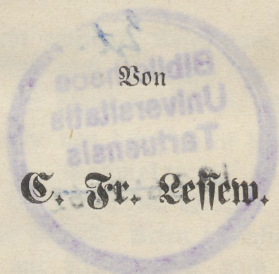


Geometrie

für

Kreis schulen.



Libau, 1847.

Vertriebsstelle

Der Druck wird gestattet, mit der Anweisung, nach
Vollendung desselben die gesetzliche Anzahl von Exemplaren
hierher eingängig zu machen.

Riga, am 24. Oct. 1846.

Dr. C. C. Napierſky,
Cenſor.



6139

7481 no 419

Einleitende Begriffe.

§. 1. Messen heißt, etwas mit ihm gleichartigem vergleichen. Alles, was gemessen werden kann, heißt eine Größe. Die Messkunst der Größen heißt Größenlehre oder Mathematik.

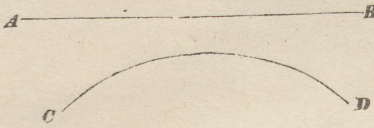
§. 2. Es gibt zweierlei Arten von Größen: räumliche oder extensive und Zahlgrößen oder intensive. Daher zwei Theile der Mathematik: die Arithmetik oder Rechenkunst, welche von den Zahlen handelt, und die Geometrie oder die Messkunst der räumlichen Größen.

§. 3. Es giebt dreierlei Arten räumlicher Größen:

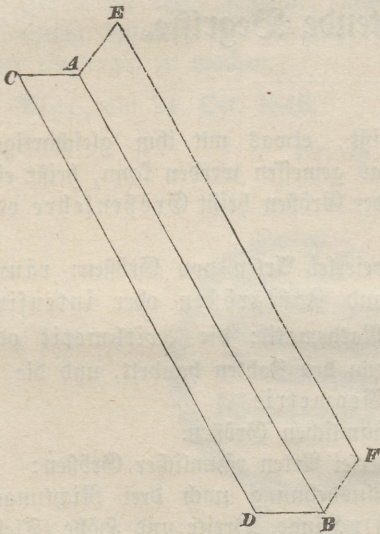
- 1) Körper mit Ausdehnung nach drei Richtungen (Dimensionen): Länge, Breite und Höhe (Tiefe, Dicke &c.).
- 2) Flächen mit zwei Dimensionen: Länge und Breite. Sie bilden die Oberflächen oder Grenzen des Körpers.
- 3) Linien mit einer Dimension: Länge. Sie bilden die Grenzen der Fläche. Die Grenzen der Linie sind Punkte, die keine Ausdehnung haben, also auch keine Größen mehr sind.

§. 4. Es giebt zweierlei Arten von Linien, gerade und krumme. Die gerade Linie ist die (fürzeste) Entfernung zwischen zwei Punkten. Daher ist zwischen zwei Punkten

nur eine gerade Linie möglich. Alle Punkte einer geraden Linie liegen hintereinander, so daß die Endpunkte alle zwischen ihnen liegenden decken. Man bezeichnet die Linie mit Buchstaben an ihren Endpunkten, z. B. die gerade AB , die krumme CD .



Anmerk. Das Werkzeug, dessen man sich bedient, um gerade Linien zu ziehen, ist das Lineal. Um zu prüfen, ob



dasselbe gerade sei, ziehe man längs seiner Seite möglichst fein die Gerade AB , lege dann das Lineal so um, daß CD in die Richtung EF falle, aber AB seine vorige Lage behalte, und ziehe abermals eine Linie AB . Fallen beide Linien genau zusammen, so ist das Lineal gerade; hat es irgendwo einen Fehler, so wird derselbe doppelt so groß, also desto leichter sichtbar sein.

§. 5. Eine Fläche, wie die Oberfläche der Tafel, in der man nach allen Richtungen gerade Linien ziehen kann, heißt eine Ebene und die Messkunst solcher Größen, die ganz in einer und derselben Ebene liegen, Planimetrie.

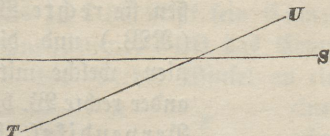
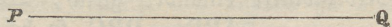
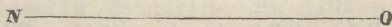
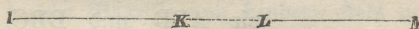
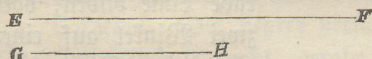
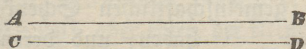
Erster Theil der Geometrie

oder Planimetrie.

§. 6. Die Zeichnung oder Darstellung räumlicher Größen in einer Ebene durch Linien heißt eine Construction, und eine Construction, die sich von selbst ohne besondere Vorkenntnisse ausführen läßt, eine Grundconstruction oder ein Postulat.

Ein Satz dagegen, der sich von selbst versteht, ohne eines Beweises zu bedürfen, heißt ein Grundsatz oder ein Axiom.

§. 7. Gerade Linien in einer Ebene können miteinander verglichen werden hinsichtlich ihrer Größe und ihrer Lage.



1) Hinsichtlich der Größe sind sie entweder gleich, $AB = CD$, oder ungleich, und dann ist $EF > GH$ (EF größer als GH), $GH < EF$ (GH kleiner als EF).

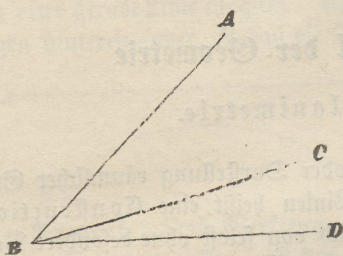
2) Hinsichtlich der Lage sind gerade Linien

a. von einerlei Richtung, wenn sie, hinreichend verlängert, sich zu einer geraden Linie vereinigen, wie IK und LM ;

b. parallel, wenn sie, noch so weit verlängert, sich nie vereinigen, $NO \neq PQ$;

c. convergent, wenn sie, genug verlängert, sich in einem Punkte vereinigen oder schneiden, wie RS und TU .

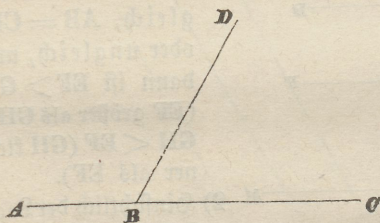
§. 8. Wenn convergente Linien sich vereinigen, so bilden sie einen Winkel (W.) ABC , und heißen alsdann



W. $CBD < ABD$; W. $ABD = ABC + CBD$; W. $ABC = ABD - CBD$.

Ein Winkel ist demnach die Neigung oder das Richtungsverhältniß zweier gerader Linien.

§. 9. Wenn eine gerade Linie eine andere so trifft, daß sie zwei Winkel bilden, die demnach einen gemeinschaftlichen Scheitelpunkt B und einen gemeinschaftlichen Schenkel BD



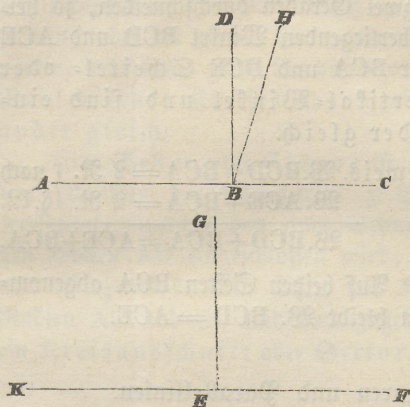
haben, und deren beide andere Schenkel eine gerade Linie bilden, oder zwei Winkel auf einer Seite einer Geraden an einerlei Scheitelpunkt, wie ABD und DBC, heißen Nebenwinkel.

§. 10. Sind zwei Nebenwinkel einander gleich, W.

$ABD = DBC$, so heißen sie rechte Winkel (RW.) und die Linien, welche mit einander rechte W. bilden, Perpendikel, senkrechte Linien oder Lothe. Ein rechter

Winkel ist also ein solcher, der einen gleichen Nebenwinkel hat.

§. 11. Alle rechte Winkel sind einander gleich.



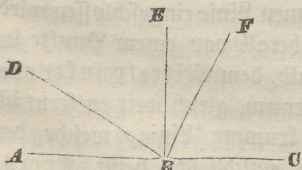
Beweis. Sind ABD und KEG rechte Winkel, so muß, nach Verlängerung der Scheitel, $ABD = DBC$ und $KEG = GEF$ sein. Legt man nun KF auf AC , so daß der Punkt E auf B fällt, so muß auch EG auf BD fallen. Denn wäre dieses nicht, sondern fiel EG z. B. in die Richtung BH ; so könnte nicht mehr $\mathcal{W}. ABH = \mathcal{W}. HBC$ sein, sondern $ABH = \mathcal{W}. + DBH$ und $HBC = \mathcal{W}. - DBH$.

Der rechte Winkel wird daher zum Maße der übrigen gebraucht. Ein Winkel, der größer ist, als ein rechter, z. B. ABH , heißt stumpf, aber einer, der kleiner ist, z. B. HBC , spitz. Beide Arten heißen auch schiefe Winkel, so wie die Linien, welche spitze und stumpfe Winkel bilden, schiefe Linien genannt werden.

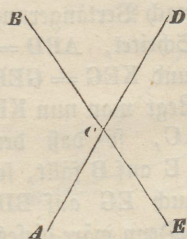
Anmerk. Der Lehrer versäume nicht, auf die Gegensätze: schief und senkrecht, gerade und krumm aufmerksam zu machen, so wie auf den Begriff senkrecht in der Physik, welche Begriffe von Kindern stets verwechselt werden.

§. 12. Nebenwinkel sind zusammen gleich zwei rechten Winkeln. $\mathcal{W}. ABH + HBC = 2 \mathcal{R}$. Jeder von beiden ergänzt den andern zu $2 \mathcal{R}$. und heißt deshalb seine Ergänzung oder Supplement. Die Ergänzung eines Winkels zu $1 \mathcal{R}$. heißt sein Complement. So ist $\mathcal{W}. ABH$ das Supplement, DBH das Complement des $\mathcal{W}. HBC$.

§. 13. Mehrere Winkel an einer Seite einer Geraden an einem gemeinschaftlichen Scheitelpunkte, wie ABD , DBE , EBF und FBC , heißen stetige oder continuirliche Winkel. Auch sie sind zusammen $= 2 \mathcal{R}$. Alle Winkel um einen Punkt sind zusammen $= 4 \mathcal{R}$.



§. 14. Wenn sich zwei Geraden durchschneiden, so heißen die einander gegenüberliegenden Winkel BCD und ACE oder BCA und DCE Scheitel- oder Vertikal-Winkel und sind einander gleich.



Beweis. $\mathcal{W}.BCD + BCA = 2 \text{ R.}$ } nach
 $\mathcal{W}.ACE + BCA = 2 \text{ R.}$ } §.12.

$$\mathcal{W}.BCD + BCA = ACE + BCA.$$

Auf beiden Seiten BCA abgenommen bleibt $\mathcal{W}.BCD = ACE$.

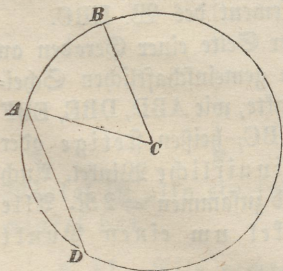
Von den Figuren und Parallellinien.

§. 15. Eine Figur ist eine von Linien eingeschlossene Ebene. Es giebt geradlinige, krummlinige und gemischtlinige Figuren, je nachdem sie von geraden oder krummen Linien oder von beiden zugleich eingeschlossen werden.

Die geradlinigen Figuren werden nach der Anzahl der einschließenden Linien, bei den Figuren Seiten genannt, in dreiseitige, vierseitige und mehrseitige, oder in Dreiecke, Vierecke und Vielecke oder Polygone getheilt.

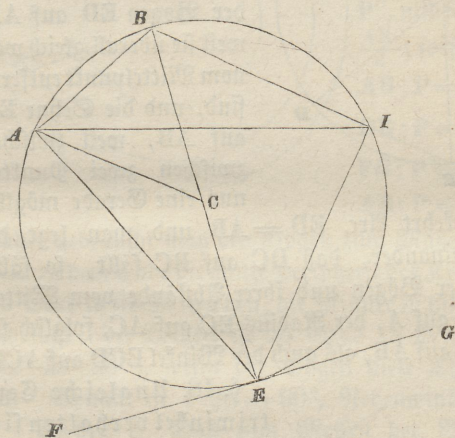
Figuren nennt man gleich ($=$), wenn sie gleichen Flächenraum einschließen; ähnlich (\sim), wenn sie gleiche Gestalt haben; congruent (\cong), wenn sie gleiche Gestalt und Größe haben oder, auf einander gelegt, sich decken.

§. 16. Eine Figur, welche entsteht, wenn eine gerade Linie CA sich um einen festen Punkt C stetig herumdreht, heißt ein Kreis. Ein Kreis ist also eine Figur, welche von einer krummen Linie eingeschlossen wird, die überall von einem Punkte innerhalb, dem Mittelpunkte oder Centrum, gleich weit entfernt ist. Die krumme Linie, welche den Kreis einschließt, heißt Kreislinie oder Peripherie, jeder



Theil derselben, wie AB , Bogen oder Arcus. Die Entfernung oder die gerade Linie vom Mittelpunkte bis zur Peripherie, wie CA , heißt Radius oder Halbmesser. Alle Radien eines Kreises oder gleicher Kreise sind einander gleich.

Eine Sehne oder Chorde ist eine gerade Linie zwischen zwei Punkten der Peripherie, z. B. AD . Der Theil der Kreisfläche, welcher von einer Sehne AD und dem zugehörigen Bogen AD eingeschlossen wird, heißt Kreisabschnitt oder Segment. Ein Theil der Kreisfläche zwischen zwei Radien AC und BC und dem zugehörigen Bogen AB heißt ein Kreisabschnitt oder Sector. — Eine Sehne, welche



durch den Mittelpunkt geht, wie BE , heißt Durchmesser oder Diameter. Jeder Diameter ist doppelt so groß als der Radius. Alle Durchmesser eines Kreises oder gleicher Kreise sind einander gleich. Der Durchmesser theilt den Kreis und die Peripherie in zwei

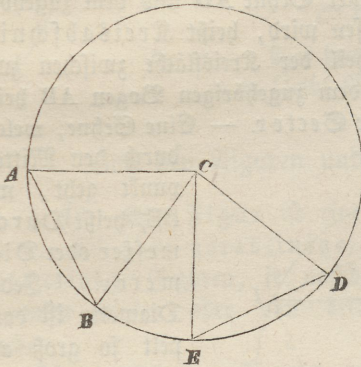
gleiche Theile, Halbkreise.

Eine gerade Linie, FG , welche den Kreis nur in einem Punkte, E , berührt, heißt eine Berührungslinie oder Tangente.

Ein Winkel BCA , dessen Scheitel der Mittelpunkt ist, und dessen Schenkel Radien sind, heißt ein Centri-Winkel; ein solcher, dessen Scheitel in der Peripherie liegt, und dessen Schenkel Sehnen sind, wie BIA , ein Peripherie-Winkel. Beide stehen auf dem Bogen, oder bespannen den Bogen AB . Der Peripherie-Winkel BIE ist ein Winkel im Halbkreise, ABI ein Winkel im kleinern,

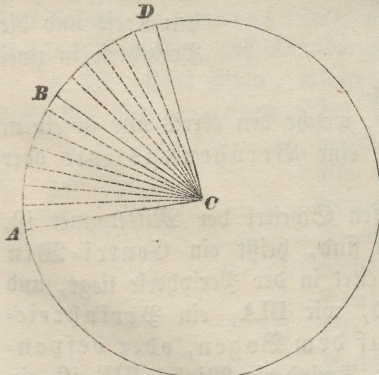
AEI ein Winkel im größeren Abschnitt. Ein Winkel IEG, der von einer Tangente und einer Sehne aus dem Berührungspunkte gebildet wird, heißt ein Tangential-Winkel.

§. 17. Im Kreise bespannen gleiche Centriwinkel gleiche Bögen und gleiche Sehnen, und umgekehrt zu gleichen Bögen gehören gleiche Sehnen und gleiche Centriwinkel.



Beweis. Legt man die gleichen Winkel ECD und ACB auf einander, so fallen die Endpunkte der gleichen Radien E auf A, D auf B, folglich auch der Bogen ED auf AB, weil sie überall gleich weit vom Mittelpunkt entfernt sind, und die Sehne ED auf AB, weil zwischen zwei Punkten nur eine Gerade möglich

ist. — Ist umgekehrt Arc. $ED = AB$ und man legt die Sectoren so auf einander, daß DC auf BC fällt, so fällt, wegen Gleichheit der Bögen und ihrer Abstände vom Mittelpunkt, der Punkt E auf A, der Radius EC auf AC, folglich sowohl die Gerade ED auf AB, als auch der Winkel ECD auf ACB.



§. 18. Ungleiche Centriwinkel verhalten sich zu einander wie die Bögen, die sie bespannen, und diese wie jene.

Beweis. Man theile die Winkel ACB u. BCD durch ihr gemeinsames Maß ACB in m , BCD in n gleiche Theile, so werden durch die Radien nach den Theilungspunkten auch die Bögen AB in m ,

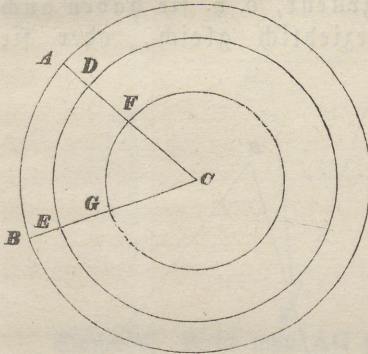
BD in n gleiche Theile getheilt, und es verhalten sich nicht nur

W. $ACB : BCD = m : n$, sondern auch

Arc. $AB : BD = m : n$, folglich

W. $ACB : BCD = AB : BD$.

§. 19. In concentrischen Kreisen, d. h. solchen, die einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt haben, haben alle Bögen eines und desselben Centriwinkels dasselbe Verhältniß zu ihren Peripherien.



Beweis. Alle Winkel um den Punkt C betragen zusammen $4R$. Bezeichnet man nun die Peripherie des äußersten Kreises mit P , die des mittleren mit P' , die des innersten mit P'' , und setzt man $W. ACB = \frac{4R}{n}$; so ist

$$AB : P = \frac{4R}{n} : 4R.$$

$$DE : P' = \frac{4R}{n} : 4R.$$

$$FG : P'' = \frac{4R}{n} : 4R., \text{ folglich}$$

$$AB : P = DE : P' = FG : P''.$$

Daher gebraucht man den Bogen zum Maße des Winkels, und theilt zu dem Ende die ganze Peripherie des Kreises in 360 Grade, den Grad in 60 Minuten, die Minute in 60 Secunden u. s. w. und sagt: der Winkel ist 56 Grad 18 Minnten 30 Secunden ($56^\circ 18' 30''$), wenn der Bogen diese Theile der Peripherie hat. Sonach ist $1R. = 90^\circ$, Nebenwinkel zusammen 180° .

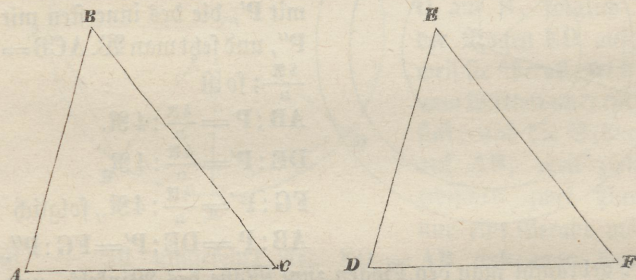
Anmerk. Das zum Messen der Winkel gebräuchliche Instrument, der Transporteur, ist ein Halbkreis, dessen Peripherie in 180° u. s. w. getheilt ist. Man lege dieses Instrument so auf den zu messenden Winkel, daß der Mittelpunkt auf den Scheitelpunkt, der Durchmesser mit dem einen Schenkel zusammenfällt, und zähle auf der Peripherie die Grade u. bis zu dem Punkt, wo der andere Schenkel sie schneidet.

Anmerk. Die Franzosen theilen die Peripherie in 400° und drücken die kleineren Theile durch Dezimalbrüche aus. Demnach ist $1^\circ = \frac{400}{360} = 1^\circ, 111 \dots$ franz., $1' = \frac{400}{360 \cdot 60} = 0^\circ, 018518 \dots$ franz., $1'' = \frac{400}{360 \cdot 60 \cdot 60} = 0^\circ, 000308 \dots$ franz.

Wieviel betragen $57^{\circ},9467$ französischer Eintheilung in unsern Graden, Minuten und Secunden? Antw. $52^{\circ} 9' 7''',308$.

Wieviel betragen $43^{\circ} 6' 20''$ unserer Eintheilung nach der französischen? Antw. $47^{\circ},895 \dots$

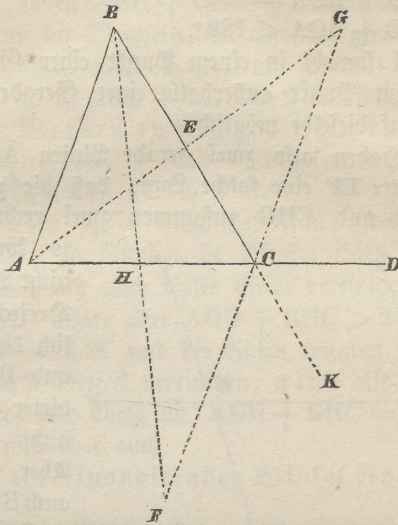
§. 20. Dreiecke oder Triangel (\triangle), welche zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel beziehlich gleich haben, sind congruent, d. h. sie haben auch die übrigen Stücke beziehlich gleich, oder sie decken sich.



Beweis. Ist $AB = DE$, $AC = DF$ und $\sphericalangle BAC = \sphericalangle EDF$, so lege man $\triangle EDF$ so auf BAC , daß $S. DF$ auf AC fällt; dann fällt wegen Gleichheit der Winkel DE auf AB und der Punkt E auf B , also auch EF auf BC und es ist folglich auch $\sphericalangle DEF = \sphericalangle ABC$, $\sphericalangle EFD = \sphericalangle BCA$, $EF = BC$, $\triangle EDF \cong \triangle BAC$.

