Lehrbuch

der

Planimetrie

von

A. Paulson.

Dorpat.
Gedruckt bei E. J. Karow, Universitäts-Buchhändler.

1862.

Gebilligt von der Censur.
Dorpat, den 11. Juli 1862.

Einleitung.

„Die Geometrie handelt von den Gebilden des Raumes."

Der Begriff der Ausdehnung und des Ausgedehnten, des Raumes, entsteht in uns durch Bewegung.

Erwachen wir plötzlich in vollkommener Finsterniß, und können uns nicht besinnen, wo wir uns befinden, so tasten wir umher, d. h. wir machen Bewegungen nach allen Seiten, um uns zu überzeugen, ob wir Raum um uns haben. — Wie der, im Finstern erwachende Erwachsene absichtlich und mit Bewußtsein umher tappt, da die Vorstellung des Raumes schon in ihm lebt, und er sich bloß überzeugen will, in wie weit dieselbe hier verwirklicht ist — so bewegt das neugeborene Kind seine Gliedmaßen absichtslos und unbewußt, getrieben durch einen inneren Naturdrang, oder auch in Folge einer äußeren Veranlassung, und entwickelt erst so in sich den Begriff des Raumes, den es dann, sobald es zum Bewußtsein erwacht, schon in sich vorfindet.

Im Raume ist nach allen Richtungen Bewegung möglich: „Der Raum ist das Allseitig Ausgedehnte." — Die Ausdehnungen des Raumes sind endlos, grenzenlos. — „Der Raum ist unendlich." — Im unendlichen Raume giebt es endliche, begrenzte Räume, die wir Körper nennen. — Der Körper ist, als Theil des Raumes, allseitig ausgedehnt, doch geben wir ihm als kennzeichnendes Merkmal drei Dimensionen (Abmessungen), indem die Erstreckung des Körpers in jeder beliebigen Richtung auf die drei Dimensionen zurückgeführt, oder als aus ihnen zusammengesetzt, betrachtet werden kann.

In der einen Ecke eines Zimmers am Fußboden sitzt ein Vogel; eine Katze springt hinzu, — der Vogel fliegt hinauf in die gegenüberliegende Ecke, und setzt sich oben auf den Sims eines Pfeilers. Die Katze schleicht ihm nach — zuerst längs der einen Wand vorwärts, dann längs der zweiten Wand seitwärts, endlich an dem Pfeiler hinauf in die Höhe. — Die Katze hat eine dreifache Bewegung gemacht, vorwärts, seitwärts, in die Höhe, oder der Länge, der Breite und der Höhe nach. Der Vogel hat nur eine einfache Bewegung gemacht, doch auch er ist vorwärts, seitwärts und in die Höhe gekommen.

„Der Körper ist die Raumform, welche drei Dimensionen, Länge, Breite und Höhe (Tiefe, Dicke) hat."

Nehmen wir dem Körper die eine Dimension, so gelangen wir zu seiner Grenze. Die Grenze eines Körpers heißt Fläche.

„Die Fläche ist die Raumform, welche zwei Dimensionen, Länge und Breite hat."

Denken wir uns die eine Wand eines Zimmers beweglich und rücken sie gegen die gegenüberstehende vor, so verschwindet nach und nach die eine Dimension des Zimmers; es verschwindet aber in gleichem Maaße das Zimmer, der Raum, und es bleibt schließlich nur die Grenze, wo die beiden Wände aneinanderstoßen (die innere Wandfläche) übrig. — Bewegt sich ein Körper in einem begrenzten Raume immer in einer bestimmten Richtung fort, so gelangt er endlich zur Grenze. Hier ist nur noch nach zwei Hauptrichtungen Bewegung möglich (seitwärts und aufwärts), nicht mehr in der ursprünglichen dritten Richtung (vorwärts).

Auch die Fläche kann begrenzt gedacht werden. — Ihre Grenze muß, als solche, wieder eine Dimension weniger haben, als die Fläche selbst. Die Grenze einer Fläche nennen wir Linie.

„Die Linie ist die Raumform, welche bloß eine Dimension, die Länge, hat."

Die Grenze einer Linie heißt Punkt. — Als Grenze der Linie muß der Punkt wiederum eine Dimension weniger haben als die Linie.

„Der Punkt ist die Raumform, welche keine Dimension hat."

Diese vier Raumformen bilden den Gegenstand für die Betrachtungen der Geometrie, und zwar hat die Geometrie an ihnen zu betrachten:

1) Die Größe der Ausdehnung, oder kurz — die Größe.

2) Die Art der Ausdehnung, oder die Form.

Sowohl nach Größe als nach Form kann eine Raumform durch andere, einfachere, bestimmt sein. Man nennt die letzteren die Elemente der ersteren, und es hat die Geometrie daher noch zu betrachten:

3) Die Abhängigkeit von den Elementen.

4) Die Lage.

Da die einfacheren Raumformen den zusammengesetzteren offenbar als Elemente dienen, so hat man den Anfang mit der einfachsten Form, dem Punkte, zu machen.

1. Welcher Unterschied zwischen der physischen und mathematischen Auffassung der Raumgrößen?

2. Kann eine Fläche, eine Linie, ein Punkt für sich bestehen?

3. Wie müssen die Körper beschaffen sein, die zur Versinnlichung einer Fläche, einer Linie, eines Punktes dienen können?

4. Was sind die Theile eines Körpers, einer Fläche, einer Linie, eines Punktes?

5. Kann ein Körper zum Theil von einer Linie, von einem Punkte begrenzt werden?

Erster Abschnitt.

Vom Punkte.

Da der Punkt die einfachste Raumform ist, so kann er durch nichts Einfacheres bestimmt werden, d. h. der Punkt hat keine Elemente, er ist durch sich selbst bestimmt. — Da ferner der Punkt keine Ausdehnung hat, so hat er weder Größe noch Gestalt: Alle Punkte sind sowohl der Größe, als der Form nach gleich; (sie sind gleich und ähnlich) d. h. congruent (sich deckend).

Zweiter Abschnitt.

Von der Linie.

Cap. I.

Die allgemeinen Eigenschaften der Linie; Classification und Abhängigkeit von den Elementen.

Durch Bewegung entsteht in uns der Begriff der Ausdehnung: „Durch die Bewegung eines Punktes entsteht die Linie."

Fängt ein Punkt an sich auf einen anderen Punkt hin zu bewegen (hat dazu gleichsam die Absicht), so sagt man von ihm, er hat oder nimmt eine Richtung. — Führt der Punkt die Bewegung so aus, daß er fort und fort auf denselben Punkt hinstrebt, so entsteht eine, vor allen anderen ausgezeichnete Linie, man nennt sie die gerade Linie, und wir erhalten als die erste Eigenschaft der geraden Linie: Die gerade Linie ist Ausdruck der Richtung. — Alle anderen Linien heißen krumme Linien. — Die krummen Linien theilt man ein in stetig gekrümmte und gebrochene; geschlossene und offene; Linien einfacher und doppelter Krümmung.

Wie muß ein Punkt sich bewegen, um eine jede der angeführten Arten von krummen Linien zu beschreiben?

Denkt man sich mehrere Punkte in einem Punkte vereinigt, so können sie im Allgemeinen auf verschiedene Weise zu demselben zweiten Punkte gelangen. — „Zwischen zwei Punkten sind unzählig viele Li-

nien möglich." — Bewegen sich aber alle Punkte so, daß sie stets auf denselben zweiten Punkt hinstreben, so beschreiben sie alle dieselbe Linie. — „Zwischen zwei Punkten ist nur eine gerade Linie möglich." — Da die gerade Linie, unter allen Linien zwischen zwei Punkten, allein bestimmt ist, so kann sie auch allein als Ausdruck der Entfernung gebraucht werden. — Als zweite Eigenschaft der geraden Linie erhalten wir daher: „Die gerade Linie ist Ausdruck der Entfernung." Sowohl als Ausdruck der Richtung, wie auch als Ausdruck der Entfernung, ist eine gerade Linie durch zwei Punkte bestimmt. „Die Elemente einer geraden Linie sind zwei Punkte."

1. Grundsatz. „Durch und zwischen zwei Punkten ist nur eine gerade Linie möglich."

Faßt man die gerade Linie als Entfernung auf, so sind die sie bestimmenden Punkte zugleich ihre Endpunkte; faßt man sie als Richtung auf, so muß man sie als unbegrenzt, oder über die, sie bestimmenden Punkte unendlich erweitert sich vorstellen.

2. Forderung. „Ein Jeder muß zwischen und durch zwei Punkte eine gerade Linie sich denken und ziehen können."

Für die zeichnende Geometrie wird hiermit die Benutzung eines Lineales vorausgesetzt.

Cap. II.

Die Größe.

§ 1. Größen und Größen-Verhältnisse der Linien im Allgemeinen.

3. Definition. Linien sind gleich groß, wenn sie, bei gemeinschaftlichen Endpunkten, in ihrer ganzen Ausdehnung sich decken.

4. Lehrsatz. „Gerade Linien mit gemeinschaftlichen Endpunkten sind gleich."

Bew. folgt aus 1 und 3.

5. Aufgabe. „Auf einer unbegrenzten Linie XY ist ein Punkt A gegeben. Man soll von diesem Punkte aus ein Stück von der unbegrenzten geraden Linie abschneiden, welches einer gegebenen begrenzten geraden Linie CD gleich ist." [Fig. 1.]

Lösung. Man denke sich die begrenzte Linie CD beweglich und so auf die Linie XY getragen, daß der eine Endpunkt (C) mit dem gegebenen Punkte A zusammenfällt. Der Punkt (B) der Linie XY, auf welchen der zweite Endpunkt (D) der begrenzten Linie fällt, wäre dann der zweite Endpunkt des, der Linie CD gleichen Stückes der Linie XY. — Sind aber die Linien nicht ideale (mathematische) Linien, oder auch durch nicht bewegliche Körper, sondern durch unbewegliche Striche (wie in der zeichnenden Geometrie) versinnlicht, so muß man eine dritte bewegliche Linie zu

Hilfe nehmen. — Da aber eine gerade Linie durch ihre Endpunkte vollkommen bestimmt ist, so bedient man sich hierzu bequemer eines Instrumentes, welches so eingerichtet ist, daß man zwei Punkte in jede beliebige Entfernung von einander bringen, und sie dann so festsetzen kann, daß sie diese ihre gegenseitige Entfernung nicht ändern können. — Dieses Instrument nennt man einen Zirkel. — Mit Hilfe dieses Instrumentes wird die Aufgabe nun also gelöst:

Man deckt mit den Zirkelspitzen die Endpunkte der Linie CD (d. h. man nimmt CD in den Zirkel), setzt dann die eine Spitze in den Punkt A und bezeichnet den Punkt der Linie XY, auf welchen die zweite Spitze trifft. Ist dieser B, so ist AB = CD, denn es sind die Linien CD und AB beide der, durch die Zirkelspitzen bestimmten Linie gleich. — Hierbei muß man folgenden Satz unmittelbar als wahr anerkennen:

6. Grundsatz. „Wenn zwei Größen einer dritten gleich sind, so sind sie unter einander gleich."

7. Erklärung. Nimmt man auf einer unbegrenzten Linie einen beliebigen Punkt, so kann man von diesem Punkte aus auf der Linie in zwei entgegengesetzten Richtungen fortschreiten. — Diesen Gegensatz in der Richtung drückt man durch die Adjectiva positiv und negativ aus. Welche Richtung man als die positive wählt, ist an sich gleichgiltig.

8. Erklärung. Denkt man sich zwei begrenzte gerade Liaien so zusammengesetzt, daß sie den einen Endpunkt gemein haben, die nicht gemeinschaftlichen Endpunkte aber mit dem gemeinschaftlichen in gerader Linie liegen, so ist durch die nicht gemeinschaftlichen Endpunkte eine dritte gerade Linie gegeben. — Diese dritte Linie heißt die Summe der beiden erstern, sobald sie den gemeinschaftlichen Punkt zwischen ihren Endpunkten hat. Die zur Summe vereinigten Linien heißen Summanden. — Zwei Linien aber zur Summe vereinigen heißt sie addiren. — Die dritte Linie heißt die Differenz der beiden ersteren, sobald sie den gemeinschaftlichen Punkt nicht zwischen ihren Endpunkten hat. — Zu zwei Linien die Differenz construiren, heißt sie subtrahiren.

Liegen die drei Punkte A, B, C in gerader Linie und ist B der gemeinschaftliche Punkt, so ist AC in der Lage Fig. 2 die Summe, in der Lage Fig. 3 die Differenz der Linien AB und BC, und wir schreiben im ersteren Falle AC = AB + BC, im letzteren AC = AB — BC.

9. Aufgabe. Es soll eine Linie construirt werden, die gleich der Summe zweier gegebenen Linien ist. [Fig. 4 a.]

Lösung. Es seien AB und CD die beiden gegebenen Linien. — Man nehme eine dritte, unbegrenzte Linie XY und darauf den Anfangspunkt E. Von E aus schneide man nun EF = AB und von F aus, in derselben Richtung, FG = CD ab (s. 5.), so ist EG, die Summe

der Linien EF und EG (s. 8.), auch gleich der Summe der Linien AB und CD:

$$EG = AB + CD,$$

indem wir unmittelbar als wahr anerkennen den Satz:

10. Grundsatz. „Gleiches zu Gleichem addirt giebt Gleiches."

Es unterliegt keinem Zweifel, daß wir eine Linie von gleicher Länge erhalten, wenn wir vom Anfangspunkte E aus zuerst $EF = CD$ und dann von F aus $FG = AB$ abschneiden. [Fig. 4 b.]

11. Grundsatz. „Die Reihenfolge der Summanden hat auf die Größe der Summe keinen Einfluß."

12. Aufgabe. Es soll eine gerade Linie construirt werden, die gleich der Differenz zweier gegebenen geraden Linien ist. [Fig. 5.]

Lösung. Sind die gegebenen Linien durch AB und CD versinnlicht, so nehme man die unbegrenzte Gerade XY und schneide von dem beliebigen Anfangspunkte E aus das Stück $EF = AB$ und von F aus in entgegengesetzter Richtung das Stück $FG = CD$ ab, so ist EG, die Differenz der Linien EF und FG, auch gleich der Differenz der Linien AB und CD. Denn:

13. Grundsatz. „Gleiches von Gleichem subtrahirt giebt Gleiches.

Hierbei können drei Fälle eintreten:

1) Der Punkt G fällt vom Anfangspunkte E aus in die ursprüngliche Richtung (hier nach rechts); dann ist $CD < AB$ und die Differenz ist positiv.
2) Der Punkt G fällt auf den Anfangspunkt E; alsdann ist $CD = AB$ und ihre Differenz ist null.
3) Der Punkt G fällt vom Anfangspunkt E in die entgegengesetzte Richtung (hier nach links); alsdann ist $CD > AB$ und ihre Differenz ist negativ.

Drei Linien, a, b, c sind gegeben, es soll eine vierte x construirt werden, und zwar:

1) $x = a + (b + c)$
2) $x = a + (b - c)$
3) $x = a - (b + c)$
4) $x = a - (b - c)$

Anmerkung. Die Aufgaben 5, 9, 12, so wie die Aufgaben des Uebungsstoffes, haben die Schüler in sauberer Zeichnung auszuführen und zugleich eine Beschreibung des Verfahrens zu geben. Wie nothwendig das Letztere ist, wird man sogleich daraus erkennen, daß bei weitem die Mehrzahl der Schüler anfangs ganz ungenügende Beschreibungen liefern während man es doch nicht in Abrede stellen kann, daß das Vermögen, in klaren Worten Rechenschaft über sein Thun abzulegen, erst das vollkommene Verständniß documentirt. — Einen besondern Werth gewinnt die Lösung dieser Aufgaben für den Schüler noch dadurch, daß sie ihm die algebraische Addition und Subtraction veranschau-

licht. In den Aufgaben 2 und 4 des Uebungsstoffes hat man die Linie c auch größer als b zu nehmen, um auch die Addition und Subtraction negativer Linien erklären zu können, wobei die Definitionen dahin zu erweitern sind: „Eine Linie zu einer andern addiren heißt, sie in ihrer Richtung antragen; — eine Linie von einer andern subtrahiren heißt, sie in der Richtung ansetzen, die der ihrigen entgegengesetzt ist." — Ueberhaupt lasse man die Aufgaben auf zwei Arten lösen: zuerst an zwei unbegrenzten Linien, indem man den in Klammern geschlossenen Ausdruck besonders construirt; darnach an einer unbegrenzten, indem man die Linien nach einander zur Construction verwendet. Dadurch wird die s. g. Lösung der Klammer veranschaulicht.

14. Grundsatz. „Bei gemeinschaftlichen Endpunkten ist die gerade Linie unter allen die kürzeste."

15. Lehrsatz. „Von zwei einmal gebrochenen Linien mit gemeinschaftlichen Endpunkten ist die umschlossene stets kleiner als die umschließende."

1. Fall. Der mittlere Punkt (D) der umschlossenen Linie (ADC liegt auf der umschließenden (ABC). [Fig. 6.]

Bew. Hier haben die beiden gebrochenen Linien (ABC und ADC) das Stück DC gemein. Von dem nicht gemeinschaftlichen ist aber das Stück ABD, der umschließenden Linie, größer als das Stück AD der umschlossenen (14.). Mithin ist auch die ganze umschließende Linie größer als die umschlossene.

$$ABD > AD \text{ (s. 14.)}$$
$$DC = DC$$
$$\overline{ABD + DC > AD + DC}$$
$$\text{d. h.} \quad ABC > ADC.$$

2. Fall. Der mittlere Punkt der umschlossenen Linie liegt nicht auf der umschließenden. [Fig. 7.]

Bew. Weil hier die beiden gebrochenen Linien (ABC und ADC) kein Stück gemein haben, so lassen sie sich auch nicht unmittelbar mit einander vergleichen. Man muß daher eine dritte Linie suchen, mit welcher sich beide vergleichen lassen. Diese dritte Linie erhält man, wenn man den einen Theil der umschlossenen verlängert, bis die Verlängerung die umschließende Linie (in dem Punkte E) trifft. Alsdann hat man zwischen den beiden Endpunkten A und C drei gebrochene Linien: ABC, AEC und ADC, und es ist nach dem vorigen Falle:

$$ABC > AEC$$
$$AEC > ADC$$
$$\text{um so mehr} \quad \overline{ABC > ADC.}$$

16. Lehrsatz. Von zwei mehrmals gebrochenen Linien einfacher Krümmung ist die umschlossene kürzer als die umschließende.

Bew. Ist ABCDE die umschließende, AFGE die umschlossene, mehrmals gebrochene Linie, so verlängere man die einzelnen Theile der um-

schlossenen Linie, bis die Verlängerungen die umschließende treffen (in den Punkten H und J); alsdann ist:

$$ABCDE > AHDE \left\{ \begin{array}{l} \text{Beide haben } HDE \text{ gemein und} \\ ABCH > AH \text{ (s. 14.)} \end{array} \right.$$

$$AHDE > AFJE \left\{ \begin{array}{l} \text{Beide haben } AF \text{ und } JE \text{ gemein} \\ \text{und } FHDJ > FJ \text{ (s. 14.).} \end{array} \right.$$

$$ABCDE > AFJE$$

$$AFJE > AFGE \left\{ \begin{array}{l} \text{Sie haben } AFG \text{ gemein und} \\ GJE > GE \text{ (s. 14.).} \end{array} \right.$$

$$ABCDE > AFGE.$$

17. Lehrsatz. „Unter allen Linien einfacher Krümmung zwischen denselben Endpunkten ist die umschlossene die kürzeste."

Bew. Ist ABC die umschlossene Linie und nicht kürzer als die sie umschließenden, so muß unter den letzteren doch eine sein, welche die kürzeste, also auch kürzer als ABC oder ihr höchstens gleich, ist. — Es sei nun ADC diese kürzeste Linie, so kann man auf ihr immer zwei Punkte (H und J) so wählen, daß die gerade Linie (HJ) zwischen denselben, die Linie ABC nicht schneidet. — Dann ist aber HJ als gerade Linie kürzer als HDJ, mithin auch AHJC kürzer als ADC, und umschließt zugleich ABC. Also kann ADC nicht die kürzeste sein, sondern alle umschließenden Linien sind länger als ABC.

Bemerkung. Wird die eine von zwei krummen Linien, mit gemeinschaftlichen Endpunkten, nicht von der anderen umschlossen, so läßt sich über ihr Größenverhältniß auch nichts Bestimmtes sagen. Nur über das Größenverhältniß ihrer Theile läßt sich noch folgender Satz aufstellen:

18. Lehrsatz. „Wenn zwei einmal gebrochene Linien mit gemeinschaftlichen Endpunkten sich schneiden, so sind die sich schneidenden Theile zusammen größer, als die sich nicht schneidenden Theile." [Fig. 10.]

Bew. Schneiden sich die gebrochenen Linien ABC und ADC in E, so werden die sich schneidenden Theile in je zwei Theile zerlegt und es sind nun die beiden Theile AE und BE zusammen größer als AB, die Theile DE und CE zusammen größer als DC. Folglich sind die vier Theile, d. h. die beiden sich schneidenden Theile AD und BC zusammen größer als die sich nicht schneidenden AB und DC.

$$\left. \begin{array}{r} AE + EB > AB \\ DE + EC > DC \end{array} \right\} \text{(s. 14.)}$$

$$(AE + DE) + (EB + EC) > AB + DC,$$

d. h. $$AD + BC > AB + DC.$$

§ 2. Die Ausmessung und das Verhältniß gerader Linien.

Läßt sich eine Linie mehrmals von einer anderen Linie abschneiden, so daß kein Rest bleibt, so heißt sie ein Maaß der anderen, — letztere ein Vielfaches der ersteren. — Die Zahl aber, welche angiebt, wie oft das Maaß in der vorgelegten Linie enthalten ist, heißt die Maaßzahl dieser Linie.

Ist z. B. die Linie CD vier Mal in der Linie AB enthalten, so ist AB das Vierfache der Linie CD und man schreibt $AB = 4 . CD$, oder auch $\frac{AB}{CD} = 4$, d. h. AB gemessen durch CD giebt 4.

Läßt die größere von zwei geraden Linien, durch die kleinere gemessen, einen Rest, so ist eine dritte Linie denkbar, welche zugleich ein Maaß beider Linien ist. Diese dritte Linie heißt das gemeinschaftliche Maaß beider Linien. — Das Verhältniß der Maaßzahlen bestimmt dann zugleich das Größenverhältniß der beiden Linien.

19. Grundsatz. „Zwei Linien verhalten sich zu einander wie ihre Maaßzahlen."

Bezeichnen wir das gemeinschaftliche Maaß der beiden Linien a und b durch m, und sind α und β die respectiven Maaßzahlen, so ist:

$$a = \alpha . m$$
$$b = \beta . m$$
$$a : b = \alpha . m : \beta . m = \alpha : \beta.$$

(Gelesen: Die Linie a verhält sich zur Linie b, wie α zu β.)

Ist aber $b = \beta . m$, so ist m der βte Theil der Linie b; — ist nun zugleich $a = \alpha . m$, so kann man sagen: der βte Theil der Linie b giebt αmal gesetzt (addirt) die Linie a, was man also in Zeichen ausdrückt:

$$a = \frac{\alpha}{\beta} . b.$$

Im weiteren Sinne nennt man nun auch den Bruch $\frac{\alpha}{\beta}$ Maaßzahl der Linie a, indem man b als Maaßeinheit setzt.

In diesem Sinne sagen wir z. B. eine Linie ist $^3/_4$ Zoll lang.

20. Aufgabe. Es soll das gemeinschaftliche Maaß zweier Linien ermittelt werden. [Fig. 11.]

Lösung. Sind AB und CD die gegebenen Linien, so schneidet man die kleinere (CD) so oft als möglich von der größeren (AB) ab, den Rest (EB) ebenfalls so oft als möglich von der kleineren (CD), den abermaligen Rest von dem vorigen u. s. f., den jedesmaligen Rest so oft als möglich von dem vorhergehenden, bis kein Rest bleibt. Der letzte Rest ist dann das gemeinschaftliche Maaß beider Linien:

$$AB = 2 . CD + EB$$
$$CD = 2 . EB + FD$$
$$EB = 2 . FD.$$

Die Maaßzahlen der Linien (AB und CD) hat man nun nicht durch eine neue Messung zu ermitteln, sondern sie ergeben sich durch Rechnung aus den Gleichungen, welche die Resultate der jedesmaligen Messung ausdrücken. Zu dem Zwecke beginnt man mit der letzten Gleichung und bestimmt, aufwärts gehend, das Verhältniß der einzelnen Linien zu dem gemeinschaftlichen Maaße (FD) wie folgt:

$$EB = 2FD$$
$$CD = 2 . EB + FD = 4FD + FD = 5 . FD.$$
$$AB = 2 . CD + EB = 2 . 5FD + 2FD = 12 . FD$$

$AB : CD = 12 : 5$ (d. h. AB verhält sich zu CD, wie 12 zu 5), oder .... $AB = {}^{12}/_{5} . CD$ (d. h. der 5te Theil von CD giebt 12mal gesetzt die Linie AB).

Wenn nun auch eine jede, in obiger Weise ausgeführte Messung in Wirklichkeit stets ein Ende erreichen wird, indem der Rest, wenn ja einer bleibt, schließlich so klein wird, daß er nicht mehr aufgefaßt werden kann, — so ist es doch denkbar (und auch theoretisch nachweisbar), daß es Linien giebt, die kein gemeinschaftliches Maaß haben. Solche Linien nennt man incommensurabel und ihr Verhältniß irrational, während im entgegengesetzten Falle die Linien commensurabel und ihr Verhältniß rational heißt. Das Verhältniß incommensurabler Linien kann durch keine bestimmte Zahl angegeben werden, man kann sich demselben aber durch Grenzen so weit nähern, als man will (oder, bei einer Bestimmung durch Messung, so weit die Mittel es erlauben).

Die Grenzen für das Verhältniß incommensurabler Linien findet man, wenn man in den Gleichungen, welche die Resultate der Messung ausdrücken, den jedesmaligen Rest zuerst = 0, dann gleich dem Maaße setzt.

Haben sich z. B. für die Linien a und b durch Messung folgende Gleichungen ergeben:

$$a = 2b + r_1$$
$$b = 3r_1 + r_2$$
$$r_1 = 2 . r_2 + r_3$$
$$r_2 = 3 , r_3 + r_4$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

so setzt man:

$$1 \begin{cases} r_1 = 0 \text{ und erhält } a = 2b \text{ oder } \frac{a}{b} = 2 \\ r_1 = b \quad . \quad a = 3b \quad . \quad \frac{a}{b} = 3 \end{cases}$$

$$2\begin{cases} r_2 = 0 \text{ und erhält} \begin{cases} b = 3r_1 \\ a = 7r_1 \end{cases} \text{ oder } \frac{a}{b} = {}^7/_3 = 2\,{}^1/_3 \\ r_2 = r_1 \quad \cdot \quad \cdot \begin{cases} b = 4r_1 \\ a = 9r_1 \end{cases} \cdot \frac{a}{b} = {}^9/_4 = 2\,{}^1/_4 \end{cases}$$

$$3\begin{cases} r_3 = 0 \quad \cdot \quad \cdot \begin{cases} b = 7r_2 \\ a = 16r_2 \end{cases} \cdot \frac{a}{b} = {}^{16}/_7 = 2\,{}^2/_7 \\ r_3 = r_2 \quad \cdot \quad \cdot \begin{cases} b = 10r_2 \\ a = 23r_2 \end{cases} \cdot \frac{a}{b} = {}^{23}/_{10} = 2\,{}^3/_{10} \end{cases}$$

$$4\begin{cases} r_4 = 0 \quad \cdot \quad \cdot \begin{cases} b = 24r_2 \\ a = 55r_3 \end{cases} \cdot \frac{a}{b} = {}^{55}/_{44} = 2\,{}^7/_{24} \\ r_4 = r_3 \quad \cdot \quad \cdot \begin{cases} b = 31r_3 \\ a = 71r_3 \end{cases} \cdot \frac{a}{b} = {}^{71}/_{31} = 2\,{}^9/_{31}. \end{cases}$$

. . . . . .

Woraus sich successive die Grenzen ergeben:

$$2 < \frac{a}{b} < 3 \quad \text{Differenz} = 1$$

$$2\,{}^1/_4 < \frac{a}{b} < 2\,{}^1/_3 \quad \cdot \quad = {}^1/_{12}$$

$$2\,{}^2/_7 < \frac{a}{b} < 2\,{}^3/_{10} \quad \cdot \quad = {}^1/_{70}$$

$$2\,{}^9/_{31} < \frac{a}{b} < 2\,{}^7/_{24} \quad \cdot \quad = {}^1/_{744}.$$

. . . . . .

Setzt man nun den einen der beiden letzten Grenzwerthe, oder noch besser das arithmetische Mittel aus beiden, als wahren Werth des Verhältnisses, so begeht man einen Fehler, der jedenfalls kleiner ist als die Differenz der beiden Grenzen (hier $< {}^1/_{744}$ der Linie b).

Cap. III.

Die Lage.

§ 1. Zwei Gerade.

Für eine gerade Linie ist jede Lage gleichgiltig, oder vielmehr — von der Lage einer geraden Linie für sich, kann überhaupt keine Rede sein.

Lassen wir aber zu einer geraden Linie (AB) eine zweite gerade Linie, oder, was dasselbe ist, zwei Punkte (C und D) hinzukommen, so sind folgende drei Lagen möglich:

1) Die beiden Punkte (C und D) liegen auf der geraden AB.
2) Der eine Punkt (etwa C) liegt auf der Geraden AB, der andere nicht.
3) Beide Punkte (C und D) liegen außerhalb der Linie AB.

Liegen erstens die beiden Punkte C und D auf der Linie AB, so folgt aus dem Begriffe der geraden Linie unmittelbar, daß die, durch die Punkte C und D bestimmte gerade Linie in allen ihren Punkten mit der Linie AB zusammenfällt.

21. Grundsatz. „Wenn zwei gerade Linien zwei Punkte gemein haben, so fallen sie in ihrer ganzen Ausdehnung zusammen (s. 1).

Liegt zweitens [Fig. 12] der eine Punkt (C) auf der Linie AB, der zweite (D) nicht, so geht zunächst aus dem ersten Falle unmittelbar hervor, daß alsdann die beiden Linien (AB und CD), außer dem Punkte C, keinen Punkt mehr gemein haben können. Denn hätten sie noch einen zweiten Punkt gemein, so müßten sie, eben nach 21, in ihrer ganzen Ausdehnung zusammenfallen, und es könnte also auch der Punkt D nicht außerhalb der Linie AB liegen, was doch gerade die Voraussetzung ist.

Hiermit ist aber die Lage der Linie CD zu AB noch nicht bestimmt. — Um diese vollends zu ermitteln, müssen wir die Linie CD aus der ersten Lage, in der sie mit AB zusammenfiel, in diese zweite übergehen lassen, d. h. wir müssen den einen Punkt D aus der Linie AB herausrücken, während der Punkt C festbleibt. — Dann aber müssen sich, außer C, alle Punkte der Linie CD aus der Linie AB herausbewegen, und zwar alle in gleichem Sinne, woraus folgt, daß alle Punkte der Linie CD, die mit D nach derselben Seite von C aus liegen, auch nach derselben Seite hin von AB sich bewegen, während die Punkte der Linie CD, die von C aus nach der entgegengesetzten Seite liegen, sich auch nach der entgegengesetzten Seite der Linie AB hin bewegen. Darnach werden die Theile der einen Linie $\left\{\begin{matrix}CD\\AB\end{matrix}\right\}$ von C aus nach verschiedenen Seiten der anderen $\left\{\begin{matrix}AB\\CD\end{matrix}\right\}$ zu liegen kommen; d. h. die beiden Linien werden sich schneiden. — Wir erhalten daher den folgenden Satz:

22. Lehrsatz. „Liegt ein Punkt einer geraden Linie außerhalb einer anderen, so können die beiden Geraden überhaupt nur einen Punkt gemein haben und sie müssen sich in diesem Punkte schneiden."

Das Gebilde, welches entsteht, wenn zwei gerade Linien sich schneiden, heißt ein Winkel.

Liegen drittens die beiden Punkte (C und D) außerhalb der Linie AB, so ist es denkbar, daß sich die Linien in ihrer Verlängerung schneiden, aber auch, daß sie überhaupt keinen Punkt gemein haben.

I. Der Winkel.

a) Begriff und Abhängigkeit von den Elementen.

Die Definition: Der Winkel ist das Gebilde zweier sich schneidenden geraden Linien, ist unfruchtbar und ungenügend, was schon daraus hervorgeht, daß wir ein solches Gebilde unter Umständen auch ein Kreuz nennen. Beide Ausdrücke bezeichnen aber offenbar nicht denselben Begriff. Ein Kreuz wird größer, wenn wir die Linien verlängern; die Größe eines Winkels ist aber, wie wir in jedem Lehrbuche lesen, unabhängig von der Länge der Linien.

