Tartu Ülikool
Matemaatika ja statistika instituut

Matemaatika eriala

Bakalaureusetöö (9 EAP)

Lokaalide korrutised

Oskar Soop

juhendaja
Ü. Reimaa

Tartu 2019

Lokaalide korrutised

Bakalaureusetöö

Oskar Soop

Lühikokkuvõte. Käesolevas bakalaureusetöös võetakse luubi alla topoloogilise ruumi analoog, lokaal, mis tekib, kui uurida lahtistele hulkadele omapäraseid võresid. Töös sõnastatakse ja tõestatakse mitmed lokaale puudutavad väited, leitakse korrutised, kokorrutised ning uuritakse topoloogiliste ruumide ja lokaalide vahekorda. Töö kulmineerub teoreemiga, mis annab piisavad tingimused lokaalse rühma ja topoloogilise rühma kokku langemiseks. Autor eeldab lugejalt varasemat kokkupuudet võre-, kategooriateooria ja üldise topoloogiaga.

CERCS teaduseriala: P120 Arvuteooria, väljateooria, algebraline geomeetria, algebra, rühmateooria.

Märksõnad. Topoloogia, võred, kategooriateooria

Products of locales

Bachelor's thesis

Oskar Soop

Abstract. Locales are generalization of topological spaces, which arise from the investigation of the lattice of open sets. The thesis gives an introduction to locales, by containing some basic statements with proofs, showing relation between topological spaces and locales, culminating with the theorem, which gives a sufficient condition for a topological group to match with a localic group. Author expects the reader to be sufficiently acquainted with the topics of general topology, lattice theory and category theory.

CERCS research specialisation: P120 Number theory, field theory, algebraic geometry, algebra, group theory.

Keywords. Topology, lattices, category theory

Sisukord

Sissejuhatus

Lokaal on sisult topoloogilise ruumi analoog, mis tekib kui uurida topoloogiliste ruumide lahtiste hulkade võresid. Lokaalide teooriat nimetatakse ka punktivabaks topoloogiaks, sest rolli mängib lahtiste hulkade vaheline struktuur, mitte hulgad koos nendesse kuuluvate punktidega. Lokaalide eelis tavalise topoloogia ees on eelkõige see, et paljud mittekonstruktiivsed teoreemid topoloogias saavad konstruktiivsema analoogi lokaalide teoorias. Isegi kui konstruktiivne matemaatika ei ole huvi all, leidub klassikalises matemaatikas olukordi, kus on kasu topoloogia arendamisest ilma välistatud kolmanda reegli ja valiku aksioomita. Niisuguseid näiteid võib leida algebralises geomeetrias rakendust leidvate toposte seast. Tegu pole ainsa võredel loodud topoloogia üldistusega. Näiteks saab tuua sisemistel algebratel [4] või ümbruste (pool-)võredel [5] põhinevad topoloogiliste ruumide üldistused.

Töö põhineb peamiselt J. Picado ja A. Pultr raamatul „Frames and Locales: Topology without points“, millest on võetud definitsioonid ning tulemused, kui just pole viidatud mõnele teisele teosele. Tõestused erinevad allikatest pärinevatest tõestustest, sest kasutatud definitsioonid varieeruvad, kuid on ekvivalentsed. Näiteks väldime filtri mõiste kasutamist.

Töös uuritakse topoloogiliste ruumide ja lokaalide vahekorda, milles on tähtis roll kainetel ruumidel. Konstrueeritakse lokaalide korrutised läbi sup-võrede tensorkorrutiste ning antakse piisavad tingimused lokaalilise rühma ning topoloogilise rühma kokku langemiseks. Autor eeldab lugejalt varasemat kokkupuudet võreteooria, kategooriateooria ja üldise topoloogiaga.

1 Võreteoreetilised eeldused

Selles peatükis defineerime tensorkorrutise sup-võrede kategoorias. Tensorkorrutist on meil vaja hiljem, et konstrueerida lokaalide korrutis. Konstruktsioon pärineb J. Picado ja A. Pultr artiklist „Notes on the product of locales“.

1.1 Täielikud ülemised poolvõred

Täielik ülemine poolvõre ehk **sup-võre** on osaliselt järjestatud hulk, kus igal alamhulgal on olemas ülemine raja. Võreteoorias on üldtuntud tulemus, et sup-võre on täielik võre, sest ülemine raja alumistest tõketest on alumine raja. Tähistame täielike ülemiste poolvõrede kategooriat lühendiga SupLat. Morfismid kategoorias SupLat on parajasti sellised funktsioonid, mis säilitavad ülemisi rajasid:

$$f\left(\bigvee_i x_i\right) = \bigvee_i f(x_i).$$

Erinevus täielike võrede kategooriaga on see, et kuigi morfismid säilitavad ülemisi rajasid, ei pruugi need säilitada alumisi rajasid.

1.1.1 Tensorkorrutis kategoorias SupLat

Olgu $(X, \leq)$ osaliselt järjestatud hulk ja $M \subset X$ mõni alamhulk. Defineerime funktori $D : \mathsf{Pos} \mapsto \mathsf{SupLat}$ osaliselt järjestatud hulkadest sup-võredesse järgmiselt:

$$D(X, \leq) = (\{M \subset X \mid {\downarrow}M = M\}, \subset),$$

kus ${\downarrow}M = \{x \mid \exists m \in M : x \leq m\}$.

Funktor D rakendub morfismile kanoonilisel viisil. Kui $f : X \to Y$ on järjestust säilitav morfism, siis $D(f)(M) = {\downarrow}\{f(x) \mid x \in M\}$.

Kontrollime, et funktor D tõepoolest kujutab järjestatud hulga sup-võreks. Iga $x, m \in X$ ja pere (M_i) korral, kus $M_i \in D(X)$, kehtib samaväärsus

$$x \leq m \in \bigcup_i M_i \iff \exists i : x \leq m \in M_i,$$

millest järeldub, et ${\downarrow}\bigcup_i M_i = \bigcup_i {\downarrow}M_i = \bigcup_i M_i$ ja seega on $D(X)$ sup-võre, kus ülemine raja on hulgateoreetiline ühend.

Lemma 1.1. *Olgu $\alpha : X \to D(X)$ selline, et $\alpha(x) = {\downarrow}\{x\}$. Siis α on monotoonne ja iga monotoonse funktsiooni $f : X \to Y$, kus X on järjestatud hulk ja Y on täielik võre, korral leidub täpselt üks sup-võrede homomorfism $f' : D(X) \to Y$ nii, et $f'\alpha = f$.*

Tõestus. Defineerime f' nii, et $f' : M \mapsto \bigvee_{m \in M} f(m)$. Paneme tähele, et $f(x) = \bigvee_{m \in {\downarrow}\{x\}} f(m)$ ja seega $f'\alpha = f$. Kui $M_i \in D(X)$, siis

$$f'\left(\bigcup_i M_i\right) = \bigvee_{m \in \bigcup_i M_i} f(m) = \bigvee_i \bigvee_{m \in M_i} f(m) = \bigvee_i f'(M_i).$$

Seega f' on selline sup-võrede homomorfism, et $f'\alpha = f$. Olgu $f'' : D(X) \to Y$ mõni teine sup-võrede morfism, mis rahuldab võrdust $f''\alpha = f$. Kuna $M \in D(X)$ on esitatav kujul $\bigcup\{{\downarrow}\{m\} \mid m \in M\}$, siis kehtib

$$f''(M) = f''\left(\bigvee_{m \in M} {\downarrow}\{m\}\right) = \bigvee_{m \in M} f''({\downarrow}\{m\}) = \bigvee_{m \in M} f(m) = f'(M),$$

millest näeme, et $f' = f''$. $\square$

Eelnev lemma ütleb, et $D(X)$ on vaba sup-võre järjestatud hulgal X.

Kongruents sup-võrel S on ekvivalentsiseos $R \subset S \times S$ nii, et

$$\forall i : a_i R b_i \implies \bigvee_i a_i R \bigvee_i b_i.$$

Olgu meil sup-võre S ja seos $R \subset S \times S$. Defineerime

$$\langle R \rangle = \bigcap \{ R' \mid R \subset R' \text{ ja } R' \text{ on kongruents} \}.$$

Ilmselt on $\langle R \rangle$ vähim seost R sisaldav kongruents. Tähistame $[b] = \{ a \in S \mid a \langle R \rangle b \}$ ja nimetame faktor-sup-võreks seosel R hulka $\{[b] \mid b \in S\}$ koos ülemiste rajadega $\bigvee [a_i] = [\bigvee a_i]$. Tähistame sellist faktor-sup-võret S/R.

