



TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL

---

---

Ü. Lepik

VALITUD PEATÜKKE  
KÕRGEMAST MATEMAATIKAST

II

TARTU 1973

TARTU RIIGLIK ÜLIKOOL

Teoreetilise mehhaanika kateeder

Ü. Lepik

V A L I T U D P E A T Ü K K E K Ö R G E M A S T  
M A T E M A A T I K A S T

II

OMAVÄÄRTUSED JA OMAFUNKTSIOONID

Tartu 1973

E e s s õ n a .

Käesolev väljaanne on õppevahendiks keemiaosakonna teise kursuse üliõpilastele. Väljaande esimene osa, kus käsitletakse esimest ja teist järku osatuletistega diferentsiaalvõrrandite lahendamist, ilmub mõnevõrra hiljem.

Autor.

Kinnitatud Matemaatikateaduskonna nõukogus

16. XI 1972.

## § 1. ORTOGONAALFUNKTSIOONID.

### 1. Funktsioonide reaksarendustest.

Oma kursuse varasemas osas tutvusime Fourier' meetodiga, mis võimaldab osatuletistega diferentsiaalvõrrandite lahendamist taandada harilikkude diferentsiaalvõrrandite integreerimisele. Paljude ülesannete korral aga on ka saadud harilikel diferentsiaalvõrranditel selline kuju, mille puhul integreerimist ei saa läbi viia diferentsiaalvõrrandite kursusest tuttavate võtetega. Näitena toome siinkohal nn. Legendre'i [lõžandri] diferentsiaalvõrrandi

$$(1 - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + y = 0, \quad (1.1)$$

kus  $\lambda$  on mingi konstant.

Niisugustel juhtudel osutub otstarbekohaseks otsida diferentsiaalvõrrandi lahendit reaksarenduse kujul. Näiteks võib võtta lahenduse Taylori rea kujul

$$y = A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)^2 + \dots + A_n(x - x_0)^n + \dots, \quad (1.2)$$

kus  $x_0$  on mingi meie poolt valitud arv. Kordajad  $A_0, A_1, \dots$

...,  $A_n$  määratakse aga lahendi asetamise teel diferentsiaalvõrrandisse. Sellisel lahendusviisil on kaks olulist puudust.

1) Rida (1.2) lähendab otsitavat funktsiooni hästi vaid punkti  $x = x_0$  ligiduses; enamiku probleemide korral on meil aga tarvis leida rida, mis annab otsitavale funktsioonile parima lähendi mingis vahemikus  $(a, b)$ .

2) Rea (1.2) koonduvus jääb lahtiseks. See rida võib üldse mitte koonduda või koonduda niivõrd aeglaselt, et funktsiooni väärtuste arvutamine selle rea põhjal on väga vaevarikas (nõutud täpsuse saamiseks tuleb reast võtta palju liikmeid).

Neid märkusi arvestades püstitame funktsioonide ritta arendamise probleemi märksa üldisemal kujul.

## 2. Ortogonaalfunktsioonid.

Olgu meil antud mingi funktsioonide jada  $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$ , samuti mingi funktsioon  $f(x)$ , mida me soovime arendada ritta. Kõik need funktsioonid olgu määratud mingil lõigul  $[a, b]$ . Reaksarendust otsime kujul

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \varphi_n(x), \quad (1.3)$$

kus  $A_0, \dots, A_n$  on määramisele tulevad konstandid. Erijuhul, kui valime

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{2}, \quad \varphi_1(x) = \sin x, \quad \varphi_2(x) = \cos x, \quad \varphi_3(x) =$$

$$= \sin 2x, \quad \varphi_4(x) = \cos 2x, \dots,$$

saame melle juba tuttava Fourier' rea.

Kordajate  $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$  määramine toimub Fourier' ridade teooriast tuttava võttega. Nimelt korrutame võrduse (1.3) mõlemal pooli  $\varphi_k(x)$ -ga ja integreerime  $x$  järgi rajades  $[a, b]$ . Seda tehes saame

$$\int_a^b f(x) \varphi_k(x) dx = A_0 \int_a^b \varphi_0(x) \varphi_k(x) dx + A_1 \int_a^b \varphi_1(x) \varphi_k(x) dx + \dots + A_k \int_a^b \varphi_k(x) dx + \dots + A_n \int_a^b \varphi_n(x) \varphi_k(x) dx. \quad (1.4)$$

Leitud tulemus lihtsustub oluliselt, kui valida funktsioonid  $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots$  nii, et oleks

$$\int_a^b \varphi_k(x) \varphi_l(x) dx = 0, \quad \text{kui } k \neq l. \quad (1.5)$$

Funktsioone, mis täidavad tingimust (1.5), nimetame ortogonaalfunktsioonideks. Tuleb pidada silmas, et ortogonaalfunktsiooni mõiste on alati seotud mingi lõiguga  $[a, b]$ ; teistsuguse  $a$  ja  $b$  korral nõuded (1.5) üldiselt ei kehti.

Edaspidi oletame, et funktsioonid  $\varphi_k(x)$  on valitud lõigul  $[a, b]$  ortogonaalsed. Tähistame veel lühiduse mõttes

$$\|\varphi_k(x)\|^2 = \int_a^b \varphi_k^2(x) dx, \quad (1.6)$$

kusjuures suurust  $\|\varphi_k(x)\|$  nimetame funktsiooni  $\varphi_k(x)$  normiks. Valemi (1.4) võime nüüd kirjutada kujul

$$A_k = \frac{1}{\|\varphi_k(x)\|^2} \int_a^b f(x) \varphi_k(x) dx. \quad (1.7)$$

Kuna  $\varphi_k(x)$  ja  $f(x)$  olid antud funktsioonid, siis valemi (1.7) põhjal võime arvutada reaksarenduse (1.3) korrajad  $A_k$  mistahes  $k$  väärtuse korral.

Moodustame nüüd uue funktsioonide jada

$$\psi_k(x) = \frac{\varphi_k(x)}{\|\varphi_k(x)\|^2}. \quad (1.8)$$

Pidades silmas valemit (1.6) pole raske näha, et  $\|\psi_k(x)\| = 1$ . Teiste sõnadega:

$$\int_a^b \psi_k(x) \psi_l(x) dx = \begin{cases} 1, & \text{kui } k = l \\ 0, & \text{kui } k \neq l. \end{cases} \quad (1.9)$$

Funktsioone  $\psi_k(x)$ , mis täidavad tingimusi (1.9), nimetame ortonormeeritud funktsioonideks.

Funktsioonide  $\varphi_k(x)$  valiku kohta pole me esialgu midagi lähemat öelnud (peale ortogonaalsuse tingimuse (1.6)).

Ülesanne 1. Normaliseerida Fourier' reaksarendust moodustavad funktsioonid  $\varphi_0(x) = 1/2, \dots, \varphi_{2k-1} = \sin kx$ ,  $\varphi_{2k} = \cos kx$ , kus  $k = 1, 2, 3, \dots$

### 3. Funktsioonide jadade ortogonalseerimine.

Käesolevas punktis anname menetluse, mis võimaldab mistahes pidevate funktsioonide  $\varphi_k(x)$  jadast saada ortogonaalfunktsioonide süsteemi.

Olgu antud mingil lõigul  $[a, b]$  pidevate funktsioonide jada  $g_0(x), g_1(x), \dots, g_k(x), \dots$ . Neist tuleb moodustada ortogonaalfunktsioonide süsteem  $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_k(x), \dots$

Esimese sammuna võtame

$$\varphi_0(x) \equiv g_0(x). \quad (1.10)$$

Funktsiooni  $\varphi_1(x)$  otsime kujul

$$\varphi_1(x) = c_{10}\varphi_0(x) + c_{11}g_1(x). \quad (1.11)$$

Nõuame nüüd, et  $\varphi_0(x)$  ja  $\varphi_1(x)$  oleksid lõigul  $[a, b]$  ortogonaalsed, s.t.

$$\int_a^b \varphi_1(x) \varphi_0(x) dx = 0. \quad (1.12)$$

Arvestades siia  $\varphi_1(x)$  valemist (1.11) ja viies läbi integreerimise, saame

$$c_{10} \|\varphi_0(x)\|^2 + c_{11} \int_a^b \varphi_0(x) g_1(x) dx = 0. \quad (1.13)$$

Valides  $c_{10}$  meelevaldselt, saame valemist (1.12) määrata konstandi  $c_{11}$ .

Funktsiooni  $\varphi_2(x)$  anname ette kujul

$$\varphi_2(x) = c_{20} \varphi_0(x) + c_{21} \varphi_1(x) + c_{22} \varrho_2(x) . \quad (1.14)$$

Täites  $\varphi_2(x)$  jaoks ortogonaalsusnõuded

$$\int_a^b \varphi_2(x) \varphi_0(x) dx = 0 , \quad \int_a^b \varphi_2(x) \varphi_1(x) dx = 0 , \quad (1.15)$$

asetades neisse valemisse  $\varphi_0(x)$  ja  $\varphi_1(x)$  seostest (1.10) - (1.11) ning tuues konstandid integraalide märgi ette, saame  $c_{20}$ ,  $c_{21}$ ,  $c_{22}$  määramiseks süsteemi

$$c_{20} \|\varphi_0(x)\|^2 + c_{21} \int_a^b \varphi_1(x) \varphi_0(x) dx + c_{22} \int_a^b \varphi_0(x) \varrho_2(x) dx = 0 \quad (1.16)$$

$$c_{20} \int_a^b \varphi_0(x) \varphi_1(x) dx + c_{21} \|\varphi_1(x)\|^2 + c_{22} \int_a^b \varphi_1(x) \varrho_2(x) dx = 0 .$$

Tingimuse (1.12) põhjal on esimeses valemis teine ja teises valemis esimene liige nullid. Valides jällegi vabalt näiteks konstandi  $c_{20}$ , saame võrrandist (1.16) määrata  $c_{21}$  ja  $c_{22}$ .

Eespool kirjeldatud protsessi võib korrata meelevaldne arv kordi ja jõuda nii soovitud ortogonaalfunktsioonide süsteemini  $\varphi_0(x)$ ,  $\varphi_1(x)$ , ...,  $\varphi_k(x)$ , ...

Näide. Lähtudes funktsioonidest  $\varrho_k(x) = x^k$  ( $k = 0, 1, \dots, n, \dots$ ) moodustada funktsioonide süsteem, mis oleks ortogonaalne lõigul  $[-1, +1]$ . Valemite (1.10) ja

(1.11) kohaselt

$$\varphi_0(x) = 1, \quad \varphi_1(x) = C_{10} + C_{11}x.$$

Valemist (1.13) saame

$$C_{10} \int_{-1}^{+1} dx + C_{11} \int_{-1}^{+1} x dx = 0,$$

millest nähtub, et  $C_{10} = 0$ , järelikult  $\varphi_1(x) = C_{11}x$ , kusjuures  $C_{11} \neq 0$ .

Leiame nüüd  $\varphi_2(x)$ , defineerides selle valemiga

(1.14):

$$\varphi_2(x) = C_{20} + C_{21}C_{11}x + C_{22}x^2.$$

Süsteem (1.16) saab nüüd kuju

$$C_{20} \int_{-1}^{+1} dx + C_{22} \int_{-1}^{+1} x^2 dx = 0;$$

$$C_{21}C_{11}^2 \int_{-1}^{+1} x^2 dx + C_{22}C_{11} \int_{-1}^{+1} x^3 dx = 0,$$

millest järeldub, et  $C_{21} = 0$ ;  $C_{22} = -3C_{20}$ .

Seega

$$\varphi_2(x) = C_{20}(1 - 3x^2).$$

Kui anda meeleväljsetele konstantidele  $C_{11}$  ja  $C_{20}$  väärtused  $C_{11} = 1$ ,  $C_{20} = -1/2$ , siis jõuame teatud polünoomideni

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = 1/2(3x^2 - 1),$$

mida tuntakse Legendre'i polünoomide nime all (nendega

puutume lähemalt kokku hiljem).

Leiame veel nende polünoomide normid:

$$\|P_0(x)\| = \left( \int_{-1}^{+1} dx \right)^{1/2} = \sqrt{2} ;$$

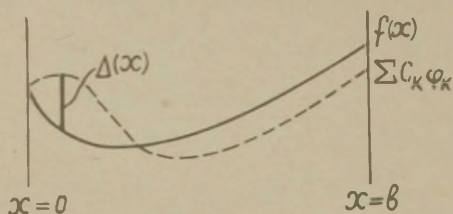
$$\|P_1(x)\| = \left( \int_{-1}^{+1} x^2 dx \right)^{1/2} = \sqrt{\frac{2}{3}} ;$$

$$\|P_2(x)\| = \frac{1}{2} \left( \int_{-1}^{+1} (3x^2 - 1)^2 dx \right)^{1/2} = \sqrt{\frac{2}{5}} .$$

Ülesanne 2. Ortogonaliseerida funktsioonide süsteem  $g(x) = x^k e^{-x/2}$ ,  $k = 0, 1, \dots$  (Tulemuseks osutuvad nn. Laguerre'i funktsioonid, mis on esitatavad kujul  $\varphi_k(x) = e^{-x/2} L_k(x)$ , kus  $L_k(x)$  on Laguerre'i polünoomid).

