}{3} - \frac{4x+6}{9} = 6 - \frac{5x+1}{4}.$$

$$63) 7^{5/8} + \frac{3x-1}{4} - \frac{7x+3}{16} = \frac{8x+19}{8}.$$

$$64) \frac{7x-8}{11} + \frac{15x+8}{13} = 3x - \frac{31-x}{2}.$$

$$65) \frac{5x-1}{2} - \frac{7x-2}{10} = 6^{3/5} - \frac{x}{2}.$$

$$66) \frac{4x-34}{17} - \frac{258-5x}{3} = \frac{69-x}{2}.$$

$$67) 2x - \frac{4x-2}{13} = \frac{2x+11}{5} - \frac{7-8x}{7}.$$

$$68) \frac{9x+20}{36} = \frac{4x-12}{5x-4} + \frac{x}{4}.$$

$$69) \frac{20x+36}{25} + \frac{5x+20}{9x-16} = \frac{4x}{5} + \frac{86}{25}.$$

$$70) \frac{10x+17}{18} - \frac{12x+2}{13x-16} = \frac{5x-4}{9}.$$

$$71) \frac{18x-19}{28} + \frac{11x+21}{6x+14} = \frac{9x+15}{14}.$$

$$72) \frac{10+x}{5} : \frac{4x-9}{7} = 14 : 5.$$

$$73) \frac{17-4x}{4} : \left(\frac{15+2x}{3} - 2x \right) = 5 : 4.$$

$$74) (16x+5) : \frac{4x+14}{9x+31} = (36x+10) : 1.$$

$$75) \frac{4x+3}{6x-43} : 1 = (2x+19) : (3x-19).$$

$$76) 5x + \frac{7x+9}{4x+3} = 9 + \frac{10x^2-18}{2x+3}.$$

$$77) 3 - (18x-6) : 5 + 6x = 21.$$

$$78) 3 - 18x - 6 : 5 + 6x = -\frac{3}{5}.$$

$$79) [3 - (3x-1)] 6 : 5 + 6x = 36.$$

- 80) $[3 - (3x + 1)] 6 : (5 + 6x) = 2.$
- 81) $3 - (3x - 1) : (11 + 6x) = 2.$
- 82) $(28 : x) : 5 + 7 = 49.$
- 83) $28 : (x : 5) + 7 = 49.$
- 84) $28 : (x \cdot 5) + 7 = 3 \cdot 7 : x.$
- 85) $28 : \frac{x}{5} + 7 = 49.$
- 86) $5x - 8a + 3b = 4a - 3x.$
- 87) $6a - 2x - 5b = 4b - 6x - 2a.$
- 88) $a^2 - 2bx + 3ab = 4bx - 5a^2.$
- 89) $5a^2 - 3bx = 7a^2 - 4cx.$
- 90) $d^2 + fx = gx + h^2 - 7d^2.$
- 91) $mx - a = b - x.$
- 92) $\frac{ax}{b} + c = d.$
- 93) $x = a + \frac{bx}{c}.$
- 94) $\frac{ax}{b} + \frac{cx}{d} = f + x.$
- 95) $a + \frac{bx}{c} + \frac{dx}{f} + \frac{gx}{h} - k = 0.$
- 96) $\frac{3}{4}ax - 2bc + \frac{2}{3}a^2 = \frac{1}{2}bc - 3ax.$
- 97) $\frac{3a + x}{x} - 5 = \frac{6}{x}.$
- 98) $\frac{5ab}{6} + \frac{4ac}{5} - \frac{2cx}{3} - \frac{3}{4}ac - 2ab + 6cx = 0.$
- 99) $ax = b(c - x).$
- 100) $5ax = 3ab - 2b(x - 4a).$
- 101) $(3a - 2b)(x + 5a) - 8ab = 5ax - (2a - 4b)(3x - b) + 4b^2.$
- 102) $10a^3 - (a - b)^2x = 5a(2a^2 - 3b^2 + 2bx) - a^2x.$
- 103) $(a + 3b)^2x - 5(2a - b)(2a - 3b)x = 3a^2b - 6b^2x.$
- 104) $-(2a + x)^2 = 2a^2 - (a - x)^2.$
- 105) $a \left(b + \frac{x}{c} \right) = d.$
- 106) $a \left(b - \frac{c}{x} \right) = d.$

$$107) \quad ax - \frac{a^2 - 3bx}{a} - ab^2 = bx + \frac{6bx - 5a^2}{2a} - \frac{bx + 4a}{4}$$

$$108) \quad \frac{a^2x}{bc} - \frac{d^2}{a} + bx = \frac{ex}{f} - b + (d + b)x.$$

$$109) \quad \frac{a(b^2 + x^2)}{bx} = ac + \frac{ax}{b}$$

$$110) \quad (a + x)(b + x) - a(b + c) = \frac{a^2c}{b} + x^2.$$

$$111) \quad \frac{az^2}{b} - \frac{b^2z}{a} = az + \frac{bz^2}{a}.$$

$$112) \quad \frac{7a}{5b} + \frac{4a - x}{3b} = \frac{a}{15b} + 3 - \frac{2b - x}{b}.$$

$$113) \quad \frac{5x}{3a + b} - 2 = \frac{8b}{5a}.$$

$$114) \quad \frac{3a + x}{5a - b} + 1 = \frac{4x - b}{3a + 2b}.$$

$$115) \quad \frac{x}{a - b} - \frac{5a}{a + b} = \frac{2ax}{a^2 - b^2}.$$

$$116) \quad \frac{cx^m}{a + bx} = \frac{dx^m}{e + fx}.$$

$$117) \quad \frac{2m^2z}{5n} - \frac{n^3}{3m} - \frac{2n^4}{m^2} - nz = 0.$$

$$118) \quad \frac{2a^5}{m^2} - \frac{3m^4z}{2a^2} - \frac{a^3z}{5m} - \frac{m^5}{3a^2} = 0.$$

$$119) \quad \frac{5b^3y}{3c^2} - \frac{3b^4}{2c^2} + \frac{2c^3y}{b^2} + \frac{4bc}{5} = 0.$$

$$120) \quad \frac{m^6}{2n^4} - \frac{2m^2z}{n} + \frac{n^4}{m^2} = \frac{n^3z}{3m^2}.$$

$$121) \quad \frac{a^2}{y} - \frac{2b^2}{a} = \frac{3c^2}{2y} - \frac{a^2}{3b}.$$

$$122) \quad \frac{b^2 - ax + x^2}{5x} - 4a = \frac{a^2 - 2ax}{3b} + \frac{10ax + 3bx}{15b}.$$

$$123) \quad 3x = \frac{6x^2 - 3ax + b^2}{2x} - a + 2b.$$

$$124) \quad \sqrt{4x + 16} = 12.$$

$$125) \quad \sqrt{3x - 20} = 4.$$

$$126) \quad (8 + 5x)^{1/2} - 2 = 12.$$

$$127) \quad (2x + 3)^{1/3} + 4 = 7.$$

- | | | | |
|------|---|------|--------------------------------|
| 128) | $\sqrt[3]{4-3x} = -5.$ | 130) | $\sqrt{x+40} = 10 - \sqrt{x}.$ |
| 129) | $\sqrt{12+x} = 2 + \sqrt{x}.$ | 131) | $\sqrt{x-16} = 8 - \sqrt{x}.$ |
| 132) | $\sqrt{x-24} = \sqrt{x} - 2.$ | | |
| 133) | $\sqrt{x-a} = \sqrt{x} - \frac{1}{2}\sqrt{a}.$ | | |
| 134) | $\sqrt{5}\sqrt{x+2} = \sqrt{5x+2}.$ | | |
| 135) | $\sqrt[3]{(10x+35)} - 1 = 4.$ | | |
| 136) | $(x+16)^{1/2} = 2 + \sqrt{x}.$ | | |
| 137) | $(x-32)^{1/2} = 16 - \sqrt{x}.$ | | |
| 138) | $\sqrt{4x+21} = 2\sqrt{x} + 1.$ | | |
| 139) | $\sqrt{2x+a^2+12ab} = 3a+2b.$ | | |
| 140) | $\frac{41+2\sqrt{x}}{3+\sqrt{x}} = 3^2.$ | | |
| 141) | $\frac{5+7\sqrt{x}}{5-14\sqrt{x}} = \frac{7+3\sqrt{x}}{3-6\sqrt{x}}.$ | | |
| 142) | $(6+7\sqrt{x})^2 - 31x = 4\sqrt{x}(21-\sqrt{x}).$ | | |
| 143) | $10x^{3/2} - 3x^2 + 3x\sqrt{x} = 7x^{3/2} + 2x(2\sqrt{x}-x).$ | | |

§ 32.

Gleichungen mit mehreren unbekanntem Zahlen.

1) Welche Bedingung ist zur Auflösung der Gleichungen mit mehreren Unbekanntem nöthig?

2) Welche Gleichungen aus a) $5x+2y=8$; b) $3y-7x=23$; c) $7x+4y=16-3x$; d) $8x+4+3y=27+15x$ sind abhängige, — welche unabhängige?

3) Nach welchen Methoden löst man die Gleichungen mit mehreren Unbekanntem auf?

4) Worin besteht die Additions- und Subtractionsmethode? Desgleichen die Substitutionsmethode? Desgleichen die Comparationsmethode? Desgleichen die Bézout'sche Methode?

$$\begin{array}{l} 5) \quad 5x - y = 31. \\ \quad \quad 3x + y = 25. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 6) \quad x + 5y = 14. \\ \quad \quad 3x - 4y = 4. \end{array}$$

- 7) $5x + 8y = 63$
 $7x + 3y = 39.$
- 8) $3x + y = 31$
 $5x - 2y = 15.$
- 9) $4x - 7y = 19$
 $x + 9y = 37.$
- 10) $5x + 4y = 49\frac{1}{2}$
 $2x + 7y = 63.$
- 11) $5x - 3y = 12$
 $19x - 5y = 73\frac{1}{3}.$
- 12) $3x + 16y = 5$
 $-5x + 28y = 19.$
- 13) $24x + 7y = 27$
 $8x - 33y = 115.$
- 14) $-7x + 13y = 99.$
 $28x - 9y = -52.$
- 15) $23x + 15y = 4\frac{1}{4}$
 $48x + 45y = 18.$
- 16) $16x + 17y = 274.$
 $24x - 105y = 150.$
- 17) $21x + 8y = -66.$
 $28x - 23y = 13.$
- 18) $18x - 20y = 1$
 $15x + 16y = 9.$
- 19) $x - 3y = 0$
 $25x + 48y = 287.$
- 20) $\frac{1}{4}y = 6 - \frac{2}{3}x$
 $5x = 4y - 2.$
- 21) $4 + y = \frac{3}{8}x$
 $\frac{4}{5}y - x = -8.$
- 22) $\frac{2}{3}x = 10 - \frac{1}{2}y$
 $4\frac{3}{4}y = 5x - 7.$
- 23) $2\frac{4}{9}y - \frac{5}{6}x = 90$
 $2\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y = 90.$
- 24) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} - 7 = 0$
- $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} - 8 = 0.$
- 25) $\frac{1}{7}x + 7y = 99$
 $\frac{1}{7}y + 7x = 51.$
- 26) $\frac{x+2}{3} + 8y = 31$
 $\frac{y+5}{4} + 10x = 192.$
- 27) $\frac{2x-y}{2} + 14 = 18$
 $\frac{2y+x}{3} + 16 = 19.$
- 28) $\frac{2x+3y}{6} + \frac{x}{3} = 8$
 $\frac{7y-3x}{2} - y = 11.$
- 29) $3x + \frac{7y}{2} = 22$
 $11y - \frac{2x}{5} = 20.$
- 30) $(x+1):y = 5:3$
 $\frac{2}{3}x - \frac{5-y}{2} = \frac{41}{12} - \frac{2x-1}{4}.$
- 31) $x - \frac{2y-x}{23-x} = 20 - \frac{59-2x}{2}$
 $y + \frac{y-3}{x-18} = 30 - \frac{73-3y}{3}.$
- 32) $(x+5)(y+7) = (x+1)(y-9) + 112.$
 $2x + 10 = 3y + 1.$
- 33) $y + 1 = 2x - 2$
 $x + 1 = 3y - 3.$
- 34) $x - 500 = 24 - y$
 $\frac{x}{257} = \frac{y}{5}.$

$$35) \frac{x}{6} + \frac{y}{4} = 6$$

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{6} = 5\frac{2}{3}.$$

$$36) \frac{x}{8} + 8y = 194$$

$$\frac{y}{8} + 8x = 131.$$

$$37) \frac{3x-1}{5} + 3y-4 = 15$$

$$\frac{3y-5}{6} + 2x-8 = 7\frac{2}{3}.$$

$$38) 9x + \frac{8}{5}y = 70$$

$$7y - \frac{13x}{3} = 44.$$

$$43) 8x - \frac{16 + 60x}{3y-1} = \frac{16xy-107}{5+2y}$$

$$2 + 6y + 9x = \frac{27x^2 - 12y^2 + 38}{3x - 2y + 1}.$$

$$44) \frac{3x+2y}{5} - \frac{5x - \frac{3}{4}y + 1}{3} = x + \frac{y-2x}{10} - \frac{4x-y}{7}$$

$$(y+2x):(y-2x) = (12x+6y-3):(6y-12x-1).$$

$$45) \frac{7+2x}{3-x} - \frac{125-144y}{36y+180} = 2$$

$$\frac{10-22x}{11x-11} + \frac{11-7y}{3-y} = 5.$$

$$46) \frac{84+72y}{1-y} - 72 + \frac{432x-125}{3x+5} = 0$$

$$\frac{30-198y}{3y-1} + \frac{121-231x}{1-x} = 165.$$

$$47) \frac{x}{a+b} - \frac{y}{a-b} = \frac{1}{a+b}$$

$$\frac{x}{a+b} + \frac{y}{a-b} = \frac{1}{a-b}$$

$$39) \frac{7+x}{5} - \frac{2x-y}{4} = 3y-5.$$

$$\frac{5y-7}{2} + \frac{4x-3}{6} = 18-5x.$$

$$40) \frac{4x+81}{10y-17} = 6.$$

$$\frac{12x+97}{15y-17} = 4.$$

$$41) \frac{x-2}{5} - \frac{10-x}{3} = \frac{y-10}{4}$$

$$\frac{2y+4}{3} - \frac{2x+y}{8} = \frac{x+13}{4}.$$

$$42) \frac{4x}{x^2} + \frac{5y}{y^2} = \frac{9}{y} - 1$$

$$\frac{5}{x} + \frac{4}{y} = \frac{7}{x} + \frac{3}{2}.$$

$$48) \frac{1}{x} = m - \frac{1}{y}$$

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{x} - n.$$

$$49) \frac{a}{x} + \frac{b}{y} = m$$

$$\frac{c}{x} + \frac{d}{y} = n.$$

$$50) \frac{a}{b+y} = \frac{b}{3a+x}$$

$$ax + 2by = c.$$

$$51) 3x + 5y = \frac{(8a - 2b)ab}{a^2 - b^2}$$

$$a^2x - \frac{acb^2}{a+b} + (a+b+c)by = b^2x + (a+2b)ab.$$

$$52) 4x + 3b = 5y + 2a$$

$$12x - 5a = 6b - 3y.$$

$$53) x(\sqrt{2ab + b^2} - b) + y(\sqrt{2ab + b^2} + b) = 4ab.$$

$$\frac{(2ab + b^2)^{1/2} - y}{x - b} = \frac{(2ab + b^2)^{1/2}}{2a + b}.$$

$$54) 2x + 3y = 19$$

$$5x - 4z = -3$$

$$8y - 3z = 3.$$

$$55) x + 3y = 13$$

$$4x - 8z = 20$$

$$5y + 4z = 14.$$

$$56) 4x + y = 7$$

$$2x + 3z = 2$$

$$2y - 6z = 8.$$

$$57) 56 - x = y - 56$$

$$\frac{z}{50} = x - 1$$

$$\frac{z}{15} = y + 19.$$

$$58) x + y + z = 99$$

$$10(y - x) = 8\frac{1}{5}y$$

$$\frac{4y}{5} = z.$$

$$59) \frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 8$$

$$\frac{y}{3} + \frac{z}{5} = 8$$

$$\frac{z}{4} + \frac{x}{5} = 8.$$

$$60) 5x - y + 2z = 5$$

$$2x + 5y - 4z = 5$$

$$3y - 7z = 19.$$

$$61) 2x + 3y = 67$$

$$4y + 5z = 175$$

$$6z + 7x = 215.$$

$$62) 3x + 5y + z = 10$$

$$5x - 3y + 2z = 20$$

$$6x - 3z = 30.$$

$$63) x + y - z = 20$$

$$y + z - x = 6$$

$$x + z - y = 14.$$

$$64) x + y + z = 31$$

$$x + y - z = 25$$

$$x - y - z = 9.$$

$$65) 5x - 4y + z = 17$$

$$4x - 7y + z = -29$$

$$-3x + 4y - 2z = -12.$$

$$66) 8x - 7y + 4z = 14$$

$$3x - 5y + 2z = -6$$

$$-6x + 11y - 3z = 47.$$

$$67) x + 2y + 4z = 4$$

$$7x - y + 2z = 14$$

$$3x + 4y - 12z = 5.$$

$$68) \begin{aligned} 2x - 3y + 5z &= 7 \\ -6x + 11y + 3z &= 41 \\ 5x - 6y + 13z &= 25. \end{aligned}$$

$$69) \begin{aligned} 4x + 2y - 3z &= 0 \\ -6x + 10y + 5z &= 28 \\ 12x - 7y - 10z &= -30. \end{aligned}$$

$$70) \begin{aligned} 2x + 3y - 4z &= 7 \\ 3x - 4y + 2z &= 3\frac{1}{2} \\ 4x + 2y - 3z &= 7. \end{aligned}$$

$$71) \begin{aligned} 5x - 8y + 4z &= 23 \\ 7x + 2y - 3z &= 7 \\ 4x + 3y - 7z &= -24. \end{aligned}$$

$$72) \begin{aligned} 15x - 7y + 13z &= 40 \\ 8x + 9y - 4z &= 14 \\ 12x - 2y - 9z &= -19. \end{aligned}$$

$$73) \begin{aligned} x + y + z &= 29 \\ x + 2y + 3z &= 62 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{4}z &= 10. \end{aligned}$$

$$74) \begin{aligned} 2x + 5y - 3z &= 20 \\ 6x - 3y + 4z &= 10 \\ 5x + 2y - 7z &= 0. \end{aligned}$$

$$75) \begin{aligned} 4x + 3y + 2z &= 38 \\ 5x + 4y + 3z &= 50 \\ 7x + 5y + 4z &= 67. \end{aligned}$$

$$81) \begin{aligned} 5x - 3y + 4z + 6v &= -5 \\ 4x + 2y - 5z - 2v &= 14 \\ 6x - 11y + 7z + 5v &= -54 \\ 7x + 6y - 3z + 4v &= 48. \end{aligned}$$

$$82) \begin{aligned} 8x - 5y - 3z - 7v &= 6 \\ 3x - 2y + 7z + 5v &= -6 \\ 4x + 3y - 2z + 9v &= 18 \\ 5x - 8z + 10v &= 5. \end{aligned}$$

$$83) \begin{aligned} 5x + 3y - 6z - 4v &= 4 \\ 7x + 6y + 5z + 9v &= 36 \\ 6x - 4y + 7z + 6v &= 23 \\ 3x + 4z - 5v &= -13. \end{aligned}$$

$$76) \begin{aligned} 80x + 32y + 3z + 1 \\ &= 100x + 10y \end{aligned}$$

$$\frac{x}{4} + \frac{z}{9} = \frac{y}{2}$$

$$z - \frac{y}{2} = \frac{3}{4}x.$$

$$77) \begin{aligned} 5\frac{1}{2}x + 3\frac{1}{4}y + 1\frac{1}{8}z &= 126 \\ 3\frac{3}{4}x + \frac{1}{5}y + 2z &= 87\frac{1}{10} \\ z - x &= 2(y - 1). \end{aligned}$$

$$78) x + y + z + u = 438.$$

$$\frac{x}{3} - 4 = y$$

$$\frac{z}{2} - 11 = x$$

$$\frac{u}{5} + 1 = \frac{y}{3}.$$

$$79) \begin{aligned} 6x + 5y + 10z + 2v &= 4 \\ 9x + 2z + 3v &= 31 \\ 12x - 6y + 16z - 6v &= 58 \\ 5x - 5y + 9z + 15v &= 11\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

$$80) \begin{aligned} 3x + 2y + z + v &= 0 \\ 4x + y - 2z + 3v &= 2 \\ 2x + 3y - z + 2v &= 1 \\ 5x - 3y + 20z - 11v &= 3. \end{aligned}$$