Teoreem 1.2 (Homomorfismiteoreem)**.** *Olgu $f : X \to Y$ sup-võrede morfism ja R selline seos hulgal X, et $xRx' \Rightarrow f(x) = f(x')$. Siis leidub täpselt üks sup-võrede morfism $g : X/R \to Y$ nii, et $f = g\kappa$, kus $\kappa : X \to X/R$ on loomulik projektsioon.*

Tõestus. Kuna $R \subset \ker f$ ja $\ker f$ on kongruents, siis $\langle R \rangle \subset \ker f$. Defineerime morfismi g seosega $g(\kappa(x)) = f(x)$. Näeme, et g on korrektselt defineeritud, sest kui $\kappa(x) = \kappa(x')$, siis $(x, x') \in \langle R \rangle$ ja seega $f(x) = f(x')$.
Oletame, et leidub veel mõni morfism g' nii, et $g'\kappa = f$. Siis $g'(\kappa(x)) = g(\kappa(x))$. Kuna κ on sürjektiivne, siis $g' = g$. $\square$

Definitsioon. Olgu X_1,X_2 ja Y sup-võred. Kujutust $\phi : X_1 \times X_2 \to Y$ nimetatakse **bimorfismiks** kui iga $\phi(x_1, -) : X_2 \to Y$ ja $\phi(-, x_2) : X_1 \to Y$ korral on tegemist sup-võrede morfismiga.

Definitsioon. Iga objektipaari X_1, X_2 korral kategoorias SupLat konstrueerime **tensorkorrutise** $X_1 \otimes X_2$ kui $D(X \times Y)/R$, kus R on kõiksugused paarid kujul

$$\left(\downarrow\left\{\left(\bigvee a_i, b\right)\right\}, \bigcup \downarrow\{(a_i, b)\}\right) \text{ ja } \left(\downarrow\left\{\left(a, \bigvee b_i\right)\right\}, \bigcup \downarrow\{(a, b_i)\}\right).$$

Teoreem 1.3. *Olgu X_1, X_2 objektid kategoorias SupLat, $\alpha : X_1 \times X_2 \to D(X_1 \times X_2)$ selline morfism, et $\alpha(x_1, x_2) = \downarrow\{(x_1, x_2)\}$, ja $\kappa : D(X_1 \times X_2) \to X_1 \otimes X_2$ loomulik projektsioon. Siis kujutus $\kappa\alpha : X_1 \times X_2 \to X_1 \otimes X_2$ on bimorfism ja iga bimorfismi $\phi : X_1 \times X_2 \to Y$ korral leidub täpselt üks morfism $\phi'' : X_1 \otimes X_2 \to Y$ nii, et $\phi''\kappa\alpha = \phi$.*

$$\begin{tikzcd}
 & & X_1 \otimes X_2 \arrow[dd, dashed, "\phi''"] \\
 & D(X_1 \times X_2) \arrow[ur, "\kappa"] \arrow[dr, "\phi'"] & \\
X_1 \times X_2 \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[rr, "\phi"] & & Y
\end{tikzcd}$$

Tõestus. Bimorfism ϕ on monotoonne, sest kui $(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2)$, siis $x_1 \leq x_2$ ja $y_1 \leq y_2$, millest bimorfismi definitsiooni tõttu saame $\phi(x_1, y_1) \leq \phi(x_2, y_1) \leq \phi(x_2, y_2)$. Lemma 1.1 põhjal leidub täpselt üks sup-võrede homomorfism ϕ' nii, et $\phi = \phi'\alpha$. Kuna

$$\begin{aligned}
\phi'\left(\bigcup \downarrow\{(a_i, b)\}\right) &= \bigvee \phi'(\downarrow\{(a_i, b)\}) = \\
&= \bigvee \phi(a_i, b) = \phi\left(\bigvee a_i, b\right) = \phi'\left(\downarrow\left\{\left(\bigvee a_i, b\right)\right\}\right),
\end{aligned}$$

ja samamoodi $\phi'\left(\bigcup \downarrow\{(a, b_i)\}\right) = \phi'\left(\downarrow\{(a, \bigvee b_i)\}\right)$, siis sup-võrede homomorfismi teoreemi tõttu leidub üheselt ϕ'' nii, et $\phi''\kappa = \phi'$. Kuna ϕ' oli üheselt määratud, siis seega on ka ϕ'' üheselt määratud nii, et $\phi''\kappa\alpha = \phi'\alpha = \phi$. $\square$

Edaspidi tähistame $\kappa\alpha(a, b) = a \otimes b$.

Lause 1.4. *Iga $X_1 \otimes X_2$ element esitub kujul $\bigvee_{i\in I}(a_i \otimes b_i)$ mingi hulga I poolt indekseeritud elementide $a_i \in X_1$, $b_i \in X_2$ jaoks.*

Tõestus. Hulga $X_1 \otimes X_2$ element on ekvivalentsiklass $[M]$, kus $M \subset X_1 \times X_2$ ja $M = {\downarrow}M$. Paneme tähele, et $M = \bigcup_{m\in M} {\downarrow}\{m\}$. Seega iga $[M]$ korral kehtib

$$[M] = \left[\bigcup_{m\in M} {\downarrow}\{m\}\right] = \bigvee_{m\in M} [{\downarrow}\{m\}] = \bigvee_{m\in M} [{\downarrow}\{(a_m, b_m)\}] = \bigvee_{m\in M} a_m \otimes b_m,$$

kus $(a_m, b_m) = m$. $\square$

Alternatiivselt saab $X_1 \otimes X_2$ elementi W esitada kujul

$$W = \bigvee_{a\otimes b\leq W} a \otimes b.$$

Edaspidi kasutamegi just seda esitust.

2 Punktivaba topoloogia

Selles peatükis tutvume lokaalide teooriaga. Defineerime raamid ja lokaalid ning vaatame kahte loomulikul viisil saadud funktorit lokaalide ja topoloogiliste ruumide kategooriate vahel. Näitame, et tegu on üksteise kaasfunktoritega. Lõpuks leiame mõned piirid lokaalide kategoorias ning vaatame juhtu, mil teatud funktor säilitab korrutisi.

2.1 Raamid ja lokaalid

Olgu X topoloogiline ruum ning tähistagu $\Omega(X)$ ruumi X lahtiste alamhulkade võret. Tegemist on täieliku võrega, kus lõpmatu ülemraja kattub hulgateoreetilise ühendi operatsiooniga ja lõpmatu alamraja kattub ühisosast sisemuse võtmise operatsiooniga. Lisaks iga $a \in \Omega(X)$ ja $S \subset \Omega(X)$ korral rahuldab võre lõpmatut distributiivsusomadust:

$$a \wedge \bigvee S = \bigvee \{a \wedge s \mid s \in S\}. \tag{2.1}$$

Lisaks, kui $f : X \to Y$ on pidev kujutus, siis indutseeritud kujutus
$f^{-1} : \Omega(Y) \to \Omega(X)$ säilitab lõplikud alamrajad ning lõpmatud ülemrajad.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"] & \Omega(X) \\
Y \arrow[r, mapsto] & \Omega(Y) \arrow[u, "f^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

Eelnev mõttekäik annab põhjust uurida järgmisi võresid.

Definitsioon. Me nimetame **raamiks** (ingl. *frame*) täielikku võret, mis rahuldab distributiivsusomadust (2.1). Morfismideks raamide vahel on kujutused, mis säilitavad lõplikud alamrajad, lõpmatud ülemrajad ja seetõttu ka vähima ning suurima elemendi.

Paistab, et Ω on kontravariantne funktor raamide kategooriasse, mis seab eelpool mainitud viisil topoloogilisele ruumile X vastavusse raami $\Omega(X)$ ja pidevale funktsioonile f vastavusse originaali võtmise kujutuse f^{-1}. Funktori Ω kontravariantsuse tõttu on mõistlik ruumide üldistamise eesmärgil vaadata raamide kategooriale duaalset kategooriat.

Definitsioon. Me nimetame raamide kategooriaga duaalse kategooria objekti **lokaaliks** (ingl. *locale*).

Edaspidi tähistab topoloogiate, raamide ja lokaalide kategooriat vastavalt Top, Frm ja Loc ning vastavalt kontekstile tähistagu Ω funktorit topoloogilistest ruumidest raamidesse või topoloogilistest ruumidest lokaalidesse.

2.2 Punktid lokaalides

Ühepunktiline ruum on lõppobjekt T topoloogiate kategoorias Top. Punkti mõnes topoloogilise ruumis X võib vaadata kui pidevat kujutust $T \to X$. Kuna Boole'i algebra $\mathbf{2} = \{0, 1\}$ on isomorfne raamiga $\Omega(T)$ ning $\mathbf{2}$ on lõppobjekt kategoorias Loc, siis on loomulik defineerida punktid mõnes lokaalis L lokaalide morfismidena $\mathbf{2} \to L$.