#### 4. Funktsiooni parim lähend antud lõigul.

Vaatleme nüüd järgmist probleemi. On antud funktsioon  $f(x)$  ja lõigul  $[a, b]$  ortogonaliseeritud funktsioonide jada  $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$ . Tuleb leida funktsiooni  $f(x)$  lõigul  $[a, b]$  parim lähend kujul  $C_0 \varphi_0(x) + C_1 \varphi_1(x) + \dots + C_r \varphi_r(x)$ , kus  $r$  on mõnesugune kindel arv.



Joonis 1.

Püüame kõigepealt leida vastuse küsimusele, kuidas hinnata lähendi headust antud lõigul? Vaatleme joonist 1, kus funktsioo-

ni  $f(x)$  lähend  $\sum c_k \varphi_k$  olgu esitatud punktiiriga. Viga, mida me teeme mingil  $x$  erivaärtusel, on määratud suurusega

$$\Delta(x) = f(x) - \sum_{k=0}^r c_k \varphi_k(x) .$$

Kogu lõigu kohta tulevat viga võiks iseloomustada nende kahe joone vahele jääva pindalaga. Raskusi valmistab siin aga asjaolu, et  $\Delta$  (ja koos sellega ka vastav pinnaosa) võib olla nii positiivne kui negatiivne. Seetõttu võtame edaspidi veahinnanguks  $\Delta^2$ , mida integreerime üle lõigu  $[a, b]$ . Teiste sõnadega - lahendi headust mõõdame avaldisega

$$M = \int_a^b \left[ f(x) - \sum_{k=0}^r c_k \varphi_k(x) \right]^2 dx . \quad (1.17)$$

Avades integraali all sulud ja tuues konstandid  $c_k$  integraali märgi ette, saame selle valemi esitada kujul

$$\begin{aligned} M = & \int_a^b [f(x)]^2 dx - 2 \sum_{k=0}^r c_k \int_a^b \varphi_k(x) f(x) dx + \\ & + \sum_{k=0}^r \sum_{l=0}^r c_k c_l \int_a^b \varphi_k(x) \varphi_l(x) dx . \end{aligned}$$

Et funktsioonid  $\varphi_k(x)$ ,  $\varphi_l(x)$  olid ortonormeeritud, siis, kasutades valemit (1.9), võime tulemuse ümber kirjutada veel kujul

$$M = \int_a^b [f(x)]^2 dx - 2 \sum_{k=0}^r c_k \int_a^b \varphi_k(x) f(x) dx + \sum_{k=0}^r c_k^2 . \quad (1.18)$$

Püüame nüüd reaksarenduse kordajad  $C_k$ -d valida nii, et  $M$  oleks võimalikult väiksem. Mitme muutuja funktsiooni minimumi tarvilikuks tingimuseks on aga

$$\frac{\partial M}{\partial C_k} = 0, \quad (k = 0, 1, \dots, r).$$

Rakendades seda nõuet avaldisele (1.18), saame

$$\frac{\partial M}{\partial C_k} = -2 \int_a^b \varphi_k(x) f(x) dx + 2C_k = 0$$

ehk

$$C_k = \int_a^b \varphi_k(x) f(x) dx. \quad (1.19)$$

Kuna antud juhul  $\|\varphi(x)\| = 1$ , siis valemite (1.7) ja (1.19) võrdlus näitab, et  $C_k = A_k$ . Järelikult meie poolt valitud rida (1.3), tingimusel, et  $\varphi_k(x)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , moodustab ortogonaalfunktsioonide süsteemi, annab funktsioonile  $f(x)$  parima lähendi lõigul  $[a, b]$ . Analoogilisele tulemusele jõudsime ka Fourier' ridade teoorias.

### 5. Täielik ortogonaalfunktsioonide süsteem.

Siiani oli meil reaksarenduse  $\sum_{k=0}^r C_k \varphi_k(x)$  liikmete arv  $r$  kindel suurus. Laseme nüüd suurus  $r$  kasvada piiramatult. Reaksarendusel  $\sum_{k=0}^r C_k \varphi_k(x)$  on mõtet vaid siis, kui piirjuhul  $r \rightarrow \infty$  mõlemad joonisel 1 märgitud kõverad ühtu-

vad ehk teiste sõnadega:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \varphi_k(x). \quad (1.20)$$

(Vastasel korral meie reaksarendus poleks koonduv ja seda kasutada ei saaks). Valemist (1.17) nähtub, et koonduva rea korral  $M \rightarrow 0$ , kui  $r \rightarrow \infty$ . Kuna

$$C_k = A_k = \int_a^b \varphi_k(x) f(x) dx, \quad (1.20')$$

siis tingimuse (1.18) põhjal, võttes  $M = 0$ , võime reaksarenduse koonduvuse nõude esitada kujul

$$\int_a^b [f(x)]^2 dx = \sum_{k=0}^{\infty} A_k^2. \quad (1.21)$$

Järgnevalt tutvume ortogonaalfunktsioonide süsteemi täielikkuse nõudega. Süsteemi  $\varphi_k(x)$  nimetame täielikuks, kui talle ei saa lisada ühtegi uut funktsiooni  $\psi(x)$  nii, et süsteem jääks ortonormeerituks.

Teiste sõnadega: täielik süsteem hõlmab kõik võimalikud ortonormeeritud funktsioonid.

Ei ole raske näha, et kui tingimus (1.21) on täidetud, siis ortonormeeritud funktsioonide süsteem on täielik. Tõestus on vastuväeteline. Olgu süsteem  $\varphi_k(x)$  mittetäielik, s.t. et peab leiduma mingi funktsioon  $\psi(x) \neq 0$ , mis on ortonormaalne süsteemiga  $\varphi_k(x)$ . Valime nüüd  $f(x) \equiv \psi(x)$ . Valemist (1.20) järeldeb, et

$$A_k = \int_a^b \psi(x) \varphi_k(x) dx = 0$$

iga  $k$  korral. Järelikult tingimus (1.21) annab

$$\int_a^b [\psi(x)]^2 dx = 0.$$

Et integraali all seisab positiivne funktsioon, siis saab seda nõuet täita ainult juhul, kui  $\psi(x) \equiv 0$ , see on aga vastuolus meie eeldusega funktsiooni  $\psi(x)$  kohta. Järelikult niisugust funktsiooni  $\psi(x)$ , mis oleks ortonormaalne süsteemiga  $\varphi_k(x)$ , ei leidu ja see süsteem on täielik, mida aga oligi tarvis näidata.

Beltoodust saab teha olulise järelduse: funktsiooni saab arendada ritta ainult täieliku ortonormeeritud süsteemi kaudu. Kui me funktsioonide süsteemist  $\varphi_k(x)$  osa funktsioone jätame arvestamata, siis meie poolt kasutatud reaksarendus (1.3) ei pruugi koonduda (ta võib koonduda vaid teatud erikujuliste funktsioonide  $f(x)$  korral). Analooilise asjaoluga puutusime kokku ka Fourier' ridade teoorias. Nimelt nägime, et Fourier' reas esinevad nii siinustega kui ka koosinustega liikmed. Meelevaldset funktsiooni ei saa arendada ritta ainult siinuste või koosinuste järgi - sel juhul kasutatud ortogonaalfunktsioonide süsteem pole täielik.

## § 2. STURM-LIOUVILLE'I VÖRRAND JA SELLE OMADUSI.

### 1. Sturm-Liouville'i võrrand.

Muutujate eraldamisvõtte viib sageli järgmist tüüpi võrrandile

$$\frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{dy}{dx} \right] + [\lambda r(x) - q(x)] = 0, \quad (2.1)$$

kus  $p(x)$ ,  $q(x)$ ,  $r(x)$  on mingid teada olevad funktsioonid, mis on määratud lõigul  $[a, b]$  ega oma sellel lõigul negatiivseid väärtusi. Lisaks sellele funktsioonil  $p(x)$  ärgu olgu vahemikus  $(a, b)$  nullkohti. Sümbol  $\lambda$  tähistab mingit reaalarvulist parameetrit.

Võrrandit (2.1) nimetamegi Sturm-Liouville'i [Sturm-liouville'i] võrrandiks. Sellel võrrandil võib olla nii lõplikke lahendeid kui ka lahendeid, mis teatud  $x$  eriväärtustel saavad lõpmatuks. Tavaliselt funktsioonil  $y(x)$  on mingi konkreetne füüsikaline tähendus, mille puhul funktsiooni lõpmatud väärtused ei oma reaalselt sisu. Seda asjaolu arvestades otsime Sturm-Liouville'i võrrandile üksnes lõplikke lahendeid, kus  $|y(x)| < \infty$  iga  $x$  puhul lõigust  $[a, b]$ . Niisuguste lahendite leidmisel esineb põhiliselt kolm rajatingimuste varianti, mida vaatame allpool.

a) Kui  $p(a) \neq 0$ ,  $p(b) \neq 0$ , siis nõuame, et võrrandi (2.1) lahend rahuldaks rajatingimusi  $y(a) = y(b) = 0$ .

b) Kui  $p(a) = 0$ , siis nõuame, et funktsiooni  $y(x)$

väärtus kohal  $x = a$  oleks tõkestatud, s.t.  $|y(a)| < \infty$ . Analoo­giliselt, kui  $p(b) = 0$ , püstitame nõude, et  $|y(b)| < \infty$ .

c) Kui  $p(x)$  ei oma ühtegi nullkohta, siis võime võtta  $a \rightarrow -\infty$ ;  $b \rightarrow \infty$ . Funktsioon  $y(x)$  peab lõpmatuspunktis täitma mõningaid täiendavaid nõudeid, mis me formuleerime hiljem (seda juhtu analüüsime lähemalt Hermite'i ja Laguerre'i polünoomide omaduste uurimisel).

Sturm-Liouville'i võrrandil on mitmeid huvitavaid omadusi, millega tutvume järgmistes punktides.

## 2. Sturm-Liouville'i võrrandi omaväärtused.

Ilmselt on võrrandil (2.1) alati triviaalne lahend  $y \equiv 0$ . Võib tõestada, et mittetriviaalseid lahendeid on sellel võrrandil üksnes parameetri  $\lambda$  teatud väärtuste korral  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ , milliseid on lõpmatu hulk. Neid eriväärtusi nimetamegi võrrandi (2.1) omaväärtusteks. Ülaltoodud väite põhjendamine nõuab mõningaid täiendavaid teadmisi matemaatikast, mille tõttu me võtame selle väite ilma tõestuseta.

## 3. Sturm-Liouville'i võrrandi omafunktsioonid.

Tõestame järgmise teoreemi:

I g a l e S t u r m - L i o u v i l l e ' i v õ r r a n d i o m a v ä ä r t u s e l e v a s t a b ü k s a i n u s f u n k t s i o o n  $\varphi_k(x)$ , m i s o n v õ r r a n d i ( 2 . 1 ) l a h e n d i k s .

Seda funktsiooni nimetamegi võrrandi (2.1) omafunktsiooniks.

Tõestus on vastuväiteline. Oletame, et mingile oma-  
väärtusele  $\lambda_k$  vastab kaks lineaarselt sõltumatut oma-  
funktsiooni  $\varphi_k(x)$  ja  $\psi_k(x)$ . Et need funktsioonid peavad  
rahuldama Sturm-Liouville'i võrrandit parameetri väärtusel  
 $\lambda = \lambda_k$ , saame

$$\frac{d}{dx} \left( p \frac{d\varphi_k}{dx} \right) + (\lambda_k r - q) \varphi_k = 0 ;$$

$$\frac{d}{dx} \left( p \frac{d\psi_k}{dx} \right) + (\lambda_k r - q) \psi_k = 0 .$$

Korrutame esimest võrrandit  $\psi_k$ -ga, teist  $(-\varphi_k)$ -ga  
ja liidame saadud tulemused. Seda tehes saame

$$\psi_k \frac{d}{dx} \left( p \frac{d\varphi_k}{dx} \right) - \varphi_k \frac{d}{dx} \left( p \frac{d\psi_k}{dx} \right) = 0 .$$

Lihtne arvutus näitab, et selle tulemuse võib viia  
kujule

$$\frac{d}{dx} \left[ p \left( \psi_k \frac{d\varphi_k}{dx} - \varphi_k \frac{d\psi_k}{dx} \right) \right] = 0 .$$

Kui mingi funktsiooni tuletis võrdub nulliga iga  $x$   
väärtuse korral lõigult  $[a, b]$ , siis see funktsioon ise on  
konstantne:

$$p \left( \psi_k \frac{d\varphi_k}{dx} - \varphi_k \frac{d\psi_k}{dx} \right) = \text{const.} \quad (2.2)$$

Konstandi määramise rajatingimustest. Esimese rajatin-  
gimuste variandi korral  $\psi_k(a) = \psi_k(b) = \varphi_k(a) = \varphi_k(b) = 0$   
ja seega konstant on null. Teise variandi korral on  $p(a) = 0$   
või  $p(b) = 0$ . Valemist (2.2) nähtub, et ka siin on integree-  
rimiskonstant null.