- 84) $3x - 5y + 2z = -a + 7b - 11c$
 $8x + 10y - 7z = 44a - 43b + 31c$
 $7x + 3y - 11z = 27a - 62b + 36c.$
- 85) $5x + 8y - 3z = 12m + 8n$
 $8x + 5y - 12z = -18m + 35n$
 $7x - 3y + 5z = 16m + 7n.$
- 86) $4x + 7y - 9z = 3a + 22b + 48c$
 $5x - 2y + 4z = 19a - 37b - 18c$
 $6x - 3y + 5z = 23a - 48b - 24c.$
- 87) $3x + 5y - 9z = 6a + 13b - 23c.$
 $4x - 6y + 17z = 8a - 8b + 40c$
 $11x - 3y - 5z = 22a + 5b - 7c.$
- 88) $5x + 3y - 2z = 18a - 2b$
 $6x - 2y + 5z = 16a - 8b$
 $8x + 7y - 9z = 31a - b.$
- 89) $3x + 8y - 5z = a - 13c$
 $5x - 7y + 6z = 16a + 7c$
 $6x + 9y - 11z = a - 28c.$
- 90) $5x + 6y - 4z = 21a + b$
 $8x - 9y + 3z = 71a + 11b$
 $13x - 12y + 11z = 125a + 24b.$
- 91) $6x - 5y + 4z = 7m + 6n$
 $2x - 8y + 7z = -4m + 19n$
 $4x + 9y - 3z = 17m - 13n.$
- 92) $x\sqrt{5} - y - 3z = 2$
 $2x - 3y\sqrt{5} - 6z = 6$
 $4x + 6y + z\sqrt{5} = 5.$
- 93) $3x\sqrt{2} - 2y - 15z = 6$
 $2x + y\sqrt{2} + 3z = 10$
 $3x + 5y + 2z\sqrt{2} = 4.$
- 94) $4x + y\sqrt{3} + 2z = 2$
 $5x - 2y - 5z\sqrt{3} = 8$
 $2x\sqrt{3} + y - z = 1.$
- 95) $4x\sqrt{7} - 2y + 9z = 3$
 $3x + \frac{1}{2}y\sqrt{7} - 3z = 4$
 $2x + \frac{5}{3}y - 5z\sqrt{7} = 1.$
- 96) $x\sqrt{3} + 4y\sqrt{2} + 3z = 33a$
 $3x\sqrt{2} + 2y\sqrt{3} + 7z = 35a$
 $2x\sqrt{6} - 5y + 6z\sqrt{2} = 3a\sqrt{2}.$

§ 33. II. Gleichungen vom zweiten Grade.

Gleichungen mit einer unbekanntem Zahl.

a) Rein quadratische Gleichungen.

- 1) Wie theilt man die quadratischen Gleichungen ein?
- 2) Was ist eine rein quadratische Gleichung? Geb die allgemeine Form einer rein quadratischen Gleichung an. Wie wird eine rein quadratische Gleichung aufgelöst? Wie viel Werthe hat die unbekanntem Zahl in einer solchen Gleichung?

- 3) $\frac{x^2}{5} = 20.$
 4) $\frac{2x^2}{3} = 24.$
 5) $x^2 = 7.$
 6) $5 : x = x : 45.$
 7) $(5 - x) : 4 = 4 : (5 + x).$
 8) $x^2 = -4.$
 9) $x^2 = -18.$
 10) $x^2 - 17 = 130 - 2x^2.$
 11) $6y^2 - 37 = 11y^2 - 162.$
 12) $z^2 + 33 = 1 - 7z^2.$
 13) $\frac{3}{4}x^5 + \frac{1}{3}x^3 = 2\frac{5}{12}x^3 - 1\frac{1}{3}x^5.$
 14) $6\frac{1}{3} - 5\frac{1}{2}\sqrt{y} = 12\frac{1}{6} + 7\frac{1}{3}\sqrt{y}.$
 15) $4\frac{2}{3}x^2 - 3\frac{1}{4} = 11\frac{1}{2}x^2 - 13\frac{1}{6}.$
 16) $13\frac{2}{5} - 3\frac{3}{4}z^2 = 4\frac{1}{3}z^2 - 11\frac{1}{2}.$

17) $34\frac{2}{3} - 4\frac{1}{4}x^2 = 11\frac{5}{8} + 1\frac{1}{6}x^2.$

18) $14\frac{3}{8} - 6\frac{1}{2}x^2 = 3\frac{2}{5} + 1\frac{3}{4}x^2.$

19) $2\frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{5}x^2 = \frac{5}{4}x^2 - \frac{19}{20}x^4.$

20) $\frac{mx^2}{n} = c^2.$

21) $mx^2 + nx^2 = a^2p.$

22) $a : (b + x) = (b - x) : c.$

23) $x^2 + ab = 5x^2.$

24) $\frac{ax}{b} = \frac{c}{x}.$

25) $\frac{ax}{b} = \frac{m}{nx}.$

26) $(a + x)(a - x) = b.$

27) $\frac{ax + b}{cx + d} + \frac{ax - b}{cx - d} = f.$

28) $x + \sqrt{a^2 + x^2} = \frac{2a^2}{\sqrt{a^2 + x^2}}.$

29) $\sqrt{\frac{a^2}{x^2} + b^2} - \sqrt{\frac{a^2}{x^2} - b^2} = b.$

30) $\frac{a}{x} + \sqrt{\frac{a^2}{x^2} - 1} = \frac{x}{b}.$

31) $\frac{a - \sqrt{a^2 - x^2}}{a + \sqrt{a^2 - x^2}} = b.$

32) $\frac{\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}} = b.$

β) Gemischt quadratische Gleichungen.

33) Was ist eine gemischt quadratische Gleichung? Wie ist die allgemeine Form derselben? Wie ist die Formel einer geordneten gemischt quadratischen Gleichung?

34) Wie wird eine gemischt quadratische Gleichung aufgelöst? Wie findet man die quadratische Ergänzung?

35) In welchem Falle sind die Wurzeln einer Gleichung reell — in welchem imaginär?

36) Was heißt eine Folge — was eine Abwechslung der Zeichen? In welchem Falle hat eine gemischt quadratische Gleichung zwei positive — in welchem zwei negative Wurzeln? Desgleichen eine positive und eine negative Wurzel?

37) Wie wird eine Gleichung von der Form $x^{2n} + fx^n = g$ aufgelöst?

$$38) x^2 - 10x = -21.$$

$$39) x^2 - 6x = -5.$$

$$40) x^2 - 14x = -24.$$

$$41) x^2 - 6x = 27.$$

$$42) x^2 + 12x = -32.$$

$$43) x^2 + 18x = -72.$$

$$44) x^2 + 7x = 30.$$

$$45) x^2 + x = 6.$$

$$46) z^2 + 10z = 11.$$

$$47) y^2 + 12y = 64.$$

$$48) x^2 - 10x = -16.$$

$$49) y^2 - 18y = -65.$$

$$50) x^2 + 24x = -108.$$

$$51) x^2 + \frac{3}{2}x = 10.$$

$$52) x^2 - \frac{1}{4}x = \frac{3}{4}.$$

$$53) x^2 + \frac{2}{3}x = \frac{8}{9}.$$

$$54) x^2 - x = 8\frac{3}{4}.$$

$$55) x^2 + \frac{2}{10}x = 1.$$

$$56) x^2 - \frac{1}{12}x = -\frac{1}{2}.$$

$$57) x^2 + 6x + 4 = 59.$$

$$58) x^2 - 8x + 10 = 19.$$

$$59) 3x^2 + 2x - 9 = 76.$$

$$60) 5x^2 - 4x + 3 = 159.$$

$$61) 2x^2 - 9x - 4 = 31.$$

$$62) 7x^2 - 21x + 13 = 293.$$

$$63) \frac{x^2}{3} + \frac{4x}{5} - 19 = 15\frac{1}{5}.$$

$$64) 6x + \frac{35 - 3x}{x} = 44.$$

$$65) 3x - \frac{1121 - 4x}{x} = 2.$$

$$66) 3x - \frac{169 - 3x}{x} = 29.$$

$$67) \frac{x}{4} \left(\frac{x + 40}{6} \right) = 4x + 320.$$

$$68) 16 - \frac{2x^2}{3} = \frac{4x}{5} + 7\frac{3}{5}.$$

$$69) \frac{10}{x} - \frac{14 - 2x}{x^2} = \frac{22}{9}.$$

$$70) 4x - \frac{36 - x}{x} = 46.$$

$$71) 16 - \frac{5 - x}{2} = \frac{9 + 3x}{x} + 3x.$$

$$72) x^2 - 24x = -4.$$

$$73) x^2 - 4x = 18.$$

$$74) x^2 - 32x = 304.$$

$$75) x^2 + 8x = 7.$$

$$76) x^2 + 30x = -72.$$

$$77) x^2 + 10x = -23.$$

$$78) x^2 - 5x = 7.$$

$$79) x^2 - 6x = -10.$$

$$80) x^2 + 8x = -22.$$

$$81) \frac{16}{x} - \frac{100 - 9x}{4x^2} = 3.$$

$$82) \frac{x + 11}{x} + \frac{9 + 4x}{x^2} = 7.$$

$$83) 3z^2 - 5z = 4.$$

$$84) 3y^2 - 7y = -3.$$

$$85) 3x^2 - 11x = -2.$$

$$86) 4x - \frac{14 - x}{x + 1} = 14.$$

- 87) $\frac{8-x}{8} - \frac{2x-11}{x-3} = \frac{x-2}{6}$.
- 88) $5x - \frac{3x-3}{x-3} = 2x + \frac{3x-6}{2}$.
- 89) $\frac{x+3}{2} + \frac{16-2x}{2x-5} = 5\frac{1}{5}$.
- 90) $\frac{x}{x+60} = \frac{7}{3x-5}$.
- 91) $\frac{8x}{x+2} - 6 = \frac{20}{3x}$.
- 92) $\frac{40}{x-5} + \frac{27}{x} = 13$.
- 93) $x^2 - 8ax = -12a^2$.
- 94) $x^2 + 10ax = 24a^2$.
- 95) $x^2 - 3ax = 10a^2$.
- 96) $x^2 + 4ax = -a^2$.
- 97) $x^2 - 5ax = \frac{3a^2}{2}$.
- 98) $x^2 - ax = \frac{3b^2 - a^2}{2}$.
- 99) $x^2 - 4ax = 9b^2$.
- 100) $x^2 - 2bx = a^2 + 2ab$.
- 101) $x^2 + 6bx = a^2 - 6ab$.
- 102) $ax^2 - bx = c$.
- 103) $adx - acx^2 = bcx - bd$.
- 104) $4y^2 + 4ay = 3a^2 - 12ab - 8by$.
- 105) $b^2x^2 + b^4 = a^4 + 2b^3x$.
- 106) $12ab + 8ax = 4x^2 + 4bx - 3b^2$.
- 107) $4z^2 + 20az = 30ab + 3b^2 + 4bz$.
- 108) $y^2 + 2ny = 8mn + 4my$.
- 109) $15a^3 + 5bx^2 - 25abx = 3a^2x$.
- 110) $3ax^2 - 5bx = 4ac$.
- 111) $2ax^2 + 3bcx = -5d^2$.
- 112) $4ax^2 - b^2x = c^2d$.
- 113) $ax^2 - bdx = b^2c$.
- 114) $5ax^2 + 3bcx = -2b^3$.
- 115) $a^2x^2 - 16ab^2x = -15b^4$.
- 116) $(a-b)x^2 - 2bx = b$.
- 117) $x^4 - 6x^2 = -5$.
- 118) $x^4 + 3x^2 = 28$.
- 119) $x^4 - 20x^2 = -64$.
- 120) $x^4 - 34x^2 = -225$.
- 121) $8x^6 + 7x^3 = 1$.
- 122) $8z^6 + 91z^3 = -216$.
- 123) $4x^4 - 89a^2x^2 = -400a^4$.
- 124) $x^4 - 5x^2 = -4$.
- 125) $x^4 - 74x^2 = -1225$.
- 126) $3x^6 + 42x^3 = 3321$.
- 127) $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$.
- 128) $x + \sqrt{2x+3} = 6$.
- 129) $2x - \sqrt{5x-1} = 1$.
- 130) $x = 10 - 2\sqrt{x+5}$.
- 131) $\sqrt{3x+1} + 3\sqrt{x} = 5$.
- 132) $\sqrt{x+7} = 1 + \sqrt{2x}$.
- 133) $3x + 5x^{1/2} = 12$.
- 134) $4x - 6\sqrt{x} = 70$.
- 135) $8x - 29\sqrt{x} = 55$.
- 136) $4x - 12\sqrt{x} = 16$.
- 137) $\frac{2}{3}x + 6\sqrt{x} = 3\frac{1}{6}$.
- 138) $\frac{1}{2}x - 3\sqrt{x} = -4$.
- 139) $\sqrt[4]{x} + \sqrt{x} = 20$.

§ 34.

Quadratische Gleichungen mit mehreren unbekanntem Zahlen.

- | | |
|---|--|
| 1) $x + y = 12$
$xy = 32.$ | 18) $x^2 + y^2 = 40$
$xy = 12.$ |
| 2) $x + y = 33$
$xy = 272.$ | 19) $16x^2 + 4y^2 = 145$
$2xy = 3.$ |
| 3) $xy = 35$
$x + y = 12.$ | 20) $25x^2 + 9y^2 = 148$
$5xy = 8.$ |
| 4) $2x + 3y = 5$
$8xy = 3.$ | 21) $x^2 - y^2 = 68$
$xy = 288.$ |
| 5) $\frac{1}{2}x + 5y = 37$
$xy = 28.$ | 22) $x^2 + y^2 = 13$
$xy = 6.$ |
| 6) $x + 2y = 10$
$xy = 12.$ | 23) $x^2 + y^2 = 181$
$xy = -90.$ |
| 7) $(x + y) : x = 5 : 3$
$xy = 6.$ | 24) $x - y = 3$
$xy + 7y = 24.$ |
| 8) $(x + y) : y = 3 : 1$
$xy = 18.$ | 25) $x - y = 5$
$x^2 + y^2 = 53.$ |
| 9) $x^2 + y^2 = 137$
$x + y = 15.$ | 26) $(x - y) : x = 5 : 6$
$xy^2 = 384.$ |
| 10) $5x + 3y = 11$
$25x^2 + 9y^2 = 73.$ | 27) $x^2 + xy = 12$
$y^2 + xy = 24.$ |
| 11) $x + y = 9$
$x^2 + y^2 + 6x = 65.$ | 28) $y - 3x = 5$
$y^2 - 8x^2 - 6y = 8.$ |
| 12) $(x + y) : x = 7 : 5$
$xy + y^2 = 126.$ | 29) $3y - 2x = -3$
$xy - 5x = -12.$ |
| 13) $x + 2y = 8$
$x^2 + y^2 = 13.$ | 30) $2x + y = 11$
$xy - 7y + 3x = 3.$ |
| 14) $x + y = 9$
$x^2 - y^2 = 45.$ | 31) $xy = 440$
$\frac{x}{y} = \frac{10}{11}.$ |
| 15) $(x + y) : (x - y) = 13 : 5$
$x + y^2 = 25.$ | 32) $x - y = 13$
$xy = 90.$ |
| 16) $5x + 3y = 13$
$3x^2 + 2y^2 = 14.$ | 33) $x - y = 7$
$x^2 - y^2 = 105.$ |
| 17) $7x + 2y = 78$
$3x^2 + 5y^2 = 380.$ | |

- 34) $x - y = 15$
 $\frac{xy}{2} = y^3$
- 35) $\frac{10x + y}{xy} = 3$
 $9y - 9x = 18$
- 36) $xy + x = 48$
 $xy - y = 35$
- 37) $2x + 3y = 19$
 $5x^2 - 2y^2 = 107$
- 38) $x^2 + y^2 = 464$
 $x^2 - y^2 = 336$
- 39) $xy + x = 55$
 $xy + y = 60$
- 40) $xy = 56$
 $\frac{y + 5}{3} = \frac{x}{2}$
- 41) $3x + 4y = 4$
 $4x^2 - 3y^2 = 52$
- 42) $x^2 + y^2 = \frac{13}{x - y}$
 $xy = \frac{6}{x - y}$
- 43) $x + y = 2$
 $x^2 + y^2 + xy = 3$
- 44) $x + y = 4^{3/4}$
 $x^2 + y^2 + xy = 19^{9/16}$
- 45) $x + y = 5$
 $x^3 + y^3 = 35$
- 46) $x^4 - y^4 = 544$
 $x^2 + y^2 = 34$
- 47) $(x^2 + y^2) : (x^2 - y^2) = 17 : 8$
 $xy^2 = 45$
- 48) $4xy = 96 - x^2y^2$
 $x + y = 6$
- 49) $x^2 + x + y = 18 - y^2$
 $xy = 6$
- 50) $x^2 + 2xy + y^2 + 2x$
 $= 120 - 2y$
 $xy - y^2 = 8$
- 51) $x^2 + y^2 - x - y = 78$
 $xy + x + y = 39$
- 52) $xy + x + y = 51$
 $\frac{x}{y} + x - y = 13$
- 53) $x^4 + y^4 = 82$
 $xy = 3$
- 54) $x^4 + y^4 = 17$
 $xy = 2$
- 55) $(x + y)(x^2 + y^2) = 203$
 $(x - y)(x^2 - y^2) = 63$
- 56) $(x + y)(x^2 + y^2) = 585$
 $(x - y)(x^2 - y^2) = 441$
- 57) $(\sqrt{x} + \sqrt{y}) : (\sqrt{x} - \sqrt{y})$
 $= 5 : 1$
 $x - y = 5$
- 58) $x - 2\sqrt{xy} + y - \sqrt{x}$
 $+ \sqrt{y} = 0$
 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5$
- 59) $x^2 + y\sqrt{xy} = 9$
 $y^2 + x\sqrt{xy} = 18$
- 60) $x - y = a$
 $x^2 + y^2 = b^2$
- 61) $x : y = m : n$
 $x^2 - y^2 = a^2$
- 62) $x + y = s$
 $x^2 - y^2 = d^2$
- 63) $2x - y = 7a$
 $3x^2 + 2y^2 = 158a^2$
- 64) $3x - 4y = 10b$
 $2x^2 + 3y^2 = 11b^2$
- 65) $3x + 4y = 2a$
 $3x^2 + y^2 = 16a^2$

- 66) $3x - 2y = 13m$
 $4x^2 - 5y^2 = 16m^2.$
- 67) $x + 4y = 30a$
 $3x^2 - 4xy - y^2 = 600a^2.$
- 68) $4x^2 + 9y^2 = 45a^2$
 $xy = 3a^2.$
- 69) $9x^2 + 25y^2 = 29b^2$
 $xy = \frac{2}{3}b^2.$
- 70) $9x^2 + y^2 = 37a^2$
 $xy = -2a^2.$
- 71) $5x^2 + 2y^2 = 5a^2 + 8b^2$
 $xy = 2ab.$
- 72) $3x^2 + 2y^2 = 18a^2 + 12b^2$
 $xy = 6ab.$
- 73) $x - y = a$
 $x^3 - y^3 = b.$
- 74) $xy + x = a$
 $xy + y = b.$
- 75) $x(y + z) = 6$
 $y(x + z) = 23\frac{1}{3}$
 $z(x + y) = 22\frac{2}{3}.$

- 76) $x^2 + y^2 = 13$
 $x^2 + z^2 = 34$
 $y^2 + z^2 = 29.$
- 77) $x(y + z) = 5$
 $y(x + z) = 8$
 $z(x + y) = 9.$
- 78) $x(y + z) = a$
 $y(x + z) = b$
 $z(x + y) = c.$
- 79) $\frac{xyz}{x + y} = a$
 $\frac{xyz}{x + z} = b$
 $\frac{xyz}{y + z} = c.$
- 80) $x\sqrt{y} = a$
 $x\sqrt{z} = b$
 $y\sqrt{z} = c.$
- 81) $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 13$
 $x + y + z = 19$
 $x(y + z) = 48.$

§ 35. III. Exponentialgleichungen.

