

Prof. Gerhard Rägo

Tasapinnalise
analüütilise geomeetria
põhijooned

Elementaarne õpperaamat ja ülesanded

5967

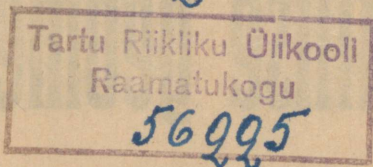


217.33
22.8.20.

K/Ü „Loodus“, Tartus

1921

2



K/Ü „Looduse“ keeleline korrektor Ülikooli Eesti keele lektor
J. V. Veski.

15986585

A 3507 A

Lugejale.

1. Selle raamatu lugemisel ei tule mitte püüda nii-palju ainete äraõppimisele kui endale täie selguse muretsemisele esitatud mõttekäigust.

2. Valemeid on üldiselt kohasem sõnades kui sümbolites meeles pidada: sõnalause lubab otsest rakendust igal erijuhusel, kuna vastasel korral enne seda iga tähis tuleb seletada.

3. Numbrilised arvutamised (ka tähtedega) peavad puhtalt kirjutatud olema, nõnda et igal ajal oleks võimalik tehtud arvutuste täielik kontroll.

4. Joonised tulevad tekstis antud seletuste põhjal ikka ise enesele teha, kuigi nad raamatus leiduksid. Esimesel lugemisel võib lihtsat joonist tarvitada, mis vabalt käega tehtud.

5. Iga joonis tuleb pärast vastavate riistade abil võimalikult täpsalt teha. Joonis ei ole mitte ainult selleks, et lauseid tõestada: ta peab meis esteetilist rõõmu äratama.

Saateks.

1. Selles raamatus käsitletakse selle matemaatilise teaduse osa põhijooni, mis analüütilise geomeetria nime kannab. Tema ülesandeks loetakse harilikult geomeetriliste kujude algebralist uurimist. Arvan tema teiseks, mitte vähem tähtsaks ülesandeks algebraliste mõistete ja tõdede geomeetrilise tõlkimise. See teine ülesanne seisab esimesel kohal matemaatilise õpetamise reformimise lipukirjas, mis viimastel aastatel Lääne Euroopas nii suurt hoogu võtnud. Mitte abstraktne matemaatika käsitlemine kõigi mõtteliste peenustega, mis uuema aja kriitilise perioodi nõuetel sellesse teadusse toodud, vaid geneetiline¹⁾, näitlik õpetamine, mille keskkohas seisab funktsiooni mõiste ja tema graafiline kujutamine!

2. Nendele kahele on siis ka otse ja kaudselt suur osa minu raamatust pühendatud. Temas puudub suur hulk lauseid, mis seni harilikult analüütilise geomeetria õpperaamatuis aset leidsid. Lausete arvu ei loe ma mõõduandvaks. Küll aga loen ma lubamatuks, kui mitte kuritööks, pealiskaudsuse põhjapanevate mõistete ja küsimuste käsitlemises, nagu see suuremas osas elementaarseist õpperaamatuid ja, kahjuks nii väga sagedasti, ka õpetamisel sünnib funktsiooni, kõvera võrrandi ja teiste mõistetega. Niikaua kui need sõnad tühjaks kõlaks jäävad, oleks parem neist rääkimata jätta. Olen katsumud neid põhimõisteid võimalikult lihtsalt, näitlikult ja

¹⁾ genesis — sündimine.

mitmekülgselt seletada. Ainsaks takistuseks nendest arusaamiseks on sissejuurdunud vana eelarvamine olemasolemata raskustest, mis nende mõistetega kaasas käivad.

3. See raamat on keskkoolidele ja iseõppimiseks määratud. Temas on vahest ehk pisut enam, kui ametlik programm nõuab: nii näiteks jäävad osad 21 ja 22 sellest väljapoole. Muidugi mitte raskuse suhtes! Nende juurdelisamise põhjuseks oli, et ma käesoleva raamatuga ka meie üliõpilastele kergelt sissejuhatust analüütilisse geomeetriasse tahtsin pakkuda, veel enam aga, et kooliõpetajale tarvilikku vabadust jätta seda valida, mis tema arvates tema õpilastele kõige kohasem. Raamat on sellepärast nõnda kirjutatud, et temast vabalt mitmed osad võib välja jätta ja samuti teisi juurde võtta, ilma et see mingit raskust sünnitaks.

4. Arvan tingimata tarvilikuks keskkoolis läbitöötamiseks selle materjali, mis käsitletud osades 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 12, 13, 14, 19, 20. Siia võib, kui aeg ja õpilaste koosseis lubavad, siis nimetamata jäänud osadest midagi juurde võtta, näiteks 10, 16, ehk 6, 9, ehk mõned muud osad.

5. Ülesannete numbrilise ja graafilise läbitöötamise peale tuleb kõige suuremat rõhku panna. See töö ei pea milgi tingimusel ainult „lahenduse leidmine“ olema, vaid põhjalik igakülgne lahenduse mõttekäigu kaalumine.

6. Võlgnen palju tänu kõigile, kes mind selles töös on aidanud:

meie Tartu Ülikooli Eesti keele lektorile J. V. Veski'le tema suure vaeva eest, mis tema raamatu keelelisel parandamisel näinud;

Tartu Ülikooli ilmajaama juhatajale, oma ametivennale C. Koch'ile, tema lahke loa eest negatiivi joon. 2 tarvitada;

assistentidele Tartu Ülikooli füüsika-õppetooli juures, E. Neugard'ile ja E. Kilksion'ile nende mitmekesise abi eest;

oma vanale sõbrale ja ametivennale H. Jaakson'ile
paljude keeleliste märkuste eest,

ja viimaks oma abikaasale tema jooniste eest (joon.
21, 25, 72, 73, 74, 75).

7. Selles raamatus esitatud ainekäsitus on välja kujunenud
minu viieaastase õppetöö jooksul Dooni Polütehnilises Instituudis,
Novotsherkasskis, Lõuna-Venemaal. Suur osa sellest tööst, mille
ma praegu ilma saadan, on kaugel kodust, võõrsil, osalt raskeil
päevil valminud. Kandku ta rohket vilja kodumaa
pinnal, kodumaa koidu-ajal!

Tartus,
25. 7. 1921.

Gerhard Rägo.

1. Sissejuhatus.

1. **Vaatluste protokollimine.** Kujutame omale ette, et me tahaksime ülevaadet saada sellest, kuidas muutub aja jooksul mõni meid huvitav suurus, näiteks õhu rõhumine. Meie vaatleksime selleks baromeetri¹⁾ seisu teatavate ajavahemikkude tagant, näiteks kolm korda päevas: kell 7 hommikul, kell 1 lõuna-ajal ja kell 9 õhtul. Kordame seda iga päev. Me saame nõnda vaatluste protokollina tabeli, kus kaks rida arve; esimeses seisab vaatlemise aeg, teises — sellele vastav õhu rõhumise väärtus.

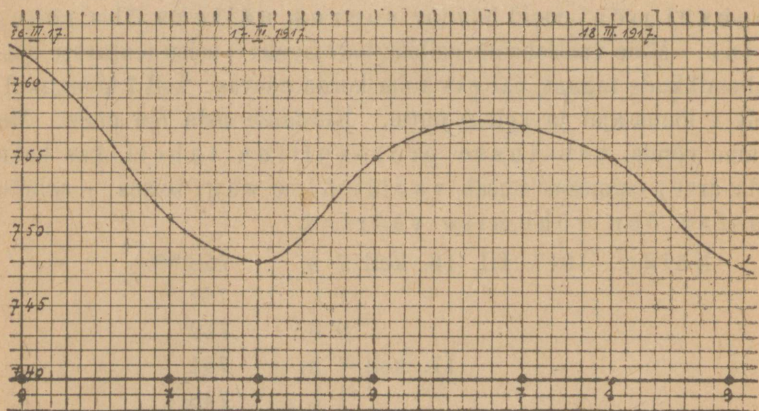
Näide. 1917. III. 16. kell 7 h.	758 mm
1 l.	761
9 õ.	762
17. kell 7 h.	751
1 l.	748
9 õ.	755
18. kell 7 h.	757
1 l.	755
9 õ.	748

Sellest tabelist näeme, missugune oli õhu rõhumine märgitud aegadel, millal ta suureneb, millal väheneb, — lühidalt, kuidas muutub õhu rõhumine ajaga, missugune on tema käik. Kuid kõike seda ainult üldistes joontes. Meie ei näe tabelist, missugune on uuritava suuruse väärtus päeval kell 10, 11, $2\frac{1}{2}$, õõsi kell 3, $3\frac{1}{2}$, 4 jne.; samuti ei näe me sealt, kunas just õhu rõhumine kõige kõrgem, kunas ta kõige madalam oli.

¹⁾ baros — raskus (sui rõhumise mõttes); metron — mõõt.

Palju täielikuma pildi saaksime uuritavast nähtusest, kui me õhu rõhumist iga tunni tagant mõõdaksime: kell 7, 8, 9 jne. Veel täpsama, kui me seda iga poole, iga veerand tunni järel teeksime. Kuid seesugusel korral kasvab meie tabeli pikkus nii suureks, et tema ülevaatlikkus täitsa kaob, et temast nähtuse käigu väljalugemine peaaegu võimatuks saab, liiatigi veel selle käigu meelepidamine.

2. **Vaatlussaaduste graafiline kujutamine.** Et uuritava nähtuse käigust võimalikult ülevaatlikku pilti saada võtame lehe ruudulist paberit (joon. 1), tõmbame ühe



Joon 1.

tema sirgetest paksemaks ja tähendame sellel pikkuste abil ajad 9, 10, ..., 7, 8 jne., kujutades üht tunni mõne pikkusena, näiteks ruudu küljena. Saame rea täppe. Püstjoontel, mis nendest täppidest tõmmatud, märgime pikkuste abil õhu rõhumised, kujutades iga millimeetrit rõhumist ütleme näiteks ruudu külje pikkuse lõiguna¹⁾.

Rõhumisi kujutavate pikkuste lõpud moodustavad rea

¹⁾ Et joonis mitte liig laiaks ei kasvaks, kujutame temas mitte kõike rõhumist, vaid ainult seda tema osa, mis üle mõne kindla väärtuse, näiteks 740 mm, ulatab.

täppe. Iga niisugune täpp kujutab üht ja ainsat paari arve: aega ja sellele vastavat rõhumist. See täpprida võib meile täiesti vaatlemistabeli aset täita: ta näitab meile just samuti, kui viimanegi, misugune oli õhu rõhumine igal üksikul vaatlusel. Ühes asjas on tema aga tabelist ees: ta on ülevaatlikum.

Seda tema omadust võime veel palju tõsta, kui me nimeatatud täppe sileda kõvera abil ühendame. Saadud joonis annab meile võimaluse otsekohe leida mitte ainult neid õhu rõhumiši, mis vaatlemisaegadel olid, vaid ühes nendega ka neid, mis olid igal teisel ajal nende vaatluste vahel.

Saadud joonis näitab meile, et igale ajale t temale omane rõhumine b vastab; ta lubab leida selle väärtuse; me näeme temast vaevata, millal rõhumine kõige suurem, millal ta kõige vähem oli, millal ta kasvas, vähenes, kuidas muutus. Lühidalt: saadud joonis, tb -graafik¹⁾ kujutab meile täielikult, lühidalt ja ülevaatlikult meid huvitava nähtuse käiku.

3. Mehaanilised registraatorid. Selle asemel, et ise õhu rõhumišt aeg-ajalt mõõta, on ilmaurijad isekirjutajad baromeetrid = barograafid ehitatud, mis automaatselt²⁾ vahet pidamata igal ajamomendil³⁾ õhu rõhumise üles tähendavad; mitte arvana, vaid pikkusena ruudulisel paberil; endise joonisega võrreldes ainukese vahega, et püstjoon-süsteemi asemel nüüd vähese kõverusega ringide kaared seisavad. Joonis 2 kujutab Tartu Ülikooli ilmajaama barograafi tema $barogrammi$ ga⁴⁾. Leht, millele kirjutustikk oma jälje jätab, on silindri peale mähitud, mis kella mehanismi abil nädala jooksul ühe tiiru teeb. Tikk, mis kaalsüsteemi abil ühenduses seisab õhu rõhumise mõõtjaga, kirjutab temast mööda veereval paberil vastava õhurõhumise. Barograafi küljes näeme ka hari-

1) grafein — joonistama, kirjutama.

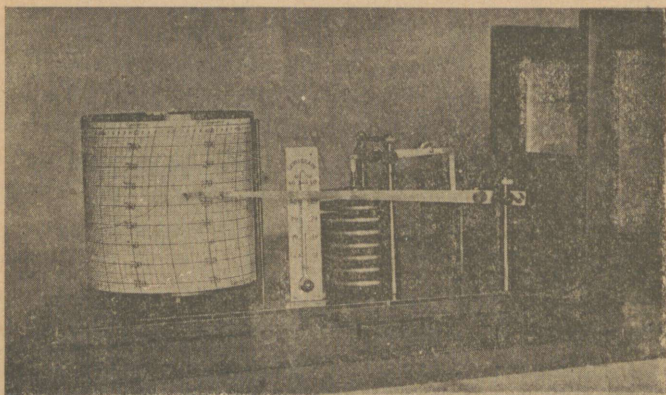
2) automatos — iseenesest liikuv, isetegev.

3) momentum — silmapilk.

4) baros — raskus; gramma — joonis, kujutus, kirjutus.

likku soojamõõdjat, mille näitamised vaatlaja poolt aeg-ajalt kontrollimiseks ära märgitakse.

4. Niiviisi saadud barogramm näitab meile, mäherdune on õhu rõhumise käik; ta ei anna meile vastust selle kohta mis põhjustel, mis tegurite sunnil õhu rõhumine muutub. Nende leidmine on pärastise uurimise asi. Lühida, ülevaatliku, näitliku kujuna hoiab meie barogramm alles meile ja tulevastele uurijatele pildi õhu rõhumise käigust, olles aluseks, mille peale teadlane oma uurimistööd võib rajada.



Joon. 2.

5. Teine loodusnähtuste käigu kirjeldamise viis. On veel teine võimalus loodusnähtusi lühidalt, täielikult ja täpsalt kirjeldada: valemite abil. Selleks järgmine

Näide. Täpp liigub ühtlaselt ringi mööda (joon. 3), mille raadius¹⁾ on 2 cm, tehes viis tiiru ühe minuti jooksul. Missuguse seaduse järele liigub tema projektsioon²⁾ mõnel diameetril? Missugune on selle seaduse graafiline kujü?

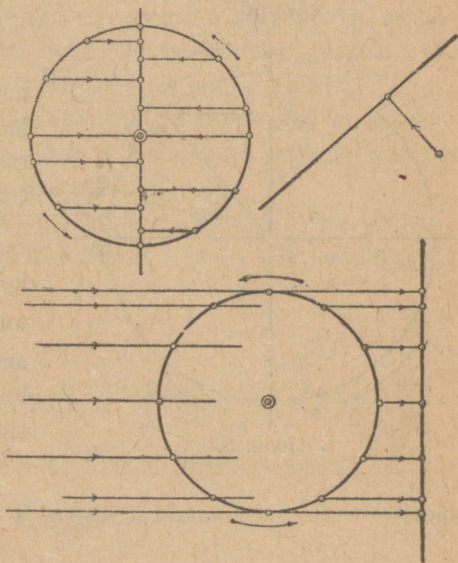
¹⁾ radius — kodar, kiir.

²⁾ projectio — esileviskamine, vise, kujutus.

Täpi projektsiooniks sirgele nimetatakse lõigu alust, mis antud täpist sirgega risti tõmmatud (joon. 3).

Märkus. Niisugust liikumist, nagu nimetatud täpi projektsiooni oma, nimetatakse harmooniliseks ¹⁾ võnkumiseks. Teda leiame väga sagedasti. Kui näiteks mõni taevakeha ühtlaselt liigub ringi mööda, siis näeb temast väga kaugel ringi tasapinnas olev vaatleja teda taevapinnal harmooniliselt sirges edasitagasi võnkuvat (joon. 4). See pilt esineb muu seas, kui maakeralt Jupiteri kuude liikumist vaatleme. Ka kella viipuri (penduli) tipp ja iga kõlava keele täpp muusikariistades võnguvad harmooniliselt. Sellest säherduse liikumise nimi.

Joon. 3.



Joon. 4.

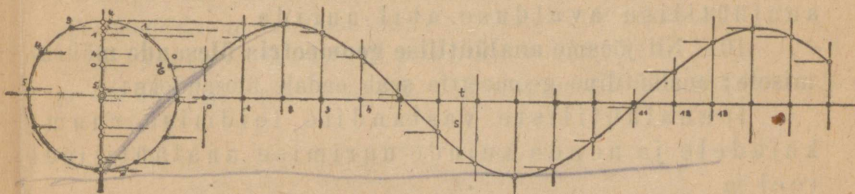
Asume ülesande lahendamisele. Võtame kaks ristiseisvat ringi diameetrit ²⁾, ühe rõht-, teise püstseisus (joon. 5), ja uurime ringil jooksva täpi P projektsiooni P_0 liikumist viimasel nendest. Olgu täpp aja algusel ringil kohas E , millele vastab nurk ϵ , esimesest diameetrist OA arvates. Olgu t mingi sekundite arv; missugune nimelt, jätame ütlemata; olgu sel ajal liikuva täpi koht P ja tema projektsiooni P_0 kaugus keskkohast

¹⁾ harmonia — kokkukõla.

²⁾ diametros — läbimõõtja, läbimõõt.

katki ja tõmbame ta sirgeks. Saadud lõigu asetame esimese diameetri pikendusele ja jagame ka tema 12-ks osaks. Jagamistäpid nummerdame nii ringil kui ka siin 0, 1, 2, ... 10, 11 ja edasi 12, 13 jne., samuti ka ringitäpi P projektsioonide kohad teisel diameetril; nendele jagamistäppidele vastavad ajad 0, 1, 2, ... 12, 13 jne. sekundit. Tõmbame sirgestatud ringi jagamistäppides püstjooned ja märgime neil nende numbritele vastavad projektsiooni kaugused keskkohast; saame rea täppe. Iga täpp kujutab üht arvpaari (t, s) . Kõver S , mis neid täppe ühendab, on nimetatud seaduse graafiline kuju: igale ajale t määrab ta sellele vastava projektsiooni kauguse s keskkohast.

7. Nõnda on meil üks ja sama nähtus: täpi projektsiooni liikumine püstdiameetril kahte viisi kirjeldatud:



Joon. 6.

analüütiliselt valemi abil $s = 2 \sin(\frac{\pi}{6}t + \varepsilon)$, geomeetriselt kõvera S abil. Et valem ja kõver üht ja sama seadust kujutavad, siis on nad ka vastamisi teineteise kujud: kõver S avalduse s geomeetiline, avaldus s kõvera S analüütiline kuju.

8. **Vahekord nähtuse käigu kahe kujutuse vahel.** Milles seisab vahekord avalduse s ja kõvera S vahel?

Olgu t mis aeg tahes; sellele vastab temale omane kindel täpi projektsiooni kaugus s ringi keskkohast; viimast võime tema avalduse abil arvutada. Joonises on need arvud t ja s kujutatud pikkustena, arvpaar (t, s) täpina kõveral S . Igale arvpaarile (t, s) , mis s -valemist võetud,

vastab täpp S -kõveral ja ümberpöördult: iga täpp kõveral S määrab paari arve, mis rahuldavad võrdust:

$$s = 2 \sin\left(\frac{\pi}{6}t + \varepsilon\right).$$

9. Iga selle valemi analüütiline omadus leiab oma vastandi tema geomeetrilises kujus.

Näiteks näeme s -avaldusest, et s muutub, jäädes oma kõige suurema väärtuse $+2$ ja kõige vähema -2 vahele, ja sedasama näeme otsekohe S -kõvera jooksust. Samuti leiame valemist, et aja t kasvamisega 12 sekundi võrra s endise väärtuse omab; sedasama näeme ka joonisest. Viimasest leiame vaevata ajad, millel projektsioon keskkohast läbi läheb, tähendab $s=0$ on, teisiti, võrrandi $\sin\left(\frac{\pi}{6}t + \varepsilon\right) = 0$ juured. Nõnda on võimalik kõiki analüütilise avalduse s omadusi geomeetriliselt tõlkida ja ümberpöördult — kõvera S omadusi tema analüütilise avalduse abil uurida.

10. Nii jõuame **analüütilise geomeetria ülesande määramisele**: analüütiline geomeetria seab endale ülesandeks:

1) analüütiliste vastandite leidmise ruumkujudele ja nende kujude uurimise analüütilisel teel ja

2) geomeetriliste vastandite leidmise analüütilistele valemitele ja viimaste uurimise geomeetrilisel teel.

Ülesanded.

1. Katse andis kahe teineteisele vastava suuruse u , v muutumisest järgmise tabeli:

u	$\parallel$	$-3,7$	$ $	$-3,1$	$ $	$-2,5$	$ $	$-1,9$	$ $	$-1,2$	$ $	$-0,8$	$ $	$-0,1$	$ $	$+0,9$	$ $	$+2,1$	$ $	$+3,0$	$ $	$+3,9$	$ $	$+4,8$
v	$\parallel$	$+1,5$	$ $	$+1,2$	$ $	$+1,4$	$ $	$+2,2$	$ $	$+2,6$	$ $	$+2,3$	$ $	$+1,6$	$ $	$+0,4$	$ $	$-0,6$	$ $	$-0,8$	$ $	$-0,1$	$ $	$+2,2$

Joonistada vastav kuju ja seletada selle abil nähtuse käik.

2. Joonistada kõver, mis kujutab logaritmi käiku arvu muutumisega (logaritmid võtta tabelist täpsusega 0.01). Kuidas võib saadud kujust leida logaritmi kuju arvudest x^2 , x^3 , $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x}$?

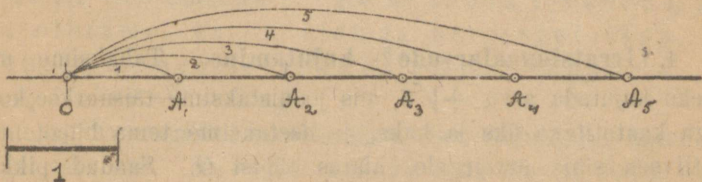
3. Joonistada kahe suuruse u , v käigu kuju, kui nad on seotud valemi abil: $v=0.8u+0.8$, andes u -le rea väärtusi ja arvutades neile vastavad v -d.

4. Püstkülg muutub nõnda, et tema pinnasuurus muutumatuks jääb (näiteks 2-ks). Joonistada tema külgede a ja b muutmise käigu kuju.

5. Kera raadius muutub nullist üheni. Joonistada ühes ja samas püstjoon-süsteemis kera ümbermõõdu, pinna ja mahu muutumise kujud. Raadiuse kujutamisel võtta pikkusmõõt 10 cm, teiste suuruste kujutamisel 1 cm.

2. Koordinaatide¹⁾ mõiste.

1. Lihtarvude kujutamine arvsirgel. Et lihtarve 1, 2, 3, ... geomeetriliselt kujutada, võtame mingi sirge (joon. 7); kujutagu üks tema täppidest, näiteks O , arvu null. Valime pikkusmõõdu ja asetame selle algustäpist O alates 1, 2, 3, ... korda sirgele. Saadud pikkused OA_1 , OA_2 , OA_3 , ... on meie lihtarvude kujud. Et kõik need lõigud ühe ja sama



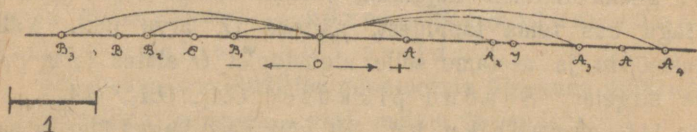
Joon. 7.

täpiga O algavad, siis on igaüks neist määratud tema lõpu abil: arve 1, 2, 3, ..., n võime graafiliselt kujutada täppide abil A_1 , A_2 , A_3 , ..., A_n . Igale arvule 1, 2, 3, ... vastab üks ja ainult üks täpp reast A_1 , A_2 , A_3 , ... ja ümberpöörduvalt.

1) coordinare — kokku korraldama, ühendusse järjestama, vastavusse seadma.

2. Positiivsete¹⁾ ja negatiivsete²⁾ täisarvude kujutamine. Määrame arvsirgel (joon. 8) sihid: positiivse paremale, negatiivse pahemale poole; siis kujutavad pikkused $OA_1, OA_2, OA_3, \dots$, mis paremale poole sihitud, positiivseid arve $+1, +2, +3, \dots$, pikkused $OB_1, OB_2, OB_3, \dots$, mis pahemale — negatiivseid $-1, -2, -3, \dots$. Samuti, kui enneminigi, võime nende arvude kujudeks lugeda täppe $A_1, A_2, A_3, \dots; B_1, B_2, B_3, \dots$.

3. Murruliste arvude kujutamine. Jagades pikkusmõõdu nii mitmeks osaks, mitu üht on nimetajas, ja võttes saadud osa sihis, mille märk määrab, nii mitu korda, kui palju ühti on lugejas, saame sihitud pikkuse, mis antud arvu kujutab. Selle arvu kujuks võime ka saadud pikkuse lõppu lugeda. Nõnda kujutab täpp A arvu $+3\frac{1}{2}$, täpp B arvu $-2\frac{1}{3}$ (joon. 8).



Joon. 8.

4. Irratsionaalarvude³⁾ kujutamine. Tahaksime meie näiteks kujutada arvu $+\sqrt{5}$, siis joonistaksime täisnurkse kolmnurga kaatetitega üks ja kaks, ja asetaksime tema hüpoteenuusi positiivses sihis arvsirgele, alates täpist O . Saadud pikkuse lõpptäpp J on arvu $+\sqrt{5}$ kuju (joon. 8).

Ei ole iga kord võimalik geomeetrilise konstruktsiooni⁴⁾ abil pikkust leida, mis vastaks mõnele mingi seaduse abil määratud irratsionaalarvule, näiteks arvudele: $\sqrt[3]{2}, \log_3 5, \pi$ jne.

1) positivus — jaatav, päris.

2) negativus — eitav.

3) irrationalis — arvetu, mõistmatu.

4) construere — kokku seadma, ehitama, valmistama.

Seadus, mis määrab niisugust arvu, lubab aga ikka leida ratsionaalarve, mis iga nõutud täpsusega seda irratsionaalset edustab. Nõnda on arv π antud

täpsusega	1	arvude abil 3	ehk 4
	0.1	3.1	3.2
	0.01	3.14	3.15
	0.001	3.141	3.142 jne.

Kujutame neid π täpiseväärtusi endist viisi arvsirgel; saame kaks rida pikkusi ja kaks rida nende lõpptäppe. Me näeme, et esimese täpprea individuumid¹⁾ ikka enam paremale poole nihkuvad, teise omad — pahemale. Vahemikud kahe kõrvuseisvate täpiseväärtuste vahel, tähendab ka kahe nendele vastava täpi vahel, on järgemööda 1, 0.1, 0.01, 0.001 jne.; nad vähenevad lõpmata; täpid pahempoolsest reast lähevad piirita täppidele parempoolsest. Matemaatiline analüüs loob mõiste arvust, mis lahutab teineteisest kahte rida arve:

3, 3.1, 3.14, 3.141, ja 3.142, 3.15, 3.2, 4, ja märgib teda tähisega π . Me ei suuda tõendada, kuid me oletame, et on olemas arvsirgel täpp, mis lahutab teineteisest kaht endist täpprida. See täpp on arvu π kuju.

5. Arvastmiku tarvitamine. Seni kujutasime antud arvu sirgel täpi abil. Me võime aga ka anda täpi ja otsida temale vastava arvu. Nõnda vastavad täppidele A , B , C arvud $+3\frac{1}{2}$, $-2\frac{1}{3}$, $-\sqrt{2}$ (joon. 8).

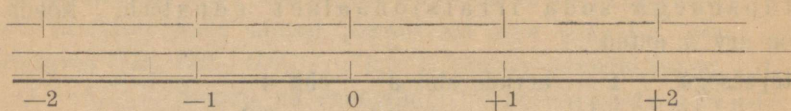
Kirjeldatud sirge täpi määramise põhimõtte seisab lühidalt selles, et me sirgega ühendatult endile arvastmiku jagamiskriipsudega:

..., -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, ...

ette kujutame (joon. 9), nagu soojamõõtjalgi, ja nendele veel kõiki teisi kriipse juurde mõtleme, mis vastavad murd- ja irrat-

1) individuum — üksik, üksikolevus, jagamatu.

sionaalsetele arvudele. Täpp määratakse sirgel temale vastava kriipsu numbriga.



Joon. 9.

6. **Üldine kokkuvõte.** Kõiki arve, positiivseid ja negatiivseid, täisarve ja murrulisi, ratsionaalseid ja irratsionaalseid, on võimalik kujutada arvsirgel täppide abil. Igale arvule vastab üks ja ainus täpp arvsirgel; ümberpöörduvalt: igale täpile arvsirgel — üks ja ainus arv. Reaal-arvud¹⁾ ja arvsirge täpid on vastamisi ükshelises vastavuses.

7. **Mõned nimed.** Arvsirget, millel meie arve kujutasime, nimetatakse ka arvteljeks, tema täppi O — alguseks. Täpile vastavat arvu x nimetatakse selle täpi abstsissiks²⁾. Ta kirjutatakse sulgudes täpi tähise taha, näiteks $P(x)$. See x on arvu tähis ühiselt sihti määrava märgiga; nõnda on $x = +1$, $-2\frac{3}{4}$, $+5\cdot6$, mitte aga 1 , $2\frac{3}{4}$, $5\cdot6$.

8. Arvu x andmisega on täpi P koht arvteljel määratud; tõesti: tema märk määrab sihi, tema absoluutväärtus, tähendab, tema suurus, vaatamata märgi peale, täpi kauguse algusest.

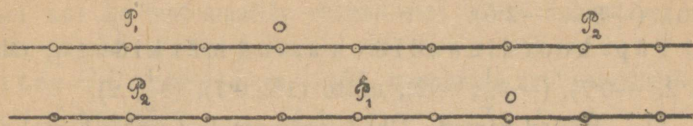
9. **Kahe arvtelje täpi kaugus** on nende abstsisside vahe absoluutväärtus.

Olgu nimetatud täpid P_1 ja P_2 , nende abstsissid x_1 ja x_2 . Siis on $P_1P_2 = |x_2 - x_1|$. (Me märgime arvu N absoluutväärtuse tähisega $|N|$.) Et see seadus üldiselt maksev on, leiame, kui teeme joonised, arvesse võttes kõiki kahe täpi asetsemise võimalusi. Joonisel 10 on kaks kuuest juhusest kujutatud.

1) realis — tõesti olev.

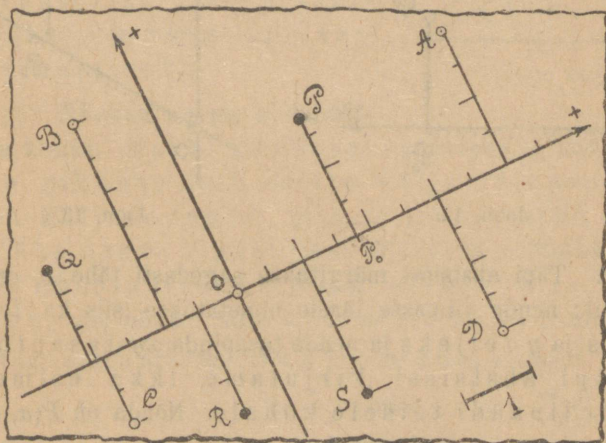
2) abscissus — küljest lahutatud, lõigatud.

10: Täpi koha määramine tasapinnal. Et täpi kohta tasapinnal määrata, võtame sellel (joon. 11) mingi täpi O , tõmbame temast kaks vastamisi ristisirget, määrame



Joon. 10.

igaühel nendest positiivse ja negatiivse sihi ja valime pikkusmõõdu. Projekttime võetud täpi P ühele endistest sirgetest; olgu saadud projektsioon P_0 . Siis on täpi P koht tasapinnal määratud, kui vahed OP_0 ja P_0P on antud väärtuse ja sihi poolest. Arve, mis neid vahesid määravad, nimetatakse täpi P koordinaatideks.



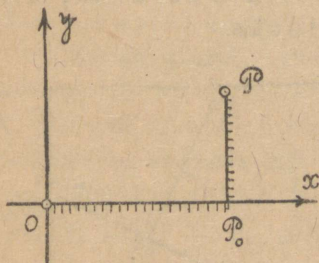
Joon. 11.

Igale tasapinna täpile vastab üks ja ainult üks koordinaatpaar. Joonises 11 on täppidel P, Q, R, S koordinaadid $(+1.8, +1.7)$, $(-2.1, +1.4)$, $(-0.5, -1.6)$, $(+1.0, -2.0)$.

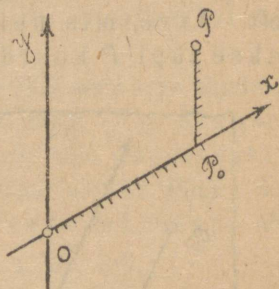
Ümberpöördult: igale arvpaarile vastab üks ja ainult üks täpp tasapinnal. Joonises 11 vastavad täpid A, B, C, D arvpaaridele $(+4.0, +2.0)$, $(-0.9, +3.0)$, $(-1.9, -1.0)$, $(+3.0, -2.0)$.

Täpi koordinaadid on arvud märkidega, näiteks $(+1.2, -0.7)$, $(-3\frac{1}{2}, -2)$, mitte $(1.2, 0.7)$, $(3\frac{1}{2}, 2)$.

11. **Mõned nimed.** Üht koordinaatidest (meie korral arvu, mis vahet OP_0 määrab) nimetatakse abstsissiks; teist (mis vahet P_0P määrab) — ordinaadiks¹⁾; meie kaht ristjoont — koordinaattelgedeks ehk lühidalt telgedeks, esimest — abstsissiteljeks, teist — ordinaatteljeks. Mõlemad koos moodustavad teljestiku. Täppi O nimetatakse alguseks.



Joon. 12.



Joon. 13.

12. Täpi abstsissi märgitakse sagedasti tähe x , ordinaati — y abil; nende viimaste järele nimetatakse siis ka telgi: x -teljeks ja y -teljeks ja nende tasapinda xy -tasapinnaks.

Täpi abstsissi kirjutame ikka esimesele, tema ordinaadi teisele kohale. Nõnda on $P(a, b)$ täpp, mille abstsiss on a , ordinaat b .

13. Leida täppi tähendab analüütilises geomeetrias leida tema koordinaate.

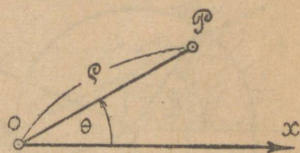
14. **Püst- ja kaldkoordinaadid.** Täpi koha määramisel ei ole tarvilik, et teljed täisnurga sünnitaksid

1) ordinatus — kordaseatud, korraldatud, määratud.

(joon. 12); nende vaheline nurk võib ka mõni teine olla: kaldkoordinaadid (joon. 13). Püstkoordinaadid on lihtsamad, ülevaatlikumad ja harilikult nii geomeetriliste küsimuste käsitlemisel kui ka matemaatika rakendustes kõige kohasemad. Nad võttis esimest korda tarvitusele suur mõtteteadlane René Descartes = Cartesius a. 1637, mispärast neid sagedasti tema järele nimetatakse.

15. Polaarkoordinaadid. Täpi koha määramine tasapinnal võib ka järgmiselt sündida. Võtame tasapinnal mõne täpi O ja tõmbame sellest mõne kiire Ox (joon. 14); ühendame kõne all oleva täpi P algusega O ; siis on tema koht määratud pikkuse OP ja nurga xOP ehk neid mõõtvate arvude ρ ja ϑ abil.

O nimetatakse pooluseks¹⁾, Ox — polaarteljeks, ρ — raadiusvektoriks²⁾, ϑ — polaar-nurgaks, ρ ja ϑ koos — polaar-koordinaatideks.



Joon. 14.

16. Märkus nurga absoluut-mõõdu kohta. Nurki mõõdetakse kõrgemas matemaatikas kaare pikkuse abil, mille välja lõikavad selle nurga küljed ringist, mis on joonistatud raadiusega üks nurga tipust (joon. 15). Seda mõõtmisviisi nimetatakse absoluutseks. Nurk esineb siin nimeta arvuna, mis näitab, mitu korda peitub kaares raadius.

Olgu nurga absoluutmõõt a ja olgu temas α kraadi³⁾; siis on:

$$a : 2\pi = \alpha : 360. \quad a = \frac{\alpha \pi}{180}$$

Sellest võrdest on võimalik leida nurgasuurust absoluutmõõdus, kui ta on antud kraadmõõdus ehk ümberpöördukt. Näiteks on nurgas $a=1$ ümmarguselt

1) polos — pöördetäpp, punkt, mille ümber miski pöörleb.

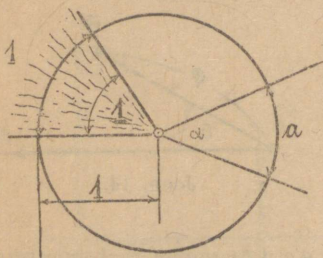
2) radius — kodar, kiir; vector — sõitja, vedaja.

3) gradus — aste, samm.