In congruenten Dreiecken sind die gleichliegenden Seiten, d. h. die den gleichen Winkeln gegenüber liegen, einander gleich, so wie die gleichliegenden Winkel, d. h. die den gleichen Seiten gegenüber liegen.

§. 21. Wird eine Seite eines Dreiecks verlängert, so heißt der dadurch entstehende Winkel BCD Außenwinkel, und ist größer, als jeder der beiden gegenüberliegenden inneren BAC und ABC .



Beweis. Zieht man AG durch die Mitte von BC so, daß $EG = AE$ wird, und von G nach C, so ist

§. $EC = BE$

W. $\angle GEC = \angle BEA$ nach §. 14.

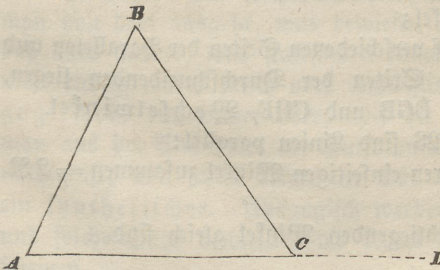
$\triangle GEC \cong \triangle BEA$ nach §. 20.

W. $\angle ECG = \angle ABE$ oder $\angle BCG = \angle ABC$

W. $\angle BCD > \angle BCG$

W. $\angle BCD > \angle ABC$

Zieht man ebenso BF durch die Mitte von AC, so folgt auf gleiche Weise W. $\angle HCK > \angle BAC$ und $\angle BCD > \angle BAC$.



§. 22. Jede zwei innere Winkel eines Dreiecks sind zusammen kleiner als zwei R., $\angle BAC + \angle BCA < 180^\circ$.

Beweis. Verlängert man eine Seite, z. B. AC,

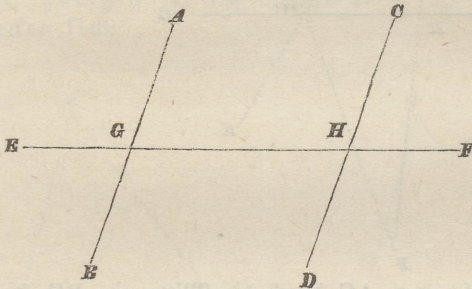
so ist $\angle BCD > \angle BAC$ nach §. 21.

$$\angle BCD + \angle BCA = 180^\circ$$

$$\angle BAC + \angle BCA < 180^\circ.$$

Daher ist sowohl in einem Punkt einer Geraden, als auch von einem Punkt außerhalb einer Geraden nur ein Perpendikel auf dieselbe möglich.

§. 23. Haben also zwei gerade Linien AB und CD gegen eine dritte EF eine solche Lage, daß die zwei inneren Winkel AGH und CHG zusammen zwei rechte betragen,



so können dieses nicht Winkel eines Dreiecks sein, folglich die Linien BA und DC sich nach dieser Seite hin nicht vereinigen. Aber dann sind auch $\angle BGH + \angle GHD = 2 R.$ und aus

demselben Grunde können die Linien sich auch nach dieser Seite hin nicht vereinigen, sind also parallel (\mp).

§. 24. Werden zwei parallele Linien von einer geraden geschnitten, so heißen

1) die inneren auf einerlei Seite der Durchschneidenden liegenden Winkel AGH und CHG oder BGH und GHD innere einseitige Winkel;

2) Winkel, die auf einerlei Seite der Parallelen und auf einerlei Seite der Durchschneidenden liegen, EGA und GHC oder BGH und DHF , gleichliegende, correspondirende oder homologe Winkel;

3) Winkel, die auf verschiedenen Seiten der Parallelen und auch auf verschiedenen Seiten der Durchschneidenden liegen, AGH und GHD oder EGB und CHF , Wechselwinkel.

§. 25. Nach §. 23 sind Linien parallel:

1) wenn die inneren einseitigen Winkel zusammen $= 2 R.$ sind; aber auch

2) wenn die gleichliegenden Winkel gleich sind.

Denn ist $AGH = CHF$ und $CHF + CHG = 2 R.$;
 so ist $AGH + CHG = 2 R.$, folglich $CD \parallel AB$.

3) Wenn die Wechselwinkel einander gleich sind.

Denn ist $AGH = GHD$ und $GHD + GHC = 2 R.$;
 so ist $AGH + GHC = 2 R.$, folglich $CD \parallel AB$.

§. 26. Werden zwei Parallelen von einer Geraden geschnitten; so sind 1) die innern einseitigen Winkel zusammen gleich $2 R.$

Denn wäre dieses nicht der Fall, sondern $AGH + GHC < 2 R.$, so könnten sie Winkel eines Dreiecks sein, also die Linien sich nach dieser Seite vereinigen, wären also nicht parallel. Wäre aber $AGH + GHC > 2 R.$, so wären $BGH + GHD < 2 R.$ und die Linien könnten sich nach dieser Seite zu einem Dreieck vereinigen, wären also nicht parallel. Sonach bleibt nur übrig W. $AGH + GHC = 2 R.$

Dann sind aber auch

2) die correspondirenden Winkel einander gleich, weil

$$\text{W. } AGH + GHC = 2 R.$$

$$\text{,, } GHC + CHF = 2 R.$$

$$\text{W. } AGH + GHC = GHC + CHF$$

$$\text{W. } AGH = CHF.$$

3) die Wechselwinkel einander gleich, weil

$$\text{W. } AGH + GHC = 2 R.$$

$$\text{,, } GHC + GHD = 2 R.$$

$$\text{W. } AGH + GHC = GHC + GHD$$

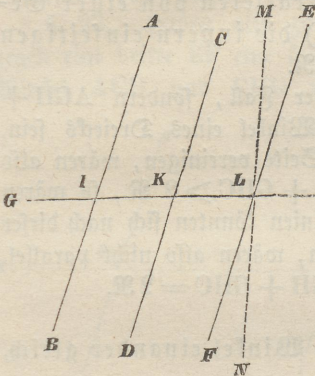
$$\text{W. } AGH = GHD.$$

Anmerk. Ein solcher Beweis, wie der zu Nr. 1, da man von dem ausgeht, was bewiesen werden soll, und zeigt, daß alles andere, was stattfinden könnte, wenn die Annahme nicht richtig wäre, falsch oder unmöglich ist, heißt ein apagogischer; ein solcher aber, wie die zu Nr. 2 und 3, da man aus der Annahme, der Hilfsconstruction, wo eine solche nöthig ist, und schon bekannten Sätzen neue Schlüsse zieht, ein synthetischer. Apagogisch werden meistens umgekehrte und solche Sätze bewiesen, die keines Beweises zu bedürfen scheinen.

§. 27. Zwei gerade Linien, die einer dritten parallel sind, sind einander parallel.

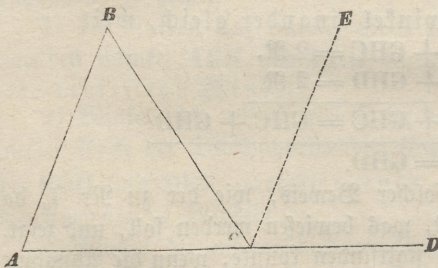
Beweis. Ist $AB \nparallel CD$; so ist $\mathfrak{B}. \text{GIA} = \text{IKC}$ } nach §§. 26, 2.
 „ $CD \nparallel EF$; „ „ „ $\text{IKC} = \text{KLE}$ }

$\mathfrak{B}. \text{GIA} = \text{KLE}$ und $AB \nparallel EF$ nach §. 25, 2.



Daher kann durch einen Punkt nur eine Parallele zu einer Geraden in derselben Ebene gezogen werden. Denn wäre $EF \nparallel AB$ und $MN \nparallel AB$, so müßte auch $MN \nparallel EF$ sein, da sie sich doch in L schneiden.

§. 28. Wie folgt aus §. 23, daß Linien parallel sind, wenn ein und dieselbe Gerade auf beiden senkrecht ist? — Und warum muß die Gerade, welche auf einer von zwei Parallelen senkrecht ist, es auch auf der andern sein?



§. 29. Der Außenwinkel am Dreieck ist so groß, als die beiden gegenüberliegenden innern zusammen, und die drei innern Winkel betragen

zusammen $2 \mathfrak{R}. = 180^\circ$.

Beweis. Zieht man $CE \nparallel AB$;

1) $\mathfrak{B}. \text{BCE} = \text{ABC}$ nach §. 26, 3.

„ $\text{ECD} = \text{BAC}$ nach §. 26, 2.

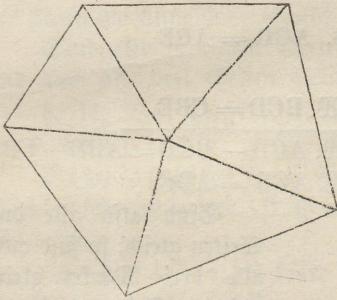
$\mathfrak{B}. \text{BCE} + \text{ECD} = \text{ABC} + \text{BAC}$ oder

„ $\text{BCD} = \text{ABC} + \text{BAC}$.

$$2) \quad \angle BCD + \angle BCA = 2 \text{ R.} = 180^\circ$$

$$\underline{ABC + \angle BAC + \angle BCA = 2 \text{ R.} = 180^\circ.}$$

In einer mehrseitigen Figur beträgt die Summe der Winkel doppelt so viel rechte, als die Figur Seiten hat, weniger 4 R. Denn hat



die Figur n Seiten, und zieht man von einem Punkte innerhalb derselben gerade Linien nach allen Ecken, so erhält man ebensoviel, also n Dreiecke, deren Winkel zusammen $2n$ R. betragen. Davon gehen aber die Winkel um den Mittelpunkt,

zusammen $= 4 \text{ R.}$, ab, weil sie nicht zum Polygon gehören, und es bleiben $2n \text{ R.} - 4 \text{ R.}$ oder $(2n - 4) \text{ R.}$ übrig. Ist das Polygon regulär, d. h. sind alle Seiten und Winkel gleich, so ist jeder Winkel $= \frac{(2n - 4)}{n} \text{ R.} = \frac{(n - 2)}{n} 180^\circ.$

§. 30. Da alle drei Winkel im Dreieck zwei rechte betragen, so müssen, wenn ein Winkel ein rechter ist, die beiden andern spitz, zusammen $= 1 \text{ R.}$ sein. Ein solcher Triangel heißt rechtwinklig, die Seiten, welche den rechten Winkel einschließen, heißen Katheten, die, welche ihm gegenüberliegt, Hypotenuse. Ein Dreieck, in welchem ein Winkel stumpf ist, die beiden andern spitz, heißt stumpfwinklig, eins mit drei spitzen Winkeln spitzwinklig.

Hinsichtlich der Seiten werden die Dreiecke eingetheilt in gleichseitige mit drei, in gleichschenklige mit zwei gleichen Seiten und in ungleichseitige.

Anmerk. Es ist sehr zweckmäßig, die Schüler zu üben, die verschiedenen Dreiecke nach dem Augenmaß zu zeichnen.

§. 31. Im gleichschenkligen Dreieck sind die Winkel, welche den gleichen Seiten gegenüberliegen, oder die Winkel an der dritten Seite (Grundlinie) einander gleich.

Beweis. Verlängert man die gleichen Seiten AB und AC um $BD = CE$; so ist

$$\text{S. } AD = AE$$

$$AC = AB$$

$$\text{W. } DAC = EAB$$

$$\triangle DAC \cong EAC \quad \text{nach §. 20.}$$

$$\text{S. } DC = BE$$

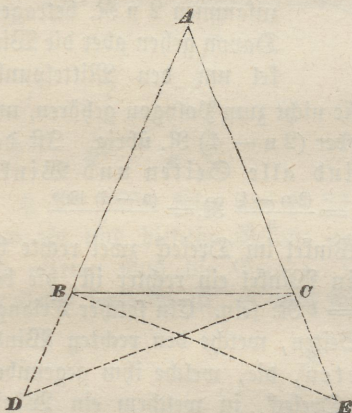
$$\text{W. } D = E \quad \text{und} \quad \text{W. } ACD = ABE$$

$$\text{S. } BD = CE$$

$$\triangle DBC \cong ECB \quad \text{und} \quad \text{W. } BCD = CBE$$

$$\text{W. } ACD = BCD = ABE = CBE$$

$$\text{oder } \text{W. } ACB = ABC.$$



Sind also alle drei Seiten gleich, so sind auch alle drei Winkel gleich und der Triangel ein regulärer. Jeder Winkel $= \frac{2}{3} \text{ R.} = 60^\circ$.

Wie groß ist jeder Winkel an der Grundlinie des gleichschenkligen Dreiecks, wenn der Gegenwinkel $57^\circ 19' 12''$ ist?

Antw. $61^\circ 20' 64''$.

Wie groß ist der von den gleichen Seiten einge-

schlossene Winkel, wenn jeder an der Grundlinie $38^\circ 16' 35''$ ist?

Antw. $103^\circ 26' 50''$.

§. 32. Im ungleichseitigen Dreieck hat die größere Seite auch den größeren Gegenwinkel. Ist $AD > AC$, so ist auch $\text{W. } ACD > ADC$.

Beweis. — Man mache $AB = AC$ und ziehe BC ; so ist $\text{W. } ACB = ABC$, aber $\text{W. } ABC > ADC$ nach §. 21, also auch $ACB > ADC$

$$\text{W. } ACD > ACB$$

$$\text{W. } ACD > ADC.$$

§. 33. Sind in einem Dreieck zwei Winkel gleich, so sind auch ihre Gegenseiten gleich.

Beweis (apagog.). W. $ABC = ACB$. Wäre AC nicht gleich AB , so müßte entweder $AC > AB$ oder $AC < AB$ sein. Aber nach dem vorigen Satze wäre

für $AC > AB$ auch W. $ABC > ACB$ und

„ $AC < AB$ „ „ $ABC < ACB$, bei-

des gegen die Annahme; folglich bleibt nur $AB = AC$ möglich.

Sind also in einem Dreieck alle drei Winkel gleich, so sind auch alle drei Seiten gleich, das Dreieck regulär.

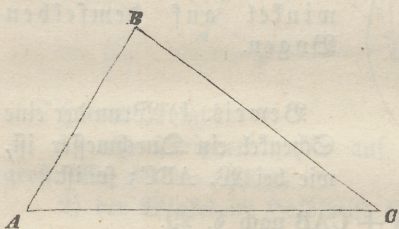
§. 34. Im ungleichseitigen Dreieck hat der größere Winkel die größere Gegenseite.

Beweis (apagog.). Ist W. $ABC > BCA$ und wäre dann S. AC nicht größer als AB , so müßte $AC = AB$ oder $AC < AB$ sein. Aber

für $AC = AB$ wäre W. $ABC = BCA$,

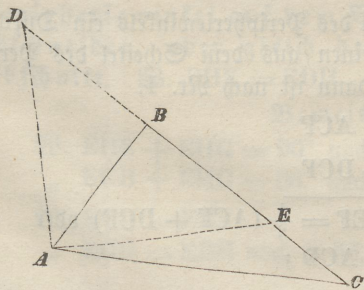
„ $AC < AB$ „ „ $ABC < BCA$,

beides gegen die Annahme, folglich bleibt nur $AC > AB$ möglich.



Demnach ist im rechtwinkligen Dreieck die Hypotenuse größer als jede der Katheten, und wiederum ist von allen Geraden, die von einem Punkte nach einer geraden Linie gezogen werden können, das

Perpendikel die kürzeste, oder die Entfernung des Punktes von der geraden Linie. Aus demselben Grunde steht die Tangente senkrecht auf dem Radius im Berührungspunkte.



§. 35. Im Dreieck ist die Summe zweier Seiten größer, ihre Differenz kleiner als die dritte Seite oder

$$BA + BC > AC,$$

$$BC - BA < AC.$$

Beweis. Macht man $BD = BE = BA$; so ist

1) $DC = BC + BA$, $EC = BC - BA$, $BA = BD$, folglich $\mathfrak{W. DAB} = D$

„ $DAC > DAB$

folg. „ $DAC > D$

§. $DC > AC$ oder $BC + BA > AC$.

2) $BE = BA$, folglich $\mathfrak{W. BEA} = BAE$

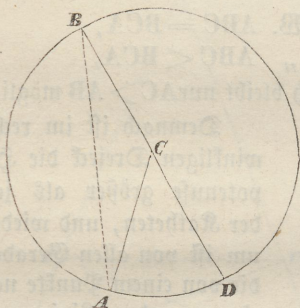
„ $BEA > EAC$ nach §. 21.

$\mathfrak{W. BAE} > EAC$

„ $AEC > BAE$ nach §. 21.

$\mathfrak{W. AEC} > EAC$

§. $AC > EC$ od. $AC > BC - BA$.



§. 36. Im Kreise ist der Peripheriewinkel halb so groß, als der Centriwinkel auf demselben Bogen.

Beweis. 1) Wenn der eine Schenkel ein Durchmesser ist, wie bei $\mathfrak{W. ABC}$; so ist

$\mathfrak{W. ACD} = CBA + CAB$ nach §. 29.

$\mathfrak{W. CBA} = CAB$ nach §. 31.

„ $ACD = 2 CBA$ oder

„ $ACD = 2 DBA$; $DBA = \frac{1}{2} ACD$.

2) Wenn kein Schenkel des Peripheriewinkels ein Durchmesser ist, so ziehe man einen aus dem Scheitel des Peripheriewinkels, z. B. EF ; dann ist nach Nr. 1.

$\mathfrak{W. AEF} = \frac{1}{2} ACF$

„ $DEF = \frac{1}{2} DCF$

$\mathfrak{W. AEF} + DEF = \frac{1}{2} (ACF + DCF)$ oder

„ $AED = \frac{1}{2} ACD$;

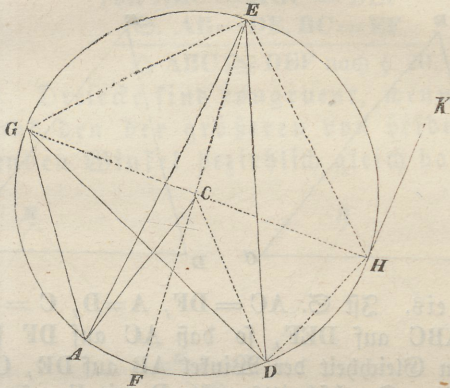
oder GH , dann ist ebenso

$$\text{W. } \angle GH = \frac{1}{2} \angle ACH$$

$$\text{,, } \angle DGH = \frac{1}{2} \angle DCH$$

$$\text{W. } \angle AGH - \angle DGH = \frac{1}{2} (\angle ACH - \angle DCH) \text{ oder}$$

$$\text{,, } \angle AGD = \frac{1}{2} \angle ACD.$$



Hieraus folgt:

1) alle Peripheriewinkel auf einerlei Bogen sind gleich groß: $\text{W. } \angle AGD = \angle AED$;

2) der Winkel im Halbkreise $\angle GEH$ ist ein rechter $= 90^\circ$, weil er gleich $\frac{1}{2} (\angle GCF + \angle FCH)$;

3) der Winkel im kleineren Abschnitt $\angle DHE$ ist ein stumpfer, der im größeren $\angle DGE$ ein spitzer.

§. 37. Der Tangentialwinkel ist gleich dem Peripheriewinkel auf dem Bogen, den die Sehne abschneidet, oder gleich dem Winkel im andern Abschnitt. $\text{W. } \angle EHK = \angle EDH$.

Beweis.

$$\text{W. } \angle EHK + \angle EHG = 90^\circ \text{ nach §. 34.}$$

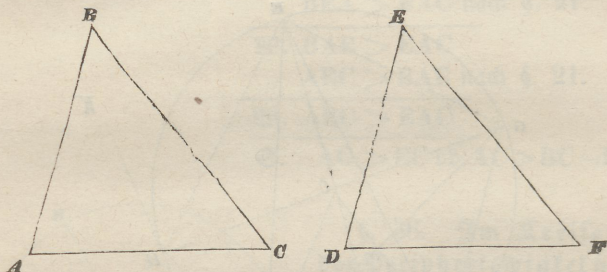
$$\text{,, } \angle EGH + \angle EHG = 90^\circ \text{ nach §. 29.}$$

$$\text{W. } \angle EGH = \angle EHK$$

$$\text{,, } \angle EGH = \angle EDH \text{ nach §. 36, 3., folglich } \angle EDH = \angle EHK.$$

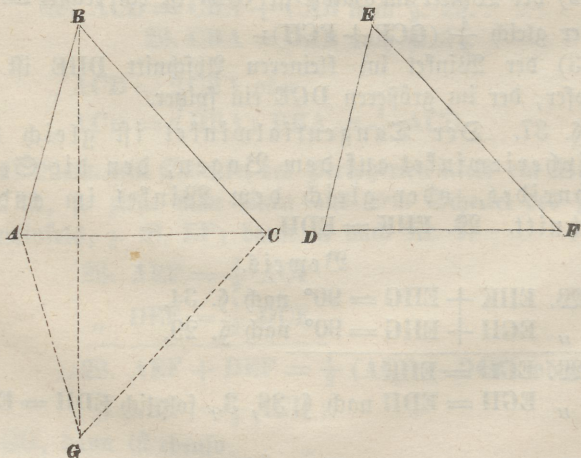
Von der Congruenz der Dreiecke.

§. 38. Dreiecke sind congruent, wenn sie eine Seite und die beiden anliegenden Winkel beziehlich gleich haben.



Beweis. Ist $\angle A = \angle D$, $\angle C = \angle F$, so lege man $\triangle ABC$ auf DEF , so daß AC auf DF fällt; dann muß wegen Gleichheit der Winkel AB auf DE , CB auf FE , also auch ihre Durchschnittspunkte B mit E zusammenfallen; folglich ist $AB = DE$, $BC = EF$, $\angle B = \angle E$, $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

§. 39. Dreiecke sind congruent, wenn sie alle drei Seiten beziehlich gleich haben.