- 1) $(a^{2x+3})^4 = (a^{5x-1})^8$
 $\times (a^{2x-7})^4.$
- 2) $a^{\frac{42}{4+x}} : a^3 = a^4.$
- 3) $(b^{14x-6})^{2-5x} = (b^{10x-1})^{4-7x}.$
- 4) $b^4 \sqrt[3]{b^{5+11x}} = \sqrt[3]{b^{20}}.$
- 5) $\frac{\sqrt{a^{1+3x}}}{\sqrt[5]{a^{26-7x}}} = \sqrt[8]{a^{2+10x}}.$
- 6) $\frac{a^{\frac{3-4x}{2}}}{a^{\frac{6-7x}{5}}} \cdot a^{4,5} = 1.$
- 7) $12^x = 3,464102.$
- 8) $(-1,23)^x = -2,8153057.$
- 9) $(4\frac{1}{5})^{2+\frac{3}{4}x} = 2548,04.$
- 10) $0,0342^{\frac{6}{5}x} = 0,363252.$
- 11) $0,6925^{\frac{5}{6}x} = 2,50583.$
- 12) $4382,5^{-\frac{3}{5}x} = 0,00004265.$
- 13) $0,3^{\frac{5}{6}x+2} = 29,55263^{\frac{2}{3}x-1}.$
- 14) $\sqrt[9]{10} = \sqrt[3]{1,35935632}.$
- 15) $\sqrt[x]{5^{2x+7}} = \sqrt[5x]{(6,79371)^{4x+3}}.$
- 16) $\left(\frac{234}{567}\right)^{8-\frac{9}{10}x} = \left(\frac{987}{654}\right)^{3-2x}$
 $\times (1,57245)^{2x-1}.$

17) $3125^{\frac{x+1}{x+2}} \cdot 15625^{-\frac{x+2}{x+3}} = 0,2$

18) $a^{2x} \cdot a^{7y} = (a^{13})^2.$

$a^{3x} : a^8 = (a^y)^5.$

19) $a^{\frac{3}{x+1}} \cdot a^{y+2} = [(a^3)^9]^{1/4}$

$a^{\frac{7}{x+1}} : a^{y-5} = a^2 \cdot a^{3/4}.$

20) $a^x b^y = p$

$c^x d^y = q.$

21) $3^x \cdot 4^y = 331776$

$2^y \cdot 5^x = 40000.$

22) $\sqrt[10]{4^{-x}} : \sqrt[10]{512^{-y}} = 8$

$\sqrt[3]{2^x} \cdot \sqrt[5]{9^y} = 324.$

23) $\sqrt[x]{5} \cdot \sqrt[y]{0,2} = 1$

$\sqrt[x]{4,92} : \sqrt[y]{1,23} = 4.$

24) $\sqrt[x]{59049} : \sqrt[y]{1296} = 1,5$

$\sqrt[\frac{x}{3}]{1048576} : \sqrt[\frac{y}{4}]{(4096)^{-2}} = 256.$

25) $64^{\frac{1}{x}} \cdot 3^y = 36$

$1728^{\frac{1}{x}} \cdot 5^y = 300.$

26) $x^y = 243$

$1024^{\frac{1}{y}} = (2/3 x)^2.$

27) $2^x \cdot 3^y = 18$

$4^x \cdot 5^z = 500$

$6^y \cdot 7^z = 12348.$

28) $(x^{7-x})^{4-x} = 1.$

29) $(10^{4-x})^{5-x} = 100.$

30) $2^{\frac{1}{1+x}} = 3^{x+2}.$

31) $a \cdot b^x = c^{\frac{1}{x}}.$

32) $x^{\log x} = 10.$

33) $x^2 + \log x = 15,20153.$

34) $x^3 - \log x = 40,58364.$

35) $(2x)^{2 \log 2x + 5} = 1401500.$

36) $625^{\frac{x+1}{x+2}} : 15625^{\frac{4x-3}{5x-4}} = 0,04.$

37) $7^{\frac{x+1}{x+2}} = 6,70375^{\frac{x+3}{x+4}}.$

§ 36. IV. Unbestimmte Gleichungen.

1) Wie ist die allgemeine Formel für die unbestimmte Gleichung des ersten Grades mit zwei unbekanntem Zahlen? Was für Zahlen müssen die unbekanntem Zahlen einer unbestimmten Gleichung sein?

2) Die Coefficienten der Unbekanntem müssen unter sich was für Zahlen sein?

3) Welche Fälle können in der allgemeinen unbestimmten Gleichung vorkommen? Wie werden sie aufgelöst?

4) $17x - 14y = 0.$

5) $23x - 14z = -129.$

6) $17x - 49y = -8.$

7) $24x + 7 = 11y - 4.$

8) $8x + 13y = 159.$

9) $5x + 3y = 78.$

10) $17x + 29y = 250.$

11) $48x + 16 = 3x + 38y - 8.$

$$12) 59x + 7(y - 28\frac{1}{7}) = 59 + 2(x + 10y).$$

$$13) (2x\sqrt{x} + 3y\sqrt{y})(2x\sqrt{x} - 3y\sqrt{y}) = 3x(x^2 - 5) - 8y(y^2 - 2) + 20 + (x\sqrt{x} + y\sqrt{y})(x\sqrt{x} - y\sqrt{y}).$$

§ 37. Gleichungen vom ersten Grade mit einer unbekanntem Zahl.

1) Von welcher Zahl giebt das Doppelte zu 18 addirt eine Summe gleich 82?

2) Von welcher Zahl giebt das Doppelte zu 44 addirt eine Summe, welche dem Vierfachen der gesuchten Zahl gleich ist?

3) Von welcher Zahl übertrifft das Doppelte ihre Hälfte um 6?

4) Subtrahire ich den m ten Theil einer gedachten Zahl von a , so erhalte ich b . Wie heißt die gedachte Zahl?

5) Eine Summe von 2500 Rubeln soll unter zwei Brüder so getheilt werden, daß der eine so oft 4 Rubel erhalte, als der andere 1 Rubel. Wie viel Rubel erhält Jeder?

6) Von zwei Städten, deren Entfernung 187 Meilen beträgt, gehen zwei Reisende zu gleicher Zeit ab, um einander entgegen zu reisen. Der eine macht täglich 8, der andere 9 Meilen. Nach wie viel Tagen werden sie einander begegnen?

7) Unter 4 Arme vertheilt Jemand 2 Rbl. Dem Zweiten giebt er das Doppelt, dem Dritten das Dreifache, dem Vierten das Vierfache von dem, was der Erste erhält. Wie viel bekommt Jeder?

8) Ein Buchhändler verkaufte von einem gewissen Werke das eine Mal 10, das andere Mal 15 Exemplare, und löste das zweite Mal 35 Rbl. mehr als das erste Mal. Was kostete ein Exemplar des Werkes?

9) Ein Sterbender hinterläßt drei Dienern zusammen ein Legat von 1400 Rbl. mit der Bestimmung, daß A das Doppelte von B, und B das Dreifache von C erhalten solle. Wie viel bekommt Jeder?

10) Vier Kaufleute legen zu einer gemeinschaftlichen Speculation 47550 Rbl. zusammen, und zwar giebt B dreimal so viel als A, C so viel als A und B zusammen, und D so viel als B und C zusammen. Wie viel beträgt der Beitrag eines Jeden?

11) Ein Tuchhändler erhält 3 Stück Tuch, deren Länge zusammen 159 Arschin beträgt. Wenn nun das zweite Stück um 15 Arschin länger ist als das erste, und das dritte um 24 Arschin länger als das zweite, wie lang ist jedes?

12) Ein Gefäß, welches 146 Kruschken hält, ist mit einer Mischung von Branntwein, Wein und Wasser gefüllt, und zwar befinden sich in ihm 15 Kruschken Wein mehr als Branntwein und eben so viel Wasser als Wein und Branntwein zusammen. Wie viel also von jeder Flüssigkeit?

13) Es beschäftigt Jemand 4 Arbeiter, dem ersten zahlt er 2 Rbl. mehr als dem zweiten, diesem drei mehr als dem dritten und dem dritten 4 mehr als dem vierten; zusammen aber hat er allen viere 32 Rbl. zu bezahlen. Wie viel bekommt Jeder?

14) Ein Vater schickt nach den Ferien seine vier Söhne wieder in die Erziehungsanstalt zurück, und vertheilt beim Abschied eine gewisse Summe unter sie. Dabei giebt er dem dritten 9 Rbl. mehr als dem jüngsten, dem zweiten 12 mehr als dem dritten und dem ältesten 18 mehr als dem zweiten; zusammen aber erhalten sie 6 Rubel mehr als das 7fache von dem, was der jüngste erhält. Wie viel bekommt Jeder?

15) Eine gewisse Geldsumme wird unter 6 Arme so vertheilt, daß der zweite 15 Kopeken, der dritte 16 Kopl., der vierte 25, der fünfte 26, der sechste 28 Kopl. weniger bekommen soll als der erste; zusammen bekommen sie 10 Kopl. mehr als das Dreifache des ersten. Wie viel bekommt Jeder?

16) Man soll die Zahl 99 so in 5 Theile zerlegen, daß der erste größer ist als der zweite um 3, kleiner als der dritte um 10, größer als der vierte um 9 und endlich kleiner als der fünfte um 16. Wie groß ist jeder Theil?

17) Von welchen zwei Zahlen ist die Summe = 59 und die Differenz = 17?

18) Von welcher Zahl ist das Dreifache um 12 vermehrt eben so viel über 54, als das Dreifache allein unter 144?

19) Zwei Personen treten mit gleichen Geldsummen in eine Spielgesellschaft ein. Nachdem der erste 14 Rbl. verloren, der zweite 24 Rbl. gewonnen hatte, befand sich der Zweite im Besiz von doppelt so viel Geld als der Erste. Wie viel hatte Jeder ursprünglich?

20) Bei der Wahl eines Beamten, bei welcher sich 943 Wähler und 2 Bewerber befanden, hatte der gewählte Candidat eine Majorität von 65 Stimmen erhalten. Wie viele hatten für ihn gestimmt?

21) Ein Kaufmann hat 4 Stücke Seidenzeug von gleicher Länge. Nachdem er von jedem der drei ersten Stücke 19 Ellen und von dem

vierten 17 Ellen verkauft hat, behält er im Ganzen 142 Ellen übrig. Wie groß war ursprünglich jedes Stück?

22) Ein Landwirth hat zwei gleich große Schaafheerden. Nachdem er von der ersten 39, von der zweiten 93 Stücke verkauft hat, ist der Ueberrest der ersten Heerde doppelt so groß als der der zweiten. Wie groß war ursprünglich jede Heerde?

23) Es kauft Jemand 12 Arschin Weinwand für 2 Rbl. 14 Kopf., und zwar zahlt er bei einem Theile für die Arschin 19 Kopf., bei dem andern 17 Kopf. Wie viele Arschin kauft er von jeder Sorte?

24) Die Zahl 197 soll so in zwei Theile getheilt werden, daß das Vierfache des größeren um 50 größer ist, als das Fünffache des kleineren.

25) Einem Curiere, der täglich 12 Meilen macht, wird nach 5 Tagen vom nämlichen Orte aus ein anderer nachgeschickt, der, um jenen einzuholen, täglich 15 Meilen machen soll. Nach wie viel Tagen werden beide Curiere zusammentreffen?

26) Ein Bote geht von einem Orte A nach einem Orte D und macht täglich 35 Werst. Zu derselben Zeit geht ein anderer Bote von einem Orte B, welcher 84 Werst hinter A liegt, nach demselben Orte D und macht täglich 49 Werst. Nach wie viel Tagen, und in welcher Entfernung vom Orte B, werden beide Boten zusammentreffen?

27) Von einem Orte A wird nach einem Orte B ein Courier abgesandt, der alle Stunden $8\frac{3}{4}$ Werst zurücklegt. $1\frac{1}{2}$ Stunden nach seiner Abreise wird ihm ein anderer von demselben Orte A nachgeschickt, der, um jenen einzuholen, stündlich $11\frac{3}{8}$ Werst machen muß. Wie viel Stunden nach Abgang des ersten und in welcher Entfernung von A wird der zweite Courier den ersten einholen?

28) Um 6 Uhr Morgens fährt ein Gilwagen aus einem Orte A nach einem Orte B und macht jede Stunde $1\frac{1}{5}$ Meilen. 20 Minuten nach 2 Uhr verläßt ein Dampfwagen den Ort B, fährt nach A und langt auf einer neben der Landstraße liegenden Eisenbahn, indem er jede Stunde 6 Meilen zurücklegt, zu derselben Zeit in A an, zu welcher der Gilwagen in dem Orte B ankommt. Wie weit ist A von B entfernt?

29) Zwei Fußgänger, von denen der eine alle 3 Minuten 52 Saschen, der andere jede Minute 16 Saschen zurücklegt, gehen von zwei, um $52\frac{1}{2}$ Werst (à 500 Saschen) von einander entfernten Dörfern einander entgegen, und zwar der erste $2\frac{1}{2}$ Stunden früher als der zweite. Nach welcher Zeit werden beide Fußgänger einander begegnen?

30) Ein feindliches Corps ist vor 2 Tagen von einem gewissen Orte aufgebrochen und macht täglich $31\frac{1}{2}$ Werst. Man will ihm von dem nämlichen Orte aus nachsehen, und zwar so schnell, daß man es in 6 Tagen erreicht habe. Wie viel Werst müssen zu dem Ende täglich gemacht werden?

31) Ein Fußgänger, der alle 7 Stunden 28 Werst zurücklegt, geht aus einem Orte B ab; ein Reiter verläßt zu gleicher Zeit einen Ort A, welcher 56 Werst hinter B liegt, und macht alle 3 Stunden 28 Werst. Wenn nun jeder derselben auf der Reise im Ganzen nur $1\frac{1}{2}$ Stunden zum Ausruhen verwendet, in welcher Zeit wird der Reiter den Fußgänger einholen?

32) Morgens um 6 Uhr fährt von Köln ein Dampfschiff nach Coblenz, und Mittags um 12 Uhr ein anderes von Coblenz nach Köln. Das erste kommt um 6 Uhr Abends in Coblenz und das zweite um 5 Uhr Abends in Köln an. Um wie viel Uhr und in welcher Entfernung von Köln begegnen die Dampfschiffe einander, wenn die Strecke zwischen Köln und Coblenz zu Wasser $12\frac{1}{2}$ Meilen beträgt?

33) Ein Dampfschiff und ein Segelschiff fahren beide von einem Orte M nach einem Orte N; ersteres macht alle 3 Stunden 7, letzteres in derselben Zeit nur 2 Meilen. Das Segelschiff hat schon $3\frac{1}{2}$ Meilen zurückgelegt, ehe das Dampfschiff abfährt und kommt 5 Stunden später an, als letzteres. Wie viel Zeit gebraucht das Dampfschiff von M bis N, und wie weit ist ersterer Ort von letzterem entfernt?

34) Um 12 Uhr stehen beide Zeiger einer Uhr über einander. Wann und wie oft werden diese Zeiger in den nächsten 12 Stunden wieder übereinander stehen?

35) A und B haben zusammen 60 Rbl. Nachdem A an B 10 Rbl. verloren hat, fehlen ihm noch 8 Rbl., um ebenso viel zu haben als B. Wie viel hatte Jeder ursprünglich?

36) A und B begannen ihre Handelsgeschäfte mit gleichem ursprünglichem Kapitale. Im ersten Jahre wuchs das Kapital von A auf 270 Rbl. mehr als das Dreifache, das von B auf 1530 Rbl. mehr als das Doppelte des ursprünglichen Kapitals an; die Vermehrung der beiderseitigen Kapitalien zusammen betrug dadurch das Fünffache des ursprünglichen Kapitals jedes Einzelnen. Wie groß war das letztere.

37) Zwei Arbeiter waren auf 50 Tage angestellt, jeder mit einem Tagelohn von 60 Kopf. A gab von seinem Tagelohn täglich 6 Kopf.

weniger aus als B, und hatte dadurch am Ende des 50^{ten} Tages nicht bloß das Doppelte von B, sondern außerdem noch so viel, als er in 2 Tagen ausgab, übrig behalten. Wie viel gab Jeder täglich aus?

38) A und B begannen ihr Handelsgeschäft mit gleichen ursprünglichen Kapitalien. Im ersten Jahre gewann A 400 Rbl. und B verlor eben so viel. Im zweiten Jahre verlor A den dritten Theil seines jetzigen Vermögens, und B gewann 400 Rbl. weniger als das Doppelte dessen, das A verloren hatte. Dadurch sah sich B im Besitze von doppelt so viel Vermögen als A. Wie viel hatte Jeder ursprünglich?

39) Die Zahl 68 soll in zwei solche Theile getheilt werden, daß die Differenz zwischen dem größeren und 84 das Dreifache von der Differenz zwischen dem kleineren und 40 ist.

40) A und B spielen Karten mit einem Spiel von 52 Karten. A hob zuerst ab, hierauf B. A hatte doppelt so viel Karten abgehoben, als B liegen ließ, und B siebenmal so viel abgehoben, als A liegen gelassen hatte. Wie viel hob Jeder ab?

41) Von welcher Zahl ist der dritte Theil um 16 größer als der vierte Theil?

42) Ein Landwirth verkauft an zwei Personen Heu, an die erste die Hälfte, an die zweite den vierten Theil seines ganzen Vorraths, an beide zusammen 96 Pud. Wie groß war sein Heuvorrath?

43) Ein Herr vermachte zwei Dienern ein Legat von 210 Rbl., und zwar so, daß der zweite die Hälfte von dem Antheile des ersten bekommen sollte. Wie viel bekam Jeder?

44) Ein Vermögen von 2329 Rbl. soll unter zwei Personen in dem Verhältniß von 5:12 getheilt werden. Wie viel bekommt Jeder?

45) Eine gewisse Geldsumme wurde unter zwei Personen so getheilt, daß so oft A 9 Rbl. bekam, B 4 Rbl. erhielt. Wenn nun A dadurch 15 Rbl. mehr erhielt als B, welches war die zu vertheilende Summe und der Antheil eines Jeden?

46) Es vertheilt Jemand 98 Rbl. so unter 3 Personen, das B $\frac{5}{8}$ von A und C $\frac{1}{5}$ von B erhält. Wie viel bekommt Jeder?

47) Es kauft Jemand 2 Fässer mit Wein, von denen das erste dreimal so viel enthält als das zweite. Nachdem er aus jedem 4 Weder abgelassen, bleibt in jenem viermal so viel Wein zurück als in diesem. Wie viel Wein enthält jedes Faß?

48) Zwei Zahlen verhalten sich zu einander wie 2 : 3; addirt man zu jeder 4, so verhalten sich die Summen zu einander wie 5 : 7. Wie heißen die Zahlen?

49) Eine Geldsumme wird unter 2 Personen vertheilt. Der Antheil des A verhält sich zu dem des B wie 5 : 3, und ist um 50 Rbl. größer als $\frac{5}{9}$ der ganzen Summe. Wie groß ist der Antheil eines Jeden?

