T A R T U R I I K L I K Ü L I K O O L

MATEMAATILISE ANALÜÜSI KATEEDER

ZERMELO MÕTTES SAAVUTAMATUTE HULKADE AKSIOMAATIKA

D I P L O M I T Ö Ö

Teostaja: Marge Kõbas,
matem.osak. V k.

Juhendaja: dots.k.t.A.Tauts

ENSV Kõrgema- ja Keskerihariduse Ministri Käskkirjaga nr. 483, 30. novembrist 1970.a. on antud töö autasustatud diplomiga.

TRÜ Teaduslik sekretär

TARTU

1970

§1. S i s s e j u h a t u s

Hulgateooria loomine Cantori poolt 1873. aastal tõotas matemaatika üldisele arengule avaraid perspektiive. Kuid juba 1903.a. avaldas B.Russel hulgateooria paradoksi (1895.a. Cantori enda poolt avastatud paradoksi peeti välditavaks), mis oli seotud selle teooria alustega ja isegi loogikaga. Paljud matemaatikud loobusid hulgateooria rakendamisest erinevates matemaatilistes distsipliinides. Vastupidi neile pidas Cantor oma teooriat endiselt õigeks, kuigi väljakutsele ta vastata ei suutnud. Ilmselt polnud sobiv hulgateooria esituse geneetiline vorm: põhimõisted määratleti poolintuitiivselt ja nende määratluste abil tuletati teoreemid tavalise deduktiivse meetodiga. Seoses raskuste ületamise katsetega tekkisid kolm põhilist seisukohta: aksiomaatiline, logitsistlik ja intuitsionistlik. Antud töös on hulgateooria probleeme käsitletud seoses aksiomaatilise meetodiga. Aksiomaatilistest teooriatest tähtsamad on Zermelo - Frenkeli teooria, von Neumani, Bernaysi, Gödeli teooriad. Kuid ka aksiomaatiline teooria ei vabastanud hulgateooriat probleemidest lõplikult. Kerkisid küsimused seoses hulgateooria aksiomaatika vasturääkimatuse, täielikkuse, kategoorilisuse ja sõltumatusega. Juba üle poole sajandi on püsinud probleem valiku aksioomi (VA) ja üldistatud kontiinumhüpoteesi (ÜKH) vasturääkimatusest ja sõltumatusest. Vähem kerge pole saavutamatute hulkade ja ekstraordinaalsete hulkade probleem. Teatavasti ei sisalda ZF aksiomaatika aksioomi saavutamatute hulkade eksisteerimise kohta, kuigi pole tõestust ka sellest, et saavutamatuid hulki ei eksisteeri. 1939.a. andis Tarsky spetsiaalse aksioomi, mis postuleeris saavutamatute hulkade eksisteerimise. Kuid see aksioom lülitas ZF aksiomaatikast välja potentshulga aksioomi ja valiku aksioomi, osutudes seega tavaliste eesmärkide jaoks liialt tugevaks.

Antud töö esimeses pooles (I pt.) on konstrueeritud aksiomaatika, millest järeldub ZF aksioomide süsteem ja mis annab ühtlasi saavutamatuid hulki. Töö teises pooles on tõestatud VA suhteline vasturääkimatus, kasutades sama meetodit, mis Cohen [1] VA ja ÜKH vasturääkimatuse tõestamisel süsteemi ZF suhtes.

I peatükk

AKSIOOMIDE SÜSTEEMID ZF JA A

1. Aksiomaatika A konstrueerimine.

On teada, et teooria aksiomaatiline ülesehitus ei ole ühene, võib esitada mitmeid aksioomide süsteeme. Seejuures võib ühe aksiomaatilise teooria algmõisted ja aksioomid olla mingis teises aksiomaatilises teoorias vastavalt defineeritavad mõisted ja tõestatavad tulemused.

Aksiomaatilise teooria mudel on objektide süsteem, võetuna mingist teisest teooriast ja mis rahuldab antud teooria aksioome.

Järgnevas konstrueerime teataval viisil hulkade süsteemi, mille jaoks otsime teda rahuldavat aksioomide süsteemi.

Võtame ette ZF aksiomaatika

1. $\forall x \forall y [\forall z (z \in x \sim z \in y) \to x = y]$,
2. $\forall a \forall b \{a \neq b \to \exists p \forall x [x \in p \equiv (x = a \vee x = b)]\}$,

   s.o. paarhulga aksioom.
3. $\forall a \{(\exists b)\, b \in a \to (\exists y) \forall x [x \in y \equiv \exists z (x \in z \wedge z \in a)]\}$,

   s.o. ühendhulga aksioom.
4. $\forall a \exists y \forall x (x \in y \equiv x \subseteq a)$,

   s.o. potentshulga aksioom.

5. $\forall a \exists y \forall x [x \in y \equiv (x \in a \wedge \mathfrak{A}(x))]$,

s.o. eraldamise aksioom.

6. $\forall t [\forall x \forall y ((x \in t \wedge y \in t \wedge x \neq y) \rightarrow [(\exists z) z \in x \wedge$
$\wedge \bar{\exists} z (z \in x \wedge z \in y)]) \rightarrow \exists u \forall x (x \in t \rightarrow \exists w \forall v$
$[v = w \equiv (v \in u \wedge v \in x)])]$,

s.o. valiku aksioom.

7. $\exists z [\emptyset \in z \wedge \forall x (x \in z \rightarrow \{x\} \in z)]$,

s.o. lõpmatuse aksioom.

8. $\forall s \{\forall x \forall y \forall y' [x \in s \wedge \varphi(x,y) \wedge \varphi(x,y') \equiv y = y']\} \rightarrow$
$\rightarrow \exists t \forall y [y \in t \equiv \exists x (x \in s \wedge \varphi(x,y))]$,

s.o. substitutsiooni aksioom.

9. $\forall a \{(\exists x)\, x \in a \rightarrow (\exists b)[b \in a \wedge \neg \exists y (y \in a \wedge y \in b)]\}$,

s.o. regulaarsuse aksioom.

Olgu $\mathcal{B}$ mingi süsteemi ZF mudel, s.o. teatav hulkade süsteem, mis rahuldab ZF aksioome. Genereerimise teel konstrueerime hulkade süsteemi $\mathcal{A}$. Genereerimise esimesel sammul loeme kogumisse $\mathcal{A}$ kuuluvaiks kõik kogumi $\mathcal{B}$ hulgad ja lisaks veel hulgana $\mathcal{B}$ enda. Täiendame saadud kogumit sobivalt valitud hulkadega, nii et ta rahuldaks jälle aksioome. Seega kujutab konstrueeritud hulkade kogum endast mingit $\mathcal{B}$ -st erinevat süsteemi ZF mudelit, mille tähistame $\mathcal{B}'$ -ga.

Teisel genereerimissammul võtame $\mathcal{B}'$ hulgad ja lisame neile hulgana $\mathcal{B}'$ enda ning veel niipalju vajalikke hulki, et uus hulkade kogum rahuldaks süsteemi ZF. Jne.

Otsime kirjeldatud genereerimisprotsessiga tekkivale hulkade süsteemile $\mathcal{A}$ teda rahuldavat aksiomaatikat. Intuitiivselt peaks mudelit $\mathcal{A}$ rahuldama järgmine aksioomide süsteem A .

I $\forall x \forall y[\forall z(z \in x \sim z \in y) \rightarrow x = y]$,

s.t. hulgad, mis sisaldavad ühtesid ja samu elemente on võrdsed.

II $\exists x \forall y \neg(y \in x)$,

s.t. eksisteerib tühi hulk.

III $\forall x \cancel{\forall R}\{\forall y \forall z \forall w(Ryz \wedge Ryw \rightarrow z = w) \rightarrow \exists y$
$[\forall z(z \in y \sim \exists w(w \in x \wedge Rwz))]\}$,

s.t. mistahes operaator R kujutab suvalise hulga hulgaks.

