

TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI TOIMETISED
УЧЕННЫЕ ЗАПИСКИ
ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

ALUSTATUD 1893. a

VIIK

206

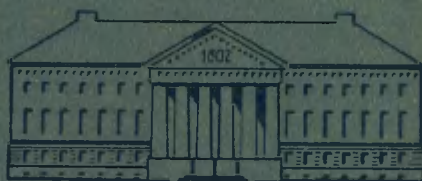
ВЫПУСК

ОСНОВАНЫ в 1893 г.

МАТЕМААТИКА- JA
МЕННААНИКААЛАСЕИД ТÕИД

ТРУДЫ ПО МАТЕМАТИКЕ
И МЕХАНИКЕ

VII



TARTU 1967

TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI TOIMETISED
УЧЕННЫЕ ЗАПИСКИ
ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ALUSTATUD 1893 a. VIHK 206 ВЫПУСК ОСНОВАНЫ в 1893 г.

**МАТЕМАТИКА- JA
МЕННААНИКАALASEID TÕID**
**ТРУДЫ ПО МАТЕМАТИКЕ
И МЕХАНИКЕ**

VII

TARTU 1967

Redaktsiooni kolleegium:

G. Kangro (esimees), S. Baron (vast. toimetaja), Ü. Kaasik,
Ü. Lepik, Ü. Lumiste, E. Reimers (toimetaja).

Редакционная коллегия:

Г. Кангро (председатель), С. Барон (отв. редактор), Ю. Каазик, Ю. Лепик,
Ю. Лумисте, Э. Реймерс (редактор).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ ИСТИННОСТИ ФОРМУЛАМИ

А. Таугс

Кафедра математического анализа

В теориях многозначной логики обычно предполагают существование некоторого конечного или бесконечного числа значений истинности и потом определяют логические операции над ними. Сущность истинностных значений при этом не получает математического определения. Так построена многозначная логика, например, в [1].

В настоящей статье построена многозначная логика, в которой истинностные значения рассматриваются объектами, имеющими точно определенную структуру.

Исследуем бесконечные формулы. Бесконечность может быть достигнута так, что формула может содержать бесконечные дизъюнкции и конъюнкции. В этом случае формулу, хоть и бесконечную, называем *достигаемой*, так как в двузначной логике значение истинности формулы определено, как только определены значения истинности ее атомарных подформул: бесконечная конъюнкция считается истинной, если все конъюнктивные члены истинны, а бесконечная дизъюнкция — если хоть один дизъюнктивный член истинный.

Достигаемую формулу можно определить индуктивно.

- 1° Каждая атомарная формула — достигаемая формула.
- 2° Если \mathcal{X} достигаемая формула, то $\overline{\mathcal{X}}$ достигаемая формула.
- 3° Если каждая из формул \mathcal{X}_i достигаемая, то $(\bigwedge_i \mathcal{X}_i)$ и $(\bigvee_i \mathcal{X}_i)$ достигаемые формулы.
- 4° Если \mathcal{X} и \mathcal{Y} достигаемые формулы, то $(\mathcal{X} \Rightarrow \mathcal{Y})$ и $(\mathcal{X} \sim \mathcal{Y})$ достигаемые формулы.

Недостигаемые формулы отличаются от достигаемых тем, что, хоть значение каждой ее атомарной подформулы определено, невозможно судить, является ли формула истинной или ложной.

Приведем пример недостигаемой формулы. Берем две последовательности атомарных формул:

$$A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \text{ и } B_1, B_2, \dots, B_n, \dots$$

и составим формулу

$$A_1 \wedge (B_1 \vee (A_2 \wedge (B_2 \vee \dots \dots))).$$

Пусть теперь каждая атомарная формула A_i истинна, а каждая B_i ложна. Попробуем теперь определить значение истинности формулы. Так как A_1 истинна, то значение истинности совпадает со значением истинности формулы

$$B_1 \vee (A_2 \wedge (B_2 \vee \dots \dots)).$$

Но из-за ложности формулы B_1 значение истинности такой формулы совпадает со значением истинности формулы

$$A_2 \wedge (B_2 \vee \dots \dots).$$

Так мы можем продолжать исследование до бесконечности, никогда не достигая цели. Хотя значение истинности бесконечной конъюнкции невозможно проверить конечным числом шагов, мы все-таки можем сказать, что если значение истинности всех конъюнктивных членов определено, то — или они все истинны, или среди них найдется хоть один ложный член, хотя мы не можем знать, какая из этих двух возможностей имеет место. Для формулы, описанной выше, мы не можем определить значение истинности, даже если бы мы могли совершить бесконечное число операций.