50) Es will Jemand Fleisch einkaufen. Kauft er Ochsenfleisch, das Pfund zu 4 Kopf., so braucht er alles Geld, welches er bei sich hat, kauft er aber Hammelfleisch, das Pfund zu $3\frac{1}{2}$ Kopf., so behält er 24 Kopf. übrig. Wie viel Pfund will er kaufen?

51) Zwei hatten zu einem gemeinschaftlichen Geschäfte zusammengelegt, A 2400 Rbl., B 960 Rbl. A hatte dabei doppelt so viel verloren als B, aber nach Abschluß der Rechnung noch dreimal so viel als B übrig behalten. Wie groß war der Verlust eines Jeden.

52) Ein Kaufmann findet, daß er durch einen glücklichen Handel mit seinem angelegten Kapital 15 Procent gewonnen hat, und daß das selbe dadurch auf 15571 Rbl. angewachsen ist. Was war sein angelegtes Kapital?

53) Der Ertrag eines Gutes ist, wegen verbesserter Oekonomie, in diesem Jahre um 8 Procent größer als im vorigen. Der diesjährige Ertrag ist 1890 Rbl. Wie viel war der vorjährige?

54) Wie groß ist ein Kapital, das mit den fünfjährigen Zinsen, die jährlichen Zinsen zu 4 Procent gerechnet, 8208 Rbl. beträgt?

55) Ein Kapitalist ziehet von seinen auf Zinsen stehenden Kapitalien 2940 Rbl. jährlicher Renten; $\frac{4}{5}$ derselben trägt 4 und $\frac{1}{5}$ trägt 5 Procent. Wie viel Geld hat er ausstehen?

56) Es giebt Jemand ein Kapital von 5500 Rbl. zu 4 Procent auf Zinsen, und $4\frac{1}{2}$ Jahre nachher ein anderes Kapital von 8000 Rbl. zu 5 Procent. Wenn er nun diese Kapitalien auf Zinsen stehen läßt, in wie vielen Jahren wird er von beiden gleich viel an Zinsen gezogen haben?

57) Vier Orte A, B, C, D liegen in der Ordnung der genannten Buchstaben hinter einander. A ist von D 238 Werst entfernt, die Entfernung von A und B verhält sich zur Entfernung von C und D wie 2 : 3, und $\frac{1}{4}$ der Entfernung von A und B vermehrt um die Hälfte der Entfernung von C und D ist gleich dem Dreifachen der

Entfernung von B und C. Wie groß sind die Entfernungen der genannten Orte von einander?

58) Nach einer verlorenen Schlacht waren nur noch 3600 Mann mehr als die Hälfte der geschlagenen Armee dienstfähig, 600 mehr als $\frac{1}{8}$ derselben waren verwundet, und die übrigen, nämlich $\frac{1}{5}$ der Armee, theils getödtet, theils gefangen, theils wurden sie sonst vermißt. Wie groß war die Armee?

59) Man soll 91 so in zwei Theile theilen, daß der größere dividirt durch den Unterschied beider Theile den Quotienten 7 giebt.

60) Es vertheilt Jemand 46 Rbl. unter 5 arme Männer und 7 arme Frauen so, daß die einzelnen Anthteile der Männer und ebenso die der Frauen einander gleich sind, ein Mann und eine Frau zusammen aber 8 Rbl. erhalten. Wie viel von obiger Summe kommt auf den Anthheil der Männer und wie viel auf den der Frauen?

61) Es fragte Jemand, wie viel Uhr es sei, und erhielt zur Antwort, es sei zwischen 5 und 6 Uhr und der Stunden- und Minutenzeiger stehen gerade über einander. Wie viel Uhr war es?

62) Die Zahl 49 soll so in zwei Theile getheilt werden, daß sich der größere Theil um 6 vermehrt, zum kleineren Theile um 11 vermindert, verhalte wie 9:2.

63) A, B und C vereinigen sich zu einem gemeinschaftlichen Geschäfte. A legt 600 Rbl. weniger ein als B und 680 Rbl. mehr als C. Die Summe der Einlagen des A und B verhält sich zur Summe der Einlagen von B und C wie 5:4. Wie groß ist die Einlage eines Jeden?

64) Ein Buchhändler verkauft zwei Bände eines Werkes, und zwar den ersten von 100 Bogen für $5\frac{1}{4}$ Rbl., den zweiten von 50 Bogen für $3\frac{3}{4}$ Rbl. Beide waren ganz gleich und prachtvoll gebunden. Der Preis der ungebundenen Bücher selbst aber richtet sich nach der Bogenzahl. Wie theuer war der Einband und was kostete jeder Band ungebunden?

65) Es will Jemand sein Grundstück einzäunen. Setzt er die vorrätigen Pfosten 1 Fuß aus einander, so fehlen ihm zu seinem Bedarf noch 150 Stück, setzt er sie aber 3 Fuß aus einander, so bleiben ihm 70 Stück übrig. Wie viel hat er?

66) Ein Bedienter erhielt contractmäßig jährlich 80 Rbl. und eine Livree. Nach 7 Monaten trat er aus dem Dienste und erhielt $21\frac{2}{3}$ Rbl. nebst der Livree zum Lohne. Wie hoch wurde letztere gerechnet?

67) Wenn man zu einer Zahl 1) 9, 2) 15 und 3) 9 und 15 addirt, so verhält sich die erste Summe zur zweiten wie die zweite zur dritten. Wie groß ist diese Zahl?

68) Ein Gutbesitzer verpachtet sein Besitzthum gegen eine jährliche Kornrente nebst 200 Rbl. baarem Gelde. Wenn 1 Tschetwert Korn 5 Rbl. kostet, so erhält er dadurch von jeder Dessätine einen Ertrag von 5 Rbl., kostet aber ein Tschetwert $6\frac{1}{4}$ Rbl., so beträgt die Rente 6 Rbl. von jeder Dessätine. Aus wie viel Tschetwert bestand die jährliche Kornrente.

69) Ein Bauer hatte zwei Schaafheerden, von denen die kleinere aus lauter Schaafmüttern bestand, deren jede ihm zwei Lämmer brachte. Die Anzahl dieser Lämmer war gleich dem Unterschiede beider Heerden. Wären alle seine Schaafse Schaafmütter gewesen, und hätte ihm jede drei Lämmer gebracht, so würde die Zahl seiner Schaafse auf 432 gestiegen sein. Wie viel Schaafse hatte er?

70) Eine Eierhändlerin kaufte eine Anzahl Eier, je 5 Stück für 2 Kopf. und verkauft davon die Hälfte, je 2 Stück für 1 Kopf., die andere Hälfte aber je 3 Stück für 1 Kopf. und gewinnt 4 Kopf. Wie viel Eier hat sie gekauft?

71) Ein Brunnen kann durch 2 Röhren gefüllt werden. Durch beide zusammen geschieht dies in 12 Stunden durch A allein in 20 Stunden; in welcher Zeit also durch B allein?

72) Ein Windhund verfolgt einen Hasen. Der Hase hat 50 Sprünge voraus und macht 4 Sprünge während der Hund 3 macht; es sind jedoch 2 Hundsprünge so groß als 3 Hasensprünge. Wie viel Sprünge kann sowohl der Hund als der Hase noch machen, bis der erstere den letzteren einholt?

73) Wenn man 10 Äpfel für 3 Kopf. und 25 Birnen für 6 Kopf. kauft und 100 Äpfel und Birnen zusammen für $28\frac{1}{2}$ Kopf. gekauft werden, wie viel Äpfel und wie viel Birnen sind unter diesen 100 Stück?

74) Es hat Jemand zweierlei Weine; von der ersten Sorte kostet die Flasche 40 Kopf., von der zweiten 24 Kopf. Er will daraus eine Mischung machen, die Flasche zu 28 Kopf. Wie viel muß er von jeder Sorte nehmen?

75) Ein Goldarbeiter hat zweierlei Silber, nämlich vierzehnlöthiges und achtlöthiges. Er will eine Schüssel verfertigen, die 20 Mark schwer

und im Gehalte zwölfstöhig sein soll. Wie viel Mark muß er von jedem Silber nehmen?

76) Jemand hat 35 Solotnik Gold von der 96ten Probe und will so viel Kupfer zusetzen, daß die Mischung die 72te Probe enthalte. Wie viel Kupfer muß er zusetzen?

77) Von zwei Stücken Tuch von gleicher Güte, aber von ungleicher Länge, kostet das erste 100 Rbl., das zweite 130 Rbl. Wenn die Länge jedes Stückes um 10 Arschin größer wäre, so würden sich die beiden Längen verhalten wie 5 : 6. Wie lang ist jedes Stück und wie viel Rubel kostet die Arschin?

78) Die Mannschaft eines Generals bestand aus dreimal so viel Infanterie als Kavallerie. Davon desertirten vor einer Schlacht 120 Mann weniger als $\frac{1}{12}$ der Infanterie und 120 Mann mehr als $\frac{1}{12}$ der Kavallerie, $\frac{1}{4}$ der ganzen Mannschaft blieb als Besatzung einer Festung zurück und $\frac{3}{8}$ derselben blieb nach der Schlacht übrig, der Rest aber wurde theils gefangen, theils getödtet. Dieser Rest um 300 Mann vermehrt, war so groß, als die Hälfte der ursprünglichen Zahl der Infanterie. Wie viel Mann commandirte der General?

79) Es spielt Jemand und gewinnt doppelt so viel Geld als er bei sich hatte, hierauf verliert er 16 Rbl., bei dem nächsten Spiele verliert er wieder $\frac{4}{5}$ des übrig gebliebenen Geldes und gewinnt hierauf wieder so viel, als er ursprünglich besaß. Dadurch sieht er sich im Besiz von 80 Rbl. Wie viel hatte er ursprünglich?

80) Ein Silberarbeiter erhielt für ein Silbergeschirr, welches 100 Rbl. werth war, dem Gewichte nach eben so viel unverarbeitetes Silber als das Geschirr wog, und außerdem $37\frac{1}{2}$ Rbl. Bei gleichen Preisen erhielt er für ein anderes Silbergeschirr, welches 1 Pfd. wog, 64 Solotnik unverarbeitetes Silber und 28 Rbl. Wie schwer war das erste Silbergeschirr, und wie hoch wurde ein Solotnik des verarbeiteten und des unverarbeiteten Silbers berechnet?

81) Eine Uhr, welche bedeutend vorging und schon eine Nachmittagsstunde angab, während es noch Vormittag war, mußte um 5 Stunden und 40 Minuten zurückgerückt werden, um die wahre Zeit anzugeben. Da sich, die von der Uhr angegebene Zeit zur wahren Zeit verhielt wie 29 : 105. Welches war die wahre Zeit?

82) Die Besatzung eines Schiffes bestand aus Seeleuten und Soldaten. Es kamen je 22 Seeleute auf 3 Kanonen und außerdem

noch 10 Mann im Ganzen darüber. Die ganze Mannschaft betrug an Zahl das Fünffache der Anzahl von Soldaten und Kanonen zusammen. Wenn bei einem Kampfe, welchen das Schiff zu bestehen hatte, und in welchem die Anzahl der Todten $\frac{1}{4}$ von der Zahl der Ueberlebenden betrug, 5 Mann weniger getödtet worden wären, so kämen von den Ueberlebenden im Ganzen je 13 Mann auf 2 Kanonen. Wie viel hatte das Schiff Kanonen, Seeleute und Soldaten?

83) Einem Schaafhirten wurde von einem Nachzüglerhaufen einer Armee $\frac{1}{4}$ seiner Heerde und $\frac{1}{4}$ Schaaf geraubt; von einem zweiten Haufen $\frac{1}{3}$ des Ueberrestes und $\frac{1}{3}$ Schaaf; von einem dritten Haufen die Hälfte des Restes und $\frac{1}{2}$ Schaaf. Dadurch blieben ihm nur noch 25 Schaafse übrig. Wie viel hatte er ursprünglich?

84) Es verspielte Jemand $\frac{1}{4}$ seines Geldes und gewann hierauf 3 Rbl.; hierauf verspielte er wieder $\frac{1}{3}$ seines jetzigen Geldes und gewann nachher 2 Rbl., endlich verspielte er $\frac{1}{7}$ dessen, was er jetzt hatte, wodurch er 12 Rbl. übrig behielt. Wie viel hatte er ursprünglich?

85) Ein Kaufmann nahm aus seinem Geschäfte am Anfang eines jeden Jahres 500 Rbl. zur Bestreitung seiner eigenen Bedürfnisse. Das Geld, welches im Geschäfte blieb, vermehrte sich in jedem Jahr um seinen dritten Theil. Dadurch sah er sich am Ende des dritten Jahres im Besitze von doppelt so viel Vermögen, als er am Anfange hatte. Wie viel hatte er Anfangs?

86) Ein Kaufmann kauft ein Faß mit Wein für 1440 Rbl. und verkauft 12 Kruschken mehr als $\frac{3}{4}$ deselben mit einem Gewinne von 25 Procent. Den Ueberrest verkauft er zu einem solchen Preise, daß er dadurch an dem ganzen Quantum 60 Procent gewinnt. Hätte er aber alles zu dem letzten Preise verkauft, so hätte er 175 Procent gewonnen. Wie viel Kruschken hält das Faß?

87) Ein Kaufmann macht mit seinem Kapital jährlich 33 $\frac{1}{3}$ Procent, die er wieder zum Kapital schlägt. Er braucht aber jährlich 1000 Rbl. zu seinem Unterhalt. Nach 3 Jahren hat sich sein anfängliches Kapital verdoppelt. Wie groß war dasselbe?

§ 38. Gleichungen vom ersten Grade mit mehreren unbekanntem Bahlen.

1) Gewinnt A von B 4 Rbl., so hat er halb so viel als B behält. Gewinnt aber B von A 6 Rbl., so hat er das Dreifache von dem was A übrig bleibt. Wie viel hat Jeder?

2) Zwei silberne Becher haben einen gemeinschaftlichen Deckel, welcher 18 Rbl. werth ist. Der erste Becher mit dem Deckel kostet noch einmal so viel, als der zweite ohne Deckel, der zweite mit dem Deckel kostet um ein Viertel mehr, als der erste ohne denselben. Wie viel kosten die beiden Becher?

3) Von einer gewissen Waare werden 100 Pfund, jedes zu 40 Kop. verlangt. Es sind drei Sorten vorrätzig, wovon das Pfund 48, 36, 28 Kop. gilt. Von der besten Sorte finden sich noch 52 Pfund. Wie viel müssen von der zweiten und dritten Sorte dazugethan werden, um 100 Pfund vollzählich zu machen?

4) 2 Tschetwert Roggen und 8 Tschetwert Weizen kosten zusammen 64 Rbl., 3 Tschetw. Roggen und 6 Tschetw. Weizen kosten zu demselben Preise zusammen 54 Rbl. Wie theuer ist ein Tschetw. Roggen und ein Tschetw. Weizen?

5) Es kauft Jemand zweierlei Wein, von der ersten Sorte das Wedro zu 90 Rbl., von der zweiten zu 60 Rbl. Im Ganzen zahlt er 3840 Rbl. Hätte er eben so viel Wedro vom besseren gekauft, als er vom schlechtern wirklich kaufte, und umgekehrt, so hätte er 330 Rbl. weniger zu bezahlen gehabt. Wie viel kaufte er von jeder Sorte?

6) Welcher Bruch erhält, wenn man zum Zähler 4 addirt, den Werth $\frac{1}{2}$, wenn man aber zum Nenner 7 addirt, den Werth $\frac{1}{5}$?

7) Es wird ein Bruch gesucht, der so beschaffen ist, daß, wenn man vom Zähler und Nenner 3 subtrahirt, der Werth $\frac{1}{4}$ wird, und wenn man zum Zähler und Nenner 5 addirt, der Werth $\frac{1}{2}$ wird?

8) Von welchen zwei Zahlen verhalten sich die Differenz, die Summe und das Produkt wie die Zahlen 2, 3 und 5?

9) A und B schieben Regel mit einander. A sagt zu B: wenn Du mir zum Voraus 3 Rbl. gibst, so setze ich in jedem Spiele 60 Kop. gegen 36 Kop. und spiele mit Dir 36 Spiele. B geht auf diesen Vorschlag ein und gewinnt dadurch nicht bloß seine 3 Rbl. wieder, sondern noch außerdem 2 Rbl. 28 Kop. Wie viel Spiele hat Jeder gewonnen?

10) Es vertauscht Jemand 12 Tschtw. Weizen und erhält dafür 8 Tschtw. Gerste und 56 Rbl. Zu derselben Zeit bietet er ein gewisses Quantum von Weizen für ein ebenso großes Quantum von Gerste nebst einem Aufgeld von 75 Rbl. oder gegen 200 Rbl. haares Geld an. Welches war der Preis des Weizens und der Gerste?

11) A und B spielen Karten mit einem Spiel von 52 Karten. A hebt zuerst ab, hierauf B. Die Zahl der Karten, welche A liegen ließ, macht mit der Zahl der Karten, welche B abhob, zusammen 50, und die Zahl der Karten, welche beide zusammen liegen ließen, ist größer als die Summe der von beiden abgehobenen Karten um 64. Wie viel hat Jeder abgehoben?

12) Ein Geflügelhändler treibt eine Heerde von Gänsen und welschen Hühnern zu Markte, und zwar ist die dreifache Zahl der welschen Hühner größer als die doppelte Zahl der Gänse um 15. Nachdem er unterwegs 10 Gänse gekauft und 15 welsche Hühner verkauft hat, verhält sich die Zahl der Gänse zur Zahl der Hühner wie 7 : 3. Wie viel hatte er ursprünglich von jeder Gattung?

13) A und B haben verschiedene Kapitalien. A gewinnt mit dem seinigen 1500 Rbl., B verliert von dem seinigen 500 Rbl. und jetzt verhält sich das Geld des A zu dem des B wie 3 : 2. Hätte jedoch A 500 Rbl. verloren und B 1000 gewonnen, so würde sich das Geld des A zu dem des B verhalten, wie 5 : 9. Wie viel hatte Jeder ursprünglich?

14) Es mischt Jemand eine gewisse Menge Branntwein mit Wasser, und findet, daß wenn er von jeder Gattung 6 Kruschken mehr genommen hätte, 7 Kruschk. Branntwein auf 6 Kruschken Wasser kämen; hätte er jedoch von jeder Sorte 6 Kruschk. weniger genommen, so kämen 6 Kruschk. Branntwein auf 5 Kruschk. Wasser. Wie viel nahm er von jeder Gattung?

15) Es bestellt Jemand 6 Duzend Bouteillen Moselwein und 3 Duzend Bout. Rheinwein zusammen für 126 Rbl. Da aber unterdessen der Preis jeder Bout. um $\frac{1}{2}$ Rbl. gefallen ist, so erhält er für dieselbe Summe 20 Bout. Moselwein und 3 Duzend 8 Bout. Rheinwein mehr. Was war zuerst der Preis jeder Bouteille?

16) Eine zweiziffrige Zahl giebt bei der Division durch 4 einen gewissen Quotienten und den Rest 3, bei der Division durch 9 einen anderen Quotienten und den Rest 8. Die Ziffer auf der Stelle der Zehner ist gleich diesem zweiten Quotienten, und die Ziffer auf der Stelle der Einer gleich dem 17ten Theile des ersten Quotienten. Wie heißt die gesuchte Zahl?

17) Ich kenne zwei dreiziffrige Zahlen, deren Summe, um 1 vermehrt, gerade 1000 ausmacht. Schreibe ich die beiden Zahlen hinter einander und trenne dieselben durch ein Decimalkomma, so entsteht eine

sechsmal so große Zahl, wenn die kleinere Zahl nach der größern, als wenn die größere Zahl nach der kleinern gesetzt wird. Wie heißen die beiden Zahlen?