IV $\forall x \exists y\{x \in y \wedge \forall z \forall w(z \in y \wedge w \in z \rightarrow w \in y) \wedge$
$\wedge \forall z(z \in y \rightarrow Uz \in y) \wedge \forall z(z \in y \rightarrow P(z) \in y) \wedge$
$\wedge \forall z \cancel{\forall R}[z \in y \wedge \forall u \forall v(Ruv \rightarrow u \in y \wedge v \in y) \wedge$
$\wedge U_n(R) \rightarrow \exists w(w \in y \wedge w = R(z))]\}$,

s.t. suvalise hulga x korral eksisteerib hulk y , mis sisaldab x -i elemendina, kusjuures ta rahuldab järgmisi omadusi:

1) y on transitiivne, s.t. iga hulk, mis on y elemendi elemendiks on ka y enda elemendiks

2) y sisaldab iga oma elemendi ühendhulga

3) y sisaldab iga oma elemendi potentshulga

4) kui on defineeritud y piires tegutsev operaator, niisugune nagu antud aksioomiga III, siis suvalise y elemendi z korral leidub y element w , nii et R kujutab z elemendid w elementideks.

V $\forall x\{\forall y(y \in x \rightarrow (\exists z) z \in y) \wedge \forall y \forall z[y \in x \wedge z \in x \wedge$
$\wedge y \neq z \rightarrow \exists w(w \in y \wedge w \in z)]] \rightarrow \exists y[(\forall z) z \in x \rightarrow \exists w$
$(w \in z \wedge w \in y)] \wedge \forall u \forall v \forall w(w \in x \wedge u \in w \wedge v \in w \wedge$
$\wedge u \in y \wedge v \in y \rightarrow u = v)\}$,

s.t. kui x on mittetühjade hulkade jaotatud hulk, siis hulk y , mis sisaldab hulga x igast elemendist ühtainust, elementi ei ole tühi.

VI $\forall x \{(\exists y)\, y \in x \rightarrow \exists y [\, y \in x \wedge \bar{\exists} z (z \in x \wedge z \in y)]\}$,

s.t. iga mitte tühi hulk x sisaldab niisugust liiget y , et x-l ja y-l ei ole ühiseid liikmeid.

2. ZF aksioomide tõestamine süsteemi A aksioomide abil.

Käesolevas ja järgmises punktis püüame selgusele jõuda, milline on süsteemide ZF ja A tegevusvahekord. Antud punktis näitame, et ZF aksiomaatika sisaldub aksioomide süsteemis A , s.t., et ZF aksioomid on kas samaväärsed A aksioomidega või järelduvad neist. Tuleb tähele panna, et allpool esitatavad tõestused - ZF aksiomaatika tõestamiseks, kui viimane ei sisalda valiku aksioomi - kasutavad süsteemi A aksioomidest I - IV ja VI; ei kasuta aga valiku aksioomi. Kuna II peatükis on tõestatud valiku aksioomi (VA) vasturääkimatus süsteemis A , siis on selge, et eelmises lauses nimetatud tulemuste põhjal on ta mittevasturääkiv ka süsteemis ZF.

Vaatleme nüüd aksioomide ZF tõestusi. Samaväärsed on aksioomid 1. ja I, 6. ja V, 8. ja III, 9. ja VI. Seega jäävad tuletada 2.-5. ja 7. aksioom.

2. aksioomis postuleeritud paarhulga saame, kui lähtume hulgast $\emptyset$ ja rakendame talle kui hulgale x IV aksioomi, mille kohaselt $\emptyset$ ja $\{\emptyset\}$ $(P(\emptyset)=\{\emptyset\})$ kuuluvad hulka y . Olgu operaator R selline, et hulgale $\emptyset$ seab ta vastavusse hulga a ja hulgale $\{\emptyset\}$ hulga b . III aksioomi põhjal on R kujutishulk $\{a,b\}$ hulk.

3. aksioomiga antud ühendhulk eksisteerib IV aksioomi põhjal. Nimelt ütleb see aksioom, et iga hulga x korral eksisteerib hulk y , et $x\in y$ ja iga $z\in y$ korral $\cup z\in y$. Ammugi siis $\cup x\in y$. Seega iga x jaoks eksisteerib $\cup x$.

Analoogiline tõestus on potentshulga aksioomi 4 korral.

Eraldamise aksioomi 5 korral rakendame järgmist mõttekäiku. III aksioomist järeldub, et suvalise hulga x ja suvalise operaatori R korral eksisteerib hulk y, mille elemendid on parajasti hulga x elementide kujutised. Kui operaator R on defineeritud selliselt, et ta hulga x elementidele, mis rahuldavad ühekohalist predikaati seab vastavusse iseendid ja ülejäänutele mitte midagi, siis oleme saanud aksioomiga 5 postuleeritud hulga a alamhulga, kus hulga a osas on praegu x.

7. aksioomiga postuleeritud hulk z oli omadustega 1) $\emptyset \in z$ 2) $\forall x(x \in z \rightarrow \{x\} \in z)$. IV aksioomi põhjal võib öelda, et hulga $\emptyset$ korral leidub y, nii et $\emptyset \in y$ ja y omaduste põhjal ka $P(\emptyset) = \{\emptyset\} \in y$. Olgu y piires tegutsev operaator R defineeritud selliselt, et $R(\emptyset) = a$, kus a on mingi hulga y element. Vaatleme hulga $\{\emptyset\}$ elementide kujutishulka operaatoriga R. Selleks on hulk $\{a\}$. Operaatori kujutishulk aga oli y element. Seega hulk y rahuldab hulga z omadusi 7. aksioomis.

Oleme näidanud, et kõik ZF aksioomid järelduvad A aksioomidest. See ütleb, et ZF aksiomaatika ei saa olla tugevam kui aksiomaatika A.

3. Aksiomaatikate vahelise tegevusvahekorra tõestus.

Selles punktis näitame, et süsteemide A ja ZF vahel kehtib range võrratus, nimelt aksiomaatika A on tugevam kui aksiomaatika ZF.

Vastava vahekorra tõestamiseks kasutame saavutamatu hulga mõistet.

<u>Def.1</u>. Hulka z nim. saavutatavaks, kui ta rahuldab vähemalt üht kahest järgmisest tingimusest:

1° z on singulaarne, s.t. kui $\overline{\overline{z}} = \alpha$, siis leiduvad hulgad z_i, $\overline{\overline{z}}_i = \alpha_i$, $\alpha_i < \alpha$ $(i \in]0,n])$, nii et $\bigcup_i z_i = z$, $\overline{\overline{\{z_i\}}} < \alpha$

2° $\overline{\overline{z}} = \alpha \implies \exists \beta$, et $\beta < \alpha$, $\alpha \leq 2^\beta$.

Hulgad, mis pole saavutatavad on saavutamatud.

<u>Väide</u>. Aksiomaatika A on tugevam kui aksiomaatika ZF.

Tõestus. a) ZF aksiomaatika ei ütle, et saavutamatuid hulki peaks eksisteerima,

b) aksiomaatika A annab saavutamatuid hulki.

a) ZF aksiomaatika jaoks on võimalik ehitada teda rahuldavat mudelit, mis ei sisalda ühtegi saavutamatut hulka. Taolise mudeli saamiseks jätame mingist süsteemi ZF mudelist välja kõik saavutamatud hulgad alates hulgast võimsusega α (viimane kaasa arvatud), kus α on esimene saavutamatu võimsus peale loenduva võimsuse.

<u>Def.2</u>. Võimsus β on lubatav, kui ta on väiksem kui α.

<u>Def.3</u>. Hulka nimetatakse lubatavaks, kui ta on lubatava võimsusega, tema elemendid, elementide elemendid jne. on lubatava võimsusega.