Bedenken wir nun, daß wir die gerade Linie als Ausdruck der Richtung haben kennen lernen, so erkennen wir, daß uns in diesem Gebilde zwei Richtungen in Beziehung zu einander gegeben sind, und eben diese Beziehung zweier Richtungen auf einander fassen wir in dem Begriffe Winkel auf. Wir erhalten somit die Definition:

23. Defin. „Der Winkel ist der Richtungsunterschied zweier gerader Linien."

Hieraus sieht man nun sogleich, daß die Länge der Linien keinen Einfluß auf die Größe des Winkels haben kann, denn die Länge einer Linie hat keinen Einfluß auf ihre Richtung; ja noch viel mehr — es ist nicht einmal nothwendig, daß die Linien sich wirklich schneiden, denn je zwei gerade Linien in jeglicher Lage bestimmen zwei Richtungen, also auch einen Winkel. — Zur Beurtheilung der Größe des Winkels jedoch wird es meist nothwendig die Linien zum Durchschnitt zu bringen.

Den Durchschnittspunkt der Linien nennt man den Scheitelpunkt des Winkels, die Linien selbst, vom Scheitelpunkte an gerechnet, die Schenkel desselben. — Den Winkel giebt man durch drei Buchstaben an, so daß der Buchstabe am Scheitelpunkte in der Mitte steht.

b) Die Größe in anschaulicher Auffassung.

Denken wir uns die Linie CD [Fig. 18.] mit der Linie AB zusammenfallend, so haben beide Linien offenbar dieselbe Richtung, und es ist kein Winkel vorhanden, oder richtiger — der Winkel, den sie bilden, ist gleich Null. — Bewegen wir aber den einen Punkt (D) aus der Linie AB heraus, so daß ein beliebiger anderer Punkt (E) fest bleibt, so haben wir die Richtung der Linie CD geändert, es ist also ein Winkel entstanden. Soll nun dieser Winkel, bei fortgesetzter Bewegung der Linie CD, stetig wachsen, so muß die drehende Bewegung selbst eine feste sein. — Dazu wird es nothwendig, daß wir die Linie CD längs einer beliebigen dritten Geraden (GH) hingleiten lassen. — Setzt man die Drehung in dieser Weise fort, so muß die Linie CD endlich in die Lage kommen, in der sie

mit AB wieder zusammenfällt. Dann ist ihre Richtung aber ihrer ursprünglichen Richtung, also auch der Richtung der Linie AB, gerade entgegengesetzt. — Die Linie CD hat eine halbe Drehung gemacht, der entstandene Winkel heißt ein gestreckter Winkel. Setzt man die Drehung der Linie CD in gleichem Sinne noch weiter fort, so muß sie endlich in ihre ursprüngliche Lage zurückkehren. — Alsdann hat die Linie CD eine volle Drehung gemacht. — Der Winkel heißt ein completer.

Eine in obiger Weise gedrehte Linie überstreicht eine Fläche von der Beschaffenheit, daß eine gerade Linie, die irgend zwei Punkte derselben verbindet, ganz in sie hineinfällt. — Eine Fläche von dieser Eigenschaft heißt eine ebene Fläche oder kurz Ebene. — In der Folge sollen alle Gebilde als in der Ebene liegend gedacht werden, daher dieser Theil der Geometrie auch ebene Geometrie oder Planimetrie heißt. Jeder einzelne Punkt der gedrehten Linie aber beschreibt eine stetig gekrümmte, geschlossene Linie, deren Punkte alle gleich weit von dem Drehpunkte entfernt sind. — Diese Linie heißt eine Kreislinie.

Hat man zwei sich schneidende gerade Linien (Fig. 13), so kann man, vom Schneidepunkte als Scheitelpunkt ausgehend, vier Winkel unterscheiden, AEC; CEB; BED; AED. — Die zwei Winkel (BED und CEA), die im Scheitel einander gegenüber liegen, und zugleich durch dieselbe Drehung entstehen (so allgemein aufgefaßt also nicht als besondere zu trennen sind), heißen Scheitelwinkel. — Die beiden anderen Winkel (CEB und AED), die unter sich auch Scheitelwinkel sind, bei der Erzeugung aber nicht beabsichtigt waren, sondern gleichsam nebenbei entstanden, heißen Nebenwinkel zu den ersteren.

Aus obiger Betrachtung ergeben sich ohne Weiteres folgende Sätze:

24. Grundsatz. „Scheitelwinkel sind einander gleich."

25. Grundsatz. „Nebenwinkel ergänzen sich zu einem gestreckten Winkel."

Wächst ein Winkel, so nimmt sein Nebenwinkel ab, woraus hervorgeht, daß auch eine Lage der sich schneidenden Linien eintreten muß, in welcher der Winkel seinem Nebenwinkel gleich ist.

26. Defin. „Bilden zwei sich schneidende Linien gleiche Nebenwinkel, so stehen sie senkrecht (lothrecht) zu einander."

27. Defin. „Ein Winkel, welcher seinem Nebenwinkel gleich ist, heißt ein Rechter."

28. Lehrs. „Der rechte Winkel ist die Hälfte eines gestreckten und der vierte Theil eines completen Winkels" (s. 25 und 27).

c) Winkel und Kreislinie.

Die constructive Geometrie gestattet bloß die Benutzung von Lineal und Zirkel. — Mit diesen Instrumenten läßt sich aber zunächst nur die gerade Linie bestimmen, und es ist daher nothwendig, die Winkelconstruction auf die der geraden Linie zurückzuführen. — Als vermittelnde Linie bietet sich die Kreislinie dar, die ja mit dem Winkel zugleich entsteht. — Wir haben daher hier die Kreislinie in so weit in Betracht zu ziehen, als sie zur Bestimmung des Winkels dient.

29. Definitionen. Die von der Kreislinie umschlossene Ebene heißt der Kreis; in Bezug auf den Kreis heißt die Kreislinie auch Peripherie des Kreises. Der von allen Punkten der Kreislinie gleich weit entfernte Punkt der Kreisfläche heißt der Mittelpunkt des Kreises. Die gerade Linie, die den Mittelpunkt mit einem Punkte der Peripherie verbindet, heißt Radius. — Die gerade Linie, welche zwei Punkte der Peripherie verbindet, heißt, so lange sie nicht durch den Mittelpunkt geht, Sehne — geht sie durch den Mittelpunkt, so heißt sie Durchmesser des Kreises. — Der Winkel, dessen Scheitelpunkt im Mittelpunkt des Kreises liegt, heißt Centriwinkel. — Der Winkel, dessen Scheitelpunkt auf der Peripherie liegt, heißt Peripheriewinkel.

Aus dem Begriff der Kreislinie folgt unmittelbar:

30. Grundsatz. „Die Radien eines Kreises sind unter sich gleich, desgleichen die Durchmesser unter sich."

31. Lehrsatz. „Kreise, die mit gleichem Radius erzeugt wurden, sind congruent." [Fig. 14.]

Bew. Sind die Kreislinien um A und B mit gleichem Radius erzeugt und man deckt den Mittelpunkt des Kreises B auf den des Kreises A, so müssen auch die Peripherien in allen Punkten zusammenfallen. Denn fiele nur ein Punkt (etwa E) der Peripherie des Kreises B nicht auf die Peripherie des Kreises A, so müßte der Radius AE die Peripherie des Kreises A in einem Punkte, F, schneiden, und es wäre dann der Radius AE nicht gleich dem Radius AF, was wider die Voraussetzung ist.

32. Lehrsatz. „Zu gleichen Centriwinkeln in gleichen Kreisen gehören auch gleiche Bögen und Sehnen." [Fig. 15.]

$$\text{Vorauss.} \left\{ \begin{array}{l} \odot A = \odot E \\ \angle BAC = DEF. \end{array} \right.$$

$$\text{Behaupt.} \left\{ \begin{array}{l} BC = DF \\ \text{Bog. } BC = \text{Bog. } DF. \end{array} \right.$$

Bew. Man decke den Kreis A so auf den Kreis E, daß die Mittelpunkte, also auch die Peripherien, zusammenfallen (31) und zugleich der

Punkt B auf den Punkt D fällt. Alsdann fällt die Linie AB mit ED und — da Winkel BAC = Winkel DEF ist — auch AC mit EF zusammen. Folglich fällt auch der Punkt C auf den Punkt F. — Mithin ist Bog. und Sehne BC = Bog. und Sehne DF (3.).

33. Lehrsatz. „Zu gleichen Bögen in gleichen Kreisen gehören auch gleiche Centriwinkel und Sehnen." [Fig. 15.]

$$\text{Vorauss.} \left\{ \begin{array}{l} \odot A = \odot E \\ \text{Bog. } BC = \text{Bog. } DF. \end{array} \right.$$

$$\text{Beh.} \left\{ \begin{array}{l} BC = DF \\ \angle BAC = \angle DEF. \end{array} \right.$$

Bew. Man decke den Kreis A so auf den Kreis E, daß die Mittelpunkte, also auch die Peripherien zusammenfallen, und zugleich der Punkt B auf den Punkt D fällt. Alsdann muß auch der Punkt C auf den Punkt F fallen, weil nach der Voraussetzung Bog. BC = Bog. DF ist. — Dann ist aber auch BC = DF, und auch Winkel BAC = Winkel DEF, weil die Schenkel sich decken.

34. Lehrsatz. „Zu gleichen Sehnen in gleichen Kreisen gehören auch gleiche Centriwinkel und Bögen." [Fig. 16.]

$$\text{Vorauss.} \left\{ \begin{array}{l} \odot A = \odot E \\ BC = DF. \end{array} \right.$$

$$\text{Beh.} \left\{ \begin{array}{l} \angle BAC = \angle DEF \\ \text{Bog. } BC = \text{Bog. } DF. \end{array} \right.$$

Bew. Man decke den Kreis A so auf den Kreis E, daß die Sehne BC auf die Sehne DF fällt. Nehmen wir nun an, der Mittelpunkt A falle nicht auf den Mittelpunkt E, so kommen wir stets in Widerspruch mit den Sätzen von gebrochenen Linien mit gemeinschaftlichen Endpunkten. — Denn gesetzt, es falle der Mittelpunkt A auf A_1, so wäre nach der Voraussetzung

$$DA_1 = DE$$
$$EF = A_1F$$

$$DA_1 + EF = DE + A_1F \quad (10).$$

Diese Gleichung aber widerspricht dem Lehrsatze 18.

Nehmen wir ferner an, der Punkt A falle so, daß sich die Radien nicht schneiden, so kommen wir in gleicher Weise in Widerspruch mit Lehrsatz 15. — Es kann also der Mittelpunkt A nur auf den Mittelpunkt E fallen. — Dann decken sich aber auch die Schenkel der Winkel BAC und DEF (21), also sind sie gleich, und mithin auch die zugehörigen Bögen BC und DF (32).

Bemerkung. Mit dem letzten Satze ist die Größe eines Winkels abhängig gemacht von der Größe einer geraden Linie, und wir wären hiernach im Stande einen Winkel zu construiren, welcher einem gegebenen Winkel gleich ist und somit auch das Größenverhältniß zweier Winkel zu bestimmen, sobald wir noch festgestellt haben, unter welchen Bedingungen und wie sich eine gerade Linie als Sehne in einen Kreis tragen läßt. — Hierzu dienen folgende Sätze:

35. Lehrsatz. „Eine jede Sehne ist kürzer als der Durchmesser eines Kreises." [Fig. 17.]

Bew. Verbindet man den Mittelpunkt (A) mit den Endpunkten (B und C) der Sehne, so erhält man stets eine gebrochene Linie [da der Mittelpunkt des Kreises außerhalb der Sehne liegen muß (29)]. Diese gebrochene Linie (BAC) ist als solche länger als die gerade Sehne (14), und da sie aus zwei Radien besteht, so ist sie dem Durchmesser gleich. Folglich ist also auch der Durchmesser länger als die Sehne.

Bemerk. Um nun eine Linie als Sehne in den Kreis zu tragen, nehme man sie in den Zirkel und schlage mit ihr als Radius — nachdem man sich überzeugt hat, daß sie kürzer sei als der Durchmesser — um den gegebenen Punkt der Peripherie des Kreises einen Kreis. Diese Kreislinie wird die gegebene im Allgemeinen in zwei Punkten schneiden (einmal beim Eintritt, das zweitemal beim Austritt), und es sind daher auch von einem Punkte der Peripherie mindestens zwei einander gleiche Sehnen möglich. — Ist aber die gegebene Linie sehr nahe gleich dem Durchmesser, so können die Kreislinien (scheinbar) in einer ganzen Strecke zusammenfallen, und man hat daher noch nachzuweisen, daß das nur daher rühre, daß die gezogenen Kreislinien keine mathematischen Linien sind, sondern eine Breite haben, daß aber bei mathematischen Kreislinien nicht mehr als zwei Durchschnittspunkte möglich sind.

36. Lehrsatz. „Liegt der Mittelpunkt eines Kreises auf der Peripherie eines anderen, so können die Kreislinien sich in nicht mehr als zwei Punkten schneiden."

Bew. Hätten die Peripherien der beiden Kreise drei Punkte (A, B und C) gemein (Fig. 18.), so wären die Verbindungslinien (AM, BM CM) dieser drei Punkte mit dem Mittelpunkte (M), welcher auf der Peripherie des anderen Kreises liegt, als Radien des ersteren Kreises einander gleich. Die genannten drei Linien sind aber auch zugleich Sehnen des zweiten Kreises, und es müßten dann, da sie gleich sind, auch die zugehörigen Bögen gleich sein (34), was aber nicht möglich ist, da entweder Bogen AM oder Bogen CM ein Theil vom Bogen BM ist. Es sind also in der That nur zwei Durchschnittspunkte möglich.

d) Die Ausmessung und das Verhältniß der Winkel.

37. Aufgabe. „Es soll ein Winkel construirt werden, welcher einem gegebenen Winkel gleich ist.“ [Fig. 19.]

Lösung. Man ziehe eine beliebige gerade Linie XY und schlage um einen beliebigen Punkt (D) derselben und auch um dem Scheitelpunkt (A) des gegebenen Winkels (BAC) Kreise mit gleicher Zirkelöffnung. Von dem Durchschnittspunkte (E) des Kreises und der geraden Linie XY aus trage man dann die Sehne EF = CB ein, so ist Winkel FDE = Winkel BAC.

Anm. Aus der Anmerkung zu 35 geht hervor, daß die Construction um so unsicherer wird, je mehr der Winkel einem gestreckten sich nähert.

1) Einen Winkel zu construiren, welcher gleich der Summe zweier gegebenen Winkel ist.

2) Einen Winkel zu construiren, welcher ein (ganzes) Vielfaches eines gegebenen Winkels ist.

3) Einen Winkel zu construiren, welcher gleich der Differenz zweier gegebenen Winkel ist.

38. Aufgabe. „Es soll das Verhältniß zweier Winkel bestimmt werden.“ [Fig. 20.]

Lösung. Mit gleicher Zirkelöffnung schlage man um die Scheitelpunkte beider Winkel (ABC und DEF) Kreisbögen und trage darauf die Sehne (DF) vom kleineren Winkel (DEF), so oft als möglich, als Sehne in den Bogen des größeren Winkels (ABC). Verbindet man nun die Endpunkte der Sehnen mit dem Scheitelpunkte (B), so schneidet man dadurch von dem größeren Winkel eben so viele Winkel ab, welche unter sich und dem kleineren Winkel gleich sind (34). — Bleibt ein Rest, so trage man in gleicher Weise die Sehne des Restes als Sehne in den Bogen des kleineren Winkels, — die Sehne des abermaligen Restes in den Bogen des vorigen Restes u. s. f., bis kein Rest mehr bleibt. — Der letzte Rest ist dann das gemeinschaftliche Maaß beider Winkel. — Aus den Gleichungen, welche die Resultate der jedesmaligen Messung ausdrücken, findet man dann das Zahlenverhältniß der Winkel und die Grenzen, wie unter Nr. 20.

Beisp.

$$\angle ABC = 2 . DEF + ABG \; (= 29 ABJ)$$
$$\angle DFF = 2 . ABG + DEH \; (= 12 ABJ)$$
$$\angle ABG = 2 . DEH + ABJ \; (= 5 ABJ)$$
$$\angle DEH = 2 . ABJ.$$

$$\angle ABC : \angle DEF = 29 : 12,$$
$$\text{oder } \angle ABC = {}^{29}/_{12} . DEF.$$

$$2 < \frac{ABC}{DEF} < 3$$
$$2\tfrac{1}{3} < \frac{ADC}{DEF} < 2\tfrac{1}{2}$$
$$2\tfrac{2}{5} < \frac{ABC}{DEF} < 2\tfrac{3}{7}$$

Zu gleichen Sehnen gehören aber nicht bloß gleiche Centriwinkel, sondern auch gleiche Bögen. — Indem wir daher, in obiger Weise, die Winkel messen, werden zugleich auch die zugehörigen Bögen gemessen, und wir erhalten also für das Bogenverhältniß dieselben Grenzen, als für das Winkelverhältniß. — Bleiben aber zwei Verhältnisse stets zwischen denselben Grenzen, auch wenn die Differenz der Grenzen sich unendlich der Null nähert, so sind die Verhältnisse gleich (Vergl. Arithm. Thl. 1 Lehrs. 59). — Hieraus folgt der Satz:

39. Lehrs. „Centriwinkel verhalten sich, wie die zugehörigen Bögen gleicher Kreise."

Bemerk. Da der complete Winkel eine bestimmte Größe hat, so nimmt man ihn, oder seinen vierten Theil, den rechten Winkel, als Maaß aller Winkel. — Weil aber so die Winkel meist durch unbequeme Brüche ausgedrückt werden müßten, so denkt man sich den completen Winkel in 360 gleiche Theile getheilt und nennt einen solchen Theil einen Grad. Den 60sten Theil eines Grades nennt man eine Minute, den 60sten Theil der Minute eine Secunde, und giebt so die Winkel in Graden, Minuten und Secunden an. — Da nun aber ein Winkel mit dem zugehörigen Bogen in gleichem Verhältnisse wächst, so theilt man statt dessen die Kreisperipherie in 360 Bogengrade, einen Bogengrad in 60 Bogenminuten, die Bogenminute in 60 Bogensecunden, wo dann die Winkel- und Bogengrade Minuten und Secunden sich entsprechen, so daß also z. B. zu einem Bogen von 30^0 ein Winkel gehört, welcher 30 Winkelgrade enthält, oder $^{30}/_{366} = {}^1/_{12}$ vom completen Winkel ist. — Hiernach wird die Bedeutung des Satzes klar sein:

40. Zusatz. „Der Centriwinkel hat den Bogen zwischen seinen Schenkeln zum Maaße."

II. Zwei sich nicht schneidende gerade Linien.

Um die Möglichkeit zweier sich nicht schneidenden geraden Linien in der Ebene nachzuweisen, denke man sich die eine (CD) von zwei zusammenfallenden geraden Linien [Fig. 21] AB und CD so längs einer dritten, sie schneidenden Linie EF, fortgerückt, daß sie zu derselben ihre Richtung nicht ändert, also mit ihr stets denselben Winkel bildet. Während sie in der ursprünglichen Lage alle Punkte mit AB gemein hatte, kann die Linie CD in der neuen Lage (C′D′) keinen Punkt mehr mit AB gemein haben; denn hat sie zu der Linie EF ihre Richtung nicht geändert, so hat sie überhaupt ihre Richtung nicht geändert. Würde sie trotz dem die Linie AB schneiden, so würde sie mit ihr einen Winkel bilden, also von ihr in Richtung verschieden sein, folglich müßte sie auch ihre Richtung geändert haben, was ein Widerspruch ist. — Hiermit ist nicht nur die Möglichkeit

zweier sich nicht schneidenden Linien in der Ebene erwiesen, sondern auch, daß man sich dieselben als Linien gleicher Richtung zu denken hat. — Nennen wir sie Parallellinien, so erhalten wir die Definition:

41. Defin. „Parallel-Linien sind Linien gleicher Richtung."

42. Aufg. „Durch einen gegebenen Punkt eine Linie parallel einer gegebenen Linie zu ziehen." [Fig. 22.]

Aufl.' „Durch den gegebenen Punkt C ziehe man eine Linie FG so, daß sie die gegebene Linie AB in einem Punkte (H) schneidet, und construire darnach an der Linie FG in dem Punkte C den Winkel FCE = CHB, so ist der Schenkel dieses Winkels, DE // AB, denn beide Linien DE und AB unterscheiden sich um gleich viel in Richtung von der Linie FG, also haben sie gleiche Richtung (s. 23).

§. 2. Drei Gerade.

Lassen wir zu zwei Linien eine dritte hinzukommen, so haben wir zu unterscheiden, ob die zwei Linien parallel sind oder nicht:

1) Kommt zu zwei Parallel-Linien eine dritte Linie hinzu, so kann sie der einen derselben parallel sein, oder sie schneidet die eine.

Sind aber die zwei Linien AB und CD parallel [Fig. 23], und es ist die dritte hinzukommende Linie EF der einen AB parallel, so haben die Linien EF und CD beide die Richtung der Linie AB, also unter sich gleiche Richtung, d. h. sie sind parallel. Diese Wahrheit läßt sich also aussprechen:

43. Grundsatz. „Sind zwei Linien einer dritten parallel, so sind sie auch unter sich parallel."

Hieraus ergiebt sich dann ferner der Satz:

44. Lehrsatz. „Schneidet eine Linie die eine von zwei Parallel. Linien, so muß sie auch die andere schneiden." Denn schnitte sie die zweite nicht, so wäre sie ihr parallel und müßte dann (nach 43) auch der ersten parallel sein, was der Voraussetzung widerspricht.

2) Kommt zu zwei sich schneidenden Linien eine dritte hinzu, so kann sie der einen parallel sein und schneidet dann die andere, und wir haben wieder zwei Parallelen und eine Schneidende; — oder sie schneidet beide in je einem Punkte. — „Drei gerade Linien können sich in drei Punkten schneiden, und das entstandene Gebilde heißt ein Dreieck." — In Sonderheit nennt man Dreieck die von drei sich schneidenden Graden umgrenzte Ebene. — Die Durchschnittspunkte heißen die Ecken, die Linien zwischen je zwei Ecken die Seiten, die ganze geschlossene, dreimal gebrochene Linie aber der Umfang des Dreieckes.

a) Zwei Parallelen und eine Schneidende.

Werden zwei Parallel-Linien von einer dritten Linie durchschnitten, — so entstehen, wenn man einen Winkel an der einen Parallelen mit je einem an der anderen verbindet, vier, ihrer Lage (zur Schneidenden und zu den Parallelen) nach unterschiedene Winkelpaare [Fig. 24].

1) Correspondirende Winkel heißen die an derselben Seite der Schneidenden und nach derselben Seite von den Parallelen liegenden Winkel:

$$\left.\begin{array}{l} a \text{ und } a' \\ b \;\cdot\; b' \\ c \;\cdot\; c' \\ d \;\cdot\; d' \end{array}\right\} \text{sind vier Paar correspondirende Winkel.}$$

2) Gegenwinkel heißen die nach derselben Seite der Schneidenden und nach verschiedenen Seiten von den Parallelen liegenden Winkel:

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} a \text{ und } c' \\ b \;\cdot\; d' \end{array}\right\} \text{sind äußere} \\ \left.\begin{array}{l} c \;\cdot\; a' \\ d \;\cdot\; b' \end{array}\right\} \text{sind innere} \end{array}\right\} \text{Gegenwinkel.}$$

3) Wechselwinkel liegen nach verschiedenen Seiten der Schneidenden und auch nach verschiedenen Seiten von den Parallelen:

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} a \text{ und } d' \\ b \;\cdot\; c' \end{array}\right\} \text{sind äußere} \\ \left.\begin{array}{l} c \;\cdot\; b' \\ d \;\cdot\; a' \end{array}\right\} \text{sind innere} \end{array}\right\} \text{Wechselwinkel.}$$

4) Gegenwechsel-Winkel liegen nach verschiedenen Seiten der Schneidenden und nach derselben Seite von den Parallelen:

$$\left.\begin{array}{l} a \text{ und } b' \\ b \;\cdot\; a' \\ c \;\cdot\; d' \\ d \;\cdot\; c' \end{array}\right\} \text{sind vier Paar Gegenwechsel-Winkel.}$$

Bemerk. Rückt man die eine der Parallel-Linien, etwa CD, längs der Schneidenden EF so fort, daß sie ihre Richtung nicht ändert, und sich stets der anderen Parallelen AB nähert, so muß sie schließlich mit AB ganz zusammenfallen. Hierbei haben sich die Winkel, welche sie mit EF bildet, nicht geändert, da sie ihre Richtung zu EF nicht geändert hat und der Winkel der Richtungsunterschied zweier Linien ist. — Nun decken sich aber die Winkel, die zuvor correspondirende Winkel waren, die Wechselwinkel sind Scheitelwinkel, die Gegenwinkel und Gegen-Wechselwinkel aber sind Nebenwinkel geworden. Daher erhalten wir folgende Sätze:

45. Grundsatz. „Wenn zwei Parallel-Linien von einer dritten Linie durchschnitten werden, so entstehen gleiche correspondirende Winkel."

Erklärung. Parallel-Linien sind Linien gleicher Richtung; es ist also klar, daß sie von einer dritten, sie schneidenden Linie um gleich viel in Richtung unterschieden sein, d. h. mit ihr gleiche Winkel bilden müssen. — Nun bilden zwei sich schneidende Linien stets zwei von einander verschiedene Winkel; man kann daher nicht jeden Winkel an der einen Parallelen, jedem an der anderen gleich setzen, sondern nur dem, welcher die gleiche Lage hat (also durch eine Drehung in gleichem Sinne entstanden gedacht werden kann), das ist aber der correspondirende Winkel.

Zusatz. „Sind die Schenkel zweier Winkel parallel, so sind die Winkel gleich."

46. Lehrsatz. „Werden zwei Parallel-Linien von einer dritten Linie durchschnitten, so entstehen gleiche Wechselwinkel, die Summe der Gegen- und Gegenwechsel-Winkel aber beträgt zwei Rechte." [Fig. 24.]

Bew. Der Wechselwinkel eines Winkels ist der Scheitelwinkel seines correspondirenden Winkels; der Gegenwinkel und Gegenwechsel-Winkel aber ist der Nebenwinkel seines correspondirenden Winkels:

$a = a'$ (45)	$a + c = 2R$ (25)	$a + b = 2R$ (25)
$d' = a'$ (24)	$c = c'$ (45)	$b = b'$

1. Beh. $a = d'$ 2. Beh. $a + c' = 2R$ 3. Beh. $a + b' = 2R$

Mit gleicher Leichtigkeit ergiebt sich die Richtigkeit der umgekehrten Sätze:

47. Grundsatz. „Wenn zwei Linien mit einer dritten, sie schneidenden Linie gleiche correspondirende Winkel bilden, so sind die Linien parallel."

Erkl. Da hier die beiden Linien von der dritten um gleich viel in Richtung verschieden sind, so haben sie offenbar dieselbe Richtung, d. h. sie sind parallel.

48. Lehrsatz. „Wenn zwei Linien mit einer dritten, sie schneidenden Linie gleiche Wechselwinkel bilden, oder Gegen- und Gegenwechsel-Winkel, deren Summe gleich zwei Rechten ist, so sind die Linien parallel."

Bew. Man hat hier nur zu zeigen, daß unter den gegebenen Bedingungen die correspondirenden Winkel gleich sind, alsdann sind nach 47 die Linien parallel.

1. Voraussf.	2. Voraussf.	3. Voraussf.
$\angle a = \angle d'$	$\angle a + \angle c' = 2R$	$\angle a + \angle b' = 2R$

Behaupt. AB // CD.

Bew.

$\angle a = d'$ (Vorss.	$\angle a + c' = 2R$ (Vorss.)	$\angle a + b' = 2R$ (Vorss.)
$\angle a' = d'$ (24)	$\angle a' + c' = 2R$ (25)	$\angle a' + b' = 2R$ (25)
$\angle a = \angle a'$	$\angle a = \angle a'$	$\angle a = \angle a'$

Erklärung. Auf die Linie hat Einer gleicher Richtung mit ist die Gleichheit der Winkel, die sich ergebenden Winkel gleich und in Richtung nach Richtung, d. h. mit Gleichheit Winkel entsteht.

Satz. Wenn die Summe zweier Winkel gleich ist, sind die Winkel gleich.

40. Lehrsatz. Werden zwei Geraden durch eine dritte so durchschnitten, daß zwei gleiche Wechselwinkel, die Summe der Gegen- und Nebenwinkel Winkel, oder Scheitel-Winkel (Fig. 24.)

Dem. Der Wechselwinkel zwei Winkel ist der Scheitelwinkel zweier correspondierenden Winkel, der Gegenwinkel zwei Scheitelwinkel-Winkel oder ist der Nebenwinkel zweier correspondierenden Winkel.

$a = a'$ (45)	$a + b = 2R$ (25)	$a + b = 2R$ (25)
$a' = a'$ (24)	$a = a'$ (45)	$b = b'$

1. Geh. $a = a'$ 2. Geh. $a + a' = 2R$ 3. Geh. $a + b = 2R$

Mit gleicher Leichtigkeit ergibt sich die Richtigkeit des umgekehrten Satzes.

41. Grundsatz. Wenn zwei Linien mit einer dritten, sie durchschneidenden Linie gleiche correspondierende Winkel bilden, so sind die Linien parallel.

Erkl. Da hier die beiden Linien von der dritten aus gleich und in Richtung verschieden sind, so haben sie offenbar dieselbe Richtung, d. h. sie sind parallel.

42. Lehrsatz. Wenn zwei Linien mit einer dritten, sie durchschneidenden Linie gleich Wechselwinkel bilden, oder Gegen- und Nebenwinkel Winkel, deren Summe gleich zwei Rechten ist, so sind die Linien parallel.

Dem. Wenn sich die von $\measuredangle a$ gegen den Lauf hell gezogenen Richtungen der correspondierenden Winkel nicht schneiden, so sind die Linien parallel.

1. Voraus.	2. Voraus.	3. Voraus.
$\measuredangle a = \measuredangle a'$	$\measuredangle a + \measuredangle a' = 2R$	$\measuredangle a + \measuredangle b = 2R$

Behauptet AB, CD.

Dem.

$\measuredangle a = \measuredangle a'$ (1. Voraus.)	$\measuredangle a + \measuredangle a' = 2R$ (2. Voraus.)	$\measuredangle a + \measuredangle b = 2R$ (3. Voraus.)
$\measuredangle a = \measuredangle a'$ (24)	$\measuredangle a = \measuredangle a'$ (24)	$\measuredangle a = \measuredangle a'$ (24)
$\measuredangle a = \measuredangle a'$	$\measuredangle a = \measuredangle a'$	$\measuredangle a = \measuredangle a'$

Zusatz. Ist eine der obigen Bedingungen nicht erfüllt, so sind die Linien auch nicht parallel, und zwar convergiren sie nach der Seite hin, nach welcher die Summe der Gegenwinkel kleiner ist als zwei Rechte.

b) Das Dreieck.

Eine von geraden Linien ringsum eingeschlossene Ebene heißt Figur im engeren Sinne oder Polygon. — Da zwei gerade Linien keine Ebene umschließen können, so ist das Dreieck als das einfachste Polygon zu betrachten. — Da in diesem Abschnitte nur von der Lage der Linien die Rede ist, so haben wir hier nur die Winkelverhältnisse am Dreiecke zu ermitteln.

Am Dreiecke kann man sechs Winkel (sechs Paar Scheitelwinkel) unterscheiden: drei Innen- und drei Außenwinkel. — Die Innenwinkel werden durch je zwei Seiten gebildet, die Außenwinkel durch eine Seite und die Verlängerung der anderen; sie sind also die Nebenwinkel der Innenwinkel.

49. Lehrsatz. „Die Summe der Innenwinkel eines Dreieckes ist gleich einem Gestreckten oder gleich zwei Rechten." [Fig. 25]

Bew. Man ziehe durch die eine Ecke C eine Linie CD parallel der gegenüberliegenden Seite AB, so ist:

$$\angle c + \angle d + \angle a = 2R \text{ (als Gegenwinkel [46])}$$
$$\angle b = \angle d \text{ (als Wechselwinkel)}$$
$$\angle c + \angle b + \angle a = 2R.$$

50. Lehrs. „Der Außenwinkel eines Dreieckes ist gleich der Summe der beiden, ihm nicht anliegenden Innenwinkel." [Fig. 26.]

Bew. Der Außenwinkel macht mit dem anliegenden Innenwinkel einen Gestreckten, desgleichen die beiden nicht anliegenden Innenwinkel, also ist er ihnen gleich:

$$\angle C + \angle c = 2R \ (25)$$
$$(\angle a + \angle b) + \angle c = 2R \ (49)$$
$$\angle C = \angle a + \angle b.$$

51. Lehrsatz. „Die Summe der Außenwinkel eines Dreieckes ist gleich vier Rechten." [Fig. 27.]

Bew. Jeder Außenwinkel macht mit seinem anliegenden Innenwinkel zwei Rechte, folglich ist die Summe aller Außen- und Innenwinkel gleich $3 \times 2R = 6R$. Zieht man die Summe der Innenwinkel gleich 2R ab, so bleibt für die Summe der Außenwinkel 4R.

$$\left.\begin{array}{r} A + a = 2R \\ B + b = 2R \\ C + c = 2R \end{array}\right\} \text{(s. 25.)}$$

$$A + B + C + a + b + c = 6R \quad (10)$$

$$a + b + c = 2R \quad (49)$$

$$A + B + C = 4R \quad (13).$$

52. Folgerungen aus 49:

1) Durch zwei Winkel eines Dreieckes ist auch der dritte gegeben.

2) In einem Dreiecke kann nur ein Winkel ein rechter sein. Ein Dreieck mit einem rechten Winkel heißt ein rechtwinkliges.