Beweis. Ist $AC = DF$, $AB = DE$, $BC = EF$; so lege man $\triangle DEF$ so an ABC , daß DF auf AC , DE an AB nach AG falle, und ziehe BG ; dann ist

§. $AB = AG$ folglich $\sphericalangle ABG = \sphericalangle AGB$

" $BC = CG$ " " $\sphericalangle CBG = \sphericalangle CGB$

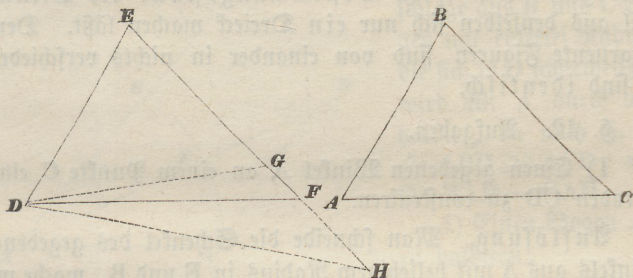
$\sphericalangle ABG + \sphericalangle CBG = \sphericalangle AGB + \sphericalangle CGB$

oder $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ACB = \sphericalangle DEF$

§. $AB = DE, BC = EF$

$\triangle ABC \cong \triangle DEF$ nach §. 20.

§. 40. Dreiecke sind congruent, wenn sie zwei Seiten und den der größeren von beiden gegenüberliegenden Winkel beziehlich gleich haben.



Beweis (apagog.). Ist $AB = DE$, $AC = DF > DE$ und $\sphericalangle B = \sphericalangle E$, so lege man $\triangle ABC$ so auf DEF , daß AB auf DE falle, so muß, wegen Gleichheit des Winkels $B = E$, BC in die Richtung von EF fallen, und wegen Gleichheit der Seiten $AC = DF$ der Punkt C auf F . Denn wäre dieses nicht, sondern es fielen AC in die Richtung DG ; so müßte, da $DG = AC = DF$ sein soll, $\sphericalangle DGF = \sphericalangle DFG$ sein; aber $\sphericalangle DGF > \sphericalangle E$, folglich auch $\sphericalangle DFG > \sphericalangle E$ oder $\sphericalangle DFE > \sphericalangle E$, also auch nach §. 34 $DE > DF$ gegen die Annahme $DF > DE$. Ebenso müßte, wenn AC außerhalb des Dreiecks DEF , z. B. in die Richtung DH fielen, wiederum $DF = DH$, also $\sphericalangle DFH = \sphericalangle DHF$, $\sphericalangle DFH > \sphericalangle E$, also auch $\sphericalangle H > \sphericalangle E$ und $DE > DH$ oder $DE > DF$ sein, gegen die Annahme $DF > DE$. Wenn also AC weder innerhalb, noch außerhalb des Dreiecks DEF fallen darf, so muß sie mit DF zusammenfallen, also

$\angle BAC = \angle EDF$, $\angle BCA = \angle EFD$, $BC = EF$, $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ sein.

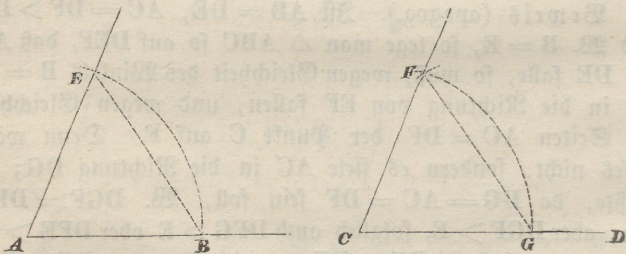
§. 41. In allen vier Fällen §. 20, 38, 39, 40 sind zur Congruenz der Dreiecke nur drei Stücke erforderlich, unter denen wenigstens eine Seite ist, woraus dann die Gleichheit der übrigen Stücke folgt. Daher heißen diese drei Stücke:

- 1) zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel,
- 2) eine Seite und die beiden anliegenden Winkel,
- 3) alle drei Seiten,
- 4) zwei Seiten und der der größeren von beiden gegenüberliegende Winkel, die Bestimmungsstücke des Dreiecks, weil aus denselben sich nur ein Dreieck machen läßt. Denn congruente Figuren sind von einander in nichts verschieden, sie sind identisch.

§. 42. Aufgaben.

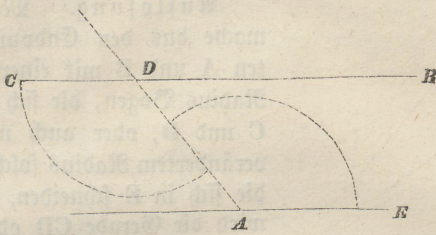
1) Einen gegebenen Winkel A an einem Punkte C einer Geraden CD zu construiren.

Auflösung. Man schneide die Schenkel des gegebenen Winkels aus A mit beliebigem Radius in E und B , mache mit



demselben Radius einen Bogen FG aus C und zwar $GF = BE$, so ist nach §. 39 $\triangle CFG \cong \triangle AEB$, folglich $\angle C = \angle A$.

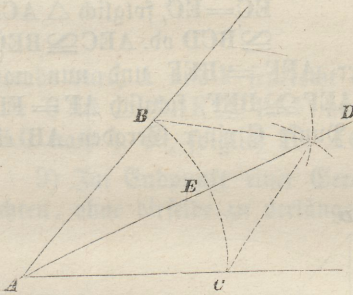
2) Durch einen gegebenen Punkt A mit der gegebenen BC eine Parallele zu ziehen.



Auflösung.
Man ziehe aus A die Gerade AD beliebig nach BC , und setze den Winkel ADC bei A auf der entgegengesetzten Seite an, $EAD = ADC$; so

ist $EA \perp BC$ nach §. 25, 3.

3) Einen gegebenen Winkel A zu halbiren.

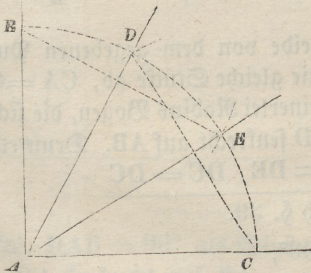


Auflösung. Man mache $AB = AC$ und schlage aus B und C Bogen mit einerlei Radius, die sich in D schneiden; so wird \mathcal{W} . A durch AD halbirt, da nach §. 39 $\triangle ABD \cong \triangle ACD$, also \mathcal{W} . $BAD = CAD$.

4) Einen Bogen AC zu halbiren.

Auflösung. Man betrachte A als den Mittelpunkt des Kreises, und suche wie vorher den Punkt D ; so ist nach §. 17 Arc. $BE = EC$.

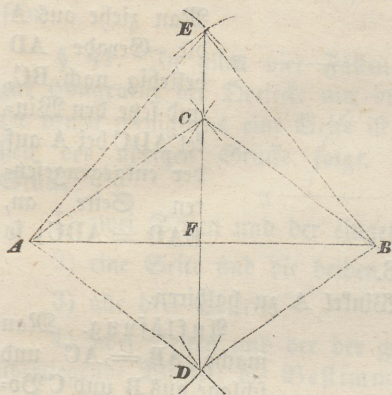
5) Einen rechten Winkel in drei gleiche Theile zu theilen.



Auflösung. Man beschreibe aus dem Scheitelpunkt einen Bogen BC , und schneide diesen mit demselben Radius aus C in D und aus B in E ; so sind AD und AE die Theilungslinien. Denn ABE und DAC sind gleichseitige Dreiecke, in denen jeder Winkel 60° ,

folglich $EAC = DAB = DAE = 30^\circ = \frac{1}{3} \mathcal{R}$.

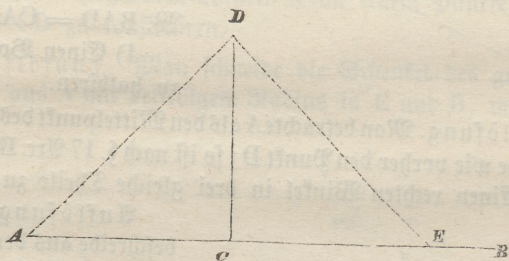
6) Eine gegebene gerade Linie AB zu halbiren.



Auflösung. Man mache aus den Endpunkten A und B mit einerlei Radius Bogen, die sich in C und D, oder auch mit verändertem Radius solche, die sich in E schneiden, so wird die Gerade CD oder EC die gegebene in F halbiren. Denn $AC = BC$, $AD = BD$, $CD = CD$, oder $AC = BC$, $AE = BE$, $EC = EC$, folglich $\triangle ACD \cong \triangle BCD$ od. $\triangle AEC \cong \triangle BEC$,

also $\mathfrak{B.} \angle ACF = \angle BCF$ oder $\angle AEF = \angle BEF$ und nun nach §. 20 $\triangle ACF \cong \triangle BCF$ oder $\triangle AEF \cong \triangle BEF$, folglich $AF = FB$.

7) In einem gegebenen Punkt C einer Geraden AB ein Perpendikel zu errichten.

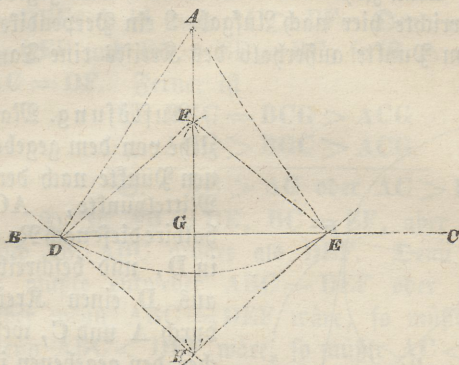


Auflösung. Man schneide von dem gegebenen Punkt aus auf beiden Seiten der Linie gleiche Stücke ab, $CA = CE$, und beschreibe aus A und E mit einerlei Radius Bogen, die sich in D schneiden; so ist die Gerade CD senkrecht auf AB. Denn es ist
 $\mathfrak{S.} \ AC = EC, \ DA = DE, \ DC = DC$

$\triangle ADC \cong \triangle EDC$ nach §. 39.

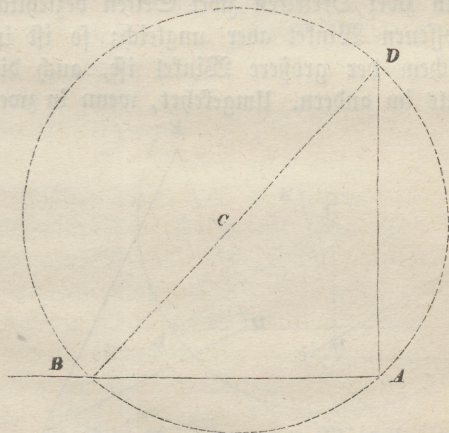
$\mathfrak{B.} \ DCA = DCE = 90^\circ$,
 DC senkrecht auf AB.

8) Von einem Punkt A außerhalb einer Geraden BC ein Perpendikel auf dieselbe zu fallen.



Gerade durch A und F senkrecht auf BC. Denn wie in Aufgabe 6 ist $\triangle DAF \cong \triangle EAF$ nach §. 39 und $\triangle DAG \cong \triangle EAG$ nach §. 20, folglich $\angle AGD = \angle AGE = 90^\circ$.

9) Im Endpunkt einer Geraden ein Perpendikel zu errichten, ohne dieselbe zu verlängern.



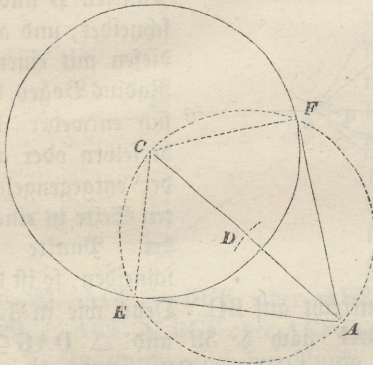
Auflösung. Man beschreibe aus irgend einem Punkte außerhalb der Linie C einen Halbkreis, der durch den gegebenen Punkt A geht, und die Linie noch in irgend einem andern Punkte B schneidet, ziehe aus diesem einen Durchmesser BD u. von A nach D; so

ist $\angle DAB = 90^\circ$ als Winkel im Halbkreise nach §. 36, 2., also DA senkrecht auf BA.

10) An einem Kreise eine Tangente zu ziehen, wenn der Berührungspunkt bestimmt ist.

Auflösung. Man ziehe einen Radius nach dem gegebenen Punkte, und errichte hier nach Aufgabe 9 ein Perpendikel.

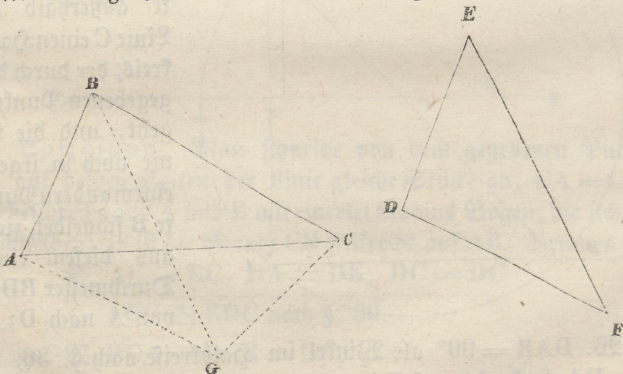
11) Von einem Punkte außerhalb des Kreises eine Tangente zu ziehen.



Auflösung. Man ziehe von dem gegebenen Punkte nach dem Mittelpunkte, AC , halbire diese nach Nr. 6 in D , und beschreibe aus D einen Kreis durch A und C , welcher den gegebenen in E und F schneidet; so sind AE und AF Tangenten und einander gleich. Denn

$\angle CEA = \angle CFA = 90^\circ$ nach §. 36, 2. und $\triangle CEA \cong \triangle CFA$ nach §. 40, also $AE = AF$.

§. 43. Sind in zwei Dreiecken zwei Seiten beziehlich gleich, die eingeschlossenen Winkel aber ungleich; so ist in demjenigen, in welchem der größere Winkel ist, auch die dritte Seite größer als im andern. Umgekehrt, wenn in zwei



Dreiecken zwei Seiten beziehlich gleich, die dritten aber ungleich sind; so ist in dem, welches die größere Seite hat, auch der Gegenwinkel dieser Seite größer, als im andern.

Beweis. 1) Ist $AB = DE$, $BC = EF$, aber $\mathcal{W}. ABC > DEF$; so ist auch $AC > DF$. Denn macht man $\mathcal{W}. ABG = DEF$ und $BG = EF = BC$; so ist $\triangle ABG \cong DEF$, also $AG = DF$. Ferner ist

$$\mathcal{W}. BGC = BCG > ACG$$

$$,, \quad AGC > BGC > ACG$$

$$\underline{\text{§.} \quad AC > AG \text{ oder } AC > DF.}$$

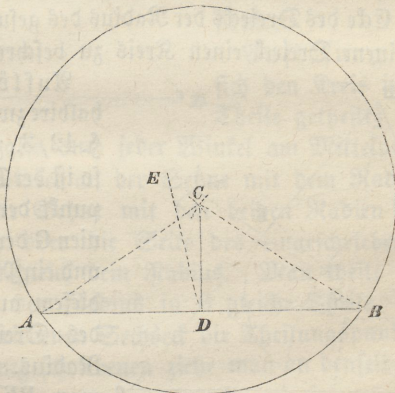
2) Ist $AB = DE$, $BC = EF$, aber $AC > DF$; so ist auch $\mathcal{W}. ABC$ größer als DEF . Denn wäre dieses nicht, so müßte entweder $ABC = DEF$ oder $ABC < DEF$ sein. Aber wenn $ABC = DEF$ wäre, so müßte $AC = DF$, und wenn $ABC < DEF$ wäre, so müßte $AC < DF$, beides gegen die Annahme; folglich bleibt nur $ABC > DEF$ möglich.

§. 44. Ein Perpendikel vom Mittelpunkt eines Kreises auf eine Sehne halbiert dieselbe.

Beweis. Zieht man die Radien CA und CB , so ist $CA = CB$, $CD = CD$, $\mathcal{W}. CDA = CDB$, folglich

$$\triangle CDA \cong CDB \text{ nach §. 40.}$$

$$\underline{AD = DB.}$$



2) Die Gerade vom Mittelpunkt auf die Mitte einer Sehne steht auf dieser senkrecht. Denn

$$CA = CB, \quad AD = DB, \quad CD = CD,$$

$$\text{folglich } \triangle CDA \cong CDB \text{ nach §. 39.}$$

$$\mathcal{W}. CDA = CDB = 90^\circ.$$

3) Das Perpendikel in der Mitte der Sehne geht durch den Mittelpunkt des Kreises. Denn läge dieser nicht in der DC, sondern z. B. in E, so müßte auch ED senkrecht auf AB sein, also $\angle EDA = \angle CDA = 90^\circ$, welches unmöglich.

§. 45. Eine eingeschriebene oder Figur im Kreise ist eine solche, deren Seiten Sehnen, eine umgeschriebene oder Figur um den Kreis aber eine solche, deren Seiten Tangenten sind.

§. 46. Aufgaben.

1) Eines Kreises Mittelpunkt zu finden.

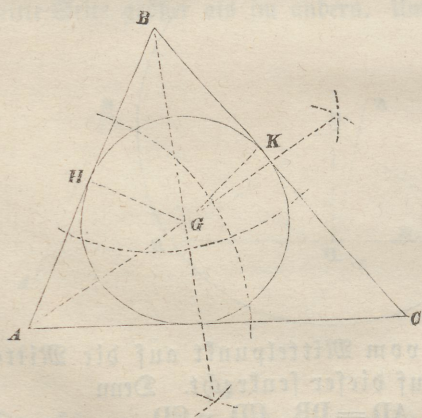
Auflösung. Ist der Kreis vollständig, so ziehe man eine Sehne, und durch die Mitte derselben eine zweite senkrecht; so ist diese der Durchmesser und nur zu halbiren.

Ist nur ein Bogen gegeben, so ziehe man zwei nicht parallele Sehnen und halbire dieselben durch Perpendikel, so ist der Durchschnittspunkt der letztern der gesuchte Mittelpunkt.

2) Um ein Dreieck einen Kreis zu beschreiben.

Auflösung. Man sehe wie in Nr. 1 zwei Seiten des Dreiecks als Sehnen an, so ist der Durchschnittspunkt der Halbierungsperpendikel der Mittelpunkt, die Entfernung desselben von einer Ecke des Dreiecks der Radius des gesuchten Kreises.

3) In einem Dreieck einen Kreis zu beschreiben.

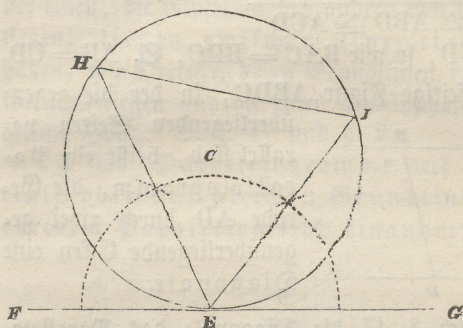


Auflösung. Man halbire zwei Winkel nach §. 42, 3., z. B. A und B, so ist der Durchschnittspunkt der Theilungslinien G der Mittelpunkt, und ein Perpendikel von diesem auf eine Seite des Dreiecks GH der Radius. Denn macht man $BK = BH$ und zieht GK, so ist $\triangle HBG \cong \triangle KBG$ nach §. 20, folglich $GK =$

GH der Radius und $\angle BKG = \angle BHG = 90^\circ$, folglich BC und AB Tangenten.

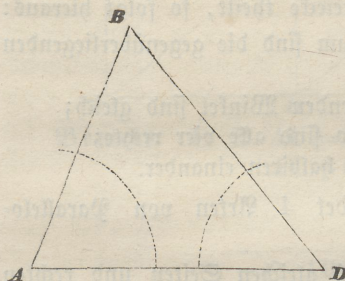
Ebenso beweist sich, daß AC eine Tangente ist.

4) In einem Kreise ein Dreieck zu construiren, welches mit einem gegebenen gleiche Winkel hat.



Auflösung. Ist das Dreieck ABD und der Kreis um C gegeben, so ziehe man an letzterem eine Tangente FG, und setze an E die Winkel HEF = BAD und IEG = BDA an; so ist HIE das verlangte

Dreieck. Denn nach §. 37 ist \sphericalangle HEF = BAD = HIE, \sphericalangle IEG = BDA = EHI, folglich \sphericalangle HEI = ABD.



5) Ein reguläres Sechseck in und um den Kreis zu construiren.

Auflösung. Denkt man sich den Kreis in sechs gleiche Theile getheilt; so enthält jeder Bogen, also auch jeder Winkel am Mittelpunkt 60° , also auch jeder Winkel an der Sehne mit dem Radius 60° . Es bildet also die Sehne mit den beiden Radien ein gleichseitiges Dreieck, oder die Seite des eingeschriebenen regulären Sechsecks ist gleich dem Radius. Man theile also die Peripherie durch den Radius in 6 gleiche Theile, und verbinde zum eingeschriebenen Sechseck die Theilungspunkte durch Sehnen; zum umgeschriebenen ziehe man an denselben Tangenten.

Von der Gleichheit der Figuren, insbesondere der Dreiecke.

§. 47. Parallele Linien, also auch Perpendikel zwischen Parallelen sind einander gleich.

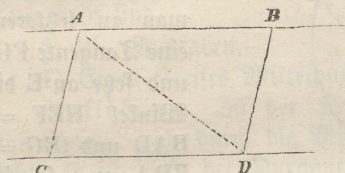
Beweis. Ist $AB \neq CD$ und $AC \neq BD$ und zieht man AD , so ist $\angle BAD = \angle ADC$ und $\angle ADB = \angle DAC$ nach §. 26, 3.

$$\text{S. } AD = AD$$

$$\triangle ABD \cong \triangle ACD$$

und $\angle ABD = \angle ACD$, so wie $\angle BAC = \angle BDC$, S. $AB = CD$.

Ein solche vierseitige Figur $ABDC$, in der die gegenüberliegenden Seiten pa-



parallel sind, heißt ein Parallelogramm, die Gerade AD durch zwei gegenüberliegende Ecken eine Diagonale.

§. 48. Da nach §. 47 die Diagonale das Parallelogramm in zwei congruente Dreiecke theilt, so folgt hieraus:

- 1) in einem Parallelogramm sind die gegenüberliegenden Seiten gleich;
- 2) auch die gegenüberliegenden Winkel sind gleich;
- 3) ist ein Winkel recht, so sind alle vier rechte;
- 4) die beiden Diagonalen halbiren einander.

