TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL
Matemaatika õpetamise metoodika kateeder

TÕENÄOSUSTEOORIA ELEMENTIDE KÄSITLEMINE KOOLIMATEMAATIKAS

Diplomitöö

Teostaja: Elve Tammes
Mat.ped.osak.
V kurs.üliõpilane

Juhendaja: O.Prinits
dots.

Lubatud kaitsmisele
28.V 74.a
O.Prinits
mat õpimet kat juh

Tartu 1974

SISSEJUHATUS

20.sajand - teaduse ja tehnika progressi sajand - on seadnud uued nõuded üldhariduslikes koolides õpetatavate ainete, eelkõige aga just matemaatika ette, et likvideerida koolimatemaatika sisu ja esitusviiside mittevastavus teaduse kaasaegse taseme ja praktika nõuetega.

Koolimatemaatika viimist vastavusse kaasaja teadusega taotlebki viiekümnendate aastate lõpul alanud teine üle-maailmne koolimatemaatika reform. Esimese - viimasel sajandivahetusel elluviidud reformi põhiülesandeks oli koolimatemaatikasse lülitada muutuv suurus, geomeetrilised teisendused, ning diferentsiaal- ja integraalarvutuse alged. Teise reformi ülesandeks oli eelkõige lõpule viia esimese reformi põhiülesanded, ehitada üles kogu koolimatemaatika hulga mõistele tuginedes ning lisada programmi uue materjalina teemad matemaatilisest loogikast, tõenäosusteooriast ja matemaatilisest statistikast, lineaarplaneerimisest, vektoralgebrast ja elektronarvutitest. Üldiselt iseloomustab käesoleva sajandi viiekümnendatel aastatel alanud koolimatemaatika reformi

1) koolimatemaatika sisu ja mõtlemisviisi uuendamine esimesest klassist lõpuklassini,

2) koolimatemaatika muutmine ühtseks õppeaineks muutuja mõiste, hulgateooria ja matemaatilise loogika mõistete ning sümbolite baasil,

3) nii oleviku kui tuleviku vajaduste arvestamine koolimatemaatika sisu muutmisel,

4) rõhu asetamine mõningate matemaatikateaduses kasutatavate mõttekäikude ning mõistete õpetamisele,

5) matemaatikas andekamate õpilaste õpetamine eriprogrammide järgi,

6) koolimatemaatika programmide ülesehitamine uuemate õpetamisteooriate järgi.

Oluline koht teises koolimatemaatika reformis on tõenäosusteoorial, mille elementide lülitamist koolimatemaatika programmi loetakse väga vajalikuks. Tõenäosusteooria suurt tähtsust rõhutab näiteks akad. B.V.GNEDENKO järgmiselt: "Kaasajal tõenäosusteooria on haaranud enda kätte väga olulise koha nii teaduses kui igapäevases elus. Tema ideid, meetodeid ja tulemusi mitte ainult ei kasutata, vaid need on ka aluseks tehnilises revolutsioonis, majanduses, planeerimises, tootmise organiseerimises, sides, aga ka teadustes nagu lingvistika ja arheoloogia." ([13], lk.11). Eriti oluline osa on tõenäosusteooria elementide õpetamisel nendele, kelle õpingud piirduvad üldhariduslikku kooliga, sest ta aitab orienteeruda neid ümbritsevas tegelikkuses. Tõenäosusteooria õpetamine koolis on vajalik õige maailmapildi loomiseks ning objektiivse reaalsuse õigeks tunnetamiseks. "Tõenäosusteooria juhatab uutesse, palju laiematesse seaduspärasuste ringidesse, mis võimaldavad meid ümbritseva maailma nähtusi kirjeldada põhjalikumalt ja sügavamalt, kui seda võimaldavad range determinismi klassikalised seaduspärasused" ([14] , lk.75).

Tänapäeval käsitletakse erinevate maade koolides tõenäosusteooria elemente erinevates klassides ja erinevas ulatuses. Näiteks USA-s käsitleti tõenäosusteooria algmõisteid juba 7. - 8. õppeaastal. Meil - Eesti NSV koolides on tõenäosusteooria elementide käsitlemine ette nähtud kümnendas klassis teema "Täielik induktsioon. Newtoni binoomvalem" raames. Ette on nähtud tutvustada tõenäosusteooria põhimõisteid nagu kindel, võimatu ja juhuslik sündmus, vastandsündmus jne. Seejärel käsitletakse tõenäosuste liitmise ja korrutamise lauseid ning mõningal määral ka kombinatoorikat ning binoomiaalset jaotust.

Käesoleva töö eesmärgiks on ühelt poolt tallletada varasemaid kogemusi tõenäosusteooria elementide õpetamise kohta koolis. Selleks analüüsitakse mõningaid varem kasutusel olnud aga samuti mõningaid kaasaegseid õpikuid. Kuna üheks viiekümnendate aastate lõpul alanud koolimatemaatika reformi ülesandeks oli kogu koolimatemaatika rajada hulgateooriale, siis on teiselt poolt seatud käesoleva töö eesmärgiks esitada üks võimalik tõenäosusteooria elementide käsitlus tuginedes hulga mõistele. Töö koosneb sissejuhatusest, kolmest peatükist ja kokkuvõttest. Esimeses peatükis on vaatluse all tõenäosusteooria elementide käsitlus praegu kasutusel olevas X klassi õpikus, G.Nõgo ja P.Nõrbergi koostatud õpikutes ning mõnedes kaasaegsetes välismaa õpikutes. Teine peatükk toob ära rahvusvahelistel nõupidamistel, TRÜ õppejõu K.Velskeri dissertatsioonis "Tõenäosusteooria ja matemaatilise statistika elementide käsitlemisest koolis ning õpilaste statistilise mõtlemisviisi arendamisest" esitatud soovitused ning nimelt Ungari matemaatiku, kaasaegse koolimatemaatika reformi ühe juhtiva isiku, T.Varga ettepanekud tõenäosusteooria elementide käsitluse kohta koolis. Kolmandas peatükis on esitatud üks tõenäosusteooria elementide käsitlus hulga mõiste baasil. Vaatluse alla tulevad kindel, võimatu ja juhuslik sündmus, sündmuste universaalne hulk, tõehulk, sündmuste summa, sündmuste korrutis, katseseeria ja vastavalt sündmuse, sündmuste korrutise ja summa tõenäosused, tinglik tõenäosus ja tõenäosus katseseeria korral. Antav käsitlus on mõeldud tutvustamiseks keskkooli matemaatika fakultatiivkursuses.

I TÕENÄOSUSTEOORIA ELEMENTIDE KÄSITLEMINE VARASEMATES JA KAASAEGSETES KOOLIMATEMAATIKA ÕPIKUTES

Käesoleval sajandil on koolimatemaatikas toimunud suured muudatused. Programmidesse on lülitatud uusi teemasid, Mitmetel teemadel on muudetud käsitlusi ja mõningad hoopis kustutatud programmist. Arengu on läbi teinud ka tõenäosus-teooria elementide käsitlus. Teda on käsitletud mitmetes erinevates vanuseastmetes, erinevas ulatuses ja ka erineval viisil. Kaasaja suunaks on tõenäosusteooria elementide käsitlus rajada hulga mõistele.

Käesolevas peatükis võetakse vaatluse alla tõenäosusteooria elementide käsitlus järgmistes õpikutes: E.Etverk, M.Teeäär, K.Velsker "MATEMAATIKA X KLASSILE", P.Ederberg "ALGEBRA ÜLESANNETE KOGU JA KOKKUVÕTLIK KÄSIRAAMAT III", G.Rägo "MATEMAATIKA TÖÖRAAMAT KESKKOOLILE V ", Soome kooliõpikutes S.Vilenius jt, "KOULULAISEN MATEMATIIKKA 9 " ja P.Malinen "TILASTOTIETEEN JA TODENNÄKÖISYYSLASKENNAN ALKEET", Austria kooliõpikus K.Rosenberg "MEDTODISCH GEORDNETE SAMMLUNG VON AUFGABEN AUS DER ARITHMETIK UND GEOMETRIE", Hollandi kooliõpikus H.J. Jacobs jt. "MODERNE WISKUNDE DEEL 8 H ",Kanada kooliõpikus A.J.Coleman jt. "ALGEBRA 13 ".

1. 1. Tõenäosusteooria elementide käsitlus Eesti NSV koolides 1973/ 74 õ.a. kasutatud X klassi õpikus

Eesti NSV üldhariduslikes koolides on koondatud kogu tõenäosusteooria õpetamine X klassi kursusesse. Vastavad küsimused võetakse vaatluse alla X klassi õpiku viimases peatükis "Täielik induktsioon, Newtoni binoomvalem" . Programm näeb ette pühendada sellele teemale 2o tundi. Tabel 1 annab ülevaate sellest, milliseid tõenäosusteooria küsimusi ja millises ulatuses antud õpikus käsitletakse. Teemas "Juhuslik sündmus" käsitletakse igat uut mõistet eraldi alateemana, mille raames antakse mõiste täpne definitsioon ja lühike selgitus. Näiteks sündmuse vastandsündmuse mõistet selgitatakse järgmiselt:

"Vaatleme nüüd juhtu, kus mingi sündmus A ei toimunud. Näiteks raha viskamisel ei tulnud vapp. Sellisel juhul tuli kiri, mida võime samuti lugeda sündmuseks. Tähendab, sündmuse A mittetoimumine on sündmus. Viimast tähistatakse sümboliga $\bar{A}$ ja nimetatakse sündmuse A vastandsündmuseks. Lühidalt:

<u>Sündmuse A vastandsündmuseks $\bar{A}$ nimetatakse sündmuse A mittetoimumist</u>" (lk. 3o9).

Et siin esitatud mõisted on õpilastele küllalt arusaadavad, siis selline uue aine esitus on täiesti sobiv.

T e e m a	Lehekülgede arv	Ülesannete arv	U u e d m õ i s t e d
Juhuslik sündmus	4	5	Kindel, võimatu ja juhuslik sündmus, tõenäosusteooria, sündmuse vastandsündmus, üksteist välistavad sündmused, võrdvõimalikud sündmused, sündmuste jagunemine üksikjuhtudeks, sündmuste täielik süsteem.
Sündmuse tõenäosus	8	17	Sündmuse tõenäosus – $p(A) = \frac{m}{n}$, tõenäosuse muutumise piirkond $0 \le p \le 1$, vastandsündmuse tõenäosus, sündmuse ja tema vastandsündmuse summa – $p(A) + p(\bar{A}) = 1$, statistiline tõenäosus, suurte arvude seadus.
Kombinatsioonid	7	20	Kombinatsioonid n elemendist m kaupa – $C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$
Korrutamis- ja liitmisprintsiip	6	15	Korrutamisprintsiip, " puu ", liitmisprintsiip.

Tabel 1

Teema lõpus kinnistamiseks mõeldud viiest ülesandest jääb aga väheseks, sest iga uue mõiste kasutamise kohta tuleb ainult üks ülesanne.

Järgmisena võetakse vaatluse alla sündmuse tõenäosuse mõiste. Ka siin, nagu esimese teema puhulgi vaadeldakse igat uut mõistet eraldi alateemana. Siin esitatav tõenäosuse definitsioon on õpilase jaoks liialt tihe ja sisuliselt raskesti mõistetav:

"Kuulugu sündmuse A üksikjuhud $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_m$ üksteist välistavate võrdvõimalike sündmuste täielikku süsteemi $\{E_1, E_2, E_3, \ldots, E_n\}$. Siis nimetatakse sündmuse A tõenäosuseks suhet $\frac{m}{n}$" (lk.312). Õpilastel on näiteks raske välja lugeda mida tähendavad suhtes $\frac{m}{n}$ arvud m ja n. Definitsiooni aitavad aga mõista järgnevad kolm näiteülesannet, mis on ühtlasi õpilastele eeskujuks teiste analoogiliste ülesannete lahendamisel. Viimaseid on vastava osa kohta esitatud piisavalt (16 ülesannet).

Teema "Kombinatsioonid" eesmärgiks on eelkõige tutvustada kombinatsiooni mõistet ja esitada kombinatsioonide arvutamise valemid. Side tõenäosusteooriaga tuleb siin ilmsiks ainult sissejuhatavas osas ja mõningates ülesannetes. Näiteks:

"Eksamipileteid on 25. Eksamile tuleb 20 õpilast. Kui suur on tõenäosus, et eksami lõppedes lauale jäänud piletid on järjestikused?" (ül.609).

Korrutamis- ja liitmisprintsiipe käsitlev teema on varustatud rohkete näiteülesannetega. Illustreerimiseks kasutatakse loogiliste võimaluste puud.