3) In einem Dreiecke kann nur ein Winkel ein stumpfer sein. Ein Dreieck mit einem stumpfen Winkel heißt ein stumpfwinkliges.

1. Zu zwei gegebenen Winkeln eines Dreieckes den dritten zu finden a) durch Rechnung, b) durch Construction.

2. Die Größe der Winkel eines Dreieckes in Graden, Minuten und Secunden anzugeben, wenn ihr Verhältniß gegeben ist.

3. Stehen die Schenkel eines Winkels senkrecht zu denen eines anderen, so sind die Winkel gleich.

§ 3. Vier Gerade.

Drei Linien verschiedener Richtung schneiden sich in drei Punkten. Kommt eine vierte Linie hinzu, so kann sie eine jede der drei Linien schneiden, und es kommen somit drei Durchschnittspunkte hinzu. — Vier Linien schneiden sich also in sechs Punkten; die entstandene Figur heißt ein vollständiges Viereck. — In Sonderheit heißt Viereck jede von vier Linien umgrenzte Ebene. Nur von Vierecken in diesem beschränkten Sinne soll hier die Rede sein.

a) Das Viereck im Allgemeinen.

Im Vierecke begegnen wir zum ersten Male einer Figur, in welcher nicht alle Ecken direct mit einander verbunden sind. — Eine gerade Linie, welche zwei nicht benachbarte Ecken einer Figur verbindet, heißt eine Diagonale. — „Ein Viereck hat zwei Diagonalen."

Um die Winkelverhältnisse am Vierecke zu ermitteln, lassen wir das Viereck aus Dreiecken entstehen, d. h. wir setzen an die eine Seite eines Dreieckes ein zweites Dreieck an. Dadurch kommen aber zu der Winkelsumme eines Dreieckes zwei Rechte hinzu.

53. Lehrsatz. Die Summe der Innenwinkel eines Viereckes beträgt $(2 + 2)R = 4R$. [Fig. 28.]

Beh. $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 4R.$

Bew. $\left.\begin{array}{l}\angle A + b_1 + d_1 = 2R \\ \angle C + b_2 + d_2 = 2R\end{array}\right\}$ (49.)

$$\angle A + \angle C + (b_1 + b_2) + (d_1 + d_2) = 4R.$$

$$b_1 + b_2 = \angle B$$
$$d_1 + d_2 = \angle D$$

$$\angle A + \angle C + \angle B + \angle D = 4R.$$

54. Lehrs. „Die Summe der Außenwinkel eines Viereckes beträgt ebenfalls vier Rechte."

Bew. Jeder Außenwinkel macht mit dem anliegenden Innenwinkel 2 R, also alle vier Außenwinkel mit allen vier Innenwinkeln $4 \times 2R = 8R$. — Zieht man die Summe der Innenwinkel $= 4R$ ab, so bleibt also für die Summe der Außenwinkel auch 4R.

b) Das Viereck im Besonderen.

Sind zwei gegenüberliegende Seiten eines Viereckes parallel, so heißt das Viereck ein Parallelogramm. — Ist nur ein Paar gegenüberliegender Seiten parallel, so heißt das Viereck ein Trapez.

55. Lehrsatz. „In einem Parallelogramme ist die Summe der, an einer Seite liegenden Winkel gleich zwei Rechten."

Bew. Je zwei, an einer Seite eines Parallelogrammes liegenden Winkel sind Gegenwinkel an Parallel-Linien.

56. Lehrsatz. „In einem Parallelogramme sind die gegenüberliegenden Winkel einander gleich." [Fig. 29.]

Bew. Jeder von zwei gegenüberliegenden Winkeln ergänzt einen anliegenden Winkel zu zwei Rechten, also sind sie unter sich gleich.

$$\left.\begin{array}{l}\angle A + \angle B = 2R \\ \angle C + \angle B = 2R\end{array}\right\} (55.) \qquad \left.\begin{array}{l}\angle A + \angle B = 2R \\ \angle A + \angle D = 2R\end{array}\right\} (55.)$$

$$\angle A = \angle C. \qquad \angle B = \angle D.$$

57. Zusatz. Ist der eine Winkel eines Parallelogrammes ein Rechter, so sind alle Winkel desselben Rechte. Ein solches Parallelogramm heißt ein Rechteck.

58. Lehrs. In einem Trapeze ist die Summe der beiden Winkel, die an einer Convergenten liegen, gleich zwei Rechten."

Bew. Die an einer Convergenten liegenden Winkel sind Gegenwinkel an Parallel-Linien.

59. Lehrs. „Wenn in einem Vierecke zwei Paar Winkel, die einen Winkel gemein haben, gleich zwei Rechten sind, so ist das Viereck ein Parallelogramm." [Fig. 29.]

Bew. Ist $\angle A + \angle B = 2R$, so ist $AD \parallel BC$
ist zugleich $\angle A + \angle D = 2R$, so ist $AB \parallel CD$ (48.)

60. „Wenn in einem Vierecke die gegenüberliegenden Winkel gleich sind, so ist das Viereck ein Parallelogramm. [Fig. 29.]

Bew. Ist $\angle A = \angle C$
und $\angle B = \angle D$

so ist $\angle A + \angle B = \angle C + \angle D$ (10.)
aber $A + B + C + D = 4R$ (53.)

$A + B = 2R$

$AD \parallel BC$ (48.)

Ist $\angle A = \angle C$
und $\angle D = \angle B$

so ist $A + D = C + B$ (10.)
$A + D + C + B = 2R$ (53.)

$A + D - 2R$

$AB \parallel CD$ (48.)

61. Lehrs. „Ist die Summe von zwei an einer Seite eines Viereckes liegenden Winkel gleich zwei Rechten, so ist das Viereck ein Trapez." [Fig. 30]

Bew. Ist $A + C = 2R$, so ist $AB \parallel CD$ (48.)

§ 4. Linien in beliebiger Anzahl.

Betrachten wir zunächst, in wie viel Punkten eine gegebene Anzahl von Linien sich schneiden:

2 Linien schneiden sich in 1nem Punte,
3 . . . . $1 + 2 = 3$ Punkten,
4 . . . . $1 + 2 + 3 = 6$ Punkten,
5 . . . . $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ Punkten,
. . . . .
n . . . . $1 + 2 + 3 + \ldots + (n-2) + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$ Punkten.

Das Gebilde, welches entsteht, wenn gerade Linien in beliebiger Anzahl sich gegenseitig durchschneiden, heißt ein vollständiges Vieleck. — Im Besondern heißt Vieleck oder Polygon eine, von einer beliebigen Anzahl gerader Linien umschlossene Ebene.

Was nun zunächst die Anzahl der Diagonalen betrifft, so kann man von einer Ecke aus zu jeder Ecke hin eine ziehen, nur nicht zu den beiden

Bew. Ist $\angle A + \angle B = 2R$, so ist $AD \parallel BC$ (62.)
ist gleich $\angle A + \angle D = 2R$, so ist $AB \parallel CD$ (62.)

60. Wenn in einem Viereck die gegenüberliegenden Winkel gleich sind, so ist das Viereck ein Parallelogramm. (Fig. 28.)

Bew. Ist $\angle A = \angle C$
und $\angle B = \angle D$

so ist $\angle A + \angle B = \angle C + \angle D$ (51)
oder $A + B + C + D = 4R$ (53.)

$A + B = 2R$

$AD \parallel BC$ (62.)

Ist $\angle A = \angle C$
und $\angle D = \angle B$

so ist $A + D = C + B$ (19.)
$A + D + C + B = 4R$ (53.)

$A + D = 2R$

$AB \parallel CD$ (62.)

61. Satz. Ist die Summe von zwei an einer Seite eines Vierecks liegenden Winkeln gleich zwei Rechten, so ist das Viereck ein Trapez. (Fig. 30.)

Bew. Ist $A + C = 2R$, so ist $AB \parallel CD$ (13.)

§ 8. Linien in beliebiger Anzahl.

Bringen wir zunächst in eine mit Punkten eine gegebene Zahl von Linien zum Schneiden:

2 Linien schneiden sich in 1 neuen Punkt:

3 . . . . . $1 + 2 = 3$ Punkten.

4 . . . . . $1 + 2 + 3 = 6$ Punkten.

5 . . . . . $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ Punkten.

n . . . . . $1 + 2 + 3 + \ldots + (n-2) + (n-1) =$
$\frac{n(n-1)}{2}$ Punkten.

Das Ergebnis, welches entsteht, wenn gerade Linien in beliebiger Anzahl sich gegenseitig durchschneiden, heißt ein ebenes Gebilde. Im besonderen heißt Gebilde oder Gebäude (gr.) eine aus einer beschränkten Anzahl ebener Flächen aufgebaute Figur.

Was eine einzelne der Flächen des Gebäudes umfaßt, ist dann eine Fläche oder eine an jener Fläche liegende Figur, die wir als eine

benachbarten, da diese bereits durch Seiten mit der bezüglichen Ecke verbunden sind. — Hat daher das Polygon n Ecken, so kann man aus jeder Ecke $n-3$, also aus allen $n \cdot (n-3)$ Diagonalen ziehen. — Hierbei ist aber jede Diagonale doppelt, folglich sind in einem nEcke im Ganzen $\frac{n(n-3)}{2}$ Diagonalen möglich.

Durch die $n-3$ Diagonalen, welche in einem n Ecke aus einer Ecke gezogen werden können, wird das Polygon in $n-2$ Dreiecke zerlegt. — Da nun die Summe der Innenwinkel eines Dreieckes 2 Rechte beträgt, so beträgt sie in den $n-2$ Dreiecken $(n-2) \cdot 2R$.

62. Lehrsatz. „Die Summe der Innenwinkel eines nEckes ist gleich $(n-2) \cdot 2R = (2n-4)\ R$."

Bew. Setzt man an die eine Seite eines Polygones ein Dreieck an, so kommt zum Polygone eine Ecke, zur Winkelsumme aber kommen 2 Rechte hinzu. — Geht man nun von einem Dreiecke aus, so erhält man folgende Resultate:

Die Summe der Innenwinkel eines 3Eckes $= 1 \cdot 2R$
" " " " " 4 " $= 1 \cdot 2 + 2 = 2 \cdot 2R$
" " " " " 5 " $= 2 \cdot 2 + 2 = 3 \cdot 2R$
" " " " " 6 " $= 3 \cdot 2 + 2 = 4 \cdot 2R$
⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮
" " " " " n " $= (n-2) \times 2R$.

Zusatz. Sind die Winkel eines nEckes alle einander gleich, so ist ein jeder $= \frac{2n-4}{n} R$.

62. Lehrs. „Die Summe der Außenwinkel eines Vieleckes ist gleich vier Rechten."

Bew. Bezeichnet man die Innenwinkel eines Polygones mit A_1, A_2, A_3, ... A_n; die Außenwinkel respective mit a_1, a_2, a_3, ... a_n, so ist

$$\begin{array}{l} A_1 + a_1 = 2R \\ A_2 + a_2 = 2R \\ A_3 + a_3 = 2R \\ \vdots \\ A_n + a_n = 2R \\ \hline A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = 2nR \\ A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = 2nR - 4R \\ \hline \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = 4R \quad (13.) \end{array}$$

Bemerkung. Faßt man das Polygon als eine mehrmals gebrochene geschlossene Linie auf, so ergiebt sich der Satz über Außenwinkel un-

mittelbar, indem man das Polygon nach und nach durch Brechung einer geraden Linie entstehen läßt.

Bricht man nehmlich die in A_n einseitig begrenzte Gerade [Fig. 31.] $A_n X$ in dem Punkte A_1 und dreht sie in die Lage $A_1 X_1$, so ist bei A_1 eine Ecke und ein Außenwinkel a_1 entstanden. Bricht man die Linie bei A_2 zum zweiten Male und giebt ihr die Richtung $A_2 X_2$, so ist eine zweite Ecke und ein zweiter Außenwinkel a_2 gebildet. Setzt man die Brechung in dieser Weise fort und führt schließlich die Linie durch den Punkt A_n, so ist das Polygon vollendet. Bricht man nun noch die Linie in A_n und dreht sie in ihre ursprüngliche Lage zurück, so hat die Linie in Summa eine volle Drehung gemacht, zugleich sind nach und nach die sämmtlichen Außenwinkel gebildet, deren Summe also einem completen Winkel oder vier Rechten gleich ist. Da nun die sämmtlichen Innenwinkel mit den sämmtlichen Außenwinkeln zusammen $2nR$ betragen, so beträgt also die Summe der Innenwinkel allein $2nR - 4R$.

Dritter Abschnitt.

Von der Figur.

Cap. I.

Abhängigkeit von den Elementen.

Es ist an sich klar, daß eine Figur durch ihre Elemente — Seiten und Winkel — bestimmt ist, so daß zwei Figuren, die aus denselben Elementen, in derselben Reihenfolge, bestehen, gehörig auf einander gelegt, vollkommen zusammenfallen, sich decken oder congruent sind. (Das Zeichen für die Congruenz ist $\cong$.)

Nun sind aber die Elemente einer Figur offenbar nicht alle willkürlich oder von einander unabhängig — durch zwei Winkel eines Dreieckes z. B. ist auch schon der dritte gegeben (52, 1.), woraus hervorgeht, daß zur Bestimmung einer Figur nicht alle ihre Elemente erforderlich sind, und es ist daher von Interesse zu ermitteln, durch wie viele und welche ihrer Elemente die Figur bestimmt sei. — Wir erfahren es, wenn wir die Figur aus ihren Elementen also herstellen, daß wir dieselben nach und nach zur Construction verwenden. — Wir beginnen mit dem Dreiecke, als der einfachsten Figur.

§ 1. Das Dreieck.

a) Das Dreieck im Allgemeinen.

Das Dreieck hat sechs Elemente, drei Seiten und drei Winkel. In welcher Reihenfolge wir dieselben zur Construction verwenden, ist an sich gleichgiltig. — Wir beginnen mit einem Winkel, und lassen die anderen in jeder möglichen Folge hinzutreten. — Für die Bezeichnung wollen wir feststellen, daß die Seiten mit den Buchstaben des kleinen, die gegenüberliegenden Winkel aber mit denselben Buchstaben des großen Alphabetes bezeichnet werden.

1. Bestimmung des Dreieckes aus einer Seite und zwei Winkeln. [Fig. 32.]

a. Soll A der eine Winkel des geforderten Dreieckes sein, so bestimmen wir den Punkt A_1 als die eine Ecke und die Linie A_1X als die Richtung der einen Seite willkürlich (da die Lage des Dreieckes gleichgiltig ist). — Darnach construiren wir den Winkel YA_1X = Winkel A (37) und haben somit auch die Richtung der zweiten Seite, aber noch kein Dreieck — wir können noch ein zweites Element willkürlich wählen. — Den zweiten Winkel aber und die dem Winkel A gegenüberliegende Seite können wir nicht brauchen, da wir sie nicht anbringen können. — Wir wählen daher die Linie b als die eine, dem Winkel A anliegende Seite, und schneiden von A_1X das Stück $A_1C = b$ ab, so haben wir in C die zweite Ecke des Dreieckes. — Die Lage der dritten Ecke auf der Linie A_1Y ist aber noch unbekannt, und wir können daher noch über die Größe eines dritten Elementes willkürlich verfügen, und zwar können wir wählen 1) den zweiten Winkel, 2) die zweite, anliegende Seite, 3) die dem Winkel A gegenüberliegende Seite. — Ueber die Größe des zweiten Winkels können wir nicht ganz willkürlich verfügen, denn da die Summe aller Winkel eines Dreieckes gleich einem Gestreckten ist, so muß er offenbar kleiner sein, als der Nebenwinkel zu A. — Erfüllt nun der Winkel C diese Bedingung und wir construiren den Winkel $A_1CZ = C$, so muß der Schenkel CZ den Schenkel A_1Y in einem Punkte B schneiden, und es ist das Dreieck ACB entstanden.

Hätten wir statt C den Winkel B als drittes Element gewählt, so hätten wir den zwar nicht direct anbringen können, aber das Dreieck wäre doch bestimmt, da (nach 52, 1.) dann auch C bekannt ist. — Wir ziehen hieraus den Schluß: „Durch eine Seite und zwei Winkel sind auch die übrigen Elemente des Dreieckes, und somit das Dreieck selbst bestimmt."

63. Lehrs. „Zwei Dreiecke sind congruent, wenn sie in einer Seite und zwei gleichliegenden Winkeln übereinstimmen." [Fig. 33.]

Bew. Ist in den beiden Dreiecken ABC und $A_1 B_1 C_1$ die Seite $AC = A_1 C_1$, der Winkel $A = A_1$ und $C = C_1$, so denke man sich das eine derselben ($A_1 B_1 C_1$) beweglich, und trage es so auf das andere (ABC), daß der Punkt A_1 auf A und C_1 auf C fällt, was man kann, da die Linien als gleich vorausgesetzt waren. Da nun der Winkel $A_1 =$ A ist, so muß auch der Schenkel $A_1 B_1$ auf AB fallen; da ferner der Winkel $C_1 = C$ ist, so fällt auch $C_1 B_1$ auf CB; also decken sich die Dreiecke.

Bemerkung In congruenten Dreiecken sind die homologen (gleichliegenden) Elemente gleich, d. h. es sind die Winkel gleich, die den als gleich gegebenen Seiten, und die Seiten, die den, als gleich gegebenen Winkeln gegenüber liegen.

b. Um die Abhängigkeit der Elemente von einander so weit als möglich zu erforschen, sehen wir zu, ob aus dem Größenverhältniß der gegebenen Winkel sich ein Schluß auf das der gegenüberliegenden Seiten ziehen läßt? — Die gegebenen Winkel sind nun entweder einander gleich oder nicht.

Ist 1stens in dem Dreiecke ABC [Fig. 34.] der Winkel A = Winkel C, so ergiebt sich uns sogleich auch die Gleichheit der gegenüberliegenden Seiten; denn denken wir uns den Winkel B durch eine Linie BD halbirt, so erhalten wir zwei Dreiecke, die in einer Seite und zwei Winkeln übereinstimmen, also (nach 63.) congruent sind.

$$\begin{array}{c} BD = BD \\ \angle A = \angle C \\ \angle b_1 = \angle b_2 \\ \hline \triangle ABD \cong CBD \\ \hline AB = BC \end{array}$$

Ist aber 2tens der Winkel $A > C$ [Fig. 35.], so kann man von ihm einen Winkel DAC = Winkel C abschneiden und es fällt der Schenkel AD nothwendig zwischen AB und AC, alsdann ist aber

$$\begin{array}{c} AD = DC \\ AD + DB > AB \\ \hline CD + DB > AB, \text{ d. h.} \\ BC > AB. \end{array}$$

Beide Resultate in einen Satz gefaßt geben:

64. Lehrsatz. Gleichen Winkeln liegen in einem Dreiecke auch gleiche Seiten gegenüber. — Dem größeren Winkel liegt auch die größere Seite gegenüber.

Folgerungen. Hat das Dreieck zwei gleiche Winkel, so hat es auch zwei gleiche Seiten und heißt ein gleichschenkliges. — Hat das Dreieck drei gleiche Winkel, so hat es auch drei gleiche Seiten und heißt ein gleichseitiges.

2. Bestimmung des Dreieckes aus zwei Seiten und dem dazwischenliegenden Winkel.

a) Läßt man zu dem gegebenen Winkel A [Fig. 36.] und der anliegenden Seite b, als drittes Element, die zweite anliegende Seite c hinzukommen, so schneidet man — nachdem man wie oben zuerst Winkel YAX = A und AC = b construirt hat — von dem zweiten Schenkel AY das Stück AB = c ab und verbindet den Punkt B mit dem Punkte C, so hat man das Dreieck ABC. — „Durch zwei Seiten und dem zwischenliegenden Winkel sind also gleichfalls alle Elemente und das Dreieck bestimmt."

65. Lehrsatz. „Zwei Dreiecke sind congruent, wenn sie in zwei Seiten und dem zwischenliegenden Winkel übereinstimmen."

Zur Bestätigung kann man die Dreiecke wie in 61. zur Deckung bringen.

b) Sind die gegebenen Seiten gleich, so werden die ihnen gegenüberliegenden Winkel auch gleich werden; denn würden sie nicht gleich, so könnten (nach 64.) die Seiten nicht gleich sein, was der Voraussetzung widerspricht. Ist aber die eine gegebene Seite größer als die andere, so wird auch der Winkel größer sein, welcher der größeren Seite gegenüberliegt. — Nennt man in einem gleichschenkligen Dreiecke die ungleiche Seite die Basis (Grundlinie), so erhalten wir den Satz:

66. Lehrsatz." In einem gleichschenkligen Dreiecke sind die Winkel an der Basis gleich." [Fig. 34.].

Der Beweis kann auch direct geführt werden: Ist in dem Dreiecke ABC die Seite AB = CB, und man denkt sich den Winkel bei B durch die Linie BD halbirt, so hat man zwei Dreiecke ABD und CBD, welche in zwei Seiten und dem zwischenliegenden Winkel übereinstimmen, also congruent sind, und A und C als homologe Winkel enthalten.

$$AB = BC \text{ (Vorauss.)}$$
$$\angle ABD = CBD \text{ (gemacht)}$$
$$BD = BD$$
$$\angle BAD = \angle BCD \text{ (weil beide BD gegenüberliegen).}$$

67. Lehrsatz. „Der größeren Seite in einem Dreiecke liegt auch der größere Winkel gegenüber." [Fig. 37]

Bew. Ist in dem Dreiecke ABC die Seite AB > BC, so kann man von ihr das Stück BD = BC abschneiden, und es wird dann die Verbindungslinie DC nothwendig zwischen AC und BC fallen, folglich ist:

$$\angle ACB > \angle DCB$$
$$\angle DCB = \angle BDC \quad (66.)$$
$$\angle ACB > \angle BDC$$
$$\angle BDC > \angle BAC \quad (50.)$$
um so mehr $\angle ACB > BAC$.

3. Bestimmung des Dreieckes aus einem Winkel, einer anliegenden und einer gegenüberliegenden Seite.

a) Läßt man endlich zu dem gegebenen Winkel A [Fig. 38.] und der anliegenden Seite b als drittes Element die, dem Winkel A gegenüberliegende Seite hinzukommen, so construirt man, wie oben, Winkel $YAX = A$, $AC = b$, und weiß nun weiter, daß die Seite a ihren einen Endpunkt in C, ihren zweiten aber in der Peripherie eines Kreises haben muß, den man mit a als Radius um C schlägt. — Soll aber ein Dreieck entstehen, so muß dieser zweite Endpunkt offenbar zugleich auf der Linie AY liegen; d. h. die dritte Ecke des Dreieckes ist der etwaige Durchschnittspunkt der Linie AY mit der gedachten Peripherie. — Nimmt man nun aber die gegenüberliegende Seite $= a_1$ so schneidet die mit a_1 geschlagene Kreislinie den Schenkel AY gar nicht, und es entsteht daher auch kein Dreieck. — Nimmt man dagegen diese Seite $= a_2$, so schneidet die mit ihr geschlagene Kreislinie den Schenkel AY in zwei Punkten, B_1 und B_2. Verbindet man diese Punkte mit C, so erhält man zwei, von einander verschiedene Dreiecke. — Nimmt man endlich die gegenüberliegende Seite $= a_3 > b$, so schneidet die Kreislinie den Schenkel AY nur in einem Punkte B und man erhält — wenn man diesen Punkt mit C verbindet — nur ein bestimmtes Dreieck.

Als positives Resultat geht hieraus hervor:

68a. „Aus einem Winkel, einer anliegenden und einer gegenüberliegenden Seite ist nur dann das Dreieck bestimmt, wenn die gegenüberliegende Seite größer ist als die anliegende."

68b. „Lehrsatz. Zwei Dreiecke sind congruent, wenn sie in zwei Seiten und dem der größeren Seite gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen."

Bew. Ist in den Dreiecken ABC und $A_1, B_1 C_1$ [Fig. 39.] die Seite $AB = A_1 B_1$, die Seite $AC = A_1 C_1$, der Winkel $C =$ Winkel C_1 und zugleich $AB > AC$, so denke man sich das Dreieck $A_1 B_1 C_1$ beweglich und trage es so auf ABC, daß A_1 auf A und C_1 auf C, also $A_1 C_1$ auf AC fällt. Da nun der Winkel $C_1 = C$ ist, so muß auch der Schenkel $C_1 B_1$ auf CB fallen; weil aber die Seite $C_1 B_1$ nicht gleich CB gegeben ist, so wäre es denkbar, der Punkt B_1 falle nicht auf B, sondern zwischen C und B, oder auf die Verlängerung von CB.

Angenommen 1) B falle auf B_2; alsdann wäre $AB_2 = AB$, also auch Winkel AB_2B = Winkel ABB_2 (66.), was aber hier nicht möglich ist, da

$$\angle AB_2B > \angle ACB \ (50.)$$
$$\angle ACB > \angle ABC \ (67.)$$
$$\angle AB_2B > \angle ABC.$$

Es kann also der Punkt B_1 nicht zwischen B und C fallen. — Angenommen 2) B_1 falle auf die Verlängerung von CB, etwa auf B_3. — Dann wäre aber wieder

$$\angle ABB_3 > \angle ACB \ (50.)$$
$$\angle ACB > \angle ABC \ (67.)$$
$$\angle ABB_3 > \angle ABC$$
$$\angle ABC > \angle AB_3B \ (50.)$$
$$\text{um so mehr } \angle ABB_3 > \angle AB_3B$$
$$AB_3 > AB \ (64.)$$

Was ein Widerspruch ist, da nach der Voraussetzung

$$AB_3 = A_1B_1 = AB \text{ ist.}$$

Es kann also der Punkt B_1 auch nicht auf die Verlängerung von CB fallen, also muß er nothwendig auf B fallen, d. h. die Dreiecke müssen sich decken.

b. Die obige Construction leitet uns noch auf die Untersuchung, wann denn und in wie viel Punkten eine Kreislinie, die um einen, außerhalb einer geraden Linie liegenden Punkt, geschlagen wird, diese gerade Linie schneidet? —

In Betreff der ersten Frage ist es einleuchtend, daß der Radius des Kreises jedenfalls länger sein muß, als die kürzeste Linie, die man von dem Punkte nach der geraden Linie hin ziehen kann, wenn der Kreis die Linie schneiden soll. — Wir haben daher bloß die Frage zu beantworten: Welches ist die kürzeste Linie, die man von einem Punkte nach einer geraden Linie hin ziehen kann?

Die Länge der Linien nun, zwischen einem Punkte und einer geraden Linie, muß offenbar abhängig sein von den Winkeln, die sie mit dieser Linie bilden. — Es bildet aber jede Linie mit einer anderen zwei Winkel, deren Summe der constanten Größe 2 R gleich ist, deren Differenz aber offenbar sehr verschieden sein kann. — Aus dieser Differenz muß sich daher ein Schluß auf die Länge der Linien ziehen lassen.

69. Lehrsatz. „Eine Linie, die man von einem Punkte außerhalb einer geraden Linie, nach dieser geraden Linie hin zieht, ist um so kürzer, je kleiner die Differenz der Winkel ist, die sie mit der letzteren bildet."

Bew. Man ziehe von dem Punkte A aus nach XY [Fig. 40.] die beiden Linien AB und AC, so ist:

$$\angle a + b = \angle c + d \ (25)$$

ist nun $\angle a - b < \angle c - d$

so folgt durch Subtraction $2b > 2d$

also auch $b > d$

$$AC > AB$$

Folgerung. Die kürzeste Linie zwischen einem Punkte und einer geraden Linie ist also die, welche Winkel bildet, deren Differenz am kleinsten, d. h. $= 0$ ist.

70. Lehrsatz. „Das Loth ist die kürzeste Linie zwischen einem Punkte und einer geraden Linie."

Bew. Nachdem wir diesen Satz als Resultat aus der obigen allgemeinen Untersuchung gezogen haben, läßt sich die Wahrheit desselben auch also einfach erweisen. [Fig. 41.]

Ist AC ein Loth zu XY, AB eine beliebig von A nach XY gezogene Linie, so ist in dem Dreiecke ABC der Winkel ACB als Rechter, der größte, also auch größer als Winkel ABC; folglich ist die gegenüberliegende Seite AB auch $>$ AC.

Zusatz. „Das Loth ist der Ausdruck der Entfernung eines Punktes von einer geraden Linie."

Um alles, was von Linien, zwischen einer geraden Linie und einem Punkte außerhalb derselben, sich sagen läßt, im Zusammenhange zu haben, fügen wir noch hinzu:

71. Lehrsatz. „Unter den Linien, zwischen einem Punkte und einer geraden Linie, sind diejenigen gleich, deren Fußpunkte gleich weit vom Fußpunkte des Lothes entfernt sind; je weiter aber der Fußpunkt einer solchen Linie von dem Fußpunkte des Lothes ist, desto länger ist sie." [Fig. 42.]

Bew. Ist $AB \perp XY$ und $BC = BD$, so stimmen die Dreiecke ABC und ABD in zwei Seiten und dem zwischenliegenden Winkel überein, also sind auch die homologen Seiten AC und AD in ihnen gleich.

Ist ferner $AB \perp XY$; $BE > BD$, so ist

$\angle EAB > \angle DAB$ (weil $EAB > CAB$ ist)

$\angle ABE = \angle ABD$

$\angle AEB < \angle ADB$ (49.)

$$AD < AE.$$

72. Folgerungssatz. „Von einem Punkte nach einer geraden Linie hin kann man nicht mehr als zwei gleich lange Linien ziehen."

In Betreff der zweiten Frage erhalten wir nun aus dem Obigen folgenden Bescheid. [Fig. 43.]

1) Ist der Radius gleich dem Lothe AB, von dem Punkte A auf die Linie XY gefällt, so geht die Kreislinie durch den Fußpunkt B dieses Lothes, hat also mit der Geraden diesen Punkt, und auch nur diesen Punkt gemein; denn alle übrigen Punkte der Linie XY müssen außerhalb des Kreises liegen, da (nach 70.) ihre Entfernungen von A größer als das Loth, also auch größer als der Radius sind. Man sagt in diesem Falle: Die Linien berühren sich, und nennt die Linie XY eine Tangente des Kreises.

2) Ist der Radius größer als das Loth, so muß ein Theil der Geraden innerhalb des Kreises fallen, beide Linien haben also mindestens zwei Punkte gemein und schneiden sich.

73. Lehrsatz. „Eine Kreislinie kann mit einer Geraden nicht mehr als zwei Punkte gemein haben."

Bew. Angenommen beide Linien [Fig. 44.] hätten die drei Punkte C, B und D gemein (wie es scheint, wenn der Radius sehr nahe gleich dem Lothe ist), so wären die Linien AC, AB und AD als Radien einander gleich, was aber dem Satze 72 widerspricht, wenn die drei Punkte zugleich auf der Geraden XY liegen sollen.

Zusatz. „Die Kreislinie ist eine stetig gekrümmte Linie."

4. Bestimmung des Dreieckes aus den drei Seiten.

a. Nachdem wir, von einem Winkel ausgehend, die übrigen Elemente in allen möglichen Folgen zur Construction verwendet haben, müssen wir jetzt, in der weiteren Verfolgung unserer Aufgabe für dieses Capitel, nothwendig von einer Seite ausgehen. — Auch können wir zur Construction überhaupt keinen Winkel mehr verwenden, weil das uns jedenfalls auf einen der früheren Fälle zurückführen würde, sondern müssen sehen, ob das Dreieck sich bloß aus Seiten bestimmen läßt. [Fig. 45.]

Schneiden wir nun von der unbegrenzten Linie XY das Stück AB gleich der einen gegebenen Seite c ab, so wissen wir von der zweiten Seite b, daß sie, von dem Punkte A ausgehend, ihren zweiten Endpunkt in der Peripherie eines Kreises haben muß, den man mit b als Radius um A schlägt. Damit ist aber die Lage dieses Endpunktes, und somit die der dritten Ecke des Dreieckes noch nicht fest bestimmt. Nehmen wir daher noch die dritte Seite a hinzu, so muß die von dem Punkte B ausgehend ihren zweiten Endpunkt in der Peripherie des Kreises haben, den man um B mit dem Radius = a schlägt. Schneidet dieser Kreis den vorigen in einem Punkte C, so wäre dieser Punkt wohl die dritte Ecke des Dreieckes; es ist aber die Frage, müssen sich die Kreise unbedingt schneiden? und, wenn sie es thun, in wie viel Punkten schneiden sie sich?

b. Um daher festzustellen, unter welchen Bedingungen das Dreieck

durch seine drei Seiten bestimmt sei, haben wir zu ermitteln, 1) wann schneiden sich zwei Kreise mit getrennten Mittelpunkten? und 2) in wie viel Punkten schneiden sie sich?

Es seien M und m die Mittelpunkte zweier Kreise, deren Verbindungslinie Mm wir kurz die Centrallinie nennen wollen. — Die Lage der beiden Kreise kann nur allein von dem Verhältnisse der Summe und der Differenz der Radien zu der Centrallinie abhängen. — Dabei können folgende Fälle eintreten:

I. Die Centrallinie ist größer als die Summe der Radien.

Wir schlagen mit einem beliebigen Radius r [Fig. 46.], (der hier offenbar kleiner als Mm sein muß) um m einen Kreis. — Die Peripherie durchschneidet die Centrallinie in zwei Punkten, A und B. — Um nun die Lage des zweiten, um M zu schlagenden Kreises, zu diesem zu erfahren, müssen wir aus der gegebenen Bedingung ermitteln, wie die Entfernung der Punkte auf der Peripherie der gezogenen Kreislinie vom Mittelpunkte M des zweiten Kreises zu dem Radius dieses zweiten Kreises sich verhalten. — Denn es ist klar: ist die Entfernung eines Punktes vom Mittelpunkte eines Kreises kleiner als der Radius dieses Kreises, so liegt der Punkt innerhalb des Kreises. — Ist die gedachte Entfernung gleich dem Radius, so liegt der Punkt auf der Peripherie; ist endlich die Entfernung größer als der Radius, so liegt der Punkt außerhalb des Kreises. — Wir beginnen mit den beiden, vor anderen, ausgezeichneten Punkten A und B.