18) Eine zweiziffrige Zahl giebt es, welche zur Quersumme 10 hat. Kehrt man die Ziffer um, so entsteht eine Zahl, welche um 36 kleiner ist. Wie heißt die Zahl?

19) In einer gefüllten Börse befinden sich 57 Rbl. und 18 Dreißigkopfenstücke. Durch 12 Rbl. und 15 Dreißigkopfenstücke sind $\frac{17}{63}$ der Börse gefüllt. Wie viel von jeder Münzsorte gehen in die Börse?

20) Ein Kapitalist nimmt 8000 Rbl. zu gewissen Procenten auf und verleiht 23000 Rbl. zu höheren Procenten, so daß er dabei einen Ueberschuß von 905 Rbl. an jährlichen Zinsen erzielt. Unter den nämlichen Bedingungen nimmt er 9400 Rbl. auf und verleiht 17500 Rbl., dies bringt ihm einen Ueberschuß von 539 $\frac{1}{2}$ Rbl. an jährlichen Zinsen. Zu welchen Procenten hat er Geld aufgenommen und ausgeliehen?

21) B hat 12600 Rbl. mehr als A ausgeliehen und sein Geld um 1 Procent höher untergebracht, weshalb er auch an jährlichen Zinsen 730 Rbl. mehr ziehet. C hat 3000 Rbl. mehr ausgeliehen als A und zu 2 Procent höheren Zinsen, ziehet dafür auch jährlich 380 Rbl. mehr an Zinsen als A. Wie viel hat Jeder ausgeliehen und zu welchen Procenten?

22) Nach Vitruvs Erzählung war die Krone des Königs Hiero von Syrakus 20 Pfund schwer, und verlor im Wasser nahe an $1\frac{1}{4}$ Pfund. Nehmen wir nun an, daß sie blos aus Gold und Silber bestand, und daß 19,64 Pfund Gold im Wasser 1 Pfund, und 10,5 Pfund Silber im Wasser ebenfalls 1 Pfund verlieren. Wie viel Gold und Silber mußte die Krone enthalten?

23) 37 Pfund Zinn verlieren im Wasser 5 Pfund und 23 Pfund Blei verlieren im Wasser 2 Pfund; eine Composition von Zinn und Blei, 120 Pfund wiegend, verliert im Wasser 14 Pfund. Wie viel Zinn und Blei ist in dieser Composition?

24) Zwei Bauern A und B haben zusammen 63 Rbl. Steuern zu bezahlen, und zwar nach Verhältniß des Ertrages ihrer Güter. A, welcher 4 Koofstellen mehr besitzt als B, wovon aber jede Koofstelle 6 Rubel weniger einträgt, zahlt von obiger Steuer 35 Rbl. Hätte A 6 Koofstellen mehr, und würde die Koofstelle des B 9 Rbl. weniger als jetzt tragen, so müßte A 45 Rbl. bezahlen. Wie viel Koofstellen hat Jeder, und was ist der Ertrag derselben?

25) Auf einem Dampfschiffe, welches von A nach B fuhr, waren bei der Abfahrt auf dem Vorderdeck 24 Passagiere mehr als auf dem Hinterdeck. Die Einnahme des Schiffes für die ganze Fahrt betrug für alle Passagiere zusammen 540 Rbl. und zwar machte die Fahrtage für je 7 Passagiere des Vorderdecks zusammen 1 Rbl. weniger als für 4 auf dem Hinterdeck. Auf der Hälfte des Weges kamen noch 18 Passagiere auf das Vorderdeck und 6 auf das Hinterdeck, wodurch die Einnahme des Schiffes um $\frac{2}{15}$ der früheren wuchs. Wie groß war die Zahl der Passagiere und was betrug die Fahrtage?

26) In einer von den Ecken eines rechtwinkligen Gartens befindet sich ein ebenfalls rechtwinkliger Fischteich, dessen Seiten sich ebenso zu einander verhalten, wie die des Gartens, dessen Inhalt der 9te Theil von dem Inhalte des Gartens ist und dessen Umfang um 600 Fuß kleiner ist als der Umfang des Gartens. Wenn die eine Seite des Gartens um 9, die andere um 15 Fuß größer wäre, so wäre der Garten selbst um 5805 Quadrattfuß größer. Wie groß ist jede Seite des Gartens?

27) Es sind 4 Bedro gekauft worden, deren einzelne Preise x, y, z, u sind. Wenn man von dem ganzen Preise aller zusammen den Preis x abzieht, so erhält man 180 Rbl., dann y, z, u , so erhält man 212, 172 und 200 Rbl. Wie groß sind die einzelnen Preise?

28) Drei Arbeiter verrichten nach einander ein Werk und brauchen zusammen 120 Tage dazu. A bekommt den Tag 20 Kop., B 24 und C 30 Kop. Zuletzt hat einer so viel wie der andere. Wie lange hat jeder gearbeitet?

29) Jemand nahm zu drei verschiedenen Malen eine Partie Blei, Eisen und Kupfer als Schuld an, die ihm mit Zinsen und allen Unkosten zu stehen kommen: das erste Mal 1293 Rbl. für 23 Berkowitz Blei, 5 Berk. Eisen und 3 Berk. Kupfer, das zweite Mal 2508 Rbl. für 7 Berk. Blei, 10 Berk. Eisen und 13 Berk. Kupfer, das dritte Mal 3723 Rbl. für 12 Berk. Blei, 9 Berk. Eisen und 20 Berk. Kupfer. Wie hoch rechnet er den Preis von jeder Sorte?

30) A, B, C vergleichen ihr Vermögen. A sagt zu B: gib mir 700 Rbl. von deinem Gelde, so habe ich zweimal so viel als du behälst. B sagt zu C: gib mir 1400 Rbl., so habe ich dreimal so viel als du behälst. C sagt zu A: gib mir 420 Rbl., so habe ich fünfmal so viel als du behälst. Wie viel hat Jeder.

31) Es werden drei Zahlen von der folgenden Beschaffenheit gesucht. Wenn man von der ersten 4 abzieht und eben soviel der

zweiten zusetzt, so verhält sich der Rest zur Summe wie 1:2. Zieht man von der zweiten 10 ab, und setzt der dritten eben soviel zu, so verhält sich der Rest zur Summe wie 3:10. Zieht man aber von der ersten 5 ab, und setzt diese der dritten zu, so verhält sich der Rest zur Summe wie 3:11. Welche Zahlen sind es?

§ 39. Keine Gleichungen vom zweiten und höheren Grade mit einer unbekanntem Zahl.

1) Die Zahl 18 soll so in zwei Theile getheilt werden, daß sich die Quadrate dieser Theile verhalten wie 25:16.

2) Die Zahl 14 soll so in zwei Theile getheilt werden, daß wenn man den größern Theil durch den kleinern und ebenso umgekehrt den kleinern Theil durch den größern dividirt, die Quotienten sich verhalten wie 16:9.

3) Eine Anzahl Knaben erhielten Äpfel. Jeder hatte so viel Säckchen bei sich als Knaben waren, und in jedes Säckchen gingen viermal soviel Äpfel als die Zahl der Knaben betrug. Sie füllten alle ihre Säckchen und erhielten dadurch im Ganzen 2916 Äpfel. Wie groß war die Zahl der Knaben?

4) Eine Abtheilung einer Armee marschirte in gleichen Reihen und hatte 5 Mann mehr in der Tiefe als in der Fronte. Im Angesichte des Feindes wurde jedoch nur die Fronte um 845 Mann vergrößert, wodurch die Abtheilung nur noch 5 Mann tief aufgestellt war? Wie stark war die Abtheilung?

5) Eine gewisse Summe wird wöchentlich unter Arme gleich vertheilt. In einer Woche war die Zahl der Armen gerade die Quadratwurzel dieser Summe; in der nächsten dagegen waren zwei Arme mehr, welche an jener Summe Theil erhielten, wodurch der Antheil jedes Einzelnen um $1\frac{1}{2}$ Kop. vermindert wurde. Wie groß war die zu vertheilende Summe?

6) A und B stehen beide eine gleiche Anzahl von Tagen, aber zu verschiedenem Lohne in Arbeit. A arbeitet 4 Tage nicht, und erhält am Ende 18 Rbl. 49 Kop. Lohn. B arbeitet 7 Tage nicht, und erhält 16 Rbl. Hätte A 7 Tage und B 4 Tage nicht gearbeitet, so hätten beide gleich viel erhalten. Wie viel Tage standen beide in Arbeit und was war der Tagelohn eines Jeden?

7) Zwei Reisende A und B gehen zu gleicher Zeit von zwei Städten C und D aus, A um von C nach D, B um von D nach C zu reisen. Als sie einander begegnen, hat A 126 Werst mehr gemacht als B, und A hatte noch $15\frac{3}{4}$ Tage zu reisen, um nach D zu kommen, B aber 28 Tage, um C zu erreichen. Wie weit sind C und D von einander entfernt?

8) A und B führen 100 Eier mit einander zu Markte, verkaufen sie zu verschiedenen Preisen, und lösen doch beide gleich viel. Hätte A die Eier des B gehabt, so hätte er 36 Kop. gelöst, hätte aber B die Eier des A gehabt, so hätte er nur 16 Kop. erhalten. Wie viel Eier hat Jeder?

9) Welche Zahl ist es, deren siebenter und achter Theil mit einander multiplicirt und das Produkt durch 3 dividirt, zum Quotienten $298\frac{2}{3}$ giebt?

10) Es wird eine Zahl von der Beschaffenheit gesucht, daß wenn man dieselbe zu 94 addirt und von 94 subtrahirt und hierauf diesen Rest mit jener Summe multiplicirt, das Produkt 8512 ist. Welche Zahl ist es?

11) Ein gewisses Kapital steht zu 4 Procent auf Zinsen; multiplicirt man die Anzahl der Rubel des Kapitals mit der Anzahl der Rubel der fünfmonatlichen Zinsen, so erhält man $117041\frac{2}{3}$. Wie groß ist das Kapital?

12) Jemand hat dreierlei Waaren, welche zusammen 55 Rbl. 25 Kop. kosten. Das Pfund einer jeden Sorte kostet so viele Kopcken als Pfunde davon vorrätzig sind. Er hat aber von der zweiten Sorte um den dritten Theil mehr als von der ersten, und von der dritten $3\frac{1}{2}$ mal soviel als von der zweiten. Wie viel Pfund hat er von jeder Sorte?

13) Ich habe eine gewisse Zahl im Sinne, diese multiplicire ich mit $2\frac{1}{2}$, addire zum Produkt 7 hinzu, multiplicire die Summe mit dem Achtfachen der Zahl selbst, dividire alsdann durch 14 und ziehe vom Quotienten das Vierfache der Zahl selbst ab; da erhalte ich 2520. Welche Zahl ist es?

14) Zwei Zahlen verhalten sich wie 3 : 2, und die Differenz ihrer vierten Potenzen zur Summe ihrer dritten Potenzen wie 26 : 7. Wie heißen die Zahlen?

15) Von einem rechtwinkligen Felde verhalten sich beide Seiten zu einander wie 6 : 5. Nachdem $\frac{1}{6}$ des Ganzen verkauft worden ist, bleiben noch 5625 Quadratfuß übrig. Wie groß sind die Seiten des Rechtecks?

§ 40. Keine Gleichungen vom zweiten Grade mit mehreren unbekanntem Bahlen.

1) Die Differenz zweier Zahlen mit der größern multiplicirt, giebt das Produkt 40, mit der kleinern multiplicirt aber das Produkt 15. Wie heißen die beiden Zahlen?

2) Wenn man die Differenz zweier Zahlen mit der kleinern multiplicirt, so ist das Produkt 42, wenn man dieselbe aber mit der Summe beider Zahlen multiplicirt, so ist das Produkt 133. Wie heißen die Zahlen?

3) Die Differenz zweier Zahlen verhält sich zur kleinern wie 100 zur größern, und zur größern wie 4 zur kleinern. Wie heißen beide Zahlen?

4) Wenn man die Differenz zweier Zahlen mit der größern multiplicirt und das Produkt durch die kleinere dividirt, so ist der Quotient 24; multiplicirt man aber diese Differenz mit der kleinern und dividirt durch die größere, so ist der Quotient 6. Wie heißen die Zahlen?

5) Wenn man die größere von zwei Zahlen mit der Quadratwurzel der kleinern multiplicirt, so ist das Produkt 48, multiplicirt man aber die kleinere mit der Quadratwurzel der größern, so ist das Produkt 36. Wie heißen die Zahlen?

6) Wenn man die kleinere von zwei Zahlen mit dem Quadrate der größern multiplicirt, so ist das Produkt 448, multiplicirt man aber die größere mit dem Quadrate der kleinern, so ist das Produkt 392. Wie heißen die Zahlen?

7) Wenn man von zwei Zahlen jede mit 27 multiplicirt, so ist das erste Produkt das Quadrat des zweiten, multiplicirt man aber jede mit 3, so ist das erste Produkt der Kubus des zweiten. Wie heißen beide Zahlen?

8) Die drei Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks sollen aus folgenden Angaben bestimmt werden. Der Inhalt des Dreiecks enthält eben so viel Quadratfuß als der Umfang desselben Fuß enthält, und die Quadrat-

zahl der Summe beider Katheten ist größer als die Quadratzahl der Hypothenuse um das halbe Produkt aus den Zahlen, durch welche der Flächeninhalt und die eine Kathete ausgedrückt sind.

9) Welche zwei Zahlen sind es, deren Quadrate, wenn sie addirt werden, die Summe 13001, wenn sie aber von einander subtrahirt werden, den Rest 1449 geben?

10) Welche Zahlen stehen in dem Verhältniß von 3 : 4 und geben als die Summe ihrer Quadrate die Zahl 324900?

11) Es giebt zwei Zahlen, deren eine um 8 größer als die andere, und deren Produkt 240 ist. Welche Zahlen sind es?

§ 41. Gemischt quadratische Gleichungen mit einer unbekanntem Zahl.

1) Es verkauft Jemand für 39 Rbl. Wein, und gewinnt dabei so viel Procente, als ihm der Wein Rubel kostet. Wie theuer hat er den Wein gekauft?

2) Die Differenz zweier Zahlen ist $= 9$, ihre Summe mit der größern multiplicirt $= 266$. Wie heißen die Zahlen?

3) Es kauft Jemand Tuch zu einem Rock und 28 Arschin Leinwand, und bezahlt im Ganzen 30 Rbl. Für jede Arschin Tuch bezahlt er so viel Rubel, als er Arschin kauft, und 8 Arschin Leinwand kosten zusammen so viel als eine Arschin Tuch. Wie viel Arschin Tuch kauft er, und was kostet die Arschin Tuch und die Arschin Leinwand?

4) A und B gewannen bei einer gemeinschaftlichen Speculation 180 Rbl. A hatte sein Geld 12 Monate lang dazu hergegeben und an Kapital und Gewinn 260 Rbl. zurückerhalten; B hatte 300 Rbl. 16 Monate lang dazu hergegeben. Was hatte A eingelegt?

5) Es kauft Jemand eine Anzahl Schaafse für 360 Rbl.; hätte er für denselben Preis 6 Stück mehr bekommen, so wäre jedes Stück 5 Rbl. wohlfeiler gewesen. Wie viel Stück hat er gekauft?

6) Ein Spiegel, welcher 18 Zoll hoch und 12 Zoll breit ist, hat einen überall gleich breiten Goldrahmen, dessen Fläche der Fläche des Spiegels gleich ist. Wie breit ist der Rahmen?

7) Zwei quadratische Höfe werden mit Steinplatten belegt, von denen jede einen Quadratfuß hält. Die Seite des einen Quadrats ist um 12 Fuß größer, als die des andern, und zur Pflasterung beider bedarf man 2120 Platten. Wie lang ist jeder Hof?

8) Es läßt Jemand 2 Gräben graben, von denen der eine 6 Saschen länger ist als der andere. Bei jedem kostet das Graben einer Saschen nur halb so viel Rubel, als der Graben Saschen in der Länge mißt. Im Ganzen hat er 178 Rbl. zu bezahlen. Wie lang ist jeder Graben?

9) In einem Gasthose hatte eine Gesellschaft für eine gemeinschaftliche Beche 87 $\frac{1}{2}$ Rbl. zu bezahlen. Ehe die Rechnung bezahlt war, schlichen sich zwei von der Gesellschaft davon, wodurch der Antheil eines jeden der Zurückgebliebenen um 5 Rbl. größer wurde. Wie stark war die Gesellschaft ursprünglich?

10) Es kauft Jemand eine Anzahl Schaafe für 1200 Rbl., behält davon 15 und verkauft die übrigen zusammen für 1080 Rbl. Wenn er nun dadurch an jedem Schaafe 2 Rbl. gewinnt, wie viel Schaafe kaufte er und was war der Einkaufspreis eines Stückes?

11) A und B reisen von zwei um 247 Meilen von einander entfernten Städten einander entgegen. A macht täglich 9 Meilen, und die Zahl der Tage, welche beide bis zum Zusammentreffen brauchen, ist um 3 größer als die Zahl der Meilen, welche B täglich macht. Welchen Weg hat Jeder beim Zusammentreffen zurückgelegt?

12) Es kauft Jemand zweierlei Tuch. Von dem feinern kostet die Arschin 1 Rbl. mehr als von dem gröbern. Für das feinere bezahlt er im Ganzen 90 Rbl., für das gröbere, welches um 2 Arschin länger war, 80 Rbl. Wie lang war jedes Stück, und was kostete die Arschin von jedem?

13) A reist von C nach D und macht täglich 7 Meilen. Nachdem er 32 Meilen zurückgelegt hat, geht B von D nach C, und macht täglich den 19ten Theil des ganzen Weges. Nachdem B so viele Tage gereist ist, als er täglich Meilen macht, trifft er mit A zusammen. Wie weit ist C von D entfernt?

14) A verkauft 40, B 90 Arschin Weinwand; sie lösen zusammen 42 Rbl. A giebt für 1 Rbl. $\frac{1}{3}$ Arschin mehr als B. Wie theuer verkauft Jeder seine Weinwand?

15) Drei Kaufleute A, B, C legen zu einem gemeinschaftlichen Unternehmen Geld zusammen und gewinnen damit 800 Rbl. weniger als die ganze Einlage beträgt. A erhält für seinen Antheil 600 Rbl. vom Gewinn; er hatte 170 Rbl. mehr als B beigetragen; B und C aber hatten zusammen 2350 Rbl. eingelegt. Wie groß war die Einlage eines Jeden?

16) A und B hatten zusammen 4160 Rbl. zu einem gemeinschaftlichen Geschäfte eingelegt, A seine Einlage auf 9 Monate, B die seinige auf 6 Monate. An Kapital und Gewinn erhielt A 2280 Rbl., B 2520 Rbl. Wie viel hat Jeder eingelegt?

17) Ein Kaufmann kauft eine Anzahl Stücke Seidenzeug von zwei verschiedenen Sorten. Von jeder Sorte kauft er so viele Stücke und zahlt für jede Elle halb so viel Rbl., als ein Stück dieser Sorte Ellen hat. Im Ganzen kauft er 19 Stück und zahlt 921½ Rbl. Wie viel Stück von jeder Sorte hat er gekauft?

18) Ein Weinhändler kauft 54 Anker Wein und dazu noch eine gewisse Anzahl Anker von einer geringern Sorte. Für jeden Anker der ersten Sorte zahlt er so viel Rubel, als er Anker von der zweiten Sorte kauft, und für jeden Anker dieser zweiten Sorte 8 Rbl. weniger. Er mischt beide Weine unter einander, ist aber genöthigt diese Mischung zu verkaufen, den Anker für 30 Rbl. und verliert dadurch an der ganzen Speculation 252 Rbl. Wie viel Anker von der zweiten Sorte kauft er und was zahlt er für jeden Anker?

19) Ein Weinhändler verkauft 7 Wedro geringeren Weines und 12 Wedro besseren, zusammen für 1000 Rbl. Für 200 Rbl. giebt er 3 Wedro geringeren Weines mehr, als er für 120 Rbl. vom besseren giebt. Wie theuer verkauft er das Wedro von jeder Sorte?