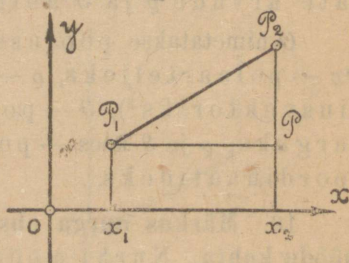
57°. See nurk (joon. 15) on nurga mõõduks nurga absoluutsel mõõtmisel. Nurkadele 0° , 45° , 90° , 180° , 360° vastab absoluutmõõdus 0 , $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$, π , 2π .

17. **Kahe täpi kaugus** Cartesius'e koordinaatides. Olgu antud täpid $P_1 (x_1, y_1)$ ja $P_2 (x_2, y_2)$. Kujutame nende koordinaadid (joon. 16) ja tõmbame esimesest nendest sirge rööbiti x -teljega. Saadud täisnurkses kolmnurgas P_1PP_2 on kaatetid $|x_2 - x_1|$ ja $|y_2 - y_1|$; sellepärast hüpotenuusi ehk otsitava kauguse ruut: $P_1P_2^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$. Et ruututõstmisel märk ükskõikne on, võime selle asemel kirjutada

$$P_1P_2^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$



Joon. 15.



Joon. 16.

Sõnades: kahe täpi vahelise kauguse ruut on võrdne selle lõpu ja alguse koordinaatide vahede ruutude summaga.

Näide. $P_1(-1, -2)$; $P_2(+3, -4)$. $P_1P_2^2 = [+3 - (-1)]^2 + [-4 - (-2)]^2 = (+4)^2 + (-2)^2 = 16 + 4 = 20$;

sellepärast $P_1P_2 = |\sqrt{20}|$. Viimase ruutjuure võtame märgita, sest kaugust vaatame siin sihita suurusena.

18. **Täpi kaugus algusest.** Olgu täpi P koordinaadid x ja y . Joonisest 17 näeme, et

$$OP^2 = x^2 + y^2.$$

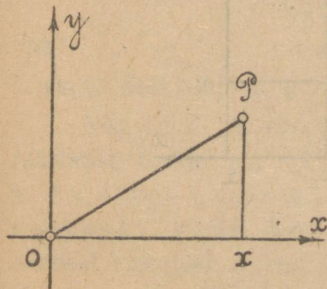
Sõnades: täpi kauguse ruut algusest on võrdne tema koordinaatide ruutude summaga.

Näide. $P(-3, +4)$; $OP^2 = (-3)^2 + (+4)^2 = 9 + 16 = 25$,
 $OP = |\sqrt{25}| = 5$.

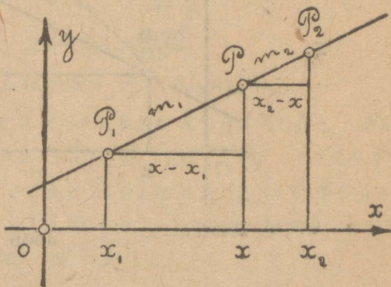
19. Selle täpi koordinaadid, mis jagab teatavas suhtes kahe antud täpi vahet. Jagada vahe P_1P_2 suhtes $m_1:m_2$, tähendab, leida täppide P_1 ja P_2 ühendussirgeline niisugune täpp P , et oleks (joon. 18): $P_1P:PP_2 = m_1:m_2$.

Täpi P_1 ja P_2 koordinaadid (x_1, y_1) , (x_2, y_2) on antud, P omad (x, y) on otsitavad.

Esimene juhus. Otsitav täpp on antud täppide vahel: sisemine jagamine.



Joon. 17.



Joon. 18.

Kujutame (joon. 18) kolme täpi koordinaadid ja tõmbame täppidest P_1 ja P rööpsirged x -teljega; me saame nõnda kaks täisnurkset kolmnurka hüpotenuusidega P_1P ja PP_2 ja rõhtkaatetitega $x-x_1$, x_2-x . Nende sarnasuse tõttu suhtuvad viimased kui hüpotenuusid, sellega siis, kui $m_1:m_2$:

$$(x-x_1):(x_2-x)=m_1:m_2,$$

kust:

$$(m_1+m_2) \cdot x = m_1 \cdot x_2 + m_2 \cdot x_1,$$

tähendab:

$$x = \frac{m_1 \cdot x_2 + m_2 \cdot x_1}{m_1 + m_2}.$$

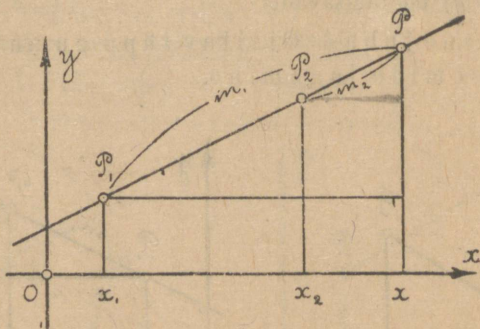
Samuti võime arvutada y -d. Kuid seda pole tarvis. Mõlemad koordinaadid etendavad ühetaolist osa:

nende avaldused peavad teineteisega sarnased olema. Järjekult on:

$$y = \frac{m_1 \cdot y_2 + m_2 \cdot y_1}{m_1 + m_2}.$$

Teinejuhus. Otsitav täpp on väljaspool antud täppide vahet: väline jagamine.

Olgu ta näiteks täpi P_2 taga (joon. 19). Kujutame jälle kolme täpi P_1 , P_2 ja P koordinaadid ja tõmbame täppidest P_1 ja P_2 sirged, mis rööbiti x -teljega; me saame nõnda jälle kaks



Joon. 19.

täisnurkset teineteisega sarnast kolmnurka, millede hüpotenuusid P_1P ja P_2P suhtuvad kui $m_1 : m_2$. Samuti suhtuvad nende rõhtkaatetid $x - x_1$ ja $x - x_2$; järjekult:

$$x - x_1 : x - x_2 = m_1 : m_2,$$

kust

$$x = \frac{m_1 \cdot x_2 - m_2 \cdot x_1}{m_1 - m_2}$$

ja analoogiliselt ¹⁾:

$$y = \frac{m_1 \cdot y_2 - m_2 \cdot y_1}{m_1 - m_2}$$

saame. Viimased kaks valemit lähevad endistest ainult märgi poolest lahku.

20. Kahe täpi vahe keskkoha koordinaadid. Jagab otsitav täpp P antud täppvahe P_1P_2 pooleks, siis on $m_1 : m_2 = 1 : 1$; sellepärast on poolitamistäpi koordinaadid:

1) analógos — öeldule vastav, suhte ehk vastavuse kohane, sarnane.

$$x_p = \frac{1}{2} (x_1 + x_2),$$

$$y_p = \frac{1}{2} (y_1 + y_2).$$

Sõnades: täppvahe poolitamistäpikoordinaadid on pooled otsade koordinaatide summad.

21. Näide 1. Antud on kaks rasket kera, millede kaalud on 20 ja 30, keskkohfadega täppides $(-3, -3)$, $(+2, +7)$. Kus on raskuse keskkohf?

Viimane jagab kera keskkohfate vahe sisemiselt pöörd-suhtes 20:30, tähendab, suhtes 3:2. Järjekult on tema koor-dinaadid

$$x = \frac{3 \cdot (+2) + 2 \cdot (-3)}{3+2}, \quad y = \frac{3 \cdot (+7) + 2 \cdot (-3)}{3+2},$$

ehk:

$$x=0, \quad y=+3.$$

Raskuse keskkohf on y -teljel kaugusel $+3$ alusest.

Näide 2. Kolmnurga raskuse keskkohf. Nagu füüsikast teada, on viimane täpis, milles lõikuvad kolm sirget, mis ühendavad kolmnurga tippusid vastaskülgede keskkohfadega. Tema jagab igäht nendest sirgetest alusest arvates suhtes 1:2.

Olgu kolmnurga tipud $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$ ja otsitav raskuse keskkohf $P_0(x_0, y_0, z_0)$. Jagame ühe kolmnurga külgedest, näiteks P_1P_2 täpi P abil pooleks. Selle koordinaadid x ja y on: $\frac{1}{2}(x_1+x_2)$, $\frac{1}{2}(y_1+y_2)$. Järjekult on täpi P_0 koor-dinaadid:

$$x_0 = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} (x_1+x_2) + 1 \cdot x_3}{2+1}, \quad y_0 = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} (y_1+y_2) + 1 \cdot y_3}{2+1},$$

ehk:

$$x_0 = \frac{1}{3} (x_1+x_2+x_3), \quad y_0 = \frac{1}{3} (y_1+y_2+y_3).$$

Ülesanded.

1. Kujutada arvsirgel arvud: $+2.6$, $+3\frac{2}{3}$, $-1\frac{4}{5}$, -4.2 , $+\sqrt{13}$, $\log 5$, $\sin 20^\circ$, $\tan 60^\circ$, $\cot 1$, $\sin 0.3$.

2. Joonistada täpid, millede Cartesius'e koordinaadid on $(+3, +4)$, $(0, +2)$, $(-1, +3)$, $(-5, 0)$, $(-4, -2)$, $(0, -7)$, $(+5, -4)$.

3. Kaldteljestiku nurk on 60° . Joonistada täpid $(+4\frac{1}{2}, +2)$, $(0, \pi)$, $(-2, \log 13)$, $(-4, -3\frac{2}{3})$.

4. Kui suured on absoluutmõõdus nurgad: 1° , 10° , 20° , 30° , 60° , 135° , 225° , 240° , 330° , 405° ?

5. Kui palju kraadisid peitub nurkades: $\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{3}$, $2\frac{4}{5}$, $\sqrt{2}$, $\log 3$, $\frac{2}{3}\pi$, $\frac{10}{9}\pi$, $2\frac{1}{4}\pi$?

6. Joonistada polaarkoordinaatides täpid: $(3, \frac{\pi}{4})$, $(4\frac{1}{2}, \frac{5}{6}\pi)$, $(1\cdot5, \frac{3}{2}\pi)$.

7. Antud on kolmnurga tipud: $(0, 0)$, $(1, 3)$, $(-5, -2)$. Leida tema küljed.

8. Täppvahe, mille otsad on $(-8, -2)$, $(+6, +5)$, on jagatud suhtes $4:3$. Leida jagajad täpid.

9. Tundmatu lõik on jagatud n võrdseks osaks. Esimese ja viimase jagaja täpi koordinaadid on (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) . Leida lõigu lõpud.

10. Missugused täpid jagavad lõigu, mille otsad on $(-5, +2)$, $(+4, -5)$, sisemiselt ja väliselt suhtes $1:1$?

11. Leida kahe täpi (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) vahe kaldkoordinaatides, kui teljestiku nurk on ω .

12. Leida kahe täpi (ϱ_1, ϑ_1) ja (ϱ_2, ϑ_2) vahe.

13. Antud on kolmnurk: $(0, 0)$, $(-6, +2)$, $(-3, +7)$. Leida ringi raadius, mis tema ümber joonistatud. Juht: kolm tippu peavad keskkohast ühekaugusel olema.

14. Kahe ühest ja samast ollusest keha massid on m_1 ja m_2 , nende temperatuurid t_1 ja t_2 . Leida nende ühenduskeha temperatuur t ja kujutada kõik kolm t -d temperatuurteljel.

15. Kaks mitte vetruvat keha, millede massid on m_1 ja m_2 ja millede kiirused on c_1 ja c_2 , põrkavad teineteise vastu. Missugune on nende ühine kiirus c põrke järel? Kujutada kõik kolm c -d kiirusteljel.

3. Funktsiooni mõiste ja graafiline kujutamine.

1. **Funktsiooni mõiste.** Võtame mingi algebralise avalduse, näiteks $\frac{3x}{1+x^2}$. Arvutame selle avalduse väärtused, mis vastavad x -väärtustele 0, $+\frac{1}{2}$, $+1$, $+1\frac{1}{2}$, $+2$, $\dots$, $-\frac{1}{2}$, -1 , $-1\frac{1}{2}$ jne. Saame tabeli:

$x =$	0	$+\frac{1}{2}$	$+1$	$+1\frac{1}{2}$	$+2$	$+3$	$+5$	$-\frac{1}{2}$	-1	$-1\frac{1}{2}$	$\dots$
$\frac{3x}{1+x^2} =$	0	$+1\frac{1}{5}$	$+1\frac{1}{2}$	$+1\frac{5}{13}$	$+1\frac{1}{5}$	$+\frac{9}{10}$	$+\frac{15}{26}$	$-1\frac{1}{5}$	$-1\frac{1}{2}$	$-1\frac{5}{13}$	$\dots$

Me näeme, et igale x -väärtusele vastab üks ja ainus avaldusväärtus $3x:(1+x^2)$. Esimese muutumisega muutub vastavalt ka teine. Teisiti öeldes: avaldusväärtused $3x:(1+x^2)$ on x -väärtustega seotud, ehk nad ripuvad nendest, ehk veel: nad olenevad x -väärtustest. Lühemalt: nimetatud avaldus oleneb x -ist, ehk võõrakeelse sõnaga: avaldus $3x:(1+x^2)$ on x -i funktsioon (ehk funktsioon x -ist)¹⁾.

2. **Üldine funktsiooni definitsioon.** Üldiselt: kui kaks suurust — nimetame neid x ja y — on niisuguses vahekorras, et igale esimese suuruse väärtusele (kuigi teatavates rajades, näiteks nullist üheni, -3 -st kuni $+5$ -ni, $-\infty$ kuni $+\infty$) vastab üks ja ainult üks teise väärtus, siis on see teine y esimese x -i funktsioon.

Näited. Nõnda on õhu rõhumine b aja t funktsioon (v. 1.1, 1.2)²⁾; õhu soojus T funktsioon kõrgusest h üle maa pinna; tulu kapitalist selle kapitali funktsioon; käidud tee kiiruse funktsioon; aine väärtus aine hulga funktsioon; töö hulk tööpäevade arvu funktsioon; elektrivoolu tugevus pooluste potentiaalvahe funktsioon; valgustuse tugevus nurga funktsioon, mille

1) functio — amet, toimetus.

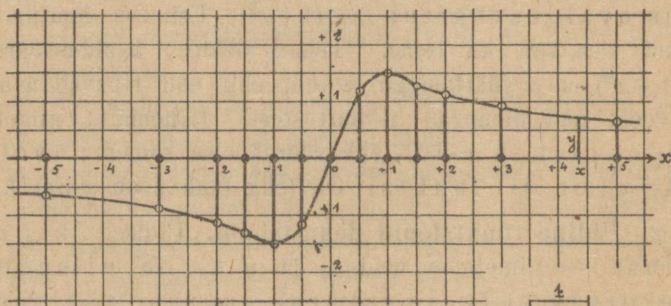
2) See tähendab: vaata paragraaf 1, punkt 1 ja 2.

all ta langeb; vedru pikkus raskuse funktsioon, mis tema küljes ripub; tuule rõhumine tema kiiruse funktsioon; iga algebraline avaldus muutuja funktsioon, mis temas esineb; sinus x , cosinus x , tangens x kaare x funktsioonid, logaritm x arvu x funktsioon, iga kõvera täpi ordinaat selle täpi abstsissi funktsioon jne.

3. Funktsiooni tähis. Funktsiooni definitsioonis väljendatud mõttele anname kirjas kuju:

$$y=f(x).$$

Täht f on lühike tähis, mis seisab eeskirja asemel, mille järele tuleb leida igale x -ile vastav y -väärtus. Tema on sümbol, mille abil tähitakse side x ja y vahel, nende kahe suuruse olenevus. Näites: $f(x)=3x:(1+x^2)$ seisab täht f



Joon. 20.

järgmise lause asemel: et leida avalduse $3x:(1+x^2)$ väärtust, mis vastab mingile x -ile, tuleb see viimane korrutada kolmega, siis x -i ruut ühega liita ja esimene saadus teisega jagada.

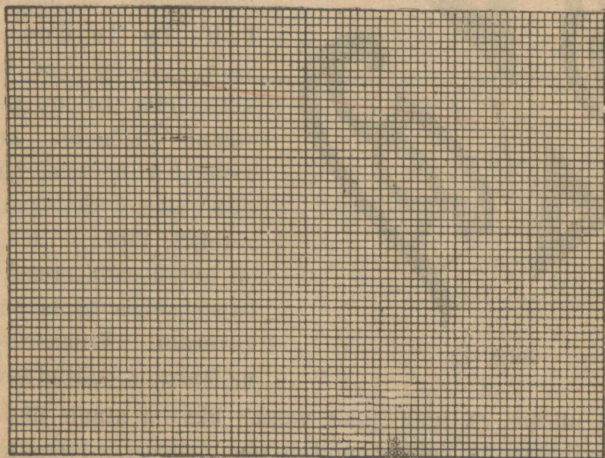
Sümbolit $f(x)$ vaatleme mõnikord ka kui tema poolt nõutud tehete saadust; siis on $f(x)$ arv.

Samuti kahte viisi vaadatakse matemaatikas ka teiste sümbolite peale, näiteks $\sqrt{\frac{a}{b}}$, $\log a^2b$, $\sin 3\alpha$ jne.

4. Muutujate mõiste. Kui x , nõnda ka $f(x)$ on muutuvad arvud ehk lühidalt muutujad. Seda nendest, meie

näites esimest, millele me väärtusi andsime, nimetatakse rippumata muutujaks, teist, mis väärtusi selle järele vastavalt omandas, — rippujaks.

5. **Funktsiooni graafiline kujutamine.** Kahe muutuja x ja $f(x)$ side, mis antud võrduse abil $f(x)=3x:(1+x^2)$, määrab küll nende olemavuse teineteisest, kuid ei anna meile sellest näitlikku, ülevaatlikku, piltlikku kaju. Viimase võime järgmiselt saada. Võtame lehe ruudulist paberit (joon. 20), valime kaks tema ristsirget koordinaattelgedeks, määrame positiivsed ja



Joon. 21.

negatiivsed sihid, võtame paraja pikkusmõõdu, näiteks kahekordse ruudu külje, ja kujutame iga arvpaari oma tabelist ennemini seletatud viisil täpina. Kui x -väärtused tabelis küllalt tihedalt on võetud, näiteks iga poole ehk — veel parem — veerandi tagant, siis näeme, et saadud täpprida siledal kõveral asub.

Märkus. Funktsioonide graafiliseks kujutamiseks püstkoordinaatides on väga kohane n. n. millimeetriline paber (joon. 21); püstjoonte tõmbamine jääb temal ära. Arvpaare kujutavad täpid torgatakse peenikese torkenõelaga (joon. 22)

läbi. Täppide ühendamine sünnib kõvera joonlaua abil (joon. 22). Harilikult saab korraka ühendada 3 kuni 4 täppi. Tuleb püüda kõveraid võimalikult siledalt, nurkadeta joonistada. Nurgad on ainult erakorralistel juhustel võimalikud.



Joon. 22.

6. Mis annab nii viisi saadud kõvera ja mida näitab ta meile? Väikeste ringidega märgitud täpid (joon. 20) annavad meile needsamad arvpaarid, mis tabelis leidsid; kõvera abil on aga võimalik kätte leida ka iga y -d, mis vastab mõnele teisele x -ile, ka mitte tabelis olevale. Selleks võtame x -teljel täpi, mille abstsiss on antud x -väärtus, ja tõmbame selles täpis püstjoone kõverani. Viimase pikkuse mõõtari on otsitud y -väärtus.

Me näeme, et igale x -ile vastab üks ja ainult üks y , kui suur on viimane ja kuidas muutub tema suurus x -i muutmisega: alguses on funktsiooni väärtus 0, kasvab siis õige järsku täpini, mille abstsiss on $x=1$, kus ta omab kõige suurema oma väärtustest, nimelt $\frac{3}{2}$, väheneb siis esialgu kiiresti, pärastpoole aeglasemalt, saades x -i küllase kasvamisega kui väikeseks tahes, jäädes selle juures ikka positiivseks. Väheneb x nullist kuni -1 -ni, väheneb ka y oma kõige väiksema väärtuseni $-\frac{3}{2}$, kasvab siis esiteks kiiresti, hiljemini aeglasemalt, ikka negatiivseks jäädes, ja saab absoluutselt nii väikeseks kui tahame, kui aga negatiivne x absoluutselt küllalt suureks saab. Nõnda on meie funktsiooni graafik näitlik y x -ist rippuvuse kuju, täielik ja ülevaatlik y x -ist olenevuse pilt.

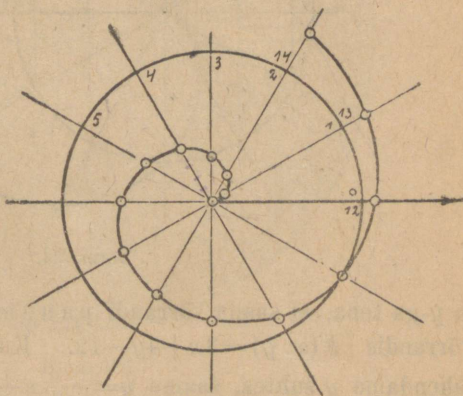
7. Funktsiooni kujutamine polaarkoordinaatides. On meil funktsioon $\varrho = g(\vartheta)$ kujutada, siis anname rippumata muutujale, nurgale ϑ , järje väärtusi, mis kerged on konstruuda ja milledele kerge on leida kas arvutamise ehk konstruimise teel vastavaid raadiusvektoreid ϱ . Saadud väärtuspaarid (ϱ, ϑ) kujutame $\varrho\vartheta$ -tasapinnas täppidena, mis sileda kõvera abil ühendame. Viimane on antud funktsiooni graafik.

8. Näide 1. $\varrho = 0.2 \vartheta$. Anname ϑ -le järje väärtusi, näiteks iga π kuuendiku tagant, ja arvutame täpsusega 0.1 vastavad ϱ -d:

ϑ	0	$1 \cdot \frac{\pi}{6}$	$2 \cdot \frac{\pi}{6}$	$3 \cdot \frac{\pi}{6}$	...
ϱ	0	0.1	0.2	0.3	...

Võtame ringi (joon. 23), jagame tema 12-ks võrdseks osaks ja nummerdame jagamistäpid järgemööda 0, 1, 2, ... 10, 11 ja edasi 12, 13 jne.

Ühendame keskkoha jagamistäppidega kiirte abil; nemad sünnitavad 0-sihiga ülevalnimetatud nurgad. Valime pikkusmõõdu (joonises on selleks raadius võetud) ja kujutame kiirtel 0, 1, 2, ... vastavad ϱ väärtused. Saadud täpid ühendame kõvera abil. Saame nõutud funktsiooni kuju.



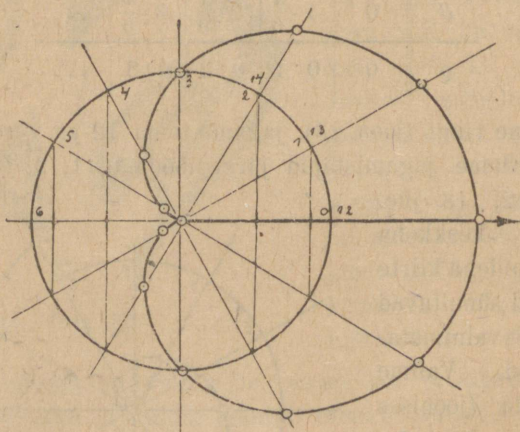
Joon. 23.

Näide 2. $\varrho = 1 + \cos \vartheta$. Joonistame ringi raadiusega üks (joon. 24); jagame ta näiteks 12-ks osaks, nummerdame jagamistäpid 0, 1, 2, ... 10, 11 ja edasi 12, 13 jne., ühendame na-keskkohaga kiirte abil ja projekteime nad 0-diaameetrile; see annab meile cosinus'ed nurkadest, mis saadud kiired 0-kiirega

sünnitavad. Kanname need cosinus'ed jagamistäppidest alates meie kiirtele ja ühendame leitud täpid kõvera abil. See on nõutud funktsiooni kuju.

9. Funktsioonide kujutamiseks polaarkoordinaatides on väga kohane n. n. polaarkoordinaat-paberit tarvitada (joon. 25).

10. **Funktsiooni mõiste laiendamine: ilmutamata funktsioonid.** Olgu antud võrrand, mis seob kaht muutujat, nimetame neid x ja y ; näiteks: $3x+4y-12=0$, või $9x^2+4y^2-36x=0$, või $x^3-3xy+y^3=0$, üldiselt $F(x, y)=0$, kus F on lause tähiseks, mis ütleb, mis tehted tuleb x



Joon. 24.

ja y -ga teha, et saada võrrandi pahema osa. Nii on esimeses võrrandis $F(x, y)=3x+4y-12$. Kui selle esimese võrrandi lahendame y suhtes, saame $y=-\frac{3}{4}x+3$: meie võrrand määrab y funktsioonina x -ist. Et temast aga otsekohe näha ei ole, mis tehted tuleb x -iga teha, et sellele vastavat y -d saada, siis nimetame tema poolt määratud funktsiooni ilmutamatuks. Selle ilmutatud kuju on: $y=-\frac{3}{4}x+3$.

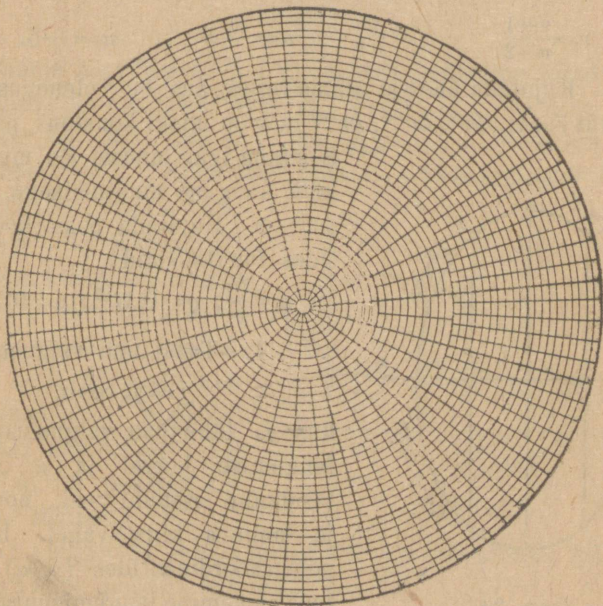
Tahaksime meie teisest võrrandist y -d ilmutada x -i funktsioonina, siis saaksime kaks seesugust:

$$y_1 = +\frac{3}{2}\sqrt{4x-x^2} \text{ ja } y_2 = -\frac{3}{2}\sqrt{4x-x^2}.$$

Me vaatame neid kui kaht (ühe ainsa) funktsiooni haru, mis määratud võrrandi abil:

$$9x^2 + 4y^2 - 36x = 0.$$

Kui nõnda funktsiooni mõistet laiendada, siis võib iga rippumata muutuja väärtusele 2, isegi 3, 4 jne. rippuva muutuja väärtust vastata.



Joon. 25.

Ilmutamata funktsioonide kujutamine sünnib samuti kui ilmutatutegi oma. Nii vastab tabel

x	0	+1	+2	+3	+4
y	0	$\pm \frac{3\sqrt{3}}{2}$	± 3	$\pm \frac{3\sqrt{3}}{2}$	0

ja kõver joonises 26 ilmutamata funktsioonile, mille määrab võrrand $9x^2 + 4y^2 - 36x = 0$.

Ülesanded.

1. Kujutada järgmised funktsioonid püstkoordinaatides:

$$y = \frac{12}{4+x^2} \quad \text{vahemikus } x = -6 \text{ kuni } x = +6,$$

$$s = t^2 - 5t + 6 \quad \text{,,} \quad t = -1 \quad \text{,,} \quad t = +5,$$

$$v = \frac{u-1}{u-2} \quad \text{,,} \quad u = -5 \quad \text{,,} \quad u = +5.$$

2. Kujutada ühes ja samas teljestikus jõu f olenevus kaugusest r , kui $f = kr, kr^2, kr^{-1}, kr^{-2}$ ja k on miski konstant, näiteks 1. Seletada igal juhul jõu muutumise käik kauguse muutumisega.

3. Kujutada polaarkoordinaatides funktsioonid:

$$\varphi = \frac{2\pi}{9}; \quad \varphi = 0.1\vartheta^2; \quad \varphi = 0.1.2\vartheta.$$

4. Tasapinna valgustus

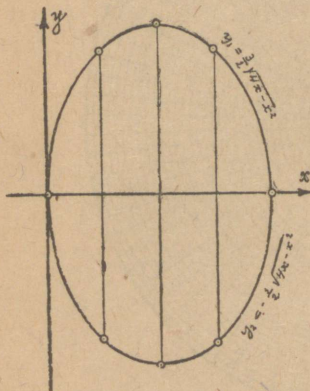
$$j = j_n \cos \alpha,$$

kus j_n tähendab valgustust otsese langemise korral ja α on nurk tasapinna ristsihi ehk normaali¹⁾ ja langeva kiire vahel. Kujutada polaarkoordinaatides (j, α) valgustuse olenemine langemispurgast, võttes j_n kujuks mingi kindla pikkuse.

5. Kujutada ilmutamata funktsioonid, mis on antud järgmistest võrrandite abil:

$$2x - 3y - 6 = 0, \quad x^2 + y^2 - 2x = 0, \quad x^2 - y^2 = 1, \quad y^2 - 0.1x^3 - 1 = 0, \\ x^2 - 5xy + 6y^2 = 0.$$

Leida nende funktsioonide harude arv ja avaldused.



Joon. 26.

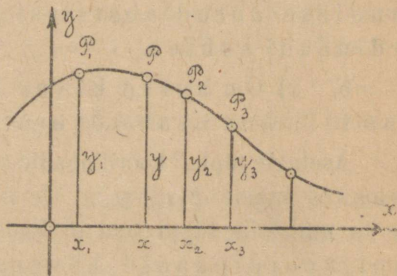
1) normalis — otsene.

4. Kõvera võrrand.

1. **Kõvera võrrandi mõiste.** Olgu antud mõni funktsioon $y=f(x)$, ehk, kui ilmutamata kujus, siis võrrandi abil $F(x, y)=0$. Et seda funktsiooni graafiliselt kujutada, anname rippumata muutujale järje väärtusi: $x_1, x_2, x_3, \dots$ ja arvutame nendele vastavad y -d: $y_1, y_2, y_3, \dots$. Saame tabeli:

x	x_1	x_2	x_3	$\dots$
y	y_1	y_2	y_3	$\dots$

Võtame koordinaatteljed (joon. 27), määrame sihid, valime pikkusmõõdu ja märgime täpid $P_1, P_2, P_3, \dots$, millede koordinaadid on $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots$. Ühendame saadud täpid kõvera abil. Nimetame teda C . Peaks täppide ühendamisel nende hõreduse tõttu kahtlus tekkima kõvera jooksu kohta, siis võtame kahtlases piirkonnas rea x -i väärtusi, arvutame nendele vastavad y -d, märgime saadud arvpaaridele vastavad täpid, kuni nad küllalt tihedalt asuvad, et nendest kõverat läbi tõmmata.



Joon. 27.

Missuguses vahekorras on saadud kõver C võrrandiga $y=f(x)$ ehk $F(x, y)=0$?

Igale arvpaarile (x, y) , mis rahuldab meie võrrandit, vastab üks ja ainult ükstäpp kõveral; ümberpöörduvalt: igal kõvera täpil on koordinaadid, mis rahuldavad võrrandit.

Selle kõvera ja võrrandi vahekorra väljendame lühidalt lauses: kõver C on võrrandi $F(x, y)=0$ kuju, ehk $F(x, y)=0$ on kõvera C võrrand.

Samuti võiksime käsitada võrrandit $G(\varrho, \vartheta)=0$ polaarkoordinaatides.

2. **Kõvera võrrandi definitsioon.** Nõnda siis: kõvera võrrand on niisugune kahe muutuja side, mida rahuldavad iga selle kõvera täpi koordinaadid.

3. Selle asemel, et ütelda: kõver C , mille võrrand on $F(x, y)=0$, ütleme lühemalt: kõver $F=0$.

Leida kõver, tähendab leida selle kõvera võrrand.

4. **Mõned põhiülesanded**, mis kõvera võrrandi abil lahendatakse. 1) On antud kõver $F(x, y)=0$ ja mingi tema täpi abstsiss x_0 . Leida selle ordinaat.

Olgu viimane y_0 . Arvpaar (x_0, y_0) peab antud võrrandit rahuldama: $F(x_0, y_0)$ peab olema võrdne 0-ga; järjekult saame y_0 , lahendades võrrandit $F(x_0, y_0)=0$ selle otsitava y_0 suhtes. Sõnades: et nõutud ordinaati saada, asetame võrrandisse antud abstsissi ja lahendame saaduse ordinaadi suhtes.

5. 2) On antud kõver $F(x, y)=0$ ja täpp $P(x_0, y_0)$. Kas viimane asub kõveral või mitte?

Asetame täpi P koordinaadid (x_0, y_0) võrrandi pahemasse osasse; saame $F(x_0, y_0)$. On see null, asub täpp kõveral; ei ole ta null, siis täppi seal ei leidu. Lühemalt: rahuldavad täpi koordinaadid kõvera võrrandit, siis asub täpp kõveral, vastasel korral mitte.

6. 3) On antud kõver $F(x, y)=0$. Leida tema ühistäpid x -teljega.

Nendes on ordinaat $y=0$. Olgu ühe otsitava täpi abstsiss x_0 ; koordinaadid $(x_0, 0)$ peavad antud võrrandit rahuldama: $F(x_0, 0)$ peab olema võrdne 0-ga. See annab meile võrrandi $F(x_0, 0)=0$ ühe otsitavaga x_0 ; tema juured on nõutavate täppide abstsissid. Lühidalt: nimetatud ühistäppide saamiseks asetame kõvera võrrandisse nende ordinaadi 0 ja lahendame saaduse x -i suhtes; see annab meile otsitavad abstsissid. Analoogiliselt saadakse kõvera ühistäpid y -teljega.

Näide. Kõvera $x^2 - 3xy + y^2 - 5x + 6 = 0$ ja x -telje ühistäppide ordinaadid on 0, nende abstsissid rahuldavad võrrandit: $x^2 - 5x + 6 = 0$ ja on järjekult $x_0' = +2$, $x_0'' = +3$.

7. 4) On antud kaks kõverat: $F_1(x, y) = 0$ ja $F_2(x, y) = 0$. Leida nende ühistäpid.

Olgu ühe seesuguse täpi koordinaadid (x_0, y_0) . Et see täpp nii esimesel kui ka teisel kõveral asub, siis peavad tema koordinaadid nii esimest kui ka teist võrrandit rahuldama: $F_1(x_0, y_0)$ peab olema 0, samuti $F_2(x_0, y_0)$: $F_1(x_0, y_0) = 0$, $F_2(x_0, y_0) = 0$. Otsitavate täppide koordinaadid saadakse antud võrrandite $F_1 = 0$ ja $F_2 = 0$ ühisel lahendamisel.

Näide. Leida kõverate $x^2 + y^2 = 4$ ja $y^2 + 3x = 0$ ühistäpid.

Asetame nende kahe võrrandi ühiseks lahendamiseks teisest y^2 väärtuse, $-3x$, esimesse: $x^2 - 3x - 4 = 0$. Nõnda saame lahendamisel kaks abstsissi: $x_0' = -1$ ja $x_0'' = +4$. Vastavate ühistäppide ordinaadid on $y_0' = +\sqrt{3}$, $y_0'' = +\sqrt{-12}$. Viimased kaks on imaginaarsed¹⁾. Sellega on meie kõveratel 2 ühistäppi $(-1, +\sqrt{3})$ ja $(-1, -\sqrt{3})$.

8. Et võrrandeid $F(x, y) = 0$ ja $kF(x, y) = 0$, kus k kindel arv on, rahuldavad ühed ja samad arvpaarid, siis määravad nad ühe ja sama kõvera. Sellepärast: kõvera võrrandit võib kindla teguriga lühendada.

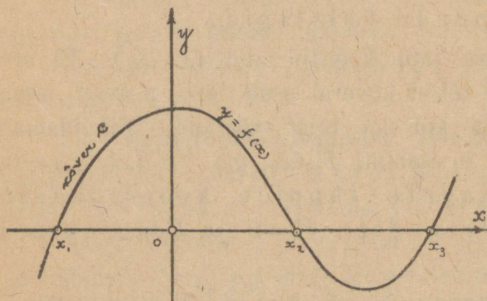
9. Graafiline võrrandite lahendamine. Olgu meile antud lahendamiseks mõni võrrand, näiteks $x^2 - 5x + 6 = 0$, või $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$, või $2x^2 - 3x + 1 = 0$, üldiselt $f(x) = 0$. Võrrandi juured on arvud, mis, kui nad võrrandi pahe-
masse osasse asetada, resultaadina nulli annavad. Kujutame graafiliselt püstkoordinaatides antud võrrandi pahema osa funktsioonina x -ist; olgu selle funktsiooni kujud kõver C (joon. 28). Tema ühistäppides x -teljega saab tema ordinaat, tähendab ka funktsiooni väärtus, nulliks. Kõvera C lõike-

1) imaginarius — ettekujutatav.

täppide abstsissid x -teljega on otsitud võrrandi juured.

Märkused. 1) Graafiline meetod annab võrrandi juured

ainult teatava täpsusega, harilikult mitte suuremaga, kui 0.01 otsitavast suurusest. Praktilisteks otstarveteks on aga seda täpsust küllalt.



Joon. 28.

$2^x - 3x + 1 = 0$, $\log x - 3x - 2 = 0$, $\sin x - \frac{1}{3}x = 0$ jne., on ainult kaks teed olemas: proovimine ja graafiline meetod.