Seega rajatingimuste kahe esimese variandi korral

$$\psi_k \frac{d\varphi_k}{dx} - \varphi_k \frac{d\psi_k}{dx} \equiv 0. \quad (2.3)$$

Saadud tulemuse võib esitada diferentsiaalvõrrandite teooriast tuttava Wronski determinandi kujul:

$$W = \begin{vmatrix} \psi_k & \varphi_k \\ \frac{d\psi_k}{dx} & \frac{d\varphi_k}{dx} \end{vmatrix} = \psi_k \frac{d\varphi_k}{dx} - \varphi_k \frac{d\psi_k}{dx}.$$

Antud juhul  $W \equiv 0$ , diferentsiaalvõrrandite teooriast aga teame, et sellisel juhul funktsioonid  $\psi_k$  ja  $\varphi_k$  peavad olema lineaarselt sõltuvad, s.t.  $\psi_k = C\varphi_k$ . See on vastuolus meie esialgse eeldusega omafunktsioonide sõltumatusest. Oleme seega sattunud vastuoludesse. Nendest vabanemiseks on ainus võimalus loobuda meie oletusest, nagu võiks ühele omaväärtusele vastata kaks sõltumatut omafunktsiooni. Sellega aga meie lause ongi tõestatud.

Lahtiseks jääb esialgu kolmas variant rajatingimusi. Seda juhtu uurime lähemalt hiljem.

#### 4. Omaväärtuste positiivsus.

Näitame nüüd, et kõik omaväärtused  $\lambda_k$  on positiivsed.

Tõestuseks vaatame mingit omaväärtust  $\lambda_k$  ja sellele vastavat omafunktsiooni  $\varphi_k(x)$ . Asetades need suurused Sturm-Liouville'i võrrandisse, saame

$$\frac{d}{dx} \left( p \frac{d\varphi_k}{dx} \right) + (\lambda_k r - q) \varphi_k = 0.$$

Korrutame selle võrrandi mõlemaid pooli  $\varphi_k$ -ga ja integreerime rajades (a,b) :

$$\int_a^b \varphi_k \frac{d}{dx} \left( p \frac{d\varphi_k}{dx} \right) dx + \lambda_k \int_a^b r \varphi_k^2 dx - \int_a^b q \varphi_k^2 dx = 0. \quad (2.4)$$

Esimest integraali integreerime ositi võttes:  $u = \varphi_k$  ja  $dv = d(p \frac{d\varphi_k}{dx})$ ; tulemuseks saame

$$\int_a^b \varphi_k \frac{d}{dx} \left( p \frac{d\varphi_k}{dx} \right) dx = + \left( p \varphi_k \frac{d\varphi_k}{dx} \right) \Big|_a^b - \int_a^b p \left( \frac{d\varphi_k}{dx} \right)^2 dx. \quad (2.5)$$

Rajatingimuste esimese kahe variandi korral on väljaintegreeritud osa null, sest emb-kumb, kas  $\varphi_k(a) = 0$  või  $p(a) = 0$  (samuti ka  $\varphi_k(b) = 0$  või  $p(b) = 0$ ). Asetades tulemuse (2.5) valemisse (2.4), saame pärast liikmete korraldamist

$$\lambda_k \int_a^b r \varphi_k^2 dx = \int_a^b p \left( \frac{d\varphi_k}{dx} \right)^2 dx + \int_a^b q \varphi_k^2 dx.$$

Et funktsioonid  $p$ ,  $q$  ja  $r$  ei saa lõigul  $[a,b]$  omandada negatiivseid väärtusi, on kõik integraalide all olevad suurused ja samuti ka integraalid ise positiivsed. Sellest aga järeldub, et  $\lambda_k > 0$ , mida meil oligi tarvis näidata.

Ka siin jääb lahtiseks rajatingimuste kolmas variant.

## 5. Omafunktsioonide ortogonaalsus.

Selles punktis tuletame järgmise valemi:

$$\int_a^b r(x) \varphi_k(x) \varphi_l(x) dx = 0, \text{ kui } k \neq l. \quad (2.6)$$

Kui oleks  $r(x) \equiv 1$ , siis tingimus (2.6) ühtuks varem käsitletud ortogonaalsusetingimusega (1.5). Seepärast öeldaksegi, et kui tingimus (2.6) on täidetud, siis omafunktsioonid  $\varphi_k(x)$  ja  $\varphi_l(x)$  on ortogonaalsed kaaluga  $r(x)$ .

Tõestame nüüd valemi (2.6) kehtivuse. Et  $\varphi_k(x)$  ja  $\varphi_l(x)$  on Sturm-Liouville'i võrrandi omaväärtustele  $\lambda_k$  ja  $\lambda_l$  vastavaks lahendiks, siis

$$\frac{d}{dx} \left( p \frac{d\varphi_k}{dx} \right) + (\lambda_k r - q) \varphi_k = 0 ;$$

$$\frac{d}{dx} \left( p \frac{d\varphi_l}{dx} \right) + (\lambda_l r - q) \varphi_l = 0 .$$

Korrutame esimese võrrandi kõiki liikmeid  $\varphi_l$ -ga, teise võrrandi liikmeid aga  $\varphi_k$ -ga ja integreerime rajades  $(a, b)$ :

$$\int_a^b \varphi_l \frac{d}{dx} \left( p \frac{d\varphi_k}{dx} \right) dx + \lambda_k \int_a^b r \varphi_k \varphi_l dx - \int_a^b q \varphi_k \varphi_l dx = 0 ;$$
$$\int_a^b \varphi_k \frac{d}{dx} \left( p \frac{d\varphi_l}{dx} \right) dx + \lambda_l \int_a^b r \varphi_k \varphi_l dx - \int_a^b q \varphi_k \varphi_l dx = 0 .$$

(2.7)

Analoogiliselt eelmises punktis tehtule integreerime

ka siin mõlema võrrandi esimesi integraale ositi. Tulemuseks saame

$$\int_a^b \varphi_1 \frac{d}{dx} \left( p \frac{d\varphi_k}{dx} \right) dx = \left( p \varphi_1 \frac{d\varphi_k}{dx} \right) \Big|_a^b - \int_a^b p \frac{d\varphi_k}{dx} \frac{d\varphi_1}{dx} dx ; \quad (2.8)$$

$$\int_a^b \varphi_k \frac{d}{dx} \left( p \frac{d\varphi_1}{dx} \right) dx = \left( p \varphi_k \frac{d\varphi_1}{dx} \right) \Big|_a^b - \int_a^b p \frac{d\varphi_k}{dx} \frac{d\varphi_1}{dx} dx .$$

Esimese kahe rajatingimuse variandi korral on jällegi väljaintegreeritud osad nullid. Arvestades seda asjaolu, asetades tulemused (2.8) valemitesse (2.7) ja lahutades selle süsteemi esimesest võrrandist teise, jõuame valemieni

$$(\lambda_k - \lambda_l) \int_a^b r \varphi_k \varphi_l dx = 0 .$$

Et omaväärtused olid erinevad (s.t.  $\lambda_k \neq \lambda_l$ ), siis peab null olema integraal, millega olemegi tõestanud valemi (2.6) kehtivuse.

Rajatingimuste kolmas variant vajab jällegi täiendavat analüüsi.

Kaalu  $r(x)$  korral funktsiooni  $\varphi_k(x)$  normi ruut defineeritakse valemiga

$$\|\varphi_k(x)\|^2 = \int_a^b r(x) \varphi_k^2(x) dx , \quad (2.9)$$

mis osutub varemantud valemi (1.6) üldistuseks.

### § 3. MÕNINGAID ERIFUNKTSIOONE.

#### 1. Legendre'i polünoomid.

Järgnevalt asume Legendre'i diferentsiaalvõrrandi (1.1) lahendamisele. Selleks kasutame mõnevõrra kaudset teed: tuletame algul nn. Legendre'i polünoomid ja näitame siis, et need on diferentsiaalvõrrandi (1.1) omafunktsioonideks.

Legendre'i polünoomide juurde jõuame kõige kiiremini nn. tekitaja funktsiooni kaudu, mille defineerime valemiga

$$\psi(x, \varrho) = \frac{1}{\sqrt{1 + \varrho^2 - 2\varrho x}}, \quad (3.1)$$

kusjuures  $0 < \varrho < 1$ ,  $-1 \leq x \leq 1$ .

Arendame selle avaldise Maclaurin'i ritta  $\varrho$  astmete järgi:

$$\psi(x, \varrho) = \psi(x, 0) + \frac{\varrho}{1!} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \varrho} \right)_{\varrho=0} + \frac{\varrho^2}{2!} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varrho^2} \right)_{\varrho=0} + \dots \quad (3.2)$$

Leiame osatuletised

$$\frac{\partial \psi}{\partial \varrho} = - \frac{\varrho - x}{(1 + \varrho^2 - 2\varrho x)^{3/2}};$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \varrho^2} = \frac{-(1 - \varrho^2 - 2\varrho x)^{3/2} + (\varrho - x) \frac{3}{2} \sqrt{1 + \varrho^2 - 2\varrho x} \cdot 2(\varrho - x)}{(1 + \varrho^2 - 2\varrho x)^3}$$

$$\text{Et } \psi(x, 0) = 1, \quad \left( \frac{\partial \psi}{\partial \varrho} \right)_{\varrho=0} = x, \quad \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varrho^2} \right)_{\varrho=0} = 3x^2 - 1,$$

siis valem (3.2) saab kuju

$$\psi(x, \rho) = 1 + x\rho + \frac{1}{2} (3x^2 - 1) \rho^2 + \dots$$

Selle tulemuse võib kirja panna järgmiselt:

$$\psi(x, \rho) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) \rho^n, \quad (3.3)$$

kus  $P_n(x)$  on teatud polünoomid, mis kannavadki Legendre'i polünoomide nime. Eespool läbiviidud arvutus andis melle 3 esimest Legendre'i polünoomi:

$$P_0(x) = 1; \quad P_1(x) = x; \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1).$$

Märgiksime, et samadele tulemustele jõudsime ka §-s 1, p. 3 toodud näites mõnevõrra erineval viisil.

Eeltoodud mõttekäik võimaldab leida Legendre'i polünoome  $P_k(x)$  mistahes indeksi  $k$  väärtuse jaoks. Teiselt poolt tuleb aga pidada silmas, et kui  $k \geq 2$ , siis vajalike tuletiste arvutamine muutub üsna tülikaks ja töömahukaks. Tuletame seepärast valemi, mille abil saame suhteliselt hõlpsasti koostada Legendre'i polünoome juhul, kui  $k > 1$ .

Kirjutame valemi (3.1) kujul

$$\psi(x, \rho) \sqrt{1 + \rho^2 - 2\rho x} = 1$$

ja võtame osatuletised nii  $\rho$  kui ka  $x$  järgi:

$$\frac{\rho - x}{\sqrt{1 + \rho^2 - 2\rho x}} \psi(x, \rho) + \sqrt{1 + \rho^2 - 2\rho x} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} = 0;$$

$$\frac{-\rho}{\sqrt{1 + \rho^2 - 2\rho x}} \psi(x, \rho) + \sqrt{1 + \rho^2 - 2\rho x} \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0.$$

Korrutades saadud avaldiste kõiki liikmeid avaldisega  $\sqrt{1 - \rho^2 - 2\rho x}$ , saame võrrandid

$$(\rho - x)\psi + (1 + \rho^2 - 2\rho x) \frac{\partial \psi}{\partial \rho} = 0 ; \quad (3.4)$$

$$-\rho\psi + (1 + \rho^2 - 2\rho x) \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 . \quad (3.5)$$

Valemist (3.3) leiame, et

$$\frac{\partial \psi}{\partial \rho} = P_1(x) + 2P_2(x)\rho + 3P_3(x)\rho^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)P_{n+1}(x)\rho^n. \quad (3.6)$$

Asetades selle tulemuse võrrandisse (3.4) ja arvestades valemit (3.3), saame samasuse

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(1 + \rho^2 - 2\rho x)(n+1)P_{n+1}\rho^n + (-x+\rho)P_n\rho^n] \equiv 0 .$$

Korraldades tulemust  $\rho$  astmete järgi, näeme, et

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)P_{n+1}\rho^{n-1} - xP_n\rho^{n+1} + (n+1)P_{n+1}\rho^{n+2} - 2(n+1)xP_{n+1}\rho^{n+1} + P_n\rho^{n+1}] \equiv 0 .$$

See samasus peab kehtima mistahes  $\rho$  korral; see on aga võimalik ainult siis, kui kõigi  $\rho$  astmete kordajad on nullid. Leiame  $\rho^n$  kordaja ja võrdsustame selle nulliga (kui  $\rho$  astendaja on  $n+1$  või  $n+2$ , siis tuleb võtta funktsiooni reaksarendusest eelmine või üleeelmine liige, vähendades arvu  $n$  vastavalt kas ühe või kahe võrra):

$$(n+1)P_{n+1} - x(2n+1)P_n + nP_{n-1} = 0. \quad (3.7)$$

Saadud tulemus kehtib, kui  $n \geq 1$ , ja võimaldab järkjärguliselt arvutada mistahes Legendre'i polünoome.