20) Es hat Jemand zwei Fußteppiche, welche Quadrate bilden, und von denen der eine um 2 Fuß länger ist als der andere. Wenn man von der Zahl der Quadratfüße, welche der kleinere mißt, die Zahl der Füße abzieht, welche eine Seite des größern mißt, so ist das Quadrat der dadurch erhaltenen Zahl um 88 größer als die Zahl, welche man erhält, wenn man von der Zahl der Quadratfüße des kleinern die Zahl der Füße abzieht, welche eine Seite des kleinern mißt. Wie lang ist jeder Teppich?

21) Es spielt Jemand und gewinnt bei dem ersten Wurf so viel als er Geld bei sich hat. Bei dem zweiten Wurf gewinnt er 5 Rbl. mehr als die Quadratwurzel der Zahl des Geldes, welches er jetzt besitzt, bei dem dritten endlich gewinnt er das Quadrat der Zahl des Geldes, in dessen Besitze er sich nach dem zweiten Wurf befindet. Er trägt dadurch 2256 Rbl. mit sich fort. Wie viel hatte er ursprünglich?

22) Es soll eine Zahl gefunden werden, welche die Eigenschaft besitzt, daß, wenn man ihren dritten Theil mit ihrem vierten Theil

multipliziert und zum Produkt ihr Fünffaches addirt, man eine Zahl erhält, welche die Zahl 200 um eben so viel übertrifft, als die gesuchte Zahl selbst unter 280 ist. Welche Zahl ist es?

23) Jemand, der nach seinem Alter gefragt wurde, gab solches wie folgt an: Meine Mutter hatte mich am Ende ihres 20sten Jahres geboren; ihr Alter mit dem meinigen multipliziert, übertrifft unser beider Alter zusammen um 2500. Wie alt war er?

24) Ein Kaufmann hat drei Stücke Leinwand, von welchen das zweite 3 und das dritte 5 Ellen mehr als das erste enthält. Die Elle des ersten kostet gerade so viele Kopfen als es Ellen enthält; von dem zweiten kostet die Elle 10 und von dem dritten 20 Kop. mehr als von dem ersten. Der sämmtliche Betrag dieser Leinwand ist 95 Rbl. 30 Kop. Wie viel Ellen enthält das erste Stück?

25) Jemand kauft ein Pferd und bezahlt dafür eine gewisse Summe, verkauft es hernach wieder für 144 Rbl. und gewinnt daran genau eben so viele Procente, als ihm das Pferd gekostet hatte. Wie viel hatte es gekostet?

26) Ein Kaufmann läßt sich ein Stück Zeug kommen und bezahlt dafür an Ort und Stelle eine gewisse Summe, außerdem aber noch 4 Procent an Transportkosten. Er verkauft es wieder für 390 Rbl. und gewinnt bei diesem Handel so viel Procente als der zwölfte Theil des Einkaufspreises beträgt. Wie theuer hatte er es eingekauft?

§ 42. Gemischt quadratische Gleichungen mit mehreren unbekanntem Bahlen.

1) Welche zweiziffrige Zahl hat die Eigenschaft, daß, wenn man sie durch das Produkt ihrer Ziffern dividirt, der Quotient = 2 wird, und daß die Ziffern in umgekehrter Ordnung erscheinen, wenn man 27 zu der Zahl addirt?

2) Man hat 3 Zahlen, deren Summe 41 ist; die Summe ihrer Quadrate ist = 699, und die Differenz zwischen der ersten und zweiten Zahl ist um 8 größer als die zwischen der zweiten und dritten. Wie heißen die Zahlen?

3) Man hat 3 Zahlen, deren Summe 44 ist; das Produkt dieser 3 Zahlen ist = 1950 und die Differenz zwischen der ersten und zweiten Zahl ist um 5 größer als die zwischen der zweiten und dritten. Wie heißen die Zahlen?

4) Welche Zahlen haben die Summe 41 und die Quadratsumme 901?

5) Welche zwei Zahlen haben die Differenz 8 und die Quadratsumme 544?

6) Welche zwei Zahlen geben das Produkt 255 und die Quadratsumme 514?

7) Wie muß man 16 theilen, damit das Produkt der beiden Theile zu ihren Quadraten addirt die Summe 208 gebe?

8) Wie wird 39 in zwei Theile zerlegt, so daß die Summe der Cuben dieser Theile die Zahl 17199 gebe?

9) Es werden zwei Zahlen gesucht, deren Differenz mit der Differenz ihrer Quadrate zusammen 150 und deren Summe mit der Summe ihrer Quadrate zusammen 330 beträgt. Welche Zahlen sind es?

10) Die Summe zweier Zahlen, ihr Produkt und die Differenz ihrer Quadrate sind einander gleich. Wie heißen die beiden Zahlen?

11) Drei Zahlen bilden eine stetige Proportion; addirt man sie, so ist die Summe 126, multiplicirt man sie aber mit einander, so ist das Produkt 13824. Welche Zahlen sind es?

12) Es wird eine Zahl gesucht, die mit drei Ziffern geschrieben wird und so beschaffen ist, daß die Summe der Quadrate der einzelnen Ziffern, abgesehen von ihrem Stellenwerth, = 104 ist, das Quadrat der mittlern Ziffer aber um 4 größer ist als das doppelte Produkt der beiden andern; daß ferner, wenn 594 von der gesuchten Zahl abgezogen wird, die drei Ziffern in umgekehrter Ordnung zum Vorschein kommen. Welche Zahl ist es?

13) Ein Spezereihändler verkauft 80 Pfund Muskatblüthe und 100 Pfund Gewürznelken, zusammen für 1300 Rbl., und zwar giebt er für 400 Rbl. 60 Pfund Gewürznelken mehr als Muskatblüthen für 200 Rbl. Wie theuer verkauft er das Pfund von jeder Sorte?

14) Das Vorderrad eines Wagens macht auf einem Wege von 360 Fuß 6 Umdrehungen mehr als das Hinterrad. Wenn aber der Umfang jedes Rades 3 Fuß größer wäre, so würde auf demselben Wege das Vorderrad nur 4 Umdrehungen mehr machen, als das Hinterrad. Wie groß ist der Umfang jedes Rades?

15) Es vertheilt Jemand unter eine Anzahl von Armen, welche aus Männern, Weibern und Kindern besteht, 3 Rbl. 24 Kop., so daß jedes Kind eine gewisse Anzahl von Kopfen, jedes Weib einen Kopfen

mehr als ein Kind und jeder Mann wieder einen Kopfen mehr als ein Weib bekommt. Die Anzahl der Weiber war $= \frac{5}{4}$ von der Anzahl der Männer und die Anzahl der Kinder gleich dem doppelten Quadrat der Differenz zwischen der Zahl der Weiber und Männer. Hätte jedes Kind so viel bekommen als ein Weib, so würde die ganze Ausgabe für die Kinder plus dem neunfachen Unterschied zwischen der ganzen Ausgabe für die Weiber und der für die Männer 1 Rbl. 96 Kopfen betragen haben. Wie groß war die Anzahl der Männer, Weiber und Kinder, und wie viel erhielt jeder Einzelne?

16) A bringt eine Anzahl Gurken zu Markte und B eine dreimal so große Anzahl von Eiern. B bietet dem A einen Tausch zwischen beiden Waaren an, wodurch aber A bei dem gegenwärtigen Preise 5 Kop. verlieren würde. A giebt daher dem B nur $\frac{3}{5}$ seiner Gurken für sämtliche Eier, wodurch B 3 Kop. verlieren würde, wenn der Preis beider Waaren geblieben wäre; da aber der Preis einer Gurke indessen auf 3 Kop. gestiegen ist, so gewinnt B so viel, als er bei unverändertem Preise der Eier für 6 Stück derselben lösen würde. Wie viel hatte A Gurken und B Eier, und was war ursprünglich der Preis eines Stückes von jeder Waare?

17) Es kauft Jemand eine gewisse Anzahl von Citronen und Äpfeln zusammen für 72 Kop. Er zahlt für 1 Duzend Citronen so viele Kopfen, als er Äpfel erhält und für je 20 Stück Äpfel so viel Kopfen, als er Citronen kauft. Hätte er von jeder Sorte 10 Stück mehr gekauft, und für die Citronen den früheren Preis bezahlt, dagegen aber für 1 Duzend Äpfel so viel als er für 20 Citronen zu bezahlen hat, so hätte er 3 Rbl. 5 Kop. bezahlen müssen. Wie viel Citronen und Äpfel kaufte er?

18) Es kauft Jemand eine gewisse Anzahl Gänse und außerdem 18 welsche Hähne, zusammen für 55 Rbl., jeder einzelne Hahn kostet $\frac{1}{2}$ Rbl. weniger als 3 Gänse. Später kaufte er eine zweite Anzahl von Gänsen und Hähnen und zwar 5 Gänse und 2 Hähne mehr als das erste Mal, und zahlt für jedes Stück $\frac{1}{2}$ Rbl. mehr als vorher. Wenn er nun für diesen zweiten Kauf 82 $\frac{1}{2}$ Rbl. zu bezahlen hat; wie viel Gänse hat er jedes Mal gekauft, und wie theuer jede Gans und jeden Hahn bezahlt.

19) Drei durch gerade Straßen verbundene Städte A, B und C liegen so, daß die von B nach C führende Straße mit der von B nach A

führenden einen rechten Winkel bildet. Zwischen A und B liegt ein vierter Ort D, und zwischen A und C ein fünfter Ort E. Von D nach E führt ebenfalls eine gerade Straße, welche auf die von A nach C über E führende Straße rechtwinklig einmündet. E ist von A 3 Werst und von C 7 Werst entfernt. Wer von B über D und E nach A reist, anstatt von B nach A auf der geraden Straße, macht einen Umweg, welcher um den vierten Theil des von B nach C führenden Weges größer ist als die gerade Straße von B nach A. Wie weit sind die genannten Orte von einander entfernt?

20) A und B leihen zusammen 2000 Rbl. auf einfache Zinsen aus. A bezieht aus seinem Antheil 1 Procent weniger als B. In 5 Jahren bezieht B im Ganzen 40 Rbl. weniger als das Doppelte von den Zinsen des A, und nach 10 Jahren ist das ausgeliehene Kapital eines Jeden durch die während dieser Zeit eingenommenen Zinsen so angewachsen, daß sich Kapital und Zinsen des A zusammen zu denen des B verhalten, wie 5 : 8. Wie viel hat Jeder ausgeliehen und zu wie viel Procent?

§ 43. Unbestimmte Gleichungen des ersten Grades.

1) Zwei ganze Zahlen anzugeben, so daß das 9fache Produkt der ersten gleich ist dem 13fachen Produkt der zweiten.

2) Es sollen zwei ganze Zahlen angegeben werden, deren Differenz 12 beträgt und von welchen die größere sich durch 10 dividiren läßt.

3) Die Zahl 76 so in zwei Theile zu zerlegen, daß der eine Theil den Faktor 5, der andere den Faktor 8 enthält.

4) Man soll 100 so in zwei Theile theilen, daß der eine sich durch 7, der andere aber durch 11 theilen lasse.

5) Man theile 100 in zwei Theile, die folgende Eigenschaften haben müssen: wenn man den ersten durch 5 dividirt, so muß 2 übrig bleiben, und wenn man den zweiten durch 7 dividirt, so muß der Rest 4 sein.

6) Es werden zwei Zahlen von solcher Beschaffenheit gesucht, daß, wenn man die erste mit 17 und die zweite mit 26 multiplicirt, das erste Produkt um 7 größer ist als das zweite.

7) Man soll 142 so in zwei Theile zerlegen, daß der eine durch 9, der andere durch 14 theilbar sei.

8) Von zwei ganzen Zahlen, deren Differenz 11 ist, soll die kleinere größer als 20, und die größere, welche 5 als Faktor enthält, kleiner als 50 sein. Welches sind die Zahlen?

9) Welche Zahlen lassen durch 3 dividirt 1, und durch 5 dividirt 2 übrig?

10) Welche Zahlen lassen durch 8 dividirt 5, und durch 11 dividirt 4 übrig?

11) Welche Zahlen gehen durch 9 auf, und lassen durch 14 dividirt 8 zum Reste?

12) Eine Gesellschaft von Männern und Frauen haben zusammen für 8 Rbl. 76 Kop. verzehrt. Ein Mann bezahlt 19 Kop. und eine Frau 13 Kop. Wie viele Männer und Frauen waren es?

13) Ein Landmann kauft Pferde und Ochsen, zusammen für 1770 Rbl. und bezahlt für 1 Pferd 31 Rbl., für einen Ochsen aber 21 Rbl. Wie viel Pferde und Ochsen hat er gekauft?

14) Es kauft Jemand für 72 Rbl. zwei Sorten Tuch; die Arschin der einen Sorte kostet 3 Rbl., die der andern 4 Rbl. Wie viele ganze Arschin bekommt er von jeder Sorte?

15) Eine Gesellschaft, die aus Herren und Damen bestand, hatte eine Summe von 112 Rbl. zu bezahlen; jeder Herr bezahlte 7 Rbl., jede Dame 4 Rbl. Aus wie viel Herren und Damen bestand die Gesellschaft?

16) Ein Schäfer, dessen Heerde zwischen 200 und 300 Stück enthielt, zählte sie zu 8, und es blieb ihm 1 Stück übrig; zählte er sie zu 15, so blieben ihm 2 Stück übrig. Aus wie viel Stück bestand die Heerde?

17) Es sollen zwei Zahlen von der Art angegeben werden, daß das Siebenfache der einen, sammt dem Zehnfachen der andern gleich ist dem Neunfachen der Summe dieser beiden Zahlen.

C. Die Reihen oder Progressionen.

§ 44.

1) Was versteht man unter einer Reihe oder Progression? Was ist eine Differenzreihe? Wie nennt man sie gewöhnlich? Warum?

2) Was ist eine Quotientenreihe? Wie nennt man sie gewöhnlich? Warum?

I. Differenzreihe.

3) Was bedeuten die Buchstaben a, d, n, t und s in einer Differenzreihe? Bilde die Reihe aus a, d und n, oder s ist gleich? Wie groß ist t bei a) n; b) n + 1; c) 2n; d) m n Gliedern?

4) Welche Differenzreihe ist eine steigende, welche eine fallende? Welches Glied ist das allgemeine? Bilde aus a, d, n, t und s zwei algebraische Gleichungen?

5)	Gegeben a, d und n	wie groß sind t und s?
6)	" a, d " t	" " " n " s?
7)	" a, d " s	" " " n " t?
8)	" a, n " t	" " " d " s?
9)	" a, n " s	" " " d " t?
10)	" a, t " s	" " " d " n?
11)	" d, n " t	" " " a " s?
12)	" d, n " s	" " " a " t?
13)	" d, t " s	" " " a " n?
14)	" n, t " s	" " " a " d?
15)	a = 1, d = 1, n = 14	Gesucht t " s.
16)	a = 10, d = 1/5, n = 360	" t " s.
17)	a = 3/4, d = 7, n = 42	" t " s.
18)	a = 2, d = 3, t = 50	" n " s.
19)	a = 7, d = 5, t = 227	" n " s.
20)	a = 7 ^{2/3} , d = 7/8, t = 76 ^{19/24}	" n " s.
21)	a = 7, d = 1/4, s = 142	" n " t.
22)	a = -1/4, d = 2/3, s = 282 1/2	" n " t.
23)	a = 2 1/2, n = 100, t = 35 1/2	" d " s.
24)	a = -5, n = 72, t = 37 ^{3/5}	" d " s.
25)	a = 2 ^{3/5} , n = 5, t = -1 ^{9/10}	" d " s.
26)	a = 3/4, n = 26, s = 60 1/8	" d " t.
27)	a = 0, n = 100, s = -54450	" d " t.
28)	a = 5/7, t = 20 ^{5/7} , s = 139 ^{2/7}	" d " n.
29)	a = 3 1/4, t = -145 ^{11/12} , s = -12840	" d " n.
30)	d = 3, n = 8, t = 14	" a " s.
31)	d = 3/4, n = 30, t = 15 ^{3/4}	" a " s.
32)	d = -7/8, n = 25, t = -21 ^{3/4}	" a " s.
33)	d = 3/4, n = 30, s = 146 1/4	" a " t.
34)	d = 1/3, n = 100, s = 1900	" a " t.

- 35) Gegeben $d = -\frac{1}{8}$, $t = -1\frac{7}{8}$, $s = -13\frac{3}{4}$ Gesucht a und n .
 36) " $d = 5$, $t = 56$, $s = 324$ " a " n .
 37) " $n = 15$, $t = -36\frac{1}{3}$, $s = -247\frac{1}{2}$ " a " d .
 38) " $n = 32$, $t = 36\frac{1}{9}$, $s = 769\frac{7}{9}$ " a " d .

II. Quotientenreihe oder Verhältnißreihe.

39) Was bedeuten die Buchstaben a , e , n , t und s in einer Quotientenreihe? Bilde die Reihe aus a , e und n , oder s ist gleich? Warum heißen Reihen dieser Art auch Verhältnißreihen?

40) Wie groß ist t bei a) n ; b) $n + 1$, c) $2n$ Gliedern? Wie nennt man t auch noch?

41) Welche Quotientenreihe nennt man eine steigende — welche eine fallende? Wie groß muß e in jedem dieser Fälle sein?

42) Bilde aus a , e , n , t und s zwei algebraische Gleichungen.

43) Gegeben sind a , e , t , gesucht wird n und s .

44) " " a , e , s , " " n " t .

45) " " a , n , t , " " e " s .

46) " " a , t , s , " " e " n .

47) " " e , n , t , " " a " s .

48) " " e , n , s , " " a " t .

49) " " e , t , s , " " a " n .

50) a) " " a , n , s , " " t " e } Was ist hier

 b) " " n , t , s , " " a " e } zu bemerken?

51) Gegeben $a = 3$, $e = 2$, $n = 5$ Gesucht t und s .

52) " $a = 6\frac{1}{4}$, $e = 3\frac{3}{2}$, $n = 8$ " t " s .

53) " $a = 1$, $e = 2$, $t = 64$ " n " s .

54) " $a = 7$, $e = 10$, $t = 700$ " n " s .

55) " $a = 4$, $e = 3$, $s = 118096$ " n " t .

56) " $a = 40$, $e = 3\frac{3}{7}$, $s = 70$ " n " t .

57) " $a = 5$, $n = 9$, $t = 327680$ " e " s .

58) " $a = 4$, $n = 7$, $t = 4$ " e " s .

59) " $a = 2$, $t = 3906250$, $s = 4882812$ " e " n .

60) " $a = 1$, $t = 0$, $s = 2$ " e " n .

61) " $e = 2$, $n = 18$, $t = 65536$ " a " s .

62) " $e = 3$, $n = 8$, $t = 2187$ " a " s .

63) " $e = 10$, $n = 7$, $s = 3333333$ " a " t .

64) " $e = \frac{2}{3}$, $n = \infty$, $s = 27$ " a " t .

- 65) Gegeben $e=4$, $t=44$, $s=55$ Gesucht a und n .
 66) " $e=5$, $t=3125$, $s=3905$ " a " n .
 67) " $a=7$, $e=2/5$, $n=\infty$ " t " s .
 68) " $a=1/10$, $e=1/10$, $n=\infty$ " t " s .

69) Es kaufte Jemand von einem Buchhändler 7 Bücher, deren Preise in einer Differenzreihe standen. Der Preis desjenigen, welches dem wohlfeilsten am nächsten im Werthe stand, war 80 Kop., der Preis des theuersten 2 Rbl. 30 Kop. Wie theuer war jedes Buch, und wie viel mußte er dem Buchhändler zahlen?