Nun ist nach der Voraussetzung

$$\begin{array}{r} Mm > R + r \\ mA = r \\ \hline Mm - mA > R \\ Mm - mA = MA \\ \hline MA > R, \end{array}$$

d. h. der Punkt A liegt außerhalb des Kreises um M. — Nun läßt sich aber leicht nachweisen, daß (wie auch der Augenschein lehrt) der Punkt A unter allen Punkten auf der Peripherie des Kreises m am nächsten zum Mittelpunkte M des anderen Kreises ist. Denn nehmen wir auf der gedachten Peripherie den beliebigen Punkt X, so ist

$$\begin{array}{r} MX + Xm > Mm \\ Xm = mA \\ \hline \text{subtrah. } MX > MA. \end{array}$$

Liegt also A außerhnlb, so müssen um so mehr alle übrigen Punkte auf der Peripherie des Kreises m außerhalb des Kreises M liegen. — Wir erhalten also den Satz

74. Lehrsatz. „Ist die Entfernung der Mittelpunkte zweier Kreise größer als die Summe der Radien, so liegen die Kreise ganz auseinander."

II. Die Centrallinie ist gleich der Summe der Radien.

Schlagen wir, wie vorhin, den Kreis um m und bestimmen die Entfernung des Punktes A von M, so ist [Fig. 46.]

$$Mm = R + r$$
$$mA = r$$
$$\overline{Mm - mA = R}$$
$$Mm - mA = MA$$
$$\overline{MA = R,}$$

d. h. der Punkt A liegt jetzt auf der Peripherie des Kreises um M, er ist also beiden Kreisperipherien gemein. — Da nun, nach dem Obigen, der Punkt A unter allen Punkten auf der Peripherie des Kreises um m der nächste zu M ist, so liegen auch alle übrigen Punkte der gedachten Peripherie außerhalb des Kreises M. — Beide Kreisperipherien haben also nur diesen einen Punkt gemein und liegen sonst auseinander.

75. Lehrsatz. „Ist die Entfernung der Mittelpunkte zweier Kreise gleich der Summe der Radien, so berühren sich die Kreise von außen und der Berührungspunkt liegt auf der Centrallinie."

III. Die Centrallinie ist kleiner als die Summe der Radien.

Schlagen wir wieder mit dem kleineren Radius r um m einen Kreis [Fig. 46.], so ist hier:

$$Mm < R + r$$
$$mA = r$$
$$\overline{Mm - mA < R}$$
$$Mm - mA = MA$$
$$\overline{MA < R,}$$

d. h. der Punkt A liegt innerhalb des Kreises um M. — Ueber die Lage der übrigen Punkte auf der Peripherie des Kreises m erhalten wir aus dieser Voraussetzung (wie man sich leicht überzeugen kann) keinen Aufschluß. Sehen wir zu, ob sie sich aus dem Verhältniß der Differenz der Radien zur Centrallinie erkennen läßt. Hier können wieder die drei Fälle statthaben:

α. Die Centrallinie ist auch kleiner als die Differenz der Radien.

Bestimmen wir zunächst die Lage des zweiten Durchschnittspunktes, so ist [Fig. 47.]

$$Mm < R - r$$
$$mB = r$$
$$\overline{Mm + mB < R}$$
$$Mm + mB = MB$$
$$\overline{MB < R.}$$

Es liegt also auch der Punkt B innerhalb des Kreises um M. — Nun ist aber leicht nachgewiesen, daß der Durchschnittspunkt B unter allen Punkten auf der Peripherie des Kreises m die größte Entfernung von M hat; denn ist x [Fig. 47.] ein beliebiger Punkt auf der Peripherie des Kreises um m, so ist

$$\begin{array}{r} Mm + mx > Mx \\ mx = mB \\ \hline Mm + mB > Mx \\ Mm + mB = MB \\ \hline MB > Mx. \end{array}$$

Liegt also B innerhalb des Kreises M, so müssen um so mehr alle übrigen Punkte der Peripherie des Kreises m innerhalb des Kreises M liegen, d. h.

76. „Lehrsatz." Ist die Centrallinie kleiner als die Summe und auch kleiner als die Differenz der Radien, so wird der kleinere Kreis ganz von dem größeren eingeschlossen."

β. Die Centrallinie ist gleich der Differenz der Radien.

Nach der Voraussetzung ist also [Fig. 46.]

$$Mm = R - r$$

nun ist

$$mB = r$$

$$\begin{array}{r} Mm + mB = R \\ Mm + mB = MB \\ \hline MB = R, \end{array}$$

d. h. der Punkt B liegt auf der Peripherie des Kreises um M. — Da nun B der entfernteste Punkt auf der Peripherie des Kreises m von M ist, so liegen alle übrigen Punkte dieser Peripherie innerhalb des Kreises M. — Beide Kreisperipherien haben also nur den einen Punkt B gemein, während der kleinere Kreis von dem größeren eingeschlossen wird.

77. Lehrs. „Ist die Centrallinie kleiner als die Summe und gleich der Differenz der Radien, so berühren sich die Kreise von innen, und zwar liegt der Berührungspunkt wieder auf der Centrallinie."

γ. Die Centrallinie ist größer als die Differenz der Radien.

Nach der Voraussetzung ist $Mm > R - r$ [Fig. 46.]

$$mB = r$$

$$\begin{array}{r} Mm + mB > R \\ Mm + mB = MB \\ \hline MB > R, \end{array}$$

Es liegt also auch der Punkt B innerhalb des Kreises um M. — Nun B ist total entgegengesetzt, daß der Durchschnittspunkt B [illegible] alle Punkte um die der Peripherie des Kreises in die größte Entfernung von B, daß denn ist x (Fig. 47) im nächsten Punkt auf der Peripherie des Kreises, d. h. es ist um ist, ist B

$$M\,m + m\,x = M\,x$$
$$m\,x = m\,B$$
$$M\,m + m\,B = M\,x$$
$$M\,m + m\,B = M\,B$$
$$M\,B = M\,x$$

Liegt also B innerhalb des Kreises M, so müssen wir so unter alle Punkte der Peripherie des Kreises m, innerhalb des Kreises M ist gesetzt ist.

70. „Lehrsatz." Ist der Centralstrahl Radius als die Summe und muß kleiner als die Differenz der Radien, so wird der Kreis zum um beide Kreisen eingeschlossen."

a. Die Centralstrahl größer als Differenz der Radien.

Nach der Voraussetzung ist also (Fig. 40)

$$M\,m = R - r$$

und ist

$$m\,B = r$$

$$M\,m + m\,B = R$$
$$M\,m + m\,B = M\,B$$
$$M\,B = R.$$

d. h. der Punkt B liegt auf der Peripherie des Kreises um M. — Da nun B der nächstentfernte Punkt auf der Peripherie des Kreises m von M ist, so liegen alle übrigen Punkte dieses Kreises innerhalb des Kreises M. — Beide Peripherien haben also nur den einen Punkt B gemeinsam, während der Kreis m aus dem anderen eingeschlossen wird.

77. „Lehrsatz." „Ist der Centralstrahl kleiner als die Summe und größer als die Differenz der Radien, so berühren sich die Kreise von innen und zwar liegt der Berührungspunkt jenseits auf der Centralstrahl."

a. Die Centralstrahl ist größer als die Differenz der Radien.

Nach der Voraussetzung ist $M\,m > R - r$ (Fig. 40)

$$m\,B = r$$

$$M\,m + m\,B = R$$
$$M\,m + m\,B = M\,B$$
$$M\,B > R$$

d. h. der Punkt B liegt außerhalb des Kreises M. Da nun der Punkt A innerhalb dieses Kreises liegt, so schneiden sich beide Kreise.

78. Lehrs. „Ist die Centrallinie kleiner als die Summe, aber größer als die Differenz der Radien, so schneiden sich die Kreise."

Nachdem wir nun die Bedingungen erkannt, unter welchen sich zwei Kreise schneiden, erörtern wir die zweite Frage: „In wie viel Punkten können sich zwei Kreise schneiden?"

Es ist an sich klar, daß eine Kreislinie die andere im Allgemeinen in zwei Punkten schneidet, einmal beim Eintritt, das andere Mal beim Austritt. — Nur wenn die Kreise nahe in Berührung sind, scheint es, auch bei der besten Zeichnung, als hätten die Kreislinien viele Punkte gemein, und hier ist nun nachzuweisen, daß dieser Schein nur eine Folge der nothwendigen Mangelhaftigkeit jeder Zeichnung ist, da eine mathematische Linie sich eben nicht zeichnen läßt.

79. Lehrs. „Zwei Kreislinien können sich in keiner Lage in mehr als zwei Punkten schneiden." [Fig. 48.]

Bew. Angenommen die beiden Kreislinien um M und m hätten die drei Punkte A, B und C gemein; alsdann wäre:

$$MA = MC = MB \text{ als Radien des Kreises } M$$
$$mA = mC = mB \quad \text{" " " " } m$$

$$MA + mA = MC + mC = MB + mB,$$

was aber unmöglich ist, da die Linie $MC + mC$ oder MCm, als eingeschlossene, jedenfalls kürzer ist als die eine der beiden übrigen gebrochenen Linien, welche sie umschließt.

c. In Bezug auf unsere Haupt-Aufgabe erhalten wir nun aus dem Obigen folgenden Bescheid:

Soll aus drei Seiten ein Dreieck möglich sein, so muß die Seite, von welcher man ausgeht, kleiner als die Summe aber größer als die Differenz der beiden anderen Seiten sein. — Bezeichnen wir die drei Seiten mit a, b und c und gehen in der Construction von c aus, so wären die beiden Bedingungen für die Möglichkeit der Ausführung:

$$1)\ c < a + b,$$
$$2)\ c > a - b \text{ oder } c > b - a.$$

Aus der zweiten Bedingung

$$c > a - b \text{ oder } c > b - a$$

folgt, wenn man $b = b$ oder $a = a$ addirt

$$c + b > a \text{ und } a + c > b.$$

So erhalten wir statt der obigen beiden Bedingungen jetzt die drei:

$$1)\ a + b > c,$$
$$2)\ a + c > b,$$
$$3)\ b + c > a,$$

d. h.: „Die Summe von je zwei Seiten muß größer sein als die dritte."

Genügt die größte Seite dieser Bedingung, so genügen ihr auch die anderen, und man kann daher die Bedingung auch so stellen:

80. „Soll aus drei Seiten ein Dreieck möglich sein, so muß die größte Seite kleiner sein, als die Summe der beiden kleineren."

Führen wir die Construction in der, unter a angegebenen Weise aus, so erhalten wir, da zwei Kreise sich stets in zwei Punkten schneiden, auch immer zwei Dreiecke, ACB und AC_1B [Fig. 49.], von welchen es indessen leicht zu erweisen ist, daß sie bloß in der Lage verschieden sind, denn zieht man die Linie CC_1, so ist:

$$\left.\begin{array}{l} \angle\alpha = \angle\gamma \\ \angle\beta = \angle\delta \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{weil } AC = AC_1 \text{ (s. 66.)} \\ \quad\text{"} \quad BC = BC_1 \end{array}$$

$$\angle\alpha + \beta = \angle\gamma + \delta,$$

d. h. $\angle ACB = \angle AC_1B$,

also ist das Dreieck $ACB \cong AC_1B$ (s. 65.). — Auch zwei getrennte Dreiecke, welche in ihren drei Seiten übereinstimmen, lassen sich immer in diese Lage gebracht denken, woraus folgt:

81. Lehrs. „Zwei Dreiecke sind congruent, wenn sie in ihren drei Seiten übereinstimmen.

Bemerk. Zur Uebung kann der Schüler den Beweis auch durch wirkliche Deckung führen.

Anmerk. Für die Construction des Dreieckes aus seinen drei Seiten entnehmen wir aus dem Obigen: Je mehr die eine (größte) Seite der Summe der beiden anderen sich nähert, desto unsicherer ist die Construction, da man um so weniger genau den wirklichen Durchschnittspunkt der Kreise (also die dritte Ecke des Dreieckes) erkennen kann.

5. Aufgaben.

Wir haben hier noch die Lösung einiger Aufgaben auszuführen, welche im Abschnitte als möglich vorausgesetzt wurde.

82. Aufgabe. „Einen gegebenen Winkel zu halbiren."

Lösung. Um den Scheitelpunkt A des gegebenen Winkels BAC [Fig. 50.] schlage man einen Kreisbogen, der die Schenkel schneidet in den Punkten B und C. Aus diesen Punkten (B und C) schlage man mit gleicher Zirkelöffnung zwei sich schneidende Kreisbögen. Die Verbindungslinie DA des Durchschnittspunktes mit dem Scheitelpunkte halbirt dann den Winkel BAC.

Der Beweis folgt aus 81.

83. Aufgabe. „Eine gegebene Linie zu halbiren."

Lösung. Aus den Endpunkten A und B der gegebenen Linie AB [Fig. 51.] schlage man mit gleicher Zirkelöffnung nach oben und unten

zwei sich schneidende Kreisbögen. Die Verbindungslinie CD dieser Durchschnittspunkte halbirt die Linie AB in E.

Bew. $\triangle ACD \cong BCD$ (81.)

$\angle ACD = \angle BCD$

$\triangle ACE \cong BCE$ (65.)

$AE = BE$

84. Aufgabe. „Durch einen gegebenen Punkt eine Linie senkrecht zu einer gegebenen Linie zu ziehen."

Lösung. Um den gegebenen Punkt A [Fig. 52.], welcher entweder in der gegebenen Linie XY liegt oder außerhalb derselben, schlage man einen Kreisbogen, der die Linie XY in zwei Punkten B und C schneidet; Um diese Punkte (B und C) schlage man dann mit gleichem Radius zwei sich schneidende Kreisbogen und verbinde den Durchschnittspunkt D dieser Kreisbogen mit dem gegebenen Punkte A. Diese Verbindungslinie DA steht dann senkrecht zu XY.

Bew. $\triangle DAB \cong DAC$ (81.)

$\angle DAB = \angle DAC$

[Fig. 52 a.] $DA \perp XY$ [Fig. 52 b.] $\triangle BEA \cong CEA$ (65.)

$\angle BEA = \angle CEA$

$AD \perp XY$

b) Das Dreieck im Besondern.

Unter A haben wir als besondere Dreiecke kennen gelernt das gleichschenklige, das gleichseitige und das rechtwinklige Dreieck. Da in diesen Dreiecken die Elemente einer beschränkenden Bedingung unterworfen sind, so muß auch eine geringere Anzahl von Elementen zu ihrer Bestimmung genügen.

85. „Das gleichschenklige und rechtwinklige Dreieck sind durch zwei von einander unabhängige Elemente bestimmt, das gleichseitige durch ein einziges, nehmlich durch eine Seite."

86. Aufgabe. „Das gleichschenklige Dreieck zu construiren," wenn gegeben sind:

1) Die Basis und der eine Schenkel.
2) Die Basis und der anliegende Winkel.
3) Die Basis und der gegenüberliegende Winkel.
4) Der eine Schenkel und der Winkel an der Basis.
5) Der eine Schenkel und der Winkel am Scheitel.

87. Aufgabe. „Ein rechtwinkliges Dreieck zu construiren," wenn gegeben sind:

1) Die eine Cathete und ein spitzer Winkel. (Zwei Fälle.)
2) Die Hypothenuse und ein spitzer Winkel.
3) Die beiden Catheten.
4) Die Hypothenuse und eine Cathete.

Bemerk. Catheten heißen die den rechten Winkel einschließenden Seiten, Hypothenuse, die ihm gegenüberliegende Seite.

88. Aufgabe. „Das gleichseitige Dreieck aus einer gegebenen Seite zu construiren."

§ 2. Das Viereck.

a) Das Viereck im Allgemeinen.

Die Construction des Vierecks läßt sich auf die des Dreieckes zurückführen.

Zieht man in dem Vierecke ABCD die Diagonale DB, so ist das eine Dreieck (ADB) durch drei, von einander unabhängige Elemente bestimmt. Durch dieses eine Dreieck ist zugleich ein Element des zweiten Dreieckes mit bestimmt — nehmlich die Diagonale DB — und es sind somit zur Bestimmung dieses zweiten Dreieckes bloß zwei Elemente noch erforderlich. Hieraus geht hervor:

89. „Das Viereck im Allgemeinen ist durch fünf von einander unabhängige Elemente bestimmt."

b) Das Viereck im Besonderen.

1. Das Parallelogramm.

90. Lehrsatz. „Die Diagonale theilt das Parallelogramm in zwei congruente Dreiecke." [Fig. 53.]

Bew. Zieht man in dem Parallelogramme ABCD die Diagonale CB, so ist:

$$\left.\begin{array}{l} CB = CB \\ \angle ABC = \angle DCB \\ \angle ACB = \angle DBC \end{array}\right\} \text{Als Wechselwinkel an Parallellinien.}$$

$$\triangle ABC \cong DCB \text{ (63.)}$$

91. Folgerungssatz. „In einem Parallelogramme sind die gegenüberliegenden Seiten einander gleich."

92. Lehrsatz. „Sind in einem Vierecke die gegenüberliegenden Seiten gleich, so ist das Viereck ein Parallelogramm."

Bew. Ist in dem Vierecke ABCD [Fig. 53] die Seite AB = CD und AC = BD, so wird dasselbe durch die Diagonale in zwei Dreiecke zerlegt, welche in ihren drei Seiten übereinstimmen, also congruent sind. Folglich:

$\angle ABC = \angle DCB$ desgl. $\angle ACB = \angle DBC$ (als homologe Winkel.)

$AB \parallel CD$ $AC \parallel DB$ (48.)

93. Lehrsatz. „Sind in einem Vierecke zwei gegenüberliegende Seiten gleich und parallel, so ist das Viereck ein Parallelogramm." [Fig. 53.)

Bew. Ist in dem Vierecke ABCD die Seite AB = // CD so wird dasselbe durch die Diagonale CB in zwei Dreiecke zerlegt, welche in zwei Seiten und den zwischenliegenden Winkel übereinstimmen, folglich sind auch die homologen Seiten AC und BD gleich, also das Viereck (nach 92) ein Parallelogramm.

94. Folgerungssatz. „Das Parallelogramm ist durch drei, von einander unabhängige Elemente (nehmlich durch zwei Seiten und einen Winkel) bestimmt."

95. Aufgabe. „Aus zwei Seiten und einem Winkel ein Parallelogramm zu construiren." [Fig. 54.]

Lösung. An der Unbegrenzten XY construirt man den Winkel BCA gleich dem gegebenen Winkel C und schneidet von dem einen Schenkel desselben das Stück CA gleich der einen gegebenen Seite b und von dem anderen Schenkel das Stück CB gleich der anderen gegebenen Seite a ab. Von B aus construirt man dann (nach 42) $BD \parallel CA$, und von A aus $AD \parallel CB$, oder man schlägt um B mit b und um A mit a als Radius Kreisbogen und verbindet den Durchschnittspunkt D derselben mit B und mit A, so ist in jedem Falle ACBD ein Parallelogramm. (Die erstere Construction stützt sich auf die Definition, die letztere auf 92).

2. Das Trapez.

Das Trapez (ABCD) [Fig. 55] kann entweder durch eine Diagonale (AD) in zwei Dreiecke, oder durch eine parallele Transversale (DE) in ein Dreieck und ein Parallelogramm zerlegt werden. Aus jeder Zerlegung folgt gleich einfach:

96. „Das Trapez ist durch vier von einander unabhängige Elemente bestimmt."

97. Aufgabe. „Ein Trapez aus je vier, von einander unabhängige Elemente zu construiren."

Bemerk. Ob man das Trapez aus zwei Dreiecken oder aus einem Dreiecke und einem Paralelogramme zu construiren habe, erkennt man leicht, wenn man sich zuvor ein beliebiges Trapez zeichnet und an demselben die gegebenen Elemente bemerkt.

3. Das Rechteck.

Da in einem Rechtecke alle Winkel als Rechte gegeben, die gegenüberliegenden Seiten aber gleich sind, so folgt ohne Weiteres:

98. „Das Rechteck ist durch zwei Elemente, namentlich durch seine beiden Seiten bestimmt."

Bem. Man nennt daher das Rechteck ein Product seiner Seiten, und bezeichnet es, wenn a und b seine Seiten sind durch $a \times b$.

4. Die Raute und das Quadrat.

Als besondere Vierecke müssen hier noch angeführt werden 1) das gleichseitige Viereck oder die Raute, 2) das gleichseitige gleichwinklige Viereck oder das Quadrat. — Beide Vierecke sind (nach 92) zugleich Parallelogramme.

Da nun bei einer Raute durch eine Seite alle Seiten, und durch einen Winkel alle Winkel gegeben sind, so folgt:

99. „Die Raute ist durch zwei Elemente, durch eine Seite und einen Winkel, bestimmt."

In dem Quadrate ist außerdem der Winkel als Rechter gegeben, daher folgt:

100. „Das Quadrat ist durch ein Element, nehmlich durch seine Seite, bestimmt."

Bem. Ist a die Seite des Quadrates, so bezeichnet man das Quadrat durch $a\square = a^2$.

§ 3. Das Vieleck.

Setzt man an ein Polygon ein Dreieck an (so daß die Seiten desselben nicht geradlinige Verlängerungen der Seiten des Polygones sind), so erhält das Polygon eine Ecke mehr. — Zu Bestimmung dieses Dreiecks sind aber bloß zwei Elemente erforderlich, weil die eine Seite bereits, als Seite des ursprünglichen Polygones, gegeben ist. Aus dieser Bemerkung kann man leicht die Anzahl der Elemente, die zur Bestimmung eines Polygones im Allgemeinen nöthig sind, ableiten:

Zur Bestimmung eines Dreieckes sind erforderlich		3 Elem.
" " Viereckes "	$3+2=3+1.2$	"
" " Fünfeckes "	$3+1.2+2=3+2.2$	"
" " Sechseckes "	$3+2.2+2=3+3.2$	"
" " Siebeneckes	$3+3.2+2=3+4.2$	"
⋮	⋮	⋮
" " n Eckes "	$3+(n-3).2=2n-3$	"

Sind in einem Polygone alle Seiten und alle Winkel unter sich

gleich, so heißt das Polygon ein regelmäßiges. — Der Winkel eines regelmäßigen Polygones ist (nach 62) $= \frac{2n-4}{n}$ R, also bekannt; da nun auch die Seiten unter sich gleich sind, so folgt:

101. „Das regelmäßige Polygon ist durch ein Element, und zwar durch eine Seite, bestimmt."

1. In einem Parallelogramme halbiren sich die Diagonalen.
2. Ein Viereck, in welchem sich die Diagonalen halbiren, ist ein Parallelogramm.
3. In einem Rechtecke sind die beiden Diagonalen gleich.
4. Ein Parallelogramm, in welchem die Diagonalen gleich sind, ist ein Rechteck.
5. In einem rechtwinkligen Dreiecke ist der Scheitel des rechten Winkels von der Mitte der Hypothenuse um die halbe Hypothenuse entfernt.
6. Ist in einem Dreiecke die eine Ecke von der Mitte der gegenüberliegenden Seite, um die Hälfte dieser Seite entfernt, so ist das Dreieck rechtwinklig.
7. In einer Raute stehen die Diagonalen senkrecht zu einander.
8. Ein Parallelogramm, in welchem die Diagonalen senkrecht zu einander stehen, ist eine Raute.
9. In einem Quadrate sind die Diagonalen gleich und schneiden sich unter rechten Winkeln.
10. Sind in einem Parallelogramme die Diagonalen gleich und stehen senkrecht zu einander, so ist das Parallelogramm ein Quadrat.

Cap. II.

Die Größe.

Jede geschlossene Figur umgrenzt ein Flächenstück von bestimmter allseitiger Ausdehnung, von der man sich eine bildliche Vorstellung machen kann. Diese anschauliche Auffassung der Größe einer umgrenzten Fläche ist hier von keinem Interesse. Wir haben die Flächen ihrer Größe nach mit einander zu vergleichen. — Nun lassen sich aber die Flächen von verschiedener Form nicht leicht mit einander vergleichen, und wir haben daher zunächst die Aufgabe, „den Flächen eine Form zu geben, die für den Vergleich geeignet ist," zu welcher Forderung uns die Bemerkung berechtigt, daß gleich große Flächen von verschiedener Form sehr wohl denkbar sind. — Dieses Capitel zerfällt daher in zwei Abschnitte:

a) Verwandlung der Form.

a. Um hier nicht im Dunklen zu tappen, müssen wir erwägen, welche Form für den Vergleich die geeignetste ist? Es ist offenbar die Form, bei welcher die Größe der Fläche durch ihre beiden Dimensionen bestimmt ist, d. h. die Form des Rechteckes. Zur Rechtfertigung dieser Behauptung diene folgende Erörterung:

Der Ausdruck einer Dimension ist die gerade Linie. Die beiden Dimensionen einer Ebene werden also durch zwei, zu einander in bestimmter Lage befindliche, d. h. zu einander senkrecht stehende Linien bestimmt. In der Ebene selbst können sie aber jede beliebige Lage einnehmen, da in einer unbegrenzten Ebene keine besonders ausgezeichnete Linie gegeben ist. — Anders gestaltet es sich bei begrenzten Flächen, wo die Dimensionen eine bestimmte, in verschiedener Richtung verschiedene, Größe haben. Nehmen wir z. B. ein Parallelogramm, so sind alle Linien, die der einen Seite parallel sind (als Parallelen zwischen Parallelen), dieser Seite selbst gleich. Es eignet sich daher die eine Seite selbst zum Ausdruck der einen Dimension. Wir nennen diese Seite die Grundlinie — und wählen als solche gewöhnlich die horizontale Seite. — Alle Lothe aber zwischen der Grundlinie und der ihr parallelen Seite sind ebenfalls (als Parallelen zwischen Parallelen) einander gleich. — Nennen wir daher das Loth, von einem Punkte der gegenüberliegenden Seite auf die Grundlinie gefällt, die Höhe des Parallelogrammes, so erhalten wir den Satz: „Die Dimensionen eines Parallelogrammes werden durch die Grundlinie und Höhe bestimmt." — Bei einem Rechtecke aber stehen die beiden Seiten senkrecht zu einander. Nimmt man also die eine als Grundlinie, so ist die andere die Höhe, und da nun das Rechteck (nach 98) durch seine beiden Seiten bestimmt ist, so ist obige Behauptung gerechtfertigt.

Mag nun auch für den Vergleich die Form des Rechteckes genügen, für die anschauliche Auffassung ist jedenfalls die Form geeigneter, in welcher die beiden Dimensionen gleich sind, das ist die Form des Quadrates. — Somit ist unser Ziel bekannt: „Wir haben zu ermitteln ob sich ein beliebiges Polygon zunächst in ein Rechteck und dann weiter in ein Quadrat verwandeln läßt."

b. Da das Rechteck ein Parallelogramm mit einem bestimmten Winkel ist, so haben wir die Aufgabe zu lösen: „Ein Parallelogramm in ein anderes mit einem vorgeschriebenen Winkel zu verwandeln." — Aendert man nun den Winkel CAB [Fig. 56.] des Parallelogrammes ABCD, ohne seine Dimensionen zu ändern, so kommt es nach und nach in die drei besonderen Lagen der beistehenden Figuren. — Durch die Bewegung der Seite BD ist nun das ursprüngliche Parallelogramm um das Dreieck D_1BD verkleinert; durch die gleichzeitige Bewegung der Seite A ist es aber um das Dreieck C_1AC vergrößert. Da nun beide Dreiecke stets in zwei Seiten und dem zwischen liegenden Winkel übereinstimmen, also congruent sind, so ist durch eine solche Aenderung des Winkels die Größe des Parallelogrammes nicht geändert. — Das Resultat läßt sich folgendermaßen in einen Satz fassen:

102. Lehrsatz. „Zwei Parallelogramme, die gleiche Dimensionen d. h. gleiche Grundlinie und Höhe haben, sind gleich groß." [Fig. 56.]

Bew. $ABC_1D = ABC_1D$

$$\triangle C_1AC \cong D_1AD \left\{ \begin{array}{l} C_1A = D_1B \\ CA = DB \\ \angle C_1AC = \angle D_1BD \end{array} \right. \begin{array}{l} \left\{ 91 \right\} \\ \\ \left\{ 45 \text{ Zus.} \right\} \end{array} \Bigg\} 65.$$

subtrah. $ABCD = ABC_1D_1$ (13.)

Anmerk. Sind die Parallelogramme getrennt, so denke man sich das eine beweglich und trage es so auf das andere, daß die gleichen Grundlinien in ihren Endpunkten (also auch überhaupt) zusammenfallen. Da nun die Gegenseiten der gemeinschaftlichen Grundlinie parallel sind und von ihr in allen Punkten gleiche Abstände haben, so müssen sie nothwendig beide in eine, der Grundlinie parallele Linie fallen, und wir erhalten so eine der drei obigen Lagen.

Mit diesem Satze ist nun auch die Lösung der obigen Aufgabe gegeben.

103. Aufgabe. „Ein Parallelogramm in ein anderes von gleicher Größe und einem vorgeschriebenen Winkel zu verwandeln." [Fig. 57.]

Lösung. Ist $ABCD$ das gegebene Parallelogramm und α der gegebene Winkel, so construire man an der Grundlinie (oder deren Verlängerung), in jedem Endpunkte einen, dem Winkel α gleichen Winkel ($C_1AB = D_1BK = \alpha$) und verlängere die Schenkel, bis sie die Gegenseite (oder deren Verlängerung) in C_1 und D_1 schneiden, so ist C_1ABD, das verlangte Parallelogramm. — Will man das Parallelogramm in ein Rechteck verwandeln, so braucht man nur in den Endpunkten der Grundlinie rechte Winkel an dieselbe zu setzen, oder, was dasselbe ist, man errichtet in jedem Endpunkte der Grundlinie ein Loth zu derselben und verlängert die Lothe bis zum Durchschnitt mit der Gegenseite.

104. Folgerungssatz. „Jedes Parallelogramm läßt sich in ein Rechteck von gleicher Größe verwandeln."

Gehen wir jetzt zu der Verwandlung des Dreieckes über, da das Dreieck das einfachste der Polygone ist.

Aus Lehrs. 90 ersehen wir, daß die Diagonale ein Parallelogramm in zwei congruente, also auch gleiche, Dreiecke zerlegt. Mit Hinzuziehung von Lehrs. 102 ergiebt sich hieraus sogleich:

105. Lehrs. „Das Dreieck ist die Hälfte des Parallelogrammes von gleicher Grundlinie und Höhe."

106. Zusatz. „Dreiecke von gleicher Grundlinie und Höhe sind gleich."

107. Aufgabe. „Ein Dreieck in ein Parallelogramm zu verwandeln." [Fig. 58.]

Lösung. Man halbirt die Grundlinie AB des Dreieckes ABC in D_1 zieht $DE \parallel AC$ und $CE \parallel AD$ so ist das Parallelogramm $ADEC = \triangle ABC$. — Denn ergänzt man das Dreieck ABC zum

Parallelogramm ABCF, so ist sowohl das Dreieck ABC als auch das Parallelogramm ADCE gleich der Hälfte von ABCF.

Da nun jedes Parallelogramm in ein Rechteck von gleicher Größe verwandelt werden kann, so folgt:

108. Folgerungssatz. „Jedes Dreieck kann in ein Rechteck von gleicher Größe verwandelt werden."

Um ein Polygon in ein Rechteck zu verwandeln, können wir jetzt zwei Wege einschlagen:

1) Wir zerlegen das Polygon durch Diagonalen in Dreiecke, verwandeln jedes Dreieck in ein Parallelogramm, und vereinigen, wo möglich, sämmtliche Parallelogramme in ein Parallelogramm.

2) Wir verwandeln das Polygon direct in ein Dreieck von gleicher Größe, indem wir eine Ecke nach der anderen verschwinden lassen. — Wir wollen beide Wege versuchen.

109. Aufgabe. „Es soll ein Parallelogramm construirt werden, welches gleich der Summe zweier Parallelogramme ist." [Fig. 59.]

Lösung. Da wir (nach 103.) den Winkel eines Parallelogrammes beliebig ändern können, so sind wir berechtigt, die beiden Parallelogramme als gleichwinklig vorauszusetzen. Zwei gleichwinklige Parallelogramme können wir aber immer so an einander setzen, daß ihre Grundlinien in eine gr. Linie fallen. — Sind nun ABCD und BGFE die beiden, also aneinander gesetzten Parallelogramme und wir ergänzen die ganze Figur AEFGDC zu einem Parallelogramme AEHC, so ist dasselbe um das Parallelogramm GFHD größer als die Summe der gegebenen Parallelogramme, und wir haben also von demselben ein Stück = GFHD so abzuschneiden, daß das Uebrigbleibende ein Parallelogramm ist. — Zu dem Zwecke suchen wir in der Linie GF einen Punkt O so zu bestimmen, daß eine, durch diesen Punkt parallel der Seite BD gezogene Linie XY ein Parallelogramm XYHE = GDHF oder, da XOFH beiden gemein ist, YOFE = GOXD abschneidet. — Verbinden wir nun den Punkt O mit den Punkten B und H, so ist:

$$\left.\begin{array}{l} BOY = BOG \\ HOF = HOX \end{array}\right\} 90$$

$$YOFE = GOXD \text{ (Voraussetzung.)}$$

$$BOY + HOF + YOFE = BOG + HOX + GOXD \quad (10.)$$

Hieraus folgt, daß der Punkt O so gewählt werden muß, daß die Linie BOH das Parallelogramm BEHD halbirt, d. h. der Punkt O ist der Durchschnittspunkt der Diagonale BH mit der Seite GF.