On tarvis näidata, et Legendre'i polünoomid on tõepoolest võrrandi (1.1) omafunktsioonid.

Selleks elimineerime valemeist (3.4) - (3.5) muutuja  $\psi$ ; seda tehes saame võrrandi

$$\rho \frac{d\psi}{d\rho} - (x - \rho) \frac{d\psi}{dx} = 0. \quad (3.8)$$

Valemi (3.3) põhjal (kriipsuga märgime edaspidi tulelisi  $x$  järgi)

$$\frac{d\psi}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n'(x) \rho^n.$$

Asetades selle tulemuse ja  $\psi$  avaldise valemist (3.3) võrrandisse (3.8), saame samasuse

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)P_{n+1}' \rho^{n+1} - (x - \rho)P_n' \rho^n] \equiv 0.$$

Võrrutame nulliga jällegi liikme  $\rho^n$  kordaja, see annab melle võrrandi

$$nP_n - xP_n' + P_{n-1}' = 0. \quad (3.9)$$

Meie eesmärgiks on seoste (3.7) ja (3.9) põhjal koostada võrrand, mis sisaldab Legendre'i polünoomi ja selle tulelisi üksnes indeksiga  $n$ . Selleks diferentseerime esmalt valemit (3.7):

$$(n+1)P_{n+1}' - x(2n+1)P_n' - (2n+1)P_n + nP_{n-1}' = 0.$$

Asetades siia liikme  $P_{n-1}'$  valemist (3.9), jõuame seosele

$$P_{n+1}' - xP_n' - (n+1)P_n = 0.$$

Vähendame indeksit  $n$  ühe võrra:

$$P_n' - xP_{n-1}' - nP_{n-1} = 0. \quad (3.10)$$

Suuruse  $P_{n-1}'$  asetame siia valemist (3.9). Seda tehes saame

$$(1 - x^2)P_n' + nxP_n - nP_{n-1} = 0.$$

On veel tarvis vabaneda liikmest  $P_{n-1}$ ; selleks diferentseerime leitud avaldist  $x$  järgi:

$$\frac{d}{dx}[(1 - x^2)P_n'] + nP_n + nxP_n' - nP_{n-1}' = 0.$$

Asetades siia veelkordselt  $P_{n-1}'$  valemist (3.9), saame pärast lihtsustusi võrrandi

$$\frac{d}{dx}[(1 - x^2)P_n'] + n(n+1)P_n = 0. \quad (3.11)$$

Võrreldes tulemust valemiga (1.1), näeme, et polünoomid  $P_n(x)$  on tõepoolest Legendre'i diferentsiaalvõrrandi omafunktsioonid, kui vaid  $\lambda_n = n(n+1)$ .

Legendre'i võrrand on Sturm-Liouville'i võrrandi (2.1) erijuhuks, kui võtta  $p(x) = 1 - x^2$ ,  $\lambda_n = n(n+1)$ ,  $r(x) = 1$ ,  $q(x) = 0$ . Et  $p(-1) = p(+1) = 0$ , siis on meil tegu rajatimgimuste teise variandiga ning kõik §-s 2 p. 2 - 5 tehtud järeldused kehtivad. Et  $r(x) = 1$ , siis Legendre'i polünoomid on ortogonaalsed kaaluga üks, s.t.

$$\int_{-1}^{+1} P_k(x) P_l(x) dx = 0, \quad \text{kui } k \neq l. \quad (3.12)$$

Mis puutub Legendre'i polünoomide normi, siis polünoome teades pole seda kuigi keeruline arvutada (seda me

tegime juba § -s 1, p. 3 toodud näite puhul). On võimalik tuletada ka alltoodud üldine valem normi ruudu kohta:

$$\|P_k(x)\|^2 = \frac{2}{2k+1}. \quad (3.13)$$

Järgnevalt tuleks näidata, et Legendre'i polünoomid moodustavad täieliku omafunktsioonide süsteemi, sest vastasel korral neid ei saaks kasutada funktsioonide reaksarenduste koostamiseks. Selle fakti võtame lihtsuse pärast tõestusteta. Omafunktsioonide süsteemi  $P_k(x)$  täielikkusest järeldub, et peale Legendre'i polünoomide ei leidu teisi funktsioone, mis oleksid ortogonaalsed mingi  $P_k(x)$ -ga.

Teeme ülalöeldust kokkuvõtte:

1) Legendre'i diferentsiaalvõrrandil

$$(1-x^2) \frac{d^2y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + \lambda y = 0$$

on nullist erinevaid lõplikke lahendeid vaid parameetri väärtustel  $\lambda = n(n+1)$ , kus  $n$  on positiivne täisarv.

2) Mistahes funktsiooni  $f(x)$  võib arendada lõigul  $[-1, 1]$  ritta Legendre'i polünoomide järgi kujul

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(x),$$

kus

$$A_n = \frac{1}{\|P_n(x)\|^2} \int_{-1}^{+1} f(x) P_n(x) dx = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x) P_n(x) dx.$$

Ülesanne 3. Andes indeksile  $n$  väärtused  $n = 1, 2, 3$ , arvutada valemi (3.7) põhjal polünoomid  $P_2(x)$ ,  $P_3(x)$ ,  $P_4(x)$ .

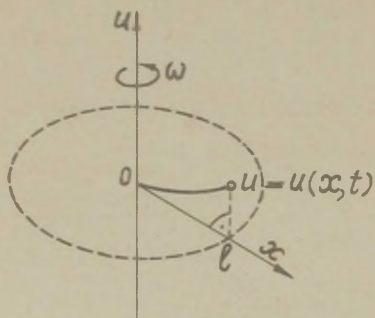
Ülesanne 4. Arendada Legendre'i polünoomide järgi ritata funktsioon  $f(x)$ , mis on antud kujul

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kui } -1 \leq x < 0 \\ 1, & \text{kui } 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

## 2. Pöörleva keele väikesed võnkumised.

Et illustreerida Legendre'i polünoomide rakendamist matemaatilise füüsika kursuses esinevate võrrandite integreerimiseks, vaatame järgmist ülesannet.

Keel pikkusega  $l$  on kinnitatud ühe oma otsaga punktis  $O$  ja võib vabalt pöörelda vertikaalse telje ümber (joon

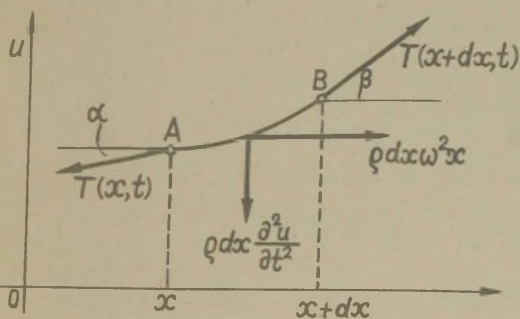


Joonis 2.

2). Keel olgu homogeenne, tema pikkusühiku mass  $\rho$ . Keele pöörlemine toimugu konstantse nurkkiirusega  $\omega$ . Raskusjõu ja keskkonnataktisuse jätame arvestamata. Kui keele kujuks alghetkel on sirgjoon, mis asub pöörlemisteljega ristiolevas tasapinnas, siis ka pöörlemisel

jääb keel sirgeks. Meid huvitab aga mõnevõrra üldisem juhtum, kus alghetkel on keelel mingi väike algköverus ja on tarvis uurida keele kaju muutumist liikumise vältel. Keele

liikumist on otstarbekohane kirjeldada  $x$ -teljestikus, mille alguspunktiks on punkt  $O$ ;  $x$ -telg pöörlelgu  $u$ -telje ümber nurkkiirusega  $\omega$ . Niisugusel juhul  $x$ -telg iseloomustab keele relatiivse tasakaalu asendit (s.t. asendit, mis vastaks sirgjoonelise keele pöörlemisele);  $u$  - aga iseloomustab vertikaalsihhilist kõrvalekallet sellest asendist. See suurus sõltub ilmselt nii koordinaadist  $x$  kui ka ajast  $t$ , seega  $u = u(x, t)$ . Keele algkuju olgu antud võrrandiga  $u(x, 0) = f(x)$ , kus  $f(x)$  on mingi vahemikus  $(0, 1)$  teada olev funktsioon. Keele algkiiruse loeme lihtsuse mõttes nulliks, s.t.  $\dot{u}(x, 0) \equiv 0$ . Vaatame nüüd keele asendit mingil hetkel  $t$  ning eraldame keelest mingi elemendi  $dx$  (joon. 3). Sel-



Joonis 3.

lele elemendile mõjuvad järgmised jõud: 1) Otspunktides A ja B rakendatud tõmbejõud  $T(x, t)$  ning  $T(x+dx, t)$ ; 2) tsentrifugaaljõud  $\rho dx \omega^2 x$ , mis on suunatud pöörlemisteljest

eemale; 3) vertikaalsihiline inertsijõud, mis on suunatud vastupidiselt kiirendusele  $\frac{d^2u}{dt^2}$  ja omab mooduli  $\rho dx \left| \frac{d^2u}{dt^2} \right|$ . Kõik need jõud peavad olema omavahel tasakaalus. Tasakaalutingimuste saamiseks projekteerime mõjuvad jõud  $x$ - ja  $u$ -telgedele ning võrrutame saadud projekt-

sioonide summad nulliga. Seda tehes saame

$$T(x + dx, t) \cos \beta - T(x, t) \cos \alpha + \rho dx \omega^2 x = 0 ;$$

$$T(x + dx, t) \sin \beta - T(x, t) \sin \alpha - \rho dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0.$$

Et me vaatame ainult keele väikesi võnkumisi, võime võtta  $\cos \alpha \approx \cos \beta \approx 1$ ,  $\sin \alpha \approx \tan \alpha = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_x$ ,  $\sin \beta \approx \tan \beta = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x+dx}$ . Seega

$$T(x+dx, t) \cos \beta - T(x, t) \cos \alpha \approx T(x+dx, t) - T(x, t) = \frac{\partial T}{\partial x} dx;$$

$$T(x+dx, t) \sin \beta - T(x, t) \sin \alpha = \left( T \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x+dx} - \left( T \frac{\partial u}{\partial x} \right)_x = \frac{\partial}{\partial x} \left( T \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx$$

ja tasakaaluvõrrandid saavad kuju

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x} &= -\rho \omega^2 x ; \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( T \frac{\partial u}{\partial x} \right) &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} . \end{aligned} \quad (3.14)$$

Esimene integreerimine annab

$$T = C(t) - \frac{1}{2} \rho \omega^2 x^2.$$

Integreerimiskonstandi määramiseks kasutame asjaolu, et keele ots  $x = l$  on mistahes ajamomendil vaba, s.t. et  $T(l, t) = 0$ . See nõue annab  $C(t) = 1/2 \rho \omega^2 l^2$  ja järelikult

$$T = \frac{1}{2} \rho \omega^2 (l^2 - x^2) .$$

Nüüd pöördume süsteemi (3.14) teise võrrandi juurde. Asetades sinna leitud  $T$  avaldise, saame

$$\frac{\omega^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[ (l^2 - x^2) \frac{\partial u}{\partial x} \right] = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} . \quad (3.15)$$