Üldiselt on kogu tõenäosusteooriat sisaldav osa korrektselt üles ehitatud ja ei tohiks õpilastele ületamatuid raskusi valmistada. Küsitav on aga nende teadmiste püsivus, sest puutuvad ju õpilased siin esimest ja viimast korda kokku tõenäosusteooria elementidega. Õpetamise kasutegur oleks suurem, kui mõningad mõisted tõenäosusteooriast nagu kindel, võimatu ja juhuslik sündmus, sündmuse vastandsündmus, üksteist välistavad sündmused, võrdvõimalikud sündmused, sündmuse klassikaline ja statistiline tõenäosus, tõenäosuse muutumise piirkond ja vastandsündmuse tõenäosus õpetataks juba nooremates klassides.

1. 2. Tõenäosusteooria käsitlus P. Edenbergi õpikus

Tunnistust sellest, kuidas käsitleti tõenäosusteooria elemente eesti koolides 50 aastat tagasi, annab 1924. aastal ilmunud Tallinna linna poeglaste reaalgümnaasiumi õpetaja PAUL EDENBERGI poolt koostatud õpik "Algebra ülesannete kogu ja kokkuvõtlik käsiraamat III". Õpik oli määratud selle aja keskkooli IV ja V klassile (X ja XI õppeaasta).

Enne tõenäosusteooriat sisaldavat paragrahvi "Algmõisted tõenäosuse õpetusest" (lk. 73-79)[1] käsitleb autor kombinatoorika küsimusi - permutatsioone, variatsioone, kombinatsioone. Tõenäosusteooria rakenduslik osa on koondatud paragrahvi "Algteated kinnitusarvutusest" (lk. 79-93).

---

1 Antud käsitluse kohta tabeli koostamine ei osutunud vajalikuks, sest uusi mõisteid esineb selles osas väga vähe ja kogu teooria on esitatud ühtse tervikuna ilma alateemadeta.

Tõenäosusteooria küsimusi alustab autor kohe tõenäosuse (t) definitsiooniga ja teeb seda suhte $\frac{n}{N}$ kaudu, kus n tähistab nähtuse esiletulemisele soodsate võimaluste arvu ja N kõikide võimaluste ehk nagu autor nimetab "ühtlasevõimalikkude juhuste arvu". Toonud sisse "vastastõenäosuse" mõiste

$$t_v = 1 - t$$

esitab autor omapäraselt järgmise sündmuste klassifikatsiooni:

" Kui $\frac{n}{N} = 1$, siis öeldakse, et sündmus on k i n d e l

" $\frac{n}{N} > \frac{1}{2}$ " " " " " t õ e n ä o n e

" $\frac{n}{N} = \frac{1}{2}$ " " " " " k a h t l a n e

" $\frac{n}{N} < \frac{1}{2}$ " " " " " t õ e n ä o t u

" $\frac{n}{N} = 0$ " " " " " v õ i m a t u"

(lk.74).

Et kombinatoorikaga tutvusid õpilased juba eelmises paragrahvis, siis järgneva 14 ülesande seas esitab autor mitmeid selliseid, millede lahendamiseks tuleb kasutada kombinatsioonide arvu valemit. Näiteks:

" 10-est sõdurist määratakse liisu kaudu vahipostile 4 sõdurit. Kui suur on tõenäosus iga üksiku sõduri kohta, et liisk tema peale langeb?" (Ül. 501, lk. 75).

Selgitused selliste ülesannete lahendamiseks esitab autor näiteülesandes (näide 2, lk.74). Kuna on tegemist küllalt vana õpikuga, siis on täheldatavad teatud erinevused kasutatavas terminoloogias. Näiteks tänapäeval kasutusel olevate terminite "tõenäosuste liitmise lause" ja "tõenäosuste korrutamise lause" asemel nimetab autor neid vastavalt " täieline tõenäosus ehk tõenäosus "kas-või"" ja "liittõenäosus ehk tõenäosus "nii hästi-kui"".

Mõlemad lauseid esitab autor koos tõestustega. Liittõenäosusest, s.t. tõenäosuste korrutamise lausest, teeb autor järelduse:

"Tõenäosus, et nähtus kordub järgimööda n korda, on

$$T = t^n \text{ "}$$

(lk. 77).

Üheks huvitavaks tabeliks P. Ederbergi õpikus, mida me kaasaegsetes kooliraamatutes ei kohta, on tõenäosuse tabel kahe sündmuse kombineeritud juhtude jaoks:

"Olgu t_1 nähtuse A ilmumise tõenäosus, t_2 – tõenäosus nähtuse B suhtes; siis tõenäosus, et

A ei ilmu	$1 - t_1$
B ei ilmu	$1 - t_2$
A ilmub kuid B mitte	$t_1 (1 - t_2)$
A ei ilmu, kuid ilmub B	$(1 - t_1) t_2$
Ilmub ainult A või B	$t_1 (1-t_2) + (1-t_1) t_2$
A ja B ilmuvad mõlemad	$t_1 \cdot t_2$
A ja B mõlemad korraga ei ilmu, teiste sõnadega, et kõige rohkem üks nendest ilmub	$1 - t_1 \cdot t_2$
Ei ilmu ei A ega B	$(1-t_1)(1-t_2)$
Ilmuvad A, või B, või mõlemad korraga, teiste sõnadega, et vähemalt üks nendest ilmub	$1-(1-t_1)(1-t_2)$ "(lk.77,78)

Sellest tabelist teeb autor järelduse:

"tõenäosus, et n katse juures nähtus vähemalt üks kord sünnib:

$$1 - (1-t)^n \quad \text{"} \qquad \text{(lk.78).}$$

Kuna on tegemist ka ülesannete koguga, siis sisaldab antud paragrahv rohkesti ülesandeid (31 ülesannet) uute mõistete ja seoste kasutamise kohta. Esitame neist mõningaid:

"Kas on tõenäone 1-he täringuga 4 korda visates arvu 5 saada?" (Ül.513, lk.78).

"Pall läbimõõduga 5 cm visatakse vastu ruudulist traatvõrku, mille silmade laius on 7 cm. Kui suur on tõenäosus, et pall võrgust läbi lendab?" (Traadi paksust arvesse ei võeta ja viskamisel ei sihita)" (Ül.517, lk.79).

" 15-e loosi seas on 6 võitu. Kuivõrd tõenäone on 4 korda järgimööda loosi võttes mistahes järjekorras 2 võitu ja 2 tühja numbrit võtta, kui võetud loosi tagasi ei panda?" (Ül. 502, lk.79).

Järgmine paragrahv "Algteated kindlustusarvutusest" hõlmab 12 lehekülge 37 ülesandega suremustabeli kasutamise kohta (suremustabel on ära toodud samas lk. 80-81) ja elukindlustuse küsimustega.

Näiteks:

"Kui suur summa on tarvis, et 100000 sündinule 40-daks eluaastaks a' 100 marka kindlustada?" (Ül. 522, lk.82).

"Kui suure maksuga võib 45-ndal eluaastal kindlustada summa pähe 12 000 marka?" (Ül. 545, lk.87).

Selgitused ja näpunäited ülesannete lahendamiseks esitab autor näiteülesannetes.

1. 3. Tõenäosusteooria elementide käsitlus G. Rägo õpikus

Eestikoolsete matemaatika kooliõpikute hulgas on ühed huvitavamad prof. G. RÄGO poolt koostatud õpikud pealkirjaga "MATEMAATIKA TÖÖRAAMAT". Nendes õpikutes nii uue aine esitamine kui selle kinnistamine toimuvad ülesannete kaudu. On võimalik eristada kolme liiki ülesandeid: esimesed, n.n. suunavad ülesanded, mis viivad uue mõiste juurde, teised on näiteülesanded, mis selgitavad uut ainet ja millede lahendamise käigus defineeritakse uued mõisted ning kolmandad, mis on mõeldud uue aine kinnistamiseks. Tabel 2 annab ülevaate V klassi õpikus toodud peatüki," Statistilise meetodi alged" nendest teemadest, mis on seotud tõenäosusteooria elementidega.

Enne uue mõiste sissetoomist esitab autor rida ülesandeid, kus õpilased juhitakse sooritama mitmeid katseid, tegema nende põhjal oletusi ja järeldusi. Seejärel toob autor ära mingi üldise näite, kus ta ka defineerib uue mõiste või siis jätab selle teha õpilastele tuginedes konkreetsele valemile. Edasi järgnevad ülesanded uue mõiste kasutamise kohta. Näiteks enne tõenäosuse mõiste sissetoomist peavad õpilased sooritama rida kaardipakist kaardi tõmbamise, raha viskamise ja täringu veeretamise katseid ning otsustama, kas tulemustes ilmnevad mingid seaduspärasused. Nendes ülesannetes kasutab autor uusi mõisteid nagu katseseeria, relatiivne sagedus, juhusest olenev suurus ning ülesandes 11 defineerib autor lõpuks tõenäosuse mõiste klassikalisel kujul ja annab definitsiooni ka piirväärtusena:

$$\lim_{s \to \infty} \frac{a}{s},$$

Teema	Lehekülgede arv	Uut ainet käsitlevate ül. arv	Uue aine kinnist. ül. arv	Uued mõisted
Nähtuse tõenäosuse mõiste	7	5	10	Juhusest olenev suurus, katseseeria relatiivne sagedus, nähtuse tõenäosus, suurte arvude seadus.
Tõenäosuste arvutamine juhtude loendamise teel	4	4	7	Võrdtõenäosus, tõenäosuse arvutamise valem $p = \frac{m}{n}$, nähtuse teoreetiline ja statistiline tõenäosus.
Tõenäosuste liitmis- ja korrutamislaused	5	5	15	Vastassündmus, teineteist välistavad sündmused, tõenäosuste liitmislause $p = p_1 + p_2$, teineteisest olenevad sündmused, tõenäosuste korrutamislause – $p(S) = p(S_1) \cdot p(S_2)$.
Kindlustusmatemaatika alged	7	2	21	suremustabel.
Statistilise rea keskväärtusi ja hajuvusmõõte	7	7	9	Statistiline rida, mediaanväärtus, mediaanvahemik, hälve, lineaarne hajuvusmõõt, hälbe ruutkeskmine, hajuvusmõõt.
Sagedusjaotusi	6	7	12	Sagedusjaotus, valem $\frac{n!}{a!\,b!} p^a q^b$, binoomiaalne jaotus, relatiivse sageduse hajuvusmõõt $\rho = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$

Tabel 2

kus s tähistab katsete arvu katseseerias ja a selles seerias soovitud nähtuste esinemiste arvu. Teooria kinnistamiseks tuuakse näiteks järgmine ülesanne:

"Teraviljale külvitud 200 kurgiseemne terast idanes 185. Kui suur on kurgiseemne idanemise protsent? Mida võib oletada ülejäänud seemnetagavara idanemisvõime kohta? Kui suur on sellest tagavarast võetud seemnetera idanemise tõenäosus?" (Ül. 12, lk.86).

Järgmises teemas "Tõenäosuste arvutamine juhtude loendamise teel" esitab autor ülesandes 2 (lk. 88) eeskirja nähtuse tõenäosuse arvutamiseks , kuid sõnastama peavad selle eeskirja õpilased ise:

"Urnis on meil üldse n loosi, millest m toovad võidu. Kõiki võimalusi loosi võtta on n , võidule soodsaid võimalusi m. Sõnasta valemis

$$p = \frac{m}{n}$$

peituv eeskiri tõenäosuse p arvutamiseks, et pimesi võetud loos toob võidu."

Ülesanded tõenäosuse arvutamise valemi rakendamiseks on oma sisult huvitavad ja vaheldusrikkad. Näiteks:

"Vandeseltsis on 15 meest ja 10 naist. Vandeseltsi otsuse täidesaatja määratakse loosiga. Kui suur on tõenäosus, et otsuse täidesaatmine langeb meesliikmele? - et otsuse täidesaatmine langeb naisliikmele?" (Ül.3, lk.88).

"Olgu olemas 5 kaarti, mis märgitud vastavalt tähtedega A, J, K, L, O . Kaardid segatakse ja laotakse lauale üksteise järele. Kui suur on tõenäosus, et esile tuleb nimi " KALJO "? " (Ül.7, lk.89).

Aja jooksul on terminoloogia mõnevõrra muutunud. Nii kasutatakse nüüd teoreetiliste tõenäosuse asemel klassikaline tõenäosus ja teineteist eemaldavate sündmuste asemel teineteist välistavad sündmused.

Teineteist eemaldavate sündmuste mõiste nagu teineteisest olenevate sündmuste mõistegi esitab autor tõenäosuste liitmise- ja korrutamislausele juurde suunavates ülesannetes. Autor rõhutab (kasutab sõrendatud trükki) seal liitmis - ja korrutamislausete kirjutamist tekstis vastavalt sõnadega "kas ... või..." ja "nii... kui ka ... " Nii liitmis- kui korrutamislaused peavad aga õpilased sõnastama ise vastavate valemite põhjal. Mitmed ülesanded, mis nõuavad liitmis- või korrutamislause kasutamist, on varustatud vajalike näpunäidetega, nagu näiteks järgmine ülesanne:

"Tehtagu 25- sendise rahaga n viset. Kui suur on tõenäosus, et vähemalt üks kord selles seerias esineb vapp?