Пусть у нас теперь есть недостигаемая формула \mathcal{A} и пусть значение истинности ее атомарных формул определено в двузначной логике. Если заменить в формуле каждую атомарную формулу ее значением истинности, то получаем формулу с такой же структурой, только в роли атомарных формул находятся «истина» и «ложь». Каждую так полученную формулу мы называем значением истинности исследуемой логики. Так мы можем делать и для достигаемых формул. Итак, значениями истинности мы называем формулы — достигаемые и недостигаемые — в которых все атомарные формулы заменены значениями истинности двузначной логики. Чтобы определить тождество между значениями истинности, отметим, что атомарная истинная формула совпадает с атомарной истинной и атомарная ложная формула с атомарной ложной формулой; что $\overline{\mathcal{A}}$ совпадает с $\overline{\mathcal{B}}$, если \mathcal{A} совпадает с \mathcal{B} ; что $(\bigwedge_{\alpha} \mathcal{A}_{\alpha})$ совпадает с $(\bigwedge_{\beta} \mathcal{B}_{\beta})$ и $(\bigvee_{\alpha} \mathcal{A}_{\alpha})$ с $(\bigvee_{\beta} \mathcal{B}_{\beta})$, если множества $\{\mathcal{A}_{\alpha}\}$ и $\{\mathcal{B}_{\beta}\}$ совпадают, а $(\mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}_2)$ совпадает с $(\mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2)$ и $(\mathcal{A}_1 \sim \mathcal{A}_2)$ с $(\mathcal{B}_1 \sim \mathcal{B}_2)$, если \mathcal{A}_1 совпадает с \mathcal{B}_1 и \mathcal{A}_2 совпадает с \mathcal{B}_2 .

Но мы можем уменьшить и число разных атомарных формул, которых у нас теперь две: истина и ложь. А именно, мы

можем считать, что ложь — это отрицание истины, т. е. тоже является формулой. Итак, окажется, что у нас есть только одна атомарная формула. Но и этой мы можем избежать, считая истину конъюнкцией, множество конъюнктивных членов которой пусто. Это разумно, так как конъюнкция считается истинной, если все конъюнктивные члены истинны, т. е. нет такого члена, который не был бы истинным. При пустом множестве членов это выполнено. В результате получим, что значения истинности — это формулы, вообще не содержащие атомарных формул. Понятие тождества остается таким же, как описано выше, только опустим понятие тождества атомарных формул.

Чтобы иметь точное понятие значения истинности, надо иметь точное понятие формулы. Но так как мы формулами считали и недостижимые формулы, то не годится индуктивное определение формулы, аналогичное определению достигаемой формулы. Поэтому определим формулу следующим образом:

Вначале сформулируем требование класса формул — требование, которому должен удовлетворять любой класс, чтобы он мог быть классом формул, а именно: любой элемент класса формул должен иметь один из следующих видов.

1° X, Y, Z, A, B, C, \dots , то есть латинская буква.

2° $\bar{\mathcal{A}}$, где \mathcal{A} элемент того же класса.

3° $(\bigwedge_{\alpha} \mathcal{A}_{\alpha})$, где каждое \mathcal{A}_{α} элемент того же класса.

4° $(\bigvee_{\alpha} \mathcal{A}_{\alpha})$, где каждое \mathcal{A}_{α} элемент того же класса.

5° $(\mathcal{A} \supset \mathcal{B})$, где \mathcal{A} и \mathcal{B} элементы того же класса.

6° $(\mathcal{A} \sim \mathcal{B})$, где \mathcal{A} и \mathcal{B} элементы того же класса.

Теперь считаем формулой объект, являющийся элементом некоторого класса формул. Значение истинности, т. е. формулу без атомарных формул, мы можем теперь определить как формулу, удовлетворяющую требованию формулы и в том случае, если опустить в нем пункт 1°.

Теперь определим ранг подформулы в данной формуле.

1° Каждая формула есть в себе подформулой рангом 0.

2° Если $\bar{\mathcal{A}}$ есть в некоторой формуле подформула ранга x , то \mathcal{A} есть в той же формуле подформула ранга $x + 1$.