Nüüd kui meil on olemas punktid, tekib küsimus kuidas indutseerida antud punktidele topoloogia. Selleks paneme tähele, et kui meil on topoloogilises ruumis X punkt $f_x : \{*\} \to X$, kus $x \in X$ ja $f_x(*) = x$, ja lahtine hulk

$U \subset X$, siis

$$x \in U \Leftrightarrow f_x^{-1}[U] = \{*\}.$$

Viimast üldistades raamide (ehk lahtiste hulkade võre) konteksti saame, et

$$\Sigma_a = \{h : L \to \mathbf{2} \mid h(a) = 1\}, \qquad a \in L$$

määrab lahtise hulga.

Ilmselt need hulgad rahuldavad ka topoloogia aksioome:

- $\Sigma_0 = \emptyset$, $\Sigma_1 = \{h : L \to \mathbf{2}\}$;
- $\Sigma_{a \wedge b} = \Sigma_a \cap \Sigma_b$;
- $\Sigma_{\bigvee a_i} = \bigcup \Sigma_{a_i}$.

Oleme saanud funktori $\mathsf{Pt} : \mathsf{Loc} \mapsto \mathsf{Top}$ nii, et iga raami L korral

$$\mathsf{Pt}(L) = (\{h : L \to \mathbf{2}\}, \{\Sigma_a \mid a \in L\}),$$

ja iga raamide morfismi $f : L \to M$ korral

$$\mathsf{Pt}(f)(h) = h \circ f.$$

Näeme, et $\mathsf{Pt}(f)$ on pidev, sest $\mathsf{Pt}(f)^{-1}[\Sigma_a] = \{h \mid h \circ f(a) = 1\} = \Sigma_{f(a)}$. Ilmselt rahuldab Pt ka funktori omadusi.

Näide: Kui meil on triviaalse ehk kodiskreetse topoloogiaga ruum X. Siis ainukesed lahtised hulgad on X ja $\emptyset$ ning vastav raam on $\Omega(X) \cong \mathbf{2}$. Mainitud raamile vastab ühepunktiline topoloogiline ruum $\mathsf{Pt}(\Omega(X)) \cong \{*\}$. Seega $X \ncong \mathsf{Pt}(\Omega(X))$, kui $|X| \neq 1$.

Tuleb välja, et topoloogiline ruum X on isomorfne ruumiga $\mathsf{Pt}\Omega(X)$ kui X on kaine.

2.3 Kained ruumid

Definitsioon. Ütleme, et võre element $a \neq 1$ on **alamraja-taandumatu**, kui kehtib

$$\forall x, y : \quad x \wedge y \leq a \Rightarrow x \leq a \text{ või } y \leq a.$$

Lause 2.1. *Olgu X topoloogiline ruum. Siis ruumi X lahtiste hulkade võres on hulk $X \setminus \overline{\{x\}}$ alamraja-taandumatu.*

Tõestus. Kui meil on lahtised hulgad U, V nii, et $U \cap V \subset X \setminus \overline{\{x\}}$, siis $x \notin U$ või $x \notin V$. Nüüd üldisust kaotamata eeldades, et $x \in X \setminus U$, saame, et $\overline{\{x\}} \subset X \setminus U$, sest $X \setminus U$ on kinnine, ja seega $U \subset X \setminus \overline{\{x\}}$. □

Definitsioon. Topoloogiline ruum X on $\boldsymbol{T_0}$, kui mistahes kaks erinevat punkti $x, y \in X$ on topoloogiliselt eristatavad. See tähendab, et punktil x leidub ümbrus O_x nii, et $y \notin O_x$ või punktil y leidub ümbrus O_y nii, et $x \notin O_y$.

Definitsioon. Topoloogiline ruum X on **kaine** kui ta on T_0 ja kõik alamraja-taandumatud lahtised hulgad on kujul $X \setminus \overline{\{x\}}$.

Eralduvusaksioom T_0 annab, et $X \setminus \overline{\{x\}} \neq X \setminus \overline{\{y\}}$ kui $x \neq y$.

Definitsioon. Topoloogiline ruum X on **Hausdorff** kui mistahes kahel erineval punktil $x, y \in X$ leiduvad punkti x ümbrus O_x ja punkti y ümbrus O_y nii, et $O_x \cap O_y = \emptyset$.

Lause 2.2. *Hausdorffi ruum on kaine.*

Tõestus. Oletame, et $U \subsetneq X$ on alamraja-taandumatu ja oletame, et leiduvad $x_1, x_2 \notin U$ nii, et $x_1 \neq x_2$. Hausdorffi eralduvusest saame, et leiduvad lõikumatud ümbrused $U_i \ni x_i$. Saame alamraja-taandumatusest, et

$$U_1 \cap U_2 = \emptyset \subset U \Rightarrow U_1 \subset U \text{ või } U_2 \subset U \Rightarrow x_1 \in U \text{ või } x_2 \in U,$$

mis annab vastuolu. Seega $X \setminus U = \{x\}$ mingi $x \in X$ korral. Hausdorffi eralduvus annab, et $\{x\} = \overline{\{x\}}$. □

Lause 2.3. *Iga raami F korral on $\mathsf{Pt}(F)$ kaine.*

Tõestus. Kui topoloogiline ruum $\mathsf{Pt}(F)$ on ühe punktiga või tühi, siis on tegu kaine ruumiga. Seega vaatame juhtumeid kui meil on vähemalt kaks punkti.
Esiteks tõestame, et $\mathsf{Pt}(F)$ on T_0.
Olgu $g, h \in \mathsf{Pt}(F)$ kaks sellist punkti, et $g \neq h$. Siis leidub selline $a \in F$, et $g(a) \neq h(a)$. Oletame üldisust kaotamata, et $g(a) = 1$. Siis $g \in \Sigma_a$ ja $h \notin \Sigma_a$ ehk punktid g, h on topoloogiliselt eristatavad.
Teiseks tõestame, et $\mathsf{Pt}(F)$ kõik alamraja-taandumatud lahtised hulgad on kujul $\mathsf{Pt}(F) \setminus \overline{\{h\}}$.
Olgu $U \subset \mathsf{Pt}(F)$ lahtine ja alamraja taandumatu. Tähistame

$Z = \{a \in F \mid \Sigma_a \subset U\}$ ning defineerime $p = \bigvee Z$. Kehtib $p \in Z$, kuna

$$\Sigma_p = \Sigma_{\bigvee Z} = \bigcup_{a \in Z} \Sigma_a \subset U.$$

Saame ka $U \subset \Sigma_p$, kuna $U = \Sigma_c$ mingi $c \in F$ jaoks, mistõttu $c \in Z$ ja seega kehtib $c \leq p$ ning $\Sigma_c \subset \Sigma_p$. Näitame, et p on alamraja-taandumatu. Olgu $p = s \wedge t$ mingite $s, t \in F$ korral. Siis ka

$$\Sigma_p = \Sigma_{s \wedge t} = \Sigma_s \cap \Sigma_t.$$

Kuna $\Sigma_p = U$ on alamraja-taandumatu, saame, kas $\Sigma_s \subset \Sigma_p$ või $\Sigma_t \subset \Sigma_p$. Oletame üldisust kaotamata, et $\Sigma_s \subset \Sigma_p = U$. Siis $s \in Z$, mistõttu $s \leq \bigvee Z = p$.

Defineerime $h : F \to 2$ seosega $h(a) = (a \nleq p)$-tõeväärtus. Funktsioon h on raamide morfism. Tõepoolest, funktsioon h säilitab lõpmatud ülemrajad

$$h(\bigvee_i a_i) = (\bigvee_i a_i) \nleq p \overset{(1)}{=} \bigvee_i (a_i \nleq p) = \bigvee_i h(a_i)$$

ning lõplikud alamrajad

$$h(a \wedge a') = (a \wedge a') \nleq p \overset{(2)}{=} (a \nleq p) \wedge (a' \nleq p) = h(a) \wedge h(a')$$

Võrdus (1) kehtib, sest $(\bigvee_i a_i) \leq p \iff \forall i : a_i \leq p$ ja võrdus (2) kehtib, sest $(a \wedge a') \leq p \iff (a \leq p$ või $a' \leq p)$.

Näitame, et $U = \mathsf{Pt}(F) \setminus \overline{\{h\}}$. Selleks piisab näidata, et $\mathsf{Pt}(F) \setminus U = \overline{\{h\}}$.