Näpunäide: Kui suur on tõenäosus, et selles seerias vappi ei esinenud? " (ül. 18, lk.94).

Küllalt suut tähelepanu s.o. 7 lehekülge on autor pööranud teemale "Kindlustusmatemaatika alged". Esimese poole sellest teemast (6 ülesannet) on pühendanud autor mitmetele kindlustusprobleemidele, Näiteks:

"Kindlustusselts avab murdvarguse vstu kindlustamise osakonna. Kuidas leitakse aastamaksu alammäär, mida tuleb võtta varanduse kindlustamisel murdvarguse vastu?"(ül.5, lk.96).

"Peaaegu iga aasta kannatavad Tartu linnas Emajõe madalamatel kallastel asetsevad mõnekümned majad liigvee all.

Veidi kõrgemal asetsevate majadeni ei ulatu aga vesi iialgi. Kas on mõeldav, et Tartu linnas kunagi asutatakse liigvee vastu kindlustamise selts? Miks ei?" (ül. 4.1°, lk.95).
Teema teise poole algul selgitab autor, mida kujutab endast suremustabel ja mis põhimõttel on ta üles ehitatud (suremustabel on esitatud õpiku lõpus):

"Suremustabeliks nimetatakse tabelit, mis näitab, kui palju on veel elus l_x isikust x- aastases eas 1, 2, 3 ... aastat hiljem" (ül. 7, lk.96). Sellele järgneb rida ülesandeid (17 ülesannet) mis nõuavad suremustabeli kasutamist. Näiteks:

"Kindlustusselts maksab x aastat vanale l_x isikule surmani iga aasta alul igaühele 1 krooni. Kui suur on seltsi kogukohustis ja selle kohustise väärtus nende isikute sündimisajal?" (ül. 12.1°, lk.99).

"38-aastane isik maksab aastas 60 krooni preemiana oma pere aineliseks kindlustamiseks oma surma puhul. Kui suure ühekordse preemiaga võiks asendada iga-aastasi makse?" (ül. 17, lk.100).

Peatüki "Statistilise meetodi algeid" lõpetab autor statistiliste ridade ja neid iseloomustavate suuruste nagu keskväärtus ja hajuvusmõõt ning sagedusjaotuste vaatlemisega. Pikemalt peatub autor binomiaalsel jaotusel tuues selle mõiste sisse defineerimata:

"Kui suur on tõenäosus, et kümnes rahaviskes vapp tuleb esile just

10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0

korda? Kujuta nende tõenäosuste käik graafiliselt.

Saadud joonis illustreerib sageduste 1o, 9, .. 1, o "binominaalset jaotust" (ül.13, lk. 112). Selline õpiku ülesehitus võimaldab õpilastel uusi teadmisi omandada katsete sooritamise ja ülesannete lahendamise teel otse töö käigus. Selliselt omandatud teadmised on märksa püsivamad, kui tuupimisele tugineva õppimise korral.

1. 4. Tõenäosusteooria elementide käsitlus mõnedes kaasaegsetes välismaa õpikutes

Soome koolide 9. klassides on kasutusel VILMUS,S.jt. "KOULULAISEN MATEMATIIKKA", mis on nii õpikuks kui ka töövihikuks. Selle õpiku viimane osa - 19 lehekülge - on pühendatud teemale "Sissejuhatus tõenäosusteooriasse". Tõenäosuse mõiste esitatakse siin hulga mõiste baasil. Vaatluse all on kõigepealt tõenäosusteooria põhimõisted, nagu juhuslikkus, elementaarsündmus, universaalne hulk, sündmus, sagedus suhteline sagedus, tõenäosus. Need mõisted defineeritakse ilma pikemate selgitusteta. Klassikalise tõenäosuse osas antakse kindla ja võimatu sündmuse tõenäosuse kaudu tõenäosuse muutumise piirkond - $0 \leq P(A) \leq 1$. Edasi tutvustatakse vastandsündmuse ja tema tõenäosusega. Sündmuste summa tõenäosust vaadeldakse kolmel juhul:

1) kui $A \cap B \neq \emptyset$, siis

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad \text{(joonis 1a)}$$

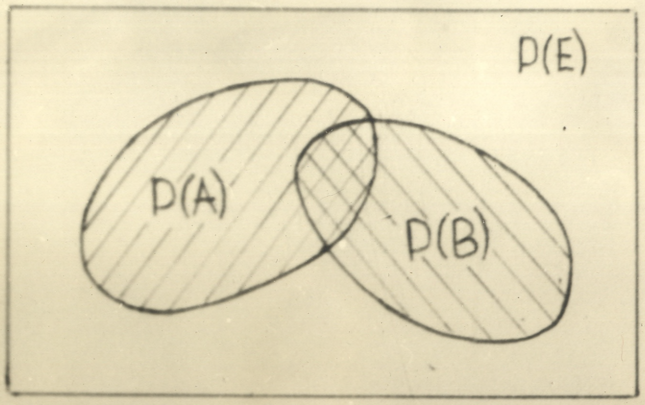
2) kui $A \cap B = \emptyset$, siis $P(A \cap B) = 0$ ja

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad \text{(joonis 1b)}$$

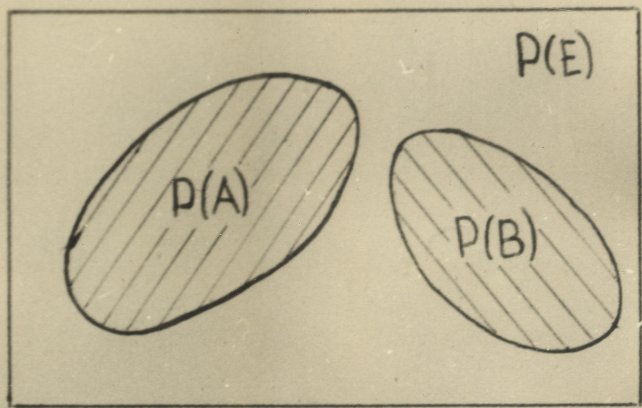
3) $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$ (joonis 1c)

Ülesanded, mis nõuavad summa tõenäosuse valemite kasutamist, on näiteks sellised:

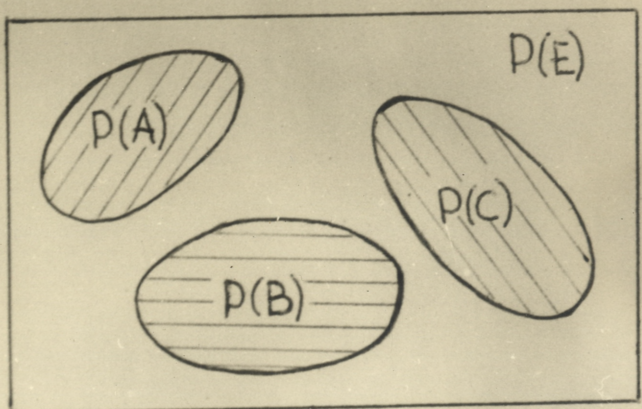
a)



b)



c)



Joon. 1

" Täringut veeretatakse ühe kord. Olgu sündmus A= $\{4\}$, sündmus B = $\{$ paarisarv silmi $\}$ ja sündmus C = $\{$ paaritu arv silmi $\}$. Leia:

a) $P(A \cup B)=$

b) $P(A \cup C)=$

c) $P(B \cup C)=$ "
(Ül. 12, lk.248).

Sissejuhatus tõenäosusteooriasse lõpeb loogiliste võimaluste puu tutvustamisega, mille raames käsitletakse ka katseseeria mõistet.

Kuna on tegemist samaaegselt ka töövihikuga, siis sisaldab õpik rohkesti ülesandeid (19 ülesannet alapunktidega). Peatüki lõpus on leht "Kontrolli oma teadmisi", kus on 4 ülesannet kogu eelneva teooria kordamiseks. Seda lehte saab edukalt kasutada ka kontrolltööna.

Soome nimeka koolimatemaatiku ja kasvatusteadlase P.MALINENI õpik "TILASTOTIETEEN JA TODENNÄKÖISYYSLASKENNAN ALKEET" on määratud kirjanduslikku kallakuga keskkooli vanema astme matemaatikakursuse täiendamiseks. Tõenäosusteooria hõlmab sellest õpikust 22 lehekülge ja on jaotatud kaheks osaks. Esimene osa - 10 lehekülge on pühendatud klassikalisele tõenäosusele. Erinevalt eelnevalt vaadeldud 9.klassi õpikust ei ole siin teooria rajatud hulga mõistele. Et õpik on kirjutatud fakultatiivkursusena, siis põhimõisteid nagu juhuslikkus, relatiivne ehk suhteline sagedus jne. kasutatakse kui juba tuntud mõisteid ning alustatakse kohe tõenäosuse mõiste defineerimisega. Tõenäosuse klassikalisele definitsioonile järgnevad tõenäosuste liitmise lause (välistavate sündmuste korral) ja korrutamise lause(sõltumatute sündmuste korral).

Liitmise lause kohta käiva valemi

$$P(A \text{ või } B) = P(A) + P(B)$$

tõestamiseks kasutab autor joonist (joonis 2), millest on kergesti väljaloetav, et

$$P(A \text{ või } B) = \frac{k+h}{n} = \frac{k}{n} + \frac{h}{n} = P(A) + P(B).$$

Suuremat tähelepanu (12 lehekülge) pöörab autor statistilisele tõenäosusele ja jaotusseadustele.

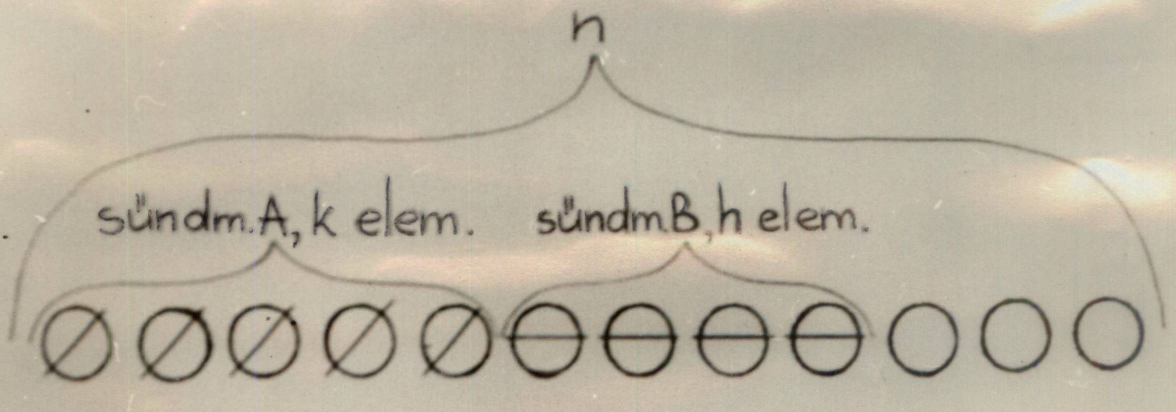
Tõenäosuse üldistuse all mõistetakse klassikalise tõenäosuse ja tema omaduste ülekandmist juhtudele, kus ei ole enam tegemist võrdtõenäosete sündmustega. Näiteks rõhknaela viskamisel ei ole võrdtõenäosed sündmused "rõhknael kukub teravikuga alla", " rõhknael kukub teravikuga üles", sest rõhknael ei ole sümmeetriline keha. Siin antakse ka seos klassikalise tõenäosuse ja relatiivse sageduse vahel:

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{k_n}{n} \right) ,$$

kus n on katsete arv ja k_n sündmuse A esinemise sagedus.

Jaotusseadusi käsitlevas osas toob autor kõigepealt sisse keskväärtuse - $\mu = \sum p_i x_i$ ja dispersiooni $\sigma^2 = \sum p_i (x_i - \mu)^2$ mõisted. Jaotusseadustest vaatleb autor binomiaal- ja normaaljaotust. Nendega seotud valemid tuuakse sisse vastavate näidete ja selgituste abil. Viimane paragrahv on pühendatud tõenäosusteooria ajaloole.

Antud õpik on eelvenalt vaadeldud 9.klassi õpikust tunduvalt raskem ja tema tutvustamine tuleb kõne alla küll ainult tugevamatele õpilastele.



Joon. 2

<u>Austria</u> kooliõpikutest oli vaatluse all K.ROSENBERGI SAMMLUNG VON AUFGABEN AUS DER ARITHMETIK UND GEOMETRIE", mis on määratud 7. ja 8. klassi õpilastele. Peatükk "Tõenäosusteooria ja selle rakendamine" hõlmab 14 lehekülge ja kuna õpik on mõeldud kasutamiseks ka ülesannete koguna, siis sisaldab see osa rohkesti (72) ülesandeid. Peatükk jaguneb kaheks osaks: esimene osa - 9 lehekülge sisaldab 44 ülesannet klassikalise tõenäosuse arvutamiseks ja teine osa viiel leheküljel on toodud 28 ülesannet tõenäosusteooria rakendamise kohta elukindlustusküsimuste lahendamisel.