3° Если $(\bigwedge_{\alpha} \mathcal{A}_{\alpha})$ или $(\bigvee_{\alpha} \mathcal{A}_{\alpha})$ есть в некоторой формуле подформула ранга x , то каждое \mathcal{A}_{α} есть в той же формуле подформула ранга $x + 1$.

4° Если $(\mathcal{A} \supset \mathcal{B})$ или $(\mathcal{A} \sim \mathcal{B})$ есть в некоторой формуле подформула ранга x , то \mathcal{A} и \mathcal{B} являются в той же формуле подформулами ранга $x + 1$.

В общем случае ранг подформулы в формуле есть порядковый тип вполне упорядоченного множества рангов тех подфор-

мул данной формулы, для которых эта подформула является подформулой, кроме самой данной подформулы.

Ясно, что если формула недостигаема, то она должна для любого натурального числа n иметь подформулу, ранг которой превышает n . Действительно, если существует натуральное число n , являющееся наивысшим рангом подформул данной формулы, то все подформулы ранга n или атомарны, или дизъюнкции или конъюнкции с пустым множеством членов, а значит — эти подформулы достигаемые в соответствии с пунктом 1° или 3° в определении достигаемой формулы. Но если все подформулы ранга $k+1$ достигаемы, то любая подформула ранга k тоже достигаема. Это видно при сравнении пунктов 2°, 3°, 4° определения ранга с соответствующими пунктами определения достигаемой формулы. Так индуктивно получим, что и сама формула достигаема.

Итак, необходимым условием для недостигаемости является, чтобы для любого натурального числа n имелись подформулы, ранг которых выше чем n . Но это условие недостаточно, как видно из следующего примера:

Пусть $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n, \dots$ последовательность достигаемых формул, притом такая, что любое \mathcal{A}_k имеет подформулы до ранга k включительно. Таких достигаемых формул можно построить, например, $A_1 \vee (A_2 \wedge (A_3 \vee \dots \dots A_k) \dots)$. Теперь формула $\mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2 \wedge \dots \wedge \mathcal{A}_n \wedge \dots$ достигаема, так как каждый конъюнктивный член достигаемый, но она не имеет подформулы с наивысшим рангом.

Высотой формулы называем порядковый тип вполне упорядоченного множества всех рангов его подформул. Так как значение истинности есть формула, то можно говорить и о высоте значения истинности.

Покажем, что формула может иметь и высоту больше чем ω . Исходим из формулы \mathcal{A} исчисления предикатов первого порядка, не содержащей кванторов и содержащей бесконечное число индивидов $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots$. Это возможно, если \mathcal{A} содержит, например, бесконечную конъюнкцию.

Берем теперь формулу

$$\forall x_1 \exists y_1 \forall x_2 \exists y_2 \dots \dots \mathcal{A}$$

с бесконечным префиксом. Превращая эту формулу в формулу вычисления высказываний, избавимся от кванторов так, что $\forall x_1$ заменяем конъюнкцией через всевозможные значения x_1 , в каждом конъюнктивном члене заменяем $\exists y_1$ дизъюнкцией через всевозможные значения y_1 , и т. д., то получаем формулу исследуемой логики, если предикаты с индивидами считать атомарными формулами. В этой формуле каждый конъюнктивный член, соответствующий значению индивида x_1 , есть подформула ранга 1, дизъюнктивный член в нем, соответствующий значению

y_1 , есть подформула ранга 2 и т. д. Но формула \mathfrak{A} , повторяющаяся в формуле для каждой последовательности значения индивидов $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots$, имеет везде ранг ω , а ее подформулы имеют еще более высокий ранг.

Значит, формулы высотой больше чем ω , мы можем получить, если берем недостигаемую формулу \mathfrak{A} и к последовательности $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_n, \dots$, где \mathfrak{A}_{k+1} есть подформула формулы \mathfrak{A}_k , присоединяем формулу \mathfrak{B} , которую считаем подформулой всех формул данной последовательности.