Esmalt paneme tähele, et

$$
\begin{aligned}
g \in \overline{\{h\}} &\iff (\forall a \in F : g \in \Sigma_a \Rightarrow h \in \Sigma_a) \\
&\iff (\forall a \in F : g(a) = 1 \Rightarrow h(a) = 1).
\end{aligned}
$$

Tõestame sisalduvusseose $\mathsf{Pt}(F) \setminus U \subset \overline{\{h\}}$. Olgu $g \in \mathsf{Pt}(F) \setminus U$ ning olgu $a \in F$ selline, et $g(a) = 1$. Siis $g \in \Sigma_a$ ja $g \notin U$, millest järeldub, et $a \notin Z$. Kuna kehtivad implikatsioonid

$$
\begin{aligned}
a' \leq p &\implies \forall g' \in \mathsf{Pt}(F) : g'(a') \leq g'(p) \\
&\implies \forall g' \in \Sigma_{a'} : g \in \Sigma_p \\
&\implies \Sigma_{a'} \subset \Sigma_p \\
&\implies a' \in Z \\
&\implies a' \leq p,
\end{aligned}
$$

siis kehtib samaväärsus

$$
a' \notin Z \iff a' \nleq p.
$$

Järeldame, et $h(a) = 1$ ning seega $g \in \overline{\{h\}}$.

Tõestame sisalduvusseose $\overline{\{h\}} \subset \mathsf{Pt}(F) \setminus U$. Olgu $g \in \overline{\{h\}}$. Siis morfismi h definitsioonist saame, et

$$
\begin{aligned}
g \in \overline{\{h\}} &\iff (\forall a \in F : g(a) = 1 \Rightarrow h(a) = 1) \\
&\iff (\forall a \in F : g(a) = 1 \Rightarrow a \not\leq p) \\
&\iff (\forall a \in F : g \in \Sigma_a \Rightarrow a \notin Z) \\
&\iff g \notin U.
\end{aligned}
$$

Oleme tõestanud, et kõik alamraja-taandumatud lahtised hulgad on kujul $\mathsf{Pt}(F) \setminus \overline{\{h\}}$. □

2.3.1 Adjunktsioon kategooriate Top ja Loc vahel

Segaduste vältimiseks toome peatüki siseselt kasutusele uued tähistused. Tähistame vastavate kategooriate vahelisi funktoreid järgmiselt: $\Omega : \mathsf{Top} \to \mathsf{Loc}$, $\Omega^F : \mathsf{Top} \to \mathsf{Frm}$ ja $\mathsf{Pt} : \mathsf{Frm} \to \mathsf{Top}$. Kui $f : F_1 \to F_2$ on raamide morfism, siis tähistagu $f_* : F_2 \to F_1$ duaalset morfismi lokaalide kategoorias.

Lause 2.4. *Olgu L raam. Siis $\phi_L : L \to \Omega^F(\mathsf{Pt}(L))$, kus $\phi_L(a) = \Sigma_a$ on raamide homomorfism ja ϕ_* on loomulik teisendus $\Omega\mathsf{Pt} \to \mathsf{Id}_{\mathsf{Loc}}$.*

Tõestus. See, et ϕ_L on homomorfism järeldub otse Σ omadustest. Näitame et ϕ_* on loomulik teisendus. Selleks vaatame duaalselt loomuliku teisendust $\phi : \mathsf{Id}_{\mathsf{Frm}} \to \Omega^F\mathsf{Pt}$. Olgu $f : L \to M$ raamide morfism. Peame näitama, et diagramm

$$
\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "\phi_L"] \arrow[d, "f"] & \Omega^F\mathsf{Pt}(L) \arrow[d, "\Omega^F\mathsf{Pt}(f)"] \\
M \arrow[r, "\phi_M"] & \Omega^F\mathsf{Pt}(M)
\end{tikzcd}
$$

kommuteerub. Selleks arvutame suvalise $a \in L$

$$\begin{aligned}\Omega^F(\mathsf{Pt}(f))(\phi_L(a)) &= \Omega^F(\mathsf{Pt}(f))(\Sigma_a) = \mathsf{Pt}(f)^{-1}(\Sigma_a) = \\ &= \{g : F \to 2 \mid gf \in \Sigma_a\} = \{g \mid g \in \Sigma_{f(a)}\} = \\ &= \Sigma_{f(a)} = \phi_M f(a).\end{aligned}$$

□

Lause 2.5. *Olgu X topoloogiline ruum ja olgu kujutus $\lambda_X : X \to \mathsf{Pt}(\Omega(X))$ defineeritud kui $\lambda_X(x) = I_x$, kus $I_x : \Omega(X) \to \mathbf{2}$ on*

$$I_x(U) = \begin{cases} 1, & x \in U \\ 0, & x \notin U. \end{cases}$$

Siis kehtivad väited

1. *λ_X on pidev*
2. *λ on loomulik teisendus $\mathsf{Id}_{\mathsf{Top}} \to \mathsf{Pt}\Omega$.*

Tõestus.

1. Kõik lahtised hulgad ruumis $\mathsf{Pt}\Omega(X)$ on kujul Σ_U, kus U on lahtine hulk ruumis X. Seega

$$\begin{aligned}\lambda_X^{-1}[\Sigma_U] &= \{x \in X \mid I_x \in \Sigma_U\} = \{x \in X \mid I_x(U) = 1\} = \\ &= \{x \in X \mid x \in U\} = U.\end{aligned}$$

2. Olgu $f : X \to Y$ pidev. Peame näitama, et diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\lambda_X"] \arrow[d, "f"] & \mathsf{Pt}\Omega(X) \arrow[d, "\mathsf{Pt}\Omega(f)"] \\ Y \arrow[r, "\lambda_Y"] & \mathsf{Pt}\Omega(Y) \end{tikzcd}$$

kommuteerub. Selleks arvutame iga $x \in X$ korral

$$(\mathsf{Pt}(\Omega(f))\lambda_X)(x) = \mathsf{Pt}(\Omega(f))(I_x) = I_x\Omega^F(f) \overset{(1)}{=} I_{f(x)} = \lambda_X f(x).$$

Võrduse (1) põhjendamiseks arvutame iga $U \in \Omega(X)$ korral

$$I_x\Omega^F(f)(U) = I_x f^{-1}[U] = I_{f(x)}(U),$$

kus viimane võrdus kehtib, sest

$$x \in f^{-1}[U] \iff f(x) \in U. \qquad \square$$

Definitsioon. Olgu $\mathcal{C}$ ja $\mathcal{D}$ kategooriad ja $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ja $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ funktorid. Me ütleme, et F on G vasakpoolne ja G on F parempoolne kaasfunktor, kui leiduvad loomulikud teisendused $\varepsilon : FG \to \mathsf{Id}_{\mathcal{C}}$ ja $\eta : \mathsf{Id}_{\mathcal{D}} \to GF$, mis rahuldavad kolmnurksamasusi. Viimane tähendab, et iga $A \in \mathcal{C}$ ja $B \in \mathcal{D}$

korral kolmnurgad

$$
\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "F(\eta_A)"] \arrow[dr, "1_{F(A)}"'] & FGF(A) \arrow[d, "\varepsilon_{F(A)}"] \\
& F(A)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
G(B) \arrow[r, "\eta_{G(B)}"] \arrow[dr, "1_{G(B)}"'] & GFG(B) \arrow[d, "G(\varepsilon_B)"] \\
& G(B)
\end{tikzcd}
$$

kommuteeruvad.

Teoreem 2.6. *Funktorid Ω ja Pt on kaasfunktorid nii, et Ω on vasakpoolne ja Pt on parempoolne kaasfunktor, kus adjuktsiooni ühikuks on $\lambda : \mathsf{Id}_{\mathsf{Top}} \to \mathsf{Pt}\Omega$ ja koühikuks $\phi_* : \Omega\mathsf{Pt} \to \mathsf{Id}_{\mathsf{Loc}}$.*

$$
\begin{tikzcd}
\mathsf{Loc} \arrow[r, bend left, "\mathsf{Pt}"] \arrow[r, phantom, "\top"] & \mathsf{Top} \arrow[l, bend left, "\Omega"]
\end{tikzcd}.
$$

Tõestus. Kontrollime kolmnurksamasusi. Olgu $h \in \mathsf{Pt}L$. Siis

$$
\mathsf{Pt}(\phi_{L*})\lambda_{\mathsf{Pt}L}(h) = \mathsf{Pt}(\phi_{L*})(I_h) \overset{(1)}{=} I_h\phi_L \overset{(2)}{=} h
$$

ja seega $\mathsf{Pt}(\phi_{L*})\lambda_{\mathsf{Pt}(L)} = 1_{\mathsf{Pt}(L)}$.

Võrdus (1) kehtib vastavalt läbi raamide defineeritud Pt definitsioonile.