Ülesanded.

1. Kujutada ühes ja samas teljestikus jooned:

$$y=0.x, y=1.x, y=2.x, y=3.x, y=4.x, y=5.x.$$

2. Kujutada ühes ja samas teljestikus vahemikus -1 -st kuni $+1$ -ni kõverad: $y=x$, $y=x^2$, $y=x^3$, $y=x^4$, $y=x^5$.

3. Joonistada kõver: $xy - 4x - 1 = 0$ ja leida tema ühistäpid telgedega.

4. Kujutada jooned $\varrho \cos \vartheta - 2 = 0$, $\varrho - 2 \cos \vartheta = 0$.

5. Kujutada kõverad $xy = \sqrt{6}$ ja $x^2 + y^2 = 5$ ja leida graafiliselt ja arvutamise teel nende ühistäpid.

6. Missugused järgmistest joontest lõikavad algust:

$$3x + 4y = 0, x - 2y - 1 = 0, 2^x - 3y - 1 = 0, x^2 - 2xy + 4y - 5 = 0?$$

7. Missuguses täpis on kõvera $10^x + y - 1.1 = 0$ ordinaat 1?

8. Lahendada graafiliselt ja numbriliselt järgmised võrrandid: $\frac{1}{2}x - 1 = 0$; $x^2 - 5x + 6 = 0$, $2 + x - x^2 = 0$.

9. Sama ülesanne võrrandite kohta: $x - \frac{2}{x} + 1 = 0$,
 $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.

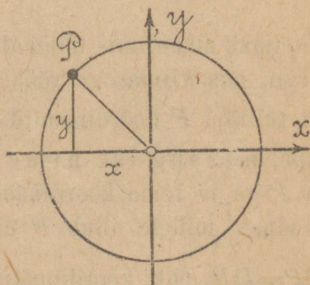
10. Lahendada graafiliselt järgmised võrrandid:
 $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$, $\log x - \frac{1}{2}x^2 + 1 = 0$; $2^x - x^2 - x = 0$.

5. Kõvera võrrandi leidmine.

1. **Täpi geomeetrilise koha mõiste.** Kõverad on kogud täppe, mis kõik ühele ja samale seadusele alluvad. Seesuguseid korrapäraseid täppkogusid nimetatakse ka täppide geomeetrilisteks kohtadeks. Nõnda on ring nende täppide geomeetriline koht, mis ühel ja samal kaugusel kindlast täpist, ringi keskkohast, asuvad; ehk: parabool¹⁾ on nende täppide geomeetriline koht, mis ühel ja samal kaugusel kindlast täpist ja kindlast sirgest asuvad. Kindlat täppi ja sirget nimetatakse parabooli tulitäpiks ja juhtjooneks.

2. **Kõvera võrrandi leidmine.** Leida kõvera võrrandit tähendab leida niisugust kahe muutuja sidet, — nimetame neid x ja y —, mida rahuldaksid igasuguse kõveral võetud täpi koordinaadid. Enne kõvera võrrandi leidmise üldise juhise andmist võtame mõttekäigu selgitamiseks mõned näited.

3. Näide 1. Leida ringi võrrand, mille antud raadius on r . Valime koordinaattelgedeks kaks ristdiameetrit ja määrame sihid (joon. 29). Võtame ringil mõne täpi, jättes ütlemata, mis-suguse nimelt; olgu tema tähi-seks P ja tema koordinaatideks x ja y . See täpp allub ühiselt kõikide teiste ringi täppidega seadusele, mis ringi määrab;



Joon. 29.

1) parabole — kõrvuseade.

nimelt tema kaugus keskkohast on, nagu iga teisegi ringitäpi oma, r ; järjestikult on selle kauguse ruut r^2 . Teiselt poolt on viimane aga (v.2.18) x^2+y^2 ; sellepärast on:

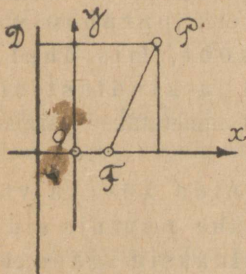
$$x^2+y^2=r^2.$$

See x ja y side on maksev täpi P kohta; et aga viimane mis täpp tahes ringil oli, on ta maksev ka iga teise ringitäpi kohta; järjestikult on ta ringi võrrand.

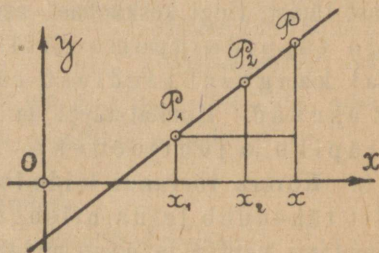
Samuti saaksime ringi võrrandi, mille keskkohast on täpis (a , b) ja raadius r , kujus:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$$

4. Näide 2. Leida parabooli võrrand, mille tulitäpi ja juhtjoone vahe on p . Valime teljed (joon. 30):



Joon. 30.



Joon. 31.

x -teljeks sirge, mis tõmmatud tulitäpist risti juhtjoonega; y -teljeks sirge, mis viimasega rööbiti ja antud kaugust p poonitab. Siis on tulitäpi F koordinaadid $(\frac{p}{2}, 0)$. Võtame paraboolil mingi täpi; missuguse nimelt, jätame ütlemata. Tähistame ta P -ga ja tema koordinaadid x ja y -ga. Avaldame nende abil seaduse, millele allub P ühiselt kõigi teiste parabooli täppidega:

$FP=DP$, ehk, koordinaatides, $\sqrt{(x-\frac{p}{2})^2+y^2}=x+\frac{p}{2}$. Saadud x ja y side on maksev täpi P koordinaatide kohta. Et aga viimane mis parabooli täpp tahes oli, on ta maksev ka iga teise niisuguse koordinaatide kohta; ta on sellepärast otsitud parabooli võrrand. Vabastades juuremärgist ja koondades, saame tema kujus: $y^2=2px$.

5. Näide 3. Leida kahe täpi $P_1(x_1, y_1)$ ja $P_2(x_2, y_2)$ ühendussirge võrrand (mitte nende kaugus!).

Et täpid koordinaatides on antud, siis peavad teljed antud olema. Teeme joonise (joon. 31): Ox ja Oy on teljed; P_1, P_2 antud täpid, P mis täpp tahes sirgel P_1P_2 ; olgu x ja y tema koordinaadid. Sirge mõiste on algmõiste; sirget meie defiinida ei suuda: meil puudub üldine seadus, millele kõik sirge täpid alluvad; x, y sidumise aluseks võtame sellepärast mõne sirge omaduse. Kujutame täppide P_1, P_2 ja P koordinaadid ja tõmbame täpist P_1 sirge rööbiti x -teljega. Saame kaks täisnurkset kolmnurka hüpotenuusidega P_1P ja P_1P_2 . Sarnasuse tõttu on kaatetite suhted võrdsed:

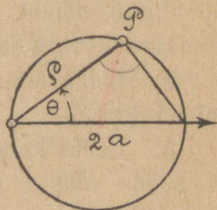
$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}.$$

Täpi P koordinaadid on üksteisega seotud. Et täpp P sirgel P_1P_2 oli vabalt valitud, on saadud xy -side maksev iga meie sirge täpi koordinaatide kohta; sellega on ta nõutud sirge võrrand; x ja y esinevad temas esimeses astmes.

6. Et iga sirge kahe täpiga määratakse, siis võime öelda: iga sirge võrrand on esimese astmeline.

7. Näide 4. Leida ringi võrrand polaarkoordinaatides.

1) Valime ringi keskkoha pooluseks, mingi raadiuse sihi polaarteljeks. Siis on iga ringitäpi raadiusvektor $\varrho = a$, kus a on ringi raadius. See ongi meie ringi võrrand. Polarnurka temas ei ole; viimane võib missugune tahes olla (ka null muidugi; ta ei pea aga tingimata null olema!).



Joon. 32.

2) Valime pooluseks mõne ringitäpi, polaarteljeks temas algava diameetri; siis on iga ringitäpi raadiusvektor (joon. 32):

$$\varrho = 2a \cos \vartheta,$$

millega on leitud otsitud võrrand.

8. Üldiselt kokku võttes saame järgmise **juhise kõvera võrrandi leidmiseks**: me valime teljestiku, määrame sihid, võtame kõveral mõne täpi (ütlemata jättes, missuguse nimelt), tähistame tema koordinaadid ja avaldame nendes seaduse, millele kõik kõvera täpid alluvad, ehk omaduse, mis nendele kõikidele omane, ehk tingimuse, millele kõik kõvera täpid peavad vastama. Saadud side koordinaatide vahel on maksev võetud täpi kohta ja, et viimane kõveral vabalt on valitud, ka iga teise kõvera täpi kohta. Järjekult on saadud side nõutav võrrand.

Märkus. Seesuguse vabalt valitud kõvera täpi koordinaate nimetatakse sagedasti jooksvateks. Sõna „jooksvad“ seisab sõnade asemel: „vabalt võetud kõvera täpi —“.

9. Märkus. Kõvera võrrand vabastatakse harilikult murdudest ja juuremärkidest ja kirjutatakse „täiskujus“, nõnda et tema pahem pool hulkliikmena esineb, parem null on.

Ülesanded.

1. Kolmnurga alus a asetseb abstsissteljel; tema vastastipp liigub nõnda, et kolmnurga pind muutumatuks c jääb. Missuguse kõvera joonistab tipp?

✓ 2. Leida kõvera võrrand, mille täpi kauguste suhe telgedeni on 1:2.

✓ 3. Leida kahe kolmnurga ühise tipu geomeetiline koht, kui nende alused asuvad x - ja y -telgedel ja nende pindade summa on s .

4. Missugune on see koht, kui eelmises ülesandes pindade suhe on $m:n$?

✓ 5. Leida täpi geomeetiline koht, mille kaugused antud täppidest $P_1(0, -2)$ ja $P_2(-3, +1)$ on võrdsed.

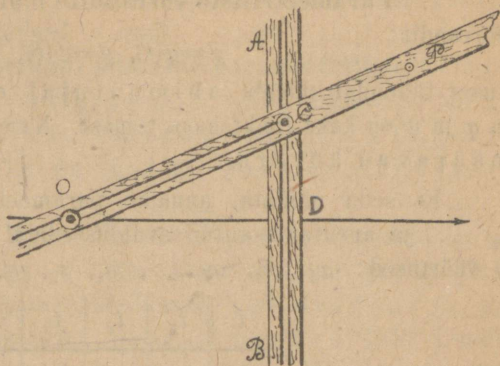
✓ 6. Leida täpi geomeetiline koht, kui tema kauguste ruutude vahe kahest antud täpist $(+3, -2)$ ja $(-1, +6)$ on 8.

✓ 7. Täisnurk liigub nõnda, et tema küljed kahte naela F_1 ja F_2 mööda liuguvad; $F_1 F_2 = 2a$. Leida selle kõvera võrrand polaarkoordinaatides, mis joonistab täisnurga tipp.

✓ 8. Missuguse kõvera joonistab täisnurga külje täpp eelmises ülesandes, mille kaugus tipust on b ?

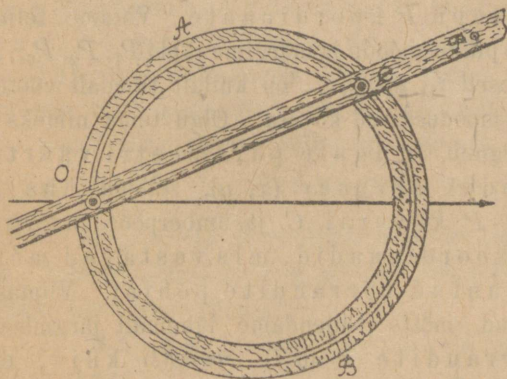
✓ 9. Joonlauas (joon. 33) on tema pikkuse sihis väljalõike tehtud, nõnda

et tema vabalt naela O ümber võib pöörelda ja teda mööda liuguda. Sellesse lauda löödud nael C liugub teise joonlaua AB



Joon. 33.

väljalõikes. Täpis P asub joonistikk. Missuguse kõvera ta joonistab mehhanismi liikumisel? Andmed: $OD = a$, $CP = b$; O —poolus, OD — polaartelg. Konstruida kõverad juhustel $b \geq 0$, $|b| \geq a$. Need kõverad kannavad „konkoidide“ nime¹⁾.



Joon. 34.

10. Eelmises ülesandes võtta sirge AB asemel ring AB (joon. 34). Kõveraid, mis see mehhanism joonistab, nimetatakse „Pascal'i tigudeks“.

1) konchoide — tigujoon, karploom-joon.



6. Kõvera parameetrilised võrrandid.

1. Parameetriliste võrrandite mõiste. Olgu antud kaks võrrandit:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

kus t tähendab mõnda abimuutujat ehk parameetrit¹⁾, ja φ ja ψ on kaks funktsiooni temast. Need kaks võrrandit määravad kõvera.

Et seda näidata, anname parameetrile t väärtused $t_1, t_2, t_3, \dots$, ja arvutame antud avalduste abil nendele vastavad x ja y väärtused: $x_1, x_2, x_3, \dots, y_1, y_2, y_3, \dots$. Saame tabeli:

t	t_1	t_2	t_3	$\dots$
x	x_1	x_2	x_3	$\dots$
y	y_1	y_2	y_3	$\dots$

Igaüht niiviisi saadud arvpaari (x, y) käsitame kui mõne täpi P koordinaate. Võtame teljed, määrame sihid, valime pikkusmõõdu ja märgime täpid $P_1, P_2, P_3, \dots$. Kui parameetri väärtused $t_1, t_2, t_3, \dots$ on küllalt tihedalt võetud, näeme, et need täpid moodustavad kõvera. Olgu tema nimeks C . Konstruimisviisist järgneb, et igale parameetri väärtusele vastab kindel arvpaar (x, y) , sellega üks ja ainult üks täpp P kõveral C ja ümberpöörduvalt: igal kõveratäpil on koordinaadid, mis vastavad mõne t eriväärtusele antud võrrandite põhjal. Viimases kahes lauses seletatud mõtte väljendame lühemalt järgmiselt: kõver C on võrrandite $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ küju, ehk $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ on kõvera C parameetrilised võrrandid.

Samuti võiksime käsitada kahte võrrandit polaarkoordinaatides: $\varrho = g(t), \vartheta = h(t)$.

2. Märkus. Tabeli kokkuseadmisel tuleb parameetrile

1) parametron — kõrvalmõõt, kaasmõõt.

t niisugused väärtused anda, et nendele vastavate koordinaatide arvutamine sünniks võimalikult vähese vaevaga; näiteks täisarvulised 1, 2, 3, ..., ehk, kui trigonomeetriliste funktsioonidega tegemist, võrdsed π osad.

3. **Cartesiuse-võrrandi leidmine parameetristest.** Olgu antud 2 võrrandit: $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$. Nad määravad mingi kõvera C . Sellel on oma Cartesiuse-võrrand: $F(x, y)=0$. Kuidas viimast leida antud parameetristest võrranditest?

Iga parameetri t väärtusele vastab paar koordinaate (x, y) ja sellega kõveral C täpp P . See koordinaatpaar (x, y) peab kõvera võrrandit $F(x, y)=0$ rahuldama: iga arvpaar (x, y) , mis süsteemist $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ saadud (t -le kindla väärtuse andmisel), rahuldab võrrandit $F(x, y)=0$. See tähendab, et viimane võrrand on antud süsteemijäreldus; pealegi on tema parameetrist t -st vaba. Sellepärast: et kõvera parameetristest võrranditest saada tema Cartesiuse-võrrandit, tuleb nendest niisugune kolmas järeldada, mis parameetrit ei sisaldaks. Võõrakeelse sõnaga: antud parameetristest võrranditest tuleb abimuutuja elimiiniida¹⁾.

See t elimiiniimine võib väga mitmel viisil sündida.

4. Näide 1. Olgu $x=2t+1$, $y=\frac{1}{2}t^2$. Arvutame esimesest t : $t=\frac{1}{2}(x-1)$, ja asetame saaduse teise: $y=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}(x-1)^2$, ehk: $8y=x^2-2x+1$, kust $x^2-2x-8y+1=0$. See on otsitud kõvera Cartesiuse-võrrand.

5. Näide 2. Olgu $x=3.\cos t$, $y=2.\sin t$. Avaldame $\cos t$ ja $\sin t$:

$$\cos t = \frac{x}{3}, \quad \sin t = \frac{y}{2}.$$

Et parameetrist vabaneda, tõstame mõlemad avaldused ruutu ja liidame resultaadid:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

See on nõutud kõvera Cartesiuse-võrrand.

1) eliminare — välja heltma, eemaldama.

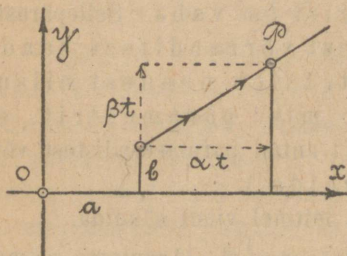
6. Et näidata abimuutujate kasutamist geomeetriliste küsimuste käsitlemises, lahendame nende abil **mõned ülesanded**.

1) Täpp liigub ühtlaselt kahes telgsihis (joon. 35) kiirustega α ja β , alates oma teed täpis (a, b). Leida tema tee võrrand. Mõõtsüsteem: cm, sec.

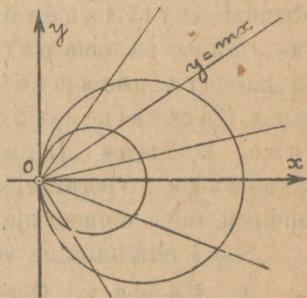
Olgu t mis sekundite arv tahes. Leiame täpi koha P ajal t . Aja alguses oli täpi abstsiss a ; t sec jooksul kasvas see viimane at cm võrra; sellega on täpi abstsiss momendil t $a+at$, samuti tema ordinaat $b+\beta t$. Nõnda siis:

$$x = a + at, \quad y = b + \beta t.$$

Need kaks võrrandit määravad täpi koha igal ajamomendil: nad on täpi tee võrrandid. Parameetri osa etendab aeg.



Joon. 35.



Joon. 36.

Leiame selle tee Cartesiuse-võrrandi; selleks tuleb parameetristest abimuutuja t elimiिनida. Korrutame selleks esimest β -ga, teist α -ga ja lahutame saadused:

$$x\beta - y\alpha = a\beta - b\alpha.$$

See on otsitud võrrand.

7. 2) On antud ring, mille keskkoh on täpis $(+1, 0)$ ja raadius üks. Algusest on süsteem kiiri tõmmatud kohtumiseni ringiga. Leida nende kiirte poolitamistäppide geomeetiline koht (joon. 36).

Ringi võrrand on (v.5.3): $(x-1)^2+y^2=1$, ehk: $x^2+y^2-2x=0$.
Võtame mõne nimetatud kiirtest ja valime abimuutujaks m tangents'i nurgast, mille tema positiivse x -teljega sünnitab. Kui siis kiirel mingi täpi vabalt valime ja tema koordinaadid x ja y tähistame, saame kiire võrrandi:

$$y=mx.$$

Otsime kiire lõiketäpid ringiga; lahendame selleks ühiselt kaks võrrandit:

$$x^2+y^2-2x=0 \text{ ja } y=mx.$$

Saame: $x^2+m^2x^2-2x=0,$

kust: $x_1=0, x_2=\frac{2}{1+m^2}$

ja sellepärast: $y_1=0, y_2=\frac{2m}{1+m^2}$

tuleb. Nõnda on meil kaks lõiketäppi:

$$(0, 0) \text{ ja } \left(\frac{2}{1+m^2}, \frac{2m}{1+m^2}\right).$$

Tähistame kiire poolitamistäpi koordinaadid x_0, y_0 ; nende väärtused on (v.2.20):

$$\frac{1}{2}(x_1+x_2) \text{ ja } \frac{1}{2}(y_1+y_2),$$

ehk: $x_0=1:(1+m^2); y_0=m:(1+m^2).$

Sellega on meil poolitamistäpp m -kiirel käes. Laseme nüüd m -il omandada kõiksugu väärtusi; saame järjest kõik poolitamistäpid; m -i muutumisega kirjeldab täpp (x_0, y_0) otsitava kõvera. Viimased kaks võrrandit on tema parameeterkujud.

Et tema Cartesiuse-võrrandit saada, elimiinine m ; meie saame $m=y_0:x_0$, sellepärast $x_0=x_0^2:(x_0^2+y_0^2)$, ehk

$$x_0^2+y_0^2-x_0=0,$$

See on nõutud võrrand jooksvates koordinaatides (x_0, y_0) .
Ta kujutab ringi, mille keskkoh on täpis $(+\frac{1}{2}, 0)$ ja raadius $\frac{1}{2}$.

8. Märkus. Oleksime meie polaarkoordinaate tarvitanud, oleks antud ringi võrrand olnud (v.5·7,2): $\varrho=2\cos\vartheta$; järjestikult otsitava geomeetrilise koha oma: $\varrho_0=\frac{1}{2}\cdot 2\cos\vartheta=\cos\vartheta$. See on ring, mille läbimõõt on üks.

Ülesanded.

1. Konstruida kõverad:

$$x=2t+1, y=\frac{1}{2}t^2;$$

$$x=\frac{t}{1+t^2}, y=\frac{1}{1+t^2};$$

$$x=2(1-\cos t), y=2(1-\sin t);$$

$$x=3\cos t, y=2\sin t.$$

2. Joonistada kõver: $x=s-1, y=3(1+s^2)$ ja leida tema Cartesiuse-võrrand.

3. Joonistada kõver: $x=2\sec\omega, y=2\tan\omega$, kõiki tarvilikka suurusi graafiliselt ringist võttes. Missugune on selle kõvera Cartesiuse-võrrand?

4. Joonistada kõverad: $\varrho=\frac{2}{t}, \vartheta=2t;$

$$\varrho=2\lambda, \vartheta=5\lambda.$$

Missugused on nende võrrandid polaarkoordinaatides?

5. Täpp jookseb ühtlase kiirusega c kiirt mööda, mis oma alguse ümber ühtlaselt nurkkiirusega ω pöörleb. Leida täpi tee võrrand polaarkoordinaatides.

7. Sirge võrrand.

1. Põhilause. Me nägime (v.5·5, 5·6), et iga sirge võrrand esimeseastmeline on; tõestame nüüd, et ka ümberpöördult — iga esimeseastmelise võrrandi:

$$Ax+By+C=0$$

kuju on sirge. Tarvilikku uurimist toimetame ositi.

1) Esinegu võrrandis ainult üks muutuja, tähendab, teise kordaja olgu 0 (mitte teine muutuja ise! Puudub võrrandis

muutuja, siis tähendab see ainult, et tema kordaja 0 on ja et sellepärast muutujal enesel, võrrandi rahuldamise suhtes, mis väärtus tahes võib olla). Siis on meie võrrand: $Ax + C = 0$ või $By + C = 0$. Avaldades muutujat saame: $x = -C:A$, $y = -C:B$, ehk lühemalt:

$$x = a \text{ või } y = b.$$

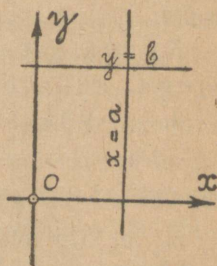
Esimene nendest on niisuguse joone võrrand, mille iga täpi abstsiss on a , vaatamata selle peale, missugune tema ordinaat on; järjekult on $x = a$ sirge võrrand, mis y -teljega rööbiti ja mille kaugus temast on a (joon. 37). Samuti on $y = b$ sirge, mis x -teljega rööbiti ja temast on kaugusel b .

2) Võrrandid $x = 0$ ja $y = 0$ edustavad analüütiliselt y - ja x -telje.

2. 3) Puudugu üldises võrrandis vaba liige: $Ax + By = 0$; kui siit y avaldame, saame $y = -\frac{A}{B}x$, ehk lühemalt, kui x -i kordaja tähistame m :

$$y = mx.$$

Anname x -le järje väärtusi: $x_1, x_2, x_3, \dots$; kujutame neid pikkustena abstsissiteljel (joon. 38): $OX_1, OX_2, OX_3, \dots$; tõmbame täppides $X_1, X_2, X_3, \dots$ püstjooned ja kanname neile vastavad y -d: $X_1P_1, X_2P_2, X_3P_3, \dots$. Viimased on m kordsed $OX_1, OX_2, OX_3, \dots$; sellest järgneb, et täisnurksed kolmnurgad $OX_1P_1, OX_2P_2, OX_3P_3, \dots$ on üksteisega sarnased. Nendel on ühine tipp O ; teised tipud $X_1, X_2, X_3, \dots$ asuvad sirgel, sellepärast peavad ka kolmandad tipud $P_1, P_2, P_3, \dots$ sirgel asetsema: võrrand: $y = mx$ kujutab sirget, mis algusest läbi läheb.

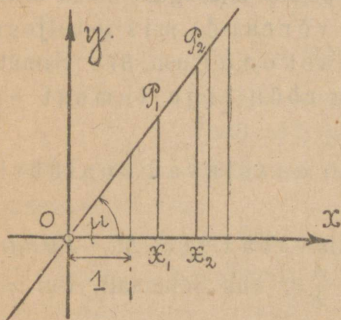


Joon. 37.

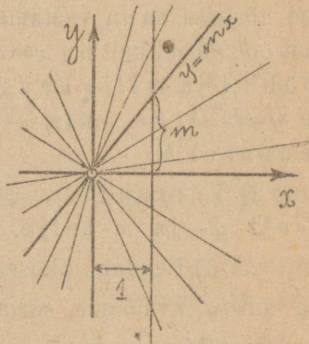
Sirge lõikab algust, kui tema võrrandis puudub vaba liige.

3. **Sirge tõus.** Kordajal m on lihtne geomeetiline tähendus: tema on, nagu kolmnurgast $OX P$ näeme, kus P mis täpp tahes meie sirgel on (joon. 38), tangens nurgast, mille sirge positiivse x -sihiga sünnitab: $m = \tan \mu$.

Geomeetriliselt on ta kujutatud ordinaadi pikkusena, mis vastab abstsissile üks. Kordaja m määrab sirge „tõusu“: mis suurem m , seda järsemalt tõuseb sirge, — ehk tema „kallet“,



Joon. 38.



Joon. 39.

kui m on negatiivne (joon. 39). Meie vaatleme kallet kui negatiivset tõusu ja nimetame sellepärast kordajat m ikka lühidalt tõusuks.

Nurga määramine, mis sirges sünnitab $+x$ -teljega, sünnib sirge tõusu abil.

4. 4) Võrrandid $y=x$ ja $y=-x$, ehk

$$x+y=0 \text{ ja } x-y=0,$$

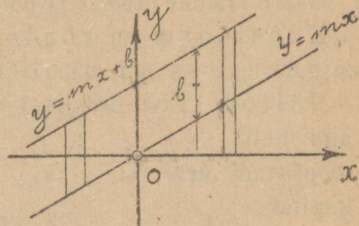
edustavad telgnurkade poolitajaid.

5. 5) On olemas kõik kolm liiget võrrandis $Ax+By+C=0$, siis lahendame tema y -suhtes: $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$, ehk lühemalt:

$$y = mx + b.$$

Et seda võrrandit geomeetriliselt tõlkida, võtame abiks sirge (joon. 40) $Y=mx$; see lõikab algust, ja tema tõus on m . Et y -ordinaate saada, tuleb Y -dele kindel pikkus b lisada; et täpid (x, Y) sirgel asuvad, siis asuvad ka täpid $(x, Y+b)$ ehk

(x, y) sirgel: võrrand $y=mx+b$ edustab sirget (joon. 40). Ta on abisirgega $Y=mx$ rööbik; ka võrrandis $y=mx+b$ määrab m tõusu. Andes x -ile väärtuse 0, saame vastava ordinaadi b : b on lõik, mis sirge sünnitab y -teljel, ehk b on algordinaat.



Joon. 40.

6. Seega on kõik juhused arvesse võetud; kokku võttes näeme, et igal esimese astmelise kahe muutujaga võrrandil on geomeetriliseks vastandiks sirge.

Sellepärast nimetatakse esimese astmelisi võrrandeid lineaarseteks¹⁾.

7. Tahame sirge: $Ax+By+C=0$ algordinaati ja tõusu leida, lahendame tema võrrandi y suhtes; siis määrab x -i kordaja tõusu, vaba liige algordinaat.

8. **Sirge konstruimine.** Sirge määramiseks on kahest täpist küllalt.

1) On sirge võrrandit võimalik kirjutada kujus: $y=mx$, siis lõikab ta algust. Anname x -ile mõne (nullist erineva) väärtuse, kõige parem niisuguse ümmarguse arvu, millele ka ümmargune y vastab; saame sirge täpi. Nõutav joon on selle täpi ja alguse ühendussirge (mitte lõik!).

2) On võrrand antud kujus: $y=mx+b$, siis märgime y -teljel pikkuse b , anname x -ile mingi (nullist erineva) väärtuse, arvutame y , märgime saadud arvpaarile (x, y) vastava täpi ja ühendame selle ja algordinaadi lõpu sirge abil; see viimane on otsitav.

9. **Lause otsevõrdelisest olenevusest.** Iga kaks otsevõrdelist suurust olenevad teineteisest lineaarselt.

Tähistame paari niisuguseid x ja y . Olgu järg esimese väärtusi: $x_1, x_2, x_3, \dots$ ja nendele vastavaid y -sid: $y_1, y_2, y_3, \dots$. Siis on oletuse põhjal: $y_1:x_1=y_2:x_2=y_3:x_3=\dots$. Teisiti, kui x

1) linea — niit, nõör, joon.

ja y on paar vabalt valitud teineteisele vastavaid väärtusi, siis on suhe $y:x$ kindel arv; tähistame teda m -ga, nõnda et $y:x=m$, ehk: $y=mx$. Sellega on meie lause tõestatud.

Otsevõrdelise olenevuse graafik on sirge.

Konstant m on võrde tegur. Tema geomeetriaalne tähendus on nimetatud sirge tõus.

Näited. Otsevõrdelised suurused on näiteks:

aine hulk	selle väärtus
tööpäevade arv	töö hulk
kapital	tema kasv
kiirus ühtlases liikumises	käidud tee
jõud	töö
temperatuuri kasv	aine paisumine
potentsiaalvahe	voolu tugevus
raske keha kõrgus üle kindla tasapinna	tema töö varu jne.

Iga seesuguse suuruspaaari olenevuse graafik on sirge.

10. Olgu meil kaks otsevõrdelist suurust; olgu u ja v mingi paar nende väärtusi, mis teineteisele vastavad; siis on

$$v=k \cdot u,$$

kus k on võrde tegur. Tema tähistab v väärtust, kui $u=1$. Selle võrdeteguri määramiseks on küllalt kahe teineteisele vastava u ja v väärtuse teadmisest; on nad u_0 ja v_0 , on $k=v_0:u_0$.

Näide 1. Keha mass (kui viimane ühtlaselt keha ruumi täidab) on võrdeline tema mahuga; olgu m ja v paar teineteisele vastavaid nende suuruste väärtusi; siis on

$$m=d \cdot v,$$

kus d on võrdetegur. Tema tähistab keha massi, kui viimase maht on 1: ta on keha olluse tihedus. vm -tasapinnas oleks massi ja mahu olenevuse kujud sirge; tihedus oleks selle tõus.

Näide 2. Newtoni II liikumisseaduse põhjal on jõud, mille sunnil keha oma vabast liikumisest loobub (mis ühtlane ja sirgjooneline on), võrdeline kiirendusega. Olgu f ja w paar teineteisele vastavaid jõu ja kiirenduse väärtusi; siis on

$$f=mw,$$

kus m on võrdetegur. Tema on keha mass. wf -tasapinnas kujutaks jõu olenevust kiirendusest sirge; massi edustaks selle sirge tõus.

11. Sirge võrrand lõikudes, mis ta telgedel sünnitab.

Olgu sirge võrrandis $Ax + By + C = 0$ vaba liige $C \neq 0$; leiame tema lõigud telgedel; tähistame nad vastavalt a ja b (joon. 41). Et x -teljel $y = 0$ on, siis on sirge lõiketäpis selle teljega $Aa + C = 0$, kust saame: $a = -C:A$ ja analoogiliselt $b = -C:B$. Võtame antud võrrandis vaba liikme paremale poole ja jagame temaga võrrandi mõlemad osad:

$$\frac{A}{-C}x + \frac{B}{-C}y = 1, \text{ ehk: } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

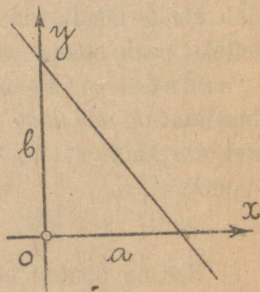
See on otsitud sirge võrrand.

12. Sirge konstruimine, kui ta algust ei lõika. Siis on $C \neq 0$, seega on võimalik sirge võrrandit kirjutada kujus $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$. Lõigud a ja b määravad telgedel kaks täppi; nende ühendussirge on otsitav.

Näide: $3x - 4y + 6 = 0$; $3x - 4y = -6$, $\frac{3}{-6}x - \frac{4}{-6}y = +1$, $\frac{x}{-2} + \frac{y}{+1\frac{1}{2}} = 1$. Lõigud telgedel on -2 ja $+1\frac{1}{2}$; nende abil on kerge sirget joonistada.

13. Tingimuste arv, mis sirget määravad. Sirge määratakse ikka 2 suuruse ehk andmega: 2 tema täppi ehk 2 lõiku, mis ta telgedel sünnitab, ehk algordinaat ja tõus; sellele olule vastab, et sirge võrrandis ikka 2 tingimata tarvilist kordajat on: a ja b , b ja m jne. (Üks nendest võib muidugi ka null olla!)

Ka üldises võrrandis $Ax + By + C = 0$ on ainult kaks (mitte 3!) seesugust kordajat. Tõesti, vähemalt üks kolmest A , B , C ei võrdu 0-ga, näiteks A mitte. Jagame temaga võrrandi ja tähistame $\frac{B}{A}$ β -ga, $\frac{C}{A}$ γ -ga; nõnda saame võrrandi $x + \beta y + \gamma = 0$ kahe kordajaga.



Joon. 41.

14. Kahte sirge võrrandi kordajat on ikka võimalik nõnda valida, et sirge vastaks kahele ettekirjutatud tingimusele.

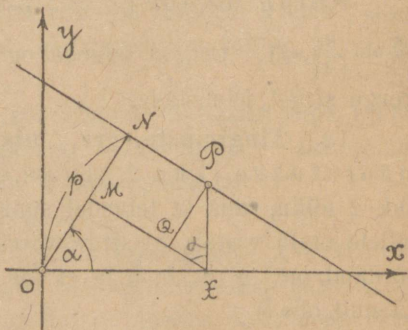
Näide. Sirge läbi antud täpi. Leiame sirge võrrandi, mille tõus on m ja mis täppi (x_0, y_0) lõikab.

Esimese tingimuse põhjal kirjutame tema võrrandi $y=mx+b$; jääb üle b nõnda valida, et ka teine tingimus oleks täidetud. Selleks peab olema: $y_0=mx_0+b$. Siit võime b arvutada antud suurustes m, x_0, y_0 ja ta siis esimesse võrrandisse asetada. Resultaat on siis b -st vaba: tema on b elimiinemise resultaat võrranditest: $y=mx+b$ ja $y_0=mx_0+b$. Lahutamise abil saame

$$y-y_0=m(x-x_0).$$

See on nõutud võrrand. Tõesti: tema aste on 1, järjestikult kujutab tema sirget; (x_0, y_0) rahuldavad teda: sirge lõikab täpi (x_0, y_0) , ja tema tõus on antud arv m .

15. Sirge võrrandi normaalkuju. Võtame kahe andmena, mis sirget määravad, sirge kauguse algusest, tema „normaali“ p (joon. 42), ja nurga α , mis viimane x -teljega sünnitab. Et sirge võrrandit leida, võtame sirgel mingisuguse täpi; olgu tema tähiseks P ja tema koordinaatideks x ja y . Seome nad üksteisega andmete p ja α abil. Olgu P projektsioon x -teljele X , viimase täpi projektsioon normaalile M , ja P projektsioon sirgele N . Joonisest näeme, et $OM=x \cos \alpha$, $MN=PQ=y \sin \alpha$, kust liitmise abil saame:



Joon. 42.

Joonisest näeme, et $OM=x \cos \alpha$, $MN=PQ=y \sin \alpha$, kust liitmise abil saame:

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = p.$$

See xy -side on saadud täpi P kohta; et viimane vabalt valitud sirge täpp oli, on ta maksev ka iga teise sirge täpi kohta; sellega on ta otsitud võrrand. Normaalkujuliseks võrrandiks nimetatakse teda normaali p tõttu, mis temas esineb.

16. Sirge võrrandi normimine. Olgu antud sirge

$$Ax + By + C = 0;$$

leida tema võrrand normaalkujus. See on $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$, kus p ja α meile esialgu teadmata. Et mõlemad võrrandid üht ja sama sirget edustavad, siis on tõenäone, et nad ainult kindla teguri poolest lahku lähevad. Katsume leida seesuguse teguri N , mis temaga korrutamisel esimese võrrandi teise üle viiks. On siis olemas, siis peab olema: $AN = \cos \alpha$, $BN = \sin \alpha$, $CN = -p$. Sellest järgneb, et peab olema: $A^2 N^2 + B^2 N^2 = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha$, $N^2(A^2 + B^2) = 1$,

ehk:
$$N = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Sellega on N väärtus leitud. Et p oluliselt positiivne on, siis valime määrgina C vastasmärgi; siis saab CN , nagu tarvis, negatiivseks.