Olgu mudelisse alles jäävad hulgad võimsusega β $(\beta < \alpha)$ kõik lubatavad. Saadud mudelis on rahuldatud kõik ZF aksioomid. 1. aksioomi rahuldatus on ilmne. 2. aksioomi korral on hulgad a ja b eelduse põhjal lubatavad. Ka paarhulk $\{a, b\}$ on lubatav, sest $\overline{\overline{\{a, b\}}} = 2$, aga $2 < \aleph_0 < \alpha$.
3. aksioomis on vajalik ühendhulga $\cup a$ lubatavus, kui hulk a on lubatav. Vaatleme a elemente hulkadena z_i definitsioonis 1. Hulga a lubatavuse tõttu $\overline{\overline{z_i}} < \alpha$ ja hulki z_i on vähem kui α . Kuid hulk z võimsusega α oli saavutamatu. Seetõttu $\bigcup_i z_i \neq z$ ja $\overline{\overline{\bigcup_i z_i}} < \alpha$. Kuid $\bigcup_i z_i = \cup a$ ja seega $\overline{\overline{\cup a}} < \alpha$, m.o.t.t.
Potentshulga lubatavus 4. aksioomis selgub järgmisest. Olgu hulk a lubatav, siis $\overline{\overline{a}} = \beta < \alpha$, kuid hulga võimsusega α saavutamatuse tõttu ei saa kehtida $\alpha \leq 2^\beta$. Järelikult $2^\beta < \alpha$, aga $\overline{\overline{P(a)}} = 2^\beta$.
5. aksioom. Hulgast osahulga väljaeraldamisel ei saa viimase võimsus kasvada, s.t. $\overline{\overline{y}} \leq \overline{\overline{a}} < \alpha$. Ka ülejäänud nõuded hulga y lubatavuse kohta on rahuldatud. Hulk y on lubatav. Valiku aksioomi korral sisaldab valikhulk Ct igast hulga t elemendist parajasti ühe elemendi. Lihtne näha, et Ct on lubatav hulk.

Analoogiliselt rahuldavad konstrueeritud mudelit ka 7., 8., 9. aksioom. Punkt a) on sellega tõestatud.
b) Lähtume hulgast x , mille võimsus $\overline{\overline{x}} = \aleph_0$. IV aksioomi põhjal leidub hulk y , nii et $x \in y$ ja rahuldab omadusi 1) - 4). Olgu α niisugune saavutatav võimsus, et iga β , mis rahuldab tingimust $\aleph_0 < \beta < \alpha$ on ka, saavutatav. Oletame, et iga $\beta < \alpha$ jaoks leidub hulk

võimsusega β ja mis on hulga y elemendiks. Näitame, et sel juhul eksisteerib hulk võimsusega α, mis on ka hulga y elemendiks.

Vastuväiteliselt oletame, et hulga y elementide hulgas niisugust hulka ei leidu.

Olgu α saavutatav definitsiooni 1 tingimuse 2) mõttes, s.t. $\exists\beta$, $\beta<\alpha\leq 2^{\beta}$. Eelduse kohaselt $\exists z(\bar{\bar{z}}=\beta\wedge z\in y)$. IV askioomi 3) omaduse põhjal $P(z)\in y$; $\overline{\overline{P(z)}}=\gamma=2^{\beta}\geq\alpha$. Ilmselt on $P(z)$ saavutatav hulk. Võtame $P(z)$ alamhulga c, nii et $\bar{\bar{c}}=\alpha$. Kehtib $c\in y$. Seega saime, et hulga y elemendiks on hulk, mille võmsus on α. See on vastuolus eeldusega.

Analoogiliselt saame vastuolu ka siis, kui võimsus α on saavuta~~matu~~tav definitsiooni 1. tingimuse 1) mõttes, s.t. leiduvad võimsused $\gamma_i\ (i\in J)$, kus $\gamma_i<\alpha$, $\bigcup_i\gamma_i<\alpha$, $\bar{\bar{J}}=\beta$ ja $\beta<\alpha$. Eespool tehtud eelduse põhjal $\exists z(\bar{\bar{z}}=\beta\wedge z\in y)$ ja $\forall i\,\exists z_i(\bar{\bar{z}}_i=\gamma_i\wedge z_i\in y\wedge i\in J)$. Defineerime hulga y piires tegutseva operaatori R nii, et ta igale hulga z liikmele seab vastavusse ühe z_i, mis on võimalik seetõttu, et $\bar{\bar{z}}=\bar{\bar{J}}=\beta$. Tähistame $a=\bigcup_i z_i$, siis $\bar{\bar{a}}=\overline{\overline{\bigcup_i z_i}}=\alpha$. IV aksioomi 2) omaduse põhjal $a=\bigcup_i z_i\in y$. Järelikult eksisteerib hulk võimsusega α, mis on y elemendiks. See on jälle vastuolus eeldusega.

Järelikult vaadeldava võimsuse α korral eksisteerib hulga y element, mille võimsus on α.

Kehtib Zermelo teoreem: kõik võimsused on täielikult järjestatavad.

Näitame, et iga saavutatav võimsus on hulga y elemendi võimsus. Kui leiduks α, mis ei ole y elemendi võimsus, siis Zermelo teoreemi põhjal leiduks esimene selline võimsus. See oletus viib eespool tõestatud vastuoluni.

Hulk y on võimsam kui ükski tema element.

Viimane väide järeldub IV aksioomi 1) ja 3) omadusest. 1) omaduse põhjal y võimsus ei ole nõrgem tema mis tahes elemendi võimsusest. 3) omaduse põhjal $\forall x\,(x \in y \to \bar{\bar{y}} > \bar{\bar{x}})$, sest juhul, kui $\bar{\bar{x}} = \bar{\bar{y}}$ järeldub seosest $2^{\bar{\bar{x}}} > \bar{\bar{x}}$, et $2^{\bar{\bar{x}}} > \bar{\bar{y}}$. See pole aga võimalik, sest hulk võimsusega $2^{\bar{\bar{x}}}$ on hulga y element.

Kuna hulk y on võimsam kui ükski tema element, siis ta ei kuulu saavutatavate elementide hulka või leidub saavutamatuid hulki, mis asuvad võimsuse poolest y ja hulga võimsusega $\aleph_0$ - vahel.

Seega aksiomaatika A annab saavutamatuid hulki. Oleme tõestanud, et aksiomaatika A on tugevam kui ZF aksiomaatika.

Kokkuvõttes, teatavate hulkade süsteemile teda rahuldavat aksiomaatikat otsides saime viimase sellisena, et ta lubab saavutamatute hulkade eksisteerimist.

II p e a t ü k k

VA S U H T E L I N E M I T T E V A S - T U R Ä Ä K I V U S

1. Aksioomide I - IV ja VI kehtivus mudelis L

Antud peatükis näitame VA suhtelist vasturääkimatust meie poolt konstrueeritud aksioomide süsteemi A suhtes. Tõestus on analoogiline P.Coheni sama väite tõestusega süsteemi ZF suhtes. Tõestuse sisu on selles, et näidatakse süsteemi A vasturääkimatust, kui eeldada, et süsteem A ilma VA-ta on vasturääkimatu. Tõestus viiakse läbi konstruktiivsete hulkade mudeli L moodustamisega, milles on rahuldatud kõik süsteemi A aksioomid, kaasa arvatud VA, kusjuures viimane järeldub konstruktiivsuse aksioomist, mille kehtivus mudelis L on samuti tõestatav.

Def.1. Olgu X suvaline hulk. Hulga X' defineerime hulkade X ja u summana, kus hulga u elemendid y on hulgad, millede korral eksisteerib süsteemis A valem $\mathfrak{A}(z, t_1, \dots, t_n)$, nii et hulgas X fikseeritud $\bar{t}_i$-de korral

$$y = \{ z \mid z \in X \wedge \mathfrak{A}_X(z, \bar{t}_1, \dots, \bar{t}_n) \}$$, kus

$\mathfrak{A}_X$ on saadud valemist $\mathfrak{A}$ kõigi seotud muutujate piiramisel hulgaga X.

Def.2. Kui $On\,\alpha$, siis M_α defineerime järgmiselt

$M_0=\emptyset$ ja $\alpha\neq 0$ korral $M_\alpha=(\bigcup_{\beta<\alpha} M_\beta)'$.

Def.3. Hulk x on konstruktiivne, kui $\exists\alpha$, et $On\,\alpha$ ja $x\in M_\alpha$.

Võtame mudelist $\mathcal{A}$, milles oli rahuldatud aksiomaatika A kasutusele kõik definitsiooni 3 mõttes konstruktiivsed hulgad ja tähistame selle kogumi L -ga. Siis $x\in L$ tähendab, et x on konstruktiivne hulk.