Võrdus (2) kehtib, sest

$$
\forall a \in L : \quad I_h(\phi_L(a)) = I_h(\Sigma_a) = h(a),
$$

kus viimane võrdus kehtib, sest $h \in \Sigma_a \iff h(a) = 1$.

Näitame, et lokaalide kategoorias kehtib $\phi_{*\Omega(X)}\Omega(\lambda_X) = 1_{\Omega(X)}$ ehk duaalselt raamide kategoorias $\Omega^F(\lambda_X)\phi_{\Omega(X)} = 1_{\Omega^F(X)}$. Olgu $U \in \Omega(X)$ suvaline. Kehtib

$$\begin{aligned}\Omega^F(\lambda_X)\phi_{\Omega(X)}(U) = \Omega^F(\lambda_X)(\Sigma_U) &\overset{(1)}{=} \lambda_X^{-1}[\Sigma_U] = \\ &= \{x \in X \mid I_x \in \Sigma_U\} = \{x \in X \mid I_x(U) = 1\} = \\ &= \{x \in X \mid x \in U\} = U,\end{aligned}$$

kus (1) tuleb Ω definitsioonist. □

Definitsioon. Me ütleme, et raam F on **ruumiline**, kui leidub topoloogiline ruum X nii, et F on isomorfne raamiga $\Omega(X)$.

Lause 2.7. *Raami F jaoks on järgmised tingimused samaväärsed*

1. *F on ruumiline,*
2. *ϕ_F on järjestust peegeldav,*
3. *ϕ_F on pööratav.*

Tõestus.
(3. $\implies$ 1.) Kuna ϕ_F on isomorfism ruumi F ja $\Omega(\mathsf{Pt}(F))$ vahel ja $\mathsf{Pt}(F)$ on topoloogiline ruum, siis F on ruumiline.

(1. $\implies$ 2.) Näitamaks, et ϕ_F on järjestust peegeldav valime ühe X nii, et $F \cong \Omega(X)$. Näitame, et $\phi_{\Omega(X)}$ on järjestust peegeldav. Kolmnurksamasustest saame

$$\Omega^F(\lambda_X)\phi_{\Omega(X)} = 1_{\Omega^F(X)}.$$

Tegu on kahe järjestust säilitava morfismiga $g = \Omega^F(\lambda_X)$ ja $f = \phi_{\Omega(X)}$. Kuna

$gf = 1_{\Omega^F(X)}$, siis

$$f(a) \leq f(b) \implies gf(a) \leq gf(b) \implies a \leq b.$$

ehk f on järjestust peegeldav. Kuna $F \cong \Omega(X)$, siis leidub isomorfism $q : F \to \Omega(X)$. On teada, et isomorfismid säilitavad järjestusi. Kuna ϕ on loomulik teisendus, siis kehtib $\phi_{\Omega(X)} q = \Omega(\mathsf{Pt}(q))\phi_F$. Esitades ϕ_F teiste morfismide kaudu saame, et $\phi_F = \Omega(\mathsf{Pt}(q))^{-1}\phi_{\Omega(X)} q$ ja kuna kõik võrduse parempoolsed liikmed peegeldavad järjestust, peegeldab ka ϕ_F järjestust.

(2. $\implies$ 3.) Paneme tähele, et ϕ_F on sürjektiivne, sest topoloogilise ruumi $\mathsf{Pt}(F)$ lahtised hulgad ongi parajasti kujul Σ_a elementide $a \in F$ jaoks. Morfism ϕ_F on injektiivne, sest

$$\phi_F(a) = \phi_F(b) \implies \phi_F(a) \leq \phi_F(b) \leq \phi_F(a) \implies a \leq b \leq a \implies a = b.$$

□

Lause 2.8. *Morfism λ_X on homöomorfism parajasti siis, kui topoloogiline ruum X on kaine.*

Tõestus.

($\impliedby$) Näitame, et λ_X on sürjektiivne. Olgu meil antud üks punkt $(h : \Omega(X) \to 2) \in \mathsf{Pt}(\Omega(X))$. Vaatame hulka $W = \bigvee\{U \in \Omega(X) \mid h(U) = 0\}$. Paneme tähele, et $h(U) = 0 \iff U \subset W$ ja W on h poolt unikaalselt määratud. Näitame, et W on alamraja-taandumatu. Olgu $U, V \in \Omega(X)$ sellised, et $U \wedge V \leq W$. Kuna h säilitab lõplikke alumisi rajasid, siis $h(U) \wedge h(V) \leq h(W) = 0$, millest saame, et $h(U) = 0$ või $h(V) = 0$. Viimasest tuleneb, et $U \subset W$ või $V \subset W$. Seega W on alamraja-taandumatu ja kuna X on kaine, siis W on kujul $X \setminus \overline{\{x\}}$ mingi unikaalse $x \in X$ korral. Paneme tähele, et iga lahtise hulga $U \subset X$ korral kehtivad samaväärsused

$$\begin{aligned} I_x(U) = 0 \iff x \notin U \iff x \in X \setminus U \iff \\ \iff \overline{\{x\}} \subset X \setminus U \iff U \subset X \setminus \overline{\{x\}} = W \iff h(U) = 0, \end{aligned}$$

millest saame, et iga h jaoks leidub mõni x nii, et $I_x = h$.

Näitame, et λ_X on injektiivne. Olgu $x, y \in X$ nii, et $\lambda_X(x) = \lambda_X(y)$ ehk $I_x = I_y$. Viimane võrdus tähendab, et $\forall U \in \Omega(X) : (x \in U \iff y \in U)$. Teame, et omadusest T_0 järeldub, et kui $x \neq y$, siis ühel neist punktidest leidub lahtine ümbrus, mis teist punkti ei sisalda. Seega $x = y$.

Näitame, et λ_X pöördkujutus on pidev. Selleks piisab tõestada, et kujutus λ_X on lahtine. Olgu $U \in \Omega(X)$. Siis $\lambda_X[U] = \{I_x \mid x \in U\}$. Näitame, et

$$\{I_x \mid x \in U\} = \{h : \Omega(X) \to 2 \mid h(U) = 1\}.$$

Kuna λ on sürjektiivne, siis iga võrduse parempoolsest hulgast pärit h korral leidub x nii, et $I_x = h$. Kuna $h(U) = 1$, siis $I_x(U) = 1$ ehk $x \in U$. Teistpidi, kui $x \in U$, siis $I_x(U) = 1$ ja seega $I_x \in \{h : \Omega(X) \to 2 \mid h(U) = 1\}$. Saime, et $\lambda_X[U] = \{h : \Omega(X) \to 2 \mid h(U) = 1\} = \Sigma_U$ ja me teame, et Σ_U on lahtine hulk ruumis $\mathsf{Pt}(\Omega(X))$.

$(\implies)$ Teame lausest 2.3, et iga raami F korral on $\mathsf{Pt}(F)$ kaine. Kuna $\lambda_X : X \to \mathsf{Pt}\Omega(X)$, siis eelnimetatud lausest järeldub, et λ kujutub kainesse ruumi ja omakorda λ_X homöomorfismiks olemisest saame, et X on kaine. $\square$

Tähistagu SbTop kategooria Top täielikku alamkategooriat, mille objektideks on kained ruumid ja tähistagu SpLoc kategooria Frm täielikku alamkategooriat, mille objektideks on ruumilised raamid.

Teoreem 2.9. *Teoreemis 2.6 olev adjunktsioon ahendub kategooriate ekvivalentsiks*

$$\begin{tikzcd} \mathsf{SpLoc} \arrow[r, bend left, "\mathsf{Pt}"] \arrow[r, phantom, "\sim"] & \mathsf{SbTop} \arrow[l, bend left, "\Omega"] \end{tikzcd}.$$

kategooriate SpLoc *ja* SbTop *vahel.*

Tõestus. Tõepoolest, funktori Pt kujutis on kategoorias SbTop. Seda näitasime eelmise lause tõestuses. Ilmselt funktori Ω kujutis on kategoorias SpLoc. Ühik ja koühik ahenduvad loomulikeks teisendusteks ahendatud funktorite vahel. Eelmise kahe lause põhjal on need loomulikud isomorfismid. $\square$

2.4 Piirid ja kopiirid lokaalides

Selle alapeatüki põhitulemuseks on raamide kokorrutiste konstrueerimine. Lühidalt on juttu ka mõnedest teistest (ko)piiridest.