Teoreetiline osa piirdub vaadeldavas õpikus põhivalemite ja definitsioonide ning lühikese selgituse esitamisega nende juurde. Tutvustatakse sündmuse tõenäosust, vastandsündmuse tõenäosust ja antakse tõenäosuse rajad. Tõenäosuste liitmis- ja korrutamislausete juures rõhutatakse eriti sõnaühendeid "kas... või..." ja "nii... kui ka ..." . Vastavad valemid antakse rohkem kui kahe sündmuse korral eeldades, et sündmused on teineteist välistavad ning sõltumatud. Erinevalt eespool vaadeldud Soome õpikutest käsitletakse siin ka suurte arvude seadust.

Elukindlustusküsimustele pühendatud osas esitab autor mitmesuguseid kindlustuse liike: kapitalikindlustus õnnetusjuhtumite vastu, elukindlustus, segakindlustus. Vastavatest ülesannetest toome siinkohal näitena järgmise:

"Kui palju peab 45-aastane mees igal aastal tasuma, et 60.aastaseks saamisel, või kui ta sureb enne, siis pärijad saaksid kapitali 5oooo dollarit?" (Ül.866,lk.156).

Üheks Hollandi koolides kasutatavaks õpikuks on JAKOBS ,J. jt. "MODERNE WISKUNDE DEEL 8H". Vaatluse all olev õpik on määratud 8.klassile. Õpiku tõenäosusteooriat käsitlev osa (lk. 196-215.) on üles ehitatud hulga mõiste baasil ning sisaldab tõenäosusteooria elemente kuni tõenäosuste liitmise ja korrutamise lauseteni. Erinevalt eespool vaadeldud õpikutest kasutatakse siin hulga elementide arvu tähist : näiteks n (U) tähistab universaalses hulgas U olevate elementaarsündmuste arvu. Liitmise lause esitatakse vaadeldavas õpikus ainult teineteist välistavate sündmuste korral. Tõenäosusteooriat käsitlev peatükk lõpeb kokkuvõtliku leheküljega (lk.215) mis erineb teistest lehtedest värvi poolest ja millel on esitatud vaadeldud peatükis käsitletud tähtsamad valemid, mõisted ja definitsioonid.

Väga ulatuslikult ja täiesti uudselt käsitletakse tõenäosusteooria küsimusi Kanada keskkooli viimasele klassile määratud õpikus A.J. COLEMAN, jt. "ALGEBRA 13". Tõenäosusteooria osa hõlmab 40 lehekülge (lk. 127 -167). On esitatud rohkesti (91) ülesandeid. Teooria on rajatud täielikult hulga mõistele.

Käsitlus algab sündmuste täieliku süsteemi ehk nagu õpikus nimetatakse "katse koguruumi" tutvustamisega, kusjuures eriline tähelepanu on pööratud katseseeria koguruumile. Näite abil jõutakse tulemusele, et katseseeria koguruum on katseseeriasse kuuluvate katsete koguruumide ristkorrutis (lk.130). Sündmus defineeritakse koguruumi osahulgana (lk.134). Katseseeria illustreerimiseks kasutatakse loogiliste võimaluste puud. Sündmuste summa korral tutvustatakse nii teineteist välistavaid kui ka mittevälistavaid sündmusi ja esitatakse vastavad valemid sündmuste summa elementide arvu leidmiseks:

$$n(E_1 \cup E_2) = n(E_1) + n(E_2) - n(E_1 \cap E_2)$$

ning

$$n(E_1 \cup E_2) = n(E_1) + n(E_2) \quad \text{(lk. 135).}$$

Sündmuse vastandsündmust nimetatakse vaadeldavast õpikust täiendussündmuseks. Näiteks sündmused E ja E' on täiendsündmused, kui

$$E \cup E' = S \quad \text{JA} \quad E \cap E' = \phi ,$$

kus S tähistab katse koguruumi.

Sündmuste tõenäosuse mõisteni jõutakse näidete abil iseloomustades teda kolme põhikarakteristikuga:

(1) sündmuse tõenäosus on reaalarv 0 ja 1 vahel,

(2) kindla sündmuse tõenäosus on 1 ,

(3) kahe teineteist välistava sündmuse summa tõenäosus on võrdne mõlema sündmuse tõenäosuste summaga (lk.140). Kusjuures öeldakse, et need kolm karakteristikut võetakse tõenäosusteoorias kasutatavate rangete definitsioonide aluseks.

Omaette punkti moodustavad n.n. tõenäosuse omadused, kus siis nii sõnaliselt kui ka valemi kujul on esitatud üksteist välistavate ja mittevälistavate sündmuste summa tõenäosused, võrdvõimalike sündmuste tõenäosus, võimatu sündmuse ja täiend- ehk vastandsündmuse tõenäosused koos tõestustega.

Näiteks:

"Omadus 5 (täiendussündmuste tõenäosus).

$P(E') = 1 - P(E)$

Tõetus: $(E \cap E') = \phi$

$$1 = P(S) = P(E \cup E') = P(E) + P(E')$$
$$P(E') = 1 - P(E)$$

M.O.T.T" (lk.148).

Valemi sõltumatute sündmuste korrutise tõenäosuse arvutamiseks leitakse näite abil:

"Veeretatakse täringut ja visatakse münti. Milline on tõenäosus, et täringul tuleb vähemalt 3 silma ja mündil tuleb kull?" (näide 1, lk.154). Selle ülesande lahendamise tulemuseks ongi valem

$$P(A \cap B) = P(A) * P(B).$$

Edasi tuleb vaatluse alla binomiaalne jaotus ja tinglik tõenäosus. Tinglikku tõenäosust tähistatakse $P(A/B)$, kus B tähistab esiletulnud sündmust ja A soovitud sündmust. Tingliku tõenäosuse arvutamise valemiks on

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Tõenäosusteooria elementide käsitlus lõpeb kokkuvõtliku leheküljega (lk.167), kus on kirjas kõik eelnenud peatükis esitatud uued mõisted, omadused, definitsioonid ja põhivalemid. Selles Kanada kooliõpikus on hulga mõisteid kasutatud tõenäosusteooria elementide käsitlemisel senini vaadeldud õpikutest kõige enam ja ka ulatuselt ei saa teda võrrelda teistes õpikutes toodud käsitlustega.

II SOOVITUSI TÕENÄOSUSTEOORIA ELEMENTIDE KÄSITLEMISEKS KOOLIS

Teise koolimatemaatika reformi põhiülesannete elluviimisega tegelevad paljud kaasaja juhtivad matemaatikud. Nimetame siinkohal ungarlast T.Varga't ja belglast W.Servais'd, kes on koostanud katseõpikuid, korraldanud eksperimente ja selle põhjal esitanud soovitusi vastavate teemade käsitluse kohta koolis.

Soovitused tõenäosusteooria elementide käsitlemiseks Eesti NSV üldhariduslikes koolides on esitatud TRÜ õppejõu v.õp. K.Velskeri 1973.aastal kaitstud dissertatsioonis "Tõenäosusteooria ja matemaatilise statistika elementide käsitlemisest koolis ning õpilaste statistilise mõtlemisviisi arendamisest". Järgnevalt vaatlemegi, millised tõenäosusteooria õpetamist puudutavad küsimused on olnud päevakorras rahvusvahelistel nõupidamistel ja milliseid soovitusi ning näpunäiteid tõenäosusteooria elementide käsitlemiseks koolis annavad eelpool nimetatud matemaatikud.

2. 1. Rahvusvaheliste nõupidamiste seisukohti tõenäosusteooria elementide õpetamise kohta koolis

Eriti suur tähtsus koolimatemaatika reformi läbiviimisel on olnud rahvusvahelistel nõupidamistel, kus kavandati koolimatemaatika uuendamise suunad ja anti hinnangud uute teemade õpetamisele koolis. Mitmetel rahvusvahelistel kokkutulekutel on arutlusel olnud ka tõenäosusteooria õpetamine koolis.

Põhjalikumalt olid tõenäosusteooria õpetamise küsimused päevakorras 1959.aasta lõpul ROYAUMONT'is(Prantsusmaa) toimunud Euroopa Majandusühenduse poolt organiseeritud matemaatika õpetamise alasel seminaril. Seal soovitati alustada tõenäosusteooria küsimuste käsitlemisega juba keskkooli I astmes. Seal (11-15- aastased õpilased) pidi käsitlus algama katsete korraldamisega tõenäosusteooria põhiliste mõistete (sündmus, sündmuste süsteem, sündmuste tõenäosus) ja meetodite tundmaõppimiseks. Keskkooli II astme (15-18- aastased õpilased) programmis humanitaarharule nähti ette jätkata I astmes õpitut tõenäosusteooria teoreemidega ning lühidalt peatuda tõenäosusteooria aksiomaatikal, binomiaalsel jaotusel ja suurte arvude seadusel. Reaalharus pidid siia lisanduma veel aksiomaatika põhjalikum käsitlus ja tinglik tõenäosus.

Need kaks programmi said eeskujuks mitmetes maades koolimatemaatika programmide koostamisel. Tõenäosusteooria elementide käsitlemist koolis arutati ka paljudel järgmistel rahvusvahelistel nõupidamistel, nagu 1960.aastal KRAKOVIS toimunud XIV Rahvusvahelisel Matemaatikaõpetajate konverentsil, 1962.aastal matemaatikute rahvusvahelisel kongressil STOKHOLMIS, 1962.aastal BUDAPESTIS toimunud matemaatika õpetamise alasel rahvusvahelisel sümpoosionil ja 1963.aastal ATEENAS toimunud Euroopa Majandusühenduse maade matemaatika õpetamise alasel sessioonil.

Öeldust järeldub, et rahvusvahelises ulatuses peetakse tõenäosusteooria lülitamist koolimatemaatikasse väga vajalikuks.

2. 2. Ungari matemaatiku T.Varga soovitusi

Tomaš Varga on avaldanud mitmeid töid, kus ta esitab soovitusi muudatuste tegemiseks koolimatemaatikas, muuhulgas ka tõenäosusteooria elementide käsitlemiseks koolis ([9] , [12]).

T.Varga lükkab ümber arvamuse, et tõenäosusteooriat on võimalik õpetada ainult vanemates klassides. Ta rõhutab, et raskused tõenäosusteooria omandamisel tekivad just tänu sellele, et õpilastel puudub vajalik ettevalmistus noorematest klassides. Seepärast soovitabki ta alustada tõenäosusteooriale omase mõtlemisviisi arendamist juba esimesest klassist alates. Selle soovituse aluseks on Ungari koolides tehtud eksperimentide,millides mängude ja meelelahutuste kaudu loodi alus teaduslikule mõtlemisele, tulemused.

Esitame siinkohal kaks näidisülesannet, milliseid kasutati Ungari koolide eksperimentaalklassides tõenäosusteooriale omase mõtlemisviisi arendamiseks.

"Need neli kuulikest (võetakse 2 valget ja 2 sinist kuulikest) paneme mütsi sisse, segame hästi ja võtame siis kolm kuulikest.

1. Mis te arvate, kas nende kolme hulgas on siniseid kuulikesi? Kas võib-olla ja, või kindlasti ja?

2. Kas võib osutuda, et kolme kuuli hulgas on kolm sinist, s.t. et kõik kuulikesed on sinised?Kas kindlasti on nii, või kindlasti ei ole nii?

3. Aga kas võivad kolmest kuulikesest kaks olla sinised? Ei? Ja? Kas võib-olla ei, või kindlasti ei" ([12] , lk.94).

"Mitu kuuli pean ma võtma kolme rohelise, kolme valge ja kolme punase kuuli hulgast, et nende hulgas oleks kindlasti punane kuul?" ([12] , lk.95).

Õpilastelt nõuti oma vastuse põhjendamist . Nende ülesannete kaudu esitatavates loogilistes mängudes kõrvutatakse kaht väidet, kas "kindlasti ja kindlasti mitte" või "võimalik ja võimatu". Nii omandavad õpilased algmõisted tõenäosusteooriast ilma et nad tõenäosuse mõistet ennast veel tunneksid.

Soovitusi tõenäosusteooria elementide käsitlemiseks vanemates klassides annab T.Varga koos belglase W.Servais'iga raamatus "Teaching School Mathematiks" (lk.75-78). Tõenäosusteooria õpetamist soovitavad nad alustada sellest, et õpilased korraldavad täringu veeretamise, raha viskamise, jne. katseid, mis on aluseks tõenäosusteooria mudeli koostamisele. Nende katsete tulemuste hulgas elemente nimetatakse sündmusteks. Näiteks, kui me võtame mingi naturaalarvu 1 ja 100 vahel, siis võimalike tulemuste hulk on

$$\{u \in N : 0 < u \leq 100\}.$$

Tõenäosuse mõiste soovitavad autorid esitada järgmiselt: "Igale tulemusele u tulemuste hulgast Ω võime vastandada arvu P(u) nii, et

$$P(u) \geq 0 \quad \text{ja} \quad \sum_{u \in \Omega} P(u) = 1.$$

Neid arve nimetatakse elementaartõenäosusteks" ([9],lk76)

Mingi sündmuse A tõenäosuse defineeritakse siis järgmiselt:

"Sündmuse A tõenäosuseks P(A) on sündmuse A võimalike tulemuste hulka kuuluvate tulemuste elementaartõenäosuste summa, s.t.

$$P(A) = \sum_{u \in A} P(u)$$ " ([9], lk.77).