Перейдем к интерпретации других логических систем в описанной логике. Объясним прежде всего понятие интерпретации. Пусть у нас две системы значений истинности M и N . Пусть теперь из M выбрано некоторое подмножество M' и пусть последнее разбито на классы. Пусть теперь между классами элементов M' и между элементами системы N имеется некоторое взаимно-однозначное соответствие. Берем любую формулу $\mathfrak{A}(X_1, X_2, \dots)$, содержащую атомарные формулы X_1, X_2, \dots . Пусть теперь формула \mathfrak{A} получит в системе N значение истинности n , если атомарные формулы имеют значение истинности n_1, n_2, \dots . Предположим теперь, что в системе M , если атомарным формулам X_1, X_2, \dots дать значения истинности из классов, соответствующих элементам n_1, n_2, \dots , то всегда значение формулы \mathfrak{A} попадает в класс, соответствующий элементу n . Если это имеет место для любой формулы при любых значениях n_1, n_2, \dots в N , то скажем, что система N *интерпретирована* в M .

Чтобы дать интерпретацию двузначной логики в данной логике, надо определить два класса, членами которых являются значения истинности, т. е. формулы без атомарных формул. Обозначим эти классы через α и β и определим их индуктивно.

1° Если каждая из формул \mathfrak{A}_i принадлежит классу α , то $(\bigwedge_i \mathfrak{A}_i)$ принадлежит классу α . Из этого следует, что конъюнкция с пустым множеством членов принадлежит классу α . Ведь нет ни одного конъюнктивного члена, не принадлежащего классу α .

2° Если каждая из формул \mathfrak{A}_i принадлежит классу α , то $(\bigvee_i \mathfrak{A}_i)$ принадлежит классу β . Из этого следует, что дизъюнкция с пустым множеством членов принадлежит классу β .

3° Если \mathfrak{A} принадлежит классу α , то $\overline{\mathfrak{A}}$ принадлежит классу β .

4° Если \mathfrak{A} принадлежит классу β , то $\overline{\mathfrak{A}}$ принадлежит классу α .

5° Если хоть одна из формул \mathfrak{A}_i принадлежит классу α , то $(\bigvee_i \mathfrak{A}_i)$ принадлежит классу α .

6° Если хоть одна из формул \mathcal{X}_i принадлежит классу β , то $(\bigwedge \mathcal{X}_i)$ принадлежит классу β .

7° Если \mathcal{X} принадлежит классу β , то $(\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y})$ принадлежит классу α .

8° Если \mathcal{Y} принадлежит классу α , то $(\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y})$ принадлежит классу α .

9° Если \mathcal{X} принадлежит классу α , и \mathcal{Y} принадлежит классу β , то $(\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y})$ принадлежит классу β .

10° Если \mathcal{X} и \mathcal{Y} принадлежат оба классу α или оба классу β , то $(\mathcal{X} \sim \mathcal{Y})$ принадлежит классу α .

11° Если одна из формул \mathcal{X} , \mathcal{Y} принадлежит классу α , а другая классу β , то $(\mathcal{X} \sim \mathcal{Y})$ принадлежит классу β .

Из 1°—11° следует, что α и β не имеют общих элементов. В роли множества M' здесь будет сумма классов α и β , разбитая на классы α и β . Класс α поставим в соответствии со значением «истина», а класс β — со значением «ложь». Тогда требование интерпретации выполнено.

Если еще составить класс γ из всех истинностных значений, не принадлежащих ни α , ни β , то $M' = M$ есть множество всех значений истинности, разбитое на классы α , β и γ . В этом случае мы имеем интерпретацию трехзначной логики.

Наконец отметим, что в действительности часто применяется формула с бесконечной иерархией подформул. Ведь применяются понятия, при определении которых применяются другие понятия, а при определении этих применяются третьи понятия и так до бесконечности. Истинностное значение высказывания, содержащего такие понятия, зависит от бесконечной иерархии высказываний.

Литература

1. Rosser, I. B., Turquette, A. R., Many-valued logics. Amsterdam, 1952.

Поступило
12 IV 1966

TÕEVAÄRTUSTE DEFINEERIMINE VALEMITENA

A. Tauts

Resümee

Käesolevas artiklis vaadeldakse lõpmatuid valemiteid, kusjuures lõpmatus ei seisne mitte ainult lõpmatutes disjunktsioonides, vaid ka allvalemite lõpmatus hierarhias. Et nende valemite tõeväärtuste määramine kahevalentises loogikas võimatu on, loetakse iga valem, milles atomaarsed valemid on tõeväärtustega

asendatud, omaette tõeväärtuseks. Ühtluse saavutamiseks loetakse ka kahevalentse loogika tõeväärtused valemiteks; tõene on tühi konjunktsioon ja väär on selle eitus.