Näitame, et konstruktiivsed hulgad moodustavad süsteemi A mudeli, s.t.

I* kui K on süsteemi A aksioom, siis K_L on süsteemis A tõestatav.

K_L kujutab endast sama valemit mis K , kuid temas on kõik muutujad piiratud klassiga L , s.t. kõik muutujad on konstruktiivsed hulgad.

Tõestame I*.

1) Ekvivalentsi aksioom I

Olgu antud kaks suvalist konstruktiivset hulka x ja y , mille kõik konstruktiivsed elemendid on võrdsed. Näitame, et x ja y kõik elemendid on konstruktiivsed hulgad ja seetõttu $x=y$.

Teoreem 1. Konstruktiivse hulga elemendid on konstruktiivsed hulgad.

Tõestus. Olgu $x\in L$, s.t. $\exists\alpha$, et $x\in M_\alpha$ ja olgu $y\in x$. Definitsioonist 1 on näha, et $X'\subseteq P(X)\cup X$.
Et $M_\alpha=(\bigcup_{\beta<\alpha} M_\beta)'$, siis $x\in P(\bigcup_{\beta<\alpha} M_\beta)\cup(\bigcup_{\beta<\alpha} M_\beta)$.
Kui α on minimaalne ordinaalarv, mille korral $x\in M_\alpha$, siis viimase summa korral saab x kuuluda vaid summa esi-

messe liikmesse, s.o. $x \in P(\bigcup_{\beta<\alpha} M_\beta)$. Järelikult, kui $y \in x$, siis $y \in \bigcup_{\beta<\alpha} M_\beta$, s.t. $y \in L$, m.o.t.t.

Et hulkade x ja y kõik konstruktiivsed elemendid olid võrdsed, siis tõestatud teoreemi põhjal on nende kõik elemendid võrdsed. Sel juhul peavad võrdsed olema ka x ja y . Vastasel korral ei kehtiks mudelis A aksioom, mis väidab, et mis tahes kaks hulka, mis sisaldavad ühtesid ja samu elemente on võrdsed. Seega I aksioom kehtib mudelis

2) Tühja hulga aksioom II

Võtame definitsioonis 1 hulga X korral üheks valemiks $\mathfrak{A}$ valemi $\neg z = z$. See valem ei kehti ühegi $z \in X$ korral. Seepärast $y = \emptyset$ ja $\emptyset \in X'$. Järelikult $\exists \alpha$, et $\emptyset \in M_\alpha$; $\emptyset \in L$. Aksioom II kehtib mudelis L .

3) Kujutishulga aksioom III

Aksioom formuleeringust on näha, et operaator R seab originaalide hulga x elementidele z vastavusse elemendi w kujutishulgast y või ei sea talle vastavusse midagi. Relativiseeritud operaatori R_L korral $x \in L \wedge \wedge [\forall z (z \in x \rightarrow z \in L)]$ ning z -le vastavusse seatud hulk $w \in L$.

Meil tuleb näidata, et kujutishulk $y \in L$. Vaatleme kahte juhtu.

a) Oletame, et ühegi $z \in x$ korral pole operaatoriga midagi vastavusse seatud, s.t. kujutishulk on tühi hulk. Viimane aga oli konstruktiivne.

b) Oletame, et osale hulga x elementidele vastab mingi element z , osale aga mitte midagi.

Vajaliku lõpptulemuse saamiseks tõestame teoreemi kujutishulga y kuulumisest alamhulgana mingisse konstruktiivsesse hulka. Selleks aga on vaja defineerida operaator R, nii et iga originaali korral oleks kujutiselement määratud.

<u>Def</u>. 1) Seosed $x_i \in x_j$, $x_i \in t_j$, $t_i \in x_j$, $t_i \in t_j$ on valemid.

2) Kui A ja B on valemid, siis on valemid ka $\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \rightarrow B$, $A \equiv B$

3) Kui A on valem, siis on valemid ka $\exists x A$ ja $\forall x A$.

Valemi definitsiooni kasutades $w = R(z) \equiv \mathfrak{A}(z, w, t_1, \ldots, t_n)$ ja $R_L(z) \equiv \mathfrak{A}_L(z, w, t_1, \ldots, t_n)$, kus $z, w, t_1, \ldots, t_n \in L$.

Olgu $z_0 \in x$ kujutiseks $w_0 \in y$. Moodustame valemi $\mathfrak{D}(z, w, t_1, \ldots, t_n, w_0) = \mathfrak{A}(z, w, t_1, \ldots, t_n) \vee [\neg \exists u\, \mathfrak{A}(z, u, t_1, \ldots, t_n) \wedge w = w_0]$.

Valemi $\mathfrak{D}$ korral on igal hulga x elemendil z mõte. S.t. kui $\mathfrak{D}$ defineerib operaatori $R^*_L(z)$ ühese funktsioonina L-s, siis R^*_L seab igale elemendile z vastavusse sama elemendi w, mis operaator R_L-gi, kuid neile elementidele, millele R_L korral midagi ei vasta, vastab R^*_L korral element w_0. Seejuures operaatori R^*_L kujutishulk ühtib R_L kujutishulgaga.

<u>Teoreem 2</u>. Olgu $w = R(z)$ ühene operaator, mis on määratud valemiga $\mathfrak{D}(z, w, t_1, \ldots, t_n)$ mingite $t_i \in L$ korral, nii et $z \in L$ tingib $R(z) \in L$. Kui $x \in L$ on operaatori R originaalide hulk, siis $\exists u \in L$ niisugune, et $y \subseteq u$, kus y on R kujutishulk.

<u>Tõestus</u>. Olgu iga $z \in x$ korral $\varphi(z)$ vähim niisugune ordinaalarv, et $R(z) \in M_\alpha$, $\alpha = \varphi(z)$. Kui $\beta = \sup\{\varphi(z) \mid z \in x\}$, siis kõik $R(z)$-d, kus

$z \in x$, kuuluvad M_β-sse. S.t. R kujutishulk $y \subseteq M_\beta$, aga $M_\beta \in L$.

Märkus. $M_\beta \in L$ järeldub sellest, kui võtta definitsioonis 1 hulga X korral üheks lauseks $\mathfrak{A}$ lause $z=z$. Siis $y = X$ ja $X \in X'$. Siit $M_\beta \in M_{\beta+1}$, sest $M_{\beta+1} = (M_\beta)'$.

Aksioomi III lõplikuks tõestamiseks läheb vaja Löwenheim - Skolemi teoreemi veidi muudetud kujul, mille tõestus on esitatud Cohen'i [1] põhjal.

Teoreem 3. Olgu $\mathfrak{A}(z_1, \ldots, z_n)$ süsteemi A relativiseeritud valem (s.t. kõik seotud ja vabad muutujad kuuluvad klassi L). Olgu $S \in L$. Siis eksisteerib $S' \in L$, nii et $S' \supseteq S$ ja kõigi $\bar{z}_i \in S'$ korral kehtib seos $\mathfrak{A}(\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_n) \longleftrightarrow \mathfrak{A}_{S'}(\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_n)$, kus valem $\mathfrak{A}_{S'}$, on saadud valemist $\mathfrak{A}$ kõigi kvantorite tõkestamisel hulgaga S'.