§. 49. Man unterscheidet 4 Arten von Parallelogrammen:

- 1) das Quadrat mit 4 gleichen Seiten und rechten Winkeln;
- 2) den Rhombus oder die Raute mit 4 gleichen Seiten und schiefen Winkeln;
- 3) das Rechteck, Rectangel oder Oblongum mit 2 und 2 gleichen Seiten und rechten Winkeln;
- 4) das Rhomboid mit 2 und 2 gleichen Seiten und schiefen Winkeln.

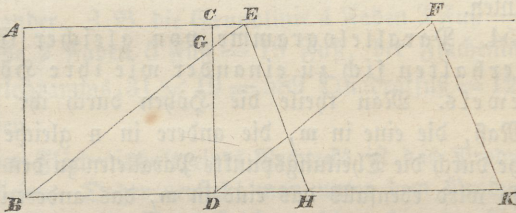
Außer Parallelogrammen giebt es noch Vierecke mit zwei parallelen und zwei nicht parallelen Seiten, Trapezoide, und solche, die gar keine parallelen Seiten haben, Trapeze.

§. 50. Denkt man sich ein Dreieck oder ein Parallelogramm auf einer seiner Seiten errichtet, so nennt man dieselbe Grundlinie, und im Dreieck den Scheitel des Gegenwinkels, im Parallelogramm aber jeden Punkt der Gegen-

seite den Gipfel; in beiden das Perpendikel vom Gipfel auf die Grundlinie die Höhe.

Parallelogramme, wie Triangel, deren Grundlinien in der einen, die Gipfel in der andern von zwei parallelen Linien liegen, liegen zwischen einerlei Parallelen, und haben, wie Dreiecke, deren Grundlinien in einer und derselben Geraden liegen und die einen gemeinschaftlichen Gipfel haben, gleiche Höhe. S. §. 47 und §. 22.

§. 51. Parallelogramme auf einerlei Grundlinie oder auf gleichen Grundlinien und zwischen einerlei Parallelen sind einander gleich.



Beweis. 1) S. $AC = BD = EF$, folglich

$$AC + CE = CE + EF \text{ oder } AE = CF$$

$$AB = CD$$

$$BE = DF$$

$$\triangle ABE \cong \triangle CDF \text{ nach §. 39, folglich}$$

$$\triangle ABE - \triangle CEG = \triangle CDF - \triangle CEG \text{ oder}$$

$$\text{Trapezoid } ACGB = EGDF \text{ und}$$

$$\text{zu beiden addirt } \triangle BGD$$

$$ACDB = EBFH \text{ oder } \square AD = BF.$$

2) Ist $HK = BD$; so ist

$$\square AD = BF, BF = FH$$

$$\square AD = FH.$$

§. 52. Parallelogramme von gleicher Grundlinie und Höhe sind einander gleich.

Beweis. Ist in den von einander abgesondert gedachten Parallelogrammen AD und FH Grundlinie $BD = HK$ und das Perpendikel zwischen AC und BD gleich dem zwischen EF und HK ; so lege man die Parallelogramme auf einander, so daß BD auf HK fällt, so muß, wegen Gleich-

heit der Perpendikel, AC mit EF in einerlei Richtung (§. 7, 2. a.) liegen, also nach §. 51, 1. $\square AD = FH$ sein.

§. 53. Parallelogramme von gleicher Höhe verhalten sich zu einander wie ihre Grundlinien.

Beweis. Man theile die Grundlinien durch ihr gemeinsames Maß, die eine in m , die andere in n gleiche Theile, und ziehe durch die Theilungspunkte Parallelen mit der andern Seite, so wird dadurch das eine in m , das andere in n nach §. 52 unter sich gleiche Theile getheilt: folglich verhalten sich die Parallelogramme wie $m : n$, ebenso verhalten sich die Grundlinien wie $m : n$, also die Parallelogramme wie die Grundlinien.

§. 54. Parallelogramme von gleicher Grundlinie verhalten sich zu einander wie ihre Höhen.

Beweis. Man theile die Höhen durch ihr gemeinsames Maß, die eine in m , die andere in n gleiche Theile, und ziehe durch die Theilungspunkte Parallelen zu den Grundlinien; so wird ebenfalls das eine in m , das andere in n unter sich gleiche Theile getheilt: folglich verhalten sich die Parallelogramme wie $m : n$, die Höhen ebenfalls wie $m : n$, also die Parallelogramme wie die Höhen.

§. 55. Parallelogramme überhaupt verhalten sich zu einander wie die Producte aus Grundlinie und Höhe.

Beweis.

Ein Parallelogramm P habe die Grundlinie G , die Höhe H ,

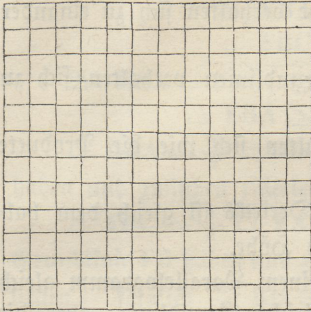
man mache ein drittes P mit der Grundlinie G , der Höhe h ,
 so verhält sich $P : P = H : h$ nach §. 54.

$P : p = G : g$ nach §. 53.

$P : p = GH : gh.$

Beim Rechteck sind zwei zusammenstoßende Seiten Grundlinie und Höhe. Daher verhalten sich Rechtecke zu einander wie die Producte zweier zusammenstoßenden Seiten.

§. 56. Zum Maße der Flächen braucht man das Quadrat. Ein Quadratzuß ist ein Quadrat, dessen Seite 1 Fuß ist. Theilt man zwei zusammenstoßende Seiten, jede in 12 Zoll, und zieht durch die Theilungspunkte Parallelen zu den

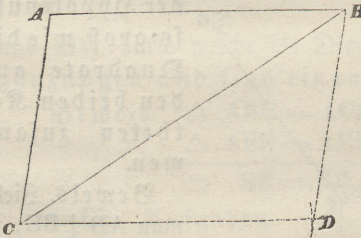


Seiten des Quadrats, so wird dieses in 144 gleiche Theile, Quadratzolle, getheilt. So hat ein Quadrat-Saschen 9 Quadrat-Arschin, ein Quadrat-Arschin 256 Quadrat-Werschok.

Soll demnach der Flächeninhalt eines Parallelogramms bestimmt werden, so messe man die Grundlinie und Höhe mit einerlei Maß, und multiplicire die Zahlen, die das Maß angeben, mit einander. Z. B. die Grundlinie 4 Faden 3 Fuß = 31 Fuß, die Höhe 2 Faden 5 Fuß = 19 Fuß, der Flächeninhalt des Parallelogramms $31 \times 19 = 589$ Quadratfuß = $12 \frac{1}{49}$ Quadratfaden.

Der Flächeninhalt eines Rechtecks ist das Product seiner zwei Seiten. Daher versteht man unter dem Product zweier geraden Linien ein Rechteck, in welchem die eine Grundlinie, die andere Höhe ist, und nennt es das Rechteck unter solchen Linien.

§. 57. Ein Dreieck läßt sich zu einem Parallelogramm vollenden, wenn man zu zwei seiner Seiten Parallelen zieht, $BD \nparallel AC$ und $CD \nparallel AB$, oder wenn man aus C einen Bogen mit



AB und aus B einen Bogen mit AC macht (§. 48, 1). Dieses Parallelogramm hat mit dem Dreieck gleiche Grundlinie und Höhe, und wird durch CB halbirt. Da also das Dreieck die Hälfte eines Parallelogramms von gleicher Grundlinie und

Höhe ist, so gelten von ihm dieselben §. 51—56 bewiesenen Sätze:

- 1) Dreiecke auf derselben oder auf gleichen Grundlinien und zwischen einerlei Parallelen sind gleich groß;
- 2) Dreiecke von gleicher Grundlinie und Höhe sind gleich;

3) Dreiecke von gleicher Höhe verhalten sich zu einander wie ihre Grundlinien;

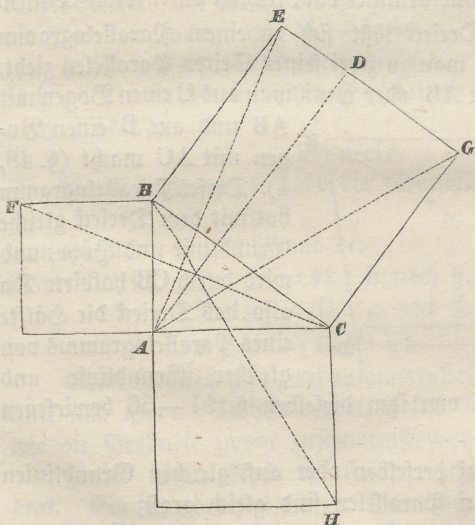
4) Dreiecke von gleichen Grundlinien verhalten sich zu einander wie ihre Höhen;

5) Dreiecke überhaupt verhalten sich wie die Producte aus Grundlinie und Höhe;

6) der Flächeninhalt eines Dreiecks ist gleich dem halben Product aus Grundlinie und Höhe.

7) Ein Dreieck wird also einem Parallelogramm gleich sein, wenn es mit demselben gleiche Grundlinie, aber die doppelte Höhe, oder die gleiche Höhe und die doppelte Grundlinie hat. Umgekehrt ist ein Parallelogramm einem Dreieck gleich, wenn es von demselben die gleiche Grundlinie und die halbe Höhe, oder die halbe Grundlinie und die gleiche Höhe hat.

§. 58. Eine Figur in eine andere verwandeln heißt, eine andere construiren, welche mit der gegebenen gleichen Flächeninhalt hat.



§. 59. Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat auf der Hypotenuse so groß wie die Quadrate auf den beiden Katheten zusammen.

Beweis. Zieht man $AD \perp BE$, so wird das Quadrat auf der Hypotenuse EC oder BC^2 in zwei Rechtecke getheilt, BD und DC , von denen jedes

dem anstoßenden Katheten-Quadrat gleich ist. Denn

$$\text{W. } \angle EBA = 90^\circ + \angle CBA$$

$$\text{,, } \angle FBC = 90^\circ + \angle CBA$$

$$\text{W. } \angle EBA = \angle FBC, \text{ S. } EB = BC, BA = BF,$$

$$\triangle EBA \cong \triangle FBC \text{ nach } \S. 20.$$

$\triangle EBA = \frac{1}{2} \square BD$, weil sie einerlei Grundlinie BE haben und zwischen einerlei Parallelen $AD \parallel BE$ liegen;

$\triangle FBC = \frac{1}{2} \square FA$ oder $\frac{1}{2} BA^2$, weil sie einerlei Grundlinie FB haben und zwischen einerlei Parallelen $AC \parallel FB$ liegen; folglich $\frac{1}{2} BD = \frac{1}{2} BA^2$, also auch $BD = BA^2$.

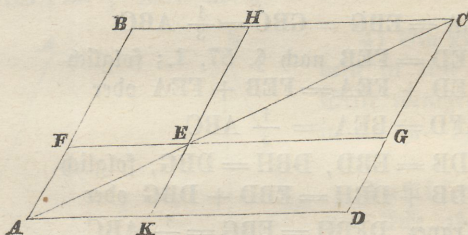
Ebenso ist

$$\triangle ACG \cong \triangle BCH, \angle ACG = \frac{1}{2} \angle CD, \angle BCH = \frac{1}{2} \angle AH = \frac{1}{2} \angle AC^2,$$

$$\text{folglich } \frac{1}{2} \angle CD = \frac{1}{2} \angle AC^2 \text{ und } \angle CD = \angle AC^2,$$

$$\text{folglich } BD + CD = BA^2 + AC^2 \text{ oder } BC^2 = BA^2 + AC^2.$$

§. 60. Werden durch einen Punkt E der Diagonale



eines Parallelogramms Parallelen zu den Seiten gezogen, so heißen die kleinen Parallelogramme BE

und ED , durch welche die Diagonale nicht geht, die Ergänzungen und sind einander gleich.

$$\text{Beweis. } \triangle ABC = \triangle ACD,$$

$$\triangle AFE = \triangle AEK, \triangle EHC = \triangle ECG$$

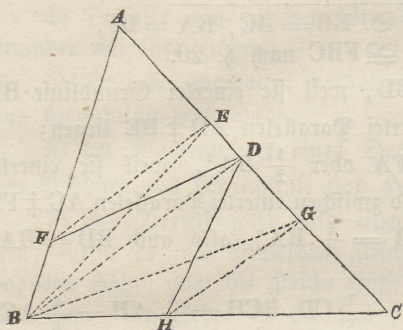
$$\square BE = ED.$$

§. 61. Aufgaben.

1) Ein Dreieck in gleiche Theile zu theilen, so daß die Theilungslinien von einem Scheitelpunkte ausgehen.

Auflösung. Man theile die dem bestimmten Scheitelpunkte gegenüberliegende Seite in die bestimmte Anzahl gleicher Theile, und ziehe nach den Theilungspunkten, so sind die Theile gleich, weil sie gleiche Grundlinien und nach §. 53 auch gleiche Höhen haben.

2) Ein Dreieck in gleiche Theile zu theilen, so daß die Theilungslinien von einem Punkt in einer Seite ausgehen.



Auflösung. Man theile die Seite, in welcher der bestimmte Punkt, z. B. D liegt, in so viel gleiche Theile, als das Dreieck haben soll, z. B. 3, ziehe dann von D nach dem gegenüberliegenden Scheitel-punkte DB und mit dieser parallel aus den Theil-punkten EF und GH, endlich von D nach den Endpunkten dieser Parallelen DF und DH; so sind die verlangten Theile $AFD = DFBH = DHC = \frac{1}{3} ABC$. Denn zieht man BE und BG, so ist $\triangle BEA = EBG = GBC = \frac{1}{3} ABC$.

Aber $\triangle FED = FEB$ nach §. 57, 1.; folglich
 $FED + FEA = FEB + FEA$ oder

$$\triangle AFD = BEA = \frac{1}{3} ABC.$$

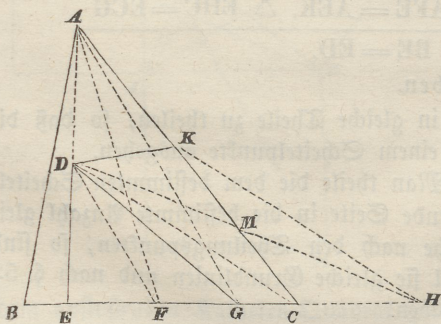
$\triangle FDB = EBD$, $DBH = DBG$, folglich
 $FDB + DBH = EBD + DBG$ oder

$$\text{Trapez. } DFBH = EBG = \frac{1}{3} ABC.$$

$\triangle HGD = HGB$, folglich

$$HGD + HGC = HGB + HGC \text{ oder}$$

$$\triangle DHC = GBC = \frac{1}{3} ABC.$$



3) Ein Dreieck in eine gewisse Anzahl, z. B. 3 gleiche Theile zu theilen, so daß die Theilungslinien von einem bestimmten Punkte innerhalb des Dreiecks, D, ausgehen.

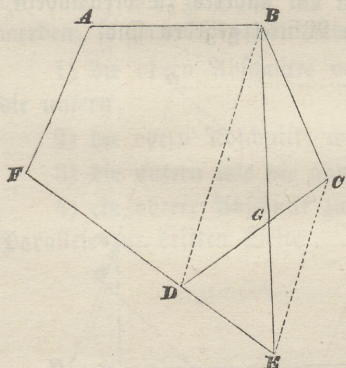
Auflösung. Man

ziehe durch den gegebenen Punkt AE , mache EF gleich dem fovielten Theile der BC , als das Dreieck Theile haben soll, hier $EF = \frac{1}{3} BC$, so daß also $\triangle EAF = \frac{1}{3} ABC$ wird; dann ziehe man $AG \perp DF$ und von D nach G ; so ist $\triangle DFG = DFA$, also $DFG + DFE = DFA + DFE$ oder $EDG = EAF = \frac{1}{3} ABC$.

Macht man nun $GH = EG$, so wird auch
 $\triangle GDH = EDG = \frac{1}{3} ABC$.

Da aber das Stück CMH schon außerhalb des Dreiecks ABC liegt, so ziehe man $HK \perp DC$ und von K nach D ; so ist $\triangle KHD = KHC$, also $KHD - KMH = KHC - KMH$ oder $DKM = CMH$, folglich

$\triangle DKM + DMC = CMH + DMC$ oder
 $DKCG = GDH = \frac{1}{3} ABC$, und bleibt also das Stück $KDEBA = \frac{1}{3} ABC$ übrig.



4) Ein Vieleck zu verwandeln in eine Figur, die eine Seite weniger hat, ein n -Eck in ein $(n-1)$ -Eck.

Auflösung. Man schneide eine Ecke ab durch die Diagonale BD , ziehe $CE \perp BD$, bis sie die verlängerte Seite FD in E trifft, und ziehe BE ; so ist

$$\triangle BDE = BDC,$$

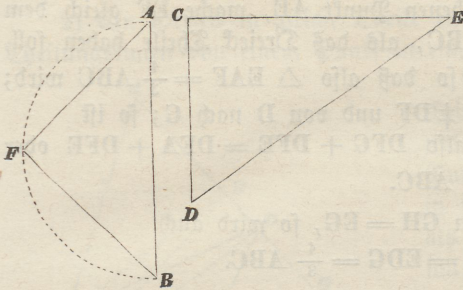
$$\triangle BDE - BDG = BDC - BDG \text{ oder}$$

$$\triangle DGE = BGC, \text{ folglich}$$

$$ABGDF + DGE = ABGDF + BGC \text{ oder}$$

$$ABEF = ABCDF.$$

So läßt sich jedes Vieleck durch Fortsetzung dieses Verfahrens bis in ein Dreieck, und dieses nach §. 57, 7. in ein Rechteck verwandeln.



5) Ein Quadrat zu construiren, welches der Summe oder dem Unterschiede zweier gegebener Quadrate gleich ist.

Auflösung.

1) Sind AB und CD die Seiten der

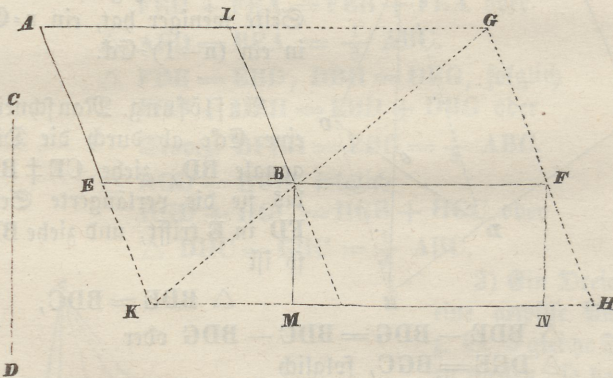
gegebenen Quadrate, so setze man sie unter einem rechten Winkel an einander und ziehe die Hypotenuse; dann ist, wenn $CE = AB$, $DE^2 = CD^2 + AB^2$.

2) Man halbire die größere AB und mache darum einen Halbkreis, in demselben die Sehne $AF = CD$; so ist

$$AB^2 = AF^2 + FB^2, \text{ folglich}$$

$$FB^2 = AB^2 - AF^2 = AB^2 - CD^2.$$

6) Ein Parallelogramm in ein anderes zu verwandeln, zu welchem eine Seite und ein Winkel gegeben sind.



Auflösung. Soll Parallelogramm AB in ein Rechteck mit der Grundlinie CD verwandelt werden; so verlängere man EB um $BF = CD$, ziehe durch F die $GH \perp AE$, bis sie die verlängerte AL in G trifft, von G die Diagonale GB , bis sie die verlängerte AE in K trifft, und durch K die

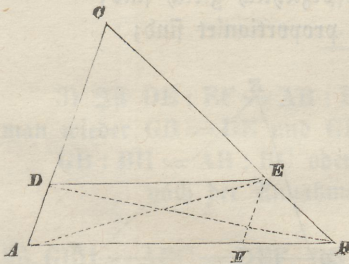
$KH \perp EF$, endlich BM und FN senkrecht auf KH ; so ist
 $BN = BH$ nach §. 51, 1.,
 $BH = AB$ nach §. 60,
 folglich $BN = AB$.

Von der Aehnlichkeit der Figuren, insbesondere der Dreiecke.

§. 62. Figuren sind ähnlich, wenn sie gleich viel in derselben Reihenfolge gleiche Winkel haben und die gleichliegenden (d. h. gleiche Winkel einschließenden, oder gleichen Winkeln gegenüberliegenden) Seiten proportionirt sind.

§. 63. Wird in einem Dreieck eine Linie parallel mit einer Seite gezogen, so werden die beiden andern Seiten proportionirt geschnitten, und zwar finden sich, wenn die Abschnitte zunächst dem Scheitel die obern, die zwischen den Parallelen die untern genannt werden, folgende Proportionen:

- 1) die obern Abschnitte verhalten sich zu einander, wie die untern,
- 2) die obern Abschnitte wie die ganzen Seiten,
- 3) die untern wie die ganzen Seiten,
- 4) ein oberer Abschnitt zu seiner ganzen Seite, wie die Parallele zur dritten Seite.



Beweis. $DE \parallel AB$,
 folglich $\triangle DEA = DEB$
 und $\triangle DEA + DEC =$
 $DEB + DEC$ oder
 $CEA = CDB$.

Ferner ist ein Perpendikel von E auf AC die gemeinschaftliche Höhe der Dreiecke CDE , DAE und CAE , so wie ein Perpendikel von D auf CB die gemeinschaftliche Höhe der Dreiecke CED , EBD , CBD .