Et sirge võrrandile normaalkuju anda, tuleb teda „normija teguriga“ korrutada. Viimane on üks jagatud $\pm$ ruutjuurega muutujate kordajate ruutude summast. Märgiks tuleb vaba liikme vastasmärk valida.

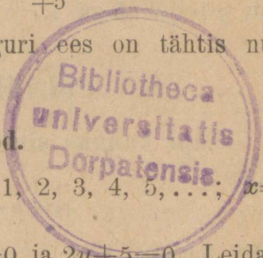
Näide. Sirge $3x + 4y - 12 = 0$ võrrandi normaalkuju on
$$\frac{3x + 4y - 12 = 0}{\pm \sqrt{3^2 + 4^2}} = 0 \text{ ehk } \frac{3x + 4y - 12}{+5} = 0.$$

Märkus. Märk normija teguri ees on tähtis nurga α määramisel $\sin \alpha$ ja $\cos \alpha$ abil.

Ülesanded.

1. Joonistada sirged: $y = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$; $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$.

2. Joonistada sirged: $3x + 8 = 0$ ja $2y + 5 = 0$. Leida nende ühistäpp.



3. Joonistada sirged: $2x-3y=0$, $5x+3y=0$ ja leida nende nurgad $+x$ -teljega.

4. Joonistada sirged: $y=0 \cdot x+1$, $1 \cdot x+1$, $2 \cdot x+1$, $3 \cdot x+1$, $4 \cdot x+1, \dots$; $-1 \cdot x+1$, $-2 \cdot x+1$, $-3 \cdot x+1$, $-4 \cdot x+1, \dots$.

5. Joonistada sirged: $y=x+0$, $x+1$, $x+2$, $x+3, \dots$, $x-1$, $x-2, \dots$.

6. Gay-Lussac'i seaduse põhjal on gaasi maht temperatuuril t $v=v_0(1+\alpha t)$, $\alpha=\frac{1}{273}$, kui v_0 tema ruumala jää sulamisel tähendab. Missugune joon kujutab geomeetriliselt seda seadust tv -tasapinnas? Missugune on geomeetriline tähendus arvudel v_0 ja $v_0\alpha$? Teha joonis, valides paras lõik pikkusmõõduks.

7. Ühtlases liikumises oleneb tee s ajast t seaduse järel: $s=s_0+ct$, kus s_0 aja alguseni käidud tee, c -kiirus¹⁾ on. Missugune on selle seaduse graafiline kuju ts -tasapinnas ja missugune on s_0 ja c geomeetriline tähendus?

8. Joonistada sirged: $3x+4y-12=0$, $x-5y+10=0$, $2x+3y+6=0$, $4x-y-8=0$.

9. Leida sirge võrrand, mis täppi $(2, -3)$ lõikab ja mille tõus on -1 . Missuguse nurga ta sünnitab $+x$ -teljega?

10. Kujutada jooned: $x \cos 30^\circ + y \sin 30^\circ = 2$,
 $x \cos 60^\circ + y \sin 60^\circ = 0$, $x \cos 225^\circ + y \sin 225^\circ = 3$.

11. Sirge lõikab täppe $(+1, +2)$, $(+3, -2)$. Leida tema võrrandid üldises kujus, lahendatud kujus, lõikudes ja normaalkujus. Joonistada sirge igäühe järel nendest kujudest.

12. Leida sirge võrrand, mis täppi $(+6, -4)$ lõikab ja sünnitab y -teljel lõigu 4.

8. Põhiülesanded sirgest.

1. Täpi kaugus sirgest. Olgu sirge võrrand antud normaalkujus:

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0.$$

Leiame antud täpi $P_0(x_0, y_0)$ kauguse temast.

1) celeritas — kiirus.

See on vahe täpi P_0 ja tema projektsiooni vahel sirgele; tähistame ta δ -ga. Et teda leida, tarvitame järgmist võtet. Tõmbame täpist P_0 (joon. 43) sirge rööbiti antud sirgega; siis langeb tema normaali siht p -sihiga kokku; selle normaali pikkus on $p \pm \delta$, kus märk $\pm$ sellest oleneb, kas algus O ja täpp P_0 lahutatakse sirgega ehk nad on ühel pool sirget. Järjekult on abisirge võrrand:

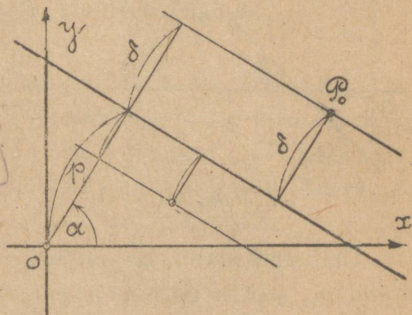
$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = p \pm \delta.$$

Et viimane täppi P_0 lõikab, siis peavad selle koordinaadid (x_0, y_0) tema võrrandit rahuldama: $x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha = p \pm \delta$, kust: $\delta = \pm(x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha - p)$, ehk viimati, et kaugus sihita suurus on:

$$\delta = |x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha - p|.$$

Sõnades: täpi kaugus sirgest on tema koordinaatide sirge normaalvõrrandi esimesse osasse asetamise resultaadi absoluutväärtus.

Ei ole sirge võrrand antud normaalkujus, vaid mõnes teises, siis anname temale esiteks niisuguse kuju, korrutadesteda normija teguriga, võtame tema pahema osa, asetame sinna antud täpi koordinaadid ja kustutame märgi resultaadi ees.



Joon. 43.

Näide. Leida täpi $(+2, +6)$ kaugus sirgest $3x - 4y - 12 = 0$. Normija tegur on $1/\sqrt{(+3)^2 + (-4)^2} = +\frac{1}{5}$, sirge võrrandi normaalkuju: $\frac{1}{5}(3x - 4y - 12) = 0$, tema pahem osa: $\frac{1}{5}(3x - 4y - 12)$, koordinaatide $(+2, +6)$ asetamise resultaat temasse: $\frac{1}{5}(3 \cdot 2 - 4 \cdot 6 - 12) = -6$; selle absoluutväärtus 6 on otsitav kaugus.

2. **Nurk kahe sirge vahel.** Olgu antud kaks sirget:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \text{ ja } A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

Leiame nurga nende vahel.

Nimetame sirgete nurgad $+x$ -teljega μ_1 ja μ_2 , otsitava nurga ω (joon. 44), siis saame kolmnurgast, mis sirged x -teljega sünnitavad,

$$\mu_1 = \mu_2 + \omega, \text{ kust } \omega = \mu_1 - \mu_2.$$

Selle nurga tangens: $\tan \omega = \tan(\mu_1 - \mu_2) = \frac{\tan \mu_1 - \tan \mu_2}{1 + \tan \mu_1 \cdot \tan \mu_2}$

teisiti: $\tan \omega = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}.$

Otsitava nurga tangens on antud sirgete tõusudes avaldatud.

Viimaseid on kerge leida, avaldades y antud võrranditest.

3. **Kahe sirge rööpseisu ja ristseisu tingimused.**

1) On sirged rööbiti, siis on nende nurgad x -teljega võrdsed: $\mu_1 = \mu_2$; sellepärast ka $\tan \mu_1 = \tan \mu_2$ ehk $m_1 = m_2$.

Ümberpöörduvalt: on $m_1 = m_2$, siis on $\tan \mu_1 = \tan \mu_2$ ja et nurgad $\mu_1, \mu_2 < \pi$ on, on $\mu_1 = \mu_2$, tähendab, sirged on rööbikud.

Rööpseisu tunnus: sirgete tõusud on võrdsed.

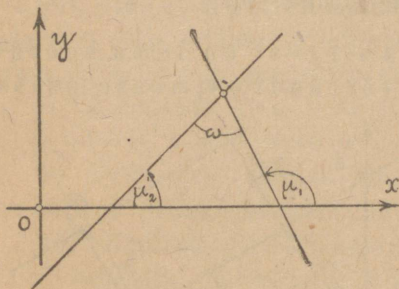
On sirged antud võrrandite abil:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \text{ ja } A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$

siis on $m_1 = -A_1/B_1$ ja $m_2 = -A_2/B_2$; sellepärast on rööpseisu korral $-A_1/B_1 = -A_2/B_2$,

ehk: $A_1 : A_2 = B_1 : B_2.$

Sõnades: rööbikutel sirgetel on muutujate kordajad võrrandites võrdelised.



Joon. 44.

2) On sirged risti, siis on: $\mu_1 = \mu_2 + \frac{\pi}{2}$,

$$\tan \mu_1 = \tan(\mu_2 + \frac{\pi}{2}) = -\cot \mu_2 = -1/\tan \mu_2, \text{ ehk:}$$

$$m_1 = -\frac{1}{m_2}.$$

Ümberpöördukt: on see tingimus täidetud, on sirged risti.

Ristseisu tunnus: ristseisus on ühe sirge tõus -1 jagatud teise sirge tõusuga.

4. Ülesanne. Leida sirge, mis täppi (x_0, y_0) lõikaks ja antud sirgega $Ax + By + C = 0$ rööbik ~~ehk~~ ^{või} temaga risti oleks.

Antud sirge tõus on $m = -A/B$, sellepärast on otsitavad sirged (v.7.14):

$$y - y_0 = m(x - x_0) \text{ ja } y - y_0 = -\frac{1}{m}(x - x_0),$$

$$\text{ehk: } A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \text{ ja } B(x - x_0) - A(y - y_0) = 0.$$

5. Kahe sirge ühistäpp. Antud on kaks sirget:

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \text{ ja } a_2x + b_2y + c_2 = 0.$$

Leida nende ühistäpp.

Et viimane niihästi esimesel kui ka teisel sirgel asub, siis peavad tema koordinaadid kui esimest nõnda ka teist võrrandit rahuldama: otsitava täpi koordinaadid saadakse antud võrrandite ühisel lahendamisel. Korrutame selleks esimest b_2 , teist b_1 -ga ja lahutame saadused:

$$(a_1b_2 - a_2b_1)x + (c_1b_2 - c_2b_1) = 0;$$

samuti

$$(a_1b_2 - a_2b_1)y + (a_1c_2 - a_2c_1) = 0.$$

Siit saame otsitavad koordinaadid:

$$x_0 = \frac{-(c_1b_2 - c_2b_1)}{a_1b_2 - a_2b_1}, \quad y_0 = \frac{-(a_1c_2 - a_2c_1)}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

Säherdusi avaldusi, nagu need, mis lugejates ja nimetajates esinevad, nimetatakse determinantideks. Neid kirjutatakse tabelikestena; näiteks oleks

$$a_1b_2 - a_2b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Et selle tabeli väärtust leida, tulevad korrutada tema elemendid joonel, mis ülemast pa-

hempoolsest nurgast alumisele parempoolsele viib, ja saadusest lahutada kahe ülejäänud elemendi korrutis.

Determinantides võime saadud lahenduse kirjutada:

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} -c_1 & b_1 \\ -c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad y_0 = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & -c_1 \\ a_2 & -c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}},$$

ja saaduse järgmistes sõnades kokku võtta:

Kahe esimeseastmelise võrrandi ühisel lahendamisel võrdub otsitav murrule; nimetaja on determinant muutujate kordajatest, lugeja saadakse nimetajast otsitava kordajate asemele vabade liikmete seadmisel, mis paremasse osasse viidud.

6. Saaduse uurimine.

1) Nimetaja ei ole null. Missugused lugejad ka on, sirgete ühistäpi koordinaadid on lõplikud arvud; ühistäpp on lõplikul kaugusel algusest.

2) Nimetaja on null; üks lugejatest, näiteks esimene, mitte: $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, $c_1b_2 - c_2b_1 \neq 0$. Tõestame, et teine lugeja ei ole null. Ühelt poolt on $a_1:a_2 = b_1:b_2$, teiselt $c_1:c_2 \neq b_1:b_2$, sellega $c_1:c_2 \neq a_1:a_2$, ehk: $a_1c_2 - a_2c_1 \neq 0$. Murd, milles lugeja lõplik ja nullist erineb, ja mille nimetaja piirita nullile läheneb, kasvab lõpmata: $x_0 = \infty$, $y_0 = \infty$. Sirgete ühistäpp on lõpmatuses. Tõesti: kui $a_1:a_2 = b_1:b_2$ on sirged rööbikud.

3) Nimetaja ja ka üks lugejatest, näiteks teine, on nullid: $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, $a_1c_2 - a_2c_1 = 0$. Siis on ka esimene lugeja võrrete tõttu: $a_1:a_2 = b_1:b_2$, $a_1:a_2 = c_1:c_2$ null. Ühistäpi koordinaadid esinevad määramata kujus: $x_0 = \frac{0}{0}$, $y_0 = \frac{0}{0}$. Sirgetel ei ole kindlat ühistäppi, nad satuvad ühte. Tõesti, kordajad on võrdelised: $a_1:a_2 = b_1:b_2 = c_1:c_2$, sirgete võrrandid erinevad kindla teguri võrra, nad edustavad üht ja sama (kaht kokkulangevat) sirget (v.4'8).

Ülesanded.

1. Sirge lõikab täppe $(-4, 0)$ ja $(+2, +3)$; missugune on tema nurk y -teljega; sirgega $y=+1$; sirgega $x=-3$?

✓ 2. Leida sirge võrrand, mis täppi $(0, -2)$ lõikab ja telgedega kolmnurga sünnitab, mille pind on 5.

✓ 3. Antud on kolmnurk $(-5, -1)$, $(+2, +4)$, $(+12, -8)$. Missugune on tema pind? Missugune on tema nurk tipus $(+2, +4)$?

✓ 4. Leida sirged, mis täppi $(-2, +3)$ lõikavad ja sirgega $3x+2y-6=0$ rööbiti ja risti on.

5. Leida kolmnurga tipud ja tema pind, kui külgede võrrandid on:

$$x-y+3=0, \quad 7x+4y-23=0, \quad 3x+8y+9=0.$$

6. Näidata, et kõik kolm kolmnurga kõrgust eelmises ülesandes kohtuvad ühes täpis.

7. Sama ülesanne külgede poolitajate kohta.

8. Sama ülesanne nurkade poolitajate kohta.

9. Sama ülesanne sirgete kohta, mis on külgede poolitamistäppidest risti nendega tõmmatud.

10. Joonistada ringid, milledega saadud täpid seotud.

11. Järeldada rööp- ja ristseisu tingimused valemist, mis määrab kahe sirge nurga tangentsit.

9. Mõned ülesanded geomeetrilistest kohtadest.

Sagedasti esinevad ülesannetes geomeetrilistest kohtadest andmetena sirged. Kuidas neid ülesandeid käsitada, selleks mõned näited.

1. Näide 1. Antud on kaks sirget:

$$3x+4y-12=0 \text{ ja } 12x-5y+60=0.$$

Leida nende nurgapoolitaja võrrand.

Nurgapoolitaja on täpi geomeetiline koht, mis on ühekaugusel mõlematest nurga külgedest. Võtame temal mõne täpi;

missuguse nimelt, jätame ütle mata. Tähistame tema koordinaadid x_0, y_0 . Selle täpi kaugused antud sirgetest on:

$$\left| \frac{3x_0 + 4y_0 - 12}{5} \right| \text{ ja } \left| \frac{12x_0 - 5y_0 + 60}{13} \right|$$

Need peavad võrdsed olema. Kui absoluutväärtusmärkidest vabane, saame:

$$\frac{1}{5}(3x_0 + 4y_0 - 12) \pm \frac{1}{13}(12x_0 - 5y_0 + 60) = 0.$$

See side on maksev võetud täpi kohta; et aga viimane vabalt valitud täpp nurgapoolitajal oli, siis on ta maksev ka iga teise seesuguse täpi kohta; ta on sellega otsitud võrrand. Ta laguneb kaheks: nurgapoolitajaid on kaks. Jooksvateks koordinaatideks on x_0 ja y_0 .

2. Näide 2. Missugune on täpi geomeetriaalne koht, kust antud lõik $2a$ paistab nurgas 45° ?

Valime teljed: x -teljeks sirge AB , millel asub lõik, y -teljeks sirge, mis seda poolitab ja temaga risti on (joon. 45). Olgu APB üks nimetatud nurkadest; nimetame nurga, mis $AP + x$ -

sihiga sünnitab μ , siis sünnitab BP temaga nurga $\mu + 45^\circ$. Nimetatud kahe sirge võrrandid on:

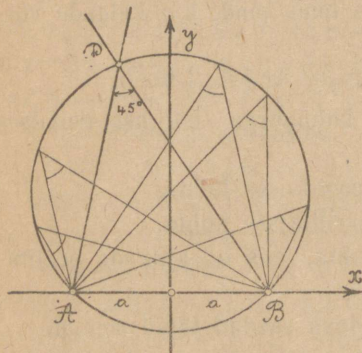
$$y = \tan \mu (x + a) \text{ ja } y = \tan(\mu + 45^\circ) (x - a),$$

ehk, kui $\tan \mu = m$ -ga tähistame:

$$y = m(x + a), \quad y = \frac{1+m}{1-m}(x - a). \quad (*)$$

Leiame täpi P koordinaadid; selleks tuleb viimased kaks võrrandit ühiselt lahendada: kui resultaadid nimetame x_0, y_0 , saame nende avaldused funktsioonidena m -ist: $x_0 = \varphi(m), y_0 = \psi(m)$.

Laseme nüüd m -il järje väärtusi saada; siis annavad meile viimased kaks võrrandit rea otsitava kõvera täppe: nad on tema parameetrilised võrrandid.



Joon. 45.

Et tema Cartesiuse-võrranditsaada, tuleb avaldustest $x_0 = \varphi(m)$, $y_0 = \psi(m)$ abimuutuja m elimiiniida. Selle asemel, et esiteks võrrandeid (*) lahendada ja pärast lahendustest m elimiiniida, võime otsekohe nendest m -i elimiiniida. Esimesest on täpis P :

$$m = y_0 : (x_0 + a),$$

sellega teisest:
$$y_0 = \frac{1 + y_0 : (x_0 + a)}{1 - y_0 : (x_0 + a)} (x_0 - a),$$

kust peale koondamist saame nõutava joone võrrandi:

$$x_0^2 + y_0^2 - 2ay_0 - a^2 = 0$$

jooksvates koordinaatides x_0, y_0 . Nagu elementaargeomeetriast

teame, on otsitav kõver ring

(joon. 45). Et see tõesti nõnda

on, näeme ka saadud võrran-

dist, kui me ta kirjutame kujus

$$x_0^2 + (y_0 - a)^2 = 2a^2.$$

3. Näide 3. Kolmnurga kõrgus h jagab aluse osadeks a ja b . Temasse on joonistatud kõiksugu püstküljed, millede alused asetsevad kolmnurga omal. Leida

joon, mille moodustavad nende püstkülgede keskkohad.

Valime kolmnurga aluse x -teljeks (joon. 46), kõrguse y -teljeks; siis on tema harude võrrandid (v. 7.11):

$$\frac{x}{b} + \frac{y}{h} = 1 \text{ ja } \frac{x}{-a} + \frac{y}{h} = 1.$$

Olgu mõne püstkülje aluse vastaskülje võrrand $y = c$; selle külje otsade ordinaadid on c ; nende abstsissid saame kolmnurga külgede võrranditest, asetades nendesse $y = c$:

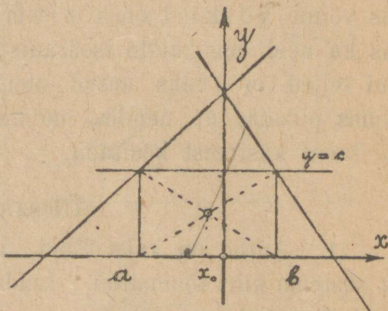
$$\frac{x_1}{b} = 1 - \frac{c}{h}, \quad \frac{x_2}{a} = \frac{c}{h} - 1.$$

Püstkülje keskkoha abstsiss $x_0 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$,

ehk
$$x_0 = \frac{1}{2}(b - a)(1 - \frac{c}{h}),$$

tema ordinaat

$$y_0 = \frac{1}{2}c,$$



Joon. 46.



kui c on, nagu oletasime, püstkülje kõrgus. Anname nüüd c -le järje väärtusi c' , c'' , c''' , ...; saame järje keskkochti ja nende koordinaate (x_0', y_0') , (x_0'', y_0'') , (x_0''', y_0''') Me võime sellepärast viimast kaht avaldust vaadata kui otsitava joone parameetrilisi võrrandeid.

Et tema Cartesiuse-võrrandit leida, elimiinine c ; saame:

$$\frac{x_0}{\frac{1}{2}(b-a)} + \frac{y_0}{\frac{1}{2}h} = 1.$$

Otsitud joon on sirge; ta poolitab kolmnurga alust ja kõrgust.

4. Märkus. On mõnest kujust öeldud, et ta on antud, siis võime kõiki tema elemente andmeteks lugeda; eriti siis ka neid, mis meile iseäranis tähtsad järgnevates uurimistes. Kui teljed ei peaks antud olema, siis tuleb nende valimisel silmas pidada, et nendes andmeid kerge oleks väljendada ja uuritavat küsimust käsitada.

Ülesanded.

✓ 1. Antud on kaks täppi, millede vahe on $2a$. Esimesest on süsteem kiiri tõmmatud. Leida teise täpi projektsioonide geomeetiline koht nende le.

✓ 2. Antud on ring ja süsteem rööpkõõle. Leida joon, mille sünnitavad nende poolitamistäpid.

✓ 3. Kaks kindlat lõikuvat sirget lõigatakse kolmandaga, mis liikudes jääb kindla sibiga rööbikuks. Nende ühistäppides selle kolmandaga tõmmatakse sirged, mis esimese kahega risti. Leida viimaste ühistäpi geomeetiline koht.

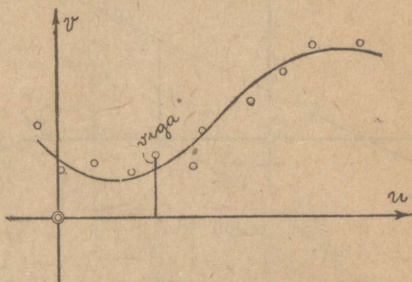
✓ 4. Antud on kolmnurga alus $2a$ ja kahe teise külje ruutude vahe d . Leida joon, mille joonistab alusele vastuseisev tipp.

✓ 5. Antud on kolmnurga alus a ; üks alusnurkadest on teisest kaks korda suurem. Leida vastastipu geomeetiline koht.

✓ 6. Antud kolmnurga alus on a ja kahe teise külje summa s . Alusele vastuseisvast tipust on sirge tõmmatud, mis alusega risti, ja sellel lõik võetud, mis võrdub ühe küljega. Leida selle lõigu lõpu geomeetiline koht.

10. Sirge võrrandi rakendused.

1. Graafiline katsevigade leidmine. Empiiriliste seaduste graafikud. Me nägime (v.1.2), kuidas võib kujutada graafiliselt katsete resultaate ja saada näitliku pildi uuritava nähtuse jooksust: iga arvpaari (u , v), mis katse annab, kujutame täpina uv -tasapinnal. Need täpid ei asetse aga harilikult mitte mõnel siledal joonel (joon. 47); selle põhjuseks arvame vigu, mis iga katsega kaasas käivad osalt meie aparatuuride täpsusetuse, osalt meie meelte piiratud peenuse tõttu. Meie usume, et looduse seadused on lihtsad ja sellepärast nende kujudeks on lihtsad, siledad kõverad; meie ei ühenda sellepärast mitte saadud täppe, vaid tõmbame nende vahelt sileda kõvera nõnda läbi, et täpprida temast võimalikult vähe lahku läheks. Vahed täpi ja temale vastava kõvera ordinaadi vahel on „katsevead“ (joon. 47).



Joon. 47.

Märkus. Seadusi, mis vaatlemise resultaate kujutavad ja mis mitte ei põhjene iseäralistel teoreetilistel kaalumistel, nimetatakse empiirilisteks¹⁾.

2. Niitproov. Sagedasti juhtub, et uv -paaride graafilisel kujutamisel saadud täpprida annab põhjust oletada, et uuritavat nähtust valitsev seadus on lineaarne (v.7.6), teisiti, et nähtuse käigu kujuks on sirge (joon. 48). Küsimusele, kas meie oletus on õigustatud või mitte, vastab proov pinguletõmmatud niidiga: on teda võimalik nõnda täppide vahele asetada, et tema

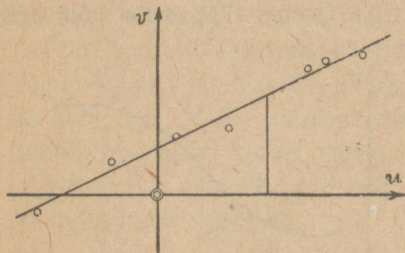
1) empeiria — katse, kogemus.

nende jooksu küllase täpsusega järele aimaks, siis on otsitud seadus lineaarne; vastasel korral on ta mõni teine.

3. **Lineaarse seaduse juhus.** Lineaarsuse korral on nähtuse seaduse analüütiliseks edustajaks võrrand (v.7.5): $v=mu+b$.

Kuidas leida kordajaid m ja b ?

Asetame, nagu öeldud, pingul oleva niidi täppritta (joon. 48). Torkame kahes niidi täpis märkidena augukesed, kõrvaldame niidi



Joon 48.

ja ühendame joonlaua abil märgtäpid. Saadud sirge on nõutud seaduse kuju; ta lõikab v -teljel lõigu b , ja tangens nurgast, mille ta sünnitab $+x$ -sihiga, on m . Et viimast saada, möödame mõlemaid kaateteid täisnurkses kolmnurgas, mis sirge, mõne tema täpi ordinaat ja x -telg

sünnitavad; püstkaateti suhe rõhtkaatetiga on otsitav m .

4. **Astmelise seaduse juhus. Logaritmteisendus.** Mõne nähtuse teoreetiline uurimine annab põhjust arvata, et seadus, millele ta allub, on „astmeline“: $v=cu^m$.

Temas esinevat kordajat c ja astmenäitajat m on võimalik katsete resultaatidest graafiliselt leida. Logaritmides saame: $\log v = m \log u + \log c$, ehk teiste tähtedega kirjutatud: $y = mx + b$, kus $x = \log u$, $y = \log v$, $b = \log c$ on.

On öeldudkujuline seadus $maksev$, siis peavad xy -tasapinna täpid, mis kujutavad katsest saadud arvpaaride logaritme, sirgel olema. Kujuneb see küllase täpsusega tõesti nõnda, siis kinnitavad katse saadused meie teoreetilist kaalumist, kui mitte, peame teisi seadusi otsima. Joonisest xy -tasapinnas saame b ja m ; avaldusest $\log c = b$ saame siis ka c .

Leitud seadust $v=cu^m$ võime nüüd uv -tasapinnas kõverana kujutada. Võrreldes teda uv -täppreaga, mis kujutab katse andmeid, saame katsevead.

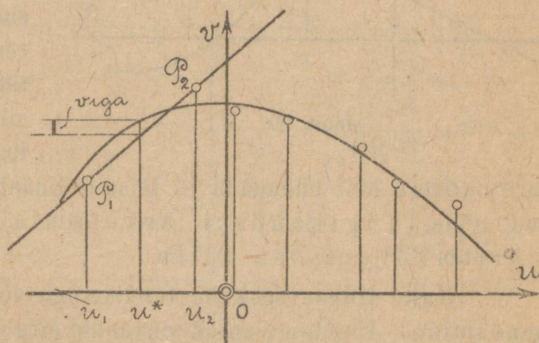
5. Lineaarne interpolimine ¹⁾. Katse andis järgmise rea arvpaare :

u	u_0	u_1	u_2	$\dots$
v	v_0	v_1	v_2	$\dots$

Kui suur on v , mis vastab mõnele antud u^* -le (mis peitub näiteks u_1 ja u_2 vahel)?

Kui kõver leitud (joon. 49), mis uuritava nähtuse seadust kujutab, siis võtame u -teljel täpi abstsissiga u^* ja tõmbame temast püstjoone kõverani; see on nõutud v^* . Ei ole kõverat olemas, siis on

võimalik v^* järgmiselt ligikaudu saada. Ühendame täpid $P_1(u_1, v_1)$ ja $P_2(u_2, v_2)$ sirge abil (kõvera asemel!) ja mõõdame selle sirge ordinaati, mis vastab abstsissile u^* . Saame ligikaudu v^* . Viga, mille me



Joon. 49.

teeme, on kõvera ja sirge ordinaatide vahe täpis $u=u^*$.

Abisirge võrrand on: $\frac{u-u_1}{u_2-u_1} = \frac{v-v_1}{v_2-v_1}$; et (u^*, v^*) üks tema täppidest on ²⁾, siis peavad tema koordinaadid seda rahuldama:

$$\frac{u^*-u_1}{u_2-u_1} = \frac{v^*-v_1}{v_2-v_1}.$$

lineaarsel interpolimisel on muutujate kasvud võrdelised.

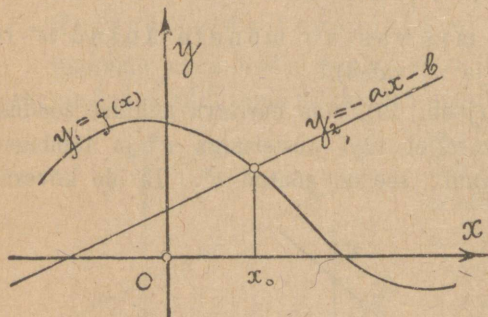
1) interpolatio — vahelelihvimine, vahelelisamine.

2) Siin tähendab v^* ennem nimetatud ligikaudset v väärtust täpis u^* .

Kasvud $u_2 - u_1$, $v_2 - v_1$, $u^* - u_1$ on andmete põhjal teada; viimasest võrdest saame $v^* - v_1 = d$ ja siis otsitava $v^* = v_1 + d$.

6. Märkus. Logaritmid tabelites leiduvad *P.P.* (partes proportionales) = võrdelised osad ei ole muud midagi kui meie

käsitatavad vahed $u_2 - u_1$, $v_2 - v_1$. Logaritmi kasvu arvutamine arvu kasvust võrdeliste osade abil on lineaarne interpoleerimine funktsiooni $v = \log u$ väärtuste vahel. Kui täpsalt toimetada, siis tuleks täpid $(u_1, \log u_1)$, $(u_2, \log u_2)$



Joon. 50.

logaritmikõvera abil ühendada ja tema ordinaat leida, mis vastab antud u^* -le. Ligikaudsel arvutamisel võib sirge logaritmikõvera osa täita.

7. Kahe lineaarse kahe tundmatuga võrrandi graafilise lahendamine. Kujutame antud võrrandid sirgetena. Tundmatud on nende ühistäpi koordinaadid (v.4.7, 4).

8. Ühe erikujulise võrrandi graafilise lahendamine. Võrrandid, nagu $\sin x - \frac{1}{2}x + 0.1 = 0$, $2^x + x + 1 = 0$, $\tan \frac{1}{2}x - 3x + 2 = 0$ jne., kuuluvad rühma, mille üldiseks edustajaks on võrrand $f(x) + ax + b = 0$. Seda on kerge lahendada, kui tema viimased kaks liiget paremale poole viime ja siis iga osa käsitleme kui funktsiooni x -ist:

$$y_1 = f(x), \quad y_2 = -ax - b.$$

Joonistame ühes ja samas teljestikus (joon. 50) kõvera y_1 ja sirge y_2 . Nende ühistäpi abstsissile x_0 vastavad võrdsed ordinaadid y_1^0 ja y_2^0 ; tähendab:

$$f(x_0) = -ax_0 - b, \text{ ehk } f(x_0) + ax_0 + b = 0;$$

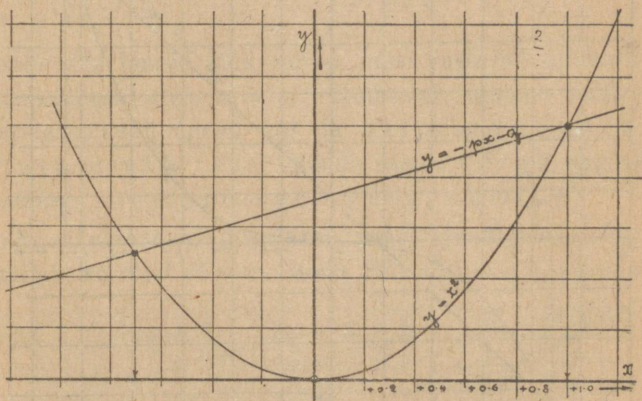
seega on x_0 otsitud võrrandi juur.

Antud võrrandil on niipalju juuri kui kõveral y_1 sirgega y_2 ühistäppe.

9. Iseäranis kohane on niisugune lahendamisviis, kui lahendamisele tuleb rida võrrandeid $f(x)+ax+b=0$, mis erinevad ainult kordajates a ja b . Kõver jääb alles, muuta tuleb ainult sirged.

Näide 1. $x^2+px+q=0$; $y_1=x^2$, $y_2=-px-q$. Esimene võrrand kujutab parabooli (joon. 51), teine sirget; on see parabool kord ruudulisele paberile joonistatud, saame kohase sirge joonistamisel iga ruutvõrrandi lahendused.

Näide 2. Samuti käsitame võrrandit $x^3+px+q=0$ (joon. 52).



Joon. 51.

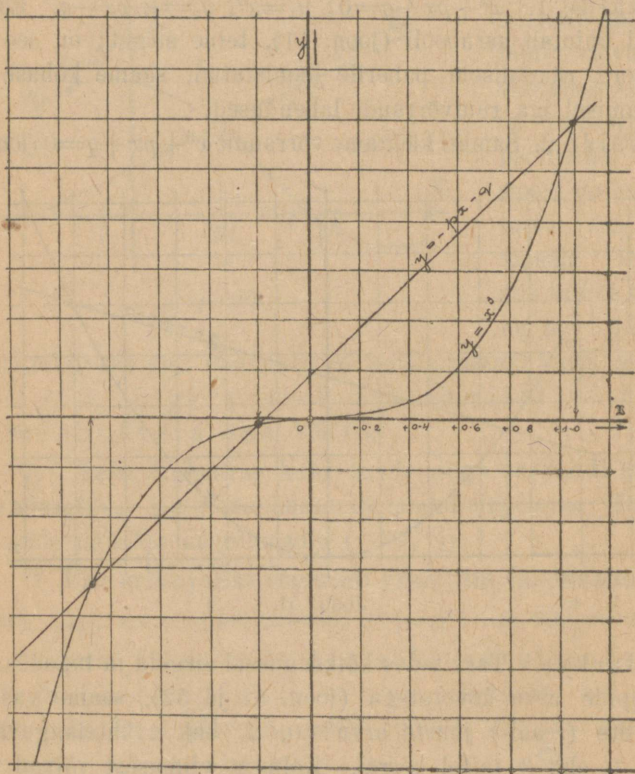
Märkus. Tarvitades kõiksuguseid sirgeid ja lugedes nende ühistäppide arvu kõveratega (joon. 51 ja 52), saame vastavate võrrandite (reaal-) juurte arvu: 0, 2, ehk 2 ühtelangevat esimesel, 1 ehk 3 teisel korral. Kolmest viimasest võivad 2 ehk isegi 3 ühte langeda. Ruutvõrrandil on 0 või 2, kuupvõrrandil 1 või 3 reaalsset juurt.

10. **Ruutvõrrandi nomogramm** ¹⁾. Võtame ruutvõrrandi kujus:

$$x^2+px+q=0;$$

1) nomogramma — seaduskiri, tavakiri.

tema elementaarsel käsitamisel küsitakse: missugused on tema juured, kui kordajad p ja q on antud arvud, näiteks $-5, +6$; $-3, +2$; $+2, -1$ jne. Nüüd küsime: missugused peavad kordajad p ja q olema, et meie võrrandil antud juur oleks: $+1, +2, -3$ jne.? Üldiselt, et x oleks a ?



Joon. 52.

Selleks peavad p ja q rahuldama võrrandit:

$$a^2 + pa + q = 0.$$

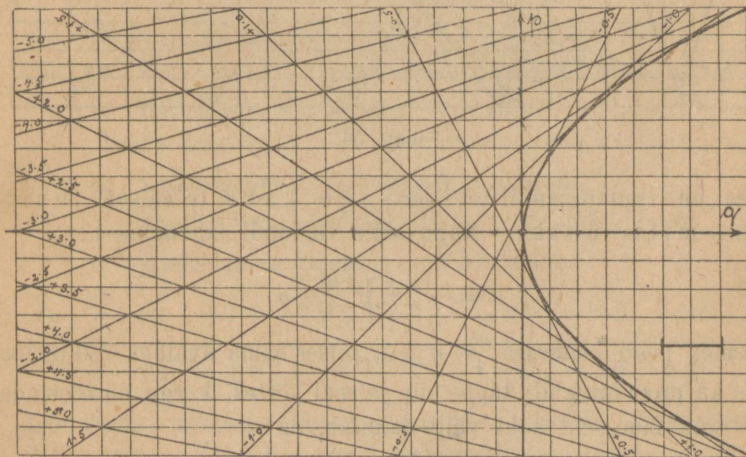
See on esimese astmeline võrrand kahe tundmatuga p ja q . Kui me teda pq -tasapinnal kujutame, saame sirge:

igas tema täpis on $x=a$, lühidalt: sellel sirgel on $x=a$. Otsime sirged, millel on $x=0, +1, +2, \dots, -1, -2$, jne.; saame tabeli:

x	$x^2+px+q=0$
0	$0^2+0 \cdot p+q=0$
+1	$1^2+1 \cdot p+q=0$
+2	$2^2+2 \cdot p+q=0$
..	
-1	$(-1)^2+(-1) \cdot p+q=0$
-2	$(-2)^2+(-2) \cdot p+q=0$
..	