Tõestus. Iga teoreemi tingimusi rahuldava valemi $\mathfrak{A}$ kohta öeldud väide olgu süsteemi A teoreem. Olgu $\mathfrak{A}$ kujul $Q_1 y_1, \ldots, Q_m y_m \mathfrak{B}(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m)$. Olgu $T \in L$. Iga r korral, kus $1 \leq r \leq m$ eksisteerib funktsioon $f_r(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_{r-1})(\bar{x}_i, \bar{y}_j \in T)$ järgmise omadusega:

kui $Q_r = \exists$ ja eksisteerib niisugune hulk $\bar{y}_r$, et

(1) $Q_{r+1} y_{r+1}, \ldots, Q_m y_m \mathfrak{B}(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_r, \bar{y}_{r+1}, \ldots, \bar{y}_m)$,

siis $f_r = \alpha$, kus α — vähim selline ordinaal, et eksisteerib $\bar{y}_r \in M_\alpha$, mis rahuldab (1). Et $\mathfrak{A}$ oli relativiseeritud, siis, kui eksisteerib $\bar{y}_r$, mis rahuldab (1), peab $\bar{y}_r$ kuuluma L-i, nii et f_r on sel juhul määratud. Kui niisugust $\bar{y}_r$ ei eksisteeri, võtame $f_r = 0$. Kui $Q_r = \forall$, siis f_r defineeritakse samal viisil, kuid valem (1) asendatakse tema eitusega. Olgu $\beta = \sup\{ f_r(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \mid \bar{x}_i, \bar{y}_j \in T, 1 \le r \le m\}$. Moodustame hulga $T^* = T \cup M_\beta$. Defineerime hulkade jada S_n nii, et $S_0 = M_\alpha$, kui α on vähim niisugune ordinaal, et $S \in M_\alpha$ ja $S_{n+1} = S_n^*$. Saab tõestada, et $S' = \bigcup_n S_n$ rahuldab teoreemi nõudeid. $\exists \alpha$, et $S' = \bigcup\{M_\beta \mid \beta < \alpha\} \in M_\alpha$.

Läheme tagasi aksioomi III tõestuse juurde.

Teoreemi 2 põhjal $y \subseteq u$, $y \subseteq M_\alpha$. Võime eeldada, et $x, t_1, \dots, t_n \in M_\alpha$. Võtame M_α hulgaks S teoreemis 3. Siis $\exists S' \in L$, nii et kõigi $z, w, t_i \in S'$ korral $\mathcal{D}(z, w, t_1, \dots, t_n) \leftrightarrow \mathcal{D}_{S'}(z, w, t_1, \dots, t_n)$ ja $\exists \beta$, $S' \in M_\beta$ ehk $Rzw \leftrightarrow R_{S'} zw$ ja $S' \in M_\beta$. Aksioomi III ja äsja tehtud arutelu põhjal $y = \{w \mid w \in S' \wedge (\exists z) z \in x \wedge R_{S'} zw\}$. M_β transitiivsuse tõttu $w, z \in S' \wedge S' \in M_\beta \to w, z \in M_\beta$. Seega võib kirjutada ka nii $y = \{w \in M_\beta \mid (\exists z) z \in x \wedge R_{S'} zw\}$. Et sulgavaldise tingimuses kõik muutujad kuuluvad M_β-sse, siis $y \in (M_\beta)' = M_{\beta+1}$. Järelikult $y \in L$, m.o.t.t. Seega on aksioom III kehtib mudelis L.

4) Aksioom IV

See aksioom kehtis mudelis $\mathcal{A}$. Seepärast, kui $x \in L$, leidub ikkagi y, nii et $x \in y$ ja y on nõutavate omadustega 1) - 4). Meil tuleks näidata, et leidub konstruktiivne hulk, mis rahuldab hulga y omadusi. Tegelikult ehitame konstruktiivse hulga selliselt, et ta sisaldab hulka x, on hulga y alamhulk ja rahuldab omadusi 1) - 4).

$x \in L$. Olgu $\bar{x}$ hulk, mille elementideks on hulk x, x elemendid, x elementide elemendid jne. Võtame ette hulga M_0. Olgu L_0 hulk nende $\bar{x}$ elementidega, mis kuuluvad M_0-i. Võtame M_1. Olgu $L_1 = A_0 \cup B_0 \cup \cup C_0 \cup D_0 \cup L_0$, kus A_0-sse kuulugu need $\bar{x}$ elemendid, mis kuuluvad M_1-te; B_0-sse kuulugu need L_0 elementide summahulgad, mis kuuluvad M_1-te; C_0-sse kuulugu need L_0 elementide alamhulgad ja potentshulgad, mis kuuluvad M_1-te. Määraku valem $\mathfrak{A}(z, w, t_1, \ldots, t_n)$ üheselt operaatori $w = R(z)$. D_0-sse kuulugu need $x \in L_0$ kujutishulgad y, kus $y = \{w \mid w \in L_0 \wedge (\exists z)\, z \in x \wedge \mathfrak{A}_{M_0}(z, w, \bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_n)\}$, mis kuuluvad M_1-te ja seejuures $\bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_n \in M_1$.

Hulkade L_α moodustamise protsessi jätkame transfiniitse rekursiooniga mööda ordinaalarve. Piirordinaali δ korral

$$L_\delta = \Big(\bigcup_{\nu < \delta} L_\nu\Big) \cup \Big(\bigcup_{\nu < \delta} A_\nu\Big) \cup \Big(\bigcup_{\nu < \delta} D_\nu\Big).$$

Kuna summa- ja potents- ning osahulgad leitakse rekursiooni igal sammul hulkadest, mis sisalduvad mingis M_ϱ-s, siis need hulgad ise kuuluvad $M_{\varrho+1}$-te. Seepärast piirhulga M_δ korral summad hulkadest B ja C ei tule enam arvesse. Nii $\Big(\bigcup_{\nu<\delta} A_\nu\Big)$ kui ka $\Big(\bigcup_{\nu<\delta} D_\nu\Big)$ võivad sisaldada L_δ jaoks uusi elemente.

Kui leiduks ordinaalarv α, millest alates vastavate hulkade A, B, C, D elemendid on kõik eespool juba esinenud, siis $L_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} L_\beta$ ja kui seejuures $\gamma > \alpha \rightarrow L_\gamma = L_\alpha$, siis L_α on oma konstruktsiooni tõttu parajasti selline hulk, mis sisaldab hulka x ja rahuldab IV aksioomi nelja tingimust. L_α konstruktsioonist ilmneb ühtlasi, et ta on hulga y alamhulk.

Kui nüüd oletada, et $\exists\alpha$, mille korral $L_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} L_\beta$, $\forall\gamma\,(\gamma>\alpha), L_\gamma = L_\alpha$, siis võib α minna kuitahes suureks. L_α saab samal ajal kuitahes võimsaks ja ületaks hulga y. See pole aga võimalik, sest L_α oli hulga y alamhulk. Seega mis tahes konstruktiivse hulga x korral leidub hulk L_α, nii et $x \in L_\alpha$. Võtame L_α IV aksioomis hulga y ossa. Kui saaksime tõestada seose $L_\alpha \in L$, siis ongi IV aksioomi kehtivus mudelis L näidatud.

L_α konstruktiivsuse tõestame transfiniitse induktsiooniga α järgi. Enne aga näitame, et $\bar{x} \in L$. Olgu γ minimaalne ordinaalarv, mille korral $x \in M_\gamma$. M_γ transitiivsuse tõttu kõik hulga x elemendid, elementide elemendid jne. kuuluvad M_γ-sse. Esitame hulga $\bar{x}$ summana $\bar{x} = \bigcup_{\kappa=1}^{\infty} x_\kappa$. x_κ saame süsteemis A avaldada rekursiivse funktsiooni $\varphi(\kappa)$ abil.

$$x_\kappa = \varphi(\kappa) \longleftrightarrow \forall u\,[u \in x_\kappa \longleftrightarrow \exists t\,(t \in x_{\kappa-1} \wedge u \in t)].$$

Nüüd on $\bar{x}$ avaldatav järgmiselt

$$u \in \bar{x} \longleftrightarrow \exists\kappa\,[u \in x_\kappa \wedge x_\kappa = \varphi(\kappa)]$$

$x_\kappa = \{u \mid u \in M_{\gamma+\kappa-1} \wedge \exists t\,(t \in x_{\kappa-1} \wedge u \in t)\}$. Kõik tingimuses olevad muutujad kuuluvad $M_{\gamma+\kappa-1}$-te. Järelikult $x_\kappa \in M_{\gamma+\kappa}$. Olgu $\sup = \{\gamma+\kappa \mid n \in \omega\} = \xi$. Iga κ korral $x_\kappa \in M_\xi$. Võime eeldada, et $\kappa \in M_\xi$. M_ξ transitiivsuse tõttu $u \in x_\kappa \to u \in M_\xi$. $\bar{x} = \{u \mid u \in M_\xi \wedge \exists\kappa\; u \in x_\kappa\}$. Siin kõik tingimuses olevad muutujad kuuluvad M_ξ-sse. Järelikult $\bar{x} \in M_{\xi+1}$. Seega $\bar{x} \in L$.