Ziehen wir nun die Diagonale BH und durch den Durchschnittspunkt O die Linie IK // DB, so ist: [Fig. 60.]

$$\left\{\begin{array}{l}\triangle BHE \cong BHD \\ \triangle BOK \cong BOG \\ \triangle OHF \cong OHI\end{array}\right\} 90\}$$

$$BHE - (BOK + OHF) = BHD\,(BOG + OHI)$$

d. h. $OKEF = OIDG$

$OIHF = OIHF$ addirt.

$$IKEH = GFHD$$

$$AKIC = ABCD + BEGF.$$

110ᵃ. Zusatz. „Die Summe zweier Rechtecke von gleicher Höhe ist gleich einem Rechtecke von derselben Höhe und einer Grundlinie, gleich der Summe der Grundlinien beider Rechtecke." Sind die Grundlinien a und b, die gemeinschaftliche Höhe h, so ist:

$a \times h + b \times h = (a + b) \times h$. [Fig. 61.]

110ᵇ. Zusatz. „Zieht man durch einen Punkt der Diagonale eines Parallelogrammes zwei den Seiten parallele Linien, so wird das Parallelogramm in vier Parallelogramme getheilt, von welchen die zwei einander gleich sind, durch welche die Diagonale nicht geht."

110ᶜ. Aufgabe. „Ein Parallelogramm zu construiren, welches einem gegebenen Parallelogramme gleich ist, und eine gegebene Seite hat." [Fig. 62.]

Lösung. Ist ABCD das gegebene Parallelogramm, a die gegebene Seite, so mache man $AE = a$; ziehe $EG \parallel BD$; verlängere CD bis G; ziehe die Diagonale AG und durch den Durchschnittspunkt H die Linie $IF \parallel AE$, so ist AEIF das verlangte Parallelogramm; denn es ist $= ABCD$, (da $BHFE = IHCD$), und hat $AE = a$ zur Seite.

Können wir nun zwei Parallelogramme, so können wir auch beliebig viele in ein Parallelogramm vereinigen, und die Verwandlung eines Polygones in ein Parallelogramm, — also auch in ein Rechteck — ist auf dem ersten Wege möglich — aber weitläufig. — Versuchen wir daher auch den zweiten Weg.

111. Aufgabe. „Ein Polygon in ein anderes, von gleicher Größe, zu verwandeln, welches eine Ecke weniger hat." [Fig. 63.]

Lösung. Wollen wir die eine Ecke des gegebenen Polygones ABCD .... N, etwa die Ecke B verschwinden lassen, so schneiden wir durch die Diagonale NB das Dreieck NAB ab und ersetzen es durch ein anderes von gleicher Größe, dessen Scheitel aber in der Verlängerung der Seite BC liegt, was (nach 106) leicht ausführbar ist: Wir verlängern also CB über B hinaus, ziehen durch A die Linie $AA_1 \parallel NB$ und verbinden den Durchschnittspunkt A_1 (dieser Parallelen mit der Verlängerung von CB) mit N, so ist $\triangle NA_1B = NAB$ (106), also auch

$A_1 CD \ldots N = ABCD \ldots N$. — Zugleich hat das Polygon $A_1 CD \ldots N$ eine Ecke (die bei B) weniger als das ursprüngliche.

Lassen wir in dieser Weise eine Ecke nach der anderen verschwinden, so müssen wir endlich auf ein Dreieck kommen, das dem ursprünglichen Polygone gleich ist und (nach 107) in ein Rechteck verwandelt werden kann.

112. Folgerungssatz. „Jedes Polygon kann in ein Rechteck verwandelt werden."

Es bleibt uns nun noch die Aufgabe, „Ein Rechteck in ein Quadrat zu verwandeln," übrig. — Zur Lösung dieser Aufgabe verhelfen uns zwei Eigenschaften des rechtwinkligen Dreieckes, welche hier sogleich, ohne vorhergehende Motivirung, hingestellt werden:

113. Lehrsatz. „Fällt man in einem rechtwinkligen Dreiecke, vom Scheitel des rechten Winkels, ein Loth auf die Hypothenuse, so ist das Quadrat dieses Lothes gleich dem Rechtecke aus den beiden Abschnitten der Hypothenuse." [Fig. 64.]

Vorauss. $\angle ABC = 1R$
$BD \perp AC$

Behaupt. $BD^{\square} = AD \times DC$.

Bew. Man verlängere das Loth BD und mache die Verlängerung $DE = DA$. Ziehe durch E die Linie $EF \parallel AC$ und durch den Punkt F, in welchem sie die Verlängerung von BC schneidet, die Linie $FI \parallel BE$; ferner $BI \parallel AC$, und endlich durch C die Linie $HG \parallel BD$. Dann verlängere man noch AC bis sie IF in K schneidet. — Alsdann ist DCEG das Rechteck aus DC und AD, und nach 110^b gleich dem Rechteck HCKI, dessen eine Seite $HC = BD$ ist. Wir haben also bloß zu zeigen, daß auch die zweite Seite $CK = BD$ ist, welches sich sogleich aus der Congruenz der Dreiecke CKF und BDA ergiebt, denn es ist:

$FK = AD$ (weil beide $= DE$)
$\angle CKF = \angle BDA$ (beide sind Rechte.)
$\angle KCF = \angle DBA$ (beide machen mit $\angle DBC$ einen Rechten.)

$\triangle CKF \cong BDA$ (63.)

$CK = BD$

$CKHI = BD^{\square}$
$CKHI = DCEG$ (110^b.)

$BD^{\square} = DCEG$
$DCEG = DC \times DA$

$BD^{\square} = DC \times DA$.

114. Lehrsatz. „Fällt man in einem rechtwinkligen Dreiecke ein Loth vom Scheitel des rechten Winkels auf die Hypothenuse, so ist das

Quadrat der Cathete gleich dem Rechtecke aus der Hypothenuse und dem, der Cathete anliegenden Abschnitte." [Fig. 65.]

Vorauss. $\angle ABC = 1R$
$BD \perp AC$

Behaupt. $AB^{\square} = AC \times AD$.

Bew. Man verlängert das Loth BD und macht die Verlängerung $DF = AC$; zieht $AE \parallel DF$ und $FE \parallel AD$; darnach $EK \parallel AB$ und $AG \parallel BC$. — Alsdann ist $ADEF = AC \times AD$; wir haben nachzuweisen, daß $ABKG = AB^{\square}$ und dann, daß $ABKG = ADEF$ ist:

$\triangle ABC \cong AGE$ $\left\{ \begin{array}{l} AC = AE \text{ gemacht} \\ \angle ABC = AGE, \text{ als Rechte} \\ \angle BAC = \angle GAE \text{ beide ergänzen } GAC \text{ zum Rechten.} \end{array} \right.$

$AB = AG$

Da nun auch alle Winkel in ABKG Rechte sind, so ist:

$ABKG = AB^{\square}$
nun ist $ABKG = ABHE$ (102.)

$AB^{\square} = ABHE$
$ABHE = ADFE$ (102.)

$AB^{\square} = ADFE = AC \times AD$

Welchen der beiden Sätze man nun auch zur Verwandlung eines Rechteckes in ein Quadrat, mag anwenden wollen, jedenfalls muß man zuvor noch die Aufgabe lösen: „Ueber einer gr. Linie ein rechtwinkliges Dreieck zu construiren, so daß der Scheitel in ein, auf der gegebenen Linie errichtetes Loth fällt." — Zur Lösung dieser Aufgabe verhilft uns der, im Uebungsstoffe zum vorigen Cap. angeführte Satz:

115. Lehrsatz. „Ist die eine Ecke eines Dreieckes von der Mitte der gegenüberliegenden Seite um die Hälfte dieser Gegenseite entfernt, so ist das Dreieck rechtwinklig." [Fig. 66.]

Vorauss. $AD = DB = DC$

Behaupt. $\angle ABC = 1R$

Bew. $\angle x = \angle y$ (weil $AD = DB$)
$\angle u = \angle z$ (weil $DB = DC$)

$\angle x + y = \angle u + z = \angle ABC$

$\angle ABC = 1R$

Der im Lehrsatze 115 ausgesprochenen Bedingung genügen nun alle Dreiecke, deren Scheitelpunkt in der Peripherie eines Kreises liegen, den man

aus der Mitte der Grundlinie mit der halben Grundlinie, als Radius, schlägt.

116. Folgerungssatz. „Der Peripheriewinkel über dem Durchmesser ist ein Rechter."

117. Aufgabe. „Ein gegebenes Rechteck in ein Quadrat zu verwandeln." [Fig. 67.]

1. Lösung. Man verlängere die Grundlinie AB des gegebenen Rechteckes ABCD, und mache die Verlängerung AE = der zweiten Seite AC des Rechteckes; schlage dann über EB als Durchmesser einen Halbkreis und verlängere CA bis zur Peripherie, so ist AF die Seite des Quadrates, welches gleich dem Rechtecke ABCD ist. — Dann verbindet man die Punkte E und B mit F, so ist $\angle$ EFB = 1 R (116), folgl. AF$^{\square}$ = AB $\times$ AE = ABCD (113).

2. Lösung. Von der Grundlinie AB schneidet man AE_1 = AC ab, schlägt über AB als Durchmesser einen Halbkreis, errichtet in E_1 das Loth E_1 F_1 zu AB und verbindet den Durchschnittspunkt F_1 dieses Lothes und der Peripherie mit dem Endpunkte A der Grundlinie, von welchem aus die zweite Seite abgeschnitten wurde, so ist diese Linie AF_1 die Seite des verlangten Quadrates. — Denn verbindet man den Punkt F_1 auch mit B, so ist $\angle$ AF_1B = 1 R (116), folgl. $AF_1^{\square}$ = AB $\times$ AE_1 = ABCD (114).

118. Folgerungssatz. „Jedes Polygon läßt sich in ein Quadrat verwandeln." (112 und 117.)

Noch eine Methode, ein Polygon in ein Quadrat zu verwandeln, ist denkbar: Man zerlegt das Polygon durch Diagonalen in Dreiecke, verwandelt die einzelnen Dreiecke in Quadrate und vereinigt die Quadrate, wo möglich, direct in ein Quadrat. — Wenn diese Methode, vor der vorigen, auch keinen Vorzug verdient, so ist jedenfalls die Lösung der Aufgabe, „zwei Quadrate direct in ein Quadrat zu vereinigen," von Interesse.

119. Aufgabe. „Ein Quadrat zu construiren, welches gleich der Summe zweier gegebener Quadrate ist." (Fig. 68.)

Lösung. Wir setzen die gegebenen Quadrate so aneinander, daß die Grundlinien eine gr. Linie bilden, und ergänzen die also enstandene Figur ACDEFG zu einem Quadrate AHIG. — Verlängern wir nun die Seite BD bis K, so ist das Quadrat AHIG um die beiden Rechtecke CHKD und EKIF größer als die Summe der gegebenen Quadrate, und wir müssen also von diesem Quadrate Flächenstücke abzuschneiden suchen, so daß sie zusammen den genannten beiden Rechtecken gleich sind, der Rückstand aber ein Quadrat ist.

Durch die beiden Diagonalen CK und KF werden die Dreiecke CHK und KIF abgeschnitten, welche zusammen gleich einem Rechtecke sind. Ziehen wir daher FL // KC, verbinden C mit L und beweisen,

daß die zuletzt abgeschnittenen Dreiecke den vorigen gleich sind, das Viereck CKLF aber ein Quadrat ist, so ist die Aufgabe so richtig gelöst:

Bew. I. $\triangle HCK \cong IKF \begin{cases} CH = KI \\ KH = FI \\ \angle CHK = \angle KIF, \text{ als Rechte.} \end{cases}$

1) $CK = KF$

2) $\angle CKF = 1R \begin{cases} \angle x = z \text{ aus I} \\ \angle z + y = 1R, \text{ weil } \angle I = 1R \\ \hline \angle x + y = 1R \end{cases}$

3) $\angle KFL = 1R$ (da $FL \parallel KC$ gezogen wurde.)

II. $\triangle LFG \cong FKI \begin{cases} FG = KI \\ \angle G = \angle I, \text{ als Rechte} \\ \angle u = \angle y \text{ \{ beide ergänzen Z zu 1 R. \}} \end{cases}$

4) $FL = KF$

5) $CK = LF$ (aus 1 und 4.)

Da nun auch $CK \parallel LF$ ist, so folgt, wenn man zugleich 1, 2 und Lehrs. 93 berücksichtigt, daß CKFL ein Quadrat ist. — Nun ist endlich auch

III. $\triangle CAL \cong \triangle LGF \begin{cases} CL = LF \\ \angle A = \angle G \text{ als Rechte} \\ \angle w = \angle u \text{ beide erg. v zum Rechten.} \end{cases}$

Es sind also auch die vier abgeschnittenen Dreiecke unter sich gleich, also zusammen gleich den beiden Rechtecken. Folglich ist CKFL das verlangte Quadrat.

Vergleichen wir aber die Seite dieses Quadrates mit den Seiten der gegebenen Quadrate, so sehen wir, daß dieselbe die Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreieckes ist, dessen Catheten die Seiten der beiden gegebenen Quadrate sind. — So sind wir dann hiermit auf den berühmten Pythagoräischen Lehrsatz geführt:

120. Lehrsatz. „In einem rechtwinkligen Dreiecke ist das Quadrat der Hypothenuse gleich der Summe der Quadrate beider Catheten." [Fig. 69.]

Bew. Der Beweis folgt unmittelbar aus Lehrsatz 114. — Ist nehmlich ABC ein bei B rechtwinkliges Dreieck und $BF \perp AC$, so ist:

$$\begin{aligned} AB^{\square} &= AC \times AF \\ BC^{\square} &= AC \times FC \\ \hline AB^{\square} + BC^{\square} &= AC \times AF + AC \times FC = AC \times (AF + FC) \\ &= AC \times AC = AC^{\square}. \end{aligned}$$

(110ª.)

Bemerkung. Aus diesem Satze ergiebt sich nun eine viel einfachere Lösung der Aufgabe 119: Man setzt die Seiten der gegebenen Quadrate rechtwinklig an einander und zieht die Hypothenuse, so ist diese die Seite des gewünschten Quadrates.

121. a. Zusatz. „Das Quadrat über der Summe zweier Linien besteht aus der Summe der Quadrate und dem doppelten Rechtecke beider Linien."

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab.$$

Setzt man in der Figur zu 119, AB = a und BG = b, so zeigt ein bloßer Anblick der Figur die Wahrheit.

b. Zusatz. „Das Quadrat über der Differenz zweier Linien ist gleich der Summe der Quadrate beider Linien, vermindert um das doppelte Rechteck aus denselben."

Bew. Ist Fig. 70 AE = a; EB = b; AEFG = a^2; ICGH = b^2; ACBD = $(a-b)^2$, so ist: ACBD = AEGF + ICHG − (BKFE + IDKH), d. h. $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2 \times ab$.

c. Zusatz. „Die Differenz der Quadrate zweier Linien ist gleich dem Rechtecke aus der Summe und der Differenz der Linien."

Bew. Ist Fig. 71 AB = a; BH = CF = b; ABCD = $a^{\square}$; CFEG = $b^{\square}$, so ist: ABCD − CFEG = AHFI (da BKIH = GEDK), d. h. $a^2 - b^2 = (a + b) \times (a - b)$.

b) Ausmessung der Flächen.

Schneiden wir von der einen Seite AB eines Rechteckes ABCD [Fig. 72.] gleiche Stücke ab und errichten in den Theilungspunkten Lothe, so werden durch diese Lothe vom Rechtecke eben so viele, unter sich congruente Rechtecke abgeschnitten. Bleibt bei der Grundlinie ein Rest EB, der kleiner ist, als die abgeschnittenen Stücke, so bleibt auch beim Rechtecke ein Rest, der kleiner ist, als die, durch die Lothe abgeschnittenen Rechtecke. Haben daher zwei Rechtecke eine gleiche Seite und wir messen die ungleichen Seiten in einander, so werden zugleich die Rechtecke durch einander gemessen, indem wir in den Theilungspunkten der Grundlinie Lothe zu derselben errichten. — Hieraus folgt:

122. Lehrsatz. „Zwei Rechtecke, die eine gleiche Seite haben, verhalten sich zu einander, wie die ungleichen Seiten, oder deren Maaßzahlen."

Bew. Sind ABCD und EFGH [Fig. 72.] die beiden Rechtecke, welche eine Seite gleich haben (AC = EG), und die wir kurz durch AD und EH bezeichnen wollen, so messe man die ungleichen Seiten AB und EF in einander und errichte in den Theilungspunkten Lothe. Man erhält so:

1) $AB = 2 \times EF + IB$ also auch Rechteck $AD = 2 \times EH + ID$
2) $EF = 2 \times IB + KF$ . . $EH = 2 \times ID + KH$
3) $IB = 2 \times KF + LB$ . . $ID = 2 \times KH + LD$
⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮

Bestimmen wir hieraus die Grenzen, so erhalten wir:

aus 1) ... $2 < \frac{AB}{EF} < 3$ desgleichen $2 < \frac{AD}{EH} < 3$ (Differenz = 1)

. 2) ... $2\frac{1}{3} < \frac{AB}{EF} < 2\frac{1}{2}$. $2\frac{1}{3} < \frac{AD}{EH} < 2\frac{1}{2}$ (..... = $\frac{1}{6}$)

. 3) ... $2\frac{2}{5} < \frac{AB}{EF} < 2\frac{3}{7}$. $2\frac{2}{5} < \frac{AD}{EH} < 2\frac{3}{7}$ (..... = $\frac{1}{35}$)

⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮

Da nun beide Verhältnisse stets zwischen denselben Grenzen bleiben, auch wenn die Differenz der Grenzen sich unendlich der Null nähert, so sind die Verhältnisse gleich (s. Arithmetik, Seite 63, Lehrs. 59).

Bezeichnen wir mit m die Linieneinheit, und ist $AB = a \cdot m$; $EF = b \cdot m$, so ist also:

$$\frac{ABCD}{EFGH} = \frac{AB}{EF} = \frac{a \cdot m}{b \cdot m} = \frac{a}{b} \quad \{19\}$$

oder $ABCD = \frac{a}{b} \times EFGH.$

123. Lehrsatz. „Zwei beliebige Rechtecke verhalten sich zu einander, wie die Producte aus den Maaßzahlen ihrer Seiten."

Bew. Es seien ABCD und EFGH [Fig. 73.] die beiden Rechtecke, deren Flächen wir kurz durch R und Q bezeichnen wollen. Ferner sei $AB = a \cdot m$; $AC = b \cdot m$; $EF = \alpha \cdot m$; $EG = \beta \cdot m$; (wo m die Linieneinheit, a, b, α, β also die respectiven Maaßzahlen bedeuten).

Man construire nun, um diesen Fall auf den vorigen zurückzuführen, ein Hilfsrechteck, welches die eine Seite mit ABCD, die andere mit EFGH gleich hat. — Ist MIKL dieses Rechteck (dessen Fläche wir kurz durch P bezeichnen wollen) und zwar $LK = AC$ und $LI = EF$, so folgt aus 122:

$$\frac{R}{P} = \frac{AB}{LI} = \frac{a}{\alpha} \text{ oder } 1)\ R = \frac{a}{\alpha} \cdot P$$

$$\frac{P}{Q} = \frac{LK}{EG} = \frac{b}{\beta} \cdot \quad 2)\ P = \frac{b}{\beta} \cdot Q$$

den Werth für P aus 2 in 1 subst. $R = \frac{a}{\alpha} \cdot \frac{b}{\beta} \cdot Q$

oder $\frac{R}{Q} = \frac{a}{\alpha} \cdot \frac{b}{\beta} = \frac{ab}{\alpha\beta}$

Setzen wir $Q = m^{\square}$; also $EF = EG = m$; so ist $\alpha = 1$ und $\beta = 1$, folglich $\frac{R}{m^{\square}} = a \,.\, b$.

124. Definition. „Das Verhältniß einer Fläche zum Quadrate der Linieneinheit nennen wir den Inhalt der Fläche."

125. Folgerungssatz. „Der Inhalt eines Rechteckes ist gleich dem Producte aus den Maaßzahlen seiner Seite."

1. Zusatz. „Der Inhalt eines Parallelogrammes ist gleich dem Producte aus den Maaßzahlen seiner Grundlinie und Höhe." (s. 102.)

2. Zusatz. „Der Inhalt eines Deieckes ist gleich dem halben Producte aus den Maaßzahlen der Grundlinie und Höhe."

Da sich (nach 112) ein jedes Polygon in ein Rechteck verwandeln läßt, so ist mit dem Satze 123 und seiner Folgerung 125, die Ausmessung der Flächen auf die von Linien reducirt, so daß man also nie zwei Flächen direct mit einander zu vergleichen braucht. Die Verwandlung der Form von Flächen im Großen — auf freiem Felde — so wie die Construction von Normalen (die Höhenlothe bei Parallelogrammen und Dreiecken) ist mit manchen Schwierigkeiten verbunden und führt nothwendig zu Ungenauigkeiten, da eine jede Construction Fehlern unterworfen ist. — Es ist daher nicht bloß von theoretischem Interesse, den Inhalt einer Fläche, wo möglich, aus ihren Elementen selbst abzuleiten. — Da ein jedes Polygon durch Diagonalen in Dreiecke zerlegt werden kann, so können wir uns füglich auf das Dreieck beschränken. — Nun ist zwar das Dreieck durch je drei, von einander unabhängige Elemente bestimmt, — da aber Winkel und Seiten, als ungleichartige Größen, sich nicht vergleichen lassen, und wir somit (vorläufig wenigstens) kein Mittel besitzen, die Abhängigkeit der Winkel von den Seiten durch eine Zahl auszudrücken, so können also, bei der Bestimmung des Inhaltes eines Dreieckes durch Rechnung, die Winkel nicht in Betracht kommen, und wir müssen uns auf die Aufgabe beschränken:

126. Aufgabe. „Den Inhalt eines Dreieckes aus den Maaßzahlen seiner drei Seiten zu bestimmen."

Lösung. Bezeichnen wir die Maaßzahlen der Seiten des Dreieckes ABC [Fig. 74.] respective mit a, b, c; die Maaßzahl der Höhe BD mit h; den Inhalt mit i; so ist (nach 125, 2)

$$1)\ i = \tfrac{1}{2}\, b \,.\, h$$

und wir haben daher h durch die Maaßzahlen der Seiten zu bestimmen. — Nun ist aber BD die gemeinschaftliche Cathete zweier rechtwinkliger Dreiecke, folglich:

$$2)\ h^2 = a^2 - d^2$$
$$3)\ h^2 = c^2 - (b - d)^2$$

$$c^2 - (b - d)^2 = a^2 - d^2$$

oder $c^2 - b^2 - d^2 + 2bd = a^2 - d^2$ [da $(b-d)^2 = b^2 + d^2 - 2bd$ {121 b}]

$-c^2 + b^2 + d^2 \quad = -c^2 + b^2 + d^2$ addirt (Arithm. S. 79,2.)

$$2bd = a^2 + b^2 - c^2$$

durch 2b div. . . . . 4) $d = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b}$; dieser Werth in 2 substituirt giebt:

$$5)\ h^2 = a^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b}\right)^2$$

Zwar ist hiermit h durch die Maaßzahlen der drei Seiten ausgedrückt, doch ist die Form für die Rechnung unbequem, und wir haben dieselbe noch zu reduciren:

$$h^2 = \left(a + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b}\right) \times \left(a - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b}\right)$$

(Arithm. S. 79,3 u. 121 c.)

$$= \frac{2ab + a^2 + b^2 - c^2}{2b} \times \frac{2ab - a^2 - b^2 + c^2}{2b}$$

$$= \frac{(a+b)^2 - c^2}{2b} \times \frac{c^2 - (a-b)^2}{2b} \quad [\text{denn } 2ab - a^2 - b^2 = -(a - b^2)]$$

$$= \frac{(a+b+c)(a+b-c)}{2b} \times \frac{(c+a-b).(c-a+b)}{2b}$$

folglich . . . $h = \sqrt{\frac{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}{4b^2}}$

Setzen wir nun diesen Ausdruck für h in 1, so erhalten wir:

$$i = \tfrac{1}{2} b . \sqrt{\frac{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}{4b^2}}$$

Bringt man noch $\tfrac{1}{2}$ b unter die Wurzel:

$$i = \sqrt{\frac{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}{16}}$$

Dieser Ausdruck erhält eine noch elegantere und für die Rechnung bequemere Form, wenn wir die Summe der Maaßzahlen

$a + b + c = s$ setzen, so ist

$b + c - a = s - 2a$

$a + c - b = s - 2b$

$a + b - c = s - 2c$

$$i = \sqrt{\frac{s}{2} \cdot \frac{s - 2a}{2} \cdot \frac{s - 2b}{2} \cdot \frac{3 - 2c}{2}}$$

oder $$i = \sqrt{\frac{s}{2} \cdot \left(\frac{s}{2} - a\right) \cdot \left(\frac{s}{2} - b\right) \cdot \left(\frac{s}{2} - c\right)}$$

Cap. III.

Gegenseitige Abhängigkeit der Seiten und Winkel eines Dreieckes.

Daß an eine vollständige Lösung dieser Aufgabe hier nicht gedacht werden kann, ist schon oben bemerkt worden. — Nur einige allgemeine Beziehungen zwischen den Seiten und den Winkeln, sollen hervorgehoben werden.

127. Lehrsatz. „Wird der eine Winkel eines Dreieckes geändert, so erleidet die gegenüberliegende Seite eine entsprechende Aenderung."

Bew. Lassen wir in dem Dreiecke ABC [Fig. 75] den Winkel bei B wachsen, so daß der Schenkel BC nach und nach die drei Lagen BC_1; BC_2; BC_3 einnimmt, so ist:

in der 1. Lage $BC_1 + C_1A > BC + CA$ (15)

$$B_1C = BC$$

$$1)\ C_1A > CA$$

in der 2. Lage (wo C auf die Verlängerung von AC fällt):

$$AC_2 + BC_1 > BC_2 + AC_1 \quad (18)$$

$$BC_1 = BC_2$$

$$AC_2 > AC_1$$

in der 3. Lage: $AC_3 + BC_2 > BC_3 + AC_2$

$$BC_2 = BC_3$$

$$AC_3 > AC_2$$

Es ist also $AC_3 > AC_2 > AC_1 > AC$, d. h. wächst in einem Dreiecke der eine Winkel, so wächst auch die gegenüberliegende Seite. — Das Resultat läßt sich auch also aussprechen:

128. Lehrsatz. „Stimmen zwei Dreiecke in zwei Seiten überein, nicht aber in dem zwischenliegenden Winkel, so liegt auch dem größeren eingeschlossenen Winkel die größere dritte Seite gegenüber." [Fig. 76.]

Vorauss. $AB = A_1B_1$

$BC = B_1C_1$

$\angle ABC > \angle A_1B_1C_1$

Behaupt. $AC > A_1C_1$

Bew. Deckt man das eine Dreieck $A_1B_1C_1$ so auf das andere ABC, daß die eine gleiche Seite A_1B_1 auf AB fällt, so muß das erstere Dreieck zum letzteren in eine der drei Lagen kommen, welche die Dreiecke ABC_1; ABC_2; ABC_3; zu ABC in der Fig. 75 einnehmen.

129. Lehrsatz. „Stimmen zwei Dreiecke in zwei Seiten überein, nicht aber auch in der dritten, so liegt der größeren dritten Seite auch der größere Winkel gegenüber." [Fig. 76.]

Vorauss. $AB = A_1 B_1$
$BC = B_1 C_1$
$AC > A_1 C_1$

Behaupt. $\angle ABC > A_1 B_1 C_1$

Bew. Wäre der Winkel $ABC = \angle A_1 B_1 C_1$, so wären die Dreiecke congruent (65), also könnte nicht $AC > A_1 C_1$ sein; wäre aber gar $\angle ABC < \angle A_1 B_1 C_1$, so müßte nach 128 auch $AC < A_1 C_1$ sein. Da auch dieses der Voraussetzung widerspricht, so kann nur

$\angle ABC > \angle A_1 B_1 C_1$ sein.

130. Lehrsatz. „Ist das Quadrat der einen Seite eines Dreieckes gleich der Summe der Quadrate der beiden andern Seiten, so liegt der ersteren Seite ein rechter Winkel gegenüber." [Fig. 77.]

Vorauss. $AB^\square = AC^\square + BC^\square$

Behaupt. $\angle ACB = 1 . R$

Bew. Wir construiren $CD \perp AC$; machen $CD = CB$ und verbinden D mit A, so ist:

$AD^\square = AC^\square + DC^\square$ (120.)
$AB^\square = AC^\square + CB^\square$ (Vorauss.)

$AD^\square = AB^\square$ (da $DC^\square = CB^\square$)

$AD = AB$

Es stimmen also die beiden Dreiecke ACD und ACB in ihren drei Seiten überein, folglich sind auch die homologen Winkel in ihnen gleich, also: $\angle ACB = \angle ACD = 1 . R.$

131. Lehrsatz. „Das Quadrat der Seite eines Dreieckes, welche einem spitzen Winkel gegenüber liegt, ist gleich der Summe der Quadrate der beiden anderen Seiten, vermindert um das doppelte Rechteck aus der einen und der Projection der anderen auf diese."

Bew. Ist in dem Dreiecke ABC [Fig. 74.] der Winkel C ein spitzer, so fällt das Loth BD (von B auf AC gefällt) in das Dreieck, und es ist DC (= d) die Projection von a auf b. — Nun ist:

$c^2 = h^2 + (b - d)^2$ . . (120)
$h^2 = a^2 - d^2$ . . . . . (120)

$c^2 = a^2 - d^2 + (b - d)^2$
$= a^2 - d^2 + b^2 + d^2 - 2bd$ (121 b)

$c^2 = a^2 + b^2 - 2 . bd$

132. Lehrsatz. „Das Quadrat der Seite eines Dreieckes, welche einem stumpfen Winkel gegenüber liegt, ist gleich der Summe der Quadrate der beiden anderen Seiten, plus dem doppelten Rechtecke aus der einen und der Projection der anderen auf diese."

Bew. Ist in dem Dreiecke ABC [Fig. 78.] der Winkel C ein stumpfer, so trifft das Loth, von B auf AC gefällt, die Verlängerung von AC und es ist CD (= d) die Projection von a auf b. — Nun ist:

$$c^2 = h^2 + (b + d)^2$$
$$h^2 = a^2 - d^2$$
$$c^2 = a^2 - d^2 + (b + d)^2$$
$$= a^2 - d^2 + b^2 + d^2 + 2\,bd \quad (121\text{ a.})$$
$$c^2 = a^2 + b^2 + 2\,bd$$

Fällt man von den Endpunkten einer Linie Lothe auf eine andere Linie, so heißt die Linie zwischen den Fußpunkten der beiden Lothe die Projection der ersteren Linie.

Cap. IV.

Ergänzungen.

§ 1. Operationen mit Linien.

Daß man nicht mit Linien rechnen kann, ist an sich klar; nichts destoweniger haben wir in Obigem Linien durch dieselben Symbole verknüpft, durch welche wir in der Arithmetik die Zahlformen ausdrücken, deren Werthe respective durch die Addition, Subtraction, Multiplication und Division gefunden werden. — Der Sinn ist folgender: „Sobald die Maaßzahl eines Raumgebildes durch eine bestimmte arithmetische Operation aus den Maaßzahlen der, dieses Raumgebilde bestimmenden Linien, ermittelt wird, so verknüpfen wir die Linien selbst durch das gleiche Operationszeichen."

Bezeichnen wir mit a, b, c, d .... Linien und mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ... respective die Maaßzahlen derselben, so daß

$$a = \alpha \,.\, m;\ b = \beta \,.\, m;\ c = \gamma \,.\, m;\ d = \delta \,.\, m \ldots.$$

so erhalten wir folgende Definitionen:

1) $a + b$ bezeichnet eine Linie; denn construiren wir nach 9

$$c = a + b$$

so ist in der That auch $\gamma = \alpha + \beta$

2) $a - b$ bezeichnet eine Linie; denn construiren wir nach 12

$$c = a - b$$

so ist in der That ... $\gamma = \alpha - \beta$

3) $a \times b$ bezeichnet ein Rechteck mit den Seiten a und b. — Denn bezeichnen wir die Fläche desselben mit R, so ist nach 125:

$$\frac{R}{m^{\square}} = \alpha \,.\, \beta$$

4) $a : b = \frac{a}{b}$ bezeichnet eine Zahl. [S. 20.]

5) $\frac{a \cdot b}{c}$ bezeichnet die Seite eines Rechteckes, welches gleich $a \times b$ ist und zur Seite c hat.