Mõtleme endale siia juurde kõik teised, mis vastavad murruliste ja ruutirratsionaalsetele x -dele. Kujutame igaühe nendest sirgetest pq -tasapinnal (joon. 53) ja kirjutame igaühe otsa vastava x -väärtuse. Nõnda saame võrgu sirgeid, mida nimetatakse ruutvõrrandi nomogrammiks.

Tema abil saame vaevata mõne antud ruutvõrrandi juured. Olgu lahendada näiteks võrrand $x^2+2x-3=0$. Siin on $p=+2$, $q=-3$;

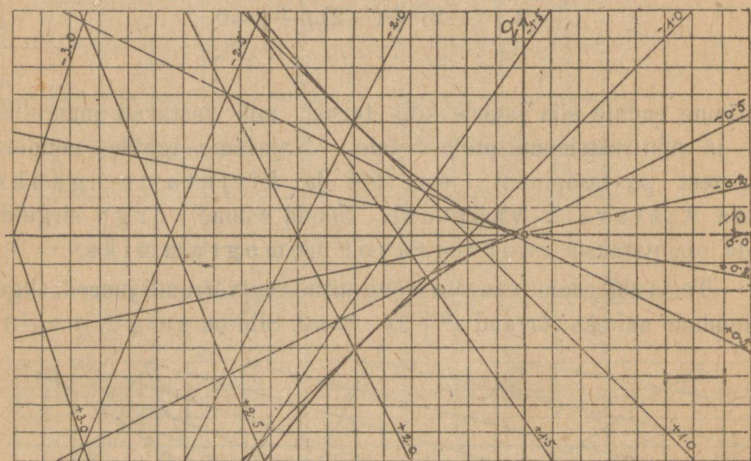


Joon. 53.

otsime vastava täpi pq -tasapinnal. Teda lõikavad kaks sirget, millede märkarvud on -3 ja $+1$; sellega on otsitavad juured -3 ja $+1$.

Oleks antud võrrand olnud $x^2+x+3=0$, siis leiaksime pq -tasapinnas täpi $p=+1$, $q=+3$ ja näeksime, et temast mitte ühtki võrksirget läbi ei lähe: meie võrrandil ei ole reaalseid juuri.

11. **Ruutvõrrandi juurte arv.** Meie sirgete pere mähib üht kõverat (joon. 53), mis pq -tasapinda kaheks osaks jagab:



Joon. 54.

ühes on ruutvõrrandil $x^2+px+q=0$ kaks (reaalset) juurt, teises mitte ühtki. Nagu selle võrrandi lahendusest:

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

näeme, peab esimeses $\frac{p^2}{4} - q > 0$, teises sama avaldus < 0 olema, mis ka proovide abil, täppe siin ja seal võttes, kerge on tõestada. Kõveral, mis neid kaht välja lahutab, on

$$\frac{p^2}{4} - q = 0;$$

temal on meie võrrandil kaks ühesuurust (ühtesattuvat) juurt. Lahutav kõver on harilik parabool $p^2=4q$.

12. **Kuupvõrrandi nomogramm.** Samuti kui endist, võime käsitada kuupvõrrandit:

$$x^3+px+q=0.$$

Lahutav kõver (joon. 54) jaotab pq -tasapinna kaheks osaks: esimeses on võrrandil kolm (võrratut) juurt, teises üks ainus juur (reaalne): kuupvõrrandil on kas üks või kolm (reaal-) juurt.

Ülesanded.

1. Lahendada graafiliselt järgmised esimeseastmelised võrrandsüsteemid:

$$\begin{cases} x+2y+1=0 \\ 2x+3y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x-y-5=0 \\ x+2y+3=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x-2y+8=0 \\ 2x+y+1=0 \end{cases}$$

2. Lahendada graafiliselt võrrandid:

$$\log x - x + 2 = 0, \quad \log x - \frac{1}{2}x - 3 = 0.$$

3. Lahendada graafiliselt võrrand:

$$\tan x - 0.3x + 1 = 0.$$

Kui palju on juuri? Missugused on kaks kõige vähemat juurt? Märkus. Leida andmed tangenskõvera joonistamiseks graafiliselt.

4. Lahendada graafiliselt võrrandid:

$$x^2-5x+6=0, \quad x^2-3x+2=0, \quad x^2+x-6=0.$$

5. Leida graafiliselt võrrandite juured:

$$x^3-3x+2=0, \quad x^3+2x+1=0, \quad x^3-x+0.2=0.$$

6. Katse andis järgmise rea arvpaare:

u	$+1.1$	$+1.7$	$+2.5$	$+3.4$	$+4.5$	$+6.3$	$+8.9$	...
v	-2.1	-1.9	-1.6	-1.1	0.0	$+1.6$	$+4.7$	...

Joonistada nähtust valitseva seaduse graafik. Missugune on kõige suurem viga lineaarsel interpolimisel arvude vahel $+4.5$ ja $+6.3$?

7. Katse andis järgmise rea arvpaare:

u	$\parallel$	$-4\cdot0$	$-1\cdot1$	$+2\cdot0$	$+4\cdot5$	$+9\cdot0$	$\dots$
v	$\parallel$	$-3\cdot1$	$-1\cdot7$	$-0\cdot7$	$+0\cdot4$	$+2\cdot3$	$\dots$

Missugusele seadusele allub nähtus?

8. Katse andis järgmise tabeli:

u	$\parallel$	$+0\cdot1$	$+0\cdot6$	$+1\cdot4$	$+2\cdot2$	$+3\cdot5$	$+5\cdot2$	$+7\cdot8$	$\dots$
v	$\parallel$	$+0\cdot1$	$+0\cdot2$	$+0\cdot5$	$+1\cdot0$	$+2\cdot1$	$+3\cdot7$	$+6\cdot8$	$\dots$

Missugune seadus valitseb nähtust?

9. Joonistada ruutvõrrandi nomogramm, andes x -ile väärtused iga $0\cdot2$ tagant.

10. Samasugune ülesanne kuupvõrrandi kohta.

11. Ring.

1. **Ringi võrrandite kujud.** Me nägime (v.5:3), et ringi võrrand, mille keskkohk on täpis (a , b) ja raadius r , on

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2,$$

ehk, kui keskkohk alguses:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Kui esimeses nendest avame sulud, näeme, et ringi üldine võrrand on teiseastmeline; temas puudub liige muutujate korrutisega ja nende ruutude kordajad on võrdsed.

2. On need tingimused täidetud, siis kujutab ruutvõrrand ikka ringi. Tõesti, siis on võimalik liikmete kogusid x -is ja y -s laiendada kohaselt valitud suuruste lisamisel täite ruutudeni.

Näide. $2x^2 + 2y^2 - 6x + 8y + 10\frac{1}{2} = 0.$

Jagame 2-ga: $x^2 + y^2 - 3x + 4y + \frac{21}{4} = 0,$

ehk laiendades: $(x^2 - 3x + \frac{9}{4}) + (y^2 + 4y + 4) + (\frac{21}{4} - \frac{9}{4} - 4) = 0$,

kust: $(x - \frac{3}{2})^2 + (y + 2)^2 = 1$.

See on ring keskkohaga $(+\frac{3}{2}, -2)$ ja raadiusega 1.

Ülesanded.

1. Joonistada ringid: $x^2 + y^2 - 4x = 0$, $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 0$,
 $x^2 + y^2 - 2x + 3y - \frac{1}{4} = 0$.

2. Leida täpi geomeetiline koht, mille kauguste ruutude summa antud sirgetest

$$x - 3y - 11 = 0 \text{ ja } 3x + y - 3 = 0$$

on kindel arv 13.

3. Leida täpi geomeetiline koht, millest antud lõik $2a$ paistab nurgas α .

4. Leida riidgi võrrand polaarkoordinaatides, kui ring puutub polaartelge tema alguses ja raadius on a .

5. Lahendada algebraliselt ja graafiliselt võrrandsüsteemid:

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 2 \\ x + y = 1 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 3 \\ x - y + 1 = 0 \end{array} \right\}$$

6. Täpp liigub x - ja y -sihis seaduste järele:

$$x = 1 + 2\cos \omega t, \quad y = -2 + 2\sin \omega t, \text{ kus } t \text{ aega tähendab.}$$

Missuguse kõvera ta joonistab?

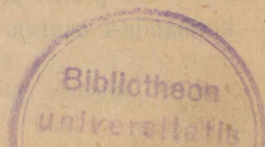
12. Ellips.

1. **Definitsioon.** Ellipsiks¹⁾ nimetatakse täpi geomeetrilist kohta, mille kauguste summa kahest kindlast täpist on muutumatu.

Kindlaid täppe nimetatakse ellipsi tulitäppideks ehk fookusteks²⁾.

1) ellipseis — väljajäte, puudus.

2) focus — tulease, lee.



2. Ellipsi võrrand. Tähistame kindlad täpid F_1 ja F_2 .

Nende andmisega on ka nende vahe antud; nimetame teda $2c$; olgu muutumata kauguste summa $2a$. Valime teljed: x -teljeks

sirge F_1F_2 , y -teljeks

vahe F_1F_2 poolitaja

ristsirge (joon. 55). Tuli-

täppide koordinaadid

on siis $F_1(+c, 0)$ ja

$F_2(-c, 0)$. Valime el-

lipsil mingisuguse täpi;

olgu tema tähiseks P

ja tema koordinaatideks

(x, y) . Avaldame nendes seaduse, millele alluvad P ja samuti

kõik teised ellipsi täpid,

nimelt: $F_1P + F_2P = 2a$, lühemalt $r_1 + r_2 = 2a$.

Meie saame: $r_1 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$, $r_2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$,

sellepärast: $\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$.

Et P mingisugune täpp ellipsil oli, on viimane saadus ellipsi võrrand.

Anname temale kohase ma kuju. Kui juurtest vabane-
miseks ühe nendest paremasse osasse võtame ja mõlemad pooled
ruutu tõstame, saame peale koondamist:

$$cx + a^2 = a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}.$$

Kui veel kord mõlemad pooled ruutu tõstame ja üksteisega
sarnased liikmed liidame, saame:

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2),$$

ehk:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

See on otsitud võrrand.

3. Ellipsi võrrandi kanooniline ¹⁾ kuju. Nimetaja

$a^2 - c^2$ on positiivne. Tõesti, kahe kolmnurga külje summa on
kolmandast suurem: $F_1P + F_2P > F_1F_2$, $r_1 + r_2 > 2c$, $2a > 2c$,

1) kanon — juhtnõör, juhe, norm.

$a > c$, $a^2 - c^2 > 0$. Tähistame selle oluliselt positiivse suuruse b^2 ; siis saame ellipsi võrrandi kujus:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Seda kuju nimetatakse kanooniliseks.

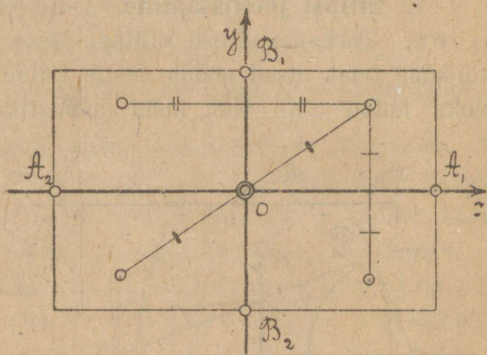
4. **Ellipsi teljed.** Missugune on a ja b geometriline tähendus?

Leiame lõigud, mis ellipsi koordinaattelgedel sünnitab. Abstsissiteljel on $y=0$, sellega lõigud temal: $x_1 = +a$, $x_2 = -a$; samuti ordinaatteljel: $y_1 = +b$, $y_2 = -b$. Koordinaatteljed lõikavad ellipsit neljas lagitäpis: $A_1(+a, 0)$, $A_2(-a, 0)$, $B_1(0, +b)$, $B_2(0, -b)$. $2a$ ja $2b$ on ellipsi teljed; a ja b tema poolteljed. Suuremat neist kahest nimetatakse suureks, väiksemat väikeseks teljeks. Järgnevates uurimistes nimetame, nagu senini, suurt telge $2a$, väikest $2b$.

Suur telg kannab tulitäppe.

5. **Ellipsi kuju uurimine.** Ilma et meil vähematki aimu oleks ellipsi kujust, võime tema võrrandi põhjal selle üle selgusele jõuda.

1) Et ellipsi võrrandi pahempoolses osas mõlemad liikmed oluliselt positiivsed ja nende summa üks on, siis peab igaüks nendest vähem, ehk kui teine null, siis ühega võrdne olema: $x^2/a^2 \leq 1$, $y^2/b^2 \leq 1$ kust saame: $x^2 \leq a^2$, $y^2 \leq b^2$, ehk: $|x| \leq a$, $|y| \leq b$. Sõnades: kõik ellipsi täppide abstsissid on absoluutselt vähemad kui a , ordinaadid vähemad kui b ;



Joon. 56.

võivad aga nendega ka võrrelda. Teisiti öeldes: kõik ellipsi täpid peituvad püstkülikus, mille küljed on rööbikud ellipsi telgedega ja viimastega võrdsed (joon. 56).

2) Et ellipsi võrrandis liikmed ruudud on, siis rahuldab teda igaüks arvpaaridest $(x_0, -y_0)$, $(-x_0, y_0)$, $(-x_0, -y_0)$, kui aga teda rahuldab arvpaar (x_0, y_0) . See tähendab, et kui viimane täpp ellipsil asub, siis ka esimene, teine ja kolmas: ellips on sümmeetriline suure telje, väikese telje ja nende ühistäpi suhtes. Viimast täppi nimetatakse sellepärast ellipsi keskkohaks.

3) Kui $x=0$, on $y=b$; suureneb x nullist kuni a -ni, väheneb y b -st kuni nullini; keskkoha ümbruses, kus x väga väike, on $x^2:a^2$ seda enam väike, y ligikaudu võrdne b -ga: ellipskõver langeb lagitäpist B_1 alates esiotse väga aeglaselt. Samuti näitame, et ta täpile A_1 lähenemisel kiiresti (järsku) langeb. See annab meile ülevaate ellipskõvera jookstust esimeses telgpüstküliku veerandis. Sümmeetria omaduste tõttu on meil sellega tema jook ka teistes kolmes veerandis käes.

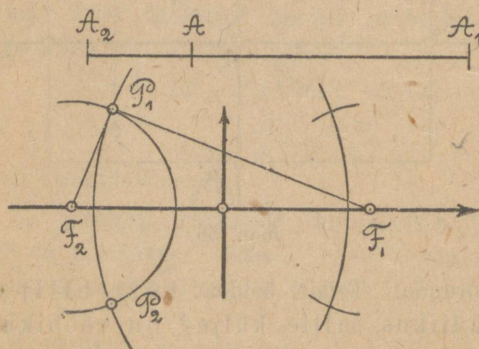
6. Ellipsi parameetrilised võrrandid. Need on:

$$x=a \cos u, y=b \sin u.$$

Tõesti, kui parameetri u elimiineerime, saame:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

7. Ellipsi joonistamine. 1-ne viis: niitkonstruktsioon. Torkame ellipsi tulitäppidesse nõelad, võtame niidi ja köidame tema otsad nõnda nõelte külge, et vaba niidi pikkus oleks antud $2a$. Kui nüüd joonistiku niiti mööda juhime,

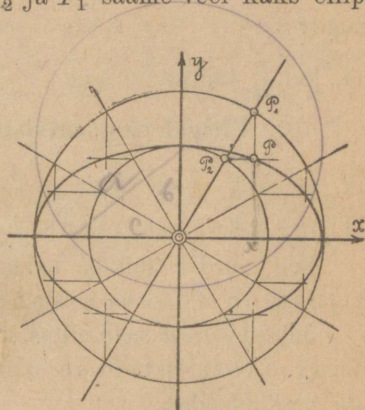


Joon. 57.

viimast kõik aeg pingul hoides, siis saame ellipsi (joon. 55). Tõesti: iga tiku kohal on raadiusvektorite summa vaba niidi pikkus, mis võrdub $2a$ -ga.

2-ne viis. Võtame pikkuse $A_1A_2=2a$ (joon. 57) ja sellel mõne täpi A otsade A_1 ja A_2 vahel; joonistame

ühel tulitäpist, näiteks F_1 , raadiusega A_1A ringi, samuti teisest F_2 ringi raadiusega AA_2 . Mõlematel ringidel on kaks ühist täppi P_1 ja P_2 ; viimased on meie ellipsil. Tõesti: $F_1P_1 + F_2P_1 = A_1A + AA_2 = 2a$, sellega on P_1 ellipsil, samuti P_2 . Tehes sama konstruktsiooni täppidest F_2 ja F_1 saame veel kaks ellipsi täppi. Muudame A kohta lõigul A_1A_2 , saame 4 uut ellipsi täppi; seda tehet kordleme, kuni saadud täppide arv piisavaks saab ellipsi joonistamiseks.



Joon. 58.

3-as viis: ellipsi joonistamine telgringide abil. Joonistame ellipsi telgedel $2a$ ja $2b$ kui diameetritel 2 ringi (joon. 58) ja tõmbame keskkohast mõne kiire. Olgu tema nurk x -teljega u ja tema ühistäpid telgringidega P_1 ja P_2 ; esimesest tõmbame sirge, mis x -teljega, teisest, mis y -teljega risti; nende sirgete ühistäpp P on ellipsil. Tõesti: selle koordinaadid on:

$$x = a \cos u, \quad y = b \cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = b \sin u.$$

Muutes võetud kiire sihti, võime kui palju tahes ellipsi täppe saada.

8. **Ellipsi tulitäppide konstruimine** telgedest. Ellipsi kanoonilises võrrandis oli $b^2 = a^2 - c^2$; tähendab, c on kaatet täisnurkses kolmnurgas, mille hüpotenuus on a , teine kaatet b . Et tulitäppe saada, joonistame väikese telje otsast kui keskkohast raadiusega a ringi. Viimane lõikab suurt telge otsitud tulitäppides F_1 ja F_2 .

9. **Ellipsi raadiusvektori leidmine.** On antud mõne ellipsi täpi abstsiss x ; leida täppi tõmmatud raadiusvektorite pikkused. Meil oli:

$$r_2^2 = (x+c)^2 + y^2,$$

$$r_1^2 = (x-c)^2 + y^2,$$

siit on $r_2^2 - r_1^2 = 4cx$, mis koos võrdusega $r_2 + r_1 = 2a$ annab $r_2 - r_1 = 2\frac{c}{a}x$. Lahendades viimast kaht avaldust r_1 ja r_2 suhtes

saame:

$$r_1 = a - \frac{c}{a}x, \quad r_2 = a + \frac{c}{a}x$$

ehk, kui $\frac{c}{a}$ tähistame e -ga: $r_1 = a - ex$, $r_2 = a + ex$.

10. Ellipsi ekstsentrismus¹⁾. Nii nimetatakse arvu $e = \frac{c}{a}$,

ehk, et $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, arvu $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$. Et $\sqrt{a^2 - b^2} < a$ on, siis on ellipsi ekstsentrismus vähem kui 1.

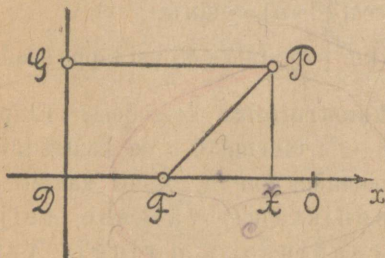
See murd e näitab, missugune osa suurest poolteljest on fookuse kaugus keskkohast: $c = e \cdot a$.

Juhusel $b = a$ saab ellips ringiks, e saab nulliks, samuti c . Ringi ekstsentrismus on null, tema fookused langevad ühte keskkohaga.

Jätame a muutumatuks; suurendame e nullist üheni; selle juures kasvab c nullist a -ni ja väheneb $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ a -st kuni nullini: fookused rändavad vastassihtides suurt telge mööda, ellips muutub ikka kitsamaks ja kõduneb piiris ($e=1$) suureks teljeks $2a$.

11. Ellipsi juhtjoon.

Asetame suurt telge kandvale sirgele pikkuse $OD = \frac{a}{e}$ (joon. 59), mis on suurem a -st ($e < 1$), ja tõmbame saadud täpis D püstjoone. Seda viimast nimetatakse ellipsi juhtjooneks. Võtame temale lähema tulitäpi F ja võrdleme mingi vabalt võetud



Joon. 59.

ellipsi täpi P kaugusi sellest ja juhtjoonest: PF ja PG . Esi-
mene on meil juba teada: $PF = a - ex$; teise saame joonisest:

1) ekstsentrismus — kesklahksus.

$$PG = OD - OX = \frac{a}{e} - x = \frac{a - ex}{e}$$

sellepärast:

$$PF : PG = e.$$

Et P mis täpp tahes ellipsil oli, siis saame ellipsi tähtsa omaduse: tema täpi kauguste suhe kindla täpini ja kindla sirgeni on muutumata arv, vähem kui üks. Kindel täpp ja sirge on ellipsi tulitäpp ja tema juhtjoon.

Viimast ellipsi omadust võib tema definitsiooniks võtta. Ta selgitab ka ekstsentrilisuse geomeetrilist tähendust.

12. Ellipsi juhtjoone konstruimine. Selle sirge kaugus algusest oli $OD = \frac{a}{e} = a : \frac{c}{a} = \frac{a^2}{c}$. Siit järgneb, et $OD : a = a : c$,

tähendab, a on keskmine võr-

deline c ja otsitava kauguse OD

vahel. Kui meelde tuletame täis-

nurkse kolmnurga kõrguse oma-

dust, saame järgmise võtte ellipsi

juhtjoone konstruimiseks: joo-

nistame suure telgringi

(joon. 60), võtame tulitäpis

püstjoone FQ selle rin-

gini ja tõmbame saadud

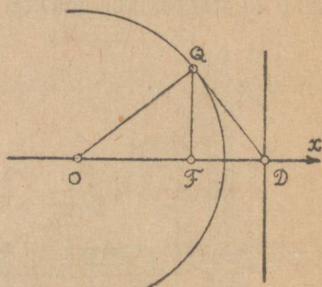
täpis ringi puutuja; vii-

mane lõikab suure telje pikendust täpis D ; selles

täpis tõmmatud püstsirge on nõutud juhtjoon.

Märkus. Juhtjooni on kaks: nad on sümmeetrilised vähema

telje suhtes.



Joon. 60.

Ülesanded.

1. Leida ellipsi võrrand, mille tulitäpid on $(0, 0)$ ja $(+2, 0)$ ja mille suur telg on 6.

2. Joonistada ellipsid:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1, \quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1,$$

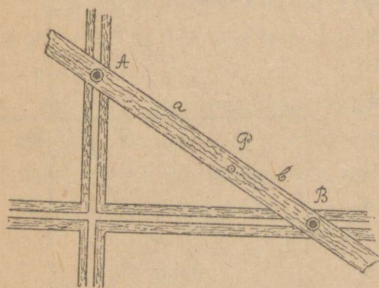
tarvitades kõiki kolme konstruimismetoodi.

3. Joonistada viimaste ellipsite tulitäpid ja juhtjooned ja leida nende ekstsentralsused.

4. Maakera telglõige on ellips, mille suur telg (ekvaatorraadius) on 6378253 m ja väike (polaarraadius) on 6356521 m. Leida tema ekstsentralsus. Missugune on tema fookusvahe? Joonistada see ellips ja tema suur telgring, kujutades 100 kilomeetrit 1 millimeetrina.

5. Maakera pöörleb ümber päikese ellipsis, mille suur telg on 14865.10^5 km ja ekstsentralsus 0.01677. Leida väike telg, fokaal- ja telgede vahe. Joonistada selle ellipsi ja tema suure telgringi ligikaudne kuju, võttes $a=10$ cm, $e=0.02$.

6. Kuidas suhtuvad soojushulgad, mis maakera päikeselt saab kohtades, kus maakera päikeselt kõige kaugemal ja temale kõige lähemal on? Avaldada see suhe maakera orbiidi ekstsentralsuses, mis ligikaudu 0.02.



Joon. 61.

7. Perioodiliste komeetide hulga, mis enam kui ükskord nähtud, on kõige lühem tiirlemisaeg Encke komeedil (3.3 a.), kõige pikem Halley komeedil (76.3 a.). Esimese orbiidi suurtelg on 4.4, teise oma 35.9 maakera

keskmist kaugust päikesest; nende vastavad ekstsentralsused on 0.85 ja 0.97. Joonistada nende ja maakera orbiitide kujud, kujutades maakera keskmist kaugust ühe cm-na.

8. Leida ellipsi võrrand, mille tulitäpiks on $(0, 0)$, juhtjooneks sirge: $3x+4y+12=0$ ja ekstsentralsuseks $\frac{1}{2}$.

9. Kahes ristiseisvas lauas (joon. 61) on keskjoonte sihis väljalõiked tehtud. Kolmas liigub nõnda, et kaks tema naela A ja B nimetatud väljalõigetel liuguvad. Missuguse kõvera joonistab tikk P , mis liikuvat lauda osadeks a ja b jagab? Märkus: Parameetriks võtta üks muutuvatest nurkadest.

13. Hüperbool.

1. **Definitsioon.** Hüperbooliks¹⁾ nimetatakse täpi geomeetrilist kohta, mille kauguste vahe kahest kindlast täpist on muutumata arv.

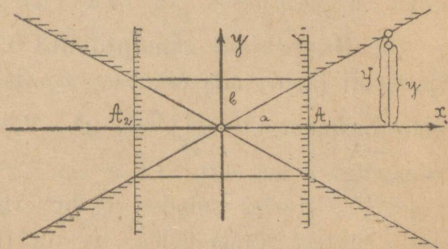
Kindlaid täppe nimetatakse hüperbooli tulitäppideks ehk fookusteks.

2. **Hüperbooli võrrand.** Tarvitades kindlate täppide ja nende vahe jaoks samu tähiseid nagu ellipsigi korral, nimetades konstantset kauguste vahet $2a$ ja toimetades nagu enne (v.12.2), saame hüperbooli võrrandi:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1.$$

3. **Selle võrrandi kanooniline kuju.** Viimane nimetaja $c^2 - a^2$ on oluliselt positiivne suurus. Tõesti, kahe kolmnurga külje vahe on vähem kolmandast, $2a < 2c$, $a < c$, $c^2 - a^2 > 0$. Me võime seda vahet sellepärast tähistada b^2 , ja kirjutada hüperbooli võrrandi kujus:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$



Joon. 62.

4. **Hüperbooli teljed.** Lõigud, mis hüperbool telgedel sünnitab, on: $\pm a$, $\pm ib$: hüperbool lõikab x -telje täppides $A_1(+a, 0)$ ja $A_2(-a, 0)$ (joon. 62); y -telge ta ei lõika: lõike-täpi ordinaat on imaginaarne. Täpid A_1 ja A_2 on hüperbooli lagitäpid; A_1A_2 — tema reaaltelg, B_1B_2 , kus $B_1(0, +b)$, $B_2(0, -b)$ on, — imaginaartelg.

Tulitäpid asuvad reaaltelgel.

1) hyperbole — liig kaugele viskamine, liialdus.

5. **Hüperbooli kuju uurimine.** Kui hüperbooli võrrandist avaldame y , saame

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}.$$

1) Et y reaalne oleks, on tarvis, et juurealune avaldus $x^2 - a^2$ oleks ≥ 0 , $|x| \geq a$. Sõnades: kõik hüperbooli täppide abstsissid on absoluutselt suuremad a -st ekk võrdsed sellega. Kui täppides A_1 ja A_2 tõmbame püstjooned, näeme, et nende vahel ei leidu ühtki hüperbooli täppi (joon. 62).

2) Igale x -ile, mis absoluutselt $> a$, vastab kaks y -d, mis suuruse poolest võrdsed, kuid milledel vastasmärgid: hüperbool on sümmeetriline x -telje suhtes.

3) On kerge näidata, et ta sümmeetriline on y -telje ja ka alguse suhtes.

4) Kasvab x a -st lõpmatuse ni, siis kasvab y nullist lõpmatuse ni: hüperbool on lahtine kõver.

5) **Hüperbooli asümptoodid** ¹⁾. Vaatleme ainult seda osa hüperbooli täppe, mis esimeses xy -tasapinna veerandis asetsevad. Nende ordinaat $y = +\frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$. Võrdleme seda sirge $Y = \frac{b}{a} x$ ordinaadiga (joon. 62). Et $x^2 - a^2 < x^2$, $|\sqrt{x^2 - a^2}| < |x|$ on, siis on $y < Y$. Meeles pidades, et hüperbool sümmeetriline on x - ja y -telje suhtes, võime öelda, et väljaspool nurka, mille sünnitavad kiired $Y = \pm \frac{b}{a} x$, ei leidu hüperbooli täppe.

6) Jagame ordinaadid Y ja y teineteisega: $Y:y = x:\sqrt{x^2 - a^2}$; see suhe on võrdne $1:\sqrt{1 - \left(\frac{a}{x}\right)^2}$.

Kui x kasvab, väheneb a/x , suureneb $1 - \left(\frac{a}{x}\right)^2$ ja juur temast, järjelikult väheneb Y/y ja saab piiris, x -i lõpmatul kasvamisel võrdseks ühega. Sõnades: Abstsissi kasvamisega lähenevad hüperbooli täpid piirita sirgele

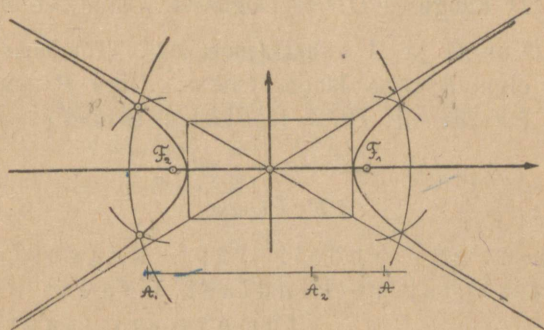
1) asymptotos — mitte ühtelangev.

$Y = \pm \frac{b}{a}x$. Viimaseid kaht sirget nimetatakse hüperbooli asümptootideks.

6. **Hüperbooli joonistamine.** Olgu antud hüperbooli tulitäpid F_1 ja F_2 ja muutumata hüperbooli täpi kauguste vahendest $2a = A_1A_2$. Võtame lõigu A_1A_2 pikendusel täpi A ja joonistame fookustest F_1 ja F_2 kui keskkohadest ringid raadiustega A_1A ja A_2A (joon. 63). Need kaks ringi lõikuvad kahes täpis P_1 ja P_2 . Viimased on hüperboolil. Tõesti, täpis P_1 on:

$$F_1P_1 - F_2P_1 = A_1A - A_2A = A_1A_2 = 2a, \text{ samuti täpis } P_2.$$

Tehes sama joonist veel kord täppidest F_2 ja F_1 , saame veel kaks hüperbooli täppi. Andes täpile A uue koha, saame endist



Joon. 63.

viisi veel 4 hüperbooli täppi. Selle operatsiooni kordlemine annab meile küllase arvu täppe hüperbooli joonistamiseks.

Märkus. Täppide ühendamist kergendavad palju hüperbooli teljed ja asümptoodid. Nendest sirgetest tuleks joonistamine alata.

7. **Hüperbooli tulitäppide konstruimine.** Meil oli $c^2 - a^2 = b^2$, sellepärast $c^2 = a^2 + b^2$; tähendab, c on täisnurkse kolmnurga hüpotenuus, mille kaatetiteks on a ja b . Sellest järgneb nõutud konstruktsioon: ühendame telgede otsad ja asetame saadud lõigu fokaalteljele, algusest alates paremale ja pahemale poole. Lõigu lõpud on otsitud tulitäpid.

8. **Hüperbooli raadiusvektorid.** Samuti nagu ellipsi korral võime arvutada raadiusvektoreid, mis viivad täppi antud abstsissiga x . Saame:

$$r_1 = ex - a, \quad r_2 = ex + a.$$

9. **Hüperbooli ekstsentrisus.** Tähel e , n. n. hüperbooli ekstsentrisusel, on lihtne tähendus: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$. Tema on suurem kui üks.

Fookuse kaugus algusest on ea .

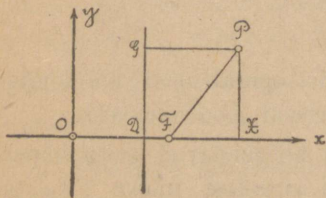
10. **Hüperbooli juhtjoon.** Võtame hüperbooli fokaal- teljel täpi D kauguses $OD = \frac{a}{e}$ algusest. Et $e > 1$ on, siis on $OD < a$: D on O ja A vahel (joon. 64). Tõmbame täpis D püstjoone; olgu F tema lähem fookus. Olgu P mingi hüperbooli täpp; $PF = ex - a$; $PG =$ täpi kaugus saadud püstjoonest on

$$OX - OD = x - \frac{a}{e} = \frac{ex - a}{e}.$$

Sellepärast:

$$PF : PG = e.$$

Sõnades: hüperbooli täpi kauguste suhe kindlast täpist ja kindlast sirgest on muutumata arv, suurem kui üks. See annab meile lihtsa ekstsentrisuse geomeetrilise tähenduse. Viimast hüperbooli omadust võib võtta tema definitsiooniks.



Joon. 64.

Kindel täpp ja sirge on hüperbooli fookus ja juhtjoon.

11. **Hüperbooli juhtjoone konstruimine.** Juhtjoone kaugus algusest on $OD = \frac{a}{e} = \frac{a^2}{c}$, tähendab, $OD : a = a : c$, sõnades: a on keskmine võrdeline OD ja c vahel. Kui meelde tuletame täisnurkse kolmnurga kõrguse omadust, saame järgmise juhise

See niit jookseb keppi mööda tikku P -ni, kust tema täppi F pöörduv, millesse tema teine ots on seotud. Missuguse kõvera joonistab tikk kepi pöörlemisel?

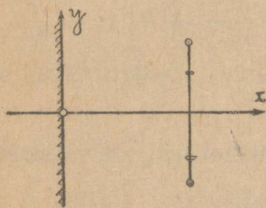
14. Parabool.

1. Juba ennemini (v.5.1) andsime **parabooli definitsiooni**. Teda teisiti formuleerides saame: parabooli täpi kauguste suhe kindla täpi ja kindla sirgeni on muutumata arv, nimelt üks. See on siis parabooli ekstsentrism.

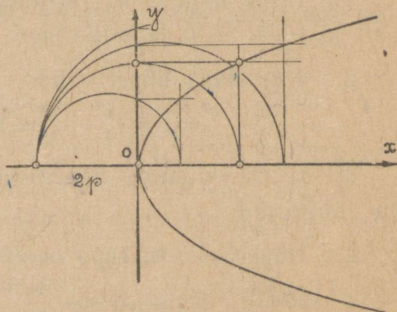
2. Valides kohaselt telje, saime (v.5.4) **parabooli võrrandi**:

$$y^2 = 2px.$$

3. **Parabooli kuju uurimine.** 1) Et pahemal pool olnud positiivne suurus seisab, siis peab ka parem pool >0



Joon. 67.



Joon. 68.

olema; sellega peab, kui $p > 0$, $x > 0$ olema: kõik parabooli täpid asuvad paremal pool y -telge (joon. 67).

2) Kui y avaldame, saame: $y = \pm \sqrt{2px}$: igale x -le vastab kaks y -d, mis ainult märgi suhtes teineteisest erinevad. Parabool on sümmeetriline x -telje suhtes. Seda sirget nimetatakse tema „teljeks“. Telgkoordinaat esineb parabooli võrrandis esimeses astmes.

3) Koordinaatide algus on parabooli lagitäpp. Meie telgede valikul on y -telg parabooli puutuja selles täpis (joon. 68).

4) Suureneb abstsiss lõpmata, läheb ka y lõpmatusse: parabool on lahtine kõver.

4. **Parabooli joonistamine.** Parabooli võrrandist saame: $2p:y=y:x$; tähendab, y on keskmine võrdeline x -i ja $2p$ vahel. Kui meelde tuletame, kuidas ringi läbimõõtu jagab osadeks temaga risti olev sirge, saame järgmise juhise parabooli joonistamiseks (joon. 68): joonistame parabooli telje ja puutuja tema lagitäpis; asetame teljele, sellest täpist pahemale poole pikkuse $2p$; selle lõpust võtame telje sihis lõigu $>2p$ ja konstruime sellel, kui diameetril, ringi. Selle viimase ühistäppidest telgedega tõmbame sirged, mis nende joontega risti. Viimaste sirgete lõiketäpid on paraboolil. Muutes võetud lõigu pikkust saame konstruktsiooni kordlemisel niipalju täppe, kui parabooli joonistamiseks tarvis.

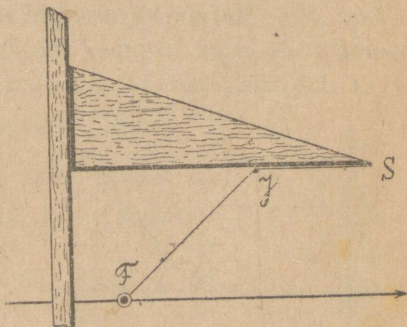
5. **Parabooli parameeter** oli tulitäpi kaugus juhtjoonest. Kui tulitäpis parabooli ordinaadi võtame, näeme, et viimane on võrdne nimetatud kaugusega: parabooli parameeter on tulitäppordinaat.