Daher nach §. 57, 3.:

- 1) $\triangle CDE : DAE = CD : DA,$
 $\triangle CDE : EBD = CE : EB,$
 $\triangle CDE : DAE = CDE : EBD, \text{ weil } DAE = EBD,$

 $CD : DA = CE : EB \text{ oder } CD : CE = DA : EB.$
- 2) $\triangle CDE : CAE = CD : CA,$
 $\triangle CDE : CBD = CE : CB,$
 $\triangle CDE : CAE = CDE : CBD, \text{ weil } CAE = CBD$

 $CD : CA = CE : CB \text{ oder } CD : CE = CA : CB.$
 Vorher war $CD : CE = DA : EB,$
- 3) folglich auch $DA : EB = CA : CB.$
- 4) Zieht man $EF \nparallel CA,$ so ist nach Nr. 3
 $CE : AF = CB : AB \text{ oder, da } DE = AF,$
 $CE : DE = CB : AB \text{ oder}$
 $CE : CB = ED : BA \text{ und}$
 $CD : CA = DE : AB.$

§. 64. Nach der Erklärung von der Ähnlichkeit der Figuren §. 62 ist, wenn $GH \nparallel AC$ ist,

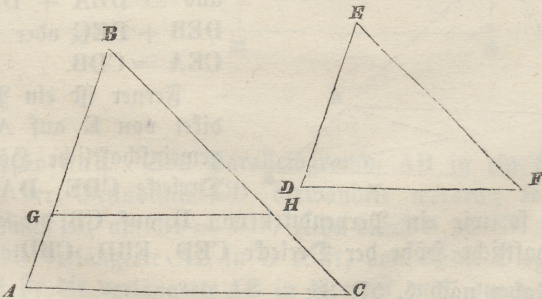
$$\triangle BGH \sim BAC, \text{ weil } \angle GBH = \angle ABC \text{ u. } \angle GBH = \angle BAC$$

$$,, \angle BGH = \angle BAC ,, \angle BG : GH = BA : AC$$

$$,, \angle BHG = \angle BCA ,, \angle BH : HG = BC : CA.$$

Nun läßt sich aber zeigen, daß Dreiecke schon ähnlich sind, wenn nur drei von diesen Bedingungen stattfinden, daß also dann die drei übrigen auch stattfinden; daß also Dreiecke ähnlich sind:

- 1) wenn alle drei Winkel beziehlich gleich sind;
- 2) wenn alle drei Seiten proportionirt sind;



3) wenn zwei Seiten proportionirt und die von diesen eingeschlossenen Winkel gleich sind;

4) wenn zwei Seiten proportionirt und die den größeren von beiden gegenüberliegenden Winkel gleich sind.

Beweis. 1) Ist

ℳ. $DEF = ABC$, $EDF = BAC$, $EFD = BCA$, so mache man $BG = ED$ und $GH \perp AC$, dann ist

$$\text{ℳ. } BGH = BAC = EDF$$

$$GB = DE$$

$$\text{ℳ. } GBH = ABC = DEF$$

$$\triangle GBH \cong DEF; BH = EF, GH = DF.$$

$$\triangle GBH \sim ABC$$

$$\triangle DEF \sim ABC, \text{ oder da}$$

$$BG : GH = BA : AC \text{ und } BG : BH = BA : BC$$

$$DE : DF = BA : AC \text{ und } DE : EF = AB : BC.$$

2) Ist $DE : EF = AB : BC$, $DE : DF = AB : AC$, so mache man wieder $BG = DE$ und $GH \perp AC$,

dann ist $GB : BH = AB : BC$, oder

$$DE : BH = AB : BC \text{ und } DE : EF = AB : BC$$

$$BH = EF$$

$$GB : GH = AB : AC \text{ oder}$$

$$DE : GH = AB : AC \text{ und } DE : DF = AB : AC$$

$$GH = DF, \text{ folglich}$$

$$\triangle GBH \cong DEF; \text{ℳ. } GBH = ABC = DEF$$

$$,, \quad BGH = BAC = EDF$$

$$,, \quad BHG = BCA = EFD.$$

$$\triangle DEF \sim ABC.$$

3) Ist $DE : EF = AB : BC$, ℳ. $DEF = ABC$, so mache man wieder $BG = DE$ und $GH \perp AC$; dann ist

$$GB : BH = AB : BC \text{ oder } DE : BH = AB : BC$$

$$\text{nach der Annahme } DE : EF = AB : BC$$

$$BH = EF, \text{ und da}$$

$$\text{ℳ. } GBH = ABC = DEF, GB = DE$$

$$\triangle GBH \cong DEF, GH = DF, \text{ℳ. } BGH = EDF = BAC,$$

$$BG : GH = BA : AC \text{ oder } ED : DF = BA : AC$$

$$\triangle DEF \sim ABC.$$

4) Ist $DE : DF = AB : AC$, $DF > DE$ u. $\mathfrak{B}. DEF = ABC$;
 so mache man wieder $GB = DE$ und $GH \perp AC$, dann ist
 $GB : GH = AB : AC$ oder $DE : GH = AB : AC$,
 nach der Annahme $DE : DF = AB : AC$

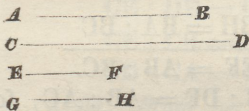
$GH = DF$, und da

$GB = DE$, $DF > DE$ und $\mathfrak{B}. GBH = ABC = DEF$

$\triangle GBH \cong DEF$, $BH = EF$, $\mathfrak{B}. BGH = EDF = BAC$

$\triangle DEF \sim ABC$.

§. 65. Sind vier gerade Linien proportionirt,
 so ist das Rechteck unter den beiden äußeren Glie-
 dern gleich dem unter den beiden mittlern, und sind
 zwei Rechtecke gleich, so verhalten sich ihre Grund-



linien umgekehrt
 wie ihre Höhen.

Beweis. 1) Ist

$AB : CD = EF : GH$;

so mache man ein

Rechteck KL aus

$KM = AB$ u. $ML =$

GH und verlängere

dessen Seiten KM um

$MN = CD$, und LM

um $MO = EF$; so ist

$$\square KL : LN = KM : MN = AB : CD$$

$$\square ON : LN = MO : LM = EF : GH$$

nach der Annahme $AB : CD = EF : GH$

$$\square KL : LN = ON : LN$$

$$\square KL = ON.$$

Aus denselben Proportionen folgt umgekehrt: wenn

$KL = ON$, also

$KL : LN = ON : LN$, auch

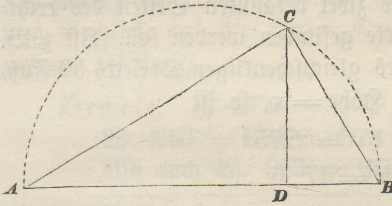
$KM : MN = MO : LM$.

§. 66. Sind drei gerade Linien stetig propor-
 tionirt, so ist das Quadrat des mittleren Gliedes
 gleich dem Rechteck unter den beiden äußeren; und
 ist ein Quadrat einem Rechteck gleich, so ist die

Seite des Quadrats die mittlere Proportionale zwischen den beiden Seiten des Rechtecks.

Man denke sich in der Figur zu §. 65 $CD = EF$ oder $MN = MO$, also $\square ON$ als Quadrat, und beweise wie vorher.

§. 67. Im rechtwinkligen Dreieck ist das Perpendikel aus dem Scheitel des rechten Winkels auf die Hypotenuse die mittlere Proportionale zwischen den beiden Abschnitten der letzteren, und die Kathete die mittlere Proportionale zwischen der ganzen Hypotenuse und dem anstoßenden Abschnitt.



Beweis.

W. $\angle DAC = \angle CAB$, $\angle CDA = \angle ACB$, folglich $\triangle ACD = \triangle ABC$,
folglich $\triangle ACD \sim \triangle ACB$.

W. $\angle CBD = \angle ABC$, $\angle CDB = \angle BCA$, folglich $\triangle DCB = \triangle CAB$,
folglich $\triangle BCD \sim \triangle ACB \sim \triangle ACD$,

daher $AD : DC = DC : DB$

$AB : AC = AC : AD$

$AB : BC = BC : BD$.

Construirt man das rechtwinklige Dreieck im Halbkreise, so ist die Hypotenuse der Durchmesser, die Katheten Sehnen; das Perpendikel von einem Punkte der Peripherie auf den Durchmesser heißt Ordinate, die Abschnitte, die dasselbe auf dem Durchmesser macht, Abscissen, und die obigen Sätze heißen dann:

1) die Ordinate ist die mittlere Proportionale zwischen den beiden Abscissen, oder das Quadrat der Ordinate ist gleich dem Rechteck aus den beiden Abscissen;

2) die Sehne ist die mittlere Proportionale zwischen dem Durchmesser und der anstoßenden Abscisse, oder das Quadrat auf der Sehne ist gleich dem Rechteck aus dem Durchmesser und der anstoßenden Abscisse.

Anmerk. Dieser letzte Satz giebt einen arithmetischen Beweis des Lehrsatzes in §. 59, welcher von seinem Erfinder

Pythagoras († um 500 v. Chr.) der Pythagoräische Satz oder auch wegen seiner Wichtigkeit magister matheseos genannt wird.

$$AC^2 = AB \times AD$$

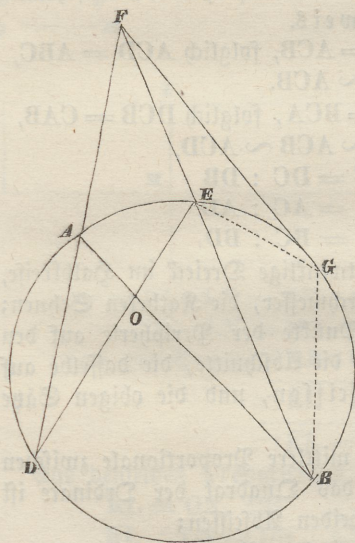
$$CB^2 = AB \times DB$$

$$AC^2 + CB^2 = AB (AD + DB) = AB^2.$$

Besonders häufig ist die arithmetische Anwendung dieses Satzes, so oft nämlich aus zwei bekannten Seiten des rechtwinkligen Dreiecks die dritte gefunden werden soll. Ist z. B. eine der gleichen Seiten des gleichschenkligen Dreiecks 50 Fuß, die Grundlinie = 30', die Höhe = x , so ist

$$x^2 = 50^2 - 15^2 = 2275$$

$$x = \sqrt{2275} = 47', 6 \dots$$



§. 68. Schneiden zwei Sehnen sich innerhalb des Kreises, so sind ihre Abschnitte wiederkehrlieh proportionirt, oder das Rechteck aus den Abschnitten der einen ist gleich dem aus den Abschnitten der andern. Vereinigen sich aber die verlängerten Sehnen erst außerhalb des Kreises; so verhalten sich die ganzen verlängerten Sehnen umgekehrt wie ihre äußeren Abschnitte.

Beweis.

- 1) $\triangle AOD \sim EOB$, weil $\sphericalangle AOD = \sphericalangle EOB$ nach §. 14.
 $\sphericalangle OAD = \sphericalangle OEB$ und $\sphericalangle ODA = \sphericalangle OBE$ nach §. 36, 1.

$$AO : OD = OE : OB \text{ od. } AO \times OB = OD \times OE.$$

- 2) $\triangle DEF \sim BAF$, weil $\mathfrak{W}. DFE = BFA$,
 $\mathfrak{W}. FDE = FBA$ nach §. 36, 1., also auch
 $\mathfrak{W}. DEF = BAF$

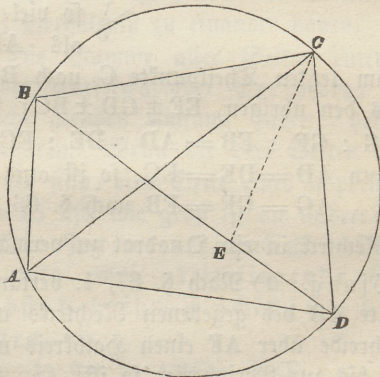
$$\underline{DF : FE = BF : FA \text{ oder } DF \times AF = BF \times EF.}$$

§. 69. Die Tangente ist die mittlere Proportionale zwischen der ganzen verlängerten Sehne und ihrem äußeren Abschnitte, oder das Quadrat auf der Tangente ist gleich dem Rechtecke aus der ganzen verlängerten Sehne und ihrem äußeren Abschnitte.

- Beweis. $\triangle EFG \sim BGF$, weil $\mathfrak{W}. EFG = GFB$,
 $\mathfrak{W}. EGF = FBG$ nach §. 37;
 also auch $\mathfrak{W}. GEF = BGF$

$$\underline{EF : FG = FG : FB \text{ oder } FG^2 = FB \times EF.}$$

§. 70. Das Rechteck aus den Diagonalen eines Vierecks im Kreise (§. 45) ist gleich den Rechtecken aus den gegenüberstehenden Seiten zusammen.



- Beweis. Macht man $\mathfrak{W}. ECD = ACB$; so ist
 $\triangle ECD \sim BCA$, weil $\mathfrak{W}. EDC = BAC$ nach §. 36, 1.
 also auch $\mathfrak{W}. DEC = ABC$

$$\underline{ED : DC = AB : AC \text{ oder } ED \times AC = DC \times AB.}$$

$\triangle BCE \sim \triangle ACD$, weil $\sphericalangle BCA + \sphericalangle ACE = \sphericalangle DCE + \sphericalangle ACE$
 oder $\sphericalangle BCE = \sphericalangle ACD$
 „ $\sphericalangle CBE = \sphericalangle CAD$ nach §. 36, 1.,
 also auch „ $\sphericalangle BEC = \sphericalangle ADC$

$$EB : BC = AD : \Delta C \text{ oder } EB \times AC = BC \times AD$$

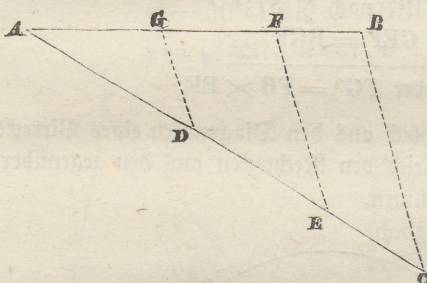
$$ED \times AC + EB \times AC = DC \times AB + BC \times AD$$

$$\text{oder } (ED + EB) \times AC = DC \times AB + BC \times AD$$

$$\text{oder } BD \times AC = DC \times AB + BC \times AD.$$

§. 71. Aufgaben.

1) Eine gerade Linie nach einem gegebenen Verhältniß oder in eine beliebige Anzahl gleicher Theile zu theilen.



Auflösung. An die zu theilende AB setze man unter beliebigem Winkel eine andere AC an, trage auf diese von A aus die gegebenen Verhältnißlinien auf, oder so viel gleiche Stücke als AB bekommen

soll, ziehe vom letzten Theilpunkte C nach B und mit CB Parallelen aus den übrigen, $EF \neq GD \neq BC$; so verhält sich

$$AG : GF : FB = AD : DE : EC,$$

oder wenn $AD = DE = EC$, so ist auch

$$AG = GF = FB \text{ nach §. 63.}$$

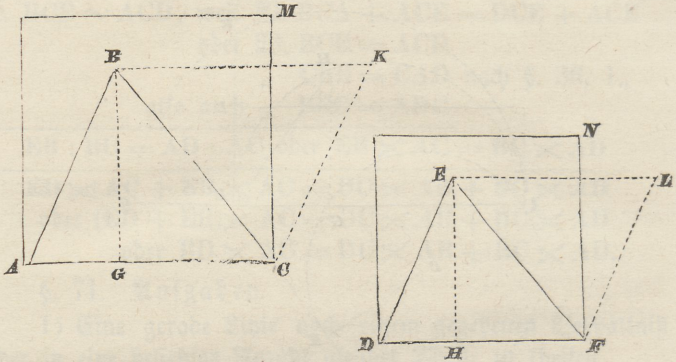
2) Ein Rechteck in ein Quadrat zu verwandeln.

Auflösung. 1) Nach §. 67, 1. verlängere man die Seite AB des gegebenen Rechtecks um $BF = BD$, beschreibe über AF einen Halbkreis und verlängere BD bis zur Peripherie; so ist

$$BE^2 = AB \times BF = \square AD.$$

2) Nach §. 67, 2. schneide man von AB die $BG = BD$ ab, beschreibe über AB einen Halbkreis und errichte in G das Perpendikel GH; so ist

$$BH^2 = AB \times BG = \square AD.$$



2) Zieht man die Höhen BG und EH, vollendet die Parallelogramme AK und DL, und errichtet auf AC und DF die Quadrate AM und DN; so ist $\triangle ABG \sim DEH$, weil $\sphericalangle BAG = EDH$, $\sphericalangle BGA = EHD$, also auch $\sphericalangle ABG = DEH$,

$$GB : AB = HE : DE,$$

$$AB : AC = ED : DF,$$

folglich $GB : AC = HE : DF$.

Ferner ist

$$\square AK : AM = BG : MC = BG : AC$$

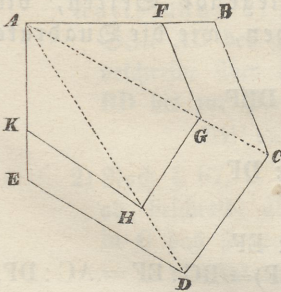
$$\square DL : DN = EH : NF = EH : DF$$

$$\square AK : AM = DL : DN \text{ oder } AK : DL = AM : DN$$

$$\frac{1}{2} AK : \frac{1}{2} DL = AM : DN$$

oder $\triangle ABC : DEF = AC^2 : DF^2$.

§. 75. Die Perimeter ähnlicher Polygone verhalten sich wie zwei gleichliegende Seiten oder Diagonalen, die Polygone selbst wie die Quadrate solcher Seiten oder Diagonalen.



Beweis. Durch gleichliegende Diagonalen werden ähnliche Polygone in ähnliche Dreiecke getheilt. Denn $\sphericalangle ABC = AFG$, $AB : BC = AF : FG$, folgl. auch $AC : AB = AG : AF$, $\sphericalangle BCA = FGA$, $\sphericalangle BCD = BCA = FGH = FGA$ oder $\sphericalangle ACD = AGH$.

$$\underline{BC : CD = FG : GH, BC : AC = FG : AG}$$

$$AC : CD = AG : GH \text{ und } \triangle ACD \sim AGH.$$

Auf gleiche Weise läßt sich zeigen, daß $\triangle ADE \sim AHK$ u. s. w., und durch Addition der Proportionen wie in §. 74: $(AB + BC + CD + DE + EA) : (AF + FG + GH + HK + KA) = AB : AF$ und $ABCDE : AFGHK = AB^2 : AF^2$.

§. 76. Theilt man die Peripherien zweier Kreise in gleichviel gleiche Theile und zieht die Sehnen, so werden die dadurch gebildeten Polygone regulär und ähnlich sein. Theilt man z. B. die Kreise durch senkrechte Durchmesser in 4 gleiche Theile, so sind die eingeschriebenen Figuren ähnliche Quadrate. Halbirt man wieder jeden Bogen und zieht die Sehnen, so entstehen ähnliche 8-Ecke, aus diesen auf gleiche Weise ähnliche 16-Ecke, 32-Ecke u. s. w. Endlich aber werden die Bogen so klein werden, daß sie von den Sehnen nicht mehr zu unterscheiden sind, sondern mit diesen zusammenfallen, so daß also die Kreise selbst als reguläre und daher ähnliche Polygone angesehen werden können. Folglich werden sich nach §. 75 die Peripherien verhalten, wie die Durchmesser, welches gleichliegende Diagonalen sind, also auch wie die Radien, und die Kreise selbst wie die Quadrate der Radien.

§. 77. Aufgabe. Aus der Seite des eingeschriebenen Polygons die des umgeschriebenen von ebensoviel Seiten zu berechnen.

Auflösung. Ist AB (s. folg. S.) die Seite des eingeschriebenen Polygons gegeben $= a$, der Radius des Kreises $= r$, die gesuchte Seite des umgeschriebenen Polygons $DE = x$; so ist

$$AG = \frac{1}{2} a, DF = \frac{1}{2} x \text{ und } \triangle DFC \sim AGC$$

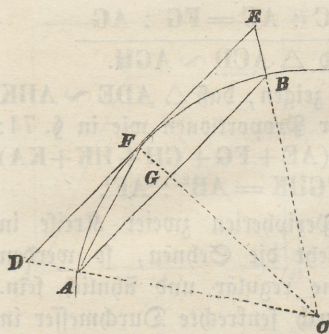
$$DF : FC = AG : GC \text{ oder } \frac{1}{2} x : r = \frac{1}{2} a : GC$$

$$GC^2 = AC^2 - AG^2 = r^2 - \frac{1}{4} a^2$$

$$GC = \sqrt{r^2 - \frac{1}{4} a^2} = \frac{1}{2} \sqrt{4r^2 - a^2}, \text{ also}$$

$$\frac{1}{2} x : r = \frac{1}{2} a : \frac{1}{2} \sqrt{4r^2 - a^2} = a : \sqrt{4r^2 - a^2}$$

$$x = \frac{2ra}{\sqrt{4r^2 - a^2}} = \frac{2ra\sqrt{4r^2 - a^2}}{4r^2 - a^2}$$



Beispiel. Der 6te Theil der Peripherie ist $= 60^\circ$, folglich bildet die Seite des eingeschriebenen regulären Sechsecks mit den Radien aus ihren Endpunkten ein gleichseitiges Dreieck, oder die Seite solches Sechsecks ist gleich dem Radius.

Setzt man demnach, um die Polygonseite in Theilen des Radius auszudrücken, $r=1$; so ist auch $a=1$ und

$$x = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} = 1,154 \dots \text{ in Theilen des Radius.}$$

§. 78. Aufgabe. Aus der gegebenen Seite eines eingeschriebenen Polygons die des eingeschriebenen von doppelt so viel Seiten zu finden.

Auflösung. Ist wieder die gegebene Seite des eingeschriebenen Polygons $AB=a$, der Radius $=r$, die Seite des eingeschriebenen Polygons von doppelt so viel Seiten $AF=y$; so ist

$$AF^2 = AG^2 + FG^2 \text{ oder } y^2 = \frac{1}{4}a^2 + FG^2$$

$$FG = r - GC$$

$$GC^2 = AC^2 - AG^2 = r^2 - \frac{1}{4}a^2$$

$$GC = \sqrt{r^2 - \frac{1}{4}a^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - a^2}$$

$$FG = r - \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - a^2},$$

$$FG^2 = r^2 - r\sqrt{4r^2 - a^2} + r^2 - \frac{1}{4}a^2 = 2r^2 - \frac{1}{4}a^2 - r\sqrt{4r^2 - a^2}$$

$$y^2 = \frac{1}{4}a^2 + 2r^2 - \frac{1}{4}a^2 - r\sqrt{4r^2 - a^2}$$

$$= 2r^2 - r\sqrt{4r^2 - a^2}$$

$$y = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - a^2}}.$$

Beispiel. Die Seite des eingeschriebenen regulären Sechsecks $a=r=1$, folglich die Seite des eingeschriebenen regulären Zwölfecks $y = \sqrt{2 - \sqrt{3}} = 0,516 \dots$ in Theilen des Radius.