2.4.1 Alg- ja lõppobjekt kategoorias Frm

Algobjektiks on $\mathbf{2} = \{0_\mathbf{2}, 1_\mathbf{2}\}$, sest iga raami F korral leidub täpselt üks homomorfism $f : \mathbf{2} \to F$. Nimelt $f(0_\mathbf{2}) = 0_F$ ja $f(1_\mathbf{2}) = 1_F$.
Lõppobjektiks on $\mathbf{1} = \{0_\mathbf{1} = 1_\mathbf{1}\}$, sest iga raami F korral leidub täpselt üks homomorfism $f : F \to \mathbf{1}$. Nimelt $f(x) = 1_\mathbf{1}$.

2.4.2 Korrutised kategoorias Frm

Olgu $(L_i)_{i\in J}$ mittetühi raamide süsteem. Me anname otsekorrutisele

$$\prod_{i\in J} L_i$$

järjestatud hulga struktuuri

$$(x_i)_{i\in J} \leq (y_i)_{i\in J} \Leftrightarrow \forall i \in J : x_i \leq y_i.$$

Ilmselt on see punktiviisiliste rajade suhtes raam.
Projektsioonid

$$p_j = ((x_i)_{i\in J} \mapsto x_j) : \prod_{i\in J} L_i \to L_j$$

on raamide homomorfismid ja näeme, et iga raamide homomorfismide süsteemi $(h_j : M \to L_j)_{j\in J}$ korral leidub täpselt üks morfism $h : M \to \prod_{i\in J} L_i$ nii, et $\forall j \in J : p_j h = h_j$. Nimelt $h(x) = (h_j(x))_{j\in J}$.

2.4.3 Võrdsustajad kategoorias Frm

Olgu $h_1, h_2 : L \to M$ kaks raamide homomorfismi ja

$$E = \{x \in L \mid h_1(x) = h_2(x)\}.$$

Ilmselt E on alamraam ning sisestusel $j : E \to L$ on omadus, et kui mõne raamide homomorfismi $g : N \to L$ korral kehtib $h_1 g = h_2 g$, siis leidub täpselt üks homomorfism $\overline{g} : N \to E$ nii, et $j\overline{g} = g$. Nimelt $\overline{g}(y) = g(y)$.

2.4.4 Kokorrutised kategoorias Frm

Tuletame meelde, et $F_1 \otimes F_2 = D(F_1 \times F_2)/R$.

Lause 2.10. *Kui F_1, F_2 on raamid, siis nende tensorkorrutis $F_1 \otimes F_2$ sup-võredena on raam.*

Tõestus. Tõestatud artiklis [8] lausena 1. Artiklis on kasutatud teistsugust, kuid isomorfset tensorkorrutise konstruktsiooni. $\square$

Lemma 2.11. *Kui $W, V \in F_1 \otimes F_2$, siis*

$$W \wedge V = \bigvee_{\substack{a \otimes b \leq W \\ a' \otimes b' \leq V}} (a \wedge a') \otimes (b \wedge b').$$

Tõestus. Defineerime $F_1 \otimes F_2$ peale binaarse operatsiooni $\triangle$ järgmiselt:

$$W \triangle V = \left(\bigvee_{a \otimes b \leq W} a \otimes b \right) \triangle \left(\bigvee_{a' \otimes b' \leq V} a' \otimes b' \right) = \bigvee_{\substack{a \otimes b \leq W \\ a' \otimes b' \leq V}} (a \wedge a') \otimes (b \wedge b').$$

Esiteks paneme tähele, et $W \triangle W \geq W$.
Näitame, et $W \triangle V$ on V ja W alumine raja. Ilmselt kehtib $W \triangle V \leq V, W$, seega $W \triangle V$ on V, W alumine tõke. Olgu C mõni alumine tõke paarile V ja W. Siis $C \leq C \triangle C \leq W \triangle V$, kuna $\triangle$ on mõlemas argumendis järjestust säilitav. Seega ongi $\triangle$ võre $F_1 \otimes F_2$ alumise raja võtmise operatsioon. $\square$

Teoreem 2.12. *Kui F_1 ja F_2 on raamid, siis nende kokorrutis kategoorias* Frm *on $(F_1 \otimes F_2, \iota_1, \iota_2)$, kus $F_1 \otimes F_2$ on nende raamide tensorkorrutis sup-võrede kategoorias ning koprojektsioonid $\iota_i : F_i \to F_1 \otimes F_2$ on defineeritud, kui $\iota_1(x) = x \otimes 1$, $\iota_2(y) = 1 \otimes y$.*

Tõestus. Olgu meil raam C koos raamide homomorfismidega $s_i : F_i \to C$, $i = 1, 2$. Vaatame sellist morfismi $z' : F_1 \times F_2 \to C$, kus $z'(x, y) = s_1(x) \wedge s_2(y)$. Näeme, et tegu on bimorfismiga, sest

$$
\begin{aligned}
z'\left(\bigvee_i x_i, y\right) &= s_1\left(\bigvee_i x_i, y\right) \wedge s_2(y) = \\
&= \left(\bigvee_i s_1(x_i)\right) \wedge s_2(y) = \bigvee_i \left(s_1(x_i) \wedge s_2(y)\right) = \bigvee_i z'(x_i, y).
\end{aligned}
$$

Analoogiliselt saame näidata, et see z' on ka paremas muutujas sup-võrede morfism. Teoreemi 1.3 tõttu leidub bimorfismile z' vastav sup-võrede morfism $z : F_1 \otimes F_2 \to C$ nii, et $z(x \otimes y) = z'(x, y)$. Iga $x \in F_1$ korral kehtib võrdus

$$z\iota_1(x) = z(x \otimes 1) = s_1(x) \wedge s_2(1) = s_1(x) \wedge 1 = s_1(x).$$

Seega $z\iota_1 = s_1$ ning analoogiliselt $z\iota_2 = s_2$.

Näitame, et z on raamide homomorfism:

$$z\,(W \wedge V) = z\left(\bigvee_{a\otimes b\leq W} a\otimes b \wedge \bigvee_{c\otimes d\leq V} c\otimes d\right) = z\left(\bigvee_{\substack{a\otimes b\leq W\\ c\otimes d\leq V}} (a\wedge c)\otimes(b\wedge d)\right) =$$

$$= \bigvee_{\substack{a\otimes b\leq W\\ c\otimes d\leq V}} z((a\wedge c)\otimes(b\wedge d)) = \bigvee_{\substack{a\otimes b\leq W\\ c\otimes d\leq V}} s_1(a\wedge c)\wedge s_2(b\wedge d) =$$

$$= \bigvee_{\substack{a\otimes b\leq W\\ c\otimes d\leq V}} s_1(a)\wedge s_1(c)\wedge s_2(b)\wedge s_2(d) =$$

$$= \bigvee_{a\otimes b\leq W} (s_1(a)\wedge s_2(b))\wedge \bigvee_{c\otimes d\leq V} (s_1(c)\wedge s_2(d)) =$$

$$= \bigvee_{\substack{a\otimes b\leq W\\ c\otimes d\leq V}} (z(a\otimes b)\wedge z(b\otimes c)) =$$

$$= \bigvee_{a\otimes b\leq W} z(a\otimes b)\wedge \bigvee_{c\otimes d\leq V} z(c\otimes d) = z(W)\wedge z(V).$$

Viimaks näitame, et z on unikaalne. Olgu $s : F_1\otimes F_2 \to C$ selline, et $s_1 = s\iota_1$ ja $s_2 = s\iota_2$. Siis iga $a\in F_1$, $b\in F_2$ korral

$$s(a\otimes b) = s((a\otimes 1)\wedge(1\otimes b)) = s(a\otimes 1)\wedge(1\otimes b) =$$

$$= s\iota_1(a)\wedge s\iota_2(b) = s_1(a)\wedge s_2(b) = z'(a,b) = z(a\otimes b).$$

Seega peavad s ja z tensorkorrutise universaalomaduse põhjal kokku langema. Saime, et $(F_1\otimes F_2, z)$ on kokorrutis. $\square$

2.4.5 Lokaalide korrutise ja ruumide korrutise vahekord

Kuna funktor Pt on parempoolne kaasfunktor, siis ta säilitab korrutisi. Funktor Ω üldjuhul korrutisi ei säilita. Uurime juhtumeid, kus funktor Ω säilitab korrutisi.

Lause 2.13. *Kainete ruumide korrutis on kaine.*

Tõestus. Tõestatud raamatus [2, lk. 385]. $\square$

Lause 2.14. *Kui X_i on kained ruumid ja $\prod_i \Omega(X_i)$ on ruumiline lokaal, siis funktor $\Omega\colon \mathsf{Loc} \to \mathsf{Top}$ säilitab korrutise $\prod X_i$.*

Tõestus. Kuna eelduse põhjal kuulub korrutis $\prod_i \Omega(X_i)$ täielikku alamkategooriasse SpLoc, siis on see ka objektide $\Omega(X_i)$ korrutis selles alamkategoorias.
Lausest 2.13 saame, et kainete ruumide korrutis on kaine ja teoreemi 2.9 põhjal funktor $\Omega : \mathsf{SbTop} \to \mathsf{SpLoc}$ on ekvivalentsifunktor ning seega säilitab korrutisi. $\square$

2.5 Pidevad raamid

Definitsioon. Me ütleme, et osaliselt järjestatud hulk D on suunatud, kui $\forall a, b : \exists c : a \leq c, b \leq c$, ehk igal kahel elemendil leidub ülemine tõke.