70) Ein Arbeiter soll beim Graben eines Brunnens für den ersten Fuß 8 Kop., für den zweiten 10 Kop. u. s. w., für jeden folgenden Fuß 2 Kop. mehr bekommen; 4 Rbl. 50 Kop. bekommt er aber voraus. Wie tief ist er zu graben verbunden?

71) Es war ein Graben 15 Fuß tief zu graben. Der Arbeiter muß aber aufhören, als er 10 Fuß tief gekommen war, und das Uebrige einem andern überlassen. Wie viel erhält jeder dieser Arbeiter, wenn für den ersten Fuß 10 Kop., und für jeden folgenden Fuß 5 Kop. mehr gegeben wird?

72) Jemand kauft ein Pferd mit der Bedingung, daß er für den ersten Hufnagel 20 Kop., für den zweiten 25 Kop. und für jeden folgenden immer 5 Kop. mehr zahlt. Es sind aber in Allem 32 Nägel; wie viel kostet ihm das Pferd?

73) Ein Lehrer hat durch seine 20jährige Amtsführung 9750 Rbl. Gehalt bezogen, so zwar, daß er in jedem folgenden Jahre 25 Rbl. mehr erhielt, als in dem vorhergehenden Jahre. Wie viel Gehalt erhielt er im ersten und wie viel im zwanzigsten Jahre.

74) Ein Schuldner verspricht seinem Gläubiger seine Schuld von 1650 Rbl. in 15 Monaten abzutragen und zwar dergestalt, daß er den ersten Monat 40 Rbl. und jeden folgenden etwas Bestimmtes mehr zahlen will? Wie viel zahlt er jeden Monat mehr und wie viel den letzten Monat?

75) Eine Zahl besteht aus 3 Ziffern, welche eine Differenzreihe bilden. Dividirt man die Zahl durch die Ziffernsumme, so ist der Quotient 26, und addirt man 198 zu der Zahl, so erscheinen dieselben Ziffern in umgekehrter Ordnung. Wie heißt die Zahl?

76) Zu einem milden Zwecke hatten 3 Brüder A, B und C zusammen 27 Rbl. so unterschrieben, daß ihre Antheile in steigender

Differenzreihe standen. Da aber C starb, ehe die unterschriebenen Summen eingezahlt wurden, übernahmen A und B mit einander auch die Bezahlung des Antheils von C, und zwar im Verhältnisse von 3:2. Dadurch verhielt sich die ganze von A bezahlte Summe zu der von B bezahlten wie 4:5. Wie viel hatte jeder der drei Brüder ursprünglich unterschrieben?

77) Vier Zahlen bilden eine Differenzreihe, ihre Summe ist $= 32$. Die Summe ihrer Quadrate $= 276$. Wie heißen die Zahlen?

78) Die drei Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks bilden eine Differenzreihe. Die größere Kathete ist $= 6$ Fuß; wie groß sind die beiden andern Seiten?

79) Die Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks bilden eine Differenzreihe. Der Umfang des Dreiecks ist $= 84$ Fuß; wie groß sind die Seiten?

80) Die Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks bilden eine Differenzreihe. Der Flächeninhalt ist $= 216$ Quadratfuß; wie groß sind die Seiten?

81) In einer Baumpflanzung stehen 2829 Bäume in 41 Reihen, so daß immer in jeder folgenden Reihe 3 Bäume mehr als in der vorhergehenden stehen. Wie viel Bäume stehen in der ersten Reihe und wie viel in der letzten?

82) Eine Differenzreihe hat die Eigenschaft, daß ihr erstes Glied 5 ist, die Summe aller Glieder $= 1050$ und die Summe der ersten Hälfte aller Glieder $= 275$. Wie groß ist die Anzahl der Glieder und das letzte Glied?

83) Vier Zahlen bilden eine Quotientenreihe; die Summe der ersten und zweiten ist $= 15$, die Summe der dritten und vierten $= 60$. Wie heißen die Zahlen?

84) Das erste Glied einer Quotientenreihe von 4 Gliedern ist $= \frac{1}{17}$, die Summe aller 4 Glieder ist um 1 größer als der Quotient der Reihe. Wie heißen die 4 Glieder?

85) Ein Herr theilt unter drei Diener 210 Rbl. nach einer Quotientenreihe, wodurch der erste 90 Rbl. mehr bekam als der letzte. Wie viel bekam Jeder?

86) Drei Zahlen bilden eine Quotientenreihe. Ihre Summe ist $= 35$ und das mittlere Glied verhält sich zur Differenz der beiden äußern wie 2:3. Wie heißen die beiden Zahlen?

87) Drei Zahlen bilden eine Verhältnißreihe; die Differenz zwischen der größten und kleinsten ist $= 15$, die Differenz zwischen den Quadraten der größten und kleinsten verhält sich zur Summe der Quadrate aller 3 Zahlen wie $5 : 7$. Wie heißen die Zahlen?

88) Eine Zahl besteht aus 3 Ziffern, welche eine Quotientenreihe bilden; die Zahl selbst verhält sich zur Summe ihrer Ziffern wie $124 : 7$; addirt man zu ihr die Zahl 594, so erscheint eine Zahl mit den nämlichen Ziffern, jedoch in umgekehrter Ordnung. Wie heißt die Zahl?

89) Ein Einsatz-Gewicht, das aus 8 Gewichten besteht, die zusammen $51\frac{1}{4}$ Pfd. wiegen, ist so eingerichtet, daß jedes folgende Gewicht immer 3mal so schwer als das vorhergehende ist. Wie schwer ist das größte und das kleinste dieser Gewichte?

90) Zwischen 1 und 2 sollen noch 11 Glieder eingeschaltet werden, so daß eine Quotientenreihe von 13 Gliedern entstehe.

91) Jedes Glied der Quotientenreihe $a, ae, ae^2 \dots$ in m solche Theile zu theilen, daß alle Theile wieder in einer zusammenhängenden Quotientenreihe stehen und folglich eine Reihe zum Vorschein komme, welche m mal so viel Glieder hat, als die Hauptreihe. Wie groß ist das erste Glied, der Quotient und die Summe von n Gliedern?

92) In der Quotientenreihe $7, 56, 448 \dots$ soll jedes Glied in drei solche Theile getheilt werden, daß wieder eine zusammenhängende Quotientenreihe entsteht. Wie groß ist das erste Glied, der Quotient und die Summe von 7 Gliedern?

93) Es bestellt Jemand bei einem Juwelier einen Diamanten unter der Bedingung, daß er ihm für den ersten Karat, den der Diamant wiegt, 40 Rbl., für den zweiten 120 Rbl., für den dritten 360 Rbl., also für jeden folgenden dreimal so viel als für den vorhergehenden zahlen wolle. Nun ist das Gewicht des Diamanten $3\frac{1}{4}$ Karat. Wie viel muß er dem Juwelier bezahlen?

94) Es kauft Jemand einen Brillant unter der Bedingung, daß er den ersten Karat mit 30 Rbl. bezahlen wolle, den zweiten Karat mit 4mal $30 = 120$ Rbl., den dritten mit 480 Rbl. und so jeden folgenden Karat immer 4mal so theuer als den vorhergehenden. Wie viel muß er für den Stein zahlen, da derselbe $3\frac{3}{4}$ Karat wiegt?

95) Es verkauft Jemand ein Pferd und verlangt für den ersten Nagel im Hufeisen 1 Kop., für den zweiten 2 Kop., für den dritten

4 Kop. u. f. w. Nun sind die vier Hufeisen mit 20 Nägeln befestigt. Was kostet das Pferd und wie viel soll für den letzten Nagel gezahlt werden?

96) Ein König in Indien, Namens Scheran, verlangte nach dem Berichte des arabischen Schriftstellers Msephad, daß Sessa, der Erfinder des Schachspiels, sich selbst eine Belohnung wählen sollte. Dieser erbat sich hierauf die Summe der Waizenkörner, die herauskommt, wenn man 1 für das erste Feld des Schachbrettes, 2 für das zweite, 4 für das dritte und so immer für jedes der 64 Felder doppelt so viel Körner als für das vorhergehende rechnet. Bei der Berechnung fand man zum Erstaunen des Königs eine ungeheure Summe. Wie viel Körner mußte er bekommen und von welchem Flächenraum mußte die Ernte gemacht werden? [Rechnet man auf 1 □-Zoll 16 Körner, für eine Meile = 24500 Fuß und die Ernte 10fältig.]

III. Höhere Differenzreihe.

97) Wie bildet man die höheren Differenzreihen? Welche Reihen nennt man figurirte Zahlen verschiedener Ordnung?

98) Was versteht man unter einer Differenzreihe des ersten Ranges? Wie groß ist S_1 ? Desgleichen unter einer Differenzreihe vom zweiten Range? Wie groß ist S_2 ? Desgleichen unter einer vom dritten Range? Wie groß ist S_3 ?

99) Es soll die Summe der Quadrate der natürlichen Zahlen $1^2 + 2^2 + 3^2 \dots + 20^2$ berechnet werden.

100) Es soll die Summe $101^2 + 102^2 + 103^2 \dots + 1000^2$ berechnet werden.

101) Man soll die Summe der Quadrate $2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2 \dots + 40^2$ berechnen.

102) Es soll die Summe der Cuben der natürlichen Zahlen $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 \dots + 20^3$ berechnet werden.

103) Es soll die Summe $11^3 + 12^3 + 13^3 \dots + 100^3$ berechnet werden.

104) Es soll die Summe der vierten Potenzen der natürlichen Zahlen $1^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4 \dots + 20^4$ berechnet werden.

105) Die drei ersten Glieder einer Differenzreihe des zweiten Ranges sind 2, 5 und 12. Das wie vierte Glied dieser Reihe ist 25202?

106) Bei einer Differenzreihe des zweiten Ranges ist das fünfte Glied 44, das achte 137 und das zehnte 229. Wie groß ist die Summe dieser 10 Glieder?

107) Bei einer Differenzreihe des zweiten Ranges sind die ersten drei Glieder 40, 52, 74; bei einer andern Reihe desselben Ranges sind die ersten drei Glieder 470, 492, 520. Wie groß muß man n annehmen, wenn die Summe der ersten n Glieder in einer Reihe so groß wie in der andern sein soll.

108) Bei einer Differenzreihe des zweiten Ranges ist das erste Glied 494, die Summe der ersten sechs Glieder 2954 und das zehnte Glied 584. Bei einer andern Reihe desselben Ranges sind die ersten drei Glieder 445, 488 und 533. Die wie vielen Glieder (von gleicher Stellenzahl) sind in beiden Reihen gleich?

109) Eine dreiseitige Pyramide besteht aus 20 horizontalen Schichten; es soll die Anzahl der Kugeln, welche in der untersten Schichte liegen, so wie jene der ganzen Pyramide angegeben werden.

110) Eine vierseitige Pyramide besteht aus 20 Schichten; die Kugelzahl der Basis und der ganzen Pyramide sind zu finden.

§ 45. Zinsrechnung.

1) Was versteht man unter den Ausdrücken: Kapital — Zinsen — Procente — Zinsfuß?

2) Welche Zinsen nennt man einfache — welche Zinsezinsen?

3) Was bedeuten die Buchstaben k , n , p , z , f , S bei der Zinsrechnung?

a) Einfache Zinsen.

4) Bilde aus k , n , p und z eine algebraische Gleichung.

5) " " S , k , n " p " " " " "

6) Wie groß muß das Kapital sein, das zu 6 Procent in 8 Jahren 540 Rbl. Zinsen geben soll?

7) Zu wie viel Procent geben 1500 Rbl. Kapital in 14 Monaten 100 Rbl. Zinsen?

8) Wie viel Zinsen trägt das Kapital 6900 Rbl. in 10 Jahren zu 5 Procent?

9) In wie viel Jahren trägt das Kapital 20000 Rbl. zu $4\frac{1}{2}$ Procent 5400 Rbl. Zinsen?

10) Welchen Werth haben 800 Rbl. gegenwärtig, die erst nach 8 Jahren fällig sind, wenn der Abzug zu 5 Procent berechnet wird?

11) Welchen Werth haben 10910 Rbl. gegenwärtig, die erst nach 10 Monaten fällig sind, wenn der Abzug zu $5\frac{1}{2}$ Procent berechnet wird?

12) Auf ein Haus werden 8760 Rbl. baar und zugleich 10000 Rbl., nach 8 Jahren zahlbar, geboten. Welches Gebot ist das höhere, wenn man die Zinsen zu 4 Procent rechnet?

13) Wenn jährlich 6000 Rbl. 11 Jahre hindurch zu 5 Procent gezahlt werden; wie groß ist der gegenwärtige Werth dieser ganzen Summe mit Anrechnung der einfachen Zinsen?

β) Zinseszinsen.

14) Bei a) 5; b) $4\frac{1}{2}$; c) 6,2; d) p; e) $p + \frac{1}{q}$ Procent, ist der Zinsfuß f wie groß? Wenn f gleich a) 1,06; b) $1\frac{2}{25}$; c) $\frac{89}{80}$; d) $\frac{11}{10}$; e) 1,064 ist — wie groß ist p?

15) Wie ist die Gleichung zwischen S, k, n und f, wenn n eine ganze, und wie wenn n eine gemischte Zahl ist?

16) Ein Kapital von 12000 Rbl. wird zu 4 Procent auf Zinseszinsen ausgeliehen; wie groß ist es am Ende des 30sten Jahres?

17) Wie viel ist ein nach 6 Jahren zahlbares Kapital von 5000 Rbl. jetzt werth, die Zinsen zu 5 Procent gerechnet?

18) Jemand hat nach 9 Jahren 7800 Rbl. zu 5 Procent zu bezahlen, er wünscht aber diese Schuld sogleich zu berichtigen; wie viel kann er dafür geben?

19) Ein Kapital von 6500 Rbl. ist in 8 Jahren bis zu 10360 Rbl. angewachsen; wie hoch sind die Procente?

20) In wie viel Jahren wird ein Kapital zu 5 Procent verdoppelt, verdreifacht, vervierfacht, wenn die Zinsen zu Ende jedes Jahres zum Kapital geschlagen werden?

21) Welchen Werth haben 2160 Rbl. nach 25 Jahren zu 6 Procent auf Zinseszinsen?

22) In wie viel Jahren wächst ein Kapital von 800 Rbl. zu 3000 Rbl. an, bei 5 Procent auf Zinseszinsen?

23) Welchen Werth haben 4800 Rbl. jetzt, die erst nach 18 Jahren fällig sind, wenn der Abzug zu $4\frac{1}{2}$ Procent auf Zinseszinsen gerechnet wird?

24) Bei wie hohen Procenten wachsen 1460 Rbl. in 31 Jahren zu 5000 Rbl. an?

25) Ein Bucherer hat sein Kapital in 12 Jahren viermal vergrößert; wie viel Procent hat er genommen?

26) Es legt Jemand in eine Bank ein Kapital von 25000 Rbl. zu $3\frac{1}{2}$ Procent jährlichen Zinsen und legt am Ende eines jeden halben Jahres die Zinsen wieder als ein Kapital an, wie hoch wird dieses Kapital in 20 Jahren anwachsen?

27) Wie hoch wird das Kapital in Aufgabe 26) anwachsen, wenn erst am Ende eines jeden Jahres die Zinsen zum Kapital geschlagen werden?

28) Ein Kapital k ist zu dem Zinsfuß f angelegt; wie lange muß es stehen, damit es so groß werde, als ein Kapital A zu dem Zinsfuße g nach n Jahren?

29) Wie lange müssen 3600 Rbl. zu 5 Procent auf Zinseszinsen ausstehen, um eben so viel zu werden als 5000 Rbl. zu 4 Procent in 12 Jahren?

30) Wenn Jemand zu Christi Geburt 1 Kop. zu 5 Procent auf Zinseszinsen gegeben hätte, wie groß wäre das Vermögen am Schlusse des Jahres 1853? (1 Kubitzoll Gold = 95 Rbl. Silber; 1 Meile = 24500 Fuß; Halbmesser der Erde = 860 Meilen.)

31) Wie groß ist S nach n Jahren, wenn am Ende eines jeden Jahres das Kapital um s vermehrt oder vermindert wird?

32) Wie groß ist S nach n Jahren, wenn am Anfange eines jeden Jahres (vom zweiten anfangend) das Kapital um s vermehrt oder vermindert wird?

33) Ein Kapital von 16000 Rubeln steht zu 5 Procent auf Zinseszinsen aus und wird am Ende eines jeden Jahres noch um 800 Rbl. vermehrt. Wie groß wird dadurch das Kapital in 12 Jahren werden?

34) Jemand hat sein Vermögen von 80000 Rbl. zu 5 Procent auf Zinsen gegeben, ist aber nicht im Stande mit den Zinsen dieses Kapitals seinen Aufwand zu bestreiten, weil er dazu jährlich 9000 Rbl. braucht. Er ist daher genöthigt, am Ende eines jeden Jahres so viel vom Kapital zu nehmen, als die erhaltenen Zinsen unter 9000 Rubel betragen. Nach wie viel Jahren wird dieser Mann, wenn er so fortfährt, nichts haben?

35) Eine Schuld von 15467 Rbl. ist zu 5 Procent verzinsset; es wird darauf am Ende eines jeden Jahres 600 Rbl. abgetragen. Wie viel beträgt der Rest der Schuld nach Verlauf von 10 Jahren?

36) Von einem Kapital von 5000 Rbl., das zu 5 Procent auf Zinseszinsen aussteht, nimmt man jährlich 400 Rbl. weg. Wie groß wird der Rest nach 10 Jahren sein?

37) Es bezieht Jemand 18 Jahre lang von einem Kapitale, das zu 5 Procent aussteht, jährlich 340 Rbl. und hat nach dieser Zeit noch 1200 Rbl. zu fordern. Wie groß ist das Kapital ursprünglich gewesen?

38) Wie lange kann man von 9000 Rbl. zu 3 Procent jährlich 500 Rbl. beziehen?

39) Eine Schuld von 7963 Rbl. ist zu 5 Procent verzinst. Wenn nun hierauf nach 5 Jahren 576 Rbl. und nach 8 Jahren 498 Rbl. abgetragen werden, wie groß ist der Rest der Schuld nach 10 Jahren, wenn überall die Zinseszinsen mit in Anschlag gebracht werden?

40) Ein Kapital von 6000 Rbl. steht zu 5 Procent auf Zinseszinsen aus und wird am Ende eines jeden Jahres noch um 500 Rbl. vermehrt. Wie groß wird dadurch das Kapital in 25 Jahren werden?

41) Jemand erbt 5000 Rbl., die er zu 5 Procent auf Zinseszinsen anlegt; er erspart sich im ersten Jahre 200 Rbl., die er im zweiten Jahre ebenfalls anlegt, und so in jedem folgenden Jahre 200 Rbl. Wie groß ist das Kapital nach 35 Jahren, die im 35sten Jahre ersparten 200 Rbl. nicht mitgerechnet, da sie keine Zinsen mehr bringen?

42) Wie groß ist der baare Werth u einer Leibrente r , welche man n Jahre zu genießen hat, zum Zinsfuß f gerechnet?

43) Jemand, der eine Jahresrente von 500 Rbl. auf 6 Jahre zu genießen hat, will solche verkaufen. Wie viel kann man ihm für diese Rente an baarem Gelde geben, wenn die Zinsen zu $3\frac{1}{2}$ Procent berechnet werden?

44) Wie viel beträgt der baare Werth einer auf 8 Jahre angewiesenen jährlichen Rente von 350 Rbl., die Zinsen zu 4 Procent berechnet?

45) Ein Kaufmann vermacht sein Haus, an Werth 100000 Rbl., zwei Erben, welche verpflichtet sind, 6000 Rbl. jährlich 11 Jahre hindurch an die Bank zu zahlen. Sie wollen die Schuld sogleich bezahlen: wie viel haben die Erben baar an die Bank zu zahlen, wenn der Abzug zu 5 Procent berechnet wird, und wie viel erbt Jeder?

46) Eine gegenwärtige Schuld von 1200 Rbl. soll in 7 jährlichen Terminen zu gleichen Summen abgetragen werden. Wie hoch muß man diese Zahlungen ansetzen, wenn die Zinsen zu 4 Procent berechnet werden?