§. 79. Der Umfang des eingeschriebenen Sechsecks ist kleiner, der des umgeschriebenen größer als die Kreislinie, wie solches bei allen ein- und umgeschriebenen Polygonen der Fall ist. Deshalb nennt man die Perimeter eines ein- und eines umgeschriebenen Polygons von gleichviel Seiten die Grenzen der Peripherie. Aber nach §. 35 ist der Perimeter des eingeschriebenen Zwölfecks größer als der des eingeschriebenen Sechsecks, der des umgeschriebenen Zwölfecks kleiner als der des umgeschriebenen Sechsecks. Bei fortgesetzter Verdoppelung der Seitenzahl werden also die Umfänge der eingeschriebenen Polygone immer größer, die der umgeschriebenen immer kleiner, oder die Grenzen der Peripherie rücken immer näher zusammen, bis sie endlich ganz mit derselben zusammenfallen werden. So ist

d. Seite des reg. eingeschr. 6ecks = 1,	d. Perimeter = 6,
" " " " umgeschr. " = 1,154.. "	" = 6,924...
" " " " eingeschr. 12ecks = 0,516.. "	" = 6,192...
" " " " umgeschr. " = 0,534.. "	" = 6,408...

Setzt man die Rechnung nach §. 77 und 78 fort; so findet man den Perimeter des eingeschriebenen 768ecks = 6,2831...
 " " " " umgeschriebenen " = 6,2831...
 folglich ist diese Zahl auch die Länge der Peripherie in Theilen des Radius ausgedrückt.

Es verhält sich demnach der Radius zur Peripherie wie 1 : 6,2831... oder der Durchmesser zur Peripherie = 1 : 3,1415...

Diese Zahl ist von Ludolph v. Ceulen († 1610) noch weiter, nämlich 1 : 3,141592653589... berechnet, und wird deshalb die Ludolph'sche Zahl genannt, gewöhnlich aber mit π bezeichnet.

Archimedes († 210 v. Chr.) soll das Verhältniß des Durchmessers zur Peripherie 7 : 22 bestimmt haben; Metius, im Anfange des 17ten Jahrhunderts, fand es 113 : 355. Verwandelt man beide Ausdrücke in Decimalbrüche; so ist die Archimedische Zahl 3,142.. schon um 0,001.. zu groß, die Metische 3,1415929 nur um 0,0000003 zu groß, also für die meisten Berechnungen hinreichend richtig, und leicht zu behalten. Ist demnach der Durchmesser eines Kreises gegeben, so findet man die Peripherie, wenn man den Durch-

messer mit 355 multiplicirt und mit 113 dividirt. Umgekehrt findet man den Durchmesser, wenn man die Peripherie mit 113 multiplicirt und mit 355 dividirt. Diese Berechnung nennt man die Rectification der Kreislinie; der allgemeine Ausdruck für dieselbe ist $2r\pi$.

Wie groß ist ein Bogen von 56° , wenn der Radius 5 Zoll ist?

Antw. 4,88.. Zoll.

Wie groß ist der Radius eines Kreises, dessen Bogen von $47^\circ 12' = 3,8$ Zoll ist?

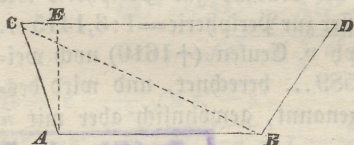
Antw. 4,6.. Zoll.

§. 80. Denkt man sich den Kreis durch unzählig viele Radien in so kleine Sektoren getheilt, daß die Bogen als gerade Linien angesehen werden können; so sind die Sektoren als Dreiecke zu betrachten, deren Grundlinien die Bogen, die gemeinschaftlichen Höhen die Radien sind. Daher ist der Inhalt des ganzen Kreises dem eines Dreiecks gleich, dessen Grundlinie die Peripherie, die Höhe der Radius ist, also $= \frac{1}{2} r \times 2r\pi = r^2\pi$.

Die Berechnung der Kreisfläche nennt man die Quadratur des Kreises.

§. 81. Aufgaben.

1) Den Flächeninhalt eines Trapezoids zu berechnen.



Auflösung. Man messe die beiden parallelen Seiten AB und CD, so wie ihren Abstand AE von einander, und multiplicire die

halbe Summe der Parallelen mit dem Perpendikel. Denn

$$\triangle ACB = \frac{1}{2} AB \times AE$$

$$\triangle CBD = \frac{1}{2} CD \times AE$$

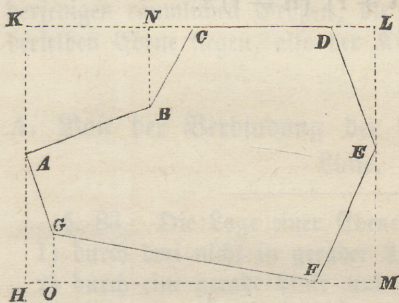
$$ACB + CBD = \frac{1}{2} (AB + CD) \times AE.$$

2) Den Flächeninhalt eines regulären Polygons zu berechnen.

Auflösung. Um jedes reguläre Polygon läßt sich ein Kreis beschreiben, dessen Mittelpunkt der Durchschnittspunkt

zweier Perpendikel aus den Mittelpunkten zweier Seiten ist. Daher läßt sich die Figur durch Linien aus den Ecken nach dem Mittelpunkte in so viel Dreiecke theilen, als sie Seiten hat; der Inhalt eines jeden ist das halbe Product aus der Polygonseite mit ihrem Abstände vom Mittelpunkte, welches mit der Anzahl der Polygonseiten multiplicirt den Flächeninhalt des ganzen Polygons giebt.

3) Den Flächeninhalt eines irregulären Polygons zu berechnen.



Auflösung. Man theile das Polygon durch Diagonalen in Dreiecke und messe von jedem die Grundlinie und die Höhe, berechne die Dreiecke und mache ihre Summe. Oder man lege ein Rechteck um das zu messende Polygon, messe dessen Sei-

ten und die Abstände derselben von den Ecken des Polygons, berechne die Stücke, welche nicht zu diesem gehören, und subtrahire sie vom Rechteck. Es ist $KNBA = \frac{1}{2} (KA + NB) \cdot KN$,

$$NCB = \frac{1}{2} NB \times NC, \quad DLE = \frac{1}{2} DL \times LE,$$

$$EFM = \frac{1}{2} FM \times EM, \quad OGF = \frac{1}{2} OF \times OG,$$

$$AGOH = \frac{1}{2} (AH + GO) \cdot HO.$$

Also der Flächeninhalt des Polygons

$$HM \times LM - \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} KN \times KA + KC \times NB + DL \times LE \\ + FM \times EM + FH \times GO + AH \times HO \end{array} \right\}.$$

4) Den Inhalt eines Kreisabschnittes aus dem Radius und dem Winkel am Mittelpunkte zu berechnen.

Auflösung. Ist der Radius r , der Winkel am Mittelpunkte n° , so verhält sich der Sector zum Kreise, wie der Winkel des Sectors zu 360° , $x : r^2 \pi = n^\circ : 360^\circ$, also

$$x = \frac{n \cdot r^2 \pi}{360}.$$

5) Den Inhalt eines Segments zu berechnen.

Auflösung. Man berechne den Sector auf demselben Bogen und das Dreieck; so giebt ihr Unterschied den Inhalt des Segments.

6) Den Inhalt eines Ringes zwischen zwei concentrischen Kreisen zu berechnen.

Auflösung. Ist der Radius des äußern Kreises R , der des kleinern r , so ist der Flächeninhalt des Ringes

$$\begin{aligned} &= R^2 \pi - r^2 \pi \\ &= (R^2 - r^2) \pi \\ &= (R + r) \cdot (R - r) \pi. \end{aligned}$$

Zweiter Theil der Geometrie

oder Stereometrie.

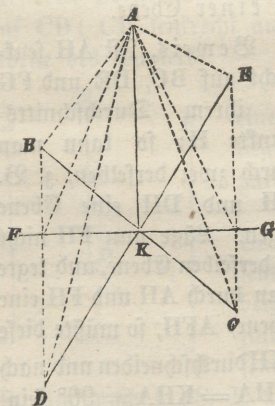
§. 82. Die Stereometrie handelt von der Messung derjenigen räumlichen Größen, die nicht mehr in einer und derselben Ebene liegen, also der Körper.

A. Von der Verbindung der Ebene mit der geraden Linie.

§. 83. Die Lage einer Ebene wird bestimmt:

- 1) durch drei nicht in gerader Linie liegende Punkte;
- 2) durch eine gerade Linie und einen Punkt außer ihr;
- 3) durch zwei sich schneidende gerade Linien;
- 4) durch zwei parallele Linien.

§. 84. Eine gerade Linie in der Ebene ist eine solche, die mit allen ihren Punkten in der Ebene liegt; eine Gerade auf der Ebene eine solche, die nur einen Punkt mit der Ebene gemein hat. Dieser Punkt heißt der Treffpunkt.



§. 85. Ein Perpendikel auf der Ebene ist die gerade Linie, welche auf allen in der Ebene durch den Treffpunkt gezogenen perpendicular steht. Ist eine solche Linie aber auf zweien sich schneidenden in der Ebene senkrecht; so ist sie es auch auf allen andern durch den Treffpunkt gezogenen.

Beweis. Ist AK auf der Ebene des Papiers senkrecht auf BC und DE in der Ebene, so ist sie es auch auf jeder dritten FG . Denn

macht man $KB = KC$, $KD = KE$, zieht BD , EC und von A auf die Ebene nach B, F, D, C, G, E ; so ist

$$\triangle BKD \cong \triangle EKC \text{ nach } \S. 20.$$

$$BD = CE, \text{ W. } KBD = KCE$$

$$\triangle KBF \cong \triangle KCG \text{ nach } \S. 38.$$

$$1) \text{ S. } FK = KG \text{ und } BF = CG$$

$$\triangle AKB \cong \triangle AKC \text{ nach } \S. 20.$$

$$2) \dots \dots \dots AB = AC$$

$$\triangle AKD \cong \triangle AKE \text{ nach } \S. 20.$$

$$3) \dots \dots \dots AD = AE.$$

$$\triangle ABD \cong \triangle ACE,$$

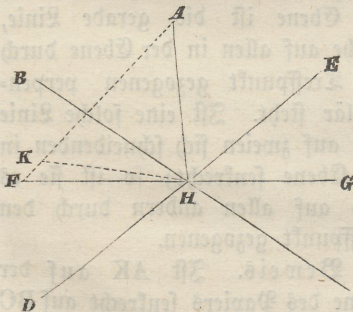
folglich W. $ABD = ACE$ oder $ABF = ACG$; vorher war
 $AB = AC$ und $BF = CG$

$$\triangle ABF \cong \triangle ACG \text{ u. } AF = AG.$$

Hieraus und aus 1. nebst $AK = AK$ folgt $\triangle AKF \cong \triangle AKG$
W. $AKF = AKG = 90^\circ$.

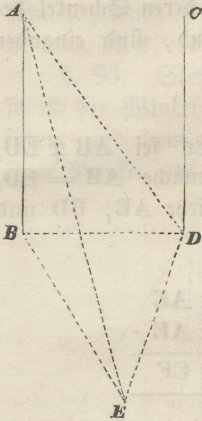
§. 86. Zwei Ebenen schneiden einander in einer geraden Linie, weil diese beiden gemeinschaftlich sein muß und sich, wenn sie krumm wäre, über die eine oder die andere der Ebenen erheben müßte.

§. 87. Wenn eine gerade Linie auf dreien, die sich in einem Punkte durchschneiden, in diesem Punkte senkrecht steht, so liegen jene drei geraden Linien in einer Ebene.



Beweis. Ist AH senkrecht auf BC, DE und FG in ihrem Durchschnittspunkte H ; so kann man durch zwei derselben, z. B. BH und DH eine Ebene legen. Läge nun FH nicht in derselben Ebene, und legte man durch AH und FH eine Ebene, AFH , so müßte diese die Ebene BHD in einer Geraden, z. B. KH durchschneiden und nach §. 85 AH auf KH senkrecht, also W. $FHA = KHA = 90^\circ$ sein,

welches unmöglich ist; folglich muß FH mit BH und DH in einer Ebene liegen.



§. 88. Zwei Perpendikel auf einer Ebene sind parallel, und ist von zwei Parallelen auf einer Ebene die eine senkrecht, so ist es auch die andere.

Beweis. 1) Sind AB und CD auf der Ebene des Papiers senkrecht, so verbinde man ihre Treffpunkte durch BD, ziehe in der Ebene DE senkrecht auf BD, mache $DE = AB$ und ziehe AD und AE auf, BE in der Ebene; so ist

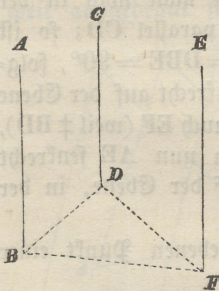
$\triangle ABD \cong \triangle EDB$ nach §. 20, folglich

$$\begin{aligned} AD &= BE \\ DE &= AB \\ AE &= AE \end{aligned}$$

$\triangle ADE \cong \triangle ABE$ und $\mathfrak{W. ADE} = \mathfrak{W. ABE} = 90^\circ$.

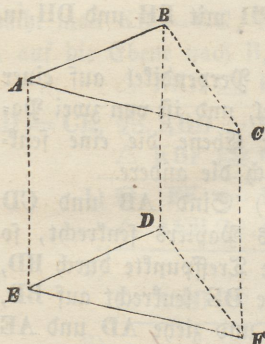
Nun ist ED senkrecht auf BD, AD und CD, folglich liegen diese drei Linien in einer Ebene; in derselben Ebene ABD liegt auch AB, und da sowohl AB als CD auf BD senkrecht sind, so ist $AB \perp CD$.

2) Ist $AB \perp CD$ und AB perpendicularär auf der Ebene des Papiers; so schließe man, nachdem $\mathfrak{W. ADE} = 90^\circ$ bewiesen: CD und AB, also auch AD und BD in einer und derselben Ebene; ED senkrecht auf BD und AD, also auch auf CD; CD senkrecht auf BD und DE, also auch auf der Ebene des Papiers.



§. 89. Zwei gerade Linien, die mit einer dritten, nicht in derselben Ebene liegenden, parallel sind, sind einander parallel.

Beweis. Ist $AB \perp CD$ und $EF \perp CD$, so ziehe man DB und DF senkrecht auf CD und lege durch diese beiden Perpendikel die Ebene BDF; so sind nach §. 88, 2. auch AB und EF senkrecht auf dieser Ebene, weil CD es ist, und nach §. 88, 1. unter einander parallel.



§. 90. Zwei Winkel in verschiedenen Ebenen, deren Schenkel beziehlich parallel sind, sind einander gleich.

Beweis. Es sei $AB \nparallel ED$, $AC \nparallel EF$; man mache $AB = ED$, $AC = EF$ und ziehe AE , BD und CF , so ist

weil $AB =$ und $\nparallel ED$, auch $BD =$ und $\nparallel AE$

„ $AC =$ „ $\nparallel EF$ „ $CF =$ und $\nparallel AE$

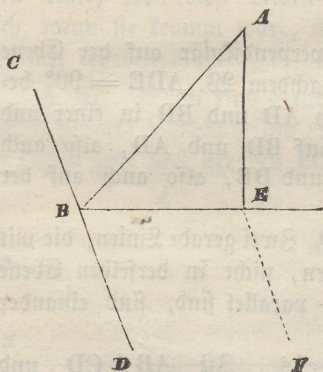
$BD =$ und $\nparallel CF$

$BC = DF$,

folglich $\triangle ABC \cong EDF$ nach §. 39.

W. $BAC = DEF$.

§. 91. Aufgabe. Aus einem Punkt außerhalb einer Ebene ein Perpendikel auf dieselbe zu fallen.



Auflösung. Man ziehe von A , außerhalb der Ebene, AB beliebig auf dieselbe, dann in der Ebene CD senkrecht auf AB , BE senkrecht auf CD und AE senkrecht auf BE ; so ist AE perpendicularär auf der Ebene. Denn zieht man noch in der Ebene EF parallel CD ; so ist W. $DBA = DBE = 90^\circ$, folglich BD senkrecht auf der Ebene ABE , also auch EF (weil $\nparallel BD$),

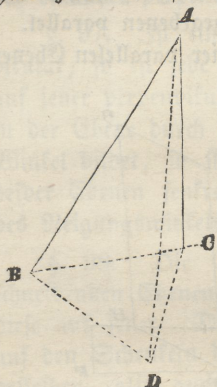
folglich W. $FEA = FEB = 90^\circ$, und da nun AE senkrecht auf BE und EF , so ist sie senkrecht auf der Ebene, in der BE und EF liegen.

§. 92. Aufgabe. In einem gegebenen Punkt einer Ebene ein Perpendikel zu errichten.

Auflösung. Man fälle aus einem beliebigen Punkt

nach §. 91 ein Perpendikel auf die Ebene, lege durch dieses und den gegebenen Punkt eine Ebene und ziehe in dieser aus dem gegebenen Punkt eine Parallele zu dem Perpendikel; so ist auch diese nach §. 88, 2. perpendicularär auf der Ebene.

§. 93. Steht eine gerade Linie schief auf einer Ebene; so ist der Winkel, den sie mit der Verbindungslinie zwischen ihrem und dem Treffpunkte eines Perpendikels aus einem ihrer Punkte auf die Ebene bildet, der kleinste unter allen, die sie mit irgend welchen Geraden durch ihren Treffpunkt in der Ebene bildet.

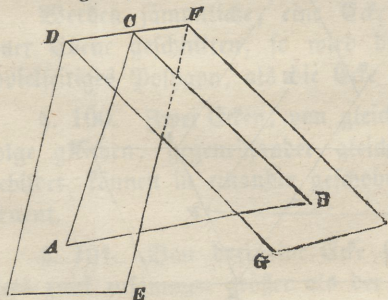


Beweis. Es sei AB schief, AC senkrecht auf der Ebene des Papiers. Man verbinde ihre Treffpunkte durch BC und ziehe beliebig in der Ebene BD; so ist $\angle ABC < \angle ABD$. Denn macht man $BD = BC$ und zieht CD und AD; so ist $\angle ACD = 90^\circ$, also $AD > CD$ nach §. 34; $BD = BC$; $AB = AB$, folglich $\angle ABD > \angle ABC$ nach §. 43, 2.

Dieser kleinste Winkel heißt der Neigungswinkel der schiefen Linie gegen die Ebene.

B. Von der Verbindung der Ebenen mit einander.

§. 94. Parallele Ebenen nennt man solche, die noch so weit ausgedehnt sich nie vereinigen, und zwei Ebenen sind parallel, wenn eine gerade Linie auf beiden zugleich perpendicularär ist.



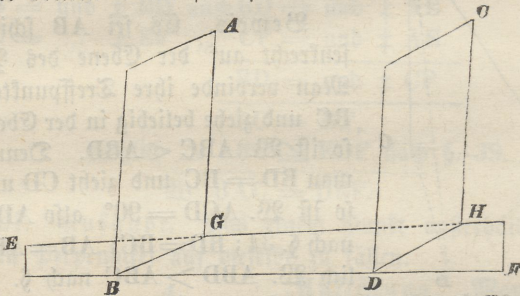
Beweis (apagog.). Wäre AB auf beiden Ebenen DE und FG senkrecht und sie vereinigten sich irgendwo in DF, so müßte, wenn

man von einem Punkte der Durchschnittslinie C nach den Treffpunkten des Perpendikels A und B zöge, ein Dreieck CAB mit zwei rechten Winkeln entstehen, welches unmöglich ist.

Aufgabe. Durch einen gegebenen Punkt eine mit einer gegebenen Ebene parallele Ebene zu legen.

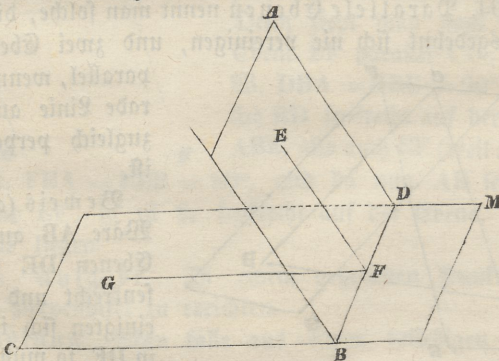
Auflösung. Man fälle von dem gegebenen Punkt ein Perpendikel auf die gegebene Ebene, lege durch den gegebenen Punkt zwei Perpendikel auf jenes Perpendikel und durch diese eine Ebene; so ist diese der gegebenen parallel.

§. 95. Die Durchschnittslinien zweier parallelen Ebenen mit einer dritten Ebene sind parallel.



Beweis (apagog.). Werden die parallelen Ebenen AB und CD von der Ebene EF in BG und DH geschnitten, und diese Linien wären nicht parallel, sondern kämen irgendwo zusammen, so müßten die Ebenen, in denen sie liegen, auch daselbst zusammenkommen, könnten also nicht parallel sein.

§. 96. Wenn zwei Ebenen, AB und CM, sich in DB



schneiden, so bilden sie einen Flächenwinkel $ADBC$, welcher von einem Winkel EFG gemessen wird, den die Perpendikel EF und GF in den Ebenen auf der Durchschnittslinie DB in einerlei Punkt derselben bilden. Dieser Winkel heißt der Neigungswinkel der beiden Ebenen und ist überall derselbe, in welchem Punkt der DB er auch construirt werde.

Ist der Neigungswinkel ein rechter, so sind die Ebenen auf einander perpendicular.

§. 97. Ist eine gerade Linie auf einer Ebene perpendicular, so ist jede durch diese Linie entlang gelegte Ebene auf jener perpendicular. Denn da das Perpendikel mit allen in der Ebene durch den Treffpunkt gezogenen Geraden rechte Winkel bildet, so steht es sowohl auf der Durchschnittslinie beider Ebenen senkrecht, als auch auf dem andern Schenkel des Neigungswinkels, welcher sonach ein rechter ist.

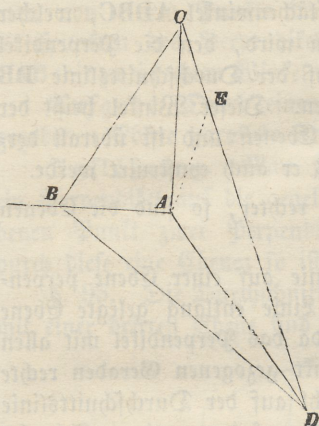
§. 98. Die Ebene des Neigungswinkels zweier sich schneidenden Ebenen steht senkrecht auf diesen beiden, so wie diese auf jener. Denn die Durchschnittslinie steht senkrecht auf den Schenkeln des Neigungswinkels, also auf der Ebene desselben, also auch die beiden durch die Durchschnittslinie gelegten Ebenen.