See ongi diferentsiaalvõrrand, mis määrab pöörleva keele väikesed võnkumised. Selle võrrandi juurde kuulub rajatingimus

$$u(0,t) = 0 \quad (3.16)$$

ja algtingimused

$$u(x,0) = f(x) ; \quad \dot{u}(x,0) = 0 . \quad (3.17)$$

Võrrandi (3.15) lahendamiseks meile juba tuttavat Fourier meetodil. Selleks otsime lahendit kujul

$$u(x,t) = T(t) X(x) .$$

Asetades selle tulemuse valemisse (3.15), saame pärast muutujate eraldamist

$$\frac{2 T''(t)}{T(t)} = \frac{\frac{d}{dx} [(1^2 - x^2) X'(x)]}{X(x)} . \quad (3.19)$$

Et võrrandi ühel poolel seisab  $t$  funktsioon, teisel poolel aga  $x$ -i funktsioon, siis peavad mõlemad pooled võrduma konstandiga; selle konstandi väärtuse tähistame ( $-\lambda$ ) ga. Võrrand (3.19) laguneb seega kaheks:

$$T''(t) + \frac{\omega^2}{2} \lambda T(t) = 0 ; \quad (3.20)$$

$$\frac{d}{dx} [(1^2 - x) X'(x)] + \lambda X(x) = 0 .$$

Teises võrrandis teostame muutujate vahetuse  $x = l \xi$ . See võimaldab viia võrrandi kujule

$$\frac{d}{d\xi} [(1 - \xi^2) \frac{dX}{d\xi}] + \lambda X = 0$$

ehk

$$(1 - \xi^2) \frac{d^2 X}{d\xi^2} - 2\xi \frac{dX}{d\xi} + \lambda X = 0. \quad (3.21)$$

See on aga Legendre'i diferentsiaalvõrrand, millel on nullist erinevaid lahendeid vaid juhul, kui  $\lambda = n(n+1)$ . Võrrandi (3.21) lahendid saame seega kujul

$$X(x) = P_n(\xi) = P_n\left(\frac{x}{l}\right). \quad (3.22)$$

Rajatingimuse (3.16) kohaselt on  $X(0) = 0$  ja seega  $P_n(0) = 0$ ; Legendre'i polünoomide avaldistest ja valemist (3.7) aga nähtub, et seda tingimust saab täita ainult, kui  $n$  on paaritu. Seega edaspidi  $n$  all mõistame paaritut täisarvu  $n = 1, 3, 5, \dots$ . Süsteemi (3.20) esimese võrrandi üldlahendiks, mis vastab parameetrile  $\lambda_n = n(n+1)$ , on

$$T_n(t) = A_n \cos \sqrt{\frac{n(n+1)}{2}} \omega t + B_n \sin \sqrt{\frac{n(n+1)}{2}} \omega t.$$

Rakendame nüüd algtingimust  $\dot{u}(x,0) = 0$ , mida (3.18) põhjal võib viia kujule  $\dot{T}_n(0) = 0$ . Diferentseerides  $T_n(t)$  avaldist, saame

$$\dot{T}_n(t) = \sqrt{\frac{n(n+1)}{2}} \omega \left[ -A_n \sin \sqrt{\frac{n(n+1)}{2}} \omega t + B_n \cos \sqrt{\frac{n(n+1)}{2}} \omega t \right].$$

Võttes  $t = 0$ , näeme, et algtingimus  $\dot{T}(0)$  on rahuldatud ainult siis, kui  $B_n = 0$ .

Indeksile  $n$  vastav võrrandi (3.15) lahend on seega

$$u_n(x,t) = A_n P_n\left(\frac{x}{l}\right) \cos \sqrt{\frac{n(n+1)}{2}} \omega t, \quad (n = 1, 3, 5, \dots).$$

Et saaksime rahuldada ka teist algtingimust  $u(x,0) =$

=  $f(x)$ , superponeerime kõik leitud lahendid:

$$u(x,t) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} A_n P_n\left(\frac{x}{l}\right) \cos \sqrt{\frac{n(n+1)}{2}} \omega t. \quad (3.23)$$

Võttes  $t = 0$ , saame

$$u(x,0) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} A_n P_n\left(\frac{x}{l}\right) = f(x). \quad (3.24)$$

Korrutame selle võrrandi mõlemad pooli  $P_m(x/l)$ -ga ja integreerime vahemikus  $-1 \leq x/l \leq +1$ . Legendre'i polünoomide ortogonaalsuse tõttu saame

$$A_m \left\| P_m\left(\frac{x}{l}\right) \right\|^2 = \int_{-1}^{+1} f(x) P_m\left(\frac{x}{l}\right) dx$$

ehk, arvestades valemit (3.13),

$$A_m = \frac{2m+1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x) P_m\left(\frac{x}{l}\right) dx. \quad (3.25)$$

Siinkohal vajab selgitust järgmine asjaolu. Valemites (3.25) tuleb integraal võtta vahemikus  $(-1,+1)$ , funktsioon  $f(x)$  on aga defineeritud ainult poolel lõigul  $[0,1]$ . Me peame seega funktsiooni  $f(x)$  sobitama ka ülejäänud lõigu poolde  $[-1,0]$ . Märgime esmalt, et kõik paarituarvulise indeksiga Legendre'i polünoomid on  $x$  suhtes paaritud funktsioonid (et see on tõepoolest nii, nähtub valemist (3.7)). Valemi (3.24) kohaselt peab ka selle valemi paremal poolel seisma paaritu funktsioon - järelikult peame funktsiooni  $f(x)$  jätkama lõigul  $[-1,0]$  nii, et saaksime paaritu funktsiooni

siooni. Et nii  $f(x)$  kui ka  $P_m(x/l)$  on paaritud funktsioonid, siis nende korrutis annab paarisfunktsiooni ja valem (3.25) saab kuju

$$A_m = (2m+1) \int_0^{+l} f(x) P_m\left(\frac{x}{l}\right) dx. \quad (3.26)$$

Nüüd pole enam mingit raskust reaksarenduse kordajate  $A_m$  arvutamiseks.

Pöördume tagasi valemi (3.23) juurde. Et koosinus on perioodiline funktsioon, siis ka  $u(x,t)$  on  $t$  suhtes perioodiline funktsioon. Sisuliselt tähendab see seda, et keel hakkab võnkuma relatiivse tasakaaluasendi  $u = 0$  ümber.

Ülesanne 5. Keele algkuju määrab funktsioon  $f(x) = ax^2$ . Arvutada reaksarenduse (3.23) 3 esimest liiget.

### 3. Legendre'i polünoomide kaaspolünoomid.

Püüame leida mittetriviaalseid lahendeid võrrandile

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{dy}{dx} \right] - \frac{m^2}{1-x^2} y + \lambda y = 0, \quad (3.27)$$

kus  $m$  on positiivne täisarv.

Teeme kõigepealt muutujate vahetuse

$$y = (1-x^2)^{m/2} u(x). \quad (3.28)$$

Arvutades välja tuletised ja asetades need võrrandisse (3.27), saame

$$(1-x^2) \frac{d^2 u}{dx^2} - 2(m+1)x \frac{du}{dx} + [\lambda - m(m+1)] u = 0. \quad (3.29)$$

Nagu teame eelnevast, peab Legendre'i polünoom  $P_n(x)$  rahuldama Legendre'i diferentsiaalvõrrandit

$$(1 - x^2) \frac{d^2 P_n}{dx^2} - 2x \frac{dP_n}{dx} + n(n+1)P_n = 0. \quad (3.30)$$

Diferentseerime seda võrrandit:

$$(1 - x^2) \frac{d^3 P_n}{dx^3} - 2 \cdot 2x \frac{d^2 P_n}{dx^2} + [n(n+1) - 2] \frac{dP_n}{dx} = 0.$$

Veelkordne diferentseerimine annab

$$(1-x^2) \frac{d^4 P_n}{dx^4} - 2(2+1)x \frac{d^3 P_n}{dx^3} + [n(n+1) - 2 \cdot 3] \frac{d^2 P_n}{dx^2} = 0.$$

Jätkates diferentseerimist, pole raske näha, et avaldise (3.30)  $m$ -kordsel diferentseerimisel saaksime (eeldame, et  $m \leq n$ )

$$(1-x^2) \frac{d^{(m+2)} P_n}{dx^{m+2}} - 2(m+1)x \frac{d^{(m+1)} P_n}{dx^{m+1}} + [n(n+1) - m(m+1)] \frac{d^m P_n}{dx^m} = 0. \quad (3.31)$$

Valemite (3.29) ja (3.31) võrdlus näitab, et mõlemad tulemused ühtuvad, kui võtta  $\lambda = n(n+1)$ ,  $u = d^m P_n / dx^m$ . Arvestades valemit (3.28), saame kirjutada võrrandi (3.27) lahendi kujul

$$y = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m P_n}{dx^m}.$$

Selle eeskirja kohaselt moodustatud avaldise nimetamegi Legendre'i polünoomide kaaspölmoomideks. Edaspidi tähistame neid sümbooliga  $P_n^{(m)}$ , seega

$$P_n^{(m)} = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m P_n}{dx^m} \quad (m \leq n). \quad (3.32)$$

Võrrand (3.27) on Sturm-Liouville'i võrrandi (2.1) erijuhuks, kus  $p(x) = 1 - x^2$ ,  $q(x) = \frac{n^2}{1-x^2}$ ,  $r(x) \equiv 1$ . Sturm-Liouville'i võrrandi omaduste põhjal omafunktsioonid (3.32) on ortogonaalsed kaaluga 1. Omaväärtuseks on  $\lambda_n = n(n+1)$ . Et  $p(\pm 1) = 0$ , siis ortogonaalsuse vahemikuks võime võtta  $[-1, +1]$ .

Valem (3.32) võimaldab Legendre'i polünoomide kaudu arvutada mistahes kaaspöünoome. Nii näiteks

$$P_1^{(1)} = (1-x^2)^{1/2} \frac{dP_1}{dx} = (1-x^2)^{1/2} \frac{dx}{dx} = \sqrt{1-x^2};$$

$$P_2^{(1)} = (1-x^2)^{1/2} \frac{dP_2}{dx} = (1-x^2)^{1/2} \frac{d(3x^2-1)}{dx} = 3x \sqrt{1-x^2};$$

$$P_2^{(2)} = (1-x^2) \frac{d^2 P_2}{dx^2} = (1-x^2) \frac{d^2 (3x^2-1)}{dx^2} = 3(1-x^2).$$

Kirjutame välja veel valemi kaaspöünoomide normi ruudu arvutamiseks:

$$\|P_n^{(m)}\|^2 = \frac{2}{2n+1} \cdot \frac{(n+m)!}{(n-m)!}. \quad (3.33)$$

Seda valemit me ei tõesta. Tema kehtivust võib aga otsestelt kontrollida, kui vastava kaaspöünoomi  $P_n^{(m)}$  kuju on teada.

Ülesanne 6. Arvutada kaaspöünoomid  $P_3^{(1)}$ ,  $P_3^{(2)}$ ,  $P_3^{(3)}$ .

Ülesanne 7. Lähtudes eespool leitud kaaspöünoomide  $P_1^{(1)}$ ,  $P_2^{(1)}$ ,  $P_2^{(2)}$  avaldistest, arvutada nende polünoomide normid ja kontrollida valemi (3.33) kehtivust.

#### 4. Hermite'i funktsioonid.

Olgu meil antud tekitaja funktsioon

$$\psi(\rho, x) = e^{2x\rho - \rho^2}.$$

Nii nagu Legendre'i polünoomide korral, arendame ka selle Maclaurin'i ritta  $\rho$  astmete järgi. Et

$$\frac{\partial \psi}{\partial \rho} = (2x - 2\rho)e^{2x\rho - \rho^2}, \quad \left(\frac{\partial \psi}{\partial \rho}\right)_{\rho=0} = 2x;$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho^2} = -2e^{2x\rho - \rho^2} + 4(x - \rho)^2 e^{2x\rho - \rho^2}, \quad \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho^2}\right)_{\rho=0} = 4x^2 - 2,$$

siis

$$\psi(\rho, x) = 1 + 2x \frac{\rho}{1!} + (4x^2 - 2) \frac{\rho^2}{2!} + \dots \quad (3.35)$$

Hermite'i [ermiti] polünoomid defineerime valemiga

$$\psi(\rho, x) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{\rho^n}{n!}. \quad (3.36)$$

Valemite (3.35) ja (3.36) võrdlus annabki meile esimesed kolm Hermite'i polünoomi:

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x, \quad H_2(x) = 4x^2 - 2. \quad (3.37)$$

Järgnevate polünoomide arvutamine sel viisil osutub üsna tülikaks; seetõttu tuletame jällegi vastava seose, mis võimaldab leida kõrgema indeksiga polünoome madalama indeksiga polünoomide kaudu.