Süsteemis A on $L_0, \ldots, L_\beta, \ldots$ avaldatavad järgmiselt:

$L_0 = \{ u \mid u \in M_0 \wedge u \in \bar{x} \} \in M_{\xi+2}$, $L_\beta = \{ u \mid u \in M_\beta \wedge u \in L_{\beta-1} \vee$
$\vee [u \in \bar{x} \vee u = \bigcup z \wedge z \in L_{\beta-1} \vee u = w \wedge w \subseteq z \wedge z \in L_{\beta-1} \vee$
$\vee\, u = P(z) \wedge z \in L_{\beta-1} \vee u = \vartheta \}$, $\forall \beta < \alpha$ ja kus ϑ kui operaatori R kujutishulk on III aksioomi põhjal konstruktiivne. Kõik tingimuses olevad muutujad peale ϑ kuuluvad $M_{\xi+2}$-te. Järelikult $L_0, L_\beta \underset{\beta \neq 0}{\in} M_\varrho$, s.t. $L_\beta \in L$, m.o.t.t. Seega IV aksioom kehtib mudelis L .

5) Regulaarsuse aksioom VI

Olgu $x \in L$, $x \neq \emptyset$. Kuna aksioom kehtib mudelis $\mathcal{A}$, siis leidub hulk y , nii et $(y \in x \wedge \bar{\exists} z (z \in x \wedge z \in y))$. . Et konstruktiivse hulga iga element on konstruktiivne, siis peab vastav y leiduma hulga x konstruktiivsete elementide seas, vastasel korral poleks aksioom mudelis $\mathcal{A}$ rahuldatud. See tähendabki, et VI aksioom kehtib mudelis L .

2. V = L avaldatavus süsteemis A.

Definitsiooni 1 abil andsime hulga X' mõiste. Oleks vaja näidata, et $y=X'$ on süsteemis A tõepoolest avaldatav. Vastasel juhul poleks võimalik mudelit L konstrueerida. Hulgad X' defineerime teatavate hulkade X_r kaudu.

Def. 4. Iga $r \geqslant 0$ korral olgu X_r niisuguste hulkade z hulk, milliste korral eksisteerib täpselt r kvantorit sisaldav valem $\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_n)$ ja leiduvad parameetrid $\bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_m \in X$, nii et

$$z = \{\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \mid \mathfrak{A}_X(x_1, \ldots, x_n; \bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_m)\}.$$

Kui saame näidata, et $y=X_r$ on avaldatav süsteemis A, siis X' võime defineerida hulga X ja kõigi niisuguste k-elemendilistest koateežidest hulga summana, mis kuuluvad mingisugusesse X_r-i, s.t. $X' = X \cup \bigcup_{r \in \omega} X_r^k$, kui $X \neq \emptyset$ ja $\emptyset' = \{\emptyset\}$, kust $y=X'$ avaldatavus süsteemis A järeldub juba üsna lihtsalt.

$y = X_r$ avaldatavuse püüame tõestada rekursiooniga r järgi.

Olgu $y = X_0$. Definitsioonist nähtub, et selle seose võib avaldada kõigi kvantoreid mittesisaldavate valemite nummerdamise teel. Valemid tuleb nummerdada efektiivselt, s.t. igale valemile peab vastama mingi number ja iga valemi numbri n järgi peab saama leida valemi, mille numbriks on antud n.

Kasutame valemite nummerdamiseks Gödeli numeratsiooni. Olgu sümbolitel järgmised numbrid:

$\in$	$\wedge$	$\vee$	$\neg$	$=$	$\longrightarrow$	$\longleftrightarrow$	$\emptyset$	, muutujatel
3	5	7	9	11	13	15	17	

$x_1, x_2, \ldots$ 3-ga mittejaguvad paaritud numbrid, mis on suuremad kui 17, konstantidel $c_1, c_2, \ldots$ 3-ga jaguvad paaritud numbrid, mis on suuremad kui 17.

Mainitud primaarseid numbreid arvestades saame igale valemile vastavusse seada ühe paarisarvulise naturaalarvu kujul $n = p_0^{a_0} \cdot \ldots p_k^{a_k}$, $p_0 = 2$, $a_0 \neq 0$,kus $a_0, \ldots, a_k$ on osavalemite või sümbolite vastavad numbrid. Naturaalarvu n nimetatakse valemi Gödeli numbriks.

Reegel. Korrutises $p_0^{a_0} \cdot \ldots p_k^{a_k}$ kirjutatakse kõige ette sümboli number, sellele järgnevad osavalemite, konstantide ja muutujate numbrid.

Näiteid.

1) $t \in x \wedge c \in t \rightarrow c \in x$

$$n = 2^{13} \cdot 3^{a_0} \cdot 5^{a_1}, \quad a_0 = 2^5 \cdot 3^{b_0} \cdot 5^{b_1}, \quad a_1 = 2^3 \cdot 3^{27} \cdot 5^{19},$$

$$b_0 = 2^3 \cdot 3^{21} \cdot 5^{19}, \quad b_1 = 2^3 \cdot 3^{27} \cdot 5^{21},$$

$$n = 2^{13} \cdot 3^{2^5 \cdot 3^{2^3 \cdot 3^{21} \cdot 5^{19}} \cdot 5^{2^3 \cdot 3^{27} \cdot 5^{21}}} \cdot 5^{2^3 \cdot 3^{21} \cdot 5^{19}} .$$

2) $A \wedge B \wedge C$

$$n = 2^5 \cdot 3^A \cdot 5^B \cdot 7^C .$$

Valemi Gödeli number avaldub ühesel viisil, s.t. erinevatele valemitele vastavad erinevad Gödeli numbrid. Tõepoolest, kui induktsiooni meetodit kasutades oletada, et $a_0, \ldots, a_k$ on erinevate valemite erinevad numbrid, siis leitava valemi number $p_0^{a_0} \cdot \ldots \cdot p_k^{a_k}$ ei saa ühtida ühegagi eelnevaist, s.o. ühegagi numbritest $a_0, \ldots, a_k$.

Süsteemis A saab avaldada rekursiivse funktsiooni $\varphi_{X,k,m}(n, t_1, \ldots, t_m)$, mis igale n -le, kus $n \in \omega$ seab vastavusse ühe k-elemendiliste korteežide hulga

$$z = \{\langle x_1, \ldots, x_k \rangle \mid \mathfrak{A}_{X,n}(x_1, \ldots, x_k ; t_1, \ldots, t_m)\} .$$

$$z = \varphi_{X,k,m}(n, t_1, \ldots, t_m) \longleftrightarrow \forall u [u \in z \longleftrightarrow \exists x_1, \ldots, x_k$$

$$x_1 \in X \wedge \ldots \wedge x_k \in X \wedge u = \langle x_1, \ldots, x_k \rangle \wedge \mathfrak{A}_n(x_1, \ldots, x_k;$$

$t_1, \ldots, t_m)]$. Nüüd $X_0^{k,m}$ avaldub järgmiselt

$z \in X_0^{k,m} \longleftrightarrow \exists n\, \exists t_1, \ldots, t_m\; t_1 \in X \wedge \ldots \wedge t_m \in X$

$[z = \varphi_{X,k,m}(n, t_1, \ldots, t_m)]$ ja $X_0 = \bigcup_{k,m \in \omega} X_0^{k,m}$.

$y = X_r$ määratakse rekursiooniga r järgi tingimusel, et k -liikmeliste korteežide hulk z sisaldub X_r^k -s , kui leidub $(k+1)$ -liikmeliste korteežide hulk w X_{r-1}^{k+1}-s, et $<x_1, \ldots, x_k> \in z \longleftrightarrow \exists x_0 \in X$, nii et $<x_0, x_1, \ldots, x_k> \in w$ või leidub $(k+1)$ -liikmeliste korteežide hulk w X_{r-1}^{k+1} -s, et $<x_1, \ldots, x_k> \in z \longleftrightarrow \forall x_0 \in X$, nii et $<x_0, x_1, \ldots, x_k> \in w$.