47) Wie groß muß die Jahresrente sein, wenn der Genuß derselben auf 13 Jahre einem baaren Kapital von 20000 Rbl. gleich gehalten werden soll, die Zinsen zu 4 Procent gerechnet?

48) Jemand will für 34580 Rbl. eine Jahresrente von 2000 Rbl. erwerben; auf wie lange kann man ihm die Rente bewilligen, wenn die Zinsen zu 4 Procent gerechnet werden?

§ 46. Zahlensystem.

1) Was heißt ein Zahlensystem? Die Coefficienten der Basis eines Zahlensystems sind wie groß? Wie viele Ziffern sind wenigstens zu einem Zahlensystem nöthig? Wie wird in jedem Zahlensystem die Grundzahl geschrieben?

2) Jede Zahl enthält was für eine Reihe? z. B. a) 2347; b) 56089 von der Basis zehn; c) $\epsilon \delta \gamma \beta \alpha$ von der Basis x ?

3) Warum fängt man von der rechten Seite an zu zählen? Wie werden folgende Zahlen ausgesprochen, wenn man von der linken Seite zu zählen anfängt a) 573; b) 105623; c) 00380976?

4) Wie verwandelt man eine Zahl N in eine Reihe nach der Grundzahl x ;

5) Wie viel Zahlensysteme giebt es? Wie heißen die 9 Zahlensysteme?

6) Wie schreibt man eine dekadische Zahl nach verschiedenen Systemen?

7) Achttausend vierhundert und fünfzehn Einheiten nach allen 9 Systemen zu schreiben?

8) Die dekadische Zahl 30 nach dem triadischen System zu schreiben,

9) " " " 269 " pentadischen " " "

10) " " " 153 " hexadischen " " "

11) " " " 2626 " oktadischen " " "

12) Wie verwandelt man eine Zahl nach verschiedenen Systemen, geschrieben in eine dekadische Zahl?

13) Die tetradische Zahl 310213 nach dem dekadischen System zu schreiben.

14) " pentadische " 2034 " " " " "

15) " tetradische " 12031 " " " " "

16) " oktadische " 4237 " " " " "

17) " diadische " 11001101 " " " " "

18) " enneadische " 87024 " " " " "

19) Wie addirt man Zahlen von verschiedenen Systemen?

20) Die pentadischen Zahlen $3103 + 2034 + 4322 + 2231$ zu addiren.

21) Die tetradischen Zahlen $23021 + 12031 + 31020 + 32220 + 10231 + 20320 + 11232$ zu addiren.

22) Die enneadischen Zahlen $147682 + 638750 + 287301 + 804321 + 384567$ zu addiren.

23) Die triadischen Zahlen $2110211 + 1221122 + 2011202 + 1021202 + 2011220 + 2111222$ zu addiren.

24) Wie subtrahirt man Zahlen verschiedener Systeme?

25) Die heptadischen Zahlen $50243164 - 36125345$ zu subtrahiren.

26) Die diadischen Zahlen $101100010 - 10110111$ " "

27) Die hexadischen Zahlen $421301230 - 42345325$ " "

28) Wie multiplicirt man Zahlen verschiedener Systeme?

29) Die heptadischen Zahlen $32043 \cdot 645$ zu multipliciren.

30) Die oktadischen " $53026 \cdot 6517$ " "

31) Die diadischen " $100110 \cdot 1011$ " "

32) Die triadischen " $21021 \cdot 212$ " "

33) Wie dividirt man Zahlen verschiedener Systeme?

34) Die tetradischen Zahlen $120101301 : 123$ zu dividiren.

35) Die enneadischen " $71777126 : 86$ " "

36) Die oktadischen " $207267133 : 453$ " "

37) Berechne $(450624 + 3412364 + 1503545 + 6302 - 2045631)$.

1352 : 245 nach dem heptadischen System und verwandle dann die Summe, die Differenz, das Produkt und den Quotienten in dekadische Zahlen.

38) Desgleichen nach dem enneadischen System: $(6702384 + 25480 + 1834672 + 8703421 - 7658438)$. 5681 : 467.

39) Desgleichen nach dem hexadischen System: $(45204112 + 3451302 + 101452 + 5342 - 5342143)$ mal $3245 : 1432$.

§ 47. Decimalbrüche.

- 1) Wie entstehen Decimalbrüche? Was ist ein Decimalbruch?
 - 2) Wie verwandelt man gemeine Brüche in Decimalbrüche? Wie viel Fälle kommen hierbei vor? Welche Decimalbrüche nennt man endliche, welche unendliche? Was ist eine Periode? In welchem Falle fängt die Periode den Bruch gleich an — in welchem gehen noch andere Ziffern vorher? Wie viele in jedem dieser Fälle?
 - 3) Wie verwandelt man endliche, wie unendliche Decimalbrüche in gemeine Brüche?
- | | |
|--|---|
| <ol style="list-style-type: none"> 4) 0,833 . . . 5) 0,0101 . . . 6) 0,722 . . . 7) 0,2142857142857 . . . 8) 0,233 . . . 9) 0,9166 . . . | <ol style="list-style-type: none"> 10) 0,32727 . . . 11) 0,59090 . . . 12) 0,113636 . . . 13) 0,4729729 . . . 14) 0,12345674567 . . . 15) 0,732142857142857 . . . |
|--|---|

D. Combinationslehre.

§ 48.

- 1) Was lehrt die Combinationslehre?
- 2) Was versteht man unter einem Elemente, — was unter einer Complexion? Was unter Complexion der ersten, zweiten u. s. w. Ordnung?
- 3) Was nennt man Permutiren — was Combiniren — was Variiren?

α) Permutiren.

- 4) Wie zeigt man das Permutiren von n Elementen an? Wie ist die Bildung der Permutationsformen? Was versteht man unter einer Permutation mit Wiederholung?
- 5) Wie ist die Formel der Permutation von a) 2; b) 3; c) n Elementen?
- 6) Wie ist die Formel der Permutation von 3 Elementen, wenn 1 Element 2 Wiederholungen hat? Desgleichen von 5 Elementen, wenn 2 Elemente je 3 Wiederholungen haben? Desgleichen von n Elementen,

wenn 1 Element q Wiederholungen hat? Desgleichen von n Elementen, wenn 1 Element q und 1 Element r Wiederholungen hat?

7) Die Anzahl folgender Permutationen $n P (a^n)$, $n P (a^{n-1}b)$, $n P (a^{n-2}b^2)$. . . $n P (a^{n-r}b^r)$ aufzufinden.

8) Auf wie viel Arten können 6 Personen ihre Plätze an einem Tisch gegenseitig wechseln?

9) Auf wie viel verschiedene Arten können die Buchstaben aabcedee auf einander folgend geschrieben werden?

10) Das Wort Roma auf jede mögliche Weise umzustellen.

11) In einer Klasse von 15 Schülern wird von Monat zu Monat die Reihenfolge dieser Schüler neu bestimmt. Welches ist die kürzeste Zeit, in der alle möglichen Reihenfolgen derselben vorkommen können.

12) Wie viel verschiedene sechsziffrige ganze Zahlen können aus den 6 Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6 so geschrieben werden, daß in jeder Zahl alle diese 6 Ziffern vorkommen?

13) Wie viel verschiedene zehnziffrige ganze Zahlen können so geschrieben werden, daß in jeder derselben die Ziffer 6 dreimal, die Ziffer 7 einmal, die Ziffer 8 viermal und die Ziffer 9 zweimal vorkommt?

14) Wie viel verschiedene neunziffrige ganze Zahlen können so geschrieben werden, daß in jeder derselben die Ziffer 4 dreimal, die Ziffern 3 und 2 jede einmal, die Ziffern 1 und 0 jede zweimal vorkommen (hierbei darf aber keine Null auf der linken Seite anfangen)?

15) Wie oft können die 24 Buchstaben des Alphabets versetzt werden? Wie viel Papier ist dazu nöthig? Wie viel Jahre haben alle Menschen der Erde daran zu schreiben? (Auf jeder Seite eines Oktavblattes 40 Zeilen, in einer Zeile 50 Buchstaben zu rechnen. Auf der Erde leben zu gleicher Zeit ungefähr 1000 Millionen Menschen und jeder schreibt täglich 40 Seiten).

β) Combiniren.

16) Welches Element wird das niedrige, welches das höhere genannt?

17) Was versteht man unter identischen, — was unter gut geordneten Combinationsformen?

18) Wie unterscheidet man Combinations ohne und mit Wiederholungen?

19) Was versteht man unter einer Combination der ersten — zweiten — dritten u. s. w. Klasse. Wie deutet man die verschiedenen Klassen an? Wie mit unbedingter Wiederholung? Welche Namen führen die Combinationen der verschiedenen Klassen?

20) Entwickle die C. ohne Wiederholung für 4 Elemente durch alle Klassen? Desgleichen mit Wiederholungen.

21) Wie groß ist die Anzahl der C. ohne Wiederholung für n Elemente in jeder einzelnen Klasse?

22) Wie groß ist die Anzahl der C. mit unbedingter Wiederholung für n Elemente in jeder einzelnen Klasse?

23) Wie viel verschiedene Würfe können mit 2 gewöhnlichen Würfeln geworfen werden?

24) Desgleichen mit 3?

25) Im Whombre ist die Anzahl der in einer Hand möglichen Spiele, da 9 Karten aus 40 genommen werden, wie groß?

26) Wie viele Amben, Ternen, Quaternen und Quinten können aus 90 Nummern gebildet werden?

27) Desgleichen aus 60 Nummern?

28) Aus einem Spiele von 32 Karten soll man ohne zu wählen 15 Blätter herausziehen. Wie oft kann dies geschehen, wenn die gezogenen 15 Karten nie völlig dieselben sein sollen.

29) Auf wie viel Arten lassen sich 40 verschiedene Kugeln in zwei Haufen abtheilen, so daß der eine 33 und der andere 7 Kugeln enthalte?

30) Führe den Beweis des binomischen Lehrsatzes für positive ganze Exponenten, vermittelst der Combinationen.

31) Desgleichen für negative ganze Exponenten.

γ) Variiren.

32) Entwickle die Variationen ohne Wiederholung für 4 Elemente durch alle Klassen hindurch.

33) Wie groß ist die Anzahl der V. ohne Wiederholung von n Elemente für alle Klassen?

34) Desgleichen mit unbedingter Wiederholung?

§ 49. Mathematische Wahrscheinlichkeit.

- 1) Wie bestimmt man die mathematische Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses?
- 2) Welche Fälle rechnet man zu den günstigen — welche zu den möglichen.
- 3) Welches Ereigniß nennt man wahrscheinlich — welches zweifelhaft — welches unwahrscheinlich — welches gewiß?
- 4) Wenn ich bei einer Verloosung von 200 Loosen 6 nehme, — wie groß ist die mathematische Wahrscheinlichkeit, daß ich gewinnen werde?
- 5) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit mit a) einem Würfel 3; b) zwei Würfeln 4 oder 6 zu werfen?
- 6) Aus einem Spiele von 32 Karten werden 3 Karten gezogen — wie groß ist die mathematische Wahrscheinlichkeit, daß die gezogenen Karten alle Coeurs sein werden.
- 7) Man hat beobachtet, daß an einem Orte an einer jährlich wiederkehrenden Krankheit von 1000 Personen durchschnittlich 85 erkranken, und von diesen wieder 28 sterben. Wie groß ist für jeden Einwohner dieses Ortes die Wahrscheinlichkeit: a) von der Krankheit befallen zu werden, b) nicht befallen zu werden und wenn man befallen wird, c) zu genesen, d) zu sterben?
- 8) Es befinden sich in einem Gefäße 3 weiße, 4 rothe und 8 blaue Steine. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit a) einen weißen Stein zu ziehen, b) einen rothen zu ziehen, c) einen blauen zu ziehen, d) einen weißen oder einen rothen zu ziehen, e) einen weißen oder einen blauen zu ziehen, f) einen rothen oder einen blauen zu ziehen?
- 9) Unter wie viel Würfeln hat man bei drei Würfel zu erwarten, daß einmal alle drei Sechser fallen?

Inhalt.

	§	Seite
Erklärungen	§ 1.	3
A. Die Buchstabenrechnung.		
I. Addiren	§ 2.	4
a) Mit absoluten Zahlen		4
β) Mit relativen Zahlen		5
II. Subtrahiren	§ 3.	7
a) Mit absoluten Zahlen		8
β) Mit relativen Zahlen		9
III. Multipliciren	§ 4.	10
a) Mit absoluten Zahlen		12
β) Mit relativen Zahlen		12
Factorenzerfällung	§ 5.	13
IV. Dividiren	§ 6.	14
a) Mit absoluten Zahlen		17
β) Mit relativen Zahlen		17
Die vier ersten Rechnungsarten mit einander verbunden	§ 6 A.	18
Quotienten heben	§ 7.	19
Quotienten addiren	§ 8.	20
Quotienten subtrahiren	§ 9.	22
Quotienten multipliciren	§ 10.	24
Quotienten dividiren	§ 11.	26
Verhältnisse und Proportionen	§ 12.	28
Kettenbrüche	§ 13.	29
V. Potenziren		29
Rechnungen mit Potenzen mit positiven Exponenten	§ 13. A.	29
Potenzen von Produkten, Quotienten und Polynomen	§ 14.	31
Potenzen zu addiren und subtrahiren	§ 15.	33
Potenzen zu multipliciren	§ 16.	34
Potenzen zu dividiren	§ 17.	36
Potenzen zu potenziren	§ 18.	38
VI. Extrahiren	§ 19.	39
Quadrat- und Cubikwurzel aus Polynomen	§ 20.	41
Quadrat- und Cubikwurzel aus dekadischen Zahlen	§ 21.	43
Wurzeln zu addiren und subtrahiren	§ 22.	44
Wurzeln zu multipliciren	§ 23.	46
Wurzeln zu dividiren	§ 24.	50
Wurzeln zu potenziren	§ 25.	53
Wurzeln zu extrahiren	§ 26.	54
VII. Exponiren (Logarithmiren)	§ 27.	55
Aufgaben mit Logarithmen zu berechnen	§ 28.	59
Verschiedene Aufgaben	§ 29.	61
Herling Aufgaben.		9

B. Algebra.

		Seite
	Einleitung	§ 30. 68
I.	Gleichungen vom ersten Grade.	
	Gleichungen mit einer unbekanntem Zahl	§ 31. 69
	Gleichungen mit mehreren unbekanntem Zahlen	§ 32. 75
II.	Gleichungen vom zweiten Grade.	
	Gleichungen mit einer unbekanntem Zahl	§ 33. 80
	Gleichungen mit mehreren unbekanntem Zahlen	§ 34. 84
III.	Exponentialgleichungen	§ 35. 86
IV.	Unbestimmte Gleichungen	§ 36. 87
	Aufgaben.	
	Gleichungen vom ersten Grade mit einer unbekanntem Zahl	§ 37. 88
	Gleichungen vom ersten Grade mit mehreren unbekanntem Zahlen	§ 38. 97
	Reine Gleichungen vom zweiten und höheren Grade mit einer unbekanntem Zahl	§ 39. 102
	Reine Gleichungen vom zweiten Grade mit mehreren unbekanntem Zahlen	§ 40. 104
	Gemischt quadratische Gleichungen mit einer unbekanntem Zahl	§ 41. 105
	Gemischt quadratische Gleichungen mit mehreren unbekanntem Zahlen	§ 42. 108
	Unbestimmte Gleichungen des ersten Grades	§ 43. 111
	C. Die Reihen oder Progressionen § 44. 112	
I.	Differenzreihe	113
II.	Quotientenreihe oder Verhältnißreihe	114
III.	Höhere Differenzreihe	118
	Zinsrechnung	§ 45. 119
	α) Einfache Zinsen	119
	β) Zinseszinsen	120
	Zahlensystem	§ 46. 123
	Decimalbrüche	§ 47. 125
	D. Combinationslehre § 48. 125	
	α) Permutiren	125
	β) Combiniren	126
	γ) Variiren	127
	Mathematische Wahrscheinlichkeit	§ 49. 128

Verbesserungen.

Seite	8	Aufg.	17	statt	(a (1 ¹ / ₁₂ x . . .	lies	a) (1 ¹ / ₁₂ a . . .
"	50	"	70	"	— 36y ²	"	— 36y ²).
"	54	"	6	"	$\sqrt{x^2}$	"	$\sqrt[3]{x^2}$.
"	63	"	49	"	+ 2,9 log c	"	— 2,9 log c.
"	64	"	66	"	— b ² x ²	"	— b ²)x ² .
"	64	"	67	"	3x $\sqrt{3}$	"	(3x $\sqrt{3}$.

Im Verlage von **Schnakenburg** in **Dorp**
sind ferner erschienen:

Bourquin, G. A., Leitfaden für den Unterricht im Rechnen in Elementar- und Kreisschulen. 2. verbesserte und vermehrte Auflage. Gr. 8. 1851. 30 Kop.

- Aufgaben für den Unterricht im Rechnen für Elementar- und Kreisschulen. 7. Aufl. 8. 1877. Gebund. 50 Kop.
- Antworten zu den Aufgaben für den Unterricht im Rechnen in Elementar- und Kreisschulen. Gr. 8. 1870. 30 Kop.
- Arithmetische Denkfübungen mit erklärender Auflösung. 8. 1859. 30 Kop.

Гехель, Др. К., Планиметрия по системѣ Лежандра для употребленія въ гимназіяхъ и реальныхъ училищахъ. 2-ое изданіе. 60 Kop.

- Стереометрія по Лежандру для употребленія въ гимназіяхъ и реальныхъ училищахъ. 2-ое изданіе. 60 Kop.

Nerling, W., Lehrbuch der allgemeinen Arithmetik nebst Beispielen und Aufgaben. Gr. 8. 1866. 90 Kop.

- Lehrbuch der ebenen Geometrie. 8. 3. verbesserte Auflage 1879. Cart. 80 Kop.
- Sammlung von Beispielen und Aufgaben aus der Buchstabenrechnung und Algebra. 7. Aufl. 1886. Geb. 80 Kop.
- Auflösungen der Beispielen und Aufgaben aus der Buchstabenrechnung und Algebra. 5. Aufl. 1886. 60 Kop.
- Lehrbuch der Stereometrie. 8. 1865. 60 Kop.
- Lehrbuch der ebenen Trigonometrie. 2. Aufl. Gr. 8. 1879. 80 Kop.

Paulson, A., Lehrbuch der Planimetrie. Zweite umgearbeitete und vermehrte Aufl. Gr. 8. 1876. Cart. 1 Kbl.

- Propädeutik der Geometrie. Zugleich ein Leitfaden für den Elementarunterricht der Planimetrie. Mit in den Text gedruckten Holzschnitten. 2. vermehrte Auflage. Gr. 8. 1880. 80 Kop.

Schmitt, M. P., Praktisches Rechenbuch nach russischem Münz-, Maaß- und Gewichtssystem. 8. 1875. Cart. 25 Kop. — Auflösungen dazu. 8. 1875. Cart. 20 Kop.

Spalving, J., Leitfaden für den geometrischen Anschauungsunterricht nach Bory's Grundsätzen zusammengestellt. (Bestimmt für die untere Klasse der Kreisschulen, sowie für andere Anstalten, in denen der geometrische Unterricht seinen Anfang nimmt.) Mit einer Steindrucktafel. Gr. 8. 30 Kop.

- Der praktische Kopfrechner, enthaltend Beispiele aus dem Kinderkreise und dem bürgerlichen Leben, mit Berücksichtigung der in den Ostseeprovinzen gebräuchlichen Münzen, Maaße und Gewichte nebst einigen Fingerzeigen und Erläuterungen. 2. vielfach veränderte Aufl. Gr. 8. 90 Kop.

Specht, Formenlehre der Geometrie. Zweite Aufl. 8. 1872. 40 Kop.