Kirjutame valemi (3.34) ümber kujul

$$\ln \psi = 2x\varrho - \varrho^2 .$$

Võttes siit osatuletised  $\varrho$  ja  $x$  järgi, saame

$$\frac{1}{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial \varrho} = 2(x - \varrho) \quad ; \quad \frac{1}{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial x} = 2\varrho ,$$

millest järelduvad võrrandid

$$\frac{\partial \psi}{\partial \varrho} = 2(x - \varrho) \psi \quad ; \quad (3.38)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 2\varrho \psi . \quad (3.39)$$

Valemi (3.36) põhjal

$$\frac{\partial \psi}{\partial \varrho} = \sum_{n=1}^{\infty} H_n(x) \frac{\varrho^{n-1}}{(n-1)!} .$$

Asetades selle tulemuse ja  $\psi$  avaldise (3.36) võrrandisse (3.38), saame samasuse

$$\sum_{n=1}^{\infty} H_n \frac{\varrho^{n-1}}{(n-1)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \left[ 2H_n \frac{\varrho^{n+1}}{n!} - 2xH_n \frac{\varrho^n}{n!} \right] \equiv 0 .$$

Korraldades liikmeid  $\varrho$  astmete järgi, näeme, et

$$H_1 - 2xH_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{n!} H_{n+1} - \frac{2x}{n!} H_n + \frac{2}{(n-1)!} H_{n-1} \right] \varrho^n \equiv 0 .$$

Et see tingimus peab olema täidetud iga  $\varrho$  korral, siis võrrutades nulliga liikme  $\varrho^n$  kordaja, saame lisaks varem esinenud seosele  $H_1 = 2xH_0 = 2x$  tingimuse

$$H_{n+1} = 2x H_n - 2n H_{n-1} . \quad (3.40)$$

See seos võimaldabki arvutada mistahes järguga Hermite'i polünoome.

Nii näiteks

$$H_3(x) = 2xH_2 - 2 \cdot 2H_1 = 2x(4x^2 - 2) - 4 \cdot 2x = 8x^3 - 12x.$$

Koostame nüüd diferentsiaalvõrrandi, mille lahenditeks on Hermite'i polünoomid. Selleks lähtume võrrandist (3.39). Võttes arvesse valemi (3.36) ning sellest tuleneva seose

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n'(x) \frac{\rho^n}{n!},$$

saame võrrandist (3.39) samasuse

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( H_n' \frac{\rho^n}{n!} - 2H_n \frac{\rho^{n+1}}{n!} \right) \equiv 0$$

ehk

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{H_n'}{n!} - 2 \frac{H_{n-1}}{(n-1)!} \right) \rho^n \equiv 0.$$

Võrrutades nulliga liikme  $\rho^n$  korda, saame

$$H_n' = 2n H_{n-1}. \quad (3.41)$$

Meie kasutada on seosed (3.40) ja (3.41); püüame neid teisendada niiviisi, et valemis (3.41) esineks ainult liige  $H_n$  ja selle tuletised. Selleks kaotame kõigepealt samasusest (3.40) valemi (3.41) abil ära liikme  $2n H_{n-1}$ ; seda tehes saame

$$H_{n+1} - 2x H_n + H_n' = 0.$$

Diferentseerime saadud tulemust:

$$H'_{n+1} - 2x H'_n - 2H_n + H''_n = 0. \quad (3.42)$$

Valemis (3.41) suurendame indeksit  $n$  ühe võrra, see-  
ga

$$H'_{n+1} = 2(n+1) H_n.$$

Asetades selle valemisse (3.42), jõuame võrrandini

$$H''_n - 2x H'_n + 2n H_n = 0.$$

Järelikult Hermite'i polünoomid on lahenditeks dife-  
rentsiaalvõrrandile

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0. \quad (3.43)$$

Lihtne võrdlus valemiga (2.1) näitab, et see võrrand  
ei ole Sturm-Liouville'i võrrand ja meie poolt §-s 2 teh-  
tud järeldused ei pruugi olla õiged. Seepärast püüame tei-  
sendada võrrandit (3.41) nii, et saaksime Sturm-Liouville'i  
võrrandi. See on võimalik järgneva muutujate vahetuse abil:

$$y = z e^{x^2/2}. \quad (3.44)$$

Et

$$y' = (z' + xz) e^{x^2/2},$$

$$y'' = (z'' + z + 2xz' + x^2z) e^{x^2/2},$$

siis võrrand (3.43) saab pärast lihtsustust kuju

$$z'' + (2n + 1 - x^2)z = 0. \quad (3.45)$$

See on Sturm-Liouville'i võrrand, milles  $p(x) = r(x) \equiv$   
 $\equiv 1$ ,  $\lambda = 2n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ),  $q(x) = x^2 - 1$ .

Võrrandid (3.45) nimetatakse Hermite'i diferentsiaalvõrrandiks. Et  $y = H_n$  oli võrrandi (3.43) omafunktsiooniks, siis Hermite'i võrrandi omafunktsioonideks on

$$Z_n(x) = e^{-x^2/2} H_n(x). \quad (3.46)$$

Neid funktsioone nimetatakse Hermite'i funktsioonideks.

Kuna  $p(x)$  nullkohti ei oma, siis ortogonaalsuse vahemikuks võime võtta  $(-\infty, +\infty)$ ; sellele vastab kolmas variant rajatingimusi (§ 2, p. 1). Paragrahvis 2 toodud mõttekäigud kehtisid vaid kahe esimese rajatingimuse variandi korral. Lähem vaatlus näitab aga, et tõestustes ei muutu midagi, kui me suudame näidata, et valemi (2.2) parem pool on null ja et valemis (2.8) on nullid väljaintegreeritud osad. Teiste sõnadega: peame näitama, et

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( Z_k \frac{dZ_l}{dx} \right) = 0. \quad (3.47)$$

Valemi (3.46) põhjal saame

$$Z_k \frac{dZ_l}{dx} = \frac{H_k(H'_l - xH_l)}{e^{+x^2}}.$$

Selle avaldise lugejas on mingi poiünoom, nimetajas aga eksponentfunktsioon. Avaldise piirväärtus, kui  $x \rightarrow \pm\infty$ , on null, sest eksponentfunktsioon kasvab kiiremini kui mistahes astmefunktsioon (selles võib veenduda näiteks l'Hopitali reegli abil). Järelikult on õige valem (3.47) ning see- ga tõestatud nii omafunktsioonide ühesus kui ka ortogonaalsus. Viimase nõude saame kirjutada

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Z_k(x) Z_l(x) dx = 0, \text{ kui } k \neq l$$

ehk (3.46) põhjal

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_k(x) H_l(x) dx = 0, \text{ kui } k \neq l. \quad (3.48)$$

Valemist (3.48) nähtub, et Hermite'i polünoomid on ortogonaalsed kaaluga  $e^{-x^2}$ .

Anneme lõpuks veel valemi Hermite'i funktsioonidenormi rundu määramiseks:

$$\|Z_n\|^2 = 2^n n! \sqrt{\pi}. \quad (3.49)$$

Ülesanne 8. Valemist (3.40) kasutades arvutada Hermite'i polünoomid  $H_3(x)$  ja  $H_4(x)$ !

Ülesanne 9. Arvutada Hermite'i funktsioonide  $Z_0(x)$ ,  $Z_1(x)$ ,  $Z_2(x)$  normid ning kontrollida valemi (3.49) kehtivust!

### 5. Laguerre'i funktsioonid.

Tekitajaks funktsiooniks valime nüüd

$$\psi(\rho, x) = \frac{1}{1-\rho} e^{-\frac{x\rho}{1-\rho}}. \quad (3.50)$$

Kuna edaspidised mõttekäigud on väga sarnased sellega, mida nägime juba Legendre'i ja Hermite'i polünoomide puhul, siis käesolevas punktis ei lasku me detailidesse, vaid piirdume üksnes põhiliste tulemuste väljakirjutamisega.

Laguerre'i [lagerrri] polünoomid defineeritakse valemiga

$$\psi(\rho, x) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) \rho^n. \quad (3.51)$$

Esimised polünoomid on

$$L_0 = 1, \quad L_1 = 1 - x, \quad L_2 = 2 - 4x + x^2, \quad L_3 = 6 - 18x + 9x^2 - x^3$$

Polünoome, mille indeks  $n \geq 1$ , võib arvutada valemist

$$L_{n+1} = (2n + 1 - x)L_n - n^2 L_{n-1} = 0. \quad (3.52)$$

Laguerre'i polünoomid rahuldavad diferentsiaalvõrrandit

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0. \quad (3.53)$$

Et see pole Sturm-Liouville'i võrrand, siis teeme muutujate vahetuse

$$y = z e^{x/2}$$

ning saame uue võrrandi

$$\frac{d}{dx} \left( x \frac{dz}{dx} \right) + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{x}{2} \right) z + nz = 0. \quad (3.54)$$

See on Sturm-Liouville'i võrrand, kus  $p(x) = x$ ,  $q(x) = 1/2(\frac{x}{2} - 1)$ ,  $r(x) \equiv 1$ ,  $\lambda = n$ . Kuna  $p(0) = 0$ , siis ortogonaliseerimisvahemikuks valime poollõigu  $[0, \infty)$ . Et §-s 2 toodud teoreemid kehtiksid, peame näitama, et

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( x z_x \frac{dz_1}{dx} \right) = 0;$$

selle tõestamine aga toimub samal viisil nagu eelmises punktis.

Võrrand (3.54) kannab Laguerre'i võrrandi nimetust,

tema omaväärtusteks on arvud  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ , omafunktsioonideks aga Laguerre'i funktsioonid

$$Z_n(x) = e^{-x/2} L_n(x). \quad (3.55)$$

Ortogonaalsuse tingimus saab nüüd kuju

$$\int_0^{\infty} e^{-x} L_k(x) L_l(x) dx = 0, \text{ kui } k \neq l. \quad (3.56)$$

Normi saab leida valemist

$$\|Z_n\| = n! \quad (3.57)$$

Tuumafüüsikas kasutatakse mitmesuguseid Laguerre'i funktsioonide üldistusi. Mendeni jõudmiseks defineerime uued funktsioonid

$$L_n^s(x) = \frac{1}{n!} x^{-s} e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^{n+s} e^{-x}). \quad (3.58)$$

Otsene arvutuskäik näitab, et ka funktsioonid  $L_n^s$  on  $n$ -astme polünoomid. Neid nimetame Laguerre'i kaaspolünoomideks. Nende polünoomide leidmine toimub valemi (3.58) põhjal; nii näit. on  $L_0^s(x) = 1$ ,  $L_1^s(x) = 1 + s - x$ . Kui  $s = 0$ , siis kaaspolünoomid  $L_n^s$  ühtuvad tavaliste Laguerre'i polünoomidega, s.t. et  $L_n^0(x) = L_n(x)$ .

Võib näidata, et Laguerre'i kaaspolünoomid rahuldavad võrrandit

$$x(L_n^s)'' + (s + 1 - x)(L_n^s)' + nL_n^s = 0. \quad (3.59)$$

Vaatleme nüüd diferentsiaalvõrrandit

$$xy'' + (s + 1 - x)y' + \left(\lambda - \frac{s+1}{2}\right)y = 0. \quad (3.60)$$

Valemite (3.59) - (3.60) võrdlemine näitab, et dife-

rentsiaalvõrrandi (3.60) omafunktsioonideks on Laguerre'i kaaspolünoomid  $L_n^s$ ; omaväärtused määratakse tingimusest

$$\lambda = n + \frac{s+1}{2}, \quad (3.61)$$

kus  $n$  ja  $s$  on naturaalarvud ning  $n \geq s$ .

Et võrrand (3.60) pole Sturm-Liouville'i võrrand, siis teeme muutujate vahetuse

$$y = x^{-s/2} e^{x/2} z. \quad (3.62)$$

Viies läbi kõik vajalikud arvutused, saame võrrandi

$$\frac{d}{dx} \left( x \frac{dz}{dx} \right) + \left( \lambda - \frac{x}{4} - \frac{s^2}{4x} \right) z = 0. \quad (3.63)$$

See on Sturm-Liouville'i võrrand (2.1), kus  $p(x) = x$ ,  $r(x) \equiv 1$ ,  $q(x) = x/4 + s^2/4x$ . Eespoolõeldu põhjal see võrrand annab lõplikke lahendeid üksnes valemist (3.61) leitud parameetri väärtustel. Omafunktsioonideks on nn. Laguerre'i kaasfunktsioonid

$$Z_n^s(x) = x^{s/2} e^{-x/2} L_n^s(x). \quad (3.64)$$

Ortogonaalsusevahemikuks valime poollõigu  $[0, \infty)$ , sest selle sisse ei lange ükski funktsiooni  $p(x)$  nullkoht. Et  $r(x) \equiv 1$ , siis omafunktsioonid on ortogonaalsed kaaluga 1, s.t., et

$$\int_0^{\infty} Z_n^s(x) Z_k^s(x) dx = 0, \quad \text{kui } n \neq k. \quad (3.65)$$

Valemi (3.64) põhjal võib selle tingimuse kirjutada ka kujul

$$\int_0^{\infty} x^s e^{-x} L_n^s(x) L_k^s(x) dx = 0, \quad \text{kui } n \neq k. \quad (3.66)$$

Ülesanne 10. Leida Laguerre'i polünoomid  $L_3(x)$ ,  $L_4(x)$  ning neile vastavad Laguerre'i funktsioonid. Leida  $\|Z_3(x)\|$ ,  $\|Z_4(x)\|$  ja kontrollida valemi (3.57) kehtivust!