Denn setzen wir 1) $\frac{ab}{c} = x$ und construiren

2) $cx = ab$ (110c)

so erhalten wir durch Substitution der obigen Werthe für a, b und c:

$$\gamma \cdot m \cdot x = \alpha \cdot m \cdot \beta \cdot m = \alpha\beta \cdot m^{\square}$$

oder $\gamma \cdot \frac{mx}{m^{\square}} = \alpha\beta$

$$\frac{mx}{m^{\square}} = \frac{\alpha\beta}{\gamma}$$

oder 3) $\frac{x}{m} = \frac{\alpha\beta}{\gamma}$ $\left\{ \text{da } \frac{mx}{m^{\square}} = \frac{x}{m} \text{ (s. 122)} \right\}$

1. Zusatz. $\frac{a \cdot b}{b} = a$.

2. Zusatz. $\frac{a \cdot b}{c} = \frac{a}{c} \cdot b$; denn setzen wir $\frac{a}{c} = \mu$ und substituiren in die Gleichung 2) $a = \mu \cdot c$, so folgt:

$$cx = \mu \cdot cb$$

$$x = \mu b \text{ d. h. } \frac{ab}{c} = \mu \cdot b = \frac{a}{c} \cdot b$$

6) $\frac{ab}{cd}$ bezeichnet, als Verhältniß zweier Rechtecke, eine Zahl, und läßt sich immer auf das Verhältniß zweier Linien zurückführen. Denn construiren wir (nach 110 c)

1) $cx = ab$

so ist 2) $\frac{ab}{cd} = \frac{cx}{cd} = \frac{x}{d} = \mu$ (122.)

Setzen wir $\frac{a}{c} = \alpha$ und $\frac{b}{d} = \beta$ und substituiren in die Gleichung 1) $a = \alpha c$ und $b = \beta \cdot d$, so folgt:

$$cx = \alpha c \cdot \beta \cdot d = \alpha\beta \cdot cd$$

d. h. 3) $\frac{cx}{cd} = \alpha \cdot \beta$ folgl.

4) $\frac{ab}{cd} = \frac{a}{c} \times \frac{b}{d}$

7) $\sqrt{ab}$ bezeichnet die Seite eines Quadrates, welches gleich dem Rechtecke $a \times b$ ist.

Denn construiren wir (nach 117)

$$c^{\square} = a \times b$$

und substituiren $a = \alpha \,.\, m$; $b = \beta \,.\, m$; $c = \gamma \,.\, m$; so ist:

$$(\gamma \,.\, m)^{\square} = \alpha m \,.\, \beta m$$

oder $\gamma^2 \times m^{\square} = \alpha\beta \,.\, m^{\square}$

d. h. $\gamma^2 = \alpha\beta$

$$\gamma = \sqrt{\alpha\beta}$$

8) $\sqrt{a^2 + b^2}$ bezeichnet die Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreieckes, dessen Catheten a und b sind. — Denn bezeichnen wir die Hypothenuse mit c, so ist:

$$c^{\square} = a^{\square} + b^{\square} \quad (120)$$

$a = \alpha m$; $b = \beta m$; $c = \gamma m$ substituirt:

$$\gamma^2 \,.\, m^{\square} = \alpha^2 m^{\square} + \beta^2 m^{\square}$$

$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$$

also $\gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$

9) $\sqrt{a^2 - b^2}$ bezeichnet die Cathete eines rechtwinkligen Dreieckes, in welchem a die Hypothenuse, b die eine Cathete ist. Denn bezeichnen wir die Cathete mit c, so ist

$$c^{\square} = a^{\square} - b^{\square} \quad (120)$$

$a = \alpha \,.\, m$; $b = \beta \,.\, m$ und $c = \gamma \,.\, m$ substituirt:

$$\gamma^2 \,.\, m^{\square} = \alpha^2 \,.\, m^{\square} - \beta^2 \,.\, m^{\square}$$

$$\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2$$

also $\gamma = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$

§ 2. Das Vielfache einer graden Linie.

Im Vorhergehenden ist öfter eine Linie als möglich vorausgesetzt, welche ein beliebiges Vielfache einer gegebenen Linie ist. — Wir haben hier zu untersuchen, in wie weit die wirkliche Construction einer solchen Linie ausführbar ist.

Ist α eine beliebige rationale oder irrationale Zahl, a eine beliebige Linie, so hat die Aufgabe, eine Linie $x = \alpha \,.\, a$ zu construiren keine Schwierigkeit, wenn α eine ganze Zahl ist. — Ist aber α ein Bruch und etwa $= \frac{m}{n}$, so haben wir den n-ten Theil der Linie m-mal zu setzen; wir haben also vor Allem die Aufgabe zu lösen:

133. Aufgabe. „Eine begrenzte grade Linie in eine beliebige Anzahl gleicher Theile zu theilen."

Lösung. Ist AB [Fig. 79] die gegebene Linie, so ziehe man durch den einen Endpunkt A, die Linie AX in beliebiger Neigung zu AB;

schneide von dieser Linie, von A aus, beliebige, aber unter sich gleiche Stücke in der gewünschten Anzahl ab; verbinde den letzten Theilpunkt A_n mit dem zweiten Endpunkte B der gegebenen Linie, und ziehe endlich durch die übrigen Theilpunkte Linien parallel der Linie $A_n B$, so theilen diese die Linie AB in die gewünschte Anzahl gleicher Theile. — Denn ziehen wir die Linien $A_1 C_1$; $A_2 C_2$; $A_3 C_3$ ... $A_{n-1} C_{n-1}$ alle parallel der Linie AB, so sind die Dreiecke $A A_1 B_1$; $A_1 A_2 C_1$; $A_2 A_3 C_2$ .... $A_{n-1} A_n C_{n-1}$ unter sich congruent, da sie in einer Seite und zwei anliegenden Winkeln (die als Correspondirende gleich sind) übereinstimmen. Folglich ist:

$$AB_1 = A_1 C_1 = A_2 C_2 = \ldots = A_{n-1} C_{n-1}; \text{ es ist aber auch}$$

$$A_1 C_1 = B_1 B_2$$

$$A_2 C_2 = B_2 B_3$$

$$\ldots$$

$$A_{n-1} C_{n-1} = B_{n-1} B \quad (91)$$

$$AB_1 = B_1 B_2 = B_2 B_3 = \ldots\ldots = B_{n-1} B$$

Zusatz. „Schneidet man auf dem einen Schenkel eines Winkels gleiche Stücke ab, und zieht durch die Theilungspunkte Parallellinien, so werden durch diese auch auf dem anderen Schenkel gleiche Stücke abgeschnitten."

Aufgabe. „Eine Linie $x = \alpha . a$ zu construiren, wenn α als eine beliebige, rationale oder irrationale Zahl, a als eine begrenzte grade Linie gegeben ist."

Lösung.

1. Ist α eine ganze Zahl, so trägt man die Linie a so oft auf eine unbegrenzte grade Linie, als α Einheiten hat. [S. 9.]

2. Ist α ein rationaler Bruch $= \frac{m}{n}$; so theilt man die Linie (a nach 133) in n gleiche Theile und trägt einen solchen Theil so oft auf eine unbegrenzte Grade, als m Einheiten hat.

3. Ist α eine irrationale Zahl und $= \sqrt{\beta}$; so ist

$$x = \sqrt{\beta} . a = \sqrt{\beta . a^{\square}} = \sqrt{\beta a . a}$$

d. h. x die Seite eines Quadrates welches gleich dem Rechtecke $\beta a \times a$ ist. [S. § 1, 7.]

Beispiel. Es sei $x = \sqrt{3} . a$ zu construiren. [Fig. 80.]

Lösung. Man mache $AB = 3a$, schlage über AB als Durchmesser einen Halbkreis, errichte in C die Linie $CD \perp AB$ und ziehe BD, so ist:

$$BD^{\square} = AB \times CB = 3a \times a$$

folglich $BD = \sqrt{3a . a} = \sqrt{3} . a = x$

§ 4. Die Proportion.

1. Die Verbindung zweier Verhältnisse durch das Gleichheitszeichen heißt eine Proportion.

Man schreibt: $a : b = c : d$ oder $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

und liest: a verhält sich zu b, wie sich c zu d verhält,

oder a $\left\{\begin{matrix}\text{gemessen}\\ \text{dividirt}\end{matrix}\right\}$ durch b giebt dieselbe Zahl als b $\left\{\begin{matrix}\text{gemessen}\\ \text{dividirt}\end{matrix}\right\}$ durch d.

2. Die zur Proportion vereinigten Größen heißen Glieder der Proportion und werden der Reihe nach gezählt. — Das 1. und 4. Glied heißen die äußeren, das 2. und 3. Glied die inneren Glieder. — Die Glieder des ersten Verhältnisses heißen die vordern, die des zweiten die hinteren Glieder.

3. Jede der vier zu einer Proportion vereinigten Größen ist durch die drei übrigen bestimmt und heißt die vierte Proportionale zu denselben.

4. Sind die inneren Glieder einer Proportion gleich, so heißt die Proportion eine stetige, und das gleiche Mittelglied heißt die mittlere Proportionale oder das geometrische Mittel aus den ungleichen Gliedern. — Ein jedes der ungleichen Glieder aber heißt die dritte Proportionale zu den beiden übrigen.

135. Lehrsatz. „Sind zwei Producte gleich, so sind die Factoren proportionirt; und zwar bilden die Factoren des einen Productes die inneren, die des anderen die äußeren Glieder der Proportion."

Vorauss. $ab = cd$

Behaupt. $a : c = d : b$

Bew. $ab = cd$ (Vorauss.)

$cb = cb$

$\frac{ab}{cb} = \frac{cd}{cb}$

$\frac{a}{c} = \frac{d}{b}$ $\left\{ 122 \right\}$

oder $a : c = d : b$

Zusatz. „In zwei gleichen Rechtecken verhalten sich die Grundlinien umgekehrt wie die Höhen."

Sind b und h Grundlinie und Höhe des einen Rechteckes

" b_1 " h_1 " " " " anderen "

so ist wenn $b \times h = b_1 \times h_1$

auch $b : b_1 = h_1 : h$

136. Lehrsatz. „In einer richtigen Proportion ist das Product der inneren Glieder gleich dem Producte der äußeren Glieder."

Vorauss. $a : b = c : d$

Behaupt. $b \times c = a \times d$

Bew. Setzen wir $b \times c = a \times k$, so ist nach 135

$$a : b = c : k$$

Nach der Vorauss. ist $a : b = c : d$

$$k = d$$

137. Zusatz. „Aus einer richtigen Proportion erhält man durch Umkehr der inneren oder äußeren Glieder, so wie durch die Umkehr der Vorder- und Hinterglieder wieder eine richtige Proportion."

Ist $a : b = c : d$, so ist nach 136 auch $b \,.\, c = a \,.\, d$, woraus man nach 135 ableiten kann:

1) $a : c = b : d$
2) $d : b = c : a$
3) $b : a = d : c$

138. Lehrsatz. „In jeder richtigen Proportion verhält sich die Summe und die Differenz der Vorderglieder zu einem Vorderglieder, wie die Summe und die Differenz der Hinterglieder zum entsprechenden Hinterglieder."

Vorauss. $a : b = c : d$

Behaupt. $\frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}$

Bew. Setzt man $a : b = e$, so ist auch $c : d = e$; nun ist:

$$\frac{a \pm b}{b} = \frac{a}{b} \pm \frac{b}{b} = e \pm 1$$

$$\frac{c \pm d}{d} = \frac{c}{d} \pm \frac{d}{d} = e \pm 1$$

$$\frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d} \quad (6)$$

Bemerkung. Sind mehrere Verhältnisse einander gleich; $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}$ so vereinigt man sämmtliche Glieder in die zusammengesetzte Proportion:

$$a_1 : a_2 : a_3 : \ldots : a_n = b_1 : b_2 : b_3 : \ldots : b_n$$

in welcher je zwei Glieder der einen Seite zwei entsprechenden der anderen Seite proportionirt sind.

139. Lehrsatz. „In einer zusammengesetzten Proportion verhält

sich die Summe der Vorderglieder zur Summe der Hinterglieder, wie ein Vorderglied zu dem entsprechenden Hinterglieder."

Vorauss. $a_1 : a_2 : a_3 : \ldots : a_n = b_1 : b_2 : b_3 : \ldots : b_n$

Behaupt. $\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + b^{\varepsilon} + \ldots + b_n} = \frac{a_n}{b_n}$

Bew. Aus der Voraussetzung folgt:

$$a_1 : b_1 = a_n : b_n \text{ oder } a_1 = \frac{a_n}{b_n} \cdot b_1$$

$$a_2 : b_2 = a_n : b_n \quad \cdot \quad a_2 = \frac{a_n}{b_n} \cdot b_2$$

$$a_3 : b_2 = a_n : b_n \quad \cdot \quad a_3 = \frac{a_n}{b_n} \cdot b_3$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$a_n : b_n = a_n : b_n \quad \cdot \quad a_n = \frac{a_n}{b^n} \cdot b_n$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \frac{a_n}{b_n} \cdot (b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n)$$

$$\text{oder } \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n} = \frac{a_n}{b_n}$$

Cap. V.

Die Form.

Die Form einer Figur hängt nicht von der absoluten, sondern von der verhältnißmäßigen Größe seiner Elemente ab. — Die Formelemente sind also Seitenverhältnisse und Winkelverhältnisse.

„Wir nennen zwei Polygone ähnlich, wenn sie in ihren Winkelverhältnissen und Seitenverhältnissen übereinstimmen." — Das Zeichen für die Aehnlichkeit ist: $\backsim$.

140. Lehrsatz. „Stimmen zwei Polygone von gleicher Seitenzahl in ihren Winkelverhältnissen überein, so stimmen sie in ihren Winkeln selbst überein."

Bew. Der Satz gründet sich darauf, daß die Winkelsumme eines Polygones bloß abhängig ist von der Anzahl der Seiten (62). — Denn bezeichnen wir die Winkel des einen Polygones durch A_1; A_2; A_3; ... A_n; die des zweiten von gleicher Seitenzahl durch B_1; B_2; B_3; ... B_n und ist die Voraussetzung: $A_1 : A_2 : A_3 : \ldots : A_n = B_1 : B_2 : B_3 : \ldots B_n$; so folgt aus 139:

$$\frac{A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n}{B_1 + B_2 + B_3 + \ldots + B_n} = \frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} = \ldots = \frac{A_n}{B_n}$$

Da nun $A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n = B_1 + B_2 + B_3 + \ldots + B_n = (2_n - 4)\ R$ (62) ist, so ist auch:

$$A_1 = B_1;\ A_2 = B_2;\ \ldots\ A_n = B_n$$

Die obige Definition reducirt sich also dahin:

141. Definition. „Zwei Polygone von gleicher Seitenzahl heißen ähnlich, wenn sie in ihren Seitenverhältnissen und in ihren Winkeln übereinstimmen."

§ 1. Das Dreieck.

Die Elemente eines Dreieckes sind drei Seiten und drei Winkel; wir hätten somit als Formelemente drei Seitenverhältnisse und drei Winkel. — „Durch zwei Seitenverhältnisse eines Dreieckes ist aber auch das dritte gegeben." Denn ist

$$1)\ \frac{a}{b} = m$$

$$2)\ \frac{c}{b} = n$$

$$3)\ \frac{a}{c} = \frac{m}{n}$$

Da nun auch durch zwei Winkel eines Dreieckes der dritte gegeben ist, so bleiben als Form bestimmende Elemente eines Dreiecks zwei Seitenverhältnisse und zwei Winkel übrig.

Um nun die Abhängigkeit der Form eines Dreieckes von dirsen Formelementen zu ermitteln, müssen wir das Dreieck aus denselben zu construiren suchen. — Wir beginnen wieder mit den Winkeln:

1. Die Form des Dreieckes durch zwei Winkel bestimmt.

In dem Endpunkte B_1 einer einseitig begrenzten Graden $B_1\ X$ [Fig. 81] construiren wir den Winkel $Y B_1\ X$ gleich dem gegebenen Winkel B; nehmen auf $B_1\ X$ ein beliebiges Stück $B_1\ C_1$ als die eine Seite X_a und construiren in dem Punkte C_1 den Winkel $B_1\ C_1\ Z =$ dem zweiten gegebenen Winkel C; Ist nun $\angle B + C < 2\ R$, so schneiden sich die Schenkel $B_1\ Y$ und $C_1\ Z$ in einem Punkte A_1 und es ist ein Dreieck $B_1\ C_1\ A_1$ mit bestimmten Seitenverhältnissen entstanden.

Wir haben nun noch nachzuweisen, daß all die Dreiecke $B_1\ C_1\ A_1$; $B_1\ C_2\ A_2$; $B_1\ C_3\ A_3$; ... welche in gleicher Weise entstehen, wenn wir für X_a successiv die Strecke $B_1\ C_1$; $B_1\ C_2$; $B_1\ C_3$; ... auf $B_1\ X$ nehmen, und von denen wir wissen, daß sie in ihren Winkeln übereinstimmen, — auch in ihren Seitenverhältnissen übereinstimmen. — Da nun die

Linien $A_1 C_1$; $A_2 C_2$; $A_3 C_3$; ... unter sich parallel sind, so haben wir also folgende Sätze zu erweisen:

142. Lehrsatz. „Die Schenkel eines Winkels werden durch Parallellinien proportional geschnitten." (D. h. die Abschnitte des einen Schenkels verhalten sich zu einander, wie die entsprechenden Abschnitte auf dem anderen Schenkel.) [Fig. 82.]

Vorauss. $AB \parallel CD$

Behaupt. $EB : ED = EA : EC$

Bew. Mißt man die Linie EB durch ED und zieht durch die Theilungspunkte Linien parallel den gegebenen Parallelen, so wird (nach 133, Zusatz) zugleich EA durch EC gemessen, und wir erhalten also — wie bei 122 — zur Bestimmung der Grenzwerthe beider Verhältnisse dieselben Gleichungen, also auch dieselben Grenzen für beide Verhältnisse, also sind die Verhältnisse gleich. (Arithm. Seite 63. Lehrs. 59.)

$$\begin{array}{l|l}
EB = 2 \times ED + FB & EA = 2 \times EC + IA \\
ED = 1 \times FB + GD & EC = 1 \times IA + KC \\
FB = 2 \times GD + HB & IA = 2 \times KC + LA \\
\vdots & \vdots \\
2 < \frac{EB}{ED} < 3 & 2 < \frac{EA}{EC} < 3 \\
2\tfrac{1}{2} < \frac{EB}{ED} < 3 & 2\tfrac{1}{2} < \frac{EA}{EC} < 3 \\
2\tfrac{2}{3} < \frac{EB}{ED} < 2\tfrac{3}{4} & 2\tfrac{2}{3} < \frac{EA}{EC} < 2\tfrac{3}{4} \\
\vdots & \vdots
\end{array}$$

folglich $EB : ED = EA : EC$

Zusatz. Ist 1) $EB : ED = EA : EC$, so folgt aus 138:

$(EB - ED) : ED = (EA - EC) : EC$

d. h. 2) $DB : ED = CA : EC$

also auch 3) $EB : DB = EA : CA$

Wie lassen sich die drei Proportionen in Worten ausdrücken?

143. Lehrsatz. „Werden die Schenkel eines Winkels durch Parallellinien geschnitten, so verhalten sich die Abschnitte der Schenkel (vom Scheitelpunkte aus genommen) wie die parallelen Transversalen." [Fig. 83.]

Vorauss. $AB \parallel CD$

Behaupt. $EA : EC = AB : CD$

Bew. Man ziehe $CF \parallel ED$; so ist

$EA : EC = AB : FB$ (142, 3)

$FB = CD$ (91.)

$EA : EC = AB : CD$

144. Lehrsatz. „Werden die Schenkel eines Winkels durch zwei Linien proportional geschnitten, so sind die Linien parallel." [Fig. 84.]

Vorauss. $AE : CE = BE : DE$

Behaupt. $AB \parallel CD$

Bew. Ist DC nicht parallel AB, so könnte man doch durch D eine Linie parallel AB ziehen; es sei diese EF, so wäre nach 142:

$$AE : FE = BE : DE$$

Nach der Vorauss. war $AE : CE = BE : DE$

$$FE = CE$$

also muß der Punkt F auf C fallen d. h. CD ist $\parallel AB$.

145. Folgerungssatz. „Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in zwei Winkeln übereinstimmen." [Fig. 85.]

Vorauss. $\begin{cases} \angle A = \angle A_1 \\ \angle C = \angle C_1 \end{cases}$

Behaupt. $ABC \sim A_1 B_1 C_1$

Bew. Man mache $AC_2 = A_1 C_1$
und ziehe $C_2 B_2 \parallel CB$

so folgt: $AC_2 : AC = AB_2 : AB$ (142.)
$AC_2 : AC = C_2 B_2 : CB$ (143.)

$\triangle AC_2B_2 \sim ACB$

nun ist $\triangle AC_2B_2 \cong A_1 C_1 B_1 \begin{cases} AC_2 = A_1 C_1 \\ \angle A = \angle A_1 \\ \angle C_2 = \angle C_1, \text{ weil beide} = C \end{cases}$

$\triangle A_1 C_1 B_1 \sim ACB$

2. Die Form des Dreieckes durch einen Winkel und ein Seitenverhältniß bestimmt.

Lassen wir jetzt den einen Winkel fallen und nehmen statt dessen ein Seitenverhältniß, so sind zwei Fälle zu unterscheiden:

a) Der Winkel wird von den proportionirten Seiten eingeschlossen. [Fig. 86.]

Gegeben: Der Winkel A und $\frac{x_b}{x_c} = n \; (= 3/4)$

Schneiden wir von dem einen Schenkel des gegebenen Winkels A ein beliebiges Stück AB als x_c ab, construiren sodann (nach 134) $x_b = n \cdot x_c$; (hier also $AD = 3/4\, AB$), und schneiden diese Linie von dem zweiten Schenkel ab, machen also $AC = AD$; verbinden die Endpunkte C und B, so haben wir in ACB ein, der Form nach bestimmtes Dreieck.

146. Folgerungssatz. „Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in

einem Winkel und in dem Verhältniß der, den Winkel einschließenden Seiten übereinstimmen." [Fig. 87.]

Vorauss. 1) $\angle A_1 = \angle A$
2) $B_1 A_1 : A_1 C_1 = BA : AC$

Behaupt. $A_1 B_1 C_1 \backsim ABC$

Bew. Man mache $AC_2 = A_1 C_1$
" " $AB_2 = A_1 B_1$, so folgt, wenn man die Werthe in der Vorauss. 2 substituirt:

$AB_2 : AC_2 = BA : AC$

$B_2 C_2 \parallel BC$ (144)

$\triangle AB_2 C_2 \backsim ABC$ (145)

es ist aber $\triangle AB_2 C_2 \cong A_1 B_1 C_1$ (65)

$\triangle A_1 B_1 C_1 \backsim ABC$

b) Der Winkel liegt einer der proportionirten Seiten gegenüber. [Fig. 88.]

Der Winkel A und das Verhältniß der Seiten $\frac{x_a}{x_c} = n$ $(= 6/5)$ ist gegeben. Wir schneiden von dem einen Schenkel des gegebenen Winkels A ein beliebiges Stück AB für x_c ab; construiren darnach $x_a = n \cdot x_c$ $(AD = 6/5\, AB)$ und schlagen mit x_a $(= AD)$ um B einen Kreis. Ist nun $n > 1$ so ist $x_a > x_c$ $(AD > AB)$, und es schneidet der Kreis den zweiten Schenkel in einem Punkte C (s. 68_a). — Verbinden wir den Punkt C mit B, so haben wir in ABC ein, der Form nach, bestimmtes Dreieck.

„Durch ein Seitenverhältniß und den nicht eingeschlossenen Winkel ist nur dann das Dreieck der Form nach bestimmt, wenn der Winkel der größeren proportionirten Seite gegenüber liegt."

147. Folgerungssatz. „Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in einem Seitenverhältniß und dem Winkel, welcher der größeren proportionirten Seite gegenüber liegt, übereinstimmen." [Fig. 89.]

Vorauss. 1) $\angle A = \angle A_1$
2) $CB : AB = C_1 B_1 : A_1 B_1$
3) $CB > AB$ und $C_1 B_1 > A_1 B_1$

Behaupt. $\triangle ABC \backsim A_1 B_1 C_1$

Bew. Man mache $AB_2 = A_1 B_1$
und ziehe $B_2 C_2 \parallel BC$

so ist 1) . . $\triangle ABC \backsim AB_2 C_2$
2) . . $CB : AB = C_2 B_2 : AB_2$, nach d. Vorauss. war aber
$CB : AB = C_1 B_1 : A_1 B_1$

3) . . . . . $C_2 B_2 = C_1 B_1$ (da $AB_2 = A_1 B_1$)

4) $\triangle AB_2 C_2 \cong A_1 B_1 C_1$ (68_b)

aus 1) und 4) folgt $\triangle ABC \sim A_1 B_1 C_1$

3. Die Form des Dreieckes durch zwei Seitenverhältnisse bestimmt.

Lassen wir nun auch den zweiten Winkel fallen und nehmen statt dessen ein zweites Seitenverhältniß. — Ist nun $\frac{x_a}{x_c} = m$; und $\frac{x_b}{x_c} = n$ gegeben, (z. B. $m = 5/6$; $n = 3/4$), so nehmen wir die Seite x_c beliebig ($= AB$) [Fig. 90] und construiren $x_a = m \,.\, x_c$ ($AD = 5/6\ AB$); $x_b = n \,.\, x_c$ ($AE = 3/4\ AB$). — Das Dreieck ist jetzt aus drei Seiten zu construiren, also (nach Cap. I, 4, c) immer möglich, wenn

$$\left.\begin{array}{r} x_a + x_b > x_c \\ \text{und } x_a - x_b > x_c \end{array}\right\} \text{ d. h. } \begin{array}{l} m \,.\, x_c + n \,.\, x_c > x_c \\ m \,.\, x_c - n \,.\, x_c > x_c \end{array}$$

$$1)\ m + n > 1$$
$$2)\ m - n < 1$$

148. Folgerungssatz. „Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in zwei Seitenverhältnissen übereinstimmen." [Fig. 91.]

Vorauss. 1) $AB : AC = A_1 B_1 : A_1 C_1$
2) $AB : BC = A_1 B_1 : B_1 C_1$

Behaupt. $\triangle ABC \sim A_1 B_1 C_1$

Bew. Man mache . . . $AB_2 = A_1 B_1$
. . $AC_2 = A_1 C_1$: so folgt, wenn man diese Werthe in d. Vorauss. 1) subst. $AB : AC = AB_2 : AC_2$

$B_2 C_2 \,//\, BC$ (144.)

1) $\triangle ABC \sim AB_2 C_2$

2) $AB : BC = AB_2 : B_2 C_2$

nach Vorauss. 2) ist . . $AB : BC = A_1 B_1 : B_1 C_1$

3) $B_2 C_2 = B_1 C_1$ (da $AB_2 = A_1 B_1$)

4) $\triangle AB_2 C_2 \cong A_1 B_1 C_1$ (81.)

aus 1) und 4) folgt: $\triangle ABC \sim A_1 B_1 C_1$

4. Anhang.

149. Lehrsatz. „Fällt man in einem rechtwinkligen Dreiecke ein Loth vom Scheitel des rechten Winkels auf die Hypothenuse, so wird das gegebene Dreieck in zwei Dreiecke zerlegt, die unter sich und dem ganzen ähnlich sind." [Fig. 92.]

Vorauss. $\angle ABC = 1 . R$
$BD \perp AC$

Behaupt. $\triangle ABD \sim \triangle BCD \sim \triangle ACB$

Bew. $\angle ADB = \angle BDC$ (als Rechte)
$\angle ABD = \angle BCD$ (weil beide DBC zu 1 R ergänzen

1) $\triangle ABD \sim \triangle BCD$
$\angle CAB = \angle BAD$
$\angle CBA = \angle BDA$ (als Rechte)

2) $\triangle ABC \sim ADB$

Aus 1) folgt: $AD : DB = DB : DC$
" 2) " $AC : AB = AB : AD$ d. h.

1. Zusatz. „In einem rechtwinkligen Dreiecke ist das Loth, vom Scheitel des rechten Winkels auf die Hypothenuse gefällt, die mittlere Proportionale zu den beiden Abschnitten der Hypothenuse." (Vergl. 113.)

2. Zusatz. „In einem rechtwinkligen Dreiecke ist die Cathete die mittlere Proportionale zu der Hypothenuse und der Projectiven der Cathete auf die Hypothenuse." (Vergl. 114.)

150. Aufgabe. „Zu drei gegebenen Linien die vierte Proportionale zu construiren." [Fig. 93.]

Forderung. $a : b = c : x$

Lösung. Sind a, b, c die gegebenen Linien, so schneidet man von den Schenkeln eines beliebigen Winkels

$AB = a$
$AC = b$
$AD = c$

ab, verbindet B mit D und zieht $CE \parallel BD$, so ist:

$AB : AC = AD : AE$ (142)
d. h. $a : b = c : AE$ (Vergl. 110.)

$AE = x$

151. Aufgabe. Zu zwei gegebenen Linien die dritte Proportionale zu construiren." [Fig. 94.]

Forderung. $a : b = b : x$

Lösung. Ergiebt sich aus 150, wenn man $c = b$ setzt, oder aus 149 Zus. 1 und 2. Hiernach macht man

$AB = a$
$AC \perp AB$
$AC = b$
$DC \perp CB$
und verlängert BA bis D
$AB : AC = AC : AD$ (1. Zus.)
d. h. $a : b = b : AD$

$AD = x$

$AB = a$
schlägt über AB einen Halbkreis, trägt von A aus $b = AC_1$ als Sehne ein und $C_1D_1 \perp AB$, so ist
$AB : AC_1 = AC_1 : AD_1$ (2 Zus.)
d. h. $a : b = b : AD_1$

$AD_1 = x$

152. Aufgabe. „Zu zwei gegebenen Linien die mittlere Proportionale zu construiren."

Forderung. $a : x = x : b$

Lösung. Da aus der Proportion $a : x = x : b$ nach 136 folgt:

$$x^2 = ab$$

so ist die Aufgabe bloß eine andere Form der Aufg. 117 und also nach dieser zu lösen.

§ 2. Das Polygon.

153. Lehrsatz. „Zwei Polygone von gleicher Seitenzahl sind ähnlich, wenn sie durch Diagonalen — aus entsprechender Ecke gezogen — in ähnliche Dreiecke zerlegt werden." [Fig. 95.]

Vorauss. $\begin{cases} 1)\ \triangle A_nA_1A_2 \sim B_nB_1B_2 \\ 2)\ \triangle A_nA_2A_3 \sim B_nB_2B_2 \\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots \\ n-2)\ \triangle A_nA_{n-2}A_{n-1} \sim B_nB_{n-2}B_{n-1} \end{cases}$

Behaupt. $A_1A_2A_3A_4 \ldots A_n \sim B_1B_2B_3B_4 \ldots B_n$

Bew. I
$$\begin{cases} 1)\ \angle A_1 = \angle B_1 \quad \text{(Vorauss.)} \\ 2)\ \angle A_2 = \angle B_2 \begin{cases} \angle \alpha_1 = \beta_1 \quad \text{(Vorauss. 1.)} \\ \angle \alpha_2 = \beta_2 \quad \text{(Vorauss. 2.)} \\ \hline \alpha_1 + \alpha_2 = \beta_1 + \beta_2 \end{cases} \\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots \\ n)\ \angle A_n = \angle B_n \begin{cases} \angle a_1 = b_1 \\ \angle a_2 = b_2 \\ \quad\vdots \qquad \vdots \\ \angle a_n = b_n \\ \hline a_1 + a_2 + \ldots + a_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n \end{cases} \end{cases}$$

II
$$\begin{cases} 1)\ A_nA_1 : A_1A_2 = B_nB_1 : B_1B_2 \quad \text{(Vorauss. 1)} \\ 2)\ A_1A_2 : A_2A_3 = B_1B_2 : B_2B_3 \begin{cases} A_1A_2 : B_1B_2 = A_nA_2 : B_nB_2 \ \text{(V. 1)} \\ A_2A_3 : B_2B_3 = A_nA_2 : B_nB_2 \ \text{(V. 2)} \\ \hline A_1A_2 : B_1B_2 = A_2A_3 : B_2B_3 \end{cases} \\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots \\ n-1)\ A_nA_{n-1} : A_{n-1}A_{n-2} = B_nB_{n-1} : B_{n-1}B_{n-2} \ \text{(Vorauss. } n-2) \end{cases}$$

1. Zusatz. „Regelmäßige Polygone von gleicher Seitenzahl sind ähnlich."

154. Lehrsatz. „Aehnliche Polygone werden durch Diagonalen — aus entsprechenden Ecken gezogen — in ähnliche Dreiecke zerlegt." [Fig. 95.]

$$\left.\begin{array}{l}
\text{I. } \triangle A_n A_1 A_2 \sim B_n B_1 B_2 \left\{\begin{array}{l} \angle A_1 = \angle B_1 \\ A_n A_1 : A_1 A_2 = B_n B_1 : B_1 B_2 \end{array}\right\} \text{Vorauss.} \\
\text{II. } \triangle A_n A_2 A_3 \sim B_n B_2 B_3 \left\{\begin{array}{l} \angle A_2 = B_2 \text{ (Vorauss.)} \\ \angle \alpha_1 = \angle \beta_1 \text{ (aus I)} \\ \hline 1)\ \alpha_2 = \beta_2 \text{ (subtrah.)} \\ A_1 A_2 : B_1 B_2 = A_n A_2 : B_n B_2 \text{ (aus I)} \\ A_1 A_2 ; B_1 B_2 = A_2 A_3 : B_2 B_3 \text{ (Vor.)} \\ \hline 2)\ A_n A_2 : B_n B_2 = A_2 A_3 : B_2 B_3 \end{array}\right. \\
\text{N}-2)\ \triangle A_n A_{n-1} A_{n-2} \sim B_n B_{n-1} B_{n-2} \left\{\begin{array}{l} \angle A_{n-1} = \angle B_{n-1} \\ A_n A_{n-1} : A_{n-1} A_{n-2} = B_n B_{n-1} : \\ \qquad B_{n-1} B_{n-2} \text{ (Vorauss.)} \end{array}\right.
\end{array}\right\} (146)$$

§ 3. Größenverhältnisse an ähnlichen Polygonen.