Selle valemi kaudu saab jõuda tõenäosuse klassikalise definitsiooni juurde arvestades, et tulemuste hulgas on n tulemust ja eeldades, et $P(u) = \frac{1}{n}$,

$$P(A) = \frac{\text{A tulemuste arv}}{\text{Kõikide võimaluste arv}}.$$

Sündmuste summa tõenäosuse soovitavad autorid kõigepealt esitada teineteist mittevälistavate sündmuste korral, siis

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

ja sama valemit kasutada ka teineteist välistavate sündmuste korral, s.t. kui $A \cap B = \emptyset$ ning siis

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

2. 3. Soovitused tõenäosusteooria elementide käsitlemise kohta Eesti NSV üldhariduslikes koolides

Tõenäosusteooria õpetamist eesti koolis on mõned aastakümned tagasi propageerinud akad. A. Humal ja prof.G.Rägo. Praegused seisukohad on kokku võtnud TRÜ v.-õp.K.VEISKER oma dissertatsioonis "TÕENÄOSUSTEOORIA JA MATEMAATILISE STATISTIKA ELEMENTIDE KÄSITLEMISEST KOOLIS NING ÕPILASTE STATISTILISE MÕTLEMISVIISI ARENDAMISEST".

Dissertatsioonis märgitakse, et matemaatilise statistika ja tõenäosusteooria elementide käsitlemise süsteem koolis tuleb üles ehitada nii, et põhimõisted (juhuslik sündmus ja juhuslik muutuja) läbiksid kogu koolimatemaatikat algkoolist keskkooli viimastesse klassidesse ulatuva teljena, mille ümber koonduvad kõik ülejäänud koolis käsitlemisele tulevad matemaatilise statistika ning tõenäosusteooria küsimused (lk.54).

1972.aastal ilmunud Eesti NSV koolide X klassi katseõpikus on tõenäosusteooria osa kirjutatud K.Velskeri poolt kooskõlas dissertatsioonis esitatud soovitustega. Siinkohal rõhutame üht olulist seni realiseerimata jäänud soovitust käsitleda VIII klassis teemat "Juhuslik sündmus ja selle tõenäosus". Lähtekohaks peaks olema tõenäosus, sest õpilased on juba tuttavad suhtelise sageduse mõistega. Nimetatud teema raames tutvuksid VIII klassi õpilased mõistetega, nagu juhuslik, kindel ja võimatu sündmus, statistiline tõenäosus, tõenäosuse rajad, vastandtõenäosus. Võrdvõimalikkude sündmuste tutvustamisele järgneks klassikalise tõenäosuse definitsioon, mille alusel peaksid õpilased lahendama rida ülesandeid.

Tõstame esile veel järgmisi soovitusi K.Velskeri dissertatsioonist (lk. 171-172):

1. Tõenäosusteooria ja matemaatilise statistika alane temaatika koolis peaks moodustama omaette terviku, mis kuulub I - X klassi matemaatikakursusesse.

2. Koolis tuleks tutvustada reaalsuse jaotumist lihtsuseks, organiseerimata keerukuseks ja organiseeritud keerukuseks. Tõenäosusteooria elementide käsitlemisel, eriti aga ülesannete lahendamisel, tuleks avardada õpilaste arusaamist reaalsuse olemusest organiseerimata keerukuse valdkonnas.

3. Tõenäosusteooria küsimuste käsitlemisel tuleks eriti silmas pidada statistilise mõtlemisviisi arendamist ning kasvatuslikke eesmärke. Viimastest olulisem on õpilaste marksistliku maailmavaate kujundamine.

4. Tuleks välja töötada tõenäosusteooria alane temaatika

fakultatiivkursuste jaoks, mis laiendaks vastava kohustusliku kursuse sisu ning arvestaks kohustuslikule kursusele seatud õppe-kasvatuslikke eesmärke ja ülesandeid.

III ÜHEST TÕENÄOSUSTEOORIA ELEMENTIDE KÄSITLEMISE VÕIMALUSEST KOOLIS HULGA MÕISTELE TUGINEDES

Kaasaja koolimatemaatika üheks põhisuunaks on rajada kogu esimesest viimase klassini käsitletav matemaatikakursus hulga mõistele. Selline koolimatemaatika ülesehitus seob eelkõige käsitletavad erinevad matemaatika distsipliinid ühtseks tervikuks ja võimaldab õpilastel ainet omandada kergemini, sest kogu koolikursuse jooksul korduvad ühed ja samad hulgateooria mõisted ja sümbolid.

Seda põhisuunda on arvestatud ka meil praegu koolides kasutusele võetud õpikute koostamisel, kuid siiski suhteliselt vähe. Nii kasutatakse X klassi õpikus esitatud tõenäosusteooria elementide käsitluses hulga mõistet ainult sündmuste täieliku süsteemi defineerimisel ([3] , lk. 312) ja kombinatsiooni mõiste selgitamise juures (samas, lk.320). Nagu näitavad aga käesoleva töö esimeses peatükis vaadeldud välismaa õpikud ([1] , [4] , [11]), on selle teema juures hulga mõistet võimalik kasutada palju suuremal määral.

Järgnevalt on esitatud üks tõenäosusteooria elementide käsitlus tuginedes hulga mõistele, kusjuures eeskujuks on olnud mõned välismaa õpikud ([1] , [4] , [11]) ja dots. O.Prinitsa käsikiri "Matemaatilise statistika ja tõenäosusteooria elemente keskkoolidele" (fakultatiivkursus).

3. 1. Sündmus. Universaalne hulk.

Raha viskamisel võib peale jääda kas vapp või kiri. Täringu viskamisel võib saada tulemuseks 1,2,3,4,5 või 6 silma. Nimetame raha ja täringu viskeid *katseteks*, katse tulemusi aga *sündmusteks*. Kõiki esile tulla võivaid sündmusi, milledest enam lihtsamaid sündmusi ei saa esile tulla, nimetatakse *elementaarsündmusteks*. Näiteks on raha viskel elementaarsündmusteks vapi või kirja esiletulek. Tähistame neid vastavalt tähtedega v ja k. Täringu viskel on elementaarsündmusteks kas 1,2,3,4,5 või 6 silma esiletulek. Tähistame neid elementaarsündmusi samade arvudega. Kõigi elementaar-sündmuste hulka nimetatakse *universaalseks hulgaks*. Universaalset hulka tähistame tähega U. Nii on raha viske korral

$$U = \{v, k\}$$

ja täringu viskamise puhul

$$U = \{1,2,3,4,5,6\}.$$

Sündmust, mis kindlasti peab esile tulema, nimetatakse *kindlaks* sündmuseks.

Näiteks, raha viskel - "tuleb kas vapp või kiri", täringu viskel - "tuleb silmade arv, mis on suurem kui 0 ja väiksem kui 7", on kindlad sündmused.

Sündmust, mille esiletulek ei ole võimalik, nimetatakse *võimatuks* sündmuseks. Näiteks on võimatuks sündmuseks: "raha viskel tuleb esile kell", "täringu viskel saame 7 silma".

Kõiki neid sündmusi, mis võivad esile tulla aga võivad ka mitte esile tulla, nimetatakse *juhuslikeks* sündmusteks.

Näiteks on juhuslikuks sündmuseks täringu viskel - "tuleb kaks silma" ja raha viskel - "tuleb vapp".

Igal sündmusel on oma tõehulk ,milleks on universaalse hulga osahulk. Tõehulk on nende elementaarsündmuste hulk, millisena vaadeldav sündmus võib esile tulla.

Raha viskel on $U = \{v, k\}$. Pärisosahulkadeks on siin $\{v\} \subset U$ ja $\{k\} \subset U$, mis on vastavalt juhuslike sündmuste "tuleb esile vapp" ja "tuleb esile kiri" tõehulkadeks. Hulk U on tõehulgaks kindlale sündmusele, Võimatu sündmuse tõehulgaks on aga tühihulk. Tähistame sündmust ja tema tõehulka ühe ja sama tähega. Näiteks , kui tähistada sündmust "täringu viskel tuleb esile paaritu arv silmi" tähega E, siis selle sündmuse tõehulk on

$$E = \{1, 3, 5\} \qquad \text{(joonis 1).}$$

Ühe ja sama tähe kasutamine sündmuse ja tema tõehulga tähistamiseks näitab, et me loeme sündmuse identseks oma tõehulgaga.

3. 2. Sündmuste summa

Olgu vaadeldavaks sündmuseks täringu viske tulemus. Tähistagu

A - sündmust "tuleb vähemalt 2 silma",

B - sündmust "tuleb 4 silma ",

C - sündmust "tuleb 3 või 4 silma ",

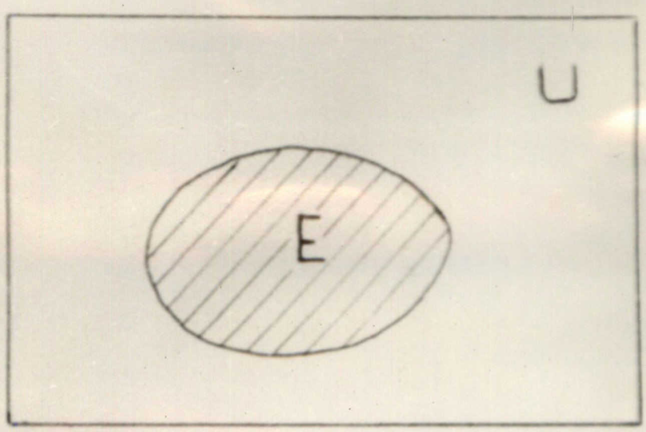
D - sündmust "tuleb vähem kui 4 silma",

E - sündmust "tuleb 3 silma ",

F - sündmust "tuleb 1 silm",

G - sündmust "tuleb paaritu arv silmi ",

U - sündmust "tuleb 1,2,3,4,5 või 6 silma ",



Joon. 1

Loetletud sündmuste tõehulgad on:

$A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{4\}$, $C = \{3, 4\}$,

$D = \{1, 2, 3\}$, $E = \{3\}$, $F = \{1\}$,

$G = \{1, 3, 5\}$, $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Vaatleme nüüd sündmust mille tõehulgaks on $E \cup B$. Et $E \cup B = C$, siis on hulgad $E \cup B$ ja C ühe ja sama sündmuse tõehulkadeks. Sellisel juhul sündmust C nimetatakse sündmuste E ja B <u>summaks</u>. Et me sündmuse loeme identseks oma tõehulgaga, siis sündmuste E ja B summa tähiseks on $E \cup B$, mida loeme "tuleb esile <u>kas</u> sündmus E <u>või</u> sündmus B".

Niisiis,

<u>kahe sündmuse summaks nimetatakse sündmust, mille tõehulgaks on antud kahe sündmuse tõehulkade ühend.</u>

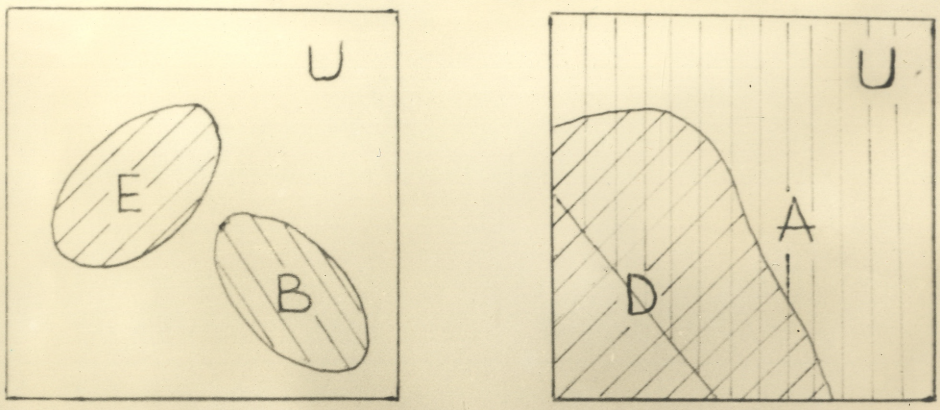
Vaatleme veel sündmuste A ja D summat.

Et $A \cup D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ja $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, siis $A \cup D = U$. Toodud näidete juures paneme tähele, et $E \cap B = \emptyset$ aga $A \cap D \neq \emptyset$ (joonis 2 a,b).

Sündmusi, mille tõehulkade ühisosa on tühihulk, nimetatakse <u>teineteist välistavateks</u> ja sündmusi, mille tõehulkade ühisosa ei ole tühihulk, nimetatakse <u>teineteist mittevälistavateks.</u> Teineteist välistavateks sündmusteks on seega näiteks E ja B , B ja C , C ja F ; teineteist mittevälistavateks aga näiteks B ja C, D ja E, F ja G.