Artiklis defineeritakse allvalemi astak valemis kui nende antud valemi allvalemite täielikult järjestatud hulga järjestustüüp, millele antud allvalem on allvalemiks. Valemi kõrguseks nim. tema allvalemite astakute täielikult järjestatud hulga järjestustüüpi.

Artikli lõpul näidatakse, kuidas interpreteerida kahevalentset ja kolmevalentset loogikat antud loogika kaudu tõeväärtuste väljaeraldamise ja samastamise teel.

DAS DEFINIEREN DER WAHRHEITSWERTE ALS AUSDRÜCKE

A. Tauts

Zusammenfassung

In dem vorliegenden Artikel betrachtet man unendliche Ausdrücke, wobei die Unendlichkeit nicht nur in den unendlichen Disjunktionen und Konjunktionen, sondern auch in der unendlichen Hierarchie der Teilausdrücke besteht. Weil das Bestimmen der Wahrheitswerte dieser Ausdrücke in der zweiwertigen Logik unmöglich ist, halten wir jeden Ausdruck, in dem die atomaren Ausdrücke durch Wahrheitswerte ersetzt worden sind, für einen selbständigen Wahrheitswert. Um die Einheitlichkeit zu erreichen, halten wir auch die Wahrheitswerte der zweiwertigen Logik für Ausdrücke: wahr ist eine leere Konjunktion und falsch ist die Negation dieser.

In dem Artikel definiert man die Stufe des Teilausdrucks in einem Ausdruck als der Ordnungstyp der völlig geordneten Menge der Teilausdrücke dieses Ausdrucks, für die dieser Teilausdruck ein Teilausdruck ist. Als die Höhe eines Ausdrucks bezeichnet man den Ordnungstyp der völlig geordneten Menge der Stufen seiner Teilausdrücke.

Zum Schluß des Artikels wird gezeigt, wie die zweiwertige und die dreiwertige Logik durch diese Logik mit Hilfe des Auserwählens und des Gleichsetzens der Wahrheitswerte zu interpretieren ist.

РАССЛОЯЕМЫЕ СЕМЕЙСТВА 1-ПАР ЧЕТЫРЕХМЕРНОГО ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

Ю. Лумисте

Кафедра алгебры и геометрии

1. Понятие расслояемости. Конфигурация в n -мерном вещественном проективном пространстве P_n , состоящая из двух плоскостей размерностей m и $n - m - 1$, не имеющих общих точек, называется m -парой ([6], стр. 299). Все m -пары в P_n образуют симметрическое однородное пространство размерности $2(n - m)(m + 1)$, группой движений которого является проективная группа $GP(n, R)$ — простая группа Ли, изоморфная группе $SL(n + 1, R)$ (которую, в свою очередь, можно отождествить с фактор-группой $GL(n + 1, R)/Z$ полной линейной группы $GL(n + 1, R)$ по ее центру Z скалярных матриц).

Пусть в пространстве m -пар в P_n дано p -мерное подмногообразие B . Тогда определяются два диффеоморфных с ним многообразия B_α , которые состоят из m_α -мерных плоскостей ξ_α ($\alpha = 1, 2$; $m_1 + m_2 = n - 1$; $m_1 = m$) и называются составляющими многообразия B , и два расслоенных пространства E_α — подмногообразия в $B_\alpha \times P_n$, состоящих из таких пар (ξ_α, X) , что точка $x \in P_n$ инцидентна с $\xi_\alpha \in B_\alpha$. Базой расслоения E_α является многообразие B (или B_α), структурной группой — простая группа Ли $GP(m_\alpha, R)$, а слоями — плоскости $\xi_\alpha \in B_\alpha$ (как точечные множества в P_n). В расслоении E_α индуцируется обобщенная проективная связность, в которой параллельное перенесение инфинитезимально совпадает с проектированием в P_n бесконечно близкого слоя ξ'_α на заданный слой ξ_α из «центра» ξ_β ($\beta \neq \alpha$; $\alpha, \beta = 1, 2$), составляющего с ξ_α пару $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in B$ (при $m_1 = m_2 = 1$ см. [11], общий случай рассматривается в [9, 5]).

Если индуцируемая таким образом связность в E_α имеет нулевую кривизну, то многообразии m_1 -пар B называется расслояемым в сторону B_α . Многообразие B , расслояемое как в сторону B_1 , так и в сторону B_2 , называется двусторонне расслояемым.