155. Lehrsatz. „Die Inhalte ähnlicher Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate der Maaßzahlen ihrer homologen Seiten." [Fig. 96.]

Bezeichnen wir mit δ den Inhalt, mit a, b, c die Maaßzahlen des Höhenperpendikels, so ist:

Vorauss. $\triangle ABC \sim A_1 B_1 C_1$

Behaupt. $\delta : \delta_1 = a^2 : a_1{}^2$

Bew. $b : b_1 = a : a_1$ (Vorauss.)

$$h : h_1 = a : a_1 \left\{ \triangle BDC \sim B_1 D_1 C_1 \left\{\begin{array}{l} \angle C = C_1 \\ \angle BDC = \angle B_1 D_1 C = 1R \end{array}\right.\right.$$

$b \times h : b_1 \times h_1 = a^2 : a_1{}^2$ d. h.

$2\delta : 2\delta_1 = a^2 : a_1{}^2$

$\delta : \delta_1 = a^2 : a_1{}^2$

156. Lehrsatz. „Die Inhalte ähnlicher Polygone verhalten sich wie die Quadrate der Maaßzahlen ihrer homologen Seiten." [Fig. 97.]

Bew. Sind $A_1 A_2 \ldots A_n$ und $B_1 B_2 \ldots B_n$ die ähnlichen Polygone, deren Inhalte wir respective mit P_a und P_b bezeichnen, und wir zerlegen sie durch Diagonalen aus entsprechenden Ecken in Dreiecke, deren Inhalte wir respective mit δ_a und δ_b bezeichnen wollen, — so ist:

$$\delta_{1a} : \delta_{1b} = a_1^2 : b_1^2 = a_n^2 : b_n^2 \text{ oder } \delta_{1a} = \frac{a_n^2}{b_n^2} \times \delta_{1b}$$

$$\delta_{2a} : \delta_{2b} = a_2^2 : b_2^2 = a_n^2 : b_n^2 \quad \text{"} \quad \delta_{2a} = \frac{a_n^2}{b_n^2} \times \delta_{2b}$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$\delta_{na} : \delta_{nb} = a_n^2 : b_n^2 = a_n^2 : b_n^2 \quad \text{"} \quad \delta_{na} = \frac{a_n^2}{b_n^2} \times \delta_{nb}$$

$$\delta_{1a} + \delta_{2a} + .. + \delta_{na} = \frac{a_n^2}{b_n^2} \times (\delta_{1b} + \delta_{2b} + \ldots + \delta_{nb} b)$$

$$\text{also } \frac{\delta_{1a} + \delta_{2a} + \ldots + \delta_{na}}{\delta_{1b} + \delta_{2b} + \ldots + \delta_{nb}} = \frac{a_n^2}{b_n^2} \text{ d. h.}$$

$$\frac{P_a}{P_b} = \frac{a_n^2}{b_n^2}$$

157. Lehrsatz. „Die Umfänge ähnlicher Polygone verhalten sich wie ihre homologen Seiten."

Bew. Bezeichnen wir die Seiten der ähnlichen Polygone mit a_1; a_2; .... a_n und b_1; b_2; b_3; ... b_n; die Umfänge respective mit u_a und u_b, so ist nach der Voraussetzung:

$$a_1 : a_2 : a_3 : \ldots : a_n = b_1 : b_2 : b_3 : \ldots : b_n$$

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n} = \frac{a_n}{b_n} \quad (139.)$$

$$\text{d. h. } \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{U_a}{U_b} = \frac{a_n}{b_b}$$

158. Aufgabe. „Es soll ein Polygon gezeichnet werden, welches einem gegebenen Polygone gleich, einem anderen gegebenen Polygone aber ähnlich ist."

Lösung. Sind A und B [Fig. 98.] die gegebenen Polygone und bezeichnen wir das gesuchte Polygon mit X, so ist

die Forderung 1) $X \backsim B$

2) $X = A$

Bezeichnen wir nun die eine Seite des gesuchten Polygones, welches einer bestimmten Seite a des Polygones B entspricht mit x, so muß nach 156, um der ersten Forderung zu genügen

$$X : B = x^2 : a^2 \text{ sein;}$$

da nun nach Forder. 2) . . $X = A$ ist, so folgt:

$$A : B = x^2 : a^2$$

Verwandelt man nun die Polygone A und B in Quadrate, so daß $A = y^2$; $B = z^2$ wird, so ist:

$$y^2 : z^2 = x^2 : a^2$$

also auch $y : z = x : a$

d. h. x ist die vierte Proportionale zu a, y und z und kann also nach 150 construirt werden. — Hat man aber die eine Seite des Polygones, so ist die Construction des Polygones selbst, mit Berücksichtigung von 153, leicht ausgeführt.

In beistehender Figur ist $GHI = A$; $GL = y$; $CDEF = B = \triangle CKF$; $FM = z$; $CD = a$; $CD_1 = x$; $D_1E_1 \parallel DE$; $E_1F_1 \parallel EF$; $CD_1E_1F_1 = X$.

Vierter Abschnitt.

Vom Kreise.

Die Kreislinie ist uns aus dem Vorhergehenden schon in manchen ihrer Eigenschaften bekannt, welche hier im Zusammenhange, und zum Theil in anderer Form, wieder zum Vorschein kommen werden.

Cap. I.

Der Kreis und die gerade Linie.

§ 1. Der Kreis und eine Grade.

Kommt zum Kreise eine grade Linie hinzu, so schneidet sie die Kreislinie entweder in zwei Punkten (73) und heißt dann eine Secante, oder sie hat mit ihr nur einen Punkt gemein und ist also eine Tangente am Kreise (72, 1). Das Stück, welches die Kreislinie von einer Secante abschneidet, ist eine Sehne.

159. Lehrsatz. „Der Radius, welcher auf einer Sehne senkrecht steht, halbirt die Sehne und den zugehörigen Bogen." [Fig. 99.]

Vorauss. $MC \perp AB$

Behaupt. $\left\{ \begin{array}{l} BD = AD \\ \text{Bog. } BC = \text{Bog. } AC \end{array} \right.$

Bew. Verbindet man die Endpunkte der Sehne mit dem Mittelpunkte des Kreises, so ist:

$$\triangle MDB \cong MDA \left\{ \begin{array}{l} MD = MD \\ MB = MA \\ \angle MDB = \angle MDA \end{array} \right\} 68_b$$

1) . . . $BD = AD$

2) $\angle BMC = \angle AMC$ oder Bog. BC = Bog. AC (32)

160. Lehrsatz. „Die grade Linie, welche den Halbirungspunkt der Sehne mit dem Mittelpunkte des Kreises verbindet, steht senkrecht auf der Sehne.“ [Fig. 99.]

Bew. Ist D der Halbirungspunkt der Sehne AB, so stimmen die Dreiecke MDA und MDB, welche entstehen, wenn man diesen Halbirungspunkt D, so wie die Endpunkte A und B der Sehne mit dem Mittelpunkte M verbindet, — in ihren drei Seiten überein; sind also congruent, folglich ist auch

$$\angle MDA = \angle MDB$$

d. h. $MD \perp AB$

Zusatz. „Eine Linie, welche im Halbirungspunkte der Sehne senkrecht zur Sehne errichtet wird, geht durch den Mittelpunkt des Kreises.“

161. Lehrsatz. „Je weiter die Sehne vom Mittelpunkte des Kreises entfernt ist, desto kürzer ist sie.“ [Fig. 100.]

Bew. Bezeichnen wir die Sehne AB mit s, das Loth MD mit h und den Radius des Kreises mit r, so ist:

$$AD^{\square} = MA^{\square} - MD^{\square} \quad (120.)$$

$$\left(\frac{s}{2}\right)^2 = r^2 - h^2$$

$$\frac{s}{2} = \sqrt{r^2 - h^2}$$

also $s = 2\sqrt{r^2 - h^2}$

Je größer nun h wird, desto kleiner wird $r^2 - h^2$; desto kleiner wird also auch s. — Ist $h = o$, so hat s seinen größten Werth $= 2r$ (gleich dem Durchmesser). — Ist $h = r$, so ist $s = 0$.

Zusatz. „Gleiche Sehnen sind gleich weit vom Mittelpunkte des Kreises entfernt, die kleinere aber ist weiter.“

Dreht man eine Secante CD [Fig. 101] um einen ihrer Punkte (C), der außerhalb des Kreises liegt, so daß sie sich vom Mittelpunkte immer mehr und mehr entfernt (70. Zus.), so wird die Sehne (AB) nach dem Vorigen immer kürzer, d. h. die Durchschnittspunkte A und B nähern sich immer mehr und mehr und fallen endlich — wenn die Entfernung der Secante vom Mittelpunkte = dem Radius = r wird — in einen Punkt (E) zusammen. — „Die Secante ist eine Tangente geworden.“ — Da hierbei stets $\angle MAB = \angle MBA$, also auch $\angle MAC = \angle MBD$ bleibt, so muß auch schließlich $\angle MEC = \angle MED$ sein, d. h.

162. Lehrsatz. „Die Tangente steht senkrecht auf dem Radius, der durch den Berührungspunkt geht;“ und umgekehrt: „Eine Linie, die im Endpunkte eines Radius senkrecht auf demselben steht, ist eine Tangente am Kreise.“ (72, 1.)

163. Aufgabe. „Durch einen gegebenen Punkt eine Tangente an den Kreis zu ziehen."

1. Fall. Der gegebene Punkt A liegt auf der Peripherie: [Fig. 102.]

Lösung. Man verbindet den gegebenen Punkt A mit dem Mittelpunkte M des Kreises und zieht durch A die Linie XY ⊥ MA.

2. Fall. Der gegebene Punkt A liegt außerhalb des Kreises. [Fig. 103.]

Lösung. Man verbindet den gegebenen Punkt A mit dem Mittelpunkte M des Kreises, schlägt über MA als Durchmesser einen Halbkreis und zieht von A durch den Durchschnittspunkt bei der Kreislinie B die Linie AX, so ist diese eine Tangente am Kreise; denn verbindet man B mit M, so ist ∠ MBA = 1 R. (116.)

[Anm. Von einem Punkte außerhalb des Kreises, kann man zwei Tangenten an den Kreis ziehen.]

§ 2. Der Kreis und zwei Grade.

Kommt noch eine zweite Grade hinzu, so kann sie der ersteren parallel sein oder sie schneidet die erstere.

A. Kreis und zwei Parallellinien.

164. Lehrsatz. „Zwischen zwei parallelen Secanten liegen gleiche Bögen." [Fig. 104.]

Vorauss. AB // CD

Behaupt. Bog. AC = Bog. BD

Bew. Man ziehe ME ⊥ AB, so ist auch ME ⊥ CD und es ist:

1) Bog. AE = Bog. BE
2) Bog. CE = Bog. DE } 159.)

2 von 1 subtrahirt: Bog. AC = Bog. BD

Zusatz. „Der Satz gilt auch, wenn die eine Grade eine Tangente ist."

B. Kreis und zwei sich schneidende Linien.

I. Der Schneidepunkt liegt im Mittelpunkte.

165. Lehrsatz. „Der Centriwinkel hat den Bogen zwischen seinen Schenkeln zum Maaße."

Bew. Bezeichnen wir den completen Winkel mit C, die Peripherie mit P und den zum Centriwinkel A gehörigen Bogen mit a, so ist (nach 39)

$$A : C = a : P$$

ist daher $\frac{a}{P} = n$

so ist auch $\frac{A}{C} = n$

II. Der Schneidepunkt liegt auf der Peripherie.

166. Lehrsatz. „Der Peripheriewinkel ist halb so groß als der Centriwinkel auf gleichem Bogen," oder „der Peripheriewinkel hat den halben Bogen zwischen seinen Schenkeln zum Maaße."

Ist ABC der Peripheriewinkel, AMC der Centriwinkel auf gleichem Bogen und enthält $\angle ABC = x$ Winkelgrade, der zugehörige Bogen $AC = n$ Bogengrade, so ist die

Behaupt. $\angle ABC = \frac{1}{2} \angle AMC$

oder $x = \frac{1}{2} n$

Bew. 1. Fall. Der eine Schenkel AB geht durch den Mittelpunkt. [Fig. 105.]

Man ziehe den Radius MC, so ist:

$$\angle ABC + \angle BCM = \angle AMC \ (50)$$
$$\angle ABC = \angle BCM \ (66)$$
$$2.\ ABC = \angle AMC$$

also $\angle ABC = \frac{1}{2} \angle AMC$

$$\angle AMC = n^0 \ (165)$$
$$\angle ABC = \frac{1}{2} n^0$$

oder $x = \frac{1}{2} n$

2. Fall. Der Mittelpunkt liegt zwischen den Schenkeln. [Fig. 106.]

Man zieht den Durchmesser BD und die Radien MA und MC; so ist:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \angle ABD = \frac{1}{2} \angle AMD \\ 2)\ \angle CBD = \frac{1}{2} \angle CMD \end{array}\right\} 1.\ \text{Fall.}$$

1 und 2 addirt . $\angle ABC = \frac{1}{2} \angle AMC$

$$\angle ABC = \frac{1}{2} n^0$$

oder $x = \frac{1}{2} n$

3. Fall. Der Mittelpunkt liegt außerhalb der Schenkel. [Fig. 107.]

Man zieht wieder den Durchmesser BD und die Radien MA und MC, so ist:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \angle CBD = \frac{1}{2} \angle CMD \\ 2)\ \angle ABD = \frac{1}{2} \angle AMD \end{array}\right\} 1.\ \text{Fall.}$$

2 von 1 subtrahirt . . $\angle ABC = \frac{1}{2} \angle AMC$

$$x = \frac{1}{2} n$$

4. Fall. Der eine Schenkel BC ist eine Tangente. [Fig. 108.] Man zieht wieder den Durchmesser BD und den Radius MA, so ist:

$$1)\ \angle DBC = \tfrac{1}{2} \angle DMB$$
$$2)\ \angle DBA = \tfrac{1}{2} \angle DMA$$

2 von 1 subtrah. . . $\angle ABC = \tfrac{1}{2} \angle AMB$

$$\angle ABC = \tfrac{1}{2} n^0 \ (\text{Bog. } AB = n^0)$$

oder $x = \tfrac{1}{2} n$

1. Zusatz. Peripheriewinkel auf gleichem Bogen sind gleich.

2. Zusatz. Der Peripheriewinkel im Halbkreise ist ein Rechter.

III. Der Schneidepunkt liegt innerhalb oder außerhalb des Kreises.

167. Lehrsatz. „Der Winkel, den zwei sich schneidende Secanten bilden, hat zum Maaße die halbe $\left\{\begin{matrix}\text{Summe}\\ \text{Differenz}\end{matrix}\right\}$ der zwischen den Schenkeln liegenden Bögen, wenn der Durchschnittspunkt $\left\{\begin{matrix}\text{innerhalb}\\ \text{außerhalb}\end{matrix}\right\}$ des Kreises liegt.

Bew. Sind A, B, C, D die Durchschnittspunkte der Secanten mit der Kreislinie, ist E der Durchschnittspunkt der Secanten unter sich und enthält der Bogen $AD = m^0$; der Bogen $BC = n^0$, so ist: [Fig. 109.]

1. Behaupt. $\angle AED = \tfrac{1}{2}(m + n^0)$; $\left\{\begin{matrix}\text{wenn E innerhalb des Kreises liegt.}\end{matrix}\right.$

Bew. Zieht man die Sehne AC, so ist:

$$1)\ \angle AED = \angle ACD + \angle BAC \ (50)$$
$$\left.\begin{matrix}2)\ \angle ACD = \tfrac{1}{2} m^0\\ 3)\ \angle BAC = \tfrac{1}{2} n^0\end{matrix}\right\} 166)$$

aus 2 und 3 in 1 substituirt: $\angle AED = \tfrac{1}{2} m^0 + \tfrac{1}{2} n^0 = \tfrac{1}{2}(m+n)^0$

2. Behaupt. $\angle AED = \tfrac{1}{2}(m - n)^0$ $\left\{\begin{matrix}\text{wenn E außerhalb des Kreises liegt. [Fig. 110.]}\end{matrix}\right.$

Bew. Man zieht wiederum die Sehne AC, so ist:

$$1)\ \angle AED = \angle ACD - \angle EAC \ (50)$$
$$\left.\begin{matrix}2)\ \angle ACD = \tfrac{1}{2} m^0\\ 3)\ \angle BAC = \tfrac{1}{2} n^0\end{matrix}\right\} 166)$$

aus 2 und 3 in 1 subst. $\angle AED = \tfrac{1}{2}(m - n)^0$

118. Lehrsatz. „Schneiden sich zwei Secanten innerhalb oder außerhalb eines Kreises, so sind die beiden Rechtecke aus den Abschnitten je einer Secante gleich, oder was dasselbe ist: die Abschnitte sind umgekehrt proportional.“ [Fig. 111.]

Schneiden sich die Secanten in E und werden von der Kreislinie in den Punkten A, B, C, D geschnitten, so ist die

Behaupt. $AE \times EB = DE \times EC$
oder $AE : EC = DE : EB$

$$\angle AEC = \angle DEB$$
$$\angle EAC = \angle EDB$$
$$\triangle AEC \sim DEB$$
$$AE : EC = DE : EB$$
also auch $AE \times EB = DE \times EC$

Bemerkung. Dreht man die eine Secante ED [Fig. 112] um den außerhalb des Kreises fallenden Durchschnittspunkt E, bis sie eine Tangente wird, so fallen die Durchschnittspunkte C und D in einem Punkte F zusammen, und es ist $EC = ED = EF$ geworden. Substituiren wir aber EF statt EC und ED in die obige Proportion, so erhalten wir:

$$AE : EF = EF : EB \text{ d. h.}$$

169. Folgerungssatz. „Die Tangente ist die mittlere Proportionale zu der Secante und ihrem oberen Abschnitte. [Fig. 112.]

Der specielle Beweis für diesen Satz ergiebt sich aus dem allgemeinen (für 168), wenn man statt der Buchstaben C und D den Buchstaben F setzt.

170. Aufgabe. „Es soll eine begrenzte grade Linie durch den s. g. goldenen Schnitt stetig getheilt werden, d. h. so, daß der größere Abschnitt die mittlere Proportionale zu der ganzen Linie und dem kleineren Abschnitte ist."

1) Analytische Lösung. Ist a die gegebene Linie, x der gesuchte größere Abschnitt derselben, so ist nach der Forderung:

$$a : x = x : (a - x)$$
$$x^2 = a^2 - ax \text{ (136.)}$$
$$ax = ax \text{ addirt}$$
$$x^2 + ax = a^2$$
$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \text{ addirt}$$
$$x^2 + ax + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2, \text{ daraus die Wurzel gezogen:}$$
$$x + \frac{a}{2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$$
$$\frac{a}{2} = \frac{a}{2} \text{ subtrahirt}$$
$$x = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} - \frac{a}{2}$$

Construirt man nun das rechtwinklige Dreieck ABC [Fig. 113.] mit den Catheten a und $\frac{a}{2}$, so ist die Hypothenuse

$$AC = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

Schneidet man von dieser Hypothenuse das Stück $CD = \frac{a}{2}$ ab, so ist der Rest $MD = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} - \frac{a}{2} = x$. — Schneidet man daher von der gegebenen Linie a das Stück $AE = AD$ ab, so ist dieselbe in E stetig getheilt.

2) Synthetische Lösung. [Fig. 114.] In dem Endpunkte B der gegebenen Linie AB errichtet man das Loth $BC = \frac{1}{2} AB$; schlägt um den Punkt C mit dem Radius CB einen Kreis, zieht von dem zweiten Endpunkte A aus durch den Mittelpunkt C die Secante AF und schlägt endlich mit dem oberen Abschnitte AD als Radius einen Kreis; dieser schneidet die Linie AB in E, und der goldene Schnitt ist geschehen:

Bew. $AF : AB = AB : AD$ (169.)

$AB : (AF - AB) = AD : (AB - AD)$ (138.)

$AF - AB = AD = AE$ (da $DF = AB$)

$AB - AD = EB$

$AB : AE = AE : EB$

§ 3. Kreis und grade Linien in beliebiger Anzahl.

Kommen zum Kreise drei oder mehrere grade Linien hinzu, so sollen hier nur die Fälle Berücksichtigung finden, in welchen die graden Linien eine geschlossene Figur bilden, deren Seiten sämmtlich entweder Sehnen oder Tangenten sind. — Sind die Seiten sämmtlich Sehnen, so heißt das Polygon ein Sehnenvieleck. Die Ecken eines Sehnenvieleckes liegen auf der Peripherie, daher heißt das Polygon auch dem Kreise eingeschrieben, der Kreis dem Polygone umschrieben. Sind die Seiten eines Polygones sämmtlich Tangenten, so heißt es ein Tangentenvieleck und ist dem Kreise umschrieben, während der Kreis ihm eingeschrieben ist.

Cap. II.

Sehnen- und Tangentenvielecke.

§ 1. Allgemeine Eigenschaften.

171. Lehrsatz. „Einem jeden Dreiecke läßt sich ein Kreis sowohl um- als einschreiben.“ [Fig. 115.]

Bew. Sind zwei Seiten eines Dreieckes Sehnen eines Kreises, so ist die dritte Seite nothwendig auch eine Sehne dieses Kreises. — Halbirt man nun zwei Seiten (AB und AC) durch die Lothe XY und ZT, so muß (nach 160 Zus.) der Mittelpunkt des Kreises, welcher durch die Endpunkte der beiden Sehnen, d. h. durch die drei Ecken des Dreieckes geht, in jedem dieser beiden Lothe liegen; und da diese Lothe sich nothwendig schneiden (weil jeder einzelne Winkel des Dreieckes nothwendig < 2 R ist), so ist der Durchschnittspunkt derselben, M, der Mittelpunkt des, dem Dreiecke umschriebenen Kreises. — Zieht man von dem Durchschnittspunkte M in die drei Ecken die gr. Linien MA, MB, MC, so sind diese in der That einander gleich, also Radien eines Kreises, denn es ist:

$$\triangle MAD \cong \triangle MBD \left\{ \begin{array}{l} MD = MD \\ AD = BD \\ \angle MDA = \angle MDB \end{array} \right\} \text{gemacht}$$

1) $MA = MB$

$$\triangle MAE \cong \triangle MCE \left\{ \begin{array}{l} MD = ME \\ AE = CE \\ \angle MEA = MEC \end{array} \right\} \text{gemacht}$$

2) $MA = MC$

a. 1 u. 2 folgt 3) $MB = MC$

Zusatz. „Der Kreis ist durch drei Punkte, die nicht in grader Linie liegen, bestimmt."

Soll dem Dreiecke sich auch ein Kreis einschreiben lassen, so muß es im Dreiecke einen Punkt geben, der von den drei Seiten gleich entfernt ist. — Halbirt man aber einen Winkel, so ist die halbirende Linie in allen ihren Punkten von den Schenkeln gleich entfernt. — Halbirt man daher zwei Winkel (A und B) eines Dreieckes (ABC) [Fig. 116.], so ist der Durchschnittspunkt (M) der beiden halbirenden Linien (MA und MB) von den drei Seiten des Dreieckes gleich entfernt und somit der Mittelpunkt des, dem Dreiecke eingeschriebenen Kreises. — In der That sind die drei Lothe MD, ME, MF, von dem Durchschnittspunkte M auf die drei Seiten gefällt, einander gleich, denn:

$$\triangle MAD \cong \triangle MAE \left\{ \begin{array}{l} MA = MA \\ \angle MAD = \angle MAE \text{ gemacht} \\ \angle MDA = \angle MEA \ (= 1\,R) \end{array} \right.$$

1) $MD = ME$

$$\triangle MDB \cong \triangle MFB \left\{ \begin{array}{l} MB = MB \\ \angle MBD = \angle MBF \text{ gemacht} \\ \angle MDB = \angle MFB \ (= 1\,R) \end{array} \right.$$

2) $MD = MF$

a. 1 u. 2 folgt 3) $ME = MF$

1) Die drei Lothe in den Mitten der drei Seiten eines Dreieckes zu diesen Seiten errichtet, schneiden sich in einem Punkte.

2) Die drei Linien, welche die drei Winkel eines Dreieckes halbiren, schneiden sich in einem Punkte.

172. Lehrsatz. „In einem dem Kreise eingeschriebenen Vierecke ergänzen sich die gegenüberliegenden Winkel zu zwei Rechten." [Fig 117.]

Bew. Ist ABCD ein Sehnenviereck, so hat der Winkel ABC den halben Bogen ADC, der Winkel ADC den halben Bogen ABC zum Maaße; die Summe der gegenüberliegenden Winkel ABC und ADC hat also die halbe Peripherie zum Maaße, d. h. sie ist gleich zwei Rechten.

173. Lehrsatz. „In einem dem Kreise eingeschriebenen Vierecke ist das Rechteck aus den Diagonalen gleich der Summe der beiden Rechtecke aus den gegenüberliegenden Seiten."

Ist ABCD [Fig. 117.] ein Sehnenviereck, sind AC und BD die Diagonalen, so ist

die Behaupt. $AC \times BD = BC \times AD + AB \times CD$

Bew. Man mache $\angle CBE = \angle ABD$

so ist: 1) $\triangle CBE \sim \triangle DBA \left\{ \begin{array}{l} \angle y = x \text{ gemacht} \\ \angle z = u \text{ (166. Zus. 2)} \end{array} \right\}$ 145.

$CB : CE = DB : DA$ also

I. $CE \times DB = CB \times DA$

2) $\triangle ABE \sim \triangle DBC \left\{ \begin{array}{l} \angle ABE = \angle DBC \\ \angle v = w \end{array} \right.$

$AB : AE = DB : DC$

II. $AE \times DB = AB \times DC$

I. u. II. addirt $(CE + AE) \times DB = CB \times DA + AB \times DC$

d. h. $AC \times DB = CB \times DA + AB \times DC$

174. Lehrsatz. „Einem jeden regelmäßigen Vielecke läßt sich ein Kreis um- und einschreiben, d. h. es ist zugleich Sehnen- und Tangentenvieleck."

Bew. Ist ABCD . . . N [Fig. 118.] ein regelmäßiges Polygon, so kann man zunächst (nach 171) den Mittelpunkt M eines Kreises finden, der durch drei aufeinanderfolgende Ecken, A, B und C geht. Verbindet man nun den Punkt M mit den Ecken des Polygones, so ist:

$$\triangle AMB \cong \triangle CMB \text{ (81.)}$$

$$\angle y = \angle x$$

d. h. $\angle y = \frac{1}{2} \angle ABC$

$$\angle y = \angle z \text{ (66.)}$$

$$\angle z = \frac{1}{2} \angle ABC$$

$$\angle ABC = \angle BCD$$

$$\angle z = \frac{1}{2} \angle BCD$$

d. h. $\angle z = \angle u$

$$\triangle BMC \cong \triangle DMC \left\{ \begin{array}{l} CB = CD \\ \angle z = \angle w \\ MC = MC \end{array} \right\} 65.$$

$$MD = MC = MB$$

d. h. der Kreis der durch die drei Ecken ABC geht, geht auch durch die folgende vierte Ecke D des regelmäßigen Polygones. — Da nun der Kreis durch die drei Ecken B, C, D geht, so folgt in gleicher Weise, daß er auch durch die folgende Ecke E geht u. s. f. — Kurz, wir erhalten den Schluß: „Der Kreis, welcher durch drei aufeinanderfolgende Ecken eines regelmäßigen Polygones geht, geht zugleich durch alle Ecken.“ Da nun aber (nach 171) durch drei aufeinanderfolgende Eckpunkte stets ein Kreis möglich ist, so folgt weiter: „Jedem regelmäßigen Polygone läßt sich ein Kreis umschreiben.“

Da nun das Polygon ABC . . . N ein Sehnenvieleck ist, so müssen die Seiten desselben vom Mittelpunkte M als gleiche Sehnen, gleich entfernt sein; d. h. die Lothe von M auf die Seiten gefällt, sind unter sich gleich. Ein Kreis also, der um M mit dem einen Lothe als Radius geschlagen wird, berührt alle Seiten des Polygones, woraus folgt: „Jedem regelmäßigen Polygone läßt sich also auch ein Kreis einschreiben und der Mittelpunkt des umschriebenen ist auch der Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises.“

§ 2. Construction regelmäßiger Vielecke in und um den Kreis.

175. Aufgabe. „Es soll einem Kreise ein regelmäßiges Dreieck, Sechseck . . . . 3×2^n Eck eingeschrieben werden.“

Lösung. Trägt man den Radius als Sehne in den Kreis, und verbindet die Endpunkte (A und B) [Fig. 119.] mit dem Mittelpunkte (M), so ist das entstandene Dreieck (AMB) gleichseitig, also auch gleichwinklig, und folglich der Winkel (AMB) am Mittelpunkt $= \frac{2}{3}$ R, d. h. der 6te Theil von einem Completen. — Es läßt sich also der Radius sechsmal als Sehne in den Kreis tragen und es entsteht eine geschlossene Figur, ein regelmäßiges Sehnensechseck. Verbindet man nun aufeinanderfolgend zwei Eckpunkte des Sechseckes durch Diagonalen (AE, EC, CA), so

entsteht ein regelmäßiges Sehnendreieck (AEC). Halbirt man aber die Bögen (AF, FE, ED ...) über den Seiten des Sechseckes und verbindet die Halbirungspunkte mit den Eckpunkten des Sechseckes, so erhält man ein regelmäßiges Sehnenzwölfeck. In gleicher Weise erhält man, durch Halbiren der Bögen, aus dem Zwölfeck ein Vierundzwanzigeck .. 2c.

176. Aufgabe. „Ein regelmäßiges Viereck, Achteck ... $4 \cdot 2^n$ Eck in den Kreis zu beschreiben." [Fig. 120.]

Lösung. Der Winkel vom Mittelpunkte eines Sehnenviereckes ist der 4te Theil von einem Completen also ein Rechter. — Zieht man daher zwei senkrechte Durchmesser ($CD \perp AB$) und verbindet die Endpunkte derselben durch Sehnen, so erhält man ein regelmäßiges Sehnenviereck. — Durch fortgesetzte Halbirung der zugehörigen Bögen erhält man neue regelmäßige Polygone jedesmal von der doppelten Seitenzahl.

177. Aufgabe. „Ein regelmäßiges Fünfeck, Zehneck ... $5 \cdot 2^n$ Eck in den Kreis zu beschreiben." [Fig. 121.)

Lösung. Theilt man den Radius durch den goldenen Schnitt, so ist der größere Abschnitt die Seite des dem Kreise eingeschriebenen regelmäßigen Zehneckes.

Bew. Ist $AM : MB = MB : BA$ und man trägt $MB = AC$ als Sehne in den Kreis, verbindet C mit M und B, so ist:

$$\triangle ACB \sim \triangle AMC \left\{ \begin{array}{l} MA : AC = AC : AB \\ \angle MAC = \angle CAB \end{array} \right.$$

$$1)\ \angle \alpha = \angle \beta$$

$$\text{und } CB = AC = BM \left\{ \begin{array}{l} \text{Da } \triangle AMC \text{ gleichschenklig, so ist} \\ \text{auch } ECB \text{ gleichschenklig.} \end{array} \right.$$

$$2)\ \angle \gamma = \angle \beta$$

aus 1 nnd 2 folgt $\angle ACM = 2\beta$. Da nun $\angle MAC = \angle MCA$,
so ist auch $\angle MAC = 2\beta$
ferner ist $\angle AMC = 1\beta$

$$\angle ACM + \angle MAC + \angle AMC = 5\beta$$
$$\angle ACM + \angle MAC + \angle AMC = 2R$$

$$5\beta = 2R$$

oder $\beta = {}^2/_5 R = {}^1/_{10}$ vom Completen.

Da nun der Centriwinkel AMC 10mal herum getragen einen completen Winkel giebt, so läßt sich auch der größere Abschnitt MB des Radius 10mal als Sehne eintragen, und giebt eine geschlossene Figur, ein regelmäßiges Sehnenzehneck.

Wie man aus dem Zehnecke ein 5 Eck, 20 Eck, 40 Eck ... zu bilden habe, ist aus dem Vorhergehenden klar.

178. Aufgabe. „Ein regelmäßiges Fünfzehneck, Dreißigeck ... 15 . 2ⁿ Eck in einen Kreis zu beschreiben."

Lösung. Subtrahirt man vom Centriwinkel des Sechseckes $= \frac{2}{3}$ R den Centriwinkel des Zehneckes $= \frac{2}{5}$ R, so erhält man $(\frac{2}{3} - \frac{2}{5})$ R $= \frac{4}{15}$ R $= \frac{1}{15}$ vom Completen, also den Centriwinkel des regelmäßigen Sehnenfünfzehneckes; die dem Winkel gegenüberliegende Sehne ist die Seite desselben.