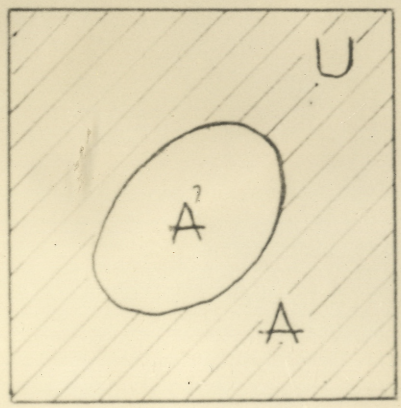
Kui kahe teineteist välistava sündmuse tõehulkade ühend on universaalne hulk, siis neid sündmusi nimetatakse <u>vastandsündmusteks.</u> Vastandsündmusi tähistame ülakomaga sündmuse tähise juures. Seega

$A' = F$, sest $A \cap F = \emptyset$ ja $A \cup F = U$ (joonis 3).



a) b)

Joon. 2



Joon. 3

Raha viskel on vapi esiletuleku vastandsündmuseks kirja esiletulek .

Et teineteist välistavate sündmuste tõehulkade ühisosa on tühihulk, siis nende summa tõhulgas on parajasti nii palju elemente, kui on neid liidetavate sündmuste tõehulkades kokku. Näiteks,

$$n(E \cup B) = n(E) + n(B) = n(C).$$

Teineteist mittevälistavate sündmuste puhul on aga sündmuste summa tõehulgas elemente vähem kui liidetavate sündmuste tõehulkades kokku. Näiteks,

$$n(A \cup D) < n(A) + n(D).$$

3. 3. Sündmuste korrutis

Rakendame nüüd sündmuste tõehulkade ühisosa leidmise operatsiooni. Vaatleme sündmust, mille tõehulgaks on $C \cap D$. Et $C \cap D = E$, siis on hulgad $C \cap D$ ja E ühe ja sama sündmuse tõehulkadeks. Sellisel juhul sündmust E nimetatakse sündmuste C ja D korrutiseks. Sündmuste C ja D korrutise tähiseks on $C \cap D$, mida loeme "tuleb esile nii sündmus C kui ka sündmus D".

Seega siis,

kahe sündmuse korrutiseks on sündmus, mille tõehulgaks on antud kahe sündmuse tõehulkade ühisosa.

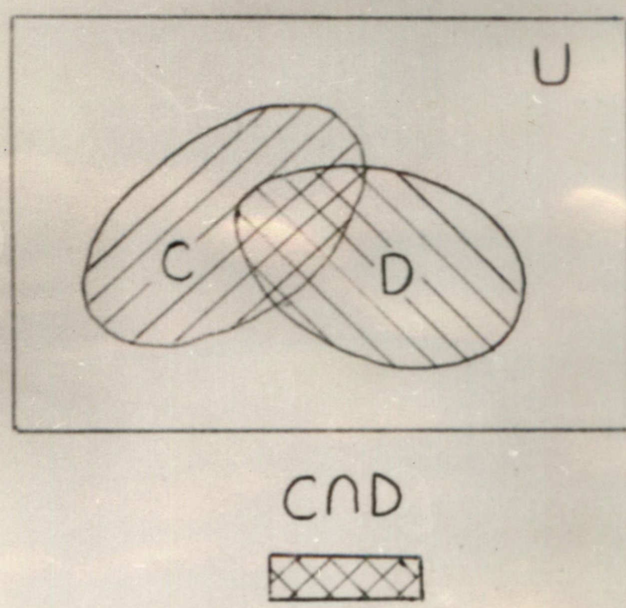
Sündmuste korrutist illustreerib joonis 4 .

N ä i t e i d :

1) $C \cap G = E$, sest $C \cap G = \{3\}$ ja $E = \{3\}$

2) $A \cap C = C$, sest $A \cap C = \{3, 4\}$ ja $C = \{3, 4\}$

3) $E \cap G = E$, sest $E \cap G = \{3\}$ ja $E = \{3\}$



Joon. 4

3. 4. Katseseeria

Sageli on meil tegemist mitte ühe vaid mitme kas järjestikku või üheaegselt sooritatud katsega, n.n. katseseeriaga, nagu näiteks raha viskamine kaks korda järjest, või kahe täringu samaaegne veeretamine. Neid katseid nimetame sõltumatuteks, sest ühe katse tulemused ei mõjuta teise katse tulemusi. Raha esimese viske tulemus ei mõjuta teise viske tulemust ja tulemus ühel täringul ei mõjuta tulemust teisel täringul. Vaatleme katseseeriat, mis seisneb raha kahes järjestikuses viskes. Nii esimese kui ka teise viske tulemuseks on vapp või kiri. Seega katseseeria jaoks on 4 võimalikku tulemust:

vapp-vapp, vapp-kiri, kiri-vapp, kiri-kiri.

Need sündmustepaarid on elementaarsündmusteks vastavale katseseeriale. Tähistades esitatud sündmustepaari vastavalt

$$(v;v),\ (v;k),\ (k;v),\ (k;k)$$

saame antud katseseeria jaoks universaalse hulga - tähistame ta $\mathcal{U}$

$$\mathcal{U} = \{(v;v),\ (v;k),\ (k;v),\ (k;k)\}.$$

Kahest katsest koosneva seeria puhul on elementaarsündmused esitatavad järjestatud paaridena, kolmest katsest koosneva seeria puhul järjestatud kolmikutena, jne.

Vaatleme hulka $U = \{v,k\}$ ning esitame selle hulga ristkorrutise iseendaga, saame

$$U \times U = \{(v;v),\ (v;k),\ (k;v),\ (k;k)\}.$$

Seega $\mathcal{U} = U \times U$.

See tähelepanek kehtib ka üldjuhul, niisiis:

<u>katseseeria universaalne hulk on üksikute katsete universaalsete hulkade ristkorrutis.</u>

Katseseeria elementaarsündmusi saab geomeetriliselt illustreerida n.n. <u>loogiliste võimaluste</u> "<u>puu</u>" abil (joonis 5). Selle "puu" iga tee esitab üht elementaarsündmust, nagu näiteks tee $v \to k \to (v; k)$, esitab sündmust "raha esimesel viskel tuleb esile vapp ja teisel viskel kiri".

Katseseeria tõehulgaks on universaalse hulga selline osahulk, mille iga element sisaldab meid huvitavat elementaarsündmust.

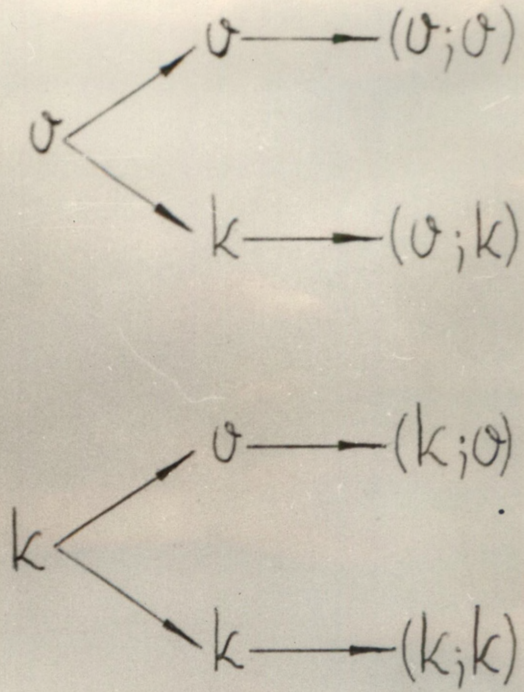
Näiteks tähistagu E sündmust "raha kahel järjestikusel viskel vähemalt ühel korral tuleb esile kiri". Selle sündmuse tõehulgaks on

$$E = \{(v;k),\ (k;v),\ (k;k)\}\ .$$

3. 5. <u>Sündmuste tõenäosus</u>

Elementaarsündmused loetakse <u>võrdvõimalikeks</u> kui antud tingimuste korral ei ole põhjust lugeda ühegi elementaarsündmuse esiletulekut enam võimalikuks kui teiste esiletulekut. Nii loeme raha viskel võrdvõimalikeks elementaarsündmusteks vapi ja kirja esiletulekuid, täringu veeretamisel silmade 1,2,3,4,5 või 6 esiletulekuid. Võrdvõimalikkuse tingimus ei ole aga täidetud juhul, kui täring on valmistatud nii, et ühe tahu pealejäämine on rohkem võimalik kui teiste tahkude pealejäämine.

Selleks, et uurida juhuslikku sündmust, seatakse talle vastavusse arv, n.n. <u>tõenäosus</u>, järgmiste tingimuste alusel:



Joon.5

1^{o} võrdvõimalikele elementaarsündmustele vastandatakse üks ja sama mittenegatiivne arv;

2^{o} universaalse hulga kõigile elementidele vastandatud arvude summa on 1 ;

Näiteks:

raha viskel on võrdvõimalikke elementaarsündmusi 2. Neile mõlemale vastandame arvu $\frac{1}{2}$. Täringu viskel on võrdvõimalikke elementaarsündmusi 6. Neile kõigile vastandame arvu $\frac{1}{6}$. Kui universaalses hulgas on n võrdvõimalikku elementaarsündmust, siis vastandame neile kõigile arvu $\frac{1}{n}$.

3^{o} Sündmuse **t õ e n ä o s u s e k s** on tema tõehulka kuuluvatele elementaarsündmustele vastandatud arvude summa.

Sündmuse tõenäosust tähistatakse P, mille järele sulgudesse märgitakse sündmuse tähis.

N ä i t e i d :

1. Leida tõenäosus selleks, et raha viskel tuleb esile vapp.

Tähistades sündmust "tuleb esile vapp" tähega M võime kirjutada

$$M = \{v\} \quad \text{ja} \quad P(M) = \frac{1}{2}$$

2. Eeldades täringu homogeensust leida tõenäosused punktis 3.2 toodud sündmustele C,F,G,U.

1) $P(C) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

2) $P(F) = \frac{1}{6}$

3) $P(G) = 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$

4) $P(U) = 6 \cdot \frac{1}{6} = 1$

Näidetes selgub, et sündmuse tõenäosuseks on sündmuse tõehulga elementide arvu m ja vastava universaalse hulga elementide arvu n suhe $\frac{m}{n}$.

Tõenäosuse definitsioonist järeldub:

1^0 kindla sündmuse tõenäosus on 1, s.t.

$$P(U) = 1 \; ; \quad (\text{v.t. tingimus } 2^0)$$

2^0 võimatu sündmuse tõenäosus on 0, s.t.

$$P(V) = 0;$$

3^0 Sündmuse ja tema vastandsündmuse tõenäosuse summa on 1, s.t.

$$P(A) + P(A') = 1, \text{ sest } A \cup A' = U$$
$$\text{ning } A \cap A' = \emptyset$$

siit saame onakorda, et

$$P(A') = 1 - P(A) .$$

Nendest järeldustest järeldub aga, et tõenäosus on arv 0 ja 1 vahel s.t. iga sündmuse L korral

$$0 \leq P(L) \leq 1 .$$

3. 6. Tinglik tõenäosus. Korrutise tõenäosus

Vaatleme veelkord täringuviset. Katse universaalseks hulgaks on

$$U = \{1,2,3,4,5,6\} .$$

Oletame nüüd, et katse toimus ja saime teada, et tulemuseks on paaritu arv, s.t. tuli esile sündmus G. Kui suur on nüüd tõenäosus, et tuli esile 3 silma, s.t. et esile tuli sündmus E ?

Nende sündmuste tõehulgad on

$$G = \{1,3,5\} ,$$
$$E = \{3\} .$$

Et sündmus G on esile tulnud, siis on ta kindel sündmus ja edasises arutelus tuleb hulka G vaadelda universaalse hulgana. Selle tagajärel tuleb ka elementaarsündmustele vastandada uus arv - $\frac{1}{3}$. Seega ka $P(E) = \frac{1}{3}$.

Et eristada sündmuse E esialgset tõenäosust viimasest tulemusest märgime esiletulnud sündmuse tähise indeksina tõenäosuse sümboli juurde. Niisiis,

$$P_G(E) = \frac{1}{3} \quad \text{aga} \quad P(E) = \frac{1}{6} .$$

Viimast tõenäosust $P_G(E)$ nimetatakse sündmuse E <u>tinglikuks tõenäosuseks</u> sündmuse G suhtes.

Leiame valemi tingliku tõenäosuse arvutamiseks.