Sümboliseeritult oleks seesama järgmine

$$z \in X_r^k \longleftrightarrow \exists w \in X_{r-1}^{k+1}\, \forall u\, (u \in z \longleftrightarrow \exists x_0 \in X <x_0, u> \in w) \vee$$
$$\vee\, \exists w \in X_{r-1}^{k+1}\, \forall u\, (u \in z \longleftrightarrow \forall x_0 \in X <x_0, u> \in w).$$

X' definitsioon X ja X_r^k kaudu oli antud eespool. Kuna M_α definitsioonis $M_\alpha = (\bigcup_{\beta < \alpha} M_\beta)'$ on kasutatud transfiniitset rekursiooni ja operatsiooni $X \longrightarrow X'$, siis seos $x = M_\alpha$ on avaldatav süsteemis A . Seega ka väide $V = L$, sest $x \in L \longleftrightarrow \exists \alpha (x \in M_\alpha)$.

Kui L-s sisalduvad hulgad M_α L suhtes veel kord relativiseerida, siis uued hulgad M_α L -s tõepoolest eksisteerivad, sest M_α -de kohta tõestatu kehtis süsteemi A mudeli $\mathcal{A}$ korral, järelikult ka L korral, kuna L oli samuti süsteemi A mudel.

3. Absoluutsus.

<u>Teoreem</u>. $(V=L)_L$ on tõestatav süsteemis A. S.t., et konstruktiivsuse aksioom kehtib mudelis L.

Teoreemi tõestamiseks toome sisse absoluutse seose mõiste ja näitame mõningate tõestuseks vajaminevate seoste absoluutsust.

<u>Def. 5</u>. Öeldakse, et valem $\mathfrak{A}(x_1,\ldots,x_n)$ defineerib absoluutse seose, kui $x_1 \in L \wedge \ldots \wedge x_n \in L \wedge \mathfrak{A}_L(x_1,\ldots,x_n) \leftrightarrow \mathfrak{A}(x_1,\ldots,x_n)$.

1. $x \in y$ on triviaalselt absoluutne kui süsteemi aprioorne seos.

2. $x = y$. Võrduse ja järgnevad seosed avaldame nendega ekvivalentsete seoste kaudu. Viimaste absoluutsust on juba lihtne näidata. $x = y \leftrightarrow \forall t\,(t \in x \leftrightarrow t \in y)$. Kui see valem kehtib L-s: $\forall t\,(t \in L \wedge [(t \in x)_L \leftrightarrow (t \in y)_L])$, siis p.1. ja L transitiivsuse tõttu kehtib ta ka V-s.

3. $x \subseteq y \leftrightarrow \forall t\,(t \in x \rightarrow t \in y)$ absoluutsus tuleb välja sama moodi nagu p.2. korral.

4. $x \subset y$ absoluutsus järeldub vahetult eelmise seose absoluutsusest.

5. $x = \emptyset \leftrightarrow \forall t\,[t \in x \rightarrow \neg(t = t)]$. Iga valemi $\mathfrak{A}$ absoluutsuse korral $\neg\mathfrak{A}$ on samuti absoluutne. Relativiseerime valemi $x = \emptyset$: $\forall t\,\{t \in L \wedge [(t \in x)_L \rightarrow (\neg(t = t))_L]\}$. $t \in x$ ja $\neg(t = t)$ absoluutsuse ning L transitiivsuse tõttu $x = \emptyset$ kehtivusest L-s järeldub tema kehtivus V-s. s.t. valemi $\forall t\,[t \in x \rightarrow \neg(t = t)]$ kehtivus.

6. $z = x \cap y$.

7. $z = \{x, y\} \longleftrightarrow \forall t \, (t \in z \longleftrightarrow t = x \vee t = y) \longleftrightarrow \forall t \, (t \in z \longrightarrow t = x \vee t = y) \wedge \forall t \, (t = x \longrightarrow t \in z) \wedge \wedge \forall t \, (t = y \longrightarrow t \in z)$. Relativiseerime selle valemi L suhtes. Kõik seosed, mis siin esinevad on absoluutsed. Järelikult $z = \{x, y\}$ on absoluutne seos.

8. $z = \langle x, y \rangle \longleftrightarrow \exists u \, \exists v \, (u \in z \wedge v \in z \wedge z = \{u, v\} \wedge \wedge u = \{x, x\} \wedge v = \{x, y\})$. On selgelt näha, et antud valemi absoluutsus tuleneb eelmiste absoluutsusest.

9. z - järjestatud paar.

10. $z = x \times y$.

11. x - funktsioon.

12. x - ordinaal.

13. $x = \omega$.

14. $y = X_0$.

15. $y = X'$.

16. $x = M_\alpha$.

17. Eksisteerib niisugune ordinaal α, et $x = M_\alpha$.

Punkti 14 korral seose $y = X_0$ absoluutsuse näitamiseks võtame kasutusele tema defineerimiseks kasutatud rekursiivse funktsiooni $z = \varphi_{X, \kappa, m}(n, t_1, \ldots, t_m) \longleftrightarrow \forall u \, [u \in z \longleftrightarrow \exists x_1, \ldots, x_\kappa \;\; x_1 \in X \wedge \ldots \wedge x_\kappa \in X \wedge u = \langle x_1, \ldots, x_\kappa \rangle \wedge \mathfrak{A}_n(x_1, \ldots, x_\kappa, t_1, \ldots, t$ Eeldame, et $X \in L$ ja $\mathfrak{A}_n(x_1, \ldots, x_\kappa, t_1, \ldots, t_m)$, mis oli kvantoriteta valem on absoluutne. Relativiseerime funktsiooni $z = \varphi_{X, \kappa, m}(n, t_1, \ldots, t_m)$. Saame, et

$$\forall u \{ u \in L \wedge [(u \in z)_L \longleftrightarrow \exists x_1, \ldots, x_n \;\; x_1 \in L \wedge \ldots \wedge x_\kappa \in L \wedge \wedge (x_1 \in X)_L \wedge \ldots \wedge (x_\kappa \in X)_L \wedge (u = \langle x_1, \ldots, x_\kappa \rangle)_L \wedge \wedge \mathfrak{A}_n(x_1, \ldots, x_\kappa; t_1, \ldots, t_m)] \}.$$

Siin rakendame valemi $\mathfrak{A}_n$, punktides 1 ja 8 saadud seoste absoluutsust ning L transitiivsust u ja x_i korral. Tulemuseks on funktsiooni $z=\varphi_{X,k,m}(n,t_1,\dots,t_m)$ absoluutsus. Kehtis seos $z \in X_0^{k,m} \longleftrightarrow \exists n\, \exists t_1,\dots,t_m\; t_1 \in X \wedge \dots \wedge t_m \in X\; [z=\varphi_{X,k,m}(n,t_1,\dots,t_m)]$.

Pärast relativiseerimist: $\exists n\, \exists t_1,\dots,t_m \{On\, n\; n\in L \wedge t_1 \in L \wedge \dots \wedge t_m \in L \wedge (t_1 \in X)_L \wedge \dots \wedge (t_m \in X)_L\, [z=\varphi_{X,k,m}(n,t_1,\dots,t_m)]_L$

p.12 põhjal on ordinaalarvu mõiste absoluutne; L on transitiivne, seepärast $t_i \in L$; äsja tõestatu põhjal sulgudes esinev funktsioon oli ka absoluutne. Seega on absoluutne seos $y = X_0^{k,m}$. $X_0 = \bigcup\limits_{k,m\in\omega} X_0^{k,m} \longleftrightarrow (\forall u)\, u \in X_0 \longleftrightarrow \exists k,m\;\; u \in X_0^{k,m}$. Absoluutsus on siin ilmne. 14. punkt on tõestatud. Vaatame $y = X'$. Teada on, et $X' = X \cup \bigcup\limits_{r\in\omega} X_r^k$. Avaldades summa kvantorite abil, saame $y=X'$ absoluutsuse, kui $y = X_r^k$ on absoluutne. Punkt 16 korral tähendab absoluutsus seda, et $(M_\alpha)_L = M_\alpha$. Tõestuseks kasutame transfiniitset induktsiooni ja eelmise seose absoluutsust. Oletame, et iga β $\beta<\alpha$ korral kehtib $(M_\beta)_L = M_\beta$. $M_\alpha = (\bigcup\limits_{\beta<\alpha} M_\beta)'$. Kuna ordinaalarvu mõiste oli absoluutne ja hulgad M_β olid konstruktiivsed, siis summa $\bigcup\limits_{\beta<\alpha} M_\beta$ relativiseerimine tema tähendust ei muuda. Seose $y=X'$ absoluutsusest järeldub, et $(M_\alpha)_L = M_\alpha$. 17. Eksisteerib ordinaal α, et $x = M_\alpha$ s.t. $\exists\alpha\, (On\,\alpha \wedge x = M_\alpha)$. Relativiseerime: $\exists\alpha\, [On\,\alpha\;\; \alpha\in L \wedge (x = M_\alpha)_L]$. Ordinaalarvu mõiste oli absoluutne, samuti funktsioon $x = M_\alpha$. Seega kehtib absoluutsus ka p. 17 korral.