§. 99. Wenn wenigstens drei Ebenen in einem Punkt zusammenstoßen, so bilden sie eine körperliche Ecke; die Durchschnittslinien der Ebenen heißen Kanten oder Seiten. Je nachdem eine Ecke von drei, vier, fünf u. s. w. Ebenen gebildet wird, heißt sie eine drei-, vier-, fünf- u. s. w. seitige Ecke.

Werden sämtliche, eine Ecke formirende Ebenen von einer Ebene geschnitten, so wird die Durchschnittsfigur ein sovielseitiges Polygon, als die Ecke Seiten hat.

§. 100. Zwei Ecken, von gleichviel in derselben Reihenfolge gleichen, gegeneinander gleich geneigten Winklebenen gebildet, können in einander geschoben werden, sind also congruent.

§. 101. Von drei eine Ecke formirenden Winkeln sind stets zwei zusammen größer als der dritte.



Beweis. Von den drei in A zusammenstoßenden Winkeln sei $CAD > BAD > CAB$. Man mache $\mathcal{W}. DAE = BAD$, den Schenkel $AE =$ der Kante AB und lege durch die drei Punkte B, D und E eine Ebene, welche die Kante AC in C schneidet; so ist

$\triangle DAE \cong \triangle DAB$ nach §. 20,
also $DE = DB$

$\mathcal{S}. DB + BC > DC$ nach §. 35, 1.

$\mathcal{S}. BC > CE$, folgll. da $AB = AE$
 $AC = AC$

$\mathcal{W}. CAB > CAE$ nach §. 43, 2.

$\mathcal{W}. CAB + BAD > CAE + EAD$
 $> CAD$.

§. 102. Drei oder mehr eine Ecke formirende Winkel sind zusammen kleiner als vier rechte Winkel.

Beweis. Wird die Ecke von n Winkeln gebildet, so ist, wenn man alle Seiten mit einer Ebene, wie DAC , schneidet, die Durchschnittsfigur ein n Eck, in welchem die Winkel zusammen $2nR - 4R$. betragen. Jede Ecke mit der Durchschnittsfigur, B , ist dreiseitig, und es sind die zwei Winkel auf der Durchschnittsebene $ABC + ABD > CBD$, als der Winkel in der Durchschnittsebene, also alle Winkel auf der Durchschnittsebene zusammen größer als die der Durchschnittsfigur, größer als $2nR - 4R$. Nun betragen aber jene Winkel auf der Durchschnittsebene mit denen an der fraglichen Ecke zusammen, als die Winkel von n -Dreiecken, $2nR$.; folglich müssen die an der Ecke weniger als $4R$. betragen, da jene mehr als $2nR - 4R$. ausmachen.

C. Von den Körpern.

§. 103. Zur allseitigen Begrenzung eines Körpers gehören wenigstens vier Ebenen. Es kann aber auch ein Körper

von einer einzigen krummen Fläche begrenzt werden, wie die Kugel, oder von krummen Flächen und Ebenen zugleich. Die begrenzenden Ebenen können geradlinige Figuren oder Kreise sein. Sämmtliche einen Körper einschließende Flächen bilden seine Oberfläche. Diejenige, auf welcher man sich den Körper construirt denkt, heißt seine Grundfläche. Die übrigen, Seitenflächen, laufen entweder in einen Punkt, Gipfel, zusammen, der der Grundfläche gegenüberliegt, oder werden oben wieder von einer zweiten Grundfläche, der obern, geschnitten, in welcher nun ein Punkt der Gipfel ist. Ein Perpendikel vom Gipfel auf die Grundfläche heißt auch hier die Höhe.

§. 104. Körper sind congruent, wenn sie von gleichviel, in derselben Reihenfolge congruenten und gegen einander gleich geneigten Figuren begrenzt werden. Ähnlich sind sie, wenn bei gleicher Anzahl von einschließenden Figuren diese nur ähnlich in derselben Reihenfolge, und eben so gegen einander gleich geneigt sind.

§. 105. Ein regulärer Körper ist ein solcher, der von regulären, daher congruenten Figuren eingeschlossen wird. Dergleichen giebt es nur 5: das Tetraëder von 4, das Oktaëder von 8, das Ikosaëder von 20 regulären Dreiecken, das Hexaëder (Würfel oder Kubus) von 6 Quadraten, das Dodekaëder von 12 regulären Fünfecken eingeschlossen.

Daß es nicht mehr reguläre Körper geben kann, folgt aus §. 103 und 102. Nämlich bei dem Tetraëder stoßen in jeder Ecke 3, bei dem Oktaëder 4, bei dem Ikosaëder 5 reguläre Dreiecke zusammen. Sollten noch andere Körper von solchen Dreiecken begrenzt werden; so müßten in jeder Ecke 6 oder mehr Winkel, deren jeder 60° ist, zusammenstoßen, würden also 360° oder mehr betragen, gegen §. 102. Eben so können nicht 4 oder mehr Quadrate eine Ecke bilden, daher nur der Kubus möglich. Der Winkel im regulären Fünfeck beträgt 108° , also 4 dergleichen 432° , weshalb nur das Dodekaëder möglich ist. Reguläre Sechsecke können nicht einmal drei zusammenstoßen, weil jeder Winkel 120° ist; noch weniger Siebenecke u. s. w.

Der regulärste, aber nicht von ebenen Figuren begrenzte Körper ist die Kugel.

§. 106. Von den irregulären Körpern sind nach den Grundsätzen der Planimetrie meßbar: das Prisma nebst seiner besonderen Gattung, dem Parallelepipedum, der Cylinder, die Pyramide und der Kegel.

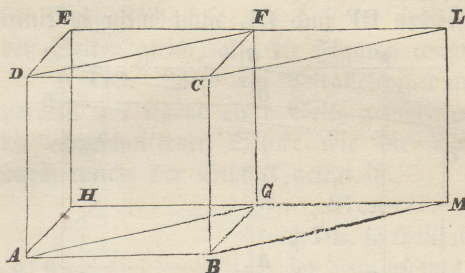
Vom Prisma.

§. 107. Ein Prisma ist ein Körper, der von zwei congruenten und parallelen Grundflächen und so viel Seitenflächen, welches durchaus Parallelogramme sind, begrenzt wird, als die Grundflächen Seiten haben. Demnach giebt es drei-, vier-, fünf- und mehrseitige Prismen, je nachdem die Grundflächen Dreiecke, Vierecke, Fünfecke oder mehrseitige Figuren sind. Stehen sämtliche Seitenflächen auf den Grundflächen senkrecht, so ist es ein gerades, andern Falls ein schiefes Prisma. Jede Kante zwischen den beiden Grundflächen heißt die Seite des Prisma's, und bei dem geraden ist sie zugleich die Höhe. Die Höhe des schiefen Prisma's ist das Perpendikel zwischen den beiden Grundflächen.

§. 108. Ein Parallelepipedum ist ein Prisma, dessen Grundflächen auch Parallelogramme sind. Es wird daher von 6 Parallelogrammen begrenzt, von denen jede zwei gegenüberliegende congruent und parallel sind. Daher kann jedes die Grundfläche sein. Das gerade Parallelepipedum wird von 6 Rechtecken begrenzt, von denen jede zwei zusammenstoßende auf einander senkrecht sind. Eine durch zwei gegenüberliegende Kanten eines Parallelepipedums oder mehrseitigen Prisma's gelegte Ebene heißt eine Diagonalebene.

§. 109. Parallelepipeden und Prismen überhaupt, deren Grundflächen in denselben parallelen Ebenen liegen, haben gleiche Höhen, weil die Perpendikel oder die Entfernungen zwischen zwei parallelen Ebenen überall gleich sein müssen.

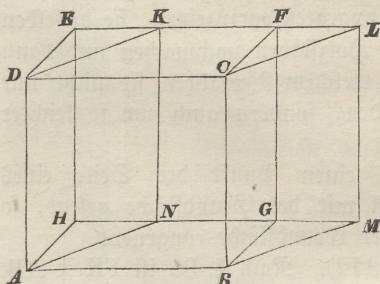
§. 110. Zwei Parallelepipeden auf einerlei oder auf congruenten Grundflächen und von gleicher Höhe sind einander gleich.



Beweis. 1) Es seien die Parallelepipeden AF u. AL, beide auf derselben Grundfläche ABCD so gedacht, daß die Seitenfläche AGFD des Parallelepipeds AL die Dia-

gonalebene des andern Parallelepipeds AF, und wiederum die Seitenfläche BGFC des Parallelepipeds AF die Diagonalebene des andern ist; so ist $\square DH \cong CG$, $\square HF \cong AC$, $\square AF$ sich selbst gleich, $\triangle DEF \cong DCF$, $\triangle AHG \cong ABG$; auch haben die Dreiecke DEF und DCF als Theile derselben Seitenfläche gleiche Neigung gegen die Grundflächen, so wie die Dreiecke AHG und ABG: folglich Prisma AHGE \cong ABGD und es wird ebenso das Parallelepipedium durch die Diagonalebene halbirt, wie das Parallelogramm durch die Diagonale. Auf gleiche Weise halbirt BGFC das Parallelepipedium AL, und sonach ist auch Prisma BGMF \cong ABGD, also $AHGE + ABGD = ABGD + BGMF$ oder Ppd. $AF = AL$.

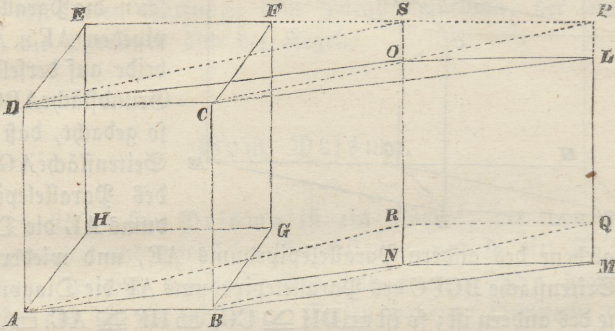
2) Wenn zwar die Seitenflächen des einen nicht Diagonalebene des andern, aber die Parallelepipeden doch so gedacht sind, daß die Seitenflächen CE und DL noch in einer Ebene liegen; so ist: $\square DH \cong CG$, $EN \cong FM$, $\square DN \cong CM$, $\triangle DEK \cong CFL$, $AHN \cong BGM$, und es haben



DEK und CFL als Theile derselben Ebene gleiche Neigung gegen die Grundflächen, so wie AHN und BGM: folglich Prisma AHNE \cong BGMF; jedes von ihnen zu dem Prisma ABGNK hinzugefügt:

$ABGNK + AHNE = ABGNK + BGMF$ oder Parallelepipedum $AF = AL$.

3) Die Parallelepipeden AF und AL seien so gedacht, daß auch die Seitenflächen DF und DL nicht mehr in einer



Ebene liegen. Verlängert man aber die Kanten ML und NO , bis sie die verlängerte EF treffen, und construirt ein drittes Parallelepipedum AP mit der untern Grundfläche $ABCD$ und der obern $RQPS$; so hat dieses seine Seitenfläche DP in einerlei Ebene mit DF und ist $= AF$ nach Ansicht 2., und seine Seitenfläche DR in einerlei Ebene mit DN des Ppd. AL , folglich auch gleich AL , mithin $AF = AL$.

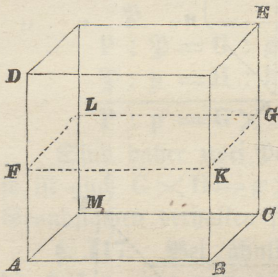
Anmerk. Um sich diesen Satz recht anschaulich zu machen, verbinde man zwei parallele Papptafeln durch Stäbe an den vier Ecken, construire auf diesen die Grundflächen und stelle die Kanten der Seitenflächen durch Drähte dar. — Ueberhaupt habe ich es beim Unterrichts in der Stereometrie sehr zweckmäßig gefunden, den Schülern die Körperformen und Beweisconstructions aus den bei jeder Kreisschule befindlichen stereometrischen Apparaten vorzuzeigen, sie dieselben aus Pappe und Draht- oder Holzstäben nachmachen und dann erst zeichnen zu lassen, bei welchem Verfahren sie nicht nur die Beweise leicht selbst finden, sondern auch um so leichter behalten.

§. 111. Wird durch einen Punkt der Seite eines Prisma eine Ebene parallel mit der Grundfläche gelegt, so ist die Durchschnittsfigur der Grundfläche congruent.

Beweis (Fig. zu §. 112). Nach §. 95 ist $FK \neq AB$,

$FL \neq AM$, folglich nach §. 90 B. $LFK = MAB$ und nach §. 47 $FK = AB$, $FL = AM$. Auf dieselbe Weise zeigt man, daß alle Winkel der Durchschnittsfigur der Reihe nach denen der Grundfläche, so wie daß die solche Winkel einschließenden Seiten gleich, also die Figuren congruent sind.

§. 112. Wird ein Parallelepipedum durch eine Ebene parallel mit irgend einer Seite geschnitten, so verhalten sich die abgetrennten Stücke wie die Abschnitte der Kante, durch welche der Schnitt gelegt ist.



Beweis. Ist Ebene $FG \neq AC \neq DE$, so theile man die Kanten durch ihr gemeinsames Maß, DF in m , FA in n unter sich gleiche Theile, und lege durch die Theilungspunkte neue Ebenen parallel mit AC ; so wird das Parallelepipedum FE in m , das AG in n unter sich gleiche Theile getheilt, da diese alle congruente Grundflächen und gleiche Höhen haben: folglich verhält sich

$$\text{Ppd. } FE : AG = m : n$$

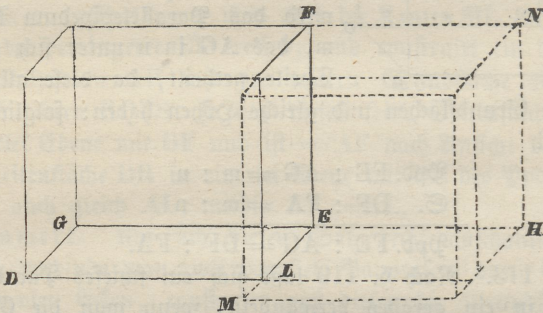
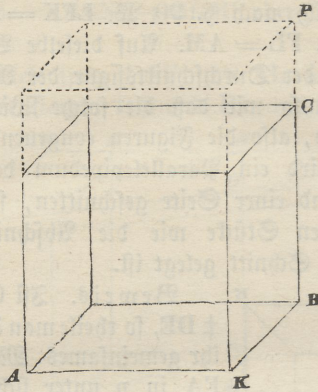
$$\text{S. } DF : FA = m : n$$

$$\text{Ppd. } FE : AG = DF : FA.$$

§. 113. Nach §. 110 läßt sich ein schiefes Parallelepipedum in ein gerades verwandeln, wenn man die Grundfläche in ein Rechteck verwandelt, in den Ecken des letzteren Perpendikel bis zur gegenüberliegenden Ebene errichtet und durch diese die Seitenflächen legt. Demnach werden die folgenden Sätze, obgleich der Kürze wegen von geraden Parallelepipedum bewiesen, auch für schiefe, also für Parallelepipedum überhaupt gelten.

§. 114. Parallelepipedum von gleichen, nicht congruenten Grundflächen und gleicher Höhe sind einander gleich. Sind die Höhen aber ungleich, so verhalten sich die Parallelepipedum wie ihre Höhen.

Beweis. Sind die rechteckigen Grundflächen der Parallelepipedum AC und DF , $AB = DE$, auch die Höhen $BC = EF$; so verlängere man GE um $EH = AK$, und EL



so, daß $EM = BK$ wird: dann ist das auf Rechteck $MH = AB$ errichtete Parallelepipedum $MN = AC$ nach §. 110. Aber nach §. 112 ist

$$\text{Ppd. } DF : LN = GE : EH = GE : AK$$

$$\text{,, } LN : MN = LE : ME = LE : KB.$$

$$\text{Ppd. } DF : MN = GE \times LE : AK \times KB \text{ oder}$$

$$\text{,, } DF : AC = \square DE : AB, \text{ und da } DE = AB, \text{ auch}$$

$$\text{,, } DF = AC.$$

2) Ppd. AP mit der Höhe BP verhält sich zu $AC = BP : BC$,

$$\text{Ppd. } AC = DF, \text{ S. } BC = EF$$

$$\text{Ppd. } AP : DF = BP : EF.$$

§. 115. Wäre Rechteck AB nicht gleich DE; so würde in §. 114, 1. bleiben Ppd. $DF : AC = \square DE : AB$, d. h. Parallelepipeden von gleicher Höhe verhalten sich wie ihre Grundflächen.

§. 116. Parallelepipeden überhaupt verhalten sich wie die Producte aus Grundfläche und Höhe.

Beweis.

Das Ppd. P habe die Grundfläche G, die Höhe H,
 " " P " " " " g, " " " h,
 " " P " " " " g, " " " H; so ist
 $P : P = G : g$
 $P : p = H : h$

 $P : p = G \times H : g \times h.$

Sind daher zwei Parallelepipeden einander gleich, $P=p$, so ist auch $G \times H = g \times h$ oder $G : g = h : H$, d. h. die Grundflächen verhalten sich umgekehrt wie ihre Höhen.

§. 117. Bei ähnlichen Parallelepipeden verhalten sich die Höhen, wie zwei gleichliegende Kanten der Grundfläche, und ebenso die Höhen der Grundflächen, wie die Grundlinien derselben; daher verhalten sich zwei ähnliche Parallelepipeden wie die Kuben zweier gleichliegenden Seiten der Grundflächen, oder wie die Kuben zweier gleichliegenden Kanten überhaupt.

§. 118. Zum Maße der Körper gebraucht man den Kubus. Ein Kubikfuß ist ein Würfel, dessen Seite ein Fuß. Da ein Quadratfuß 144 Quadratzoll hat und im Kubikfuß 12 solcher Schichten von 1 Zoll Dicke übereinander liegen, hat ein Kubikfuß 1728 Kubizoll.

So hat ein Kubikfassen 343 Kubikfuß oder 27 Kubikarschin; 1 Kubikarschin = 4096 Kubikwerschof.

Sind die zusammenstoßenden Kanten der Grundfläche eines geraden Parallelepipediums 4 Fuß und 3 Fuß, die Höhe 6 Fuß, so ist die Grundfläche 12 Quadratfuß; die Grundfläche eines Kubikfußes 1 Quadratfuß, die Höhe 1 Fuß, und nach §. 116 verhält sich das Ppd. zu dem Kubikfuß = $12 \times 6 : 1 \times 1 = 72 : 1$, d. h. das Ppd. ist = 72 Kubikfuß.

So ist überhaupt der kubische Inhalt eines Parallelepipedums gleich dem Product aus seiner Grundfläche und Höhe.

§. 119. Da, wie §. 110, 1. bewiesen, das dreiseitige Prisma die Hälfte eines Parallelepipedums von doppelter Grundfläche und gleicher Höhe ist, ein jedes mehrseitige Prisma aber sich durch Diagonalebene in dreiseitige zerlegen läßt, folglich als eine Summe von dreiseitigen Prismen von gleicher Höhe anzusehen ist; so gelten vom Prisma überhaupt dieselben Sätze als vom Parallelepipedum.

1) Prismen von gleichen Grundflächen und gleichen Höhen sind einander gleich.

2) Prismen von gleichen Grundflächen verhalten sich zu einander wie ihre Höhen.

3) Prismen von gleicher Höhe verhalten sich zu einander wie ihre Grundflächen.

4) Prismen überhaupt verhalten sich zu einander wie die Producte aus ihrer Grundfläche und Höhe.

5) Ähnliche Prismen verhalten sich zu einander wie die Kuben zweier gleichliegenden Kanten.

6) Den kubischen Inhalt eines Prisma giebt das Product aus seiner Grundfläche und Höhe.

§. 120. Um die Oberfläche eines Prisma zu berechnen, addire man zu der doppelten Grundfläche die Summe der Parallelogramme, welche die Seitenflächen bilden. Ist das Prisma ein gerades, so ist die Summe der Seitenflächen das Product aus dem Perimeter der Grundfläche multiplicirt mit der Höhe des Prisma. Warum?

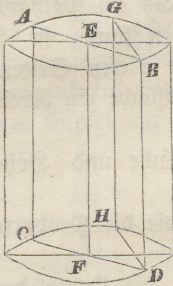
Vom Cylinder.

§. 121. Ein Cylinder ist ein Körper, der von zwei gleichen parallelen Kreisen als Grundflächen und einer krummen Seitenfläche eingeschlossen wird. Die Gerade zwischen den beiden Mittelpunkten der Grundflächen heißt die Achse des Cylinders.

Steht dieselbe auf den Grundflächen perpendicular, so ist der Cylinder ein gerader, andern Falls ein schiefer.

Die Höhe des Cylinders ist das Perpendikel zwischen den beiden Grundflächen.

§. 122. Wird eine Ebene durch die Achse des Cylinders entlang oder mit derselben parallel gelegt; so ist die Durchschnittsfigur ein Parallelogramm.

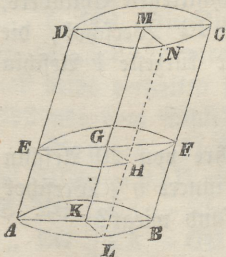


Beweis. 1) Geht die Ebene ABDC durch die Achse EF, so sind AB und CD als Durchmesser einander parallel und gleich, also auch AC gleich und parallel BD.

2) Ist die Ebene GBDH parallel EF, so sind GB und HD als vom Mittelpunkt gleichweit abstehende Sehnen gleich, und als Durchschnittslinien paralleler Ebenen parallel, also auch GBDH ein Parallelogramm. Eine auf solche Weise entstehende Gerade in der krummen Oberfläche des Cylinders zwischen den Peripherien der Grundflächen, AC, heißt die Seite des Cylinders und ist der Achse gleich, bei dem geraden Cylinder auch der Höhe.