Olgu katse universaalses hulgas n elementi, s.t. $n(U) = n$. Tähistame esiletulnud sündmuse L ja olgu $n(L) = m$. Meid huvitava sündmuse tähistame Q ja olgu $n(L \cap Q) = k$ (joonis 6). Vastavate sündmuste tõenäosused on siis

$$P(L) = \frac{m}{n}$$

$$P(L \cap Q) = \frac{k}{n},$$

et $P_L(L \cap Q) = P_L(Q) = \frac{k}{m}$, siis sellest võib järeldada, et

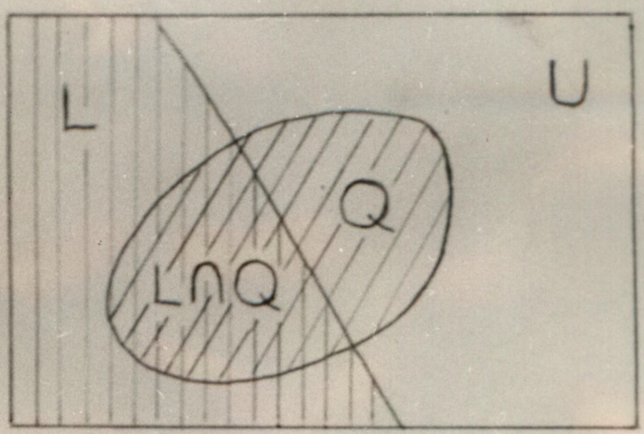
$$P_L(Q) = \frac{\frac{k}{n}}{\frac{m}{n}} = \frac{k}{m} = \frac{P(L \cap Q)}{P(L)}$$

Seega $\quad P_L(Q) = \frac{P(L \cap Q)}{P(L)}$

Avaldame saadud valemist $P(L \cap Q)$, s.t. kahe sündmuse <u>korrutise tõenäosuse</u>:

$$P(L \cap Q) = P_L(Q) \cdot P(L) .$$

Saimegi eeskirja kahe sündmuse korrutise tõenäosuse arvutamiseks.



Joon. 6

Punktis 3.3. esitatud kahe sündmuse korrutise tõenäosus on:

$$P(C) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P_C(D) = \frac{1}{3}\text{, seega } P(C \cap D) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

Kui sündmused L ja Q on sõltumatud, siis neist ühe sündmuse esiletulek ei mõjusta teise sündmuse esiletulekut, s.t, et

$$P_L(Q) = P(Q) \quad \text{ja } P_Q(L) = P(L)$$

ja sel juhul

$$P(L \cap Q) = P(L) \cdot P(Q).$$

N ä i d e :

Milline on tõenäosus selleks, et raha kahel järjestikusel viskel tulemuseks on (v; k) ?

Tähistagu N sündmust "tuleb esile kiri" ja M sündmust "tuleb esile vapp", siis

$$P(M \cap N) = P(M) \cdot P(N) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

3. 7. Tõenäosus katseseeria korral

Vaatleme katseseeriat, kus toimub kaks järjestikust raha viset. Seda katseseeriat illustreerib joonisel 5 esitatud loogiliste võimaluste puu. Katseseeria igat elementaarsündmust kirjeldab üks tee loogiliste võimaluste puus. Kuna katseseeria koosneb sõltumatutest katsetest, siis iga tee korral lülid kirjeldavad sõltumatuid sündmusi. Näiteks elementaarsündmust (k; v) kirjeldavas tees on sündmused "raha esimesel viskel tuleb esile kiri" ja "raha teisel viskel tuleb esile vapp" sõltumatud. Punktis 3.6. saadud eeskirja järgi sõltumatute sündmuste korrutise tõenäosus võrdub nende sündmuste tõenäosuste korrutisega. Seega,

<u>katseseeria iga elementaarsündmuse (tee) tõenäosus on määratud selle tee üksikutele lülidele vastavate tõenäosuste korrutisega</u>.

Nii on raha kahel järjestikusel viskel sündmuse (k; v) esiletuleku tõenäosus

$$P(N \cap M) = P(N) \cdot P(M)$$

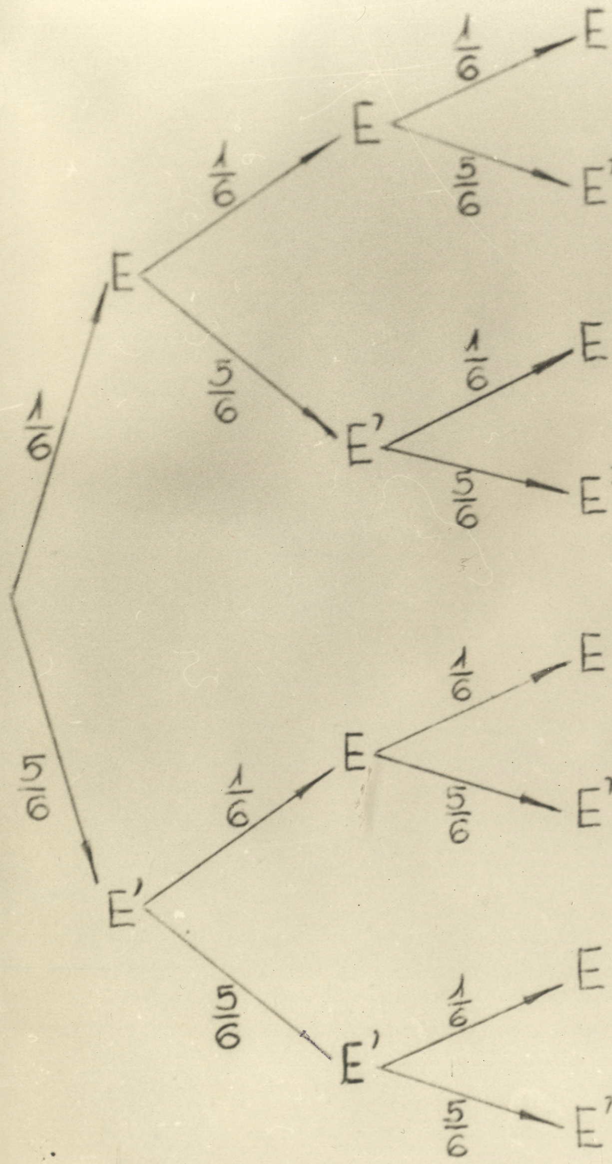
$$P(N \cap M) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} .$$

Vaatleme nüüd katseseeriat, mis koosneb täringu kolmest järjestikusest veeretamisest. Olgu meid huvitavaks sündmuseks 3 silma esiletulek 2 korda. Tähistame nimetatud sündmust tähega T . Kui suur on tõenäosus sündmuse T esiletulekuks?

Kuna täringu veeretamisel on kõikide silmade esile - tulekud võrdvõimalikud sündmused, siis vastavad tõenäosused on $\frac{1}{6}$. Tähistades sündmust "tuleb esile 3 silma" tähega E võime kirjutada, et $P(E) = \frac{1}{6}$. Nimetame meid huvitava sündmuse esiletulekut <u>õnnestumiseks</u>. Seega sündmuse E esiletulek on õnnestumine ja mitteesiletulek <u>ebaõnnestumine</u>. Et ebaõnnestumine on õnnestumise vastandsündmuseks, siis sündmuse E vastandsündmuse E' esiletuleku tõenäosus on

$$P(E') = 1 - P(E) \text{ , s.t. et } P(E') = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6} .$$

Täringu kolm järjestikust veeretamist on sõltumatud katsed ning seetõttu iga katse korral on õnnestumise tõenäosuseks $\frac{1}{6}$ ja ebaõnnestumise tõenäosuseks $\frac{5}{6}$. Antud katseseeria illustreerimiseks kasutame loogiliste võimaluste puud (joonis 7). Meid huvitava sündmuse T tõehulka kuuluvad need elementaarsündmused (teed), mis sisaldavad parajasti 2 õnnestumist. Nendeks teedeks on 2,3, ja 5.. Iga nimetatud tee esiletuleku tõenäosus on $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \approx 0{,}023$.



Tee nr.	Tõenäosus
1.	$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=0{,}005$
2.	$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=0{,}023$
3.	$\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}=0{,}023$
4.	$\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}=0{,}116$
5.	$\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=0{,}023$
6.	$\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=0{,}116$
7.	$\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}=0{,}116$
8.	$\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}=0{,}578$

Joon. 7

Kuna katseseeria elementaarsündmused on üksteist välistavad, siis sündmuse T tõenäosus võrdub tema tõehulka kuuluvate elementaarsündmuste tõenäosuste summaga, s.t. et

$$P(T) = 3 \cdot 0{,}23 = 0{,}069 .$$

Seega tõenäosus, et täringu kolmel järjestikusel viskel 2 korda tuleb esile 3 silma on 0,069.

Analoogiliselt saame arvutada tõenäosused 3 silma esiletulekuks vastavalt 3, 1, 0 korda.

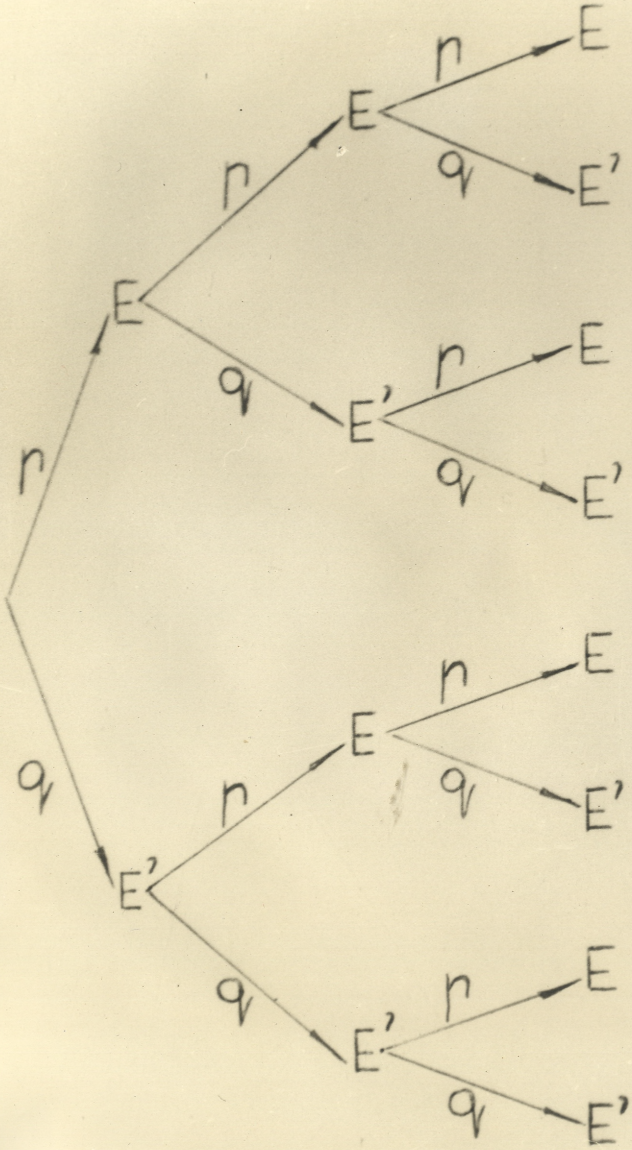
Esitame tulemused tabelis 1.

Õnnestumiste arv	3	2	1	0
Teed	1.	2., 3., 5.	4., 6., 7.	8.
Tõenäosus	0,005	3.0,023= = 0,069	3. 0,116= = 0,348	0,578

Tabel 1

Ülesande lahendamisel kasutatud mõttekäigu õigsust saame kontrollida arvestades, et katseseeria elementaarsündmuste summa on kindel sündmus ja seega peab nende elementaarsündmuste tõenäosuste summa olema võrdne 1-ga. Tõepoolest, 0,005 + 0,348 + 0,578 + 0,069 = 1 ja järelikult ülesande lahendus on õige.

Teeme viimati lahendatud ülesandest üldistuse tähistades õnnestumise tõenäosust tähega p ja ebaõnnestumise tõenäosust tähega q = 1-p. Katseseeriat illustreerib joonisel 8 esitatud loogiliste võimaluste puu. Analoogiliselt eelpool lahendatud ülesandega esitame ka siin tõenäosused vastavalt 3, 2, 1, ja 0 õnnestumiste kohta (v.t. tabel 2).



Tee nr.	Tõenäosus
1.	$p \cdot p \cdot p = p^3$
2.	$p \cdot p \cdot q = p^2 q$
3.	$p \cdot q \cdot p = p^2 q$
4.	$p \cdot q \cdot q = p q^2$
5.	$q \cdot p \cdot p = p^2 q$
6.	$q \cdot p \cdot q = p q^2$
7.	$q \cdot q \cdot p = p q^2$
8.	$q \cdot q \cdot q = q^3$

Joon. 8

Õnnestumiste arv	3	2	1	0
Teed	1.	2., 3., 5.	4., 6., 7.	8.
Tõenäosus	p^3	$3p^2q$	$3pq^2$	q^3

Tabel 2

Tabelist näeme, et leitud tõenäosused on kolmanda astme binoomi $(p + q)^3$ arendi

$$(p + q)^3 = p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3$$

liikmed. Seepärast öeldaksegi, et õnnestumiste arvud jaotuvad binomiaalselt. Saadud tulemus kehtib mistahes n katsest koosneva katseseeria korral.