Понятие расслояемого многообразия m -пар в P_n включает классическое понятие расслояемой пары прямолинейных конгруэнций в P_3 , а также его непосредственные обобщения. В случае $n > 3$ о локальных свойствах таких многообразий (т. е. о свойствах так называемых расслояемых семейств m -пар) известно следующее. Исследованиями В. И. Коровина [3] и Р. М. Гейдельмана [1] установлено, что при $m_1 = m_2 = p - 1$ обе составляющие двусторонне расслояемого p -параметрического семейства $(p - 1)$ -пар B в P_{2p-1} являются вполне фокальными, т. е. в B существует голономная сеть, каждой линии которой соответствует в B_α развертывающееся 1-параметрическое семейство $(p - 1)$ -мерных плоскостей ξ_α . (Развертывающимся называется семейство касательных плоскостей некоторой поверхности ранга 1.) Таким образом, в каждой $\xi_\alpha \in B_\alpha$ определяется фокальный симплекс, вершины которого описывают p -сопряженные системы, получаемые друг от друга преобразованием Лапласа ([7], гл. 25).

Расслояемое семейство m -пар в P_n в случае неравных m и $n - m - 1$ впервые рассматривал А. Швец [12]. Он доказал существование двусторонне расслояемого 2-параметрического семейства 1-пар в P_5 , предполагая заранее, что составляющая псевдоконгруэнция прямых является вполне фокальной. Тогда и составляющая конгруэнция 3-мерных плоскостей оказывается вполне фокальной.

Расслояемые семейства m -пар в P_n с не вполне фокальными составляющими до сих пор в литературе, насколько нам известно, еще не рассматривались.

2. Результаты работы. Настоящая работа содержит результаты исследований расслояемых семейств 1-пар B в четырехмерном проективном пространстве P_4 . Дуальные друг к другу составляющие таких семейств (псевдоконгруэнции прямых B_1 и конгруэнции плоскостей B_2), через произвольную прямую или плоскость которых проходит r развертывающихся 1-параметрических подсемейств ($0 \leq r \leq 2$), называются r -фокальными. В работе получены следующие результаты:

А. К любой псевдоконгруэнции прямых B_1 в P_4 можно (например для 0-фокальных B_1 с произволом трех функций двух аргументов) присоединить конгруэнцию плоскостей B_2 и диффеоморфизм B_1 в B_2 , так что возникает семейство 1-пар B в P_4 , расслояемое в сторону B_1 .

Б. Любую 0-фокальную конгруэнцию плоскостей B_2 в P_4 нельзя включить, как составляющую, в семейство 1-пар, расслояемое в сторону B_2 . Класс конгруэнций B_2 в P_4 , допускающих такое включение (т. е. оснащение, индуцирующее в E_2 связность нулевой кривизны) описывается в дифференциальной окрестности 3-го порядка конгруэнции B_2 и не является пустым. Составляющая псевдоконгруэнция прямых B_1 может при этом быть

0-фокальной или 1-фокальной, или вырождаться в 2-параметрическое семейство прямых фиксированной двумерной плоскости в P_4 .

В. Любую 1-фокальную конгруэнцию 2-мерных плоскостей B_2 в P_4 также нельзя включить в семейство 1-пар B , расслояемое в сторону B_2 . Конгруэнция B_2 , допускающая такое включение, не может иметь дифференциальную окрестность 2-го порядка общего строения. Составляющая псевдоконгруэнция прямых B_1 является либо 0-фокальной, либо 1-фокальной, либо вырождается в 1-параметрическое развертывающееся семейство прямых в P_4 .

Г. К произвольной 2-фокальной конгруэнции 2-мерных плоскостей B_2 в P_4 (т. е. к произвольной двумерной поверхности в P_4 , являющейся огибающей такой конгруэнции) можно с произволом шести функций одного аргумента присоединить псевдоконгруэнцию B_1 и диффеоморфизм B_2 в B_1 , так что в расслоении E_2 (т. е. на огибающей поверхности) индуцируется связность нулевой кривизны. Псевдоконгруэнция B_1 может при этом быть только 2-фокальной, причем ее развертывающиеся 1-параметрические подсемейства (торсы) соответствуют таким же семействам конгруэнции B_2 . Последние высекают на расслояющих поверхностях сопряженную сеть линий.

Д. Двусторонне расслояемых семейств 1-пар B в P_4 с 0-фокальными составляющими конгруэнциями B_2 не существует.