Bei dem geraden Cylinder ist die in Rede stehende Durchschnittsfigur ein Rechteck. Daher kann man sich auch den Cylinder entstanden denken durch Umdrehung eines Rechtecks um eine seiner Seiten, und die krumme Oberfläche desselben ist gleich einem Rechteck aus der Peripherie der Grundfläche und der Seite des Cylinders.

§. 123. Die Durchschnittsfigur einer mit der Grundfläche parallelen Ebene im Cylinder ist ein Kreis, der Grundfläche gleich.



Beweis. Ist die Ebene $EF \neq AB$; so sind ihre Durchschnittslinien mit jeder dritten Ebene parallel. Legt man also durch die Achse MK und irgend einen Radius der Grundfläche KL eine Ebene MKLN; so ist $GH \neq KL$ und die Seite $HL \neq GK$; folglich $GHLK$ ein Parallelogramm, also $GH = KL$. So sind alle Linien von G nach der Peripherie des Durchschnitts $= KL$, folglich die Figur ein Kreis.

§. 124. Cylinder sind congruent, wenn sie gleiche Achsen, gleiche Grundflächen, und die Achsen gleiche Neigung gegen die Grundflächen haben; ähnlich, wenn die Achsen den Durch- oder Halbmessern der Grundflächen proportionirt und gegen die Grundflächen gleich geneigt sind.

§. 125. Wenn nach §. 76 ein Kreis als ein Polygon von unendlich vielen Seiten angesehen werden kann; so ist ein Cylinder als ein Prisma von unendlich vielen Seiten, oder als ein Prisma anzusehen, dessen Grundfläche ein Kreis ist. Demnach

1) sind Cylinder von gleicher Grundfläche und Höhe einander gleich;

2) Cylinder verhalten sich zu einander wie die Producte aus ihrer Grundfläche und Höhe;

3) ähnliche Cylinder verhalten sich wie die Kuben der Radien oder der Durchmesser ihrer Grundflächen;

4) der kubische Inhalt eines Cylinders ist gleich dem Product aus Grundfläche und Höhe.

§. 126. Aufgaben.

1) Wie groß ist die Oberfläche eines geraden Parallelepipedums, dessen drei zusammenstoßende Kanten 6, 4 und 3 Fuß sind?

Antw. 108 Quadratfuß.

2) Welches ist der kubische Inhalt einer steinernen Walze von $1\frac{1}{2}$ Arschin Länge und 3 Arschin Umfang?

Antw. 1,074... Kubikarschin = 13,646... Kubikarschin englisch.

3) Welches ist der Kubikinhalte eines oben mit einer der Grundfläche nicht parallelen Ebene abgeschnittenen Cylinders, wenn der Durchmesser der Grundfläche 12 Werschok, die längste Seite 1 Arschin 10 Werschok, die kürzeste 1 Arschin 3 Werschok ist?

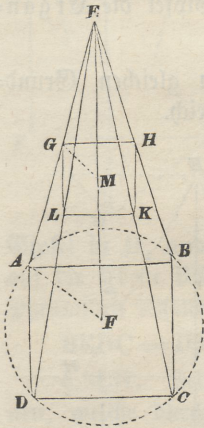
Antw. 2544,69 Kubikwerschok.

4) Wie schwer ist eine bleierne Röhre von 20 Arschin Länge, deren äußerer Durchmesser 7, der innere $5\frac{1}{2}$ Werschok ist, wenn 1 engl. Kubikfuß Blei 780 Pfund wiegt?

Antw. 11400 Pfund.

Von der Pyramide.

§. 127. Die Pyramide ist ein Körper, welcher von einer ebenen Figur als Grundfläche und so viel dreieckigen in eine Spitze (Gipfel) zusammenlaufenden Seitenflächen begrenzt wird, als die Grundfläche Seiten hat. Hiernach werden die Pyramiden eingetheilt in drei-, vier-, fünf- und mehrseitige, je nachdem die Grundfläche ein Drei-, Vier-, Fünf- oder anderes Viel-Eck ist. Höhe ist auch hier das Perpendikel vom Gipfel auf die Grundfläche.



Beweis. Hat die Grundfläche einen Mittelpunkt, d. h. ist sie eine Figur im Kreise, wie $ABCD$, so heißt die Gerade vom Gipfel nach diesem Mittelpunkt die Achse der Pyramide, und ist zugleich die Höhe, wenn sie auf der Grundfläche senkrecht ist. In diesem Falle heißt die Pyramide rechtwinklig, senkrecht, oder auch gleichseitig, weil die Kanten der Seitenflächen AE , BE , CE u. s. w. gleich sind. Denn $AF = DF = CF$ u. s. w., $\sphericalangle AFE = DFE = CFE$ u. s. w. $= 90^\circ$, folglich $\triangle AFE \cong DFE \cong CFE$ u. s. w., also auch $AE = DE = CE$ u. s. w.

Ist aber die Grundfläche einer senkrechten Pyramide auch eine reguläre Figur, so sind die gleichschenkligen Seitenflächen wegen Gleichheit aller drei Seiten congruent, haben auch gegen die Grundfläche gleiche Neigung, und die Pyramide heißt eine gerade.

§. 128. Die Durchschnittsfigur einer Pyramide mit einer der Grundfläche parallelen Ebene ist der Grundfläche ähnlich, und beide verhalten sich zu einander, wie die Quadrate ihrer Abstände vom Gipfel.

Beweis. 1) $GL \nparallel AD$, $GH \nparallel AB$ nach §. 95, folglich $\sphericalangle HGL = \sphericalangle BAD$ nach §. 90.

$\begin{array}{l} \text{S. } EG : EA = GL : AD \\ \text{,, } EG : EA = GH : AB \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{S. } EG : EA = GL : AD \\ \text{,, } EG : EA = GH : AB \end{array}} \right\} \text{ nach §. 63.}$

S. $GL : AD = GH : AB$ oder $GL : GH = AD : AB$.

Auf dieselbe Weise ergibt sich die Gleichheit der übrigen Winkel und die Proportionalität der sie einschließenden Seiten; folglich $GHL \sim ABCD$.

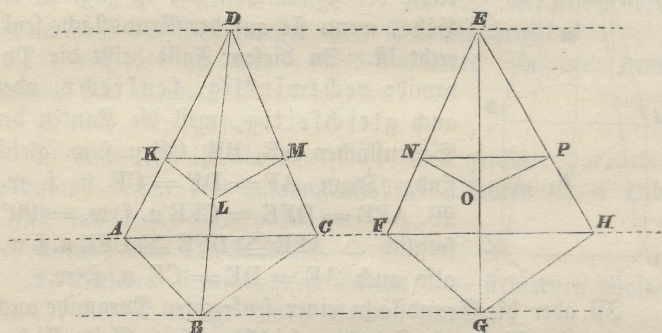
2) Es ist aber auch $GM \neq AF$, also

$$EM : EF = EG : EA = GL : AD,$$

und da nach §. 75 $GHL : ABCD = GL^2 : AD^2$; so ist auch
 $GHL : ABCD = EM^2 : EF^2$.

Der zwischen den beiden Parallelebenen liegende Theil der Pyramide heißt eine abgekürzte oder abgestumpfte Pyramide, der obere Abschnitt bis zum Gipfel die Ergänzungspyramide.

§. 129. Dreiseitige Pyramiden von gleichen Grundflächen und gleicher Höhe sind einander gleich.



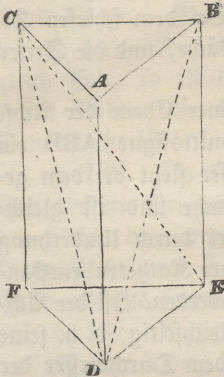
Beweis. Legt man durch beide Pyramiden in gleichem Abstände von den Gipfeln D und E die Parallelebenen KLM und NOP, so wird $\triangle KLM = NOP$, weil sie sich zu ihren Grundflächen verhalten wie die Quadrate ihrer Abstände von den Gipfeln, und diese sowohl als die Grundflächen gleich sind.

Denkt man sich nun diese Parallelebenen so nahe an den Grundflächen, wie etwa die Breite einer gezeichneten Linie, so werden die abgestumpften Pyramiden ABCK und FGHN als Prismen von gleicher Grundfläche und Höhe anzusehen, also einander gleich sein. Auf diese Weise kann man sich die ganzen Pyramiden in gleichviel und bei gleichem Abstände

von den Grundflächen gleiche Prismen getheilt denken, deren Summen natürlich auch gleich sein müssen:

$$\text{also } ABCD = FGHE.$$

§. 130. Jede dreiseitige Pyramide ist der dritte Theil eines Prisma von gleicher Grundfläche und Höhe.



Beweis. Von dem dreiseitigen Prisma $ABCE$ läßt sich durch die Ebene CBD die Pyramide $ABCD$ und durch die Ebene DEC die Pyramide $DEFC$ abschneiden, worauf die Pyramide $CBED$ übrig bleibt. Diese drei Pyramiden aber sind einander gleich. Denn $ABCD$ u. $DEFC$ haben die Grundflächen $CAB \cong FDE$ und gemeinschaftlich die Höhe des Prismas, sind also einander gleich. Nimmt man aber für $DEFC$ und $CBED$ als Grundflächen $FCE \cong BCE$, so sind ihre Gipfel in D , und da von diesem Punkt nur ein Perpendikel auf die Ebene $BEFC$ gefällt werden kann, so sind auch diese Pyramiden einander gleich,

$$BEDC = DEFC = ABCD = \frac{1}{3} \text{ Prisma } ABCE.$$

§. 131. Jede mehrseitige Pyramide läßt sich durch Ebenen, welche durch die Diagonalen der Grundfläche und den Gipfel gelegt werden, in dreiseitige von einerlei Höhe zerlegen; daher ist auch der kubische Inhalt jeder mehrseitigen Pyramide gleich dem dritten Theil eines Prismas von gleicher Grundfläche und Höhe, oder gleich dem dritten Theile des Productes aus ihrer Grundfläche und Höhe.

Vom Kegel.

§. 132. Der Kegel ist ein Körper, der von einem Kreise als Grundfläche und einer krummen in einen Gipfel schließenden Seitenfläche, Mantel genannt, begrenzt wird, oder eine Pyramide, deren Grundfläche ein Kreis ist. Höhe nennt man das Perpendikel vom Gipfel auf die Grundfläche. Die Gerade zwischen dem Gipfel und dem Mittelpunkte der Grund-

So wird auch jede andere Linie von G nach dem Umfange des Schnittes gleich GF, also die Figur ein Kreis sein.

Der zweite Theil des Satzes folgt aus §. 76 von selbst (vergl. §. 128). Der Theil des Kegels zwischen den beiden parallelen Kreisen heißt ein abgestumpfter Kegel, der obere Theil bis zum Gipfel der Ergänzungskegel.

§. 135. Da die Seiten des geraden Kegels einander gleich sind, so ist der Mantel desselben ein Kreisabschnitt, dessen Radius die Seite, dessen Bogen die Peripherie der Grundfläche ist.

§. 136. Da der Kegel ebenso eine Pyramide, wie der Cylinder ein Prisma ist, so wird der kubische Inhalt desselben gleich dem dritten Theil eines Cylinders von gleicher Grundfläche und Höhe, oder gleich dem dritten Theile des Productes aus seiner Grundfläche und Höhe sein.

§. 137. Aufgaben.

1) Die Oberfläche eines Tetraeders zu berechnen, dessen Seite 6 Zoll ist.

Antw. Der Radius des um die Seitenfläche beschriebenen Kreises $r = \sqrt{12} = 3,456$ Zoll;

jede Seitenfläche $= 9 \sqrt{3} = 15,59$ Quadrat Zoll;

die Höhe des Tetraeders $= \sqrt{24}$;

der kubische Inhalt $= 18 \sqrt{2} = 25,45$ Kubikzoll.

2) Den kubischen Inhalt einer abgestumpften geraden vierseitigen Pyramide zu berechnen, wenn die Kante der untern Grundfläche 8, die der obern 5, die Seitenkante $4\frac{1}{2}$ Fuß ist.

Antw. Der Radius der obern Grundfläche $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

der Radius der untern Grundfläche $4\sqrt{2}$

die Höhe des Stumpfs . . . $\frac{3}{2}\sqrt{7}$

„ „ der ganzen Pyramide $\frac{8}{2}\sqrt{7}$

„ „ „ Ergänzungspyram. $\frac{5}{2}\sqrt{7}$

der Kubikinhalte der ganzen Pyr. $\frac{256}{3}\sqrt{7}$

„ „ „ Ergänzungs-P. $\frac{125}{6}\sqrt{7}$

„ „ des Stumpfs $\frac{387}{6}\sqrt{7}$

$= 146,16$ Kubikfuß.

3) Wie groß ist der Mantel eines geraden Kegels von 6 Zoll Durchmesser und 5 Zoll Höhe?

Antw. 54,91 Quadrat Zoll.

4) Wie schwer ist ein runder Balken von Tannenholz, 50 Fuß lang, am Stammende 20 Zoll, am Wipfel 14 Zoll im Durchmesser, wenn 1 Kubikfuß Tannenholz 40 Pfund gerechnet wird?

Antw. 3183,5 Pfund.

5) Der Mantel eines geraden Kegels sei 100 Quadratfuß, der Winkel des Sectors $245^{\circ} 30'$; wie groß ist der kubische Inhalt des Kegels?

Antw. Die Seite 6,8 Fuß; der Radius der Grundfläche 4,6 Fuß; der Kegel 116 Kubikfuß.

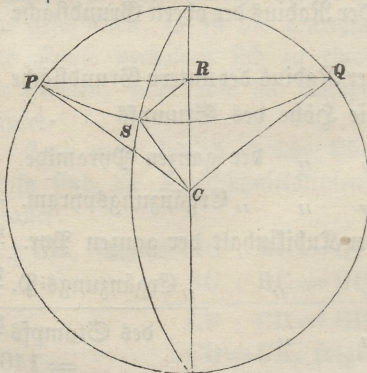
6) Wieviel Arschin Draht von 1 Linie Dicke erhält man aus $\frac{1}{4}$ Kubikfuß Messing?

Antw. 2828,6.

Von der Kugel.

§. 138. Die Kugel ist ein Körper, der von einer Fläche begrenzt wird, die überall gleich weit vom Mittelpunkt entfernt ist. Man kann sie sich entstanden denken durch Umdrehung eines Halbkreises um den Durchmesser. Daher sind alle Radien einer Kugel einander gleich, so wie alle Durchmesser.

§. 139. Die Figur eines jeden Durchschnitts einer Kugel mit einer Ebene ist ein Kreis.



Beweis. Zieht man vom Mittelpunkte der Kugel C die Gerade CR senkrecht auf die schneidende Ebene PQS , vom Treffpunkte R die Geraden RP, RS, RQ u. s. w. nach dem Umfange der Durchschnittsfigur, und von den Endpunkten die Kugelradien PC, SC, QC u. s. w.: so ist $PC=SC=QC$ u. s. w., $\angle PRC=SRC=QRC$ u. s. w. $= 90^\circ$ und in allen Dreiecken $CR = CR$, folglich nach §. 40

$$\triangle PRC \cong SRC \cong QRC \text{ u. s. w.},$$

folglich $RP = RS = RQ$ u. s. w., also die Figur ein Kreis, dessen Mittelpunkt R .

§. 140. Ein solcher Kreis, den eine die Kugel schneidende Ebene bildet, heißt ein *Kugelkreis*, die Abschnitte, in welche er die Kugel theilt, heißen *Kugelsegmente*, die krumme Oberfläche eines solchen Segments *Calotte*.

Aus dem Beweise in §. 139 ergeben sich folgende Sätze:

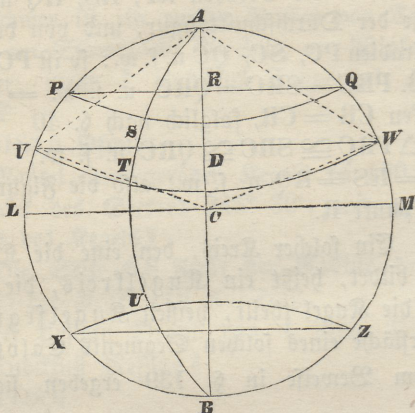
- 1) ein Perpendikel vom Mittelpunkte der Kugel trifft die Mitte des Kugelkreises;
- 2) die Gerade vom Mittelpunkte der Kugel nach dem Mittelpunkte des Kugelkreises steht auf letzterem senkrecht;
- 3) das Perpendikel im Mittelpunkte des Kugelkreises geht durch den Mittelpunkt der Kugel.

§. 141. Je weiter ein Kugelkreis vom Mittelpunkte der Kugel absteht, desto kleiner ist er; der größte ist der, welcher durch den Mittelpunkt der Kugel geht, also den Durchmesser der Kugel auch zu seinem Durchmesser hat. Daher heißt ein solcher auch *größter Kreis*. Alle größte Kreise einer Kugel sind aus demselben Grunde einander gleich, und halbiren sich gegenseitig, weil ihre Durchschnittslinie sowohl für die Kugel als für jeden dieser Kugelkreise Durchmesser ist, der den Kreis halbirt.

§. 142. Der Durchmesser der Kugel, welcher senkrecht durch den Mittelpunkt des Kugelkreises geht, AB , heißt die *Achse*, ihre Endpunkte A und B die *Pole* und jeder größte Kreis, welcher durch die Pole geht, $AQMBLP$ oder $ASTUB$, der *Meridian* solches Kugelkreises PSQ .

Kugelkreise wie PSQ, VTW, XUZ , die eine gemein-

schaftliche Achse haben, heißen Parallelkreise, und der größte LM durch den Mittelpunkt Aequator.



Nach §. 97 steht der Meridian senkrecht auf jedem Parallelkreise, wie auf dem Aequator, und sonach ist der Pol eines Kugelschnittes von der Peripherie desselben überall gleich weit entfernt, $AV = AW$, weil $\triangle ADV \cong \triangle ADW$. Auf der Kugel mißt man aber die Entfernung zwischen zwei Punkten in Graden des größten Kreises, der durch diese beiden Punkte geht. Es ist jedoch auch Arcus $AV = AW$, da $\triangle AVC \cong \triangle AWC$, weil Sehne $AV = AW$. — Der Abstand des Poles vom Aequator ist 90° .

§. 143. Der Theil der Kugeloberfläche zwischen zwei Parallelkreisen heißt eine Zone, der Theil der Kugel selbst, welcher von zwei Parallelkreisen und der Zone eingeschlossen wird, körperliche oder Kugel-Zone.

Der Theil der Kugel, welcher von einer Calotte und den Kugelradien nach der Peripherie des Kugelschnittes begrenzt, oder durch Umdrehung eines Sectors des größten Kreises um seine Achse aus der Kugel ausgeschnitten wird, heißt ein Kugelsector. — Er wird angesehen werden können als ein gerader Kegel, dessen Grundfläche die Calotte, dessen Gipfel der Kugelmittelpunkt, dessen Höhe also der Kugelradius ist.

ren aber Qa , ab , bc , cO u. f. w. die Abstände der Parallellkreise dieser so kleinen Zonen von einander, so wäre

die erste gleich $P \times Qa$

„ zweite „ $P \times ab$

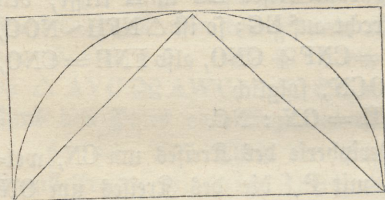
„ dritte „ $P \times bc$

„ vierte „ $P \times cO$ u. f. w., folglich die Summe

$P \cdot (Qa + ab + bc + cO$ u. f. w.) $= P \times QO = P \times FN$.

Hiernach ist die Oberfläche der Halbkugel gleich einem Rechteck aus der Peripherie des größten Kreises und dem Kugelradius, gleich $2r\pi \times r = 2r^2\pi$, und die ganze Kugel-
fläche $4r^2\pi$.

§. 145. Wenn §. 143 gesagt ist, daß der Kugelsector als ein gerader Kegel anzusehen ist, dessen Grundfläche die Calotte, dessen Höhe der Kugelradius ist; so wird dies um so richtiger sein, je kleiner man sich die Calotten denkt, und denkt man sie sich so klein, daß alle darauf gebildeten Sektoren die ganze Kugel ausmachen; so wird daraus folgen, daß der kubische Inhalt der Kugel gleich ist dem eines Kegels, dessen Grundfläche gleich der Kugeloberfläche, dessen Höhe aber der Kugelradius ist, also gleich $\frac{1}{3} \cdot 4r^2\pi \cdot r = \frac{4}{3}r^3\pi$.



§. 146. Beschreibt man um die Halbkugel einen Cylinder und in derselben einen Kegel, so daß der größte Kreis die gemeinsame Grundfläche, der Kugelradius die Höhe ist; so

ist der kubische Inhalt

des Cylinders $C = r^3 \pi$

der Halbkugel $H = \frac{2}{3} r^3 \pi$

des Kegels $K = \frac{1}{3} r^3 \pi$

$C : H : K = 3 : 2 : 1$, d. h. der Kegel ist $\frac{1}{3}$,

die Halbkugel $\frac{2}{3}$ des umgeschriebenen Cylinders.

§. 147. Aufgaben.

1) Wieviel Kugeln von $\frac{1}{2}$ Zoll Durchmesser können

aus 500 Pfund Blei gegossen werden, wenn das Gewicht eines Kubikfußes zu 780 Pfund angenommen wird?

Antw. 1357.

2) Wie weit ist der Polarkreis vom Aequator entfernt, wenn nach der Angabe in Stein's Geographie die Oberfläche einer kalten Zone 380542 Quadratmeilen beträgt?

Antw. 788,96 Meilen.

3) Wie groß ist die Seite eines Würfels, der einer Kugel von 1 Arschin Durchmesser gleich sein soll?

Antw. 12,8 Werschok.

4) Die Kante eines Oktaeders sei 12 Werschok; wie groß ist der Durchmesser einer gleich großen Kugel?

Antw. 11,5 Werschok.

5) Wieviel beträgt nach den Angaben in Nr. 2 der kubische Inhalt des Segments, welches der Polarkreis von der Erde abschneidet?

Antw. 13094760,06 .. Kubikmeilen.

Druck von F. A. Brockhaus in Leipzig.