Binoomi arendi liidetavate üldine kuju annab valemi n katsest koosnevas katseseerias õnnestumiste arvule $m \leq n$ vastava tõenäosuse arvutamiseks:

Tõenäosus selleks, et n katsest koosnevas katseseerias, kus iga katse korral õnnestumise tõenäosus on p ja ebaõnnestumise tõenäosus on $q = 1 - p$, esineb õnnestumisi parajasti m korda, on

$$C_n^m \, p^m \, q^{n-m} .$$

N ä i d e 1.

Malle peab sooritama VTK norme viiel alal. Igal alal on tal normi sooritamise tõenäosus $\frac{3}{5}$. Kui suur on tõenäosus, et Malle täidab normid neljal alal?

L a h e n d u s :

Iga üksiku ala korral loeme normi sooritamist õnnestumiseks ja mittesooritamist ebaõnnestumiseks. Vastavad tõenäosused on siis $p = \frac{3}{5}$ ja $q = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$.

Tõenäosus, et Malle täidab normid viiest alast neljal on siis

$$C_5^4\left(\frac{3}{5}\right)^4\cdot\left(\frac{2}{5}\right)=\frac{5!}{4!(5-4)!}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^4\cdot\frac{2}{5}=\frac{162}{625}=0{,}259.$$

V a s t u s : tõenäosus, et Malle täidab VTK normid viiest alast neljal on 0,259.

N ä i d e 2.

Kahte raha visatakse viis korda järjest. Kui suur on tõenäosus, et mõlemal rahal korraga tuleb kiri täpselt 3 korda esile?

L a h e n d u s :

Iga üksiku viske korral võimalikud tulemused on (v; v), (v; k), (k; v), (k; k). Meid huvitavaks sündmuseks on (k; k). Selle sündmuse tõenäosuseks on $p=\frac{1}{4}$, järelikult ebaõnnestumise tõenäosus $q=1-p=\frac{3}{4}$. Tõenäosus, et kolm korda esineb sündmus (k; k), on siis

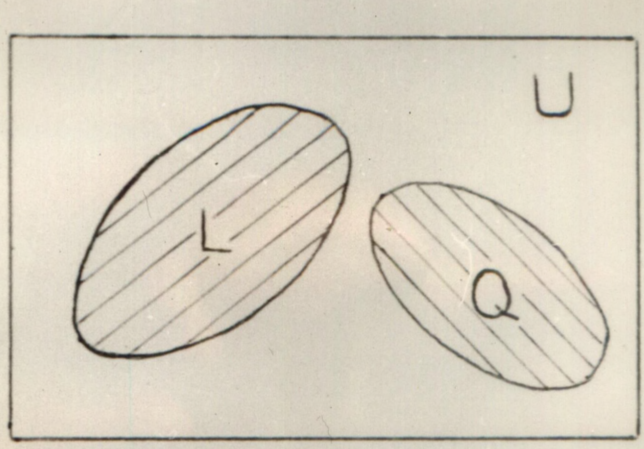
$$C_5^3\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{5!}{3!(5-3)!}\cdot\frac{1}{64}\cdot\frac{9}{16}=\frac{90}{64\cdot16}=0{,}088.$$

V a s t u s : tõenäosus selleks, et kahe raha viie järjestikuse viske puhul tuleb 3 korda korraga mõlemal rahal kiri, on 0,088.

3. 8. Summa tõenäosus

1) t e i n e t e i s t v ä l i s t a v a t e s ü n d m u s t e s u m m a t õ e n ä o s u s

Eeldame, et sündmused L ja Q on teineteist välistavad, s.t. $L\cap Q=\emptyset$ ja $L\subset U$, $Q\subset U$ (joonis 9).



Joon. 9

Olgu katse universaalses hulgas n elementi, s.t. $n(U) = n$ ja sündmuste L ja Q tõehulkades vastavalt $n(L) = m$ ja $n(Q) = l$ ning nende summas $n(L \cup Q) = k$. Vastavate sündmuste tõenäosused on siis

$$P(L) = \frac{m}{n}$$

$$P(Q) = \frac{l}{n} \text{ ja } P(L \cup Q) = \frac{k}{n}.$$

Et sündmused L ja Q on teineteist välistavad, siis $k = l + m$ ja

$$P(L \cup Q) = \frac{k}{n} = \frac{l+m}{n} = \frac{l}{n} + \frac{m}{n} = P(L) + P(Q),$$

niisiis

$$P(L \cup Q) = P(L) + P(Q).$$

<u>Teineteist välistavate sündmuste summa tõenäosus on võrdne liidetavate sündmuste tõenäosuste summaga.</u>

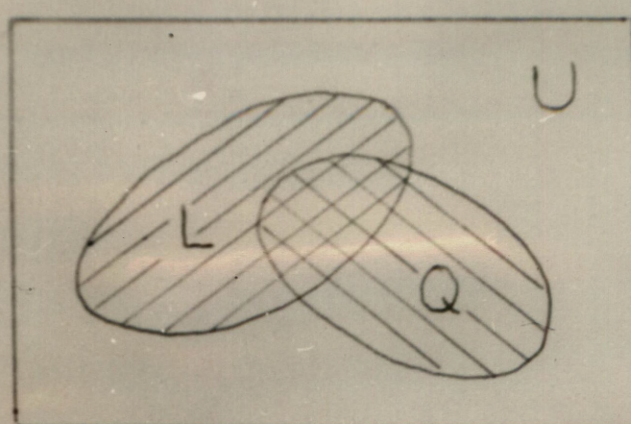
See omadus on üldistatav kolme, nelja, jne. üksteist välistava sündmuste summale:

$$P(A \cup B \cup \ldots \cup W) = P(A) + P(B) + \ldots + P(W).$$

Näiteks punktis 3.2. esitatud summa $E \cup B$ tõenäosus on: Et $P(E) = \frac{1}{6}$ ja $P(B) = \frac{1}{6}$, siis $P(E \cup B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

2) <u>t e i n e t e i s t m i t t e v ä l i s t a v a t e s ü n d m u s t e t õ e n ä o s u s</u>

Eeldame, et sündmused L ja Q on teineteist mittevälistavad, s.t. $L \cap Q \neq \emptyset$ ja $L \subset U$, $Q \subset U$ (joonis 10). Olgu jällegi katse universaalses hulgas n elementi – $n(U) = n$ ja vastavate sündmuste L ja Q tõehulkades $n(L) = m$ ja $n(Q) = k$. Et sündmused L ja Q on teineteist mittevälistavad, siis olgu $n(L \cap Q) = j$ ja sellisel juhul $n(L \cup Q) = k + m - j$.



Joon. 10

Vastavad tõenäosused on:

$$P(L) = \frac{m}{n}$$

$$P(Q) = \frac{k}{n}$$

$$P(L \cap Q) = \frac{i}{n}$$

$$P(L \cup Q) = \frac{k+m-i}{n} = \frac{k}{n} + \frac{m}{n} - \frac{i}{n} = P(Q) + P(L) - P(L \cap Q)$$

Seega:

$$P(L \cup Q) = P(Q) + P(L) - P(L \cap Q)$$

<u>Teineteist mittevälistavate sündmuste summa tõenäosus on võrdne liidetavate sündmuste tõenäosuste summaga, millest on lahutatud nende sündmuste korrutise tõenäosus.</u>

Näiteks punktis 3.2. esitatud sündmuste summa $A \cup D$ tõenäosus on:

$P(A) = \frac{5}{6}$, $P(D) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ ja $P(A \cap D) = \frac{5}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{3}$, siis

$$P(A \cup D) = \frac{5}{6} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{8-2}{6} = 1$$

Kuna teineteist välistavate sündmuste korral $L \cap Q = \emptyset$ ja $P(L \cap Q) = 0$, siis saame viimati leitud valemit kasutada ka teineteist välistavate sündmuste korral.

KOKKUVÕTE

Kokkuvõttes märgime:

1. Tõenäosusteooria osatähtsus kaasaegses teaduses ja majanduselus on nii suur, et tema elementide õpetamine koolis on muutunud hädavajalikuks.

2. Tõenäosusteooria elementide koolis õpetamise katseid on tehtud juba enam kui 50 aastat tagasi ka eesti koolis. Tookordsete käsitluste peasuund oli tutvustada kindlustuse olemust, võimalikkust ja otstarbekohasust.

3. Kaasajal on tõenäosusteooria rakendusala märksa avaram. Teiselt poolt on saanud hulga mõiste koolimatemaatika põhimõisteks, mistõttu tõenäosusteooria koolikäsitlus peab samuti tuginema hulga mõistele ja lahendatavate ülesannete valdkond peab puudutama mitmeid elualasid.

4. Tõenäosusteooria areng algas mängupõrgutest. Seetõttu on kõigis tõenäosusteooria õpikuis näidetena kasutatud kõige lihtsamaid mängude objekte: kaardid, täring, raha. Ka kaasaegses tõenäosusteooria kursuses on niisugused näited mõistete selgitamiseks just oma lihtsuse tõttu otstarbekohased.

5. Tõenäosusteooria elementide õpetamisega koolis seotud küsimusi on seni suhteliselt vähe uuritud. Üks põhjalikumaid sellealaseid uurimusi on TRÜ v.õp. K.Velskeri oma. Tema dissertatsioonis esitatud soovitused on väga tähelepanuväärsed ja ootavad realiseerimist (vt. lk. 31-33).

6. Eesti NSV koolides on tõenäosusteooria elementide käsitlus võetud X klassi kavva. Selles käsitluses on jäänud suhteliselt kõrvale hulga mõiste ning ülesannete hulk on mitte piisav. Terviklum on aga nimetatud ainelõigu käsitlus korrektne ja huvitav.

7. Tõenäosusteooria elementide mahtu on võimalik suurendada Eesti NSV koolides fakultatsiivkursuste jaoks ette nähtud tundide arvel. Selles suunas on ka Eesti NSV Haridusministeerium vajalikke samme astunud. Dots. O.Prinits ongi koostanud vastava fakultatsiivkursuse jaoks küllalt mahuka õpiku ja ka käesolevas töös on esitatud üks võimalik käsitlus.

KIRJANDUS

1. Odeman, A.J., Del Grande, J.J., Puff, G.P.D., Egsgard, J.C., Algebra 13. Toronto, 1966.
2. Ederberg, P., Algebra ülesannete kogu ja kokkuvõtlik käsiraamat III. Tallinn, 1924.
3. Etverk, E., Teeäär, M., Velsker, K., Matemaatika X klassile. Tallinn, 1972 .
4. Jakobs, J., Kneep, W.J., Krooshof, G., Muskens, M., Troelstra, R., Moderne Wiskunde Deel 8 h. Groningen, 1971.
5. Malinen, P., Tilastotieteen ja todenkäköisyyslaskennan alkeet. Helsinki, 1965.
6. Prinits, O., Matemaatilise statistika ja tõenäosusteooria elemente keskkoolidele. Fakultatiivkursus. Käsikiri.
7. Rosenberg, K., Methodisch geordnete Sammlung von Aufgaben aus der Arithmetik und Geometrie. Viin, 1972 .
8. Rägo, G., Matemaatika tööraamat keskkoolile. 5.klassi kursus, Tartu, 1932.
9. Servais, W., Varga, T., Teaching School Mathematics. Aylesbury, 1971.
10. Velsker, K., Tõenäosusteooria ja matemaatilise statistika elementide käsitlemisest koolis ning õpilaste statistilise mõtlemisviisi arendamisest, Dissertatsioon. Tartu, 1973.
11. Vilneius, S., Yrjönsuuri, R., Laine, Y., Koululaisen matematiikka 9. Helsinki, 1972.

12. Варга Т., Логика и теория вероятностей в младших классах средней школы."Математика в школе",1973, Нр.3, стр.91-96.

13. Гнеденко Б.О., О методах комбинаторики в теории вероятностей и математической статистики."Математика в школе",1966,Нр.5,стр.11-18.

14. Гнеденко Б.О.,Журбенко И.Т.,Теория вероятностей и комбинатерики."Математика в школе",1968,Нр.2,стр.72-84; Нр.3,стр.30-49.

15. Кемени,Дж.,Снелл,Дж.,Томпсон,Дж.,Введение в конечную математику. Москва,1963.

Р Е З Ю М Е

В настоящее время большое внимание уделяется возможности преподавания элементов теории вероятностей в средней школе.

В данной дипломной работе рассматриваются некоторые трактовки элементов теории вероятностей как в эстонской школе так и в некоторых зарубежных учебниках. Обращено внимание на мнение некоторых общеизвестных математиков, как акад. Б.О. Гнеденко, Т.Варга, В.Серве и др.

Работа состоит из трех глав. В первой главе дается анализ некоторых ранее использованных и современных учебников.

Во второй главе выдвигаются советы и мнения представленные на международных совещаниях и диссертациях в связи с обучением элементам теории вероятностей в школе.

Третья глава представляет одну возможную трактовку элементов теории вероятностей в школе основываясь на понятии множества.

SISUKORD

27. mai 1974. a.

Töö on kõlblik kaitsmisele lubamiseks

28. mai 1974. a