Definitsioon. Olgu L osaliselt järjestatud hulk, kus igal suunatud alamhulgal on ülemine raja. Me ütleme, et element a on **tunduvalt madalam** kui b ehk $a \ll b$, kui iga suunatud alamhulga $D \subset L$ korral kehtib

$$b \leq \mathbf{sup} D \Rightarrow \exists d \in D : a \leq d.$$

Lause 2.15. *Võrede kontekstis saab viimase definitsiooni ümberformuleerida kujule: a on tunduvalt madalam kui b, kui iga alamhulga A korral kehtib*

$$b \leq \bigvee A \Rightarrow \exists(\textit{lõplik } F \subset A) : a \leq \bigvee F.$$

Tõestus. Olgu a tunduvalt madalam kui b osaliselt järjestatud hulga mõttes. Vaatame hulka $D = \{\bigvee F \mid F \subset A \text{ on lõplik}\}$. Hulk D on suunatud ning $\bigvee A = \bigvee D$. Saame, et

$$b \leq \bigvee A \Rightarrow b \leq \mathbf{sup} D \Rightarrow \exists d \in D : a \leq d \Rightarrow \exists(\text{lõplik } F \subset A) : a \leq \bigvee F.$$

Näitame teistpidist järeldumist. Ilmselt kehtib

$$b \leq \mathbf{sup} D \Leftrightarrow b \leq \bigvee D \Rightarrow \exists(\text{lõplik } F \subset D) : a \leq \bigvee F.$$

Paneme tähele, et suundatud hulgas D leidub igal lõplikul alamhulgal F hulka D kuuluv ülemine tõke d. Seega

$$\exists(\text{lõplik } F \subset D) : a \leq \bigvee F \Rightarrow \exists d \in D : a \leq \bigvee D \leq d. \qquad \square$$

Definitsioon. Raam L on pidev, kui iga $a \in L$ korral kehtib

$$a = \bigvee \{x \mid x \ll a\}.$$

Definitsioon. Topoloogiline ruum X on lokaalselt kompaktne kui iga punkti $x \in X$ ümbrus sisaldab kompaktset punkti x ümbrust.

Lause 2.16. *Kui X on lokaalselt kompaktne topoloogiline ruum, siis raam*

$\Omega(X)$ *on pidev.*

Tõestus. Olgu $U \subset X$ lahtine hulk ning $x \in U$. Lokaalse kompaktsuse tõttu leidub kompaktne hulk K ja lahtine hulk V_x nii, et $x \in V_x \subset K \subset U$. Siis K kompaktsuse tõttu leidub igal hulga U lahtisel kattel A lõplik hulka V_x kattev alamkate $F \subset A$. Pannes viimase lause võrede keelde saame, et

$$U \subset \bigvee A \Rightarrow \exists(\text{lõplik } F \subset A) : V_x \subset \bigvee F$$

ehk $V_x \ll U$ ja seega on $\Omega(X)$ pidev, sest $U = \bigcup\{V_x \mid x \in U\}$. $\square$

Järgnevas arvutame lokaalide F_1, F_2 korrutise $F_1 \otimes F_2$ punktidega. Kasutades raamide kokorrutise universaalomadust, saame bijektsiooni punktide

$$h : F_1 \otimes F_2 \to \mathbf{2}$$

ja punktipaaride

$$h_1 : F_1 \to \mathbf{2}, \quad h_2 : F_2 \to \mathbf{2}$$

vahel. Paarile h_1, h_2 vastavat punkti h tähistame kui (h_1, h_2). Siis $h(a \otimes b) = h_1(a) \wedge h_2(b)$ ning $h_i = h\iota_i$.

Lause 2.17 ([3, lk. 716])**.** *Olgu F_1 ja F_2 ruumilised lokaalid nii, et F_1 on pidev. Siis lokaalide korrutis $F_1 \times F_2$ on ruumiline.*

Tõestus. Kuna $\phi_{F_1 \otimes F_2}$ on alati sürjektiivne, siis selle pööratavuse tõestamiseks piisab näidata, et $\phi_{F_1 \otimes F_2}$ on järjestust peegeldav.
Olgu $W, W' \in F_1 \otimes F_2$ sellised, et $\phi_{F_1 \otimes F_2}(W) \leq \phi_{F_1 \otimes F_2}(W')$. Näitame, et

$W \leq W'$. Kuna

$$W = \bigvee_{a \otimes b \leq W} a \otimes b \qquad \text{ja} \qquad W' = \bigvee_{a \otimes b \leq W'} a \otimes b,$$

piisab, kui tõestame, et $a \otimes b \leq W \Rightarrow a \otimes b \leq W'$.

Suvalise elemendi $b' \in F_2$ jaoks defineerime

$$a_{b'} = \bigvee \{a' \in F_1 \mid a' \otimes b' \leq W'\}$$

ning iga punkti $g \in \Sigma_b$ korral defineerime

$$a_g = \bigvee \{a_{b'} \mid b' \in F_2, g \in \Sigma_{b'}\}.$$

Olgu $h \in \Sigma_{a \otimes b} = \phi_{F_1 \otimes F_2}(a \otimes b)$ suvaline. Ilmselt $h \in \Sigma_{a \otimes b} \subseteq \Sigma_W \subseteq \Sigma_{W'}$. Kuna

$$1 = h(W') = h\left(\bigvee_{a' \otimes b' \leq W'} a' \otimes b'\right) = \bigvee_{a' \otimes b' \leq W'} h(a' \otimes b'),$$

siis peab leiduma $a'' \in F_1$ ja $b'' \in F_2$ nii, et $a'' \otimes b'' \leq W'$ ja $h(a'' \otimes b'') = 1$. Kuna $h(a'' \otimes b'') = h_1(a'') \wedge h_2(b'')$, siis ka $h_1(a'') = h_2(b'') = 1$. Kehtivad kuuluvused

$$a'' \in \{a' \in F_1 \mid a' \otimes b'' \leq W'\} \qquad \text{ja} \qquad a_{b''} \in \{a_{b'} \mid b' \in F_2, h_2 \in \Sigma_{b'}\}.$$

Seega $h_1(a_{h_2}) \geq h_1(a_{b'}) \geq h_1(a'') = 1$ ehk $h_1 \in \Sigma_{a_{h_2}}$.

Olgu $g \in \Sigma_b$ suvaline. Näitame, et $\phi_{F_1}(a) \leq \phi_{F_1}(a_g)$.

Selleks võtame suvalise $k \in \Sigma_a$. Kasutades eelnevat arutelu, võttes $h = (k, g)$, saame, et $k \in \Sigma_{a_g}$.
Lokaal F_1 on ruumiline, mistõttu lause 2.7 põhjal on ϕ_{F_1} järjestust peegeldav. Seega kehtib $a \leq a_g$.
Olgu a' suvaline F_1 element nii, et $a' \ll a$. Kuna $a \leq a_g$, siis on $a' \ll a_g$. Veendume, et hulk $\{a_{b'} \mid b' \in F_2, g \in \Sigma_{b'}\}$ on suunatud. Selleks paneme tähele, et kui meil mainitud hulgas on $a_{b'}, a_{b''}$, siis sellest, et $g \in \Sigma_{b'}$ ja $g \in \Sigma_{b''}$ järeldub, et $g \in \Sigma_{b' \wedge b''}$. Näeme, et kehtib sisalduvusseos

$$\{a' \in F_1 \mid a' \otimes b' \leq W'\} \subset \{a' \in F_1 \mid a' \otimes (b' \wedge b'') \leq W'\}$$

ja seega $a_{b'} \leq a_{b' \wedge b''}$. Analoogselt saame, et $a_{b'} \leq a_{b' \wedge b''}$. Nüüd, kus meil on suunatud hulk raamis F_1, saame tunduvalt madalama seosest, et leidub $b' \in F_2$ nii, et $a' \leq a_{b'}$, $g \in \Sigma_{b'}$ ja $a' \otimes b' \leq W'$.
Oleme näidanud, et kui $a' \ll a$, siis iga $g \in \Sigma_b$ korral leidub $b'_g \in F_2$ nii, et $g \in \Sigma_{b'_g}$ ja $a' \otimes b' \leq W'$.