Bemerkung. Diese Polygone sind die einzigen regelmäßigen Polygone, welche sich auf elementarem Wege aus dem Radius construiren lassen. — Zieht man durch die Eckpunkte eines regelmäßigen Sehnenvieleckes Tangenten, so bilden diese ein regelmäßiges Tangentenvieleck von gleicher Seitenzahl.

§ 3. Abhängigkeit der Größe regelmäßiger Polygone von den Radien der ein- und umschriebenen Kreise.

179. Lehrsatz. „Die Umfänge regelmäßiger Polygone von gleicher Seitenzahl verhalten sich wie die Radien der ein- und umschriebenen Kreise, die Flächeninhalte aber wie die Quadrate dieser Radien."

Sind ABCD ... N und $A_1 B_1 C_1 D_1 \ldots N_1$ [Fig. 122.] zwei regelmäßige Polygone von gleicher Seitenzahl, und wir bezeichnen ihre Inhalte respective mit I und I_1; ihre Umfänge mit U und U_1; ihre Seiten mit s und s_1; die Radien der umschriebenen Kreise mit R und R_1; die Radien der eingeschriebenen Kreise mit r und r_1; so ist:

1. Behaupt. $U : U_1 = R : R_1 = r : r_1$

Bew. Ziehen wir von den Mittelpunkten M und M_1 aus die Radien der eingeschriebenen Kreise $MO \perp AB$; $M_1 O_1 \perp A_1 B_1$; ferner die Radien MA; MB; $M_1 A_1$; $M_1 B_1$ der umschriebenen Kreise, so ist:

$$\triangle AMB \sim \triangle A_1 M_1 B_1 \left\{ \begin{array}{l} \angle MAB = \angle M_1 A_1 B_1 \\ \angle MBA = \angle M_1 B_1 A_1 \end{array} \right\} \text{Als Hälften gleicher Polygone.}$$

$$AB : A_1 B_1 = AM : A_1 M_1$$

d. h. 1) $s : s_1 = R : R_1$

$$\triangle AMO \sim \triangle A_1 M_1 O_1 \left\{ \begin{array}{l} \angle MAO = \angle M_1 A_1 O_1 \\ \angle MOA = \angle M_1 O_1 A_1 \ (= 1\,R) \end{array} \right.$$

$$AM : A_1 M_1 = AO : A_1 O_1$$

d. h. 2) $R : R_1 = r : r_1$ da nun nach 153 Zus. und 157

3) $U : U_1 = s : s_1$, so folgt aus 1 und 2

$$U : U_1 = R : R_1 = r : r_1$$

2. Behaupt. $I : I_1 = R^2 : R_1^2 = r^2 : r_1^2$

Bew. $I : I_1 = s^2 : s_1{}^2$ (156.)
aus 1 und 2 folgt $s^2 : s_1{}^2 = R^2 : R_1{}^2 = r^2 : r_1{}^2$

$$I : I_1 = R^2 : R_1{}^2 = r^2 : r_1{}^2$$

180. Lehrsatz. „Der Flächeninhalt eines regelmäßigen Polygones ist gleich dem halben Producte aus den Maaßzahlen seines Umfanges und des Radius des eingeschriebenen Kreises." [Fig. 123.]

Behaupt. $I = \frac{1}{2} ur$

Bew. Zieht man vom Mittelpunkt (M) nach allen Ecken hin gr. Linien, so theilen diese das Polygon in so viele unter sich congruente Dreiecke, als das Polygon Seiten hat. Nimmt man nun die Seite des Polygones als Grundlinie eines solchen Dreieckes, so ist der Radius des eingeschriebenen Kreises seine Höhe, also der Inhalt

$$\triangle = \frac{1}{2} r \,.\, s \quad (125, 2)$$

Hat das Polygon nun n Seiten, so ist sein Inhalt

$$I = \frac{1}{2} rs \,.\, n$$

da aber $ns = u$

so folgt $I = \frac{1}{2} ru$

Cap. III.

Ausmessung des Kreises.

Der Kreis ist durch seinen Radius vollkommen bestimmt. — Trotzdem hat sich die Construction eines Quadrates aus dem Radius, dessen Fläche gleich der Kreisfläche ist, oder die sogen. Quadratur des Zirkels, als unmöglich erwiesen, und wir werden uns daher mit einer angenäherten Berechnung des Kreisinhaltes begnügen müssen.

Bedenken wir nun, daß ein regelmäßiges Vieleck sich immer mehr dem Kreise nähert, je mehr Seiten wir demselben geben, daß sein Inhalt aber stets gleich dem halben Producte aus den Maaßzahlen seines Umfanges und des Radius des ihm eingeschriebenen Kreises ist, so werden wir zunächst auf den Satz geführt:

181. Lehrsatz. „Der Inhalt eines Kreises ist gleich dem halben Producte aus den Maaßzahlen seiner Peripherie und seines Radius." [Fig. 124.]

Beschreiben wir um und in den Kreis regelmäßige Vielecke von gleicher Seitenzahl, und bezeichnen:

den Inhalt des Kreises . . . . . mit I_k
die Maaßzahl der Peripherie . . . . „ U_k
die Maaßzahl des Radius . . . . . „ R

den Inhalt des dem Kreise umschriebenen regelmäßigen n Eckes mit I_n
den Umfang „ „ „ „ „ „ „ U_n
den Inhalt „ „ „ eingeschriebenen „ „ „ i_n
den Umfang „ „ „ „ „ „ „ u_n
den Radius des dem eingeschrieb. n Ecke eingeschriebenen Kreises „ r
so ist:

Behaupt. $I_k = \frac{1}{2} U_k \cdot R$

Bew. Es ist (nach 180) 1) $I_n = \frac{1}{2} U_n \cdot R$
2) $i_n = \frac{1}{2} u_n \cdot r$
Ferner ist 3) $I_n > I_k$
4) $i_n < I_k$

I. $\frac{1}{2} U_n R > I_k > \frac{1}{2} u_n \cdot r$

Es ist aber auch $\left.\begin{array}{l} 5)\ U_n > U_k \\ 6)\ u_n < U_k \end{array}\right\}$ 17)

II. $\frac{1}{2} U_n R > \frac{1}{2} U_k R > \frac{1}{2} u_n \cdot r$ (da auch $R > r$)

Verdoppeln wir nun fortlaufend die Seitenzahl der Sehnen- und Tangentenvielecke, so wird U_n immer kleiner, u_n immer größer, es bleibt aber stets $U_n > U_k$ und $u_n < U_k$. — Indem sich hiernach U_n und u_n fortwährend nähern, wird auch die Differenz $\frac{1}{2} U_n R - \frac{1}{2} u_n r$ immer kleiner und kleiner (denn auch r wächst fortwährend, bleibt aber immer $< R$), und nähert sich unendlich der Null. — Dabei behalten aber alle obigen Gleichungen, also auch die Gleichungen I und II ihre Geltung. Folglich ist

$I_k = \frac{1}{2} U_k R$ (Arithm. Seite 63. Lehrs. 59.)

Um daher den Inhalt des Kreises durch Rechnung zu finden, brauchen wir bloß noch die Maaßzahl der Peripherie, oder das Verhältniß der Peripherie zum Radius zu bestimmen. Diese Aufgabe (die sogen. Rectification der Kreislinie) ist aber eben so wenig direct möglich, als die Quadratur des Zirkels, da die Kreislinie, als eine stetig gekrümmte Linie, sich nicht unmittelbar durch eine gr. Linie messen läßt. — Beweisen wir zunächst, daß das Verhältniß der Peripherie eines Kreises zum Radius in der That ein constantes ist, und suchen dann eine Formel für die angenäherte Berechnung dieses Verhältnisses zu ermitteln.

182. Lehrsatz. „Die Peripherieen zweier Kreise verhalten sich wie die Radien.“ [Fig. 125.]

Behalten wir die Bezeichnungsweise in 181 bei, indem wir die Symbole für den zweiten Kreis durch einen angehängten Strich unterscheiden, so ist:

Behaupt. $U_k : U'_k = R : R'$ oder $\frac{U_k}{R} = \frac{U'_k}{R'}$

Bew. $\frac{U_n}{R} > \frac{U_k}{R}$ (da $U_n > U_k$) | $\frac{U'_n}{R'} > \frac{U'_k}{R'}$ (da $U'_n > U'_k$)

$\frac{u_n}{R} < \frac{U_k}{R}$ (da $u_n < U_k$) | $\frac{u'_n}{R'} < \frac{U'_k}{R'}$ ($u'_n < U'_k$)

I. $\frac{U_n}{R} > \frac{U_k}{R} > \frac{u_n}{R}$ | II. $\frac{U'_n}{R'} > \frac{U'_k}{R'} > \frac{u'_n}{R'}$

Vermehren wir nun die Seitenzahl der Sehnen- und Tangentenvielecke durch fortlaufende Verdoppelung, so nähern sich ihre Umfänge fortwährend, und es nähern sich auch die Differenzen $\frac{U_n}{R} - \frac{u_n}{R}$ und $\frac{U'_n}{R'} - \frac{u'_n}{R'}$ mehr und mehr der Null, während die obigen Gleichungen stets ihre Geltung behalten. Da nun hierbei stets $\frac{U_n}{R} = \frac{U'_n}{R'}$ und $\frac{u_n}{R} = \frac{u'_n}{R'}$ bleibt (179); so ist $\frac{U_k}{R} = \frac{U'_k}{R'}$ (Arithm. Seite 63. Lehrsatz 59.)

183. Folgerungssatz. „Die Inhalte der Kreise verhalten sich wie die Quadrate der Radien." [Fig. 125.]

Da (nach 181) $I_k = \frac{1}{2} U_k R$

$I'_k = \frac{1}{2} U'_k R'$

so ist 1) $I_k : I'_k = U_k R : U'_k R'$

nun ist $U_k : U'_k = R : R'$ (182.)

$R : R' = R : R'$

2) $U_k R : U'_k R' = R^2 : R'^2$

aus 1 und 2 folgt $I_k : I'_k = R^2 : R'^2$

184. Aufgabe. „Das Verhältniß der Peripherie eines Kreises zum Durchmesser oder die sogen. Ludolph'sche Zahl — welche durch π bezeichnet wird — zu bestimmen."

Lösung. Können wir aus einem regelmäßigen n Ecke ein 2 n Eck von gleichem Umfange construiren, so können wir auch Formeln ableiten, nach welchen wir aus den, in Zahlen gegebenen Radien des n Eckes die Radien für das 2n Eck berechnen können. Nun ist aber der Radius des, dem 2n Eck umschriebenen Kreises kleiner, der Radius des ihm eingeschriebenen Kreises größer als der des n Eckes von gleichem Umfange. — Setzt man daher die Verdoppelung der Seitenzahl, bei constant bleibendem Umfange, immer weiter fort, so müssen sich die beiden Radien immer mehr und mehr ausgleichen, und endlich bis auf eine bestimmte Anzahl Decimalstellen übereinstimmen. — Ist aber der Radius des einem regelmäßigen Polygone eingeschriebenen Kreises gleich dem Radius des ihm umschriebenen Kreises geworden, so müssen auch beide Kreisperipherieen zusammengefallen, das zwischenliegende Polygon selbst ein Kreis geworden sein.

Können wir also die Verwandlung eines regelmäßigen Polygones in ein anderes von gleichem Umfange und der doppelten Seitenzahl ausführen, so brauchen wir nur von einem der regelmäßigen Polygone auszugehen, die wir nach dem vorhergehenden Cap. aus dem Radius construiren — von welchen wir also sowohl den Umfang, als auch die Radien in Zahlen ausdrücken können, um die Zahl π bis auf jede gewünschte Anzahl Decimalstellen genau, durch Rechnung zu erhalten. — Ist nun AB die Seite eines regelmäßigen nEckes [Fig. 126.], $\angle$ AMB der zugehörige Centriwinkel, so muß die Seite des 2nEckes von gleichem Umfange offenbar die Hälfte von AB sein. Zugleich muß aber auch der zugehörige Centriwinkel die Hälfte vom $\angle$ AMB sein, und wir müssen daher die Hälfte der Linie AB in eine solche Lage zum Mittelpunkte M bringen, daß ihre Endpunkte von demselben gleiche Entfernung haben und der zugehörige Centriwinkel $= \frac{1}{2} \angle$ AMB wird. — Schlagen wir zu dem Zwecke mit dem Radius AM (= MB) einen Kreis, halbiren den Winkel AMB durch den Radius MC; ziehen die Sehnen AC und BC; fällen ME $\perp$ AC; MF $\perp$ BC und verbinden endlich E mit F, so ist:

1) EM = FM (161 Zus.)
$\angle$ EMC $= \frac{1}{2} \angle$ AMC
$\angle$ FMC $= \frac{1}{2} \angle$ BMC

2) $\angle$ EMF $= \frac{1}{2} \angle$ AMB
$\triangle$ CEF $\sim$ $\triangle$ CAB $\left\{ \begin{array}{l} \text{CE : CA = CF : CB} \\ \angle \text{ECF} = \angle \text{ACB} \end{array} \right\}$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{Da CE} = \frac{1}{2} \text{CA} \\ \text{und CF} = \frac{1}{2} \text{CB} \end{array} \right.$

EF : AB = CE : CA
da nun CE $= \frac{1}{2}$ CA (159.)

3) EF $= \frac{1}{2}$ AB

Es ist also die Linie EF die Seite des 2nEckes von gleichem Umfange mit dem nEcke, in der richtigen Lage zum Mittelpunkte, so daß EM der Radius des ihm umschriebenen, GM der Radius des ihm eingeschriebenen Kreises ist, und wir haben nur noch die Abhängigkeit dieser Radien von den Radien (AM und DM) des nEckes zu bestimmen.

Bezeichnen wir die Maaßzahl des Radius MA durch r
" " " " " " MD " ρ
" " " " " " ME " r_1
" " " " " " MG " ρ_1

so ist:

MG = MD + DG
DG = GC (da $\triangle$ CEG $\sim$ CAD und CE = EA)

MG = MD + GC

$$GC = CM - GM$$

$$MG = MD + CM - GM$$

d. h. $\rho_1 = \rho + r - \rho_1$

$\rho_1 = \rho_1$ addirt

$$2\rho_1 = \rho + r$$

also I. $\rho_1 = \frac{\rho + r}{2}$

Es ist ferner $\triangle AME \backsim \triangle EMG \begin{cases} \angle AME = \angle EMG \ (159.) \\ \angle MEA = \angle MGE \ (= 1R) \end{cases}$

$$AM : ME = ME : MG$$

d. h. $r : r_1 = r_1 : \rho_1$

$$r_1^2 = r \cdot \rho_1$$

also II. $r_1 = \sqrt{r \cdot \rho_1}$

Mit Hülfe der beiden Formel I und II können wir nun leicht und einfach die Radien für das 2n Eck aus den Radien des n Eckes berechnen.

Gehen wir z. B. von einem Quadrate (ABCD) aus, und nehmen den Radius (ME) [Fig. 127] des demselben eingeschriebenen Kreises als Maaßeinheit, so ist die Maaßzahl dieses Radius $\frac{ME}{ME}$ oder

1) $\rho = 1$

Ferner ist $MA^2 = ME^2 + AE^2 = 2 \cdot ME^2$ (da $ME = EA$)

$$\frac{MA^2}{ME^2} = 2$$

also $\frac{MA}{ME} = \sqrt{2}$

d. h. 2) $r = \sqrt{2} = 1{,}41421$

Hieraus erhalten wir die Radien für das Achteck von gleichem Umfange, nehmlich

$$\rho_1 = \frac{1 + 1{,}41421}{2} = 1{,}20710$$

$$r_1 = \sqrt{1{,}41421 \times 1{,}20710} = 1{,}30655$$

Setzen wir nun das Achteck als das n Eck, so daß seine Radien r und ρ sind, so erhalten wir in gleicher Weise aus den obigen Formeln die Radien für das Sechszehneck u. s. f., wie sie in der folgenden Tafel verzeichnet sind.

$$GC = CM - GM$$

$$MG = MD + CM = 1{,}22$$

$$\text{u. s. } \rho_1 = \rho + r = \rho_1$$

$$2\rho_1 = \rho + r$$

$$\text{also I. } \rho_1 = \frac{\rho + r}{2}$$

Es ist ferner $\triangle AME = \triangle EMG \begin{cases} \angle AME = \angle EMG & (1{,}59) \\ \angle MEA = \angle MGE & (= 1{,}18) \end{cases}$

$$AM : ME = ME : MG$$

$$\text{u. s. } r_1 \cdot \rho_1 = r_1 \cdot \rho_1$$

$$r_1^2 = r \cdot \rho_1$$

$$\text{also II. } r_1 = \sqrt{r \cdot \rho_1}$$

Mit Hülfe der beiden Formeln I und II können wir nun leicht und einfach die Radien für das 2ECF auf den Seiten des n-Eckes berechnen.

Ziehen wir z. B. aus einem Quadrate (ABCD) aus, und nehmen den Radius (ME) (Fig. 127) des demselben eingeschriebenen Kreises als Maaßeinheit, so ist die Maaßzahl dieses Radius $\frac{ME}{ME}$, oder

$$1)\ \rho = 1$$

Ferner ist $AB^2 = ME^2 + AE^2 = 2 \cdot ME^2$ (da $ME = EA$)

$$\frac{MA^2}{ME^2} = 2$$

$$\text{also } \frac{MA}{ME} = \sqrt{2}$$

$$\text{u. s. } 2)\ r = \sqrt{2} = 1{,}41421$$

Hieraus erhalten wir die Radien für das Achteck von gleichem Umfange, nämlich

$$\rho_1 = \frac{1 + 1{,}41421}{2} = 1{,}20710$$

$$r_1 = \sqrt{1{,}41421 \times 1{,}20710} = 1{,}30656$$

Setzen wir nun das Achteck als das n-Eck, in dem jene Radien r und ρ sind, so erhalten wir in gleicher Weise aus den zuletzt gefundenen Formeln die Radien für das Sechzehneck n. 2. 1. wie sie in den folgenden Zeilen verzeichnet sind.

Eck.	ρ	r
4	1,00000	1,41421
8	1,20711	1,30656
16	1,25683	1,28146
32	1,26915	1,27533
64	1,27224	1,27378
128	1,27301	1,27339
256	1,27320	1,27330
512	1,27325	1,27327
1024	1,27326	1,27326

Ein regelmäßiges Polygon von 1024 Ecken ist also so wenig von einem Kreise verschieden, daß der Radius des ihm umschriebenen Kreises auch um $^1/_{100000}$ größer ist, als der des eingeschriebenen Kreises. Da nun der Umfang des Quadrates 8mal so lang ist als der Radius des eingeschriebenen Kreises, dieser Radius aber bei der obigen Ableitung als Einheit gesetzt wurde, und der Umfang constant blieb, so ist auch die Maaßzahl des Umfanges vom 1024 Eck = 8. — Man kann daher sagen: die Maaßzahl der Peripherie des Kreises ist = 8, dessen Radius die Maaßzahl 1,27326 hat. — Folglich ist

$$\pi = \frac{U_k}{2\,R} = \frac{8}{2 \times 1{,}27326} = 3{,}14156$$

welche Zahl das Verhältniß der Peripherie zum Durchmesser auf Zehntausendstel genau angiebt (die letzte Stelle ist fehlerhaft); eine Genauigkeit, die meist hinreichend ist. — Der genauere Werth ist:

$$\pi = 3{,}1415926.$$

Für die Berechnung des Kreises merken wir uns jetzt noch die beiden Formeln:

$$1)\ U_k = 2\,\pi\,R$$
$$2)\ I_k = {}^1/_2\,U_k\,.\,R = \pi\,R^2.$$

Gd.	p.	r
4	1,00000	1,41421
8	1,20711	1,30656
16	1,25688	1,28146
32	1,26915	1,27533
64	1,27224	1,27378
128	1,27301	1,27339
256	1,27320	1,27330
512	1,27325	1,27327
1024	1,27326	1,27326

Ein regelmäßiges Polygon von 1024 Ecken ist also so wenig von einem Kreise verschieden, daß der Radius des ihm umschriebenen Kreises auch um $\frac{1}{10000}$ größer ist, als der des eingeschriebenen Kreises. Da nun der Umfang des Sechsecks Eins so lang ist, als der Radius des eingeschriebenen Kreises, dieser Radius aber bei der obigen Bildung als Einheit gesetzt wurde, und der Umfang constant blieb, so ist auch die Maßzahl des Umfanges von 1024 Gd = 8 — Man kann daher sagen: die Maßzahl der Peripherie des Kreises ist = 8, wenn Radius die Maßzahl 1,27326 hat — Folglich ist

$$\pi = \frac{U_1}{2\,R} = \frac{8}{2 \times 1{,}27326} = 3{,}14159$$

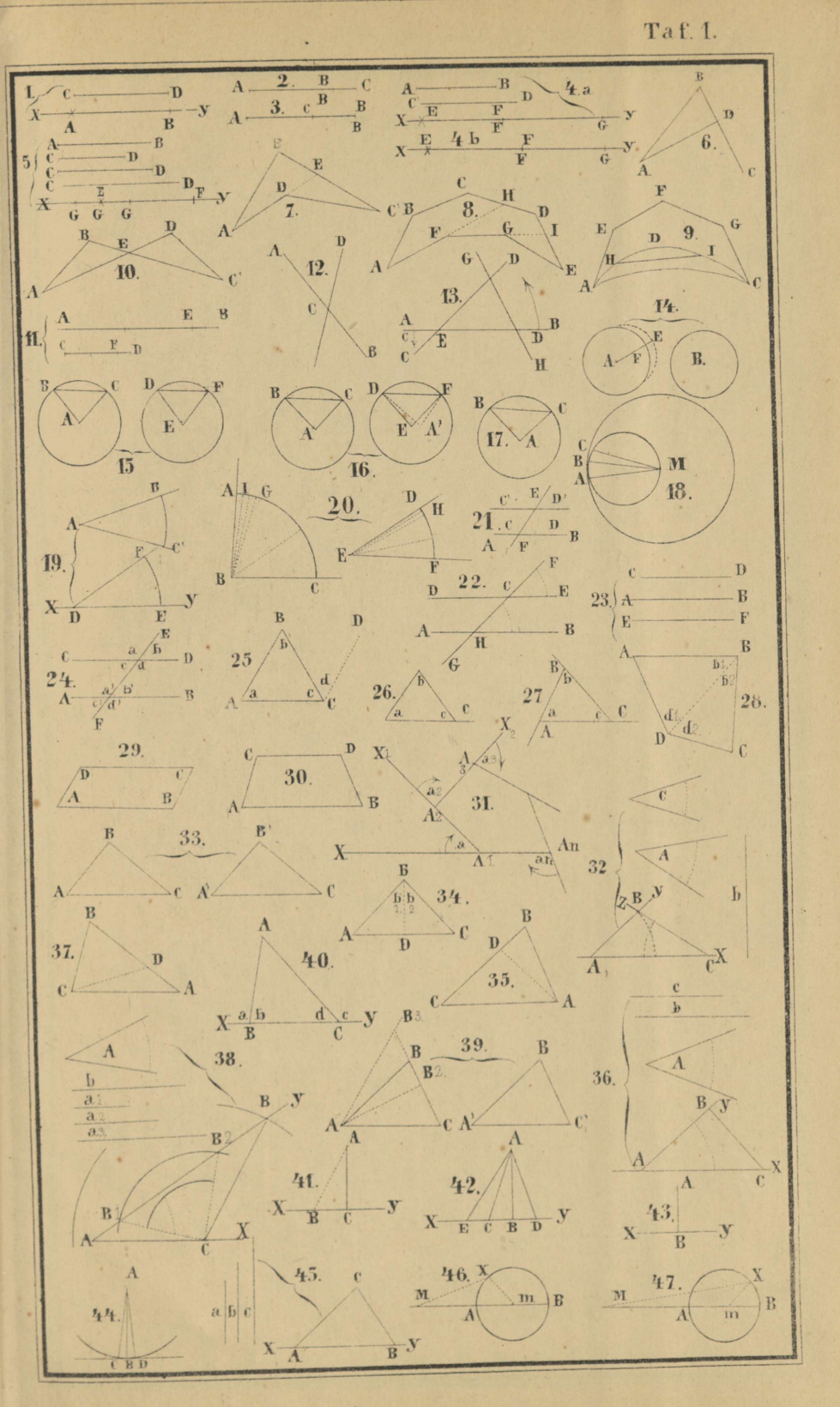
welche Zahl das Verhältniß der Peripherie zum Durchmesser auf Zehntausendstel genau angiebt (die letzte Stelle ist fehlerhaft); eine Genauigkeit, die meist hinreichend ist. — Der genauere Werth ist:

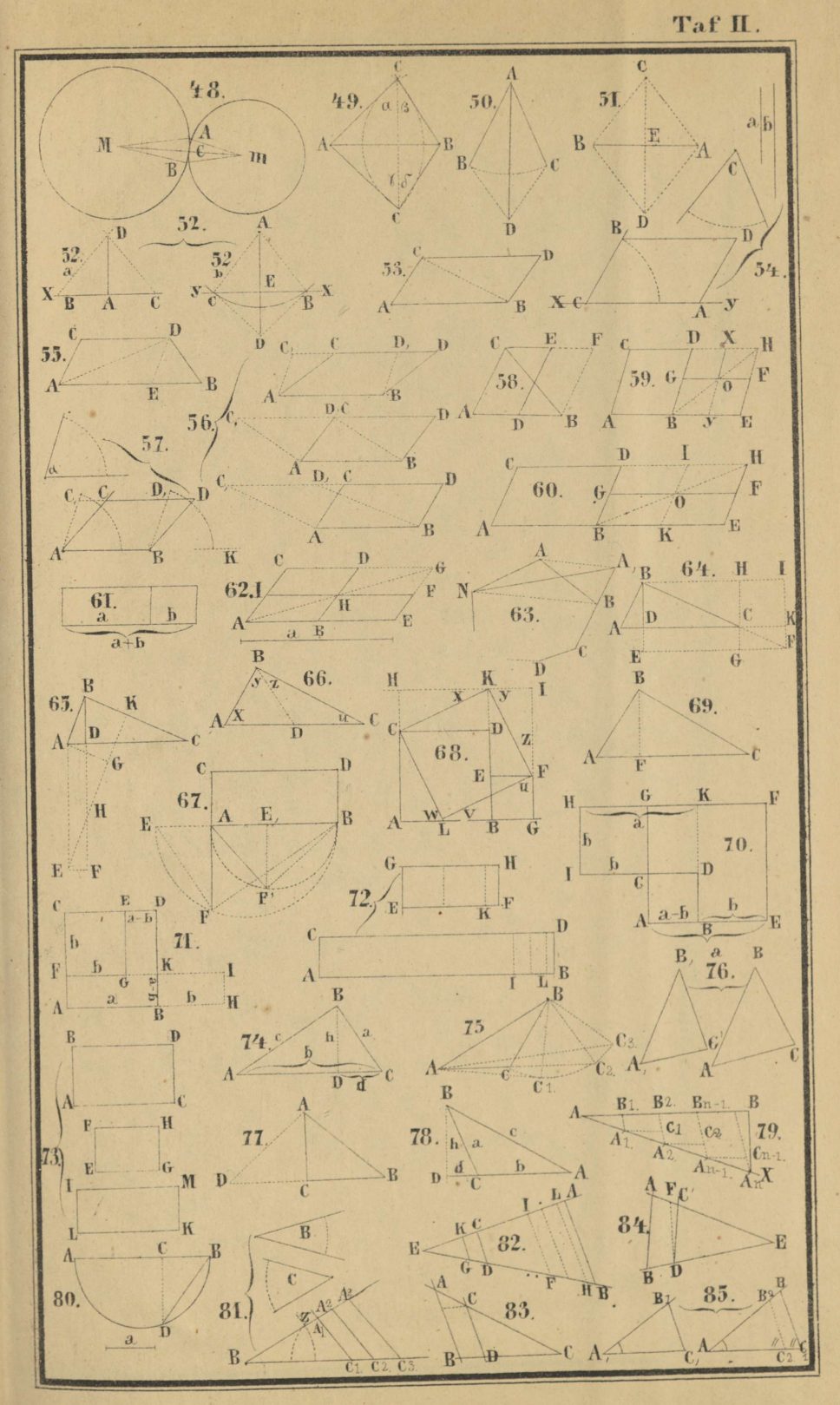
$$\pi = 3{,}141592.$$

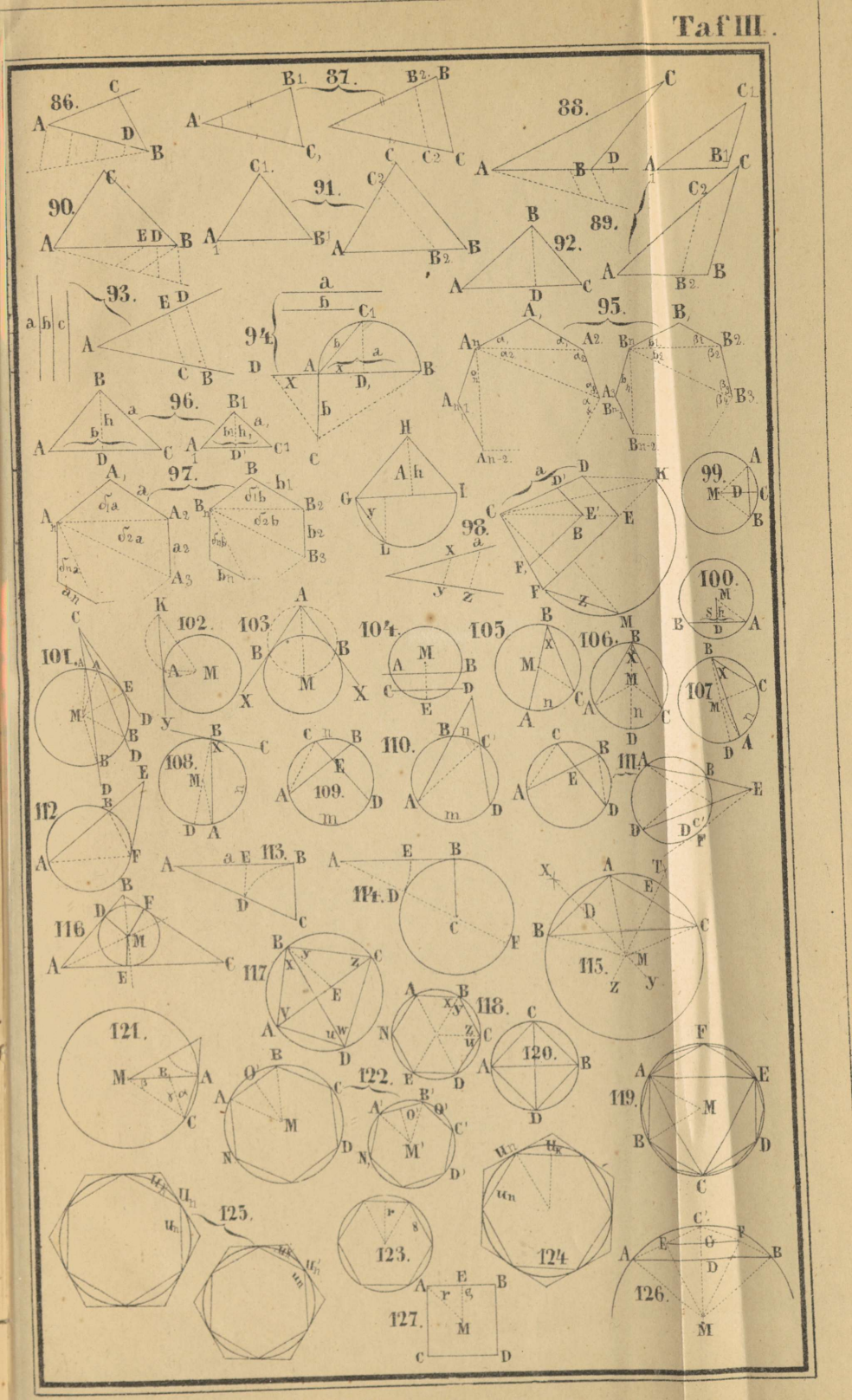
Für die Berechnung des Kreises merken wir uns jetzt noch die beiden Formeln:

1) $U_1 = 2\,\pi\,R$

2) $I_1 = \frac{1}{2}\,U_1\,.\,R = \pi\,R^2.$


1.
2.
3.
4 a
4 b
5
6.
7.
8.
9.
10.
11.
12.
13.
14.
15
16.
17.
18.
19.
20.
21.
22.
23.
24.
25
26.
27
28.
29.
30.
31.
32
33.
34.
35.
36.
37.
38.
39.
40.
41.
42.
43.
44.
45.
46.
47.


48.
49.
50.
51.
52.
53.
54.
55.
56.
57.
58.
59.
60.
61.
62.
63.
64.
65.
66.
67.
68.
69.
70.
71.
72.
73.
74.
75.
76.
77.
78.
79.
80.
81.
82.
83.
84.
85.


86.
87.
88.
89.
90.
91.
92.
93.
94.
95.
96.
97.
98.
99.
100.
101.
102.
103.
104.
105.
106.
107.
108.
109.
110.
111.
112.
113.
114.
115.
116.
117.
118.
119.
120.
121.
122.
123.
124.
125.
126.
127.