Teoreemi tõestus.

Eespool saime, et iga α korral eksisteerib hulk M_α, mis rahuldab relativiseerivat tingimust L suhtes. Seose 17. põhjal $\exists \alpha$, et $(z = M_\alpha)_L \longleftrightarrow z = M_\alpha$. Järelikult L suhtes relativiseeritud M_α ühtib esialgse M_α -ga. Esialgses mudelis L, kui $x \in L$ leidus α, nii et $x \in M_\alpha$, s.t. $x \in L \longrightarrow \exists \alpha \exists y (y = M_\alpha \wedge x \in y)$. Relativiseerime selle valemi: $x \in L \longrightarrow \exists \alpha \exists y [On \alpha$ $\alpha \in L \wedge y \in L \wedge (y = M_\alpha)_L \wedge (x \in y)_L]$. Ordinaalarvu mõiste oli absoluutne, seosed $y = M_\alpha$, $x \in y$ olid absoluutsed. Sellepärast järeldub $x \in L \longrightarrow x \in M_\alpha$ kehtivus ka pärast relativiseerimist, s.t. $\forall x (x \in L \longrightarrow (x \in L)_L)$. Et aga $(V = L)_L \longleftrightarrow [\forall x (x \in L)]_L$, siis ongi teoreem tõestatud.

4. VA vasturääkimatuse tõestus.

S.t. tõestame VA kehtivuse mudelis L. Kuna VA on ekvivalentne Zermelo teoreemiga täielikust järjestamisest, eeldusel, et kehtivad ülejäänud Zermelo aksioomid, siis piisab, kui näidata, et kõik hulgad mudelis L on ühesel viisil täielikult järjestatud.

Teoreem. Süsteemis A eksisteerib valem $\mathfrak{A}(z, w, X, Y)$, mille korral seos $z < w \longleftrightarrow \mathfrak{A}(z, w, X, Y)$ indutseerib hulga X' täieliku järjestuse, kui Y on hulga X täielik järjestus.

Tõestus. Näitame, et X' on täielikult järjestatav. Siis defineerime valemi $\mathfrak{A}$, mis määrab selle järjestuse. Nummerdame süsteemi A valemid mingil efektiivsel viisil (siin on valemid nii kvantoritega kui ka kvantoriteta). On võimalik näidata, et süsteemis A on avaldatav funktsioon $z = \Psi_X(n, t_1, \dots, t_m)$. $z = \Psi_X(n, t_1, \dots, t_m) \longleftrightarrow \forall u [u \in z \longleftrightarrow \exists x_1, \dots, x_k \; x_1 \in X \wedge \dots \wedge x_k \in X \wedge u = \langle x_1, \dots, x_k \rangle \wedge \wedge \mathfrak{C}_{n,X}(x_1, \dots, x_k; t_1, \dots, t_m)]$. Nimelt saab näidata, kui lugeda valemi $\mathfrak{C}_n(x_1, \dots, x_k, t_1, \dots, t_m)$ esituseks number n ja n_X valemi $\mathfrak{C}_{n,X}(x_1, \dots, x_k, t_1, \dots, t_m)$ esituseks, et n_X on lihtrekursiivne funktsioon n-st ja X-st. Järelikult on ta avaldatav süsteemis A. Kui $\mathfrak{C}_{n,X}(x_1, \dots, x_k, t_1, \dots, t_m)$ esitus n_X on rahuldatud $x_1, \dots, x_k, t_1, \dots, t_m$ korral, siis kirjutame $n_X(x_1, \dots, x_k, t_1, \dots, t_m)$. Valemi esitust kasutades saame nüüd funktsiooni $\Psi_X = z$ jaoks järgmised ekvivalentsid:

$$z = \Psi_X(n, t_1, \dots, t_m) \longleftrightarrow z = \{ \langle x_1, \dots, x_k \rangle \; x_1 \in X \wedge \dots \wedge \wedge x_k \in X \mid n_X(x_1, \dots, x_k, t_1, \dots, t_m)\}$$ ja

$$n_X(x_1, \dots, x_k, t_1, \dots, t_m) \longleftrightarrow \mathfrak{C}_{n,X}(x_1, \dots, x_k; t_1, \dots, t_m).$$

Hulga X täielik järjestus indutseerib nüüd hulga

$\{<n, t_1, \dots, t_k> \mid n \in \omega \wedge t_i \in X\}$ täieliku järjestuse.

Defineerime iga $z \in X'$ korral $\varphi(z)$, mis olgu esimene $<n, t_1, \dots, t_m>$ -dest, milliaed antud z korral rahuldavad funktsiooni $\psi_X(n, t_1, \dots, t_m) = z$. Võttes $z < w$, kui $\varphi(z) < \varphi(w)$ saame defineerida valemi $\mathfrak{A}(z, w, X, Y)$.

Kuna $M_\alpha = (\bigcup_{\beta<\alpha} M_\beta)'$, siis selle täielikuks järjestamiseks võime kasutada transfiniitset rekursiooni. Nimelt, kui $\forall \beta \; \beta < \alpha$ korral M_β on täielikult järjestatud, siis saab täielikult järjestada $\bigcup_{\beta<\alpha} M_\beta$ ja tõestatud teoreemi põhjal ka M_α.

Et süsteemis A iga hulk x on konstruktiivne (kehtis $V = L$), siis leidub alati mingi γ, et $x \in M_\gamma$. Kui $\alpha = \min\{\gamma \mid x \in M_\gamma\}$, siis saame ühese vastavuse $\varphi(x) = \alpha$. Nii et $x, y \in L$ korral $x < y$, kui $\varphi(x) < \varphi(y)$. Kui $\varphi(x) = \varphi(y) = \alpha$, siis peab x ja y vaheline järgnevus olema määratud eespool saadud M_α täieliku järjestusega.

Järelikult eksisteerib valem, mis järjestab kõik hulgad mudelis L. Seega kehtib VA.

Резюме

Целью данной работы была конструировать интуитивно аксиоматику, которая удовлетворяла бы систему множеств, полученную из модели системы ZF, путём генерирования. Эта новая система A оказалась сильнее чем система ZF, причём она даёт недостижимые множества, в то время как ZF ничего не утверждает об их существовании.

Данная работа содержит ещё доказательство об относительной непротиворечивости аксиомы выбора в системе A. В виду того, что в доказательстве, при которой все аксиомы ZF кроме аксиомы выбора вытекают из новых аксиом A, не используют аксиомы выбора из системы A, можно сказать, что из относительной непротиворечивости в системе A вытекает непротиворечивость в системе ZF.

Kirjandus

1. Коэн П. Дж. (Cohen). Теория множеств и континуум - гипотеза, Москва, 1969.
2. Френкель А., Бар - Хиллел Н. (Fraenkel, Bar-Hillel). Основания теории множест, Москва, 1966.
3. Клини С.К. (Kleene), Введение в метаматематику, Москва, 1957.
4. Гёдель К. (Gödel). Совместимость аксиомы выбора и обощенной континуум - гипотеза с аксиомами теории множеств, Успехи матем. наук, 3, № 1, 1948, стр. 96-149.

S i s u k o r d