Näitame, et $\phi_{F_2}(b) \leq \phi_{F_2}(\bigvee_{g \in \Sigma_b} b'_g)$. Olgu $g' \in \Sigma_b$. Siis

$$g'\left(\bigvee_{g \in \Sigma_b} b'_g\right) \geq g'(b'_g) = 1.$$

Lokaali F_2 ruumilisusest saame, et $b \leq \bigvee_{g \in \Sigma_b} b'_g$. Seega kehtib

$$a' \otimes b \leq a \otimes \bigvee_{g \in \Sigma_b} b'_g = \bigvee_{g \in \Sigma_b} (a' \otimes b'_g) \leq W'.$$

Kuna F_1 on pidev, siis $a = \bigvee_{a' \ll a} a'$. Lõpuks saamegi otsitava võrratuse $a \otimes b = \bigvee_{a' \ll a} a' \otimes b \leq W'$. $\square$

Olgu $\mathsf{LCSobTop}$ lokaalselt kompaktsete kainete ruumide kategooria.

Teoreem 2.18. *Funktor* $\Omega : \mathsf{LCSobTop} \to \mathsf{Loc}$ *säilitab korrutisi.*

Tõestus. Esiteks kasutame teadmist, et lokaalselt kompaktsete ruumide korrutis on lokaalselt kompaktne ning lause 2.13 põhjal on kainete ruumide korrutis kaine. Seega langevad korrutised kategooriates Top ja $\mathsf{LCSobTop}$ kokku. Olgu X_1 ja X_2 lokaalselt kompaktsed kained ruumid. Lausest 2.17 saame, et $\Omega(X_1) \times \Omega(X_2)$ on ruumiline. Järeldame lausest 2.14, et Ω säilitab korrutisi. $\square$

3 Lokaalilised rühmad

Selle peatüki eesmärk on tutvustada üht näidet, kus saab rakendada teoreemi 2.18. Peatüki üldisemad väited on elementaarsed tulemused kategooriateoreetilises universaalalgebras [1] ja me jätame need põhjendamata.

3.1 Lokaaliline rühm

Olgu kategooria $\mathcal{C}$ lõplike korrutistega. Siis **rühma objekt** ehk **sisemine rühm** kategoorias $\mathcal{C}$, on objekt G koos morfismidega

$$e : 1 \to G$$

$$(-)^{-1} : G \to G$$

$$m : G \times G \to G$$

nii, et kehtib (diagrammi kommuteeruvuse mõttes)

1. assotsiatiivsus

$$\begin{tikzcd} G \times G \times G \arrow[r, "1_G \times m"] \arrow[d, "m \times 1_G"'] & G \times G \arrow[d, "m"] \\ G \times G \arrow[r, "m"'] & G \end{tikzcd}$$

2. ühikuga korrutamise reegel

$$\begin{tikzcd} G \times 1 \arrow[r, "1_G \times e"] \arrow[dr, "\cong"'] & G \times G \arrow[d, "m"] \\ & G \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 1 \times G \arrow[r, "e \times 1_G"] \arrow[dr, "\cong"'] & G \times G \arrow[d, "m"] \\ & G \end{tikzcd}$$

3. pöördelemendi reegel

$$
\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "(1_G\times(-)^{-1})\circ\Delta"] \arrow[d] & G\times G \arrow[d, "m"] \\
1 \arrow[r, "e"'] & G
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "((-)^{-1}\times 1_G)\circ\Delta"] \arrow[d] & G\times G \arrow[d, "m"] \\
1 \arrow[r, "e"'] & G,
\end{tikzcd}
$$

kus $\Delta : G \to G \times G$ on diagonaalne morfism.

Defineerime kategooria $\mathcal{C}$ sisemiste rühmade kategooria $\mathsf{Gr}(\mathcal{C})$ kui kategooria, kus objektid on sisemised rühmad. Morfismid kategoorias $\mathsf{Gr}(\mathcal{C})$ defineerime järgnevalt. Olgu $(G, m, e, (-)^{-1})$ ja $(G', m', e', (-)^{-1})$ kaks objekti kategoorias $\mathsf{Gr}(\mathcal{C})$. Siis nende objektide vaheline morfism on kategooria $\mathcal{C}$ morfism $f : G \to G'$ nii, et järgmine diagramm kommuteerub:

$$
\begin{tikzcd}
G\times G \arrow[r, "f\times f"] \arrow[d, "m"'] & G'\times G' \arrow[d, "m'"] \\
G \arrow[r, "f"'] & G'.
\end{tikzcd}
$$

Lokaaliline rühm on sisemine rühm lokaalide kategoorias.

Olgu $\mathcal{C}$ ja $\mathcal{D}$ korrutisetega kategooriad ja olgu $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ korrutisi säilitav funktor. Korrutiste säilitamine annab meile kanoonilise isomorfismi

$$\pi : F(A) \times F(B) \to F(A \times B).$$

Kui $(G, m, e, (-)^{-1})$ on rühm kategoorias $\mathcal{C}$, on

$$(F(G), F(m)\pi, F(e), F((-)^{-1}))$$

rühm kategoorias $\mathcal{D}$.

Teoreem 3.1. *Kui* $(G, m, e, (-)^{-1})$ *on rühm kategoorias* $\mathsf{LCSobTop}$*, siis* $(\Omega(G), \Omega(m)\pi, \Omega(e), \Omega((-)^{-1}))$ *on rühm kategoorias* Loc*. See vastavus tekitab funktori*

$$\Omega' \colon \mathsf{Gr}(\mathsf{LCSobTop}) \to \mathsf{Gr}(\mathsf{Loc})\,,$$

mis kujutab topoloogiliste rühmade morfismi $f \colon G \to G'$ *lokaaliliste rühmade morfismiks* $\Omega(f) \colon \Omega(G) \to \Omega(G')$*.*

Tõestus. Rakendame teoreemi 2.18. Muu tuleb üldistest faktidest või otsesest kontrollimisest. □

Näited lokaalilistest rühmadest.

- $(\Omega(\mathbb{R}), \Omega(+)\pi)$
- $\Omega(G)$ iga diskreetse topoloogiaga rühma G korral.
- $\Omega(L)$ iga Lie rühma L korral.

Iga lokaaliline rühm ei ole teoreemi abil konstrueeritaval kujul [3, lk. 549].

Kasutatud kirjandus

[1] Jiri Adámek et al. *Algebraic Theories: A Categorical Introduction to General Algebra*. Cambridge Tracts in Mathematics. Cambridge University Press, 2010. ISBN: 9780521119221.

[2] Jean Goubault-Larrecq. *Non-Hausdorff Topology and Domain Theory: Selected Topics in Point-Set Topology*. New Mathematical Monographs. Cambridge University Press, 2013. ISBN: 9781107328778.

[3] Peter T. Johnstone. *Sketches of an Elephant: A Topos Theory Compendium: 2 Volume Set*. Oxford University Press UK, 2002.

[4] Colin Naturman. "Interior Algebras and Topology". Doktoritöö. Detsember 1991. DOI: `10.13140/RG.2.2.33400.96001`.

[5] Frank P. Prokop. "Neighborhood Lattices-A Poset Approach to Topological Spaces". *Bulletin of The Australian Mathematical Society* 39 (veebruar 1989). DOI: `10.1017/S0004972700027969`.

[6] Jorge Picado ja Aleš Pultr. *Frames and Locales: Topology without points*. Frontiers in Mathematics. Springer Basel, 2011. ISBN: 9783034801539.

[7] Jorge Picado ja Aleš Pultr. "Notes on the product of locales". *Math. Slovaca* 65.2 (2015), l. 247–264. ISSN: 0139-9918. DOI: `10.1515/ms-2015-0020`.

[8] David Wigner. "Two notes on frames". *Journal of the Australian Mathematical Society* 28.3 (1979), l. 257–268. DOI: `10.1017/S1446788700012209`.

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Oskar Soop,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) minu loodud teose "Lokaalide korrutised", mille juhendaja on Ülo Reimaa, reprodutseerimiseks eesmärgiga seda säilitada, sealhulgas lisada digitaalarhiivi DSpace kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.

2. Annan Tartu Ülikoolile loa teha punktis 1 nimetatud teos üldsusele kättesaadavaks Tartu Ülikooli veebikeskkonna, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace kaudu Creative Commonsi litsentsiga CC BY NC ND 3.0, mis lubab autorile viidates teost reprodutseerida, levitada ja üldsusele suunata ning keelab luua tuletatud teost ja kasutada teost ärieesmärgil, kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.

3. Olen teadlik, et punktides 1 ja 2 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

4. Kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei riku ma teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse õigusaktidest tulenevaid õigusi.

Oskar Soop
12.06.2019