Ülesanded.

1. Leida parabooli võrrand, mille tulitäpp on $(0, 0)$ ja juhtjoon: $x+y+5=0$.

2. Joonistada paraboolid: $y^2=4x$, $y^2+2x=0$,
 $x^2+4y=0$.

3. Täisnurkne kolmnurk liugub ühe oma kaatetiga joonlauda mööda (joon. 69). Selle vastastippu S on niit köidetud, mis teise kaateti sihis joonistikuni J jookseb ja sealt, ümber viimase, kindlasse täppi F viib, millesse tema lõpp on seotud. Niidi pikkus võrdub selle kaateti



Joon. 69.

pikkusega. Missuguse kõvera joonistab tikk kolmnurga liugmisel joonlauda mööda?

4. Antud on parabool $y^2=2px$. Täisnurk tipuga parabooli lagitapis pöörleb selle ümber. Tema külgede ühistäpid parabooliga on kõõlu abil ühendatud. Leida viimase poolitamistäpi geomeetriline koht.

5. Keha, mis rõhtsihis paisatakse kiirusega c , liigub raskuse mõju tõttu kõverat mööda: $y=\frac{1}{2} \cdot \frac{9.8}{c^2} x^2$, kui x -siht on alguskiiruse oma, y -telg on püsti alla sihitud ja mõõtudeks on m ja sec . Joonistada täpi trajektoor¹⁾, kui $c=1.55$.

15. Ellipsi, hüperbooli ja parabooli ühine võrrand polaarkoordinaatides.

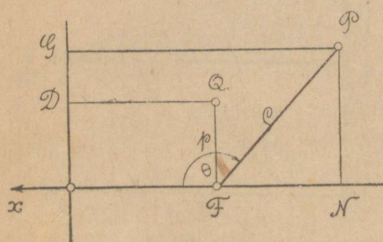
1. Ellipsi ja hüperbooli parameeter. Samuti kui parabooli korral, nimetatakse ka ellipsis ja hüperboolis fookusordinaati parameetriks. Arvutamisel leiame ellipsi ja hüperbooli lahendatud võrranditest:

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} \text{ ja } y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2},$$

kui positiivsed harud võtame, täpis $x=c$ ordinaadi

$$p=\frac{b^2}{a}.$$

2. Meie kolme kõvera ühine võrrand. Kõiki neid kolme kõverat võib, nagu nägime, defiinida, kui täpi geomeetrilist kohta, mille kauguste suhe antud täpist



Joon. 70.

ja antud sirgest on muutumata. See suhe on kõvera ekstsentrism; ellipsis on tema <1 , hüperboolis >1 , paraboolis $=1$ -ga.

Nimetatud võrrandi saamiseks võtame (joon. 70) polaarteljeks sirge, mis fooku-

1) trajicere — üle viskama, siirama.

sest risti juhtjoonega tõmmatud; tema sihiks sihi fookusest juhtjoonele; sellega loeme polaarkirka sihis, milles kellanäitaja liigub. Olgu Q fookusordinaadi lõpp, QD tema kaugus juhtjoonest; olgu F mõni täpp kõveral, (ϱ, ϑ) tema polaarkoordinaadid, PF tema kaugus fookusest, PG — juhtjoonest. Siis on meie kolme kõvera ühise definitsiooni põhjal: $PF:PG=e$, kust $PF=e.PG$. Kui täpist P ristjoone polaarteljega tõmbame, saame $PG=QD+FN$; nüüd on aga

$$QD=QF:e=\frac{p}{e}, \quad FN=\varrho \cos(\pi-\vartheta)=-\varrho \cos \vartheta,$$

sellega

$$PG=\frac{p}{e}-\varrho \cos \vartheta,$$

ehk

$$PF=\varrho=e.PG=p-\varrho e \cos \vartheta,$$

kust:

$$\varrho=\frac{p}{1+e \cos \vartheta}.$$

See võrrand kujutab ellipsi, kui $e<1$, parabooli, kui $e=1$, hüperbooli, kui $e>1$ on.

Märkus. See võrrand on üheks tähtsamaks analüütilise geomeetria rakendustes: kõikide kehade orbiidid¹⁾, mis liiguvad kauguse ruuduga pöördvõrdeliste jõudude sunnil (raskus, elektrilised jõud, magnetilised jõud, valguse rõhumine valgustatud keha peale jne.), on kas ellipsid, paraboolid või hüperboolid. Näiteks liiguvad planeedid ümber päikese ellipsites, komeedid ellipsites, paraboolides või hüperboolides. Kõik need orbiidid on edustatud leitud võrrandis.

16. Koonuslõiked.

1. Alamal näitame, et kõik kolm kõverat: ellips, hüperbool ja parabool on püstkoonuse lõiked tasapinnaga.

Püstkoonuse moodustajatest oletame, et nemad koonuse tipust on lõpmata pikendatud mõlemale poole; koonus seisab siis koos kahest kattest, mis tema tipus kokku puutuvad.

1) orbita — ringjooks, käigutee.

Lõikame seda koonust mingi tasapinnaga π . Selle juures võib kolm juhust olla: 1) tasapind π lõikab ainult üht koonuse katet, 2) ta lõikab mõlemaid, 3) ta on rööbik ühe koonuse moodustajaga (joon. 71).

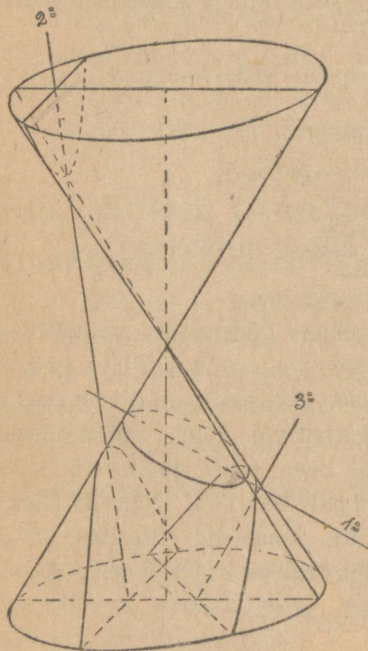
2. Esimene juhus. Olgu (joon. 72) koonuse telg O_1O_2 joonise tasapinnas, g_1 ja g_2 kaks tema moodustajat ja sirge

D_1D_2 lõikaja tasapinna π jälg selles. Tasapind π lõikab koonuse katte kaheks osaks; kujundame igäühte nendest kera, mis puutub lõikavat tasapinda. Saadud kaks kera puutuvad koonust kaht ringi mööda C_1B_1 ja C_2B_2 ja lõiketasapinda täppides F_1 ja F_2 .

Võtame uuritaval koonuslõikel mingi täpi; olgu tema tähiseks P ; ühendame tema täppidega F_1 ja F_2 . Et sirged PF_1 ja PF_2 kerade puute-tasapinnas asuvad ja kerade täppidesse F_1 ja F_2 on tõmmatud, siis puutuvad nad kerasid; samuti puutub neid koonuse moodustaja, mis täppi P lõikab. Kera puutujad, mis välistäpist tõmmatud, on võrdsed. Sellepärast:

$$PF_1 + PF_2 = PG_1 + PG_2 = G_1G_2;$$

see on koonuse moodustaja lõik kahe paralleeli vahel C_1B_1 ja C_2B_2 . Ta on konstantne. Et P mis täpp tahes saadud koonuslõikel oli, siis on resultaat maksev iga selle täpi kohta: koonuslõike täpi kauguste summa kahest kindlast täpist on konstantne. Koonuslõige on ellips. Selle tulitäpid on F_1 ja F_2 .

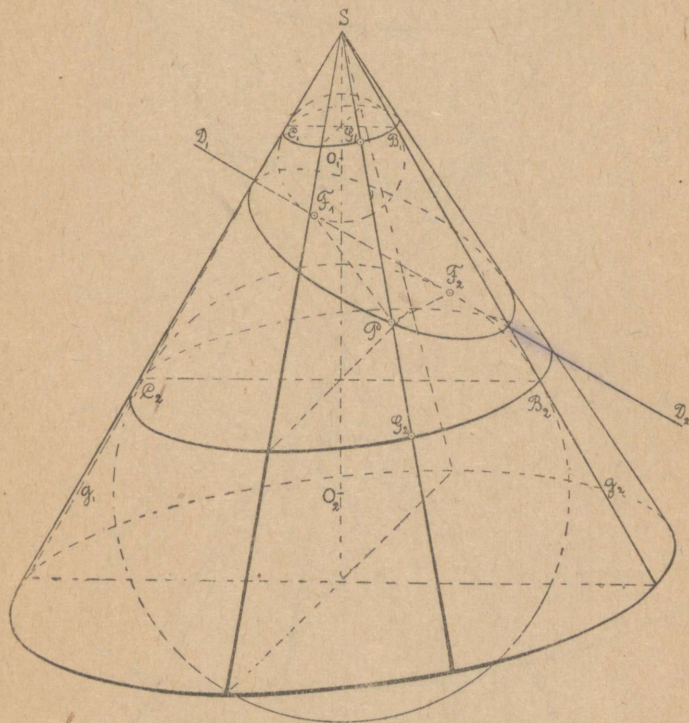


Joon. 71.

3. Teine juhus. Tehes joonise nagu ennegi, selle ainsa vahega, et nüüd tasapind π mõlemaid koonuse katteid lõikab, saame analoogiliselt endisega (joon. 73):

$$PF_1 - PF_2 = PG_1 - PG_2 = G_1G_2 = \text{konst.}$$

Et P mis täpp tahes uuritaval koonuslõikel on, siis on saadus maksev iga selle täpi kohta: selle lõiketäpi kauguste vahe

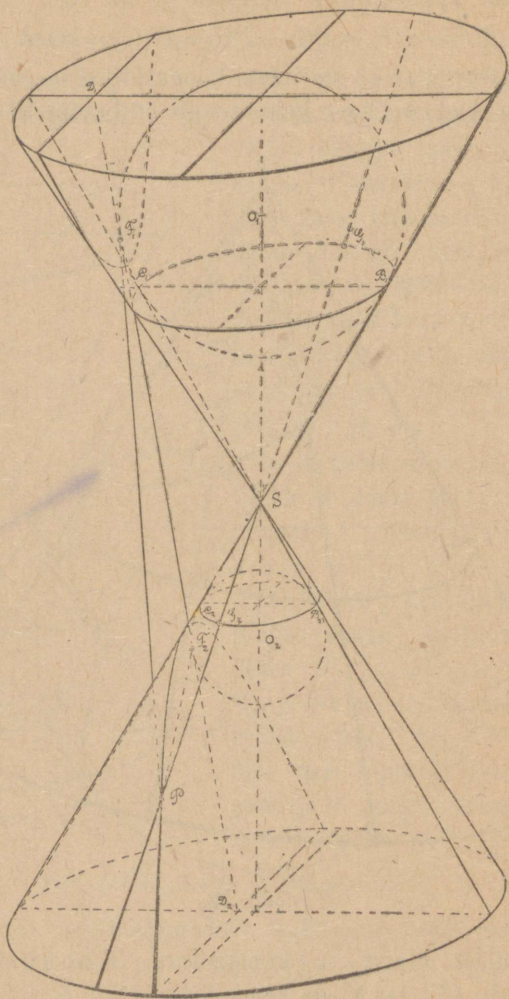


Joon. 72,

kahest kindlast täpist on konstantne. Koonuslõige on hüperbool. F_1 ja F_2 on tema fookused.

4. Kolmas juhus. Sel korral, kui lõikaja tasapind π on rööbik ühe moodustajaga, tuleb vähe teisiti arutada. Kujundame, nagu ennegi, äralõigatud koonuse osasse (joon. 74)

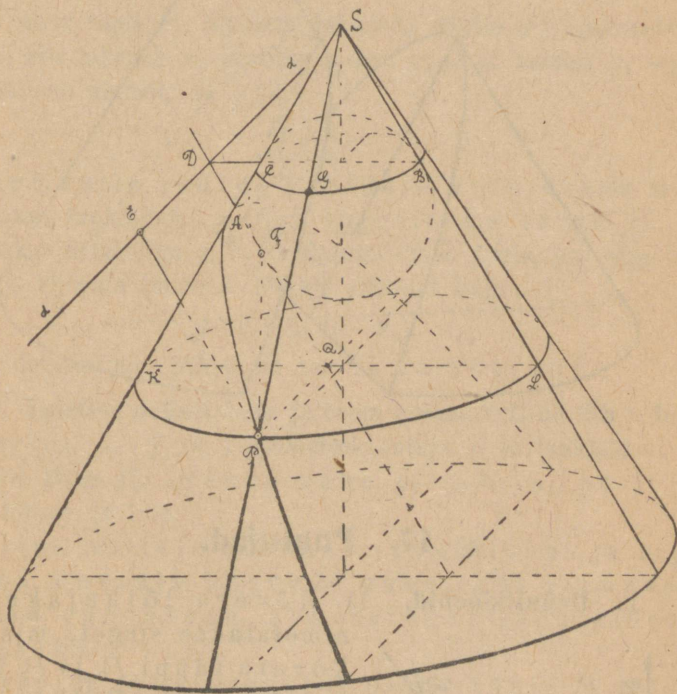
kera; olgu F tema puutetäpp tasapinnaga π ja puutugu tema koonuse pinda ringis CB . Nimetame selle ringi tasapinna π_0



Joon. 73.

ühissirge tasapinnaga π d -ks. Kui π_1 nõnda ka π_0 on risti
joonistasapinnaga; sellepärast on ka nende ühissirge d risti sellega.

Olgu P mingi täpp meie koonuslõikel. Joonisest saame lause põhjal, et rööbikud lõigud rööbikute sirgete vahel võrdsed on, järgmise rea võrdusi: $PE=QD$; $QD=LB$; viimane lõik $=PG$, järjekult on $PE=PG$. Et välistäpist kerale tõmmatud puutujad võrdsed on, siis on $PG=PF$, sellepärast $PE=PF$. P on mis täpp tahes uuritava koonuslõikel; saadus on sellepärast

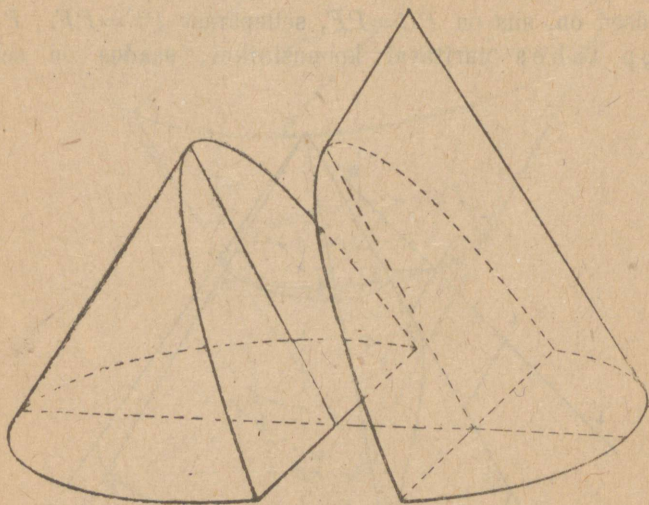


Joon. 74.

maksev iga tema täpi kohta: selle lõike täpi kaugused kindla täpi ja kindla sirgeni on võrdsed. Koonuslõige on parabool. F ja d on tema tulitäpp ja juhtjoon.

Joon. 75 kujutab mõlemaid koonuse osasid, milledeks teda tasapind π lõikab.

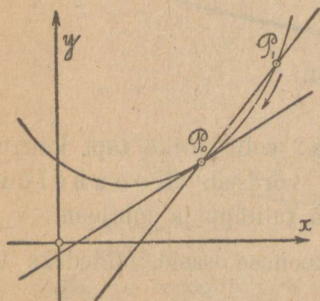
Märkus. Ka ellipsi ja hüperbooli korral võib tõestada, et lõikaja tasapinna ühissirged kerade puuteringide-tasapindadega on nende koonuslõigete juhtjooned.



Joon. 75.

17. Puutujad.

1. Definiitsioonid. 1) Kõvera lõikajaks P_0P_1 nimetatakse sirget, mis kaht kõvera täppi P_0 ja P_1 ühendab (mitte lõiku P_0P_1 !) (joon. 76).



Joon. 76.

- 2) Kõvera puutujaks tema täpis P_0 nimetatakse piirsirget, millele läheneb kõvera lõikaja P_0P_1 , kui tema teine lõiketäpp P_1 kõveraga läheneb lõpmata esimesele P_0 (joon. 76).

2. **Puutuja võrrand.** Olgu kõvera võrrand $y=f(x)$ ja täppide P_0 ja P_1 koordinaadid (x_0, y_0) ja (x_1, y_1) ; siis on lõikaja P_0P_1 võrrand (v.5.5):

$$\frac{y-y_0}{y_1-y_0} = \frac{x-x_0}{x_1-x_0},$$

ehk teisiti:

$$y-y_0 = \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x-x_0).$$

Laseme nüüd täpil P_1 lõpmata läheneda täpile P_0 , märkides: $P_1 \rightarrow P_0$, siis läheneb x_1 lõpmata x_0 -le: $x_1 \rightarrow x_0$, samuti $y_1 \rightarrow y_0$. Meie näitame alamal, et suhe

$$\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$$

läheneb selle juures kindlale arvule; seda arvu nimetatakse funktsiooni $y=f(x)$ tuletiseks täpis P_0 ja tähistatakse sümboliga y_0' . Nõnda siis omab piiris, kui täpp P_1 täpile P_0 lõpmata läheneb, lõikaja võrrand kuju:

$$y-y_0 = y_0'(x-x_0).$$

Puutuja definitsiooni põhjal on see tema võrrand.

3. Tuletise definitsioon ja tema geomeetriline tähendus.

Arvud x_1-x_0 , y_1-y_0 on rippumata muutuja x ja funktsiooni y kasvud täpis P_0 . Nende suhe y_1-y_0/x_1-x_0 on lõikaja tõus (v.7.5).

Piiri, millele läheneb funktsiooni ja rippumata muutuja kasvude suhe, kui viimased lõpmata vähenevad, nimetatakse funktsiooni tuletiseks.

Tuletis funktsioonist $y=f(x)$ täpis P_0 määrab vastava kõvera puutuja tõusu: tuletis täpis P_0 on tangens nurgast, mille kõvera puutuja täpis P_0 sünnitab positiivse x -sihiga.

4. **Näited tuletise leidmisest.** Eelmärkus. Järgnevates arvutamistes jätame meie kindla arvpaari $(x_0, y_0=f(x_0))$ eriti tähistamise 0-märgikese abil ära.

1) Olgu $y=cx$; olgu x mõni selle x -muutuja väärtus, (tema vastaks endisele x_0) ja cx temale vastav funktsiooni

väärtus; lisame rippumata muutuja väärtusele kasvu h ; uuele r.m. väärtusele $x+h$ vastab uus funktsiooni väärtus $c(x+h)$. Funktsiooni kasv, mis x -kasvule h vastab, on $c(x+h)-cx=ch$; kasvude suhe $ch:h=c$ on kindel arv, sellega ka kasvude suhte piir kasvu h lõpmatul lähenemisel nullile. Otsitav tuletis on c .

Ka geomeetriliselt on see otsekohe näha: $y=cx$ kujutab sirget; selle tõus on c .

Sama mõttekäiku tarvitame ka järgnevate näidete käsitlemisel.

2) $y=\frac{c}{x}$; lisame x -le kasvu h ; r.m. uus väärtus on $x+h$, vastav uus funktsiooni väärtus $\frac{c}{x+h}$, sellega tema kasv:

$$\frac{c}{x+h} - \frac{c}{x} = \frac{-ch}{x(x+h)}.$$

Kasvude suhe on $\frac{-c}{x(x+h)}$, ja selle piir, kui $h \rightarrow 0$, $-\frac{c}{x^2} = -\frac{y}{x}$.

3) $y^2=2px$, $y=\pm\sqrt{2px}$. Võtame selle funktsiooni positiivse haru. Kasvude suhe on siin:

$$\frac{\sqrt{2p(x+h)} - \sqrt{2px}}{h} = \frac{2p(x+h) - 2px}{h(\sqrt{2p(x+h)} + \sqrt{2px})} = \frac{2p}{\sqrt{2p(x+h)} + \sqrt{2px}}.$$

Otsitud tuletis on selle piir, kui $h \rightarrow 0$, sellega $\frac{p}{\sqrt{2px}}$. Negatiivse haru korral oleks saadud avalduse ees märk $-$; sellepärast on mõlematel kordadel otsitud tuletis $+\frac{p}{y}$.

4) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$. Kasvude suhe on

$$\pm \frac{\frac{b}{a}(\sqrt{a^2 - (x+h)^2} - \sqrt{a^2 - x^2})}{h} = \pm \frac{b}{a} \frac{-(2x+h)}{\sqrt{a^2 - (x+h)^2} + \sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Piiris, kui $h \rightarrow 0$, saame: $\mp \frac{b}{a} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, sellega ikka, haru peale vaatamata, tuletise

$$-\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y}.$$

5) Samuti saaksime võrrandi korral $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ tuletise

$$\frac{b^2}{a^2} \frac{x}{y}.$$

5. **Puutuja võrrandi leidmine.** Andmeteks on kõvera võrrand ja puutumistäpi abstsiss. Üldise eeskirja järele tuleb selle täpi ordinaat leida, kõverat määra- vast funktsioonist tuletis võtta, viimane arvutata puutumistäpis ja saadused asetada üldisse puutuja võrrandisse:

$$y - y_0 = y_0'(x - x_0).$$

Erivõtete abil on mõnikord võimalik arvutamisi lühendada.

Näide. Leida püsthüperbooli $2xy = a^2$ puutuja võrrand täpis, mille abstsiss on x_0 .

Selle täpi ordinaat on $y_0 = \frac{a^2}{2x_0}$, tuletis temas on $-\frac{y_0}{x_0}$ (v.17.4,2), järjestikult puutuja võrrand:

$$y - y_0 = -\frac{y_0}{x_0}(x - x_0),$$

ehk:

$$x_0 y + y_0 x = 2x_0 y_0.$$

(x_0, y_0) on puutumistäpp; ta asub kõveral; tema koordinaadid peavad viimase võrrandit rahuldama:

$$2x_0 y_0 = a^2.$$

Sellepärast:

$$x_0 y + y_0 x = a^2.$$

See on nõutud võrrand.

6. **Ringi puutuja.** Leida ringi $x^2 + y^2 = r^2$ puutuja täpis, mille abstsiss on x_0 .

Tuletis selles täpis on $-\frac{x_0}{y_0}$, sellepärast puutuja võrrand:

$$y - y_0 = -\frac{x_0}{y_0}(x - x_0),$$

kust

$$xx_0 + yy_0 = x_0^2 + y_0^2$$

saame. Et täpp (x_0, y_0) ringil asetseb, siis rahuldavad tema koordinaadid selle võrrandit:

$$x_0^2 + y_0^2 = r^2,$$

järjestikult on

$$xx_0 + yy_0 = r^2.$$

See on otsitud ringi puutuja võrrand,

Seletatud mõttekäik on eeskujuks kõigile järgnevatele puutujate otsimistele.

7. Märkus. Kui võrdleme kõverate võrrandeid:

$$2xy = a^2 \text{ ja } x^2 + y^2 = r^2$$

nendele vastavate puutujate võrranditega:

$$x_0y + xy_0 = a^2, \quad xx_0 + yy_0 = r^2,$$

leiame järgmise juhise puutuja võrrandi kirjutamiseks: kõvera võrrand tuleb muutujate astmenäitajateta ja kordajateta kirjutada:

$$xy + xy = a^2, \quad xx + yy = r^2,$$

ja igas liikmes ühele muutujatest puutumistäpi näitaja (nullike) juurde kirjutada.

Sama seadus maksab, nagu pärast näeme, ka parabooli, ellipsi ja hüperbooli puutujate võrrandite kohta.

8. **Parabooli puutuja.** Parabooli võrrand on: $y^2 = 2px$; tuletis puutumistäpis on $p:y_0$; sellepärast on puutuja võrrand:

$$y - y_0 = \frac{p}{y_0}(x - x_0),$$

ehk

$$yy_0 = px - px_0 + y_0^2,$$

ehk, et (x_0, y_0) puutumistäpina kõveral asub ja sellepärast on

$$y_0^2 = 2px_0,$$

lõplikult

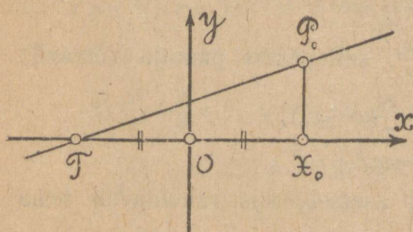
$$yy_0 = p(x + x_0).$$

9. **Parabooli puutuja lõiketäpp teljega.** Selles täpis T

on $y=0$, sellega

$$x_t = -x_0;$$

sõnades: nimetatud lõiketäpi abstsiss on puutumistäpi abstsiss vastasmärgiga (joon. 77).



Joon. 77.

Joonisest 78 leiame:

$$TF = TO + OF = x_0 + \frac{p}{2},$$

$$P_0F = P_0G = DO + OX_0 = \frac{p}{2} + x_0.$$

valguse kiired, mis paraboolile rööbikult teljega langevad, koonduvad tema tulitäppi (joon. 79).

See parabooli omadus on viimase täpi nime põhjuseks.

Kiired, mis paraboolile tema tulitäpist saadetakse, peegelduvad rööbikuteks teljega.

Selle peal põhjeneb paraboolsete peeglite tarvitamine kiirteheitjates ja pikksilmades.

Paraboolne peegel on rööpkiirte korjamiseks ideaalne: tema on vaba sfääriliste ¹⁾ peeglite suurest puudusest: sfäärilisest aberratsioonist ²⁾.

12. Ellipsi puutuja. Sel korral on tuletis puutetäpis $-\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}$, sellepärast on puutuja võrrand:

$$y - y_0 = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0} (x - x_0).$$

Kui arvesse võtame, et (x_0, y_0) ellipsi täpp on, saame:

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

13. Ellipsi puutuja lõiketäpp suure teljega.

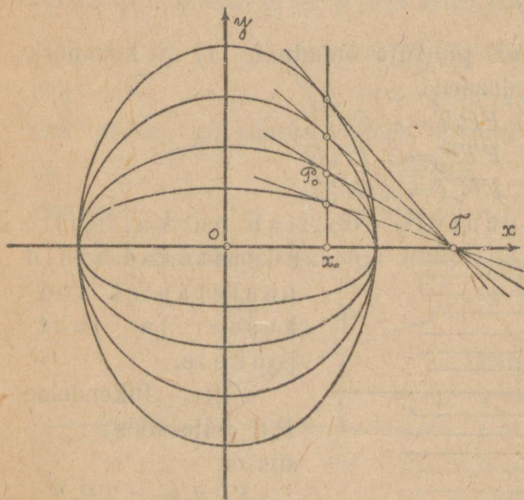
Sellel on $y=0$; sellepärast on nimetatud täpi abstsiss $\frac{a^2}{x_0}$. Kui arvesse võtame, et $x_0 < a$ on, näeme, et $a^2 : x_0 > a$: puutuja lõiketäpp suure teljega on sellel teljel oleva ellipsi lagi-täpi taga (joon. 80).

14. Ellipsi puutuja joonistamine

(esimene viis). Puutuja ja suure telje lõiketäpi abstsiss

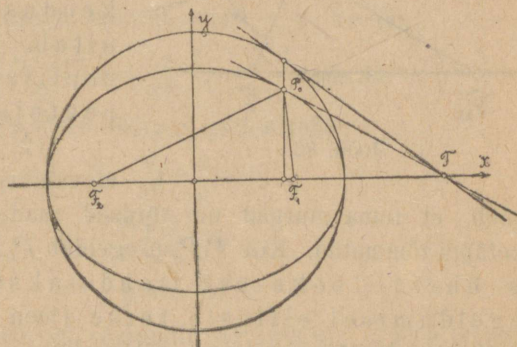
1) sphaira — kera.

2) aberratio — kõrvale-eksimine, hälbumus.



Joon. 80.

$a^2 : x_0$ ei olene väikese telje b suurusest. Kui rea ellipse joonistame ühel ja samal suurel teljel (joon. 80) ja nendel kõveratel võtame täpid ühe ja sama abstsissiga x_0 , siis lõikuvad kõik puutujad nendes täppides ühes ja samas täpis suurel teljel. Üheks nimetatud ellipsitest on suur



Joon. 81.

telgring. See annab meile järgmise juhise ellipsi puutuja joonistamiseks (joon. 81): tõmbame puutetäpi ordinaadi ja pikendame tema suure telg-ringini; saadud täpis tõmbame ringi puutuja; selle viimase ühistäpi suure teljega ühendame antud puutetäpiga sirge abil. Viimane on nõutud ellipsi puutuja.

15. Ellipsi puutuja tähtsam omadus. Ellipsi puutuja poolitab välisnurka, mis sünnitavad puutetäppi tõmmatud raadiusvektorid.

Joonisest 81 saame:

$$F_1T = OT - OF_1, \quad F_2T = OT + F_2O;$$

ehk:
$$F_1T = \frac{a^2}{x_0} - c = \frac{a}{x_0} \left(a - \frac{c}{a} x_0 \right) = \frac{a}{x_0} (a - ex_0),$$

samuti
$$F_2T = \frac{a}{x_0} (a + ex_0).$$

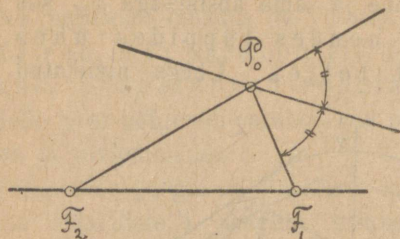
Me teame aga (v.12.9), et:

$$a - ex_0 = F_1P_0, \quad a + ex_0 = F_2P_0;$$

sellepärast:
$$F_1T : F_2T = F_1P_0 : F_2P_0.$$

Kui vaatleme kolmnurka $F_1P_0F_2$ ja meelde tuletame kolmnurga välisnurka poolitaja põhiomadust, saame kõne all oleva lause.

16. **Ellipsi puutuja joonistamine** (teine viis). Ühendame antud puutetäpi ellipsi fookustega (joon. 82),



Joon. 82.

pikendame üht saadud raadiusvektoritest ja poolitame nurga, mille selle pikendus teisega sünnitab. Leitud nurgapoolitaja on otsitud puutuja.

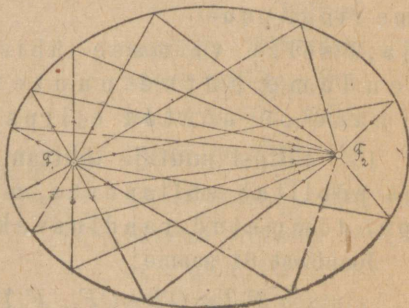
järgneb, et tema nurgad on võrdsed raadiusvektoritega, mis puutetäppi tõmmatud. Kiir F_1P_0 peegeldub P_0F_2 sihis. Kiired, mis ühest fookusest saadetakse, koonduvad peegeldumisel ellipsis teise (joon. 83).

See on tulitäppide nime põhjuseks.

18. **Hüperbooli puutuja.** Samuti kui ellipsigi korral, saaksime hüperbooli puutuja võrrandi:

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1,$$

jä tõestaksime tema põhiomadust: hüperbooli puutuja poolitab sisenurka, mis sünnitavad puutetäppi tõmmatud raadiusvektorid. (joon. 84).



Joon. 83.

Sellest järgneb hüperbooli puutuja joonistamise viis.

19. **Hüperbooli puutuja lõpmatuses.** Hüperbooli puutuja võrrand oli

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

Laseme puutetäpi abstsissi lõpmata kasvada. Milleks kujuneb meie võrrand?

Et x_0 -ga ka y_0 lõpmata kasvab, siis pole võimalik otsekohe näha, mis sünnib võrrandiga puutetäpi abstsissi lõpmatusse minekul. Seda võib aga kergesti uurida järgmise võtte abil. Jagame võrrandi x_0 -ga:

$$\frac{x}{a^2} - \frac{y}{b^2} \cdot \frac{y_0}{x_0} = \frac{1}{x_0};$$

kui x_0 lõpmata kasvab, muutub murd $1:x_0$ nulliks;

$$\text{murd: } \frac{y_0}{x_0} = \pm \frac{b}{a} \frac{\sqrt{x_0^2 - a^2}}{x_0} = \pm \frac{b}{a} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{x_0}\right)^2} \text{ muutub } \pm \frac{b}{a};$$

sellepärast kujuneb meie võrrand järgmiseks:

$$\frac{x}{a^2} - \frac{y}{b^2} \left(\pm \frac{b}{a}\right) = 0,$$

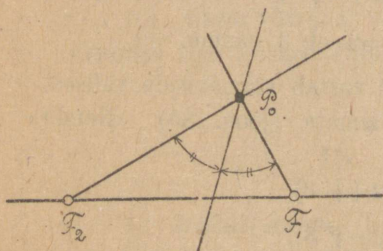
ehk:

$$\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0,$$

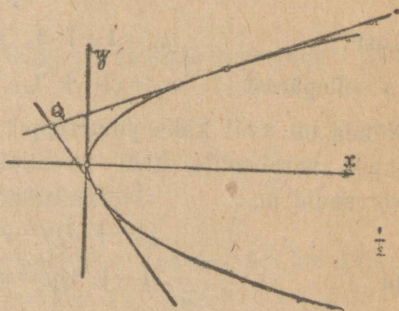
ehk viimati:

$$y = \pm \frac{b}{a} x.$$

Need on meile tuttavad võrrandid (v.13.5,5): asümptoodid on hüperbooli puutujad lõpmatutes.



Joon. 84.



Joon. 85.

20. Üks tähtsamatest ülesannetest koonuslõigete puutujate alal on puutuja võrrandi leidmine, mis välisest täpist kõverale tõmmatud. Selle ülesande lahendamise mõttekäigu seletuseks olgu järgmine

Näide. Antud on parabool $y^2 = 2x$. Leida puutuja võrrand, mis tõmmatud täpist $Q(-1, +1)$.

See täpp on väljaspool kõverat:

$$(+1)^2 + 2 \cdot (-1) \quad (\text{joon. 85}).$$

Oleksid meil puutetäpi koordinaadid (x_0, y_0) teada, võiksimme meie nõutud võrrandi üldise valemi (v.17·8) põhjal otsekohe kirjutada:

$$yy_0 = x + x_0$$

($p=1$). Otsitavas võrrandis on, nagu näeme, kaks tundmatut: x_0 ja y_0 . Nende leidmiseks läheb kaht tingimust tarvis. Need saame järgmiselt.

Esiteks on puutetäpp paraboolil, sellepärast peavad tema koordinaadid selle kõvera võrrandit rahuldama:

$$y_0^2 = 2x_0;$$

teiseks peab puutuja antud täppi lõikama; selle koordinaadid peavad (kui neid seame x ja y , mitte x_0 ja y_0 asemele!) puutuja võrrandeid rahuldama:

$$y_0 = -1 + x_0.$$

Saadud kahest tingimusest, milledele peavad alluma x_0 ja y_0 , leiame

$$y_0^2 - 2y_0 - 2 = 0,$$

$$\text{kust:} \quad y_0' = 1 + \sqrt{3}, \quad y_0'' = 1 - \sqrt{3},$$

$$\text{ja sellepärast} \quad x_0' = 2 + \sqrt{3}, \quad x_0'' = 2 - \sqrt{3} \text{ saame.}$$

Nõnda on meil kaks puutetäppi; see vastab võimalusele välisest täpist paraboolile kaht puutujat tõmmata (joon. 85). Nende võrrandid on:

$$(1 + \sqrt{3})y = x + (2 + \sqrt{3})$$

$$\text{ja} \quad (1 - \sqrt{3})y = x + (2 - \sqrt{3}).$$

Ülesanded.

1. Leida püsthüperbooli $2xy = a^2$ asümptoodid, lähtudes selle puutuja võrrandist.

2. Tõestada, et kolmnurga pind, mille sünnitavad püsthüperbooli asümptoodid mingi tema puutujaga, on konstantne.

3. Antud on ring $x^2 + y^2 = a^2$. Igas tema täpis on puutuja tõmmatud, millele täpp $(-a, 0)$ on projektitud. Leida selle

projektsiooni geomeetriline koht (võrrandina ja graafiliselt kõverana).

4. Näidata, et ellipsi puutuja, mis parameetri (v.15·1) otsas tõmmatud, kohtub juhtjoonega suure telje pikendusel. Sellest puutuja omadusest järeldada uus ellipsi juhtjoone konstruktsioon.

5. Näidata, et täpp, milles ellipsi puutuja lõikab suurt telge, on lõigu keskkoh, mille sellel teljel sünnitavad kaks sirget, mis puutetäppi ühendavad väikese telje otsadega.

6. Leida kõvera $x^2 + y^2 = 1$ puutujad, mis lõikavad täppi $(+3, 0)$.

7. Leida hüperbooli $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ puutuja, mis on rööbik sirgega $10x + 3y = 0$.

8. Avaldada parabooli puutuja võrrand ainult jooksvates koordinaatides, tema tõusus ja parabooli parameetris.

9. Igas parabooli täpis on puutuja tõmmatud. Leida saadud puutuja võrrandi abil fookusprojektsiooni geomeetriline koht puutujale.