Ülesanne 11. Kontrollida, kas funktsioonide  $L_2(x)$ ,  $L_3(x)$ ,  $L_4(x)$  ortogonaalsuse nõue (3.56) on täidetud!

Ülesanne 12. Leida Laguerre'i kaapolünoomid  $L_2^S(x)$  ja  $L_3^S(x)$ !

## 6. Schrödingeri võrrand.

Esipool leitud funktsioone rakendatakse mitmetes kvantmehaanika ja kvantkeemia probleemides. Allpool (p. 7 - 8) vaatame kahte näidet, kus kvantmehaanika ülesannete lahendamiseks osutuvad vajalikeks Legendre'i polünoomid. Enne seda tuleb meil aga põgusalt tutvuda kvantmehaanika alustega.

Vaatame elektroni, mis tiirleb aatomituuma ümber. Lihtsuse mõttes loeme elektroni orbiidi statsionaarseks, s. t. orbiidi kuju ärgu muutugu liikumise käigus. Koordinaatide alguse paigutame aatomituuma, elektroni asukoht olgu määratud koordinaatidega  $(x, y, z)$ . Elektroni koguenergia tähistame sümboliga  $E$ , potentsiaalne energia olgu  $U$ . Schrödinger näitas 1926. a., et elektroni liikumine on kirjeldatav võrrandiga

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{8\pi^2 m_e}{h^2} (E - U) \psi = 0, \quad (3.67)$$

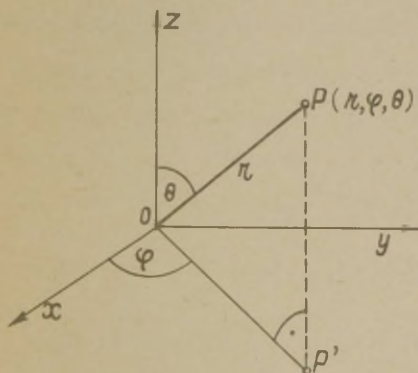
kus  $m_e$  on elektroni mass,  $h$  - Plancki konstant, funktsioo-

ni  $\psi(x, y, z)$  nimetatakse lainefunktsiooniks. Võib näidata, et elektroni mingisse ruumielementi  $dV$  sattumise tõenäosus on  $|\psi|^2 dV$ . Integreerime seda avaldist üle kogu ruumi  $V$ . Et elektron mistahes hetkel kindlasti asub ruumis  $V$  ja et kindlasti toimuva sündmuse tõenäosus on 1, siis

$$\iiint_V |\psi|^2 dV = 1. \quad (3.68)$$

Elektroni liikumise uurimiseks tuleb integreerida Schrödingeri võrrand (3.67). Arvestades funktsiooni  $\psi$  tõenäosuslikku interpretatsiooni, ei saa see funktsioon üheski ruumi punktis muutuda lõpmatuks; samuti ei saa ta olla ka mitmene või katkev. Teiste sõnadega - me otsime võrrandile (3.67) ühest, pidevat ja lõplikku lahendit (niisugust lahendit nimetatakse regulaarseks).

Paljude probleemide puhul osutub otstarbekaks viia Schrödingeri võrrand üle sfäärilistesse koordinaatidesse  $(r, \theta, \varphi)$ , mille tähendus selgub jooniselt 4.



Joonis 4.

Võrrandi (3.67) esimesed kolm liiget moodustavad Laplace'i operaatori, mis sfäärilistes koordinaatides omab kuju

$$\begin{aligned} \Delta\psi &= \frac{\partial^2\psi}{x^2} + \frac{\partial^2\psi}{y^2} + \frac{\partial^2\psi}{z^2} = \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial\psi}{\partial r} \right) + \end{aligned}$$

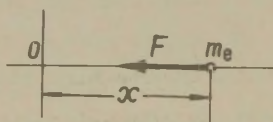
$$+ \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} .$$

Seega Schrödingeri võrrand sfäärilistes koordinaatides on

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{8 \pi^2 m_e}{h^2} (E - U) \psi = 0. \quad (3.69)$$

### 7. Kvantmehhaaniline ostsillaator.

Vaatame osakest massiga  $m_e$ , mis võib liikuda pikil  $x$ -telge (joon. 5). Osakesele mõjugu jõud, mis on suunatud



Joonis 5.

koordinaatide algusse 0 ja mis on võrdeline osakese kaugusega sellest punktist. Sellise jõu projektsioon  $x$ -teljele on  $F_x = -\mathcal{X}x$  ( $\mathcal{X}$  - võrdetegur). New-

toni II seaduse kohaselt määrab osakese liikumise diferentsiaalvõrrand

$$m_e \ddot{x} = -\mathcal{X}x$$

ehk

$$\ddot{x} + k^2 x = 0, \quad \text{kus } k^2 = \frac{\mathcal{X}}{m_e} .$$

Selle võrrandi lahendiks on

$$x = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt . \quad (3.70)$$

Integreerimiskonstandid  $C_1$  ja  $C_2$  määratakse algtingimustest  $x(0) = x_0$  ja  $\dot{x}(0) = v_0$ . Et lahendis (3.70)

esinevad perioodilised funktsioonid  $\sin kt$ ,  $\cos kt$ , siis ilmselt on tegemist võnkliikumisega. Masspunkti, mis võngub leitud seaduse kohaselt, nimetatakse füüsikas harmooniliseks ostsillaatoriks. Leiame veel võnkruva masspunkti energia. Kineetiline energia on  $T = \frac{1}{2} m_e v^2$ , potentsiaalne energia  $U = \frac{1}{2} \mathcal{K} x^2$ , seega kogu mehhaaniline energia

$$E = \frac{1}{2} m_e v^2 + \frac{1}{2} \mathcal{K} x^2. \quad (3.71)$$

Klassikalise mehhaanika seaduste kohaselt  $E = \text{const}$ ; konstandi väärtuse määramise algtingimustest  $v(0) = v_0$ ,  $x(0) = x_0$ , seega

$$E = \frac{1}{2} m_e v_0^2 + \frac{1}{2} \mathcal{K} x_0^2. \quad (3.72)$$

Kuna me võime algandmeid  $v_0$ ,  $x_0$  muuta suvaliselt, siis klassikalises mehhaanikas - nagu nähtub valemist (3.72) - ostsillaatori energia võib omandada mistahes väärtusi.

Vaatame nüüd, milline on selle probleemi lahendus kvantmehhaanikas. Selleks tuleb meil lahendada Schrödingeri võrrand (3.67). Võttes arvesse, et liikumine toimub ainult piki  $x$ -telge ja et potentsiaalne energia on  $U = \frac{1}{2} \mathcal{K} x^2$ , saame

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{8 \pi^2 m_e}{h^2} (E - \frac{1}{2} \mathcal{K} x^2) \psi = 0. \quad (3.73)$$

Saadud võrrand on lähedane Hermite'i diferentsiaalvõrrandile (3.45). Et saada täit kooskõla selle võrrandiga, teeme muutujate vahetuse  $x = A \xi$ , kusjuures  $A$  on esialgu määramata konstant.

Et

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{1}{A^2} \frac{d^2\psi}{d\xi^2},$$

siis (3.73) asemele saame

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} + \left( \frac{8\pi^2 m_e}{h^2} A^2 E - \frac{4\pi^2 m_e \mathcal{X}}{h^2} - A^4 \xi^2 \right) \psi = 0.$$

Et saada liikme  $\xi^2 \psi$  kordajaks miinus ühte, võtame

$$A^4 = \frac{h^2}{4\pi^2 m_e \mathcal{X}}$$

ja saame seega Hermite'i võrrandi

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} + \left( \frac{4\pi}{h} \sqrt{\frac{m_e}{\mathcal{X}}} E - \xi^2 \right) \psi = 0. \quad (3.74)$$

Võrdlus valemiga (3.45) näitab, et võrrandil (3.74) on regulaarseid lahendeid üksnes väärtustel

$$\frac{4\pi}{h} \sqrt{\frac{m_e}{\mathcal{X}}} E = 2n + 1, \text{ kus } n = 0, 1, 2, \dots$$

Seega ostsillaatori võnkumised on võimalikud ainult teatud koguenergia väärtustel  $E_n$ , mis määratakse valemiga

$$E_n = \frac{(2n + 1)h}{4\pi} \sqrt{\frac{\mathcal{X}}{m_e}}. \quad (3.75)$$

Niisugusel korral öeldakse, et ostsillaatori energia on kvantiseeritud. Suurus  $n$  kannab kvantarvu nimetust.

Nagu näeme, on oluline vahe klassikalise ja kvantmehaanilise käsitluse vahel: esimesel juhul oli võnkumine võimalik igasuguse energiaga, teisel juhul vaid kindlate ener-

gianivoode korral.

Edasine võrrandi (3.74) integreerimine ei valmista enam olulisi raskusi. Valemi (3.46) kohaselt on omafunktsioonid

$$\psi_n(\xi) = B e^{-\frac{\xi^2}{2}} H_n(\xi)$$

ehk, minnes uuesti tagasi muutujale  $x$ ,

$$\psi_n\left(\frac{x}{A}\right) = B \exp\left(-\frac{\pi}{h} \sqrt{\alpha m_e} x^2\right) H_n\left(\sqrt{\frac{2\pi \sqrt{\alpha m_e}}{h}} x\right).$$

Konstant  $B$  määratakse nõudest (3.68), mille antud juhul saab kirjutada kujul

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_n(x)|^2 dx = 1.$$

Arvestades valemit (3.49) Hermite'i funktsioonide mooduli kohta, saame

$$B = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}}.$$

Seega energianivoole kvantarvuga  $n$  vastav Schrödingeri võrrandi lahend on

$$\psi_n\left(\frac{x}{A}\right) = \frac{\exp\left(-\frac{\pi}{h} \sqrt{\alpha m_e} x^2\right)}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} H_n\left(\sqrt{\frac{2\pi \sqrt{\alpha m_e}}{2}} x\right). \quad (3.76)$$

Aatomifüüsikas pakub põhilist huvi energianivoode (3.75) määramine, sest üleminek ühelt energianivoolt teisele kajastub spektrijoonena, mille lainepikkust saame mõõta. \*

\*) Üleminekul energianivoolt  $E_{n_1}$  nivoole  $E_n$ , kusjuures  $n > n_1$ , kiiratakse kvant, mille sagedus on

$$\nu_{nn_1} = R \left( \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n^2} \right).$$

Sümboliga  $R$  on tähistatud Rydbergi konstant.

### 8. Schrödingeri võrrandi omaväärtused vesinikusarna- se aatomi jaoks.

Vaatame üheelektronilist aatomit tuumalaenguga  $Ne$  (selliseks aatomiks võib olla vesiniku aatom, ioniseeritud heeliumi aatom jne.). Elektroni potentsiaalne energia on

$$U = - \frac{N e^2}{r}, \quad (3.77)$$

kus  $r$  on elektroni kaugus tuumast.

Antud probleemi korral on otstarbekohane töötada sfäärilistes koordinaatides. Lähtume seega Schrödingeri võrrandi kujust (3.69), asetades sinna  $U$  valemist (3.77).