Е. Требование двусторонней расслояемости семейства 1-пар B в P_4 с 1-фокальной составляющей конгруэнцией B_2 приводит к вырождению псевдоконгруэнции B_1 в 1-параметрическое развертывающееся семейство прямых. Расслояемость в сторону B_1 в этом случае имеет место в несколько обобщенном смысле.

Ж. Среди семейств 1-пар B в P_4 с 2-фокальными конгруэнциями 2-мерных плоскостей B_2 , расслояемых в сторону B_2 (см. Г), существуют также двусторонне расслояемые семейства. Развертывающиеся 1-параметрические подсемейства в 2-фокальных составляющих B_1 и B_2 при этом соответствуют и высекают на расслояющих 2-мерных поверхностях (горизонтальных поверхностях индуцируемых в E_1 и E_2 связностей нулевой кривизны) сопряженные сети линий. Однако произвольную 2-фокальную конгруэнцию B_2 (т. е. семейство касательных плоскостей произвольной двумерной поверхности) в P_4 нельзя включить в такое семейство.

3. Аппарат исследования. Подвижный репер в P_4 присоединяется к 1-паре $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in B$ следующим образом. Вершины X_0, X_1, X_2 помещаются в 2-мерную плоскость $\xi_2 \in B_2$, так что X_1 и X_2 совпадают с фокусами конгруэнции B_2 , а X_0 полярно сопряжена с ними относительно фокальной квадрики (автополярный треугольник II рода для этой квадрики), а X_3 и X_4 принадлежат прямой ξ_1 и фокальному направлению, соответ-

ственно, для X_1 и X_2 . Тогда 1-формы ω_J^K в формулах инфинитезимального смещения репера

$$dX_J = X_K \omega_J^K \quad (J, K, \dots = 0, 1, 2, 3, 4)$$

связаны соотношениями

$$\begin{aligned} \omega_0^3 &= a_3 \omega_2^4, & \omega_0^4 &= a_4 \omega_1^3, \\ \omega_2^3 &= 0, & \omega_1^4 &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\omega_1^3 \wedge \omega_2^4 \neq 0$. Кроме того,

$$\omega_i^0 \equiv \omega_i^1 \equiv \omega_i^2 \equiv 0 \pmod{\omega_1^3, \omega_2^4}; \quad i = 3, 4. \quad (2)$$

Фокальная квадрика конгруэнции B_2 в ее 2-мерной плоскости ξ_2 определяется уравнением

$$a_3 a_4 x^{0^2} - x^1 x^2 = 0.$$

Конгруэнция B_2 является

- а) при $a_3 \neq 0, a_4 \neq 0$ — 0-фокальной,
- б) при $a_3 \neq 0, a_4 = 0$ — 1-фокальной,
- с) при $a_3 = a_4 = 0$ — 2-фокальной.

В случае а) или б) можно вершины репера нормировать так, чтобы соответственно, $a_3 = a_4 = 1$ или $a_3 = 1, a_4 = 0$. Тогда конгруэнция B_2 определяется в случаях а) — с) следующим замкнутыми системами:

$$\begin{aligned} \text{а) } \omega_0^3 &= \omega_2^4, & \omega_0^4 &= \omega_1^3, \\ \omega_2^3 &= 0, & \omega_1^4 &= 0, \end{aligned} \quad (1a)$$

$$\begin{aligned} \Theta^1 \wedge \omega_1^3 + \vartheta^2 \wedge \omega_2^4 &= 0, & \vartheta^1 \wedge \omega_1^3 + \Theta^2 \wedge \omega_2^4 &= 0, \\ \omega_2^1 \wedge \omega_1^3 + \pi_2 \wedge \omega_2^4 &= 0, & \pi_1 \wedge \omega_1^3 + \omega_1^2 \wedge \omega_2^4 &= 0, \end{aligned} \quad (1a')$$

где

$$\begin{aligned} \Theta^1 &= \omega_4^3 + \omega_2^0 - \omega_0^1, & \Theta^2 &= \omega_3^4 + \omega_1^0 - \omega_0^2, \\ \vartheta^1 &= -\omega_0^0 + \omega_1^1 - \omega_3^3 + \omega_4^4, & \vartheta^2 &= -\omega_0^0 + \omega_2^2 + \omega_3^3 - \omega_4^4, \\ \pi_1 &= -\omega_3^4 + \omega_1^0, & \pi_2 &= -\omega_4^3 + \omega_2^0; \end{aligned}$$