10. Sama võrrandi abil leida paraboolile ümberkujundatud täisnurja tipu geomeetriline koht.

18. Diameetrid.

1. **Definitsioon.** Koonuslõike diameetrik s nime-tatakse tema kindla sihiga rööpkõõlude pooli-tamistäppide geomeetrilist kohta.

Alamal näitame, et see geomeetriline koht on sirge.

2. **Parabooli diameetrid.** Võtame parabooli $y^2 = 2px$ ja sirgete pere $y = mx + n$ (joon. 86), kus parameeter m nende ühist tõusu ja n kõõlust kõõlule muutuv algordi-naat on. Võtame vabalt ühe nendest sirgetest ja leiame tema ühistäpid parabooliga; selleks tulevad võrrandid

$$y^2 = 2px \text{ ja } y = mx + n$$

ühiselt lahendada. Kui teisest nendest asetame y väärtuse esimesse, saame:

$$m^2x^2 + 2mnx + n^2 = 2px,$$

kust otsitava abstsissi jaoks leiame võrrandi:

$$m^2x^2 + 2(mn - p)x + n^2 = 0.$$

See annab meile kaks juurt, mis vastavad kahle ühistäpile: x_1 ja x_2 . Kõõlu keskkoha abstsiss x_0 on $\frac{1}{2}(x_1 + x_2)$, ehk ruutvõrrandi juurte omaduse põhjal:

$$x_0 = \frac{1}{2} \frac{2(mn - p)}{m^2} = \frac{mn - p}{m^2},$$

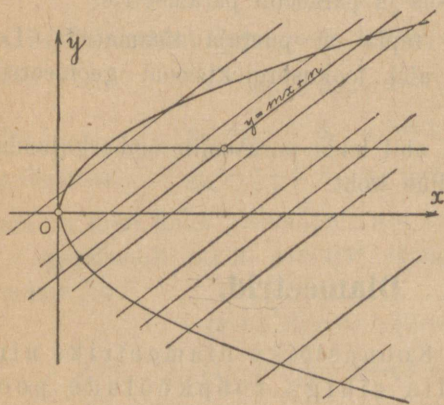
ja tema ordinaat:

$$y_0 = \frac{mn - p}{m^2} \cdot m + n = \frac{mp}{m^2} = \frac{p}{m}.$$

Sellest, et kõõl antud süsteemist vabalt oli valitud, järgneb, et iga

ühise niisuguse kõõlu poolitamistäpi ordinaat on $\frac{p}{m}$, järjekult konstantne, tähendab, otsitud geomeetriline koht on sirge, mis rööbik parabooliteljega.

See saadus on maksev, vaatamata selle peale, missugune on kõõlsüsteemi tõus m : kõik parabooli diameetrid on rööbikud.



Joon. 86.

3. Ellipsi diameeter. Olgu antud ellips

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ja süsteem rööpkõõle: $y = mx + n$ ühise tõusuga m . Leiame nende poolitamistäppide geomeetrilise koha.

Me võtame selleks vabalt mõne nendest kõõludest:

$$y = mx + n,$$

ja leiame tema ühistäpid ellipsiga. Selleks lahendame ühiselt tema ja ellipsi võrrandid. Saame kergete tehete järel:

$$(b^2 + a^2 m^2)x^2 + 2a^2 m n x + a^2(n^2 - b^2) = 0.$$

Siit leiame kaks otsitud abstsissi x_1 ja x_2 . Kõõlu keskkoha abstsiss on:

$$x_0 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) = \frac{1}{2} \frac{-2a^2 m n}{b^2 + a^2 m^2},$$

ehk:

$$x_0 = \frac{-a^2 m n}{b^2 + a^2 m^2},$$

ja tema ordinaat:

$$y_0 = \frac{n b^2}{b^2 + a^2 m^2}.$$

Sellega on meil käes kõõlu keskkoha koordinaadid, mille algordinaat on n . Laseme n -i rea väärtusi omandada; viimased kaks avaldust annavad meile siis iga kord vastava kõõlu keskkoha koordinaadid. Nemad on otsitava geomeetrilise koha parameetrilised võrrandid.

Selle Cartesiuse-võrrandi saamiseks elimiiniime parameetri n ; saame tema jooksvates koordinaatides x_0, y_0 kujus:

$$y_0 = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{1}{m} x_0.$$

See on sirge, mis lõikab algust, tähendab ellipsi keskk kohta.

Resultaat on maksev, ükspuhas missugune on kõõlsüsteemi tõus m : kõik ellipsi diameetrid kohtuvad tema keskkohas.

4. Ellipsi diameetri tõus. Nagu näeme, poolitab kõõlu

$$y = mx + n$$

ellipsi diameeter

$$y = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{1}{m} x.$$

Tema tõus

$$m_1 = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{1}{m},$$

järjekult on

$$m m_1 = -\frac{b^2}{a^2}.$$

Kõõlu ja teda poolitaja diameetri tõusude korutus on $-b^2 : a^2$.

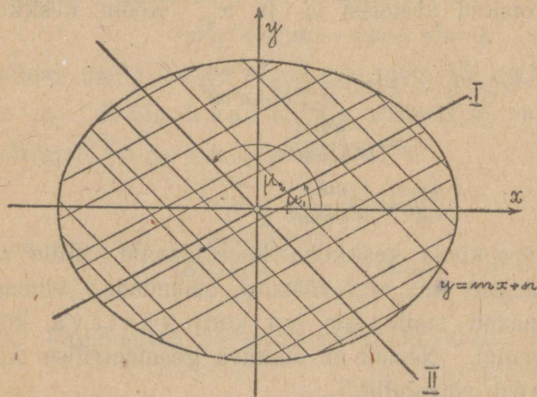
5. Ellipsi kaasdiameetrid. Võtame ellipsis kõõlsüsteemi (joon. 87)

$$y = mx + n.$$

Nende ja nendele vastava diameetri tõusud on seotud valemis:

$$mm_1 = -\frac{b^2}{a^2}.$$

Võtame teise süsteemi kõõle, mis rööbikud 1-se diameetriga;



Joon. 87.

nende tõus on m_1 ; olgu nendele vastava diameetri tõus m_2 . Siis peab endise lause põhjal olema:

$$m_1 m_2 = -\frac{b^2}{a^2}.$$

Võrreldes leiame:

$$m_2 = m:$$

teine diameeter on rööbik esimeste kõõludega.

Niisuguseid

kaht diameetrit, milledest kumbki poolitatakse kõõle, mis teisega rööbikud, nimetatakse kaasdiameetriteks.

Kahe ellipsi kaasdiameetritõusud on seotud valemis:

$$m_1 m_2 = -\frac{b^2}{a^2},$$

ehk:

$$\tan \mu_1 \cdot \tan \mu_2 = -\frac{b^2}{a^2}.$$

Tangens'ite korrutis on negatiivne, tangens'itel on vastasmärgid kui $\mu_1 < \frac{\pi}{2}$, siis on $\mu_2 > \frac{\pi}{2}$.

Kui üks ellipsi diameeter on esimeses vee randis, siis on tema kaaslane teises.

Ringis on $b = a$, $\tan \mu_1 \cdot \tan \mu_2 = -1$, tähendab, ringis on iga kaks kaasdiameetrit vastamisi risti.

6. Hüperbooli diameetrid. Just nagu ellipsi korral näitame, et hüperbooli rööpkõõlude keskkohad on

sirgel. Ka siin kohtuvad kõik diameetrid hüperbooli kesk-
kohas. Kahe kaasdiameetri tõusud on seotud valemis:

$$\tan \mu_1 \cdot \tan \mu_2 = \frac{b^2}{a^2}.$$

Mõlemad kaasdiameetrid on ühes ja samas veerandis. Asümptootides langevad mõlemad kaasdiameetrid ühte.

Ülesanded.

1. Leida kõõlu $y = 2x - 1$ keskkohat ellipsis $4x^2 + 9y^2 = 36$, vaadeldes teda kui kõõlu ühistäppi vastava diameetriga.
2. Leida kõõlpere, mida poolitab hüperbooli $4x^2 - 9y^2 = 36$ diameeter $3y - 2x = 0$.
3. Leida ellipsi $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ võrdsed kaasdiameetrid.
4. Leida ellipsis $\frac{1}{2}x^2 + 3y^2 = 1$ diameetrid, millede pikkus on 2.

19. Koordinaatide teisendamine.

1. Üldine ülesanne koordinaatide teisendamises on järgmine. Antud on mõni geomeetriline kuju: sirge, ring, parabool ehk miski teine kõver $F(x, y) = 0$ süsteemis x, y . Misesuguses analüütilises vormis esineb tema uues süsteemis x_1, y_1 , mille seis on antud endises?

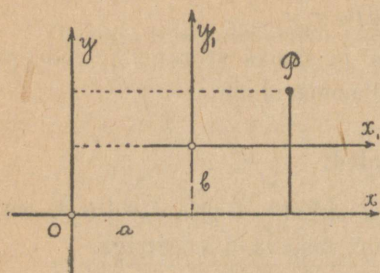
See ülesanne on lahendatud, niipea kui oskame avaldada ühe ainsa vabalt valitud täpi koordinaate süsteemis x, y tema koordinaatides uues süsteemis x_1, y_1 .

2. Esimene juhus: **rööplüke**. Uued teljed x_1, y_1 on rööbikud endistega; uue alguse koordinaadid endises süsteemis on (a, b) . Leiame valemid, mis seovad uusi koordinaate endistega.

Olgu P miski vabalt valitud täpp; olgu tema koordinaadid vanas ja uues süsteemis vastavalt (x, y) ja (x_1, y_1) (joon. 88). Me näeme, et:

$$\begin{aligned} x &= x_1 + a, \\ y &= y_1 + b; \end{aligned}$$

sõnades: paralleelteisendamisel¹⁾ on vanad koordinaadid võrdsed uutega, mis liidetud uue alguse ühenimeliste koordinaatidega.



Joon. 88.

3. Teine juhus: **pööramine.** Uuel ja vanal süsteemil on üks ja seesama algus; uued teljed x_2, y_2 on endistega x, y võrreldes nurga α võrra pöördud (joon. 89).

Avaldame mingi vabalt võetud täpi P vanad koordi-

naadid uutes. Joonisest saame:

$$OX = OR - XR = OR - TS,$$

$$XP = XT + TP = RS + TP,$$

ehk:

$$OX = OS \cos \alpha - SP \sin \alpha,$$

$$XP = OS \sin \alpha + SP \cos \alpha,$$

kust:

$$x = x_2 \cos \alpha - y_2 \sin \alpha,$$

$$y = x_2 \sin \alpha + y_2 \cos \alpha.$$

Need valemid seovad teljestiku pööramisel vanu koordinaate uutega.

4. Kolmas, **üldine juhus.** Uuel teljestikul on kui uus algus nõnda ka uued telgsihid.

Olgu uus algus $O_2(a, b)$, nurk uue x_2 -telje ja vana x -telje vahel α . Võtame abiteljed O_2x_1, O_2y_1 (joon. 90), millel algus on uues alguses, sihid aga rööbikud vanade telgedega. Siis võime üleminekut süsteemist (x, y) süsteemi (x_2, y_2) järgmiselt teostada: esiteks läheme, sihtisid muutmata jättes, ainult algust teisendades, süsteemist (x, y) süsteemi (x_1, y_1) ; teiseks teisendame sihtisid, muutmata jättes algust: läheme süsteemist (x_1, y_1) nõutavasse (x_2, y_2) . Valemid, mis neid kaht operatsiooni lubavad teostada, leiti esimese ja teise juhuse käsitlemisel.

1) paralleelos — kõrvutijooksev, rööbik.

5. Märkused. 1) Kõikides süsteemides (x, y) , (x_1, y_1) , (x_2, y_2) olid mõõdud võrdsed.

2) Teisendamise valemid, mis vanu koordinaate uutega seovad, on lineaarsed.

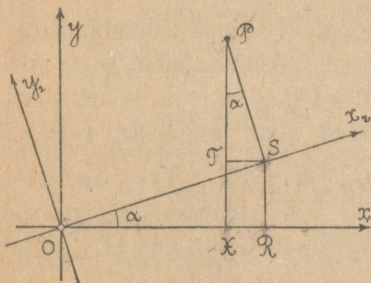
3) Koordinaatide teisendamine on sellepärast tähtis, et otstarbekohase teljestiku valikul võimalik on geomeetriliste kujude võrrandeid märksa lihtsustada, mille tõttu palju kergemaks saab nende uurimine.

6. Näide. Olgu antud kõver:

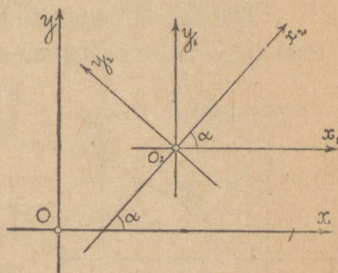
$$5x^2 + 6xy + 5y^2 - 16x - 16y - 16 = 0.$$

Viime, sihtisid muutmata jättes, alguse täppi $(+1, +1)$. Uued koordinaadid on vanadega seotud valemities:

$$x = x_1 + 1, \quad y = y_1 + 1.$$



Joon. 89.



Joon. 90.

Kõvera võrrandi uues süsteemis saame, kui viimased avaldused asetame antud võrrandisse:

$$5(x_1 + 1)^2 + 6(x_1 + 1)(y_1 + 1) + \dots - 16(y_1 + 1) - 16 = 0;$$

peale kergeid tehteid saame siit:

$$5x_1^2 + 6x_1y_1 + 5y_1^2 - 32 = 0.$$

Selles on kaks liiget vähem kui antud võrrandis.

Pöörame nüüd, algust muutmata jättes, teljestiku nurga võrra

$$\alpha = \frac{\pi}{4}.$$

Sel nurga sinus ja cosinus on $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Kui koordinaate pöördud süsteemis nimetame (x_2, y_2) , siis on:

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}x_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_2, \quad y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}x_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_2,$$

ehk ühemalt: $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_2 - y_2), \quad y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_2 + y_2).$

Kui saadud avaldused asetame endisse võrrandisse, saame

$$5 \cdot \frac{1}{2}(x_2 - y_2)^2 + 6 \cdot \frac{1}{2}(x_2 - y_2)(x_2 + y_2) + 5 \frac{1}{2}(x_2 + y_2)^2 - 32 = 0,$$

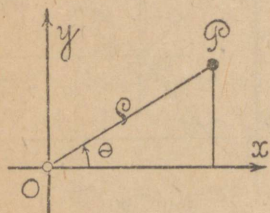
ehk peale sarnaste liikmete liitmist ja lühendamist:

$$4x_2^2 + y_2^2 = 16,$$

kust:

$$\frac{x_2^2}{4} + \frac{y_2^2}{16} = 1.$$

See on ellips poolte telgedega 2 ja 4. Tema joonistamiseks tõmbame süsteemis xy uuest algusest $(+1, +1)$ teljed x_1 ja y_1 , siis pöördud teljed (x_2, y_2) ja konstruime kõvera teatud viisil telgedest 4 ja 8.



Joon. 91.

7. Üleminek püstkoordinaatidest polaarkoordinaatidele ja ümberpöördult. Nagu joonisest (joon. 91) näeme, on

$$x = \rho \cos \vartheta, \quad y = \rho \sin \vartheta.$$

Need valemid võimaldavad võrrandit $F(x, y) = 0$ püstkoordinaatides teisendada polaarkoordinaatidesse.

Vastasteisendus polaarkoordinaatidest püstkoordinaatidesse sünnib valemite abil, mis saame, lahendades endisi ρ ja ϑ suhtes:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \vartheta = \arctan \frac{y}{x};$$

siis on otstarbekohasem viimase avalduse asemel tarvitada $\tan \vartheta = \frac{y}{x}$, mille abil avalduvad kõik trigonomeetrilised funktsioonid ϑ -st.

Ülesanded.

1. Antud on kõver: $x^2+y^2-8x+10y+5=0$. Viia koordinaatide algus täppi $(+4, -5)$ ja pöörata teljed nurga võrra 30° . Kas võis viimast saadud resultaatidest ette näha?

2. Missuguseks muutub kõvera võrrand:

$$x^2-y^2=2a(x-y+a),$$

kui alguseks võetakse täpp $(+a, +a)$ ja uued teljed on rööbiti endiste telgnurkade poolitajatega?

3. Antud on kõver: $8x^2+24xy+18y^2-30x-45y+18=0$. Võtta uueks x -teljeks sirge $3x+2y=0$.

4. Näidata, et täpi ja alguse vahelise kauguse valemi kuju ei muutu, kui ühest püstkoordinaat-süsteemist üle minna mistahes teisele sama algusega.

5. Leida järgmiste kõverate võrrandid püstkoordinaatides:

$$\varrho=a\cos\vartheta, \quad \varrho^2=a^2\cos 2\vartheta, \quad \varrho=\frac{16}{5+3\cos\vartheta}.$$

6. Leida järgmiste kõverate võrrandid polaarkoordinaatides: $ax+by=c$, $x^2+y^2-2x=0$, $x^2-y^2=a^2$.

7. Leida ellipsi ja hüperbooli võrrandid polaarkoordinaatides, lähtudes nende kanoonilistest võrranditest. Poolus võtta kõvera keskkohas.

8. Sama ülesanne lahendada parabooli kohta, kui poolus on tema lagitäpis.

20. Mõned koonuslõigete võrrandite erikujud.

1. Püsthüperbool. Võrdsete telgedega hüperbooli võrrand on:

$$x^2-y^2=a^2;$$

tema asümptoodid sünnitavad x -teljega nurgad, millede tangensid on $\pm\frac{a}{a}=\pm 1$, tähendab, nurgad $\pm\frac{\pi}{2}$. Püsthüperbooli asümptoodid on vastamisi risti.

2. Valime selle asümptootpaari koordinaatide teljestikuks; pöörämismurk on $-\frac{\pi}{4}$ (joon. 92); selle sinus on $-\frac{1}{\sqrt{2}}$, tema cosinus $+\frac{1}{\sqrt{2}}$. Kui uued koordinaadid nimetame X ja Y , saame teisendusvalemid:

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(X+Y), \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}(Y-X).$$

Nende asetamine püsthüperbooli võrrandisse annab

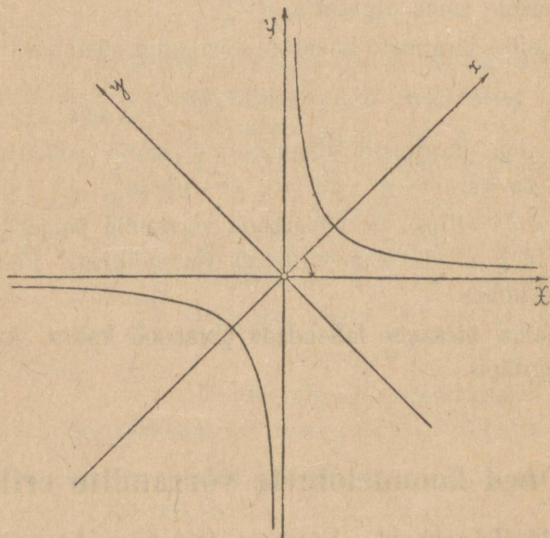
$$XY = \frac{1}{2}a^2,$$

ehk, kui parema poole ühe tähe k^2 abil tähistame:

$$XY = k^2.$$

$$\frac{x}{k} = \frac{y}{y}$$

See on püsthüperbooli võrrand tema asümptootteljestikus.



Joon. 92.

3. Pöördvõrdelise olenevuse kuju. Iga kahe pöördvõrdelise suuruse olenevuse graafiline kuju on püsthüperbool.

Nimetame kaks pöördvõrdelist suurust u ja v ; olgu (u_1, v_1) ja (u_2, v_2) kaks paari nende teineteisele vastavaid väärtusi; siis on oletuse põhjal:

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{v_2}{v_1},$$

ehk: $u_1 v_1 = u_2 v_2$ ja samuti edasi $= u_3 v_3 = \dots$,

sellega: $uv = \text{konst.}^1$);

uv -tasapinnas vastab sellele võrrandile püsthüperbool.

4. Näited. Kapital ja aeg (konstantse tulu korral), kauba hulk ja kauba naela hind (konstantse kaubahulga hinna korral), kiirus ja aeg (konstantse tee korral), gaasi maht ja välisrõhumine (konstantse soojuse korral), voolu tugevus ja takistus (konstantse potentsiaalvahe korral) — on näited kahest pöördvõrdelisest suurusest.

Iga säärase suuruspaari olemevuse kujuks teineseisest on püsthüperbool.

5. Empiiriliste $uv = \text{konstant}$ -valemite leidmine ja küsimuse otsustamine niisuguste võimalusest sünnib, nagu ennemini (v. 10.4) kirjeldatud, logaritmteisendusel.

6. **Murdlineaarne olemevus.** Kaks suurust, mis teineteisest murdlineaarselt olenevad:

$$v = \frac{au+b}{cu+d}$$

on pöördvõrdelised.

Määrame täpid, kus u ja v lõpmatuks saavad (joon. 93),

$$\text{kui } v = \infty \text{ on } cu + d = 0, \quad u = -\frac{d}{c},$$

$$u = \infty \quad v = \frac{a + \frac{b}{u}}{c + \frac{d}{u}} = \frac{a}{c}.$$

Viime, telgsihte muutmata jättes, alguse täppi $(-\frac{d}{c}, +\frac{a}{c})$; kui uued koordinaadid nimetame U, V saame:

$$u = U - \frac{d}{c}, \quad v = V + \frac{a}{c}.$$

1) constans — kindel, püsiv.

Asetades need avaldused täiskujus kirjutatud võrrandisse

$$cuv + dv - au - b = 0$$

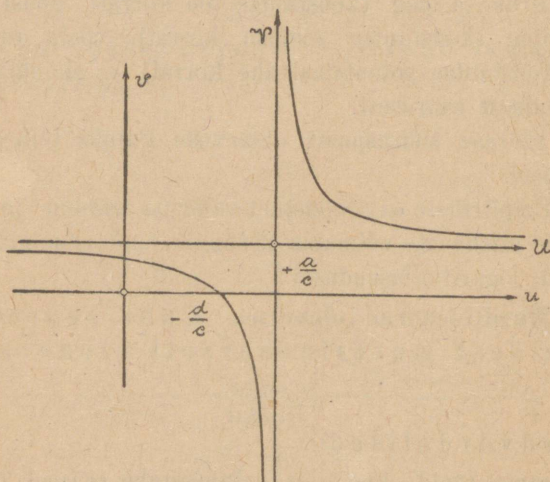
leiame:

$$UV = \text{konst.}$$

See on püsthüperbool. Tema asümptootideks on sirged $U=0$, $V=0$ ehk endises süsteemis

$$u = -\frac{d}{c}, \quad v = \frac{a}{c}.$$

7. Paraboolsed seadused. Väga sagedasti sünnib nähtus nõnda, et üks mõõdetavatest suurustest, — olgu tema



Joon. 93.

tähiseks v , — võrdeline on teise u ruuduga. Teisiti v on u^2 -ga lineaarselt seotud, ehk $v = \text{konst. } u^2$.

Seesugust seadust nimetatakse paraboolseks. Tema graafikuks on parabool, mille lagitäpp on alguses ja sümmeetriateljeks v -telg.

Paraboolselt olenevad teineteisest: vabalt langeva keha tee ja aeg, voolu poolt juhitud teatavas ajavahemikus sünnitatud soojust ja voolu tugevust, liikuva keha hoog ja tema kiirus jne.

8. Paraboolsesse olenevusse kuulub ka niisugune:

$$v = au^2 + bu + c.$$

Tõesti, parema poole võime teisiti kirjutada:

$$v = a(u^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}u + \frac{b^2}{4a^2}) + (c - \frac{b^2}{4a}),$$

ehk:

$$v - (c - \frac{b^2}{4a}) = a(u + \frac{b}{2a})^2.$$

Võtame uued muutujad:

$$u + \frac{b}{2a} = U, v - (c - \frac{b^2}{4a}) = V;$$

see vastab uue teljestiku valikule (joon. 94), mille sihid endised ja mille algus on täpis

$$(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a});$$

me saame: $V = aU^2$.

See on parabool.

9. Koonuslõigete võrrandid teljes ja puutujas nende lagitäpis. Me saime parabooli võrrandi kujus:

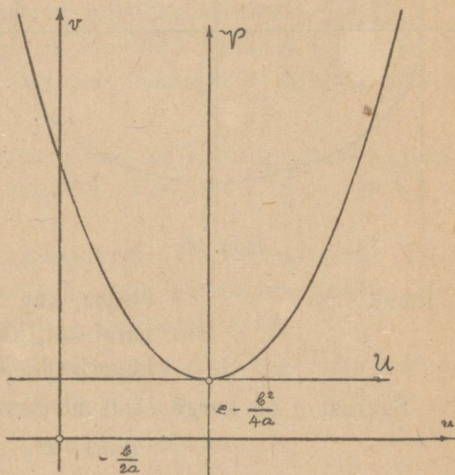
$$y^2 = 2px,$$

kus p oli fookusordinaat. Telgedeks olid parabooli telg ja puutuja lagitäpis. Samu sirgeid telgedeks võttes,

saame ellipsi ja hüperbooli võrrandid parabooli võrrandile sarnases kujus.

Olgu näiteks antud ellips:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$



Joon. 94.

Viime, telgede sihte muutmata jättes, alguse täppi $(-a, 0)$ (joon. 95). Teisendamisevalemid on:

$$x = X - a, \quad y = Y;$$

nende asetamisel ellipsi võrrandisse saame peale kergeid arvutamisi:

$$Y^2 = 2\frac{b^2}{a}X - \frac{b^2}{a^2}X^2.$$

Siin on $\frac{b^2}{a}$ ellipsi parameeter (v. 15.1). Kui veel $\frac{b^2}{a^2}$ märgime tähega q , saame otsitud võrrandi kujus:

$$Y^2 = 2pX - qX^2;$$

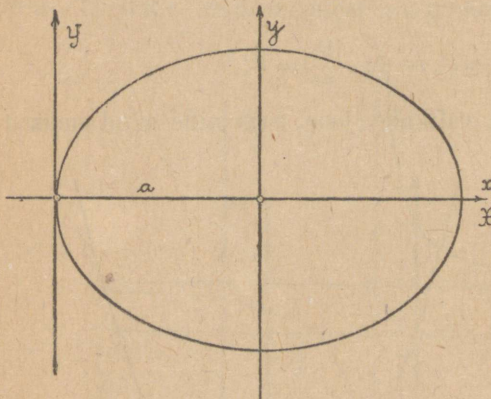
parabooli oma oli:

$$X^2 = 2pY,$$

hüperbooli oma oleks:

$$Y^2 = 2pX + qX^2.$$

Kokku võttes: Võrrand $Y^2 = 2pX + qX^2$ kujutab koonuslõiget,



Joon. 95.

ja nimelt

ellipsi, kui $q < 0$

parabooli, kui $q = 0$

hüperbooli, kui $q > 0$.

Suurust q on kerge ekstsentrisuses avaldada:

$$q = 1 - e^2.$$

Ülesanded.

1. Leida kõverate: $x^2 + 6x - 4y + 17 = 0$ ja $y = \frac{6x+20}{3x-9}$ kõige lihtsamad võrrandid.

2. Vabal langemisel on mõõtsüsteemis cm, sec tee $s = \frac{1}{2} \cdot 981 \cdot t^2$. Kujutada tee olenevus ajast t .

3. Soojus, mis vool i sünnitab 1 sec jooksul juhis, mille takistus on 1, on $q=0,24i^2$ mõõtsüsteemis cal, amp. Kujutada soojuse olenevus voolu tugevusest.

4. Potentsiaalvahe galvaanilise elemendi poolustel on 1·2 volt'i. Kujutada voolu tugevus i funktsioonina takistusest r .

21. Kõvera aste.

1. **Kõvera astme mõiste.** Kõvera astmeks nimetatakse tema võrrandi astet. Nõnda on $y - 3x$, $x=5$, $2x+3y-6=0$ esimeseastmelised jooned — sirged; $y^2=2px$, $x^2+y^2=r^2$, $xy=3$, $4x^2+9y^2=36$ teise —; $y=0\cdot1x^3$, $xy^2-2x+3=0$ kolmanda-astmelised kõverad.

Kui näiteid koordinaatide teisendamisest vaatleme (v. 19·6, 20·2, 20·8, 20·9), näeme, et sel puhul võrrandi kuju nii väga võib muutuda, et kuidagi pole võimalik resultaadis võrrandi alguskuju ära tunda.

Kuid on midagi võrrandis, mis mitte mingisugustel lineaarsetel koordinaatide teisendamistel ei muutu: see on kõvera aste.

2. **Kõvera astme muutumatus.** Tõestame astme muutumatuset esimese- ja teiseastmeliste kõverate kohta (üldine tõestus on niisama kerge, nõuab aga enam kirjutamist).

Üldises kujus on esimese- ja teiseastmelised võrrandid:

$$Ax+By+C=0$$

$$\text{ja} \quad ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0.$$

Koordinaatide teisendamise valemid olid:

1) rööplükkel: $x=x_1+x_0$, $y=y_1+y_0$, kus x_0 , y_0 uue alguse koordinaate tähendavad;

2) pööramisel: $x=mx_1-ny_1$, $y=nx_1+my_1$, kus m ja n tähendavad pöördnurga cosinus't ja sinus't.

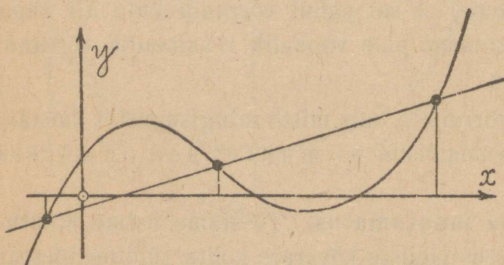
Kui me need avaldused asetame võrranditesse ja teostame seal äratähendatud tehted (kirjutada kõike seda pole tarvis),

siis näeme, et esimese võrrandi korral liikmetes x_1 ja y_1 ainult esimeses astmes esinevad, teise korral esimeses ja teises astmes. Nõnda ei ole teisenlatud võrrandites aste kõrgem kui nendes, milledest lähtusime: lineaarsel teisendamisel ei tõuse võrrandi aste.

Ehk ta väheneb?

Oletame seda. Teisendame siis uued koordinaadid tagasi endistesse. Selle juures peame endised võrrandid tagasi saama, astme näitaja suureneks, mis võimatu, nagu tõestatud. Sellega on meie oletus vale. Võrrandi aste ei suurene ega vähene; ta jääb muutumatuks.

3. Kõvera astme muutumatuse geomeetiline tõlge. Kõvera astme muutumatus teeb tõenäoseks, et see aste seotud on mingi kõvera geomeetrilise omadusega, mis sellest



Joon. 96.

ei olene, missugustes telgedes me kõverat kujutame. Näitame, et kõvera aste määrab täppide arvu ülemise raja, mis kõveral mõne vabalt valitud sirgega on ühised (joon. 96).

On antud võrrand esimese astmeline: $Ax + By + C = 0$, siis edustab tema sirget ja meie valemi tõesus on silmanähtav; on antud kõver teise astmeline:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

ja tahame tema ühistäppe leida mõne sirgega $y = mx + n$, siis peame mõlemad võrrandid ühiselt lahendama. Kui teisest y väärtuse asetame esimesse, saame otsitavate täppide abstsisside määramiseks ruutvõrrandi. Sellel on kas kaks reaaluurt (mis ka võrdsed võivad olla) või mitte ühtegi (kaks imaginaaruurt). Lõiketäppe on kaks (võivad ka kokkulangevad olla) ehk mitte

ühitegi. Nende arvude 0, 2 (kokkulangemise korral 1), ülemine raja on 2.

Näited. Ring, ellips, hüperbool ja parabool lõigatakse sirgega kas kahes (võib olla kokkulangevas) täpis või mitte üheski.

Analoogiliselt meie tõestaksime lause maksvust ka kõrgemaastmeliste kõverate kohta.

22. Kõverate uurimine, mis üldise teiseastmelise võrrandi abil antud.

1. Üldine teiseastmelise võrrandi kuju. Selles võrrandis on liikmed x^2 -ga, xy , y^2 , x , y -ga ja vaba liige. Et pärastised valemid saaksid võimalikult ülevaatlikud, tähistame selle võrrandi kordajad järgmiselt:

$$a, 2h, b, 2g, 2f \text{ ja } c.$$

Uuritav võrrand esineb siis kujus:

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0. = F(x, y)$$

Lühemalt kirjutame ta $F(x, y) = 0$, nõnda et $F(x, y)$ ehk lihtsalt F , meie võrrandi pahem pool, on:

$$F(x, y) = ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c.$$

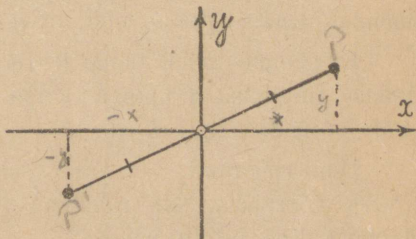
Sõna „teiseastmeline“ jätame edasi sõna ees „kõver“ harilikult ära.

2. Sümmeetria kriteerium alguse suhtes. Kui kõver on sümmeetiline alguse suhtes, siis puuduvad tema võrrandis liikmed esimestes muutujate astmetes ja ümberpöörduvalt.

Tõestus. Olgu kõver sümmeetiline alguse suhtes.

On siis (x, y) täpp kõveral

(joon. 97), siis on ka $(-x, -y)$ niisugune, tähendab, mõlemad koordinaatpaarid rahuldavad ühiselt kõvera võrrandit:



Joon. 97.

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

$$ax^2 + 2hxy + by^2 - 2gx - 2fy + c = 0$$

Sellest saame:

$$4(gx + fy) = 0,$$

ehk:

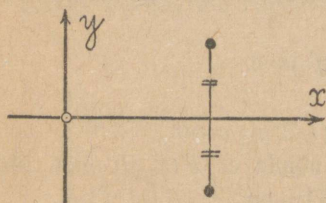
$$gx + fy = 0.$$

See tingimus peab igas kõvera täpilis taidetud olema, näiteks ka siis, kui $x=0$, $y \neq 0$ või $x \neq 0$, $y=0$. See aga on ainult siis võimalik, kui $g=0$, $f=0$.

Ümberpöördukt: on g ja f nullid, ja rahuldab arvpaar (x, y) võrrandit, siis rahuldab teda ka $(-x, -y)$: kõver on alguse suhtes sümmeetriline.

3. **Sümmeetria kriteerium telgede suhtes.** On kõver sümmeetriline ühe telje suhtes, siis puuduvad tema võrrandis

liikmed teise muutuja esimese astmega.



Joon. 98.

Tõestus. Olgu kõver sümmeetriline x -telje suhtes; see tähendab, et kui (x, y) on tema täpp (joon. 98), siis on ka $(x, -y)$ niisugune. Igaüks nendest arvpaaridest rahuldab meie võrrandit:

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0,$$

$$ax^2 - 2hxy + by^2 + 2gx - 2fy + c = 0;$$

tähendab $4y(hx + f) = 0$, ehk, et y harilikult $\neq 0$, $hx + f = 0$.

Et sümmeetrilisi täppe kõveral lõpmata palju, siis rahuldab viimast tingimust lõpmata palju x -sid. See on ainult siis võimalik, kui $h=0$, $f=0$.

Ümberpöördukt: on $h=0$, $f=0$ ja rahuldab arvpaar (x, y) kõvera võrrandit, siis rahuldab teda ka $(x, -y)$: kõver on sümmeetriline x -telje suhtes.

4. **Kõvera võrrandi muutumine paralleelteisendamisel.**

Läheme üle süsteemist (x, y) , milles kõver oli antud, süsteemi (x_1, y_1) , mille sihid endised, mille algus aga on täpilis (x_0, y_0) .

Teisendamisvalemid on:

$$x = x_1 + x_0, \quad y = y_1 + y_0,$$

$$\text{sellepärast: } a(x_1 + x_0)^2 + 2h(x_1 + x_0)(y_1 + y_0) + b(y_1 + y_0)^2 + \\ + 2g(x_1 + x_0) + 2f(y_1 + y_0) + c = 0,$$

ehk, kui üksteisega sarnased liikmed liidame,

$$ax_1^2 + 2hx_1y_1 + by_1^2 + (2ax_0 + 2hy_0 + 2g)x_1 + (2hx_0 + 2by_0 + 2f)y_1 + \\ + (ax_0^2 + 2hx_0y_0 + by_0^2 + 2gx_0 + 2fy_0 + c) = 0.$$

Uus vaba liige on antud võrrandi pahem osa, kus x ja y asemel x_0 ja y_0 on kirjutatud: $F(x_0, y_0)$.

Ka kordajatel x -i ja y ees on lihtne algebraline tähendus. Et teda leida, otsime tuletise teiseastmelisest hulkliikmest $Ax^2 + Px + Q$. Üldise juhise järele (v. 17·4, 1) saame selle funktsiooni kasvu, mis vastab x -i kasvule h :

$$[A(x+h)^2 + P(x+h) + Q] - [Ax^2 + Px + Q] = 2Axh + Ah^2 + Ph,$$

funktsiooni ja rippumata muutuja kasvude suhe:

$$2Ax + Ah + P$$

ja selle piiri:

$$2Ax + P$$

arvu h lõpmatul lähenemisel nullile. Sõnades: Teiseastmelise hulkliikme tuletis saadakse järgmiselt: iga liige tuleb x -i astmenäitajaga korrutada ja viimane ühe võrra vähendada.