Kasutades muutujate eraldamise võtet, otsime Schrödingeri võrrandi lahendit kujus

$$\psi(r, \theta, \varphi) = R(r) Y(\theta, \varphi). \quad (3.78)$$

Asetades selle tulemuse võrrandisse (3.69), leiame, et

$$\begin{aligned} \frac{Y}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{R}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{R}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} + \\ + \frac{8\pi^2 m_e}{h^2} \left( E + \frac{Ne^2}{r} \right) RY = 0. \end{aligned}$$

Korrutame kõiki liikmeid  $r^2/RY$ -ga ja viime teise ning kolmanda liikme võrrandi paremale poolele:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{8\pi^2 m_e}{h^2} r(Er + Ne^2) = \\ = - \frac{1}{Y \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{Y \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2}. \end{aligned}$$

Võrrandi vasakul poolel seisab nüüd suuruse  $r$  funktsioon, paremal suuruste  $\theta$  ja  $\varphi$  funktsioonid. See on võimalik ainult siis, kui võrrandi mõlemad pooled on võrdsed konstandiga. Tähistame selle konstandi  $\lambda$ -ga; pärast mõningaid lihtsustusi saame võrrandid

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{8\pi^2 m_e}{h^2} r (Er + Ne^2) R = \lambda R ; \quad (3.79)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} + \lambda Y = 0 . \quad (3.80)$$

Et võrrandis (3.80) on kaks argumenti  $\theta$  ja  $\varphi$ , siis eraldame veelkordselt muutujad

$$Y(\theta, \varphi) = P(\theta) F(\varphi) . \quad (3.81)$$

Asetades selle tulemuse valemisse (3.80), saame

$$\frac{P}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) + \frac{P}{\sin^2 \theta} \frac{d^2 F}{d\varphi^2} + \lambda PF = 0 .$$

Korrutades kõiki liikmeid teguriga  $\sin^2 \theta / PF$ , näeme, et

$$\frac{\sin \theta}{P} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) + \lambda \sin^2 \theta = - \frac{1}{F} \cdot \frac{d^2 F}{d\varphi^2} .$$

Ühel võrrandi poolel seisab  $\theta$  funktsioon, teisel  $\varphi$  funktsioon; mõlemad pooled peavad seega võrduma mingi konstandiga  $\mu$ . Arvestades seda asjaolu, saame ülaltoodud võrrandi lahutada kaheks:

$$\frac{d^2 F}{d\varphi^2} + \mu F = 0 ; \quad (3.82)$$

$$\sin \theta \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) + (\lambda \sin^2 \theta - \mu) P = 0. \quad (3.83)$$

Nüüd on muutujate eraldamine täielikult teostatud ; integreerida tuleb võrrandid (3.79), (3.82) ja (3.83). Kõige lihtsam neist on võrrand (3.82), mille integraaliks on

$$P = C_1 \cos \sqrt{\mu} \varphi + C_2 \sin \sqrt{\mu} \varphi. \quad (3.84)$$

Funktsioon  $F(\varphi)$  peab ilmselt olema perioodiline. Tõepoolest, kui vaadelda kera pinnal  $R = \text{const}$  mingit paralleelringi  $\theta = \text{const}$  ja suurendada  $\varphi$ -d  $2\pi$  võrra, siis oleme jõudnud tagasi samasse punkti ja seega peab olema

$$F(\varphi + 2\pi) = F(\varphi).$$

Valemi (3.84) põhjal on see nõue täidetud, kui

$$\begin{aligned} \sqrt{\mu}(\varphi + 2\pi) - \sqrt{\mu}\varphi &= 2\pi m, \\ \text{kus } m &= \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned}$$

Sellest võrrandist nähtub, et

$$\mu = m^2. \quad (3.85)$$

Ainult niisuguse  $\mu$  valiku korral on võrrandil (3.84) füüsikaliselt mõistlikke lahendeid. Arvud  $\pm 1, \pm 2, \dots$  on selle võrrandi omaväärtusteks.

Iahendame nüüd võrrandi (3.83). Selleks teeme muutujate vahetuse  $x = \cos \theta$ ,  $dx = -\sin \theta d\theta$ . Pärast vastavate arvutuste teostamist saame võrrandi

$$\frac{d}{dx} \left[ (1 - x^2) \frac{dP}{dx} \right] + \left( \lambda - \frac{m^2}{1 - x^2} \right) P = 0.$$

See on aga meile juba tuttav diferentsiaalvõrrand (3.27), millel on lõplikke lahendeid vaid omaväärtustel

$$\lambda = 1(1 + 1) \quad (l = 1, 2, \dots) \quad (3.86)$$

ja mille omafunktsioonideks on valemiga (3.32) määratud Legendre'i polünoomid  $P_1^{(m)}(x)$ .

Võttes arvesse, et  $x = \cos \theta$ , võime (3.81) põhjal esitada omafunktsioonid kujul

$$\text{või} \quad Y_1^{(m)}(\theta, \varphi) = P_1^{(m)}(\cos \theta) \cos m\varphi \quad (3.87)$$

$$Y_1^{(m)}(\theta, \varphi) = P_1^{(m)}(\cos \theta) \sin m\varphi.$$

Need funktsioonid esinevad matemaatilise füüsika kursuses üsna sageli ning on tuntud kerafunktsioonide nime all.

Täab veel integreerida võrrand (3.79). Et see ei ühtu ühegi varem käsitletud võrranditüübiga, siis teostame mõningaid teisendusi. Kõigepealt toome sisse uue funktsiooni valemiga

$$R = \frac{Z}{\sqrt{r}}. \quad (3.88)$$

Et

$$\frac{dR}{dr} = \frac{1}{\sqrt{r}} \frac{dZ}{dr} - \frac{1}{2} \frac{Z}{r^{3/2}};$$

$$r^2 \frac{dR}{dr} = r^{3/2} \frac{dZ}{dr} - \frac{1}{2} r^{1/2} Z;$$

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) = r^{3/2} \frac{d^2 Z}{dr^2} + r^{1/2} \frac{dZ}{dr} - \frac{1}{4} r^{-1/2} Z,$$

siis võrrand (3.79) saab pärast neid asetusi ja teguriga  $r^{1/2}$  jagamist kuju ( $\lambda$  asemele on asetatud vastav oma-

väärtus  $l(l+1)$  )

$$\frac{d}{dr} \left( r \frac{dz}{dr} \right) + \left[ \frac{8\pi^2 m_e}{h^2} (Er + Ne^2) - \frac{(2l+1)^2}{4r} \right] z = 0. \quad (3.89)$$

Saadud tulemus on väga lähedane võrrandile (3.63) , mille omafunktsioonideks olid Legendre'i kaasfunktsioonid. Et saavutada täielikku ühtelangemist võrrandiga (3.63) , teeme muutuja vahetuse  $r = Ay$ , kus konstant A on esialgu määramatu. Võrrand (3.89) saab nüüd kuju

$$\frac{d}{dy} \left( y \frac{dz}{dy} \right) + \left[ \frac{8\pi^2 m_e}{h^2} A( EAy + Ne^2) - \frac{(2l+1)^2}{4y} \right] z = 0. \quad (3.90)$$

Võrrand (3.90) ühtib (3.63)-ga, kui

$$\frac{8\pi^2 m_e}{h^2} A^2 E = -\frac{1}{4}, \quad \frac{8\pi^2 m_e}{h^2} ANe^2 = \lambda, \quad s = 2l + 1.$$

Järelikult

$$A = \frac{h}{4\pi\sqrt{2}} \sqrt{-\frac{1}{E m_e}}; \quad \lambda = \frac{\sqrt{2}\pi N e^2}{h} \sqrt{-\frac{m_e}{E}}. \quad (3.91)$$

Valemi (3.90) põhjal on võrrandi (3.90) omaväärtusteks

$$\lambda = n + \frac{s+1}{2},$$

või kuna  $s = 2l + 1$ , siis

$$\lambda = n + l + 1. \quad (3.92)$$

Et  $n$  ja  $l$  olid täisarvud, siis on seda ka  $\lambda$ ; ta võib omandada väärtused  $\lambda = 1, 2, \dots$ . Suurust  $\lambda$  nimetatakse peakvantarvuks. Valemist (3.91) saame nüüd energia kvantiseeritud väärtused

$$E_{\lambda} = - \frac{2\pi^2 m_e N^2 e^4}{\lambda^2 h^2} . \quad (3.93)$$

Üleminekul energianivoolt  $E_{\lambda}$  nivoole  $E_{\lambda_1}$  kiiratakse kvant, mille sagedus on ( $R$  - Rydbergi konstant)

$$\nu_{\lambda\lambda_1} = R \left( \frac{1}{\lambda_1^2} - \frac{1}{\lambda^2} \right) .$$

Võttes  $\lambda_1 = 1$  ja andes  $\lambda$ -le väärtused  $\lambda = 2, 3, \dots$ , saame spektrijooned, mida tuntakse Lymani seeria nime all. Analoogiliselt juht  $\lambda_1 = 2, \lambda = 3, 4, \dots$  annab meile Balmeri seeria, juht  $\lambda_1 = 3, \lambda = 4, 5, \dots$  aga Pascheni seeria.

Kvantarvusi  $l$  ja  $m$  nimetatakse kõrvalkvantarvudeks. Nende füüsikalist tähendust me siinkohal lähemalt ei uuri.

Valenist (3.93) hakkab silma huvitav asjaolu. Nimelt peab alati olema  $E_{\lambda} < 0$  (sel korral potentsiaalne energia ületab oma absoluutväärtuselt kineetilise energia). Kvantiseerimine on võimalik seega ainult negatiivse koguergia korral. Mis puutub juhtu  $E > 0$ , siis võib näidata, et siin Schrödingeri võrrand on lahenduv iga energiaväärtuse  $E$  korral, seega energia kvantiseerimist ei toimu ja saame pideva spektri. Valemist  $U = -Ze^2/r$  nähtub, et  $r$  kasvades potentsiaalne energia kasvab; seega juht  $E > 0$  on võimalik vaid küllalt suurte  $r$ -de korral (siis elektron pole enam otseselt seotud tuumaga, kuigi asetseb veel tuuma mõjusfääris).

Kirjutame lõpuks välja veel Schrödingeri võrrandi lahendi. Et võrrandi (3.79) omafunktsioonideks on Laguerre'i

kaasfunktsioonid, siis selle võrrandi lahend avaldub kujul

$$z_n^{2l+1}(y) = z_n^{2l+1} \left( \frac{4\pi r}{h} \sqrt{-2m_e E_{n+l+1}} \right) = z_n^{2l+1} \left( \frac{8\pi^2 m_e Ne^2}{(n+l+1)h^2} r \right),$$

kusjuures funktsioon  $z_n^{2l+1}$  on määratud valemiga (3.64). Valem (3.88) põhjal saame

$$R_{nl}(r) = \frac{1}{\sqrt{r}} z_n^{2l+1}(y). \quad (3.94)$$

Kasutades valem (3.78), (3.87), (3.94), näeme, et

$$\psi_{nlm}(r, \theta, \varphi) = C_{nlm} \frac{1}{\sqrt{r}} z_n^{2l+1} \left( \frac{8\pi^2 m_e Ne^2}{(n+l+1)h^2} r \right) P_l^m(\cos \theta) \begin{Bmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{Bmatrix}.$$

Sellesse valemisse on sisse toodud täiendavalt konstant  $C_{nlm}$ , et oleks võimalik täita normeerimistingimust (3.68).

Saadud valem võimaldab leida elektroni mingis ruumpunktis  $(r, \theta, \varphi)$  asumise tõenäosust juhul, kui elektroni olek on määratud kvantarvudega  $n, l$  ja  $m$ .

## Kirjandus

1. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. Уравнения математической физики. М., "Наука", 1966.

## Sisukord.

Lk.

Eessõna .....	
1. ORTOGONAALFUNKTSIOONID .....	3
1. Funktsioonide reaksarendustest .....	3
2. Ortogonaalfunktsioonid .....	4
3. Funktsioonide jadade ortogonaliseerimine ...	7
4. Funktsiooni parim lähend antud lõigul .....	10
5. Täielik ortogonaalfunktsioonide süsteem ....	12
2. STURM-LIOUVILLE'I VÕRRAND JA SELLE OMADUSI ....	15
1. Sturm-Liouville'i võrrand .....	15
2. Sturm-Liouville'i võrrandi omaväärtused ....	16
3. Sturm-Liouville'i võrrandi omafunktsioonid..	16
4. Omaväärtuste positiivsus .....	18
5. Omafunktsioonide ortogonaalsus .....	20
3. MÕNINGAID ERIFUNKTSIOONE .....	22
1. Legendre'i polünoomid .....	22
2. Pöörleva keele väikesed võnkumised .....	28
3. Legendre'i polünoomide kaaspöörlevad .....	34
4. Hermite'i funktsioonid .....	37
5. Laguerre'i funktsioonid .....	42
6. Schrödingeri võrrand .....	46
7. Kvantmehaaniline otsillaator .....	48
8. Schrödingeri võrrandi omaväärtused vesiniku- sarnase aatomi jaoks .....	52

Оло Лепик  
ИЗБРАННЫЕ ГЛАВЫ ИЗ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

II

На эстонском языке  
Тартуский государственный университет  
ЭССР, г. Тарту, ул. Плякопи, 18  
Vastutav toimetaja J. Lellep  
Korrektor V. Lang

-----  
Trükkida entud 22.II 1973. Ofaetpaber, 30x42.  
1/4. Trükipoognaid 3,75. Tingtrükipoognaid  
3,49. Arveatuspoognaid 2,3. Trükiarv 300.  
MB 00283. Tell. nr. 231.

TRÜ rotaprint, Tartu, Pälsoni tn. 14.

Hind 8 kop.