Rakendame selle saaduse.

Tuletame $F(x, y)$ x -i suhtes, vaadeldes y -d kui konstanti, siis y suhtes, vaadeldes x -i kui konstanti. Nii-sugust tehet nimetatakse osatuletamiseks ja tähistatakse sümbolitega $\frac{\partial F}{\partial x}$ ja $\frac{\partial F}{\partial y}$. Saame leitud juhise abil:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2ax + 2hy + 2g, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2hx + 2by + 2f.$$

Kui viimaseid avaldusi võrdleme x_1 ja y_1 kordajatega, näeme, et need on F osatuletiste väärtused, võetud täpis (x_0, y_0) :

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 \text{ ja } \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0.$$

Mis puutub kordajatesse teiseastmelistes liikmetes, siis on nemad muutumata jäänud.

Teisendatud kujus esineb meie võrrand järgmisena:

$$ax_1^2 + 2hx_1y_1 + by_1^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 x_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 y_1 + F_0 = 0.$$

Kokku võttes: paralleelteisendamisel jäävad võrrandis $F(x, y) = 0$ kordajad teiseastmelistes liikmetes endisteks; kordajateks muutujate esimeste astmete ees saavad antud võrrandi pahema poole osatuletised, arvutatud uues alguses; uus vaba liige on nimetatud pahempoolse osa väärtus uues alguses.

5. **Kõvera keskkoha leidmine.** Seni olid x_0 ja y_0 mis arvud tahes. Katsume neid nõnda valida, et leitud võrrandi kaju võimalikult lihtne saaks. Nimelt katsume, kui see peaks võimalik olema, leida x_0 ja y_0 nõnda, et kaoksid $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0$ ja $\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0$. On see sündinud, siis on meie võrrand esimese astmelistest liikmetest vaba: kõver on alguse suhtes sümmeetriline; algus on kõvera keskkohht.

On kõveral $F(x, y) = 0$ keskkohht, siis peavad selle koordinaadid x_c ja y_c rahuldama kaht lineaarset võrrandit, mis saame, kui antud võrrandi pahema poole osatuletised nulliga võrrutame.

6. **Keskkoha olemasolemise kriteerium.** Võrrandid, millega lahendamisel saadakse kõvera keskkohht, on:

$$ax + hy + g = 0$$

$$hx + by + f = 0$$

Sellel süsteemil on aga sel ja ainult sel korral lõplikud juured, kui tema determinant, antud võrrandi $F(x, y) = 0$ n. n. diskriminant,

$$\begin{vmatrix} a & h \\ h & b \end{vmatrix} = ab - h^2$$

nullist erineb (v. 8.5, 8.6).

Kõveral $F(x, y) = 0$ on siis ja ainult siis keskkohht olemas, kui tema diskriminant nulliga võrratu on.

võrrat, kui $ab - h^2 \neq 0$

7. Kõvera võrrandi muutumine pöördteisendamisel. Pöörame teljestiku nurga α võrra; olgu uued teljed Ox_2 ja Oy_2 . Siis on vanad koordinaadid (x, y) uutega (x_2, y_2) seotud valemite:

$$x = x_2 \cos \alpha - y_2 \sin \alpha,$$

$$y = x_2 \sin \alpha + y_2 \cos \alpha,$$

ja antud võrrand $F(x, y) = 0$ teiseneb järgmisse:

$$\begin{aligned} & a(x_2 \cos \alpha - y_2 \sin \alpha)^2 + 2h(x_2 \cos \alpha - y_2 \sin \alpha)(x_2 \sin \alpha + y_2 \cos \alpha) \\ & + b(x_2 \sin \alpha + y_2 \cos \alpha)^2 + 2g(x_2 \cos \alpha - y_2 \sin \alpha) + \\ & + 2f(x_2 \sin \alpha + y_2 \cos \alpha) + c = 0, \end{aligned}$$

ehk lühemalt, kui üksteisega sarnased liikmed liidame:

$$Ax_2^2 + 2Hx_2y_2 + By_2^2 + 2Gx_2 + 2Fy_2 + c = 0,$$

kus

$$A = a \cos^2 \alpha + 2h \cos \alpha \sin \alpha + b \sin^2 \alpha,$$

$$2H = 2(-a \cos \alpha \sin \alpha + h \cos^2 \alpha - h \sin^2 \alpha + b \sin \alpha \cos \alpha)$$

j. n. e.

Resultaat¹⁾: pöördteisendamisel muutub trinoom²⁾

$$ax^2 + 2hxy + by^2$$

samakujuliseks $Ax_2^2 + 2Hx_2y_2 + By_2^2$.

Vaba liige jääb muutumatuks.

8. Pöördnurga valik. Kõik, mis senini öeldud, on maksev, olgu α mis nurk tahes. Katsume, kui võimalik, nurga α nõnda valida, et saadud võrrandist liige muutujate korrutisega kaoks: $2H = -2a \sin \alpha \cos \alpha + 2h \cos^2 \alpha - 2h \sin^2 \alpha + 2b \sin \alpha \cos \alpha$ peab olema null. Teisiti, peab olema:

$$2h(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = (a - b)2 \sin \alpha \cos \alpha,$$

$$2h \cos 2\alpha = (a - b) \sin 2\alpha,$$

ehk:

$$\tan 2\alpha = \frac{2h}{a - b}.$$

Et teljestiku pööramisel kaoks liige muutujate korrutisega, peab pöördnurk rahuldama võrrandit: $\tan 2\alpha = 2h : (a - b)$

1) resultare — kajama.

2) trinomial — kolmeliige, kolmosa.

9. **Kõvera peasihid.** Viimasel trigonomeetrilisel võrrandil on ikka juur α olemas, olgu kordajad a, h, b mis arvud tahes. Tõesti, tangens muutub $-\infty$ kuni $+\infty$, omandades iga väärtuse nende rajade vahel üks ja ainult üks kord, kui α muutub $-\frac{\pi}{2}$ -st kuni $+\frac{\pi}{2}$ -ni. Ühel α väärtusel α_0 rajade $-\frac{\pi}{2}$ ja $+\frac{\pi}{2}$ vahel saab siis $\tan \alpha$ võrdseks arvuga $2h:(a-b)$.

On α_0 meie tangensvõrrandi juur, siis on seda ka $\alpha_0 + \frac{\pi}{2}$. Tõesti: $\tan 2(\alpha_0 + \frac{\pi}{2}) = \tan(2\alpha_0 + \pi) = \tan 2\alpha_0$ ja see on $2h:(a-b)$. Kõik teised tangensvõrrandi juured saadakse nendest kahest α_0 ja $\alpha_0 + \frac{\pi}{2}$ lisamisel $\pm n\pi$, kus n on täisarv. Nemad uusi telgsihtisid ei anna.

Sihtisid, mis nurgad α_0 ja $\alpha_0 + \frac{\pi}{2}$ määravad, nimetatakse kõvera $F=0$ peasihtideks. Nad on teineteisega risti.

On need sihid telgsihtideks võetud, on kõvera võrrand vaba muutujate korrutisest.

Igal teiseastmelisel kõveral on kaks vastamisi risti peasihti.

10. **Kõvera teljed.** Olgu kõveral keskkohk olemas. Valime ta alguseks ja peasihid telgede X ja Y sihtideks. Selles uues süsteemis puuduvad võrrandis liikmed X -ga, Y -ga ja XY -ga. Järjekult on temas ainult kolm liiget:

$$AX^2 + BY^2 + c = 0.$$

Et liikmed X -ga esimeses astmes puuduvad, siis on kõver sümmeetriline uue Y -telje suhtes; samuti on ta sümmeetriline X -telje suhtes. Uued teljed on kõvera teljed.

Nende võrrandi vanas süsteemis saame kui sirge võrrandi, mis antud tõusuga antud täpist läbi läheb (v. 7.14):

$$y - y_c = \tan \alpha_0 \cdot (x - x_c)$$

$$y - y_c = \tan(\alpha_0 + \frac{\pi}{2}) \cdot (x - x_c).$$

23. Teiseastmelise kõvera kanoonilise võrrandi leidmine.

1. Kõvera $F(x, y)=0$ võrrandi lihtsustamisoperatsioonide järjekord oleneb sellest, kas kõveral on olemas keskkoht või teda ei ole mitte.

2. Esimene juhus. Võrrandid, mis keskkoha määravad:

$$ax+hy+g=0,$$

$$hx+by+f=0$$

annavad tema ^{keskkoha} koordinaatidele x_c ja y_c lõplikud väärtused. Keskkoht on olemas. Viime sinna koordinaatide alguse. Uues teljestikus, mille sihid rööbikud endistega ja mille algus on kõvera keskkohas, on võrrand vaba liikmetest x ja y -ga esimeses astmes:

$$ax_1^2+2hx_1y_1+by_1^2+c_1=0,$$

kus a, h, b on endised, $c_1=F(x_c, y_c)$.

Pöörame nüüd teljestiku nurga α võrra, mis rahuldab võrrandit:

$$\tan 2\alpha = 2h : (a-b).$$

Selle juures ka a, b liige muutujate korrutisega ja võrrand omab kuju:

$$a_1x_2^2+b_1y_2^2+c_1=0.$$

Ei ole c_1 mitte null, siis viime ta paremale poole ja saame jagamisel temaga kas ellipsi või hüperbooli võrrandi, ehk niisuguse, millele ükski reaalne kuju ei vasta; näiteks

$$x^2+4y^2=-1.$$

On $c_1=0$, siis ei olegi tarvis telgi pöörata. Siin võime nimelt võrrandi

$$ax_1^2+2hx_1y_1+by_1^2=0,$$

ehk:

$$a+2h\frac{y_1}{x_1}+b\left(\frac{y_1}{x_1}\right)^2=0$$

lahendada. Saame $y_1:x_1=k'$ ja $y_1:x_1=k''$

ehk:

$$y_1=k'x_1, \quad y_1=k''x_1.$$

See on kaks sirget, mis uues alguses kohtuvad.

Kõverad keskkohaga lõplikul kaugusel on kas ellipsid, hüperboolid või paar lõikuvaid sirgeid.

3. Näide 1. Antud on kõver:

$$2x^2 - 7xy + 3y^2 + 10x - 5y = 0.$$

Leida tema kõige lihtsam võrrand.

Siin on: $F = 2x^2 - 7xy + 3y^2 + 10x - 5y$;

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 4x - 7y + 10, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -7x + 6y - 5$$

ja sellepärast „keskkoha võrrandid“:

$$\begin{aligned} 4x - 7y + 10 &= 0, \\ -7x + 6y - 5 &= 0. \end{aligned}$$

Nendest saame keskkoha koordinaadid:

$$x_c = \frac{\begin{vmatrix} -10, & -7 \\ 5, & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4, & -7 \\ -7, & 6 \end{vmatrix}}, \quad y_c = \frac{\begin{vmatrix} 4, & -10 \\ -7, & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4, & -7 \\ -7, & 6 \end{vmatrix}},$$

ehk:
$$x_c = \frac{-60 + 35}{24 - 49} = +1, \quad y_c = \frac{20 - 70}{24 - 49} = +2.$$

Viime alguse keskkoha $C(+1, +2)$; olgu uued teljed Cx_1 ja Cy_1 ; siis on: $x = x_1 + 1$, $y = y_1 + 2$ ja kõvera võrrand uues süsteemis:

$$2x_1^2 - 7x_1y_1 + 3y_1^2 + \text{uus vaba liige} = 0.$$

Viimane liige on aga:

$$2 \cdot 1^2 - 7 \cdot 1 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 10 \cdot 1 - 5 \cdot 2 = 2 - 14 + 12 + 10 - 10 = 0$$

sellepärast:
$$2x_1^2 - 7x_1y_1 + 3y_1^2 = 0.$$

Lahendades y_1 suhtes saame kaks sirget:

$$y_1 = 2x_1 \text{ ja } y_1 = \frac{1}{3}x_1.$$

Nende võrrandid vanas süsteemis saaksime otsekoheisel võrrandi

$$2x^2 - 7xy + 3y^2 + 10x - 5y = 0$$

lahendamisel ühe muutuja, näiteks y suhtes. Et sirgete võrrandite aste üks on, siis peab lahenduses x juuremärgi alt

tulema. See on tõesti nõnda: kui antud võrrandi kirjutame kujus:

$$3y^2 - (7x+5)y + 2x(x+5) = 0,$$

saame lahendamisel: $y = \frac{1}{6}[(7x+5) \pm 5(x-1)],$

mis annab kaks sirget:

$$2x - y = 0 \text{ ja } x - 3y + 5 = 0.$$

Nende joonistamine ei tee raskusi.

4. Näide 2. Antud on kõver:

$$5x^2 + 12xy - 22x - 12y - 19 = 0.$$

Leida tema kõige lihtsam võrrand.

Keskkohta võrrandid on meie korral:

$$10x + 12y - 22 = 0,$$

$$12x - 12 = 0,$$

$$\text{ehk: } 5x + 6y - 11 = 0, \quad x - 1 = 0,$$

$$\text{kust: } x_c = +1, \quad y_c = +1.$$

Viime alguse saadud täppi. Uutes koordinaatides saame võrrandi:

$$5x_1^2 + 12x_1y_1 + \text{vaba liige} = 0.$$

Vaba liige on

$$5 \cdot 1^2 + 12 \cdot 1 \cdot 1 - 22 \cdot 1 - 12 \cdot 1 - 19 = -36,$$

$$\text{sellepärast: } 5x_1^2 + 12x_1y_1 - 36 = 0.$$

Pöörame teljestiku niisuguse nurga α võrra, et oleks

$$\tan 2\alpha = \frac{12}{5-0} = \frac{12}{5}.$$

Siit võiksime logaritmidest tabelitest 2α saada, siis α ja jällegi tabelitest $\sin \alpha$ ja $\cos \alpha$ teisendamisevalemite kirjutamiseks. Selle asemel võime nõnda toimetada: arvutame $\tan \alpha$:

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}; \quad \frac{12}{5} = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \quad \tan 2\alpha = \tan 2\alpha \quad \tan^2 2\alpha = 2\alpha$$

see peab olema $\frac{12}{5}$, teisiti $\tan \alpha$ peab rahuldama ruutvõrrandit:

$$6 \tan^2 \alpha + 5 \tan \alpha - 6 = 0.$$

Nüüd saame:

$$\tan \alpha = \frac{1}{12}(-5 \pm \sqrt{25 + 144}) = \frac{1}{12}(-5 \pm 13),$$

$$10y_1 = 12 - 12y_1^2 \\ 6y_1^2 + 5y_1 - 6 = 0$$

ehk: $\tan \alpha_0 = \frac{2}{3}, \quad \tan \alpha_1 = -\frac{3}{2}.$

Nurgad α_0 ja α_1 määravad kaks sihti, mis on vastamisi risti:

$$\tan \alpha_0 \cdot \tan \alpha_1 = -1;$$

me võtame nad uuteks telgsihtideks. Pöördnurgaks võtame vähema kahest α_0 ja α_1 , nimelt α_0 ; arvutame tema sinus'e ja cosinus'e.

$$\frac{\sin \alpha_0}{\cos \alpha_0} = \frac{2}{3},$$

ehk teisiti: $\frac{\sin \alpha_0}{2} = \frac{\cos \alpha_0}{3} = \frac{\sqrt{\sin^2 \alpha_0 + \cos^2 \alpha_0}}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{1}{\sqrt{13}}.$

Märgiks juure ees on $+$ võetud, sest α_0 on esimeses veerandis, sinus ja cosinus on positiivsed. Viimane võrre annab:

$$\sin \alpha_0 = \frac{2}{\sqrt{13}}, \quad \cos \alpha_0 = \frac{3}{\sqrt{13}}.$$

Kui nüüd teisendamisvalemid kirjutame ja teguri $1:\sqrt{13}$ sulgude ette võtame, saame:

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{13}}(3x_2 - 2y_2), \quad y_1 = \frac{1}{\sqrt{13}}(2x_2 + 3y_2).$$

Asetame need avaldused viimasesse kõvera võrrandisse:

$$5 \cdot \frac{1}{13}(3x_2 - 2y_2)^2 + 12 \cdot \frac{1}{13}(3x_2 - 2y_2)(2x_2 + 3y_2) - 36 = 0$$

ehk: $117x_2^2 - 52y_2^2 - 36 \cdot 13 = 0,$

ehk peale lühendamist:

$$9x_2^2 - 4y_2^2 - 36 = 0,$$

kust viimati tuleb $\frac{x_2^2}{4} - \frac{y_2^2}{9} = 1.$

See on hüperbool. Et teda joonistada, võtame tema keskkoha $C(+1, +1)$ (joon. 99), sellest tõmbame uued teljed Cx_1 ja Cy_1 rööbiti endistega Ox , Oy ja pöörame teljestiku x_1, y_1 nurga α_0 võrra, mille tangens on $\frac{2}{3}$. Ühendades täpi $(x_1=3, y_1=2)$ keskkohaga C saame uue x_2 -telje, ristsirge temaga on y_2 -telg. Viimastele kanname lõigud $+2, -2, +3, -3$, joonistame hüperbooli telgruudu, asümptoodid ja tulitäpid. Tuntud konstruktsiooni abil (v. 136) saame otsitava hüperbooli.

Märkus. Oleksime meie teda katsunud joonistada otsekohe antud võrrandi põhjal, oleks see palju raskem olnud.

5. Teine juhus. Kõvera $F(x, y)=0$ keskkoha võrrandid:

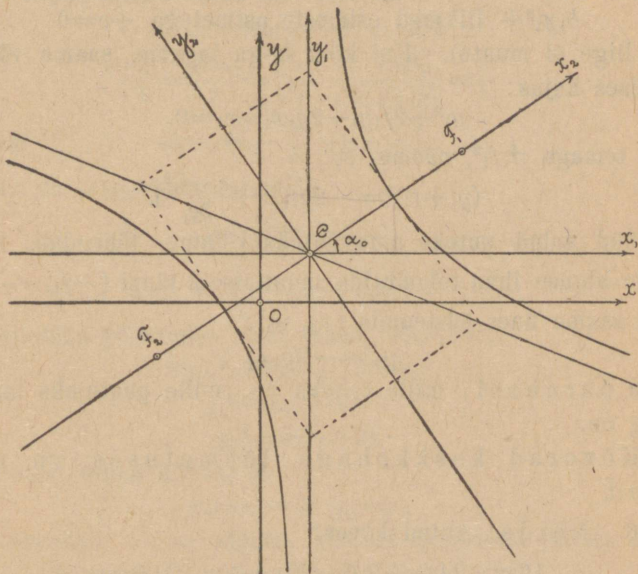
$$ax+hy+g=0$$

ja

$$hx+by+f=0$$

annavad koordinaatidele x_0 ja y_0 lõpmata suured väärtused:

$$x_0=\infty, y_0=\infty.$$



Joon. 99.

Sel korral algame võrrandi $F=0$ teisendamist telgede pööramisega nurga α võrra, mis rahuldab võrrandit:

$$\tan 2\alpha = 2h : (a-b).$$

See tehe kaotab kõvera võrrandis liikme muutujate korrutisega. Tõestame, et meie juhusel, kus kõvera võrrandi $F=0$ diskriminant:

$$ab-h^2=0,$$

peale nimetatud liikme veel üks ruuduline liige kaob.

Tõesti: kui $ab-h^2=0$, siis on $h=\pm\sqrt{ab}$, ja antud võrrandi $F=0$ ruuttrinom

$ax^2+2hxy+by^2=ax^2\pm2\sqrt{ab}xy+by^2=(\sqrt{a}x\pm\sqrt{b}y)^2$ esineb täie ruuduna. Et tema pöördteisendamisel üle läheb avaldusse $a_1x_1^2+b_1y_1^2$ (sest et $h_1=0$ on) ja teisendamise korral täisruut jällegi täisruuduks muutub, siis peab viimases avalduses üks kordajatest null olema. Olgu $a_1=0$. Kõvera võrrand omab telgede pööramise järel kuju:

$b_1y_1^2+$ liikmed esimeste astmetega $+c=0$ (vaba liige ei muutu). Kui kõik b_1 -ga jagame, saame võrrandi järgmises kujus:

$$y_1^2+2f_1y_1+2g_1x_1+c_1=0.$$

Liites temaga $\pm f_1^2$, näeme, et:

$$(y_1+f_1)^2=-2g_1(x_1+\frac{c_1-f_1^2}{2g_1}).$$

Kui nüüd sulud uuteks muutujateks võtame, tähendab, koordinaatide alguse ilma telgsihtide muutmiseta täppi $(-f_1, -\frac{c_1-f_1^2}{2g_1})$ viime, saame uues süsteemis (x_2, y_2) :

$$y_2^2=-2g_1x_2.$$

See on parabool, mille teljeks x_2 -, mille puutujaks lagitäpis y_2 -telg on.

Kõverad keskkohaga lõppmatutes on paraboolid.

6. Näide: Antud kõver:

$$16x^2+24xy+9y^2-20x+30y+100=0.$$

Leida tema kõige lihtsam võrrand. Keskkoha võrrandid on:

$$32x+24y-30=0$$

$$\text{ja: } 24x+18y+40=0,$$

$$\text{ehk: } 16x+12y-15=0,$$

$$\text{ja: } 12x+9y+20=0,$$

$$\text{kust } x_c=\infty, y_c=\infty \text{ saame.}$$

Antud kõver on parabool. Tema võrrandi teisendamist algame telgede pööramisega. Tangensvõrrand on:

$$\tan 2\alpha = \frac{24}{16-9} = \frac{24}{7}$$

nõnda et $\tan \alpha$ on ruutvõrrandi

$$12 \tan^2 \alpha + 7 \tan \alpha - 12 = 0$$

juur; tähendab $\tan \alpha = \frac{1}{24}(-7 \pm 25),$

kust: $\tan \alpha_0 = \frac{3}{4}, \tan \alpha_1 = -\frac{4}{3}.$

Mõlemad sihid on vastamisi risti:

$$\tan \alpha_0 \cdot \tan \alpha_1 = -1.$$

Pöörame teljed nurga võrra α_1 . Siis on

$$\sin \alpha_1 : \cos \alpha_1 = -4 : 3, \text{ ehk}$$

$$\frac{\sin \alpha_1}{-4} = \frac{\cos \alpha_1}{3} = \frac{\sqrt{\sin^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_1}}{\sqrt{(-4)^2 + (+3)^2}} = \frac{1}{5},$$

sellepärast

$$\sin \alpha_1 = -\frac{4}{5}, \cos \alpha_1 = \frac{3}{5}.$$

Järjekult on teisendamisvalemid:

$$x = \frac{1}{5}(3x_1 + 4y_1),$$

$$y = \frac{1}{5}(-4x_1 + 3y_1).$$

Teljestiku pööramise järel saame võrrandi:

$$25y_1^2 - 50x_1 + 100 = 0,$$

$$y_1^2 - 2x_1 + 4 = 0,$$

ehk:

$$y_1^2 = 2(x_1 - 2).$$

Võtame uued teljed nõnda, et

$$x_2 = x_1 - 2, y_2 = y_1,$$

oleks; tähendab, viime alguse, sihtisid muutmata jättes, täppi $(x_1 = 2, y_1 = 0)$, saame:

$$y_2^2 = 2x_2.$$

See on parabool. Tema joonistamiseks tulevad esiteks teljed x_1, y_1 joonistada, siis x_2, y_2 ja nendes nõutud kõver teatud viisil konstruuda (joon. 100).

7. Kolmas juhus. Kõvera $F=0$ keskkoha võrrandite:

$$ax + hy + g = 0$$

$$hx + by + f = 0$$

lahendused esinevad määramata kujus:

$$x_c = \frac{0}{0}, y_c = \frac{0}{0}.$$

Sel korral on a, h, g ja h, b, f võrdelised (v. 8.6, 3)

$$a:h=h:b=g:f.$$

Olgu nende suhete ühine väärtus k . Siis on:

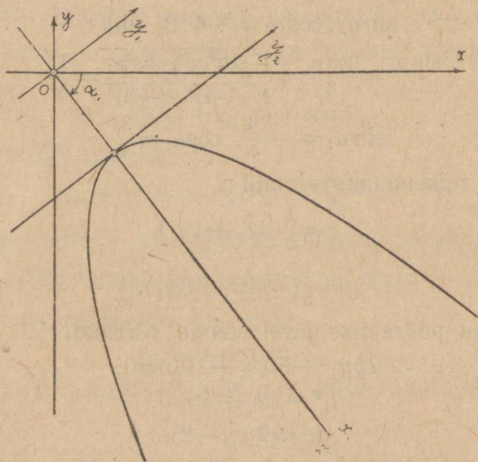
$$g=kf, h=kb, a=kh=k^2b,$$

ja meie võime võrrandi $F=0$ kirjutada kujus:

$$k^2bx^2+2kbxy+by^2+2kfx+2fy+c=0,$$

ehk:

$$b(kx+y)^2+2f(kx+y)+c=0.$$



Joon. 100.

See on ruutvõrrand suuruses $(kx+y)$. Tema lahendused on:

$$kx+y=l_1,$$

$$kx+y=l_2,$$

kus l_1 ja l_2 tema juuri tähendavad.

See on kaks rööpsirget.

On kõveral $F(x, y)=0$ keskkohht määramata, siis laguneb ta kaheks rööpsirgeks.

Nende kahe sirge võrrandeid võib antud võrrandist $F=0$ saada, lahendades teda ühe muutuja suhtes. Et resultaat on lineaarfunktsioon, siis peab teine muutuja juuremärgi alt tulema.

8. Näide. Leida kõvera

$$4x^2 - 12xy + 9y^2 - 8x + 12y - 60 = 0$$

kõige lihtsam võrrand.

Keskkohta võrrandid on peale lühendamist:

$$2x - 3y - 2 = 0,$$

$$-2x + 3y + 2 = 0;$$

järjekult: $x_c = \frac{0}{0}$, $y_c = \frac{0}{0}$. Nende võrrandite kordajad on võrdelised:

$$2 : -2 = -3 : 3 = -2 : 2.$$

Kõver laguneb kaheks rööbikuks sirgeks.

Tõesti, kui me antud võrrandi kirjutame kujus:

$$9y^2 - 12(x-1)y + (4x^2 - 8x - 60) = 0$$

ja selle y suhtes lahendame, saame:

$$9y = 6(x-1) \pm 24.$$

See annab meile kaks rööpsirget:

$$3y - 2x - 6 = 0 \text{ ja } 3y - 2x + 10 = 0.$$

9. Üldine kokkuvõte. Olgu $F(x, y) = 0$ mis teiseastmeline võrrand tahes, ikka kujutab ta kas kaht sirget või ühte kolmest kõverast: ellipsi, hüperbooli või parabooli. Muid, peale nimetatute, teiseastmelisi kõveraid ei ole.

Märkus. Võib juhtuda, et antud võrrandile miski geomeetriline kuju ei vasta, näiteks võrrandile $x^2 + 2y^2 + 3 = 0$.

Ülesanded.

Leida järgmiste kõverate kõige lihtsamad võrrandid ja joonistada nende kujud:

$$1. \quad 4x^2 + xy - 3y^2 - 7x - 7y = 0.$$

$$2. \quad 17x^2 - 6xy + 9y^2 + 80x - 48y - 160 = 0.$$

$$3. \quad 2x^2 - 72xy + 23y^2 + 68x + 26y + 28 = 0.$$

$$4. \quad 16x^2 - 24xy + 9y^2 - 30x - 40y + 25 = 0.$$

$$5. \quad 4x^2 - 12xy + 9y^2 + 14x - 21y + 6 = 0.$$

$$6. \quad 5x^2 + 6xy + 5y^2 - 16x - 16y + 48 = 0.$$

$$7. \quad 12x^2 + 7xy - 12y^2 - 171x + 200y + 492 = 0.$$

$$8. \quad 66x^2 + 24xy + 59y^2 - 108x + 94y - 49 = 0.$$

9. $6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0$.

10. $x^2 - 2xy + y^2 - 10\sqrt{2x - 6}\sqrt{2y - 14} = 0$.

11. $x^2 + 2xy + y^2 - 4x - 4y = 0$.

12. $5x^2 - 6xy + 5y^2 - 14x + 2y + 21 = 0$.

13. Leida täpi geomeetriline koht, mille kauguste ruutude summa kahest antud sirgest:

$$3x + 4y = 12 \text{ ja } 4x - 3y = 49$$

on muutumata arv 9. Leida tema kanooniline võrrand. Teha joonis.

14. Leida täpi geomeetriline koht, mille kauguste ruutude vahe kahest antud sirgest:

$$5x + 2y - 10 = 0 \text{ ja } 2x - 5y - 4 = 0$$

on null. Leida selle joone kõige lihtsam võrrand. Teha joonis.

15. Leida täpi geomeetriline koht, mille kaugused algusest ja sirgest $x + y - 5 = 0$ on võrdsed. Missugune on saadud kõvera kanooniline võrrand? Teha joonis.

16. Sirge pöörleb oma täpi $(+1, +2)$ ümber. Ta lõikab telge kahes täpis. Viimastes on ristsirged tõmmatud telgedega. Leida nende sirgete ühistäpi geomeetriline koht, selle kanooniline võrrand ja kuju.

17. Täisnurkne kolmnurk muutub nõnda, et tema kaatetid asuvad kindlatel sirgetel ja tema ümbermõõt on muutmata arv $2p$. Leida selle kolmnurga ümber joonistatud ringi keskkoha sünnitatud kõvera võrrand. Missugune on viimase kõige lihtsam kuju?

18. Leida teiseastmeline kõver, mis järgmist viit täppi lõikab: $(-4, 0)$, $(0, +2)$, $(0, -2)$, $(+4, 0)$, $(+2, -1)$. Missugune on selle joone kõige lihtsam võrrand ja kuju?

19. Leida geomeetriline täpi koht, mille kauguste ruutude summa kahe sirgeni:

$$3x - y - 3 = 0 \text{ ja } x - 3y + 7 = 0$$

on muutumata arv $\frac{16}{5}$.

20. Leida teiseastmeline kõver, mis täppe $(0, 0)$, $(+1, 0)$, $(0, +1)$ lõikab ja mille keskkoh on täpis $(+2, +3)$. Leida tema sümmeetria teljed.

Sisu ülevaade.

Lugejale.

Saateks.

1. **Sissejuhatus.** Vaatluste protokollimine. Vaatlussaaduste graafiline kujutamine. Mehaanilised registraatorid. Teine loodusnähtuste käigu kirjeldamise viis. Nähtuse käigu graafiline kujutamine. Vahekord nähtuse käigu kahe kujutuse vahel. Analüütilise geomeetria ülesande määramine. Ülesanded.

2. **Koordinaatide mõiste.** Lihtarvude kujutamine arvsirgel. Positiivsete ja negatiivsete täisarvude kujutamine. Murruliste arvude kujutamine. Irratsionaalarvude kujutamine. Arvastmiku tarvitamine. Üldine kokkuvõte. Mõned nimed. Kahe arvtelje täpi kaugus. Täpi koha määramine tasapinnal. Mõned nimed. Püst- ja kaldkoordinaadid. Polaarkoordinaadid. Nurga absoluutmõõt. Kahe täpi kaugus Cartesiusekoordinaatides. Täpi kaugus algusest. Selle täpi koordinaadid, mis jagab teatavas suhtes kahe antud täpi vahet. Kahe täpi vahe keskkohta koordinaadid. Kolmnurga raskuskeskkoht. Ülesanded.

3. **Funktsiooni mõiste ja graafiline kujutamine.** Funktsiooni mõiste. Üldine funktsiooni definitsioon. Funktsiooni tähis. Muutujate mõiste. Funktsiooni graafiline kujutamine. Funktsiooni kujutamine polaarkoordinaatides. Funktsiooni mõiste laiendamine: ilmutamata funktsioonid. Ülesanded.

4. **Kõvera võrrand.** Kõvera võrrandi mõiste. Kõvera võrrand definitsioon. Mõned põhiülesanded, mis kõvera võrrandi abil lahendatakse. Graafiline võrrandite lahendamine. Ülesanded.

5. **Kõvera võrrandi leidmine.** Täpi geomeetrilise koha mõiste. Kõvera võrrandi leidmine. Näited: ring, parabool, sirge; ringi võrrand polaarkoordinaatides. Üldine juhiskõvera võrrandi leidmiseks. Ülesanded.

6. **Kõvera parameetrilised võrrandid.** Parameetriliste võrrandite mõiste. Cartesiuse-võrrandi leidmine parameetrilistest. Mõnede ülesannete parameetriline käsitlemine. Ülesanded.

7. **Sirge võrrand.** Põhilause. Sirge tõus. Sirge konstruimine. Lause otsevõrdelisest olenevusest. Sirge võrrand lõikudes. Sirge konstruimine lõikude abil. Tingimuste arv, mis sirget määravad. Sirge läbi antud täpi. Sirge võrrandi normaalkuju. Sirge võrrandi normimine. Ülesanded.

8. **Põhiülesanded sirgest.** Täpi kaugus sirgest. Nurk kahe sirge vahel. Kahe sirge rööpseisu ja ristseisu tingimused. Kahe sirge ühistäpp. Ülesanded.

9. **Mõned ülesanded geomeetrilistest kohtadest.**

10. **Sirge võrrandi rakendused.** Graafiline katsevigade leidmine. Empiiriliste seaduste graafikud. Niitprov. Lineaarse seaduse juhus. Astmelise seaduse juhus. Logaritmtseisendus. Lineaarne interpoolimine. Kahe lineaarse võrrandi graafiline lahendamine. Ühe erikujulise võrrandi graafiline lahendamine. Ruutvõrrandi nomogramm. Ruutvõrrandi juurte arv. Kuupvõrrandi nomogramm. Ülesanded.

11. **Ring.** Ringi võrrandite kujud. Ülesanded.

12. **Ellips.** Definitsioon. Ellipsi võrrand. Ellipsi võrrandi kanooniline kuju. Ellipsi teljed. Ellipsi kuju uurimine. Ellipsi parameetrilised võrrandid. Ellipsi joonistamine. Ellipsi tulitäppide konstruimine. Ellipsi raadiusvektori leidmine. Ellipsi ekstsentrisus. Ellipsi juhtjoon. Ellipsi juhtjoone konstruimine. Ülesanded.

13. **Hüperbool.** Definitsioon. Hüperbooli võrrand. Selle võrrandi kanooniline kuju. Hüperbooli teljed. Hüperbooli kuju uurimine. Hüperbooli asümptoodid. Hüperbooli joonistamine. Hüperbooli tulitäppide konstruimine. Hüperbooli raadiusvektorid. Hüperbooli ekstsentrisus. Hüperbooli juhtjoon. Selle konstruimine. Ülesanded.

14. **Parabool.** Parabooli definitsioon. Parabooli võrrand. Parabooli kuju uurimine. Parabooli joonistamine. Parabooli parameeter. Ülesanded.

15. **Ellipsi, hüperbooli ja parabooli ühine võrrand polaarkoordinaatides.** Ellipsi ja hüperbooli parameeter. Kolme kõvera ühine võrrand.

16. **Koonuslõiked.**

17. **Puutujad.** Definitsioonid. Puutuja võrrand. Tuletise definitsioon ja tema geomeetriline tähendus. Näited tuletise leidmisest. Puutuja võrrandi leidmine. Ringi puutuja. Märkus puutuja võrrandi kirjutamise kohta. Parabooli puutuja. Tema lõiketäpp teljega. Parabooli puutuja joonistamine. Järg parabooli puutuja omadusi. Ellipsi puutuja. Tema lõiketäpp suure teljega. Ellipsi puutuja tähtsam omadus. Ellipsi puutuja joonistamine. Hüperbooli puutuja. Hüperbooli puutuja lõpmatuses. Puutuja võrrandi leidmine, mis välisest täpist kõverale tõmmatud. Ülesanded.

18. **Diameetrid.** Definitsioon. Parabooli diameetrid. Ellipsi diameeter. Ellipsi diameetri tõus. Ellipsi kaasdiameetrid. Hüperbooli diameetrid. Ülesanded.

19. **Koordinaatide teisendamine.** Üldine ülesanne koordinaatide teisendamisest. Rööplüke. Pööramine. Üldine juhus. Märkused koordinaatide teisendamise kohta. Üleminek püstkoordinaatidest polaarkoordinaatidele ja ümberpöörduks. Ülesanded.

20. **Mõned koonuslõigete võrrandite erikujud.** Püsthüperbool. Pöördvõrdelise olenevuse kuju. Näited pöördvõrdelisest olenevusest. Murdlineaarne olenevus. Paraboolsed seadused. Koonuslõigete võrrandid teljes ja puutujas nende lagitapis. Ülesanded.

21. **Kõvera aste.** Kõvera astme mõiste. Kõvera astme muutumatus. Selle muutumatusgeomeetriline tõlge.

22. **Kõverate uurimine, mis üldise teiseastmelise võrrandi abil antud.** Üldine teiseastmelise võrrandi kuju. Sümmeetria kriteerium alguse suhtes. Sümmeetria kriteerium telgede suhtes. Kõvera võrrandi muutumine paralleelteisendamisel. Kõvera keskkoha leidmine. Selle olemasolemise kriteerium. Kõvera võrrandi muutumine pöördteisendamisel. Pöördnurga valik. Kõvera peasihid. Kõvera teljed.

23. **Teiseastmelise kõvera kanoonilise võrrandi leidmine.** Kolm juhust. Näited. Üldine kokkuvõte. Ülesanded.