произвол существования конгруэнции B_2 в этом случае — четыре функции двух аргументов;

$$\begin{aligned} \text{б) } \omega_0^3 &= \omega_2^4, & \omega_0^4 &= 0, \\ \omega_2^3 &= 0, & \omega_1^4 &= 0, \end{aligned} \quad (1b)$$

$$\begin{aligned} -\omega_0^1 \wedge \omega_1^3 + \vartheta^2 \wedge \omega_2^4 &= 0, & (\omega_3^4 - \omega_0^2) \wedge \omega_2^4 &= 0, \\ \omega_2^1 \wedge \omega_1^3 + \pi_2 \wedge \omega_2^4 &= 0, & -\omega_3^4 \wedge \omega_1^3 + \omega_1^2 \wedge \omega_2^4 &= 0; \end{aligned} \quad (1b')$$

произвол существования конгруэнции B_2 — три функции двух аргументов;

$$\begin{aligned} \text{с) } \omega_0^3 &= 0, & \omega_0^4 &= 0, \\ \omega_2^3 &= 0, & \omega_1^4 &= 0, \end{aligned} \quad (1c)$$

$$\begin{aligned} \omega_0^1 \wedge \omega_1^3 &= 0, & \omega_0^2 \wedge \omega_2^4 &= 0, \\ \omega_2^1 \wedge \omega_1^3 - \omega_4^3 \wedge \omega_2^4 &= 0, & -\omega_3^4 \wedge \omega_1^3 + \omega_1^2 \wedge \omega_2^4 &= 0; \end{aligned} \quad (1c')$$

произвол существования конгруэнции B_2 — две функции двух аргументов.

В случае с) вершина X_0 описывает 2-мерную поверхность

в P_4 , касательная плоскость к которой совпадает с плоскостью $\xi_2 \in B_2$ (т. е. конгруэнция B_2 обладает огибающей 2-мерной поверхностью). Развертывающиеся 1-параметрические подсемейства в B_2 касаются этой поверхности по линиям сопряженной сети.

4. Условия расслояемости. Согласно общей теории связностей в главных расслоенных пространствах E 1-форма ω на E со значениями в алгебре Ли G' структурой группы Ли G расслоения E определяет связность, если 2-форма

$$\Omega = d\omega - \frac{1}{2} [\omega\omega],$$

называемая формой кривизны связности, является полубазовой [4, 8]. Если G является проективной группой $GP(n, R)$, то это условие требует, чтобы полубазовыми были 2-формы

$$\Omega_{JK} - \delta_{JK}\Omega_0^0 \quad (J, K, \dots = 0, 1, \dots, n),$$

где

$$\Omega_{JK} = d\omega_{JK} + \omega_{LK} \wedge \omega_{JL}$$

составлены из 1-форм связности на E (ср. [2, 10]).

В случае семейства 1-пар B в P_4 уже сами формы

$$\begin{aligned} \Omega_a^b &= \omega_a^i \wedge \omega_i^b, & \Omega_i^j &= \omega_i^a \wedge \omega_a^j \\ (a, b, \dots &= 0, 1, 2; & i, j, \dots &= 3, 4) \end{aligned} \quad (3)$$

являются, в силу (1) и (2), полубазовыми (т. е. выражаются только через внешнее произведение $\omega_1^3 \wedge \omega_2^4$ базисных форм). Следовательно, в расслоении E_α ($\alpha = 1, 2$) определяется некоторая связность.

Семейство 1-пар B в P_4 расслояемо в сторону конгруэнции 2-мерных плоскостей B_2 , если

$$\Omega_0^0 = \Omega_1^1 = \Omega_2^2. \quad \Omega_0^1 = \Omega_0^2 = \Omega_1^2 = \Omega_1^0 = \Omega_2^0 = \Omega_2^1 = 0, \quad (4)$$

и в сторону псевдоконгруэнции прямых B_1 , если

$$\Omega_3^3 = \Omega_4^4, \quad \Omega_3^4 = \Omega_4^3 = 0. \quad (5)$$

5. Доказательство предложения А. Из (1а) и (5) следует, в силу (3), что

$$\begin{aligned} \omega_3^0 &= \varrho_3\omega_1^3 + \sigma_3\omega_2^4, & \omega_4^0 &= \sigma_4\omega_1^3 + \varrho_4\omega_2^4, \\ \omega_3^2 &= \sigma_3\omega_1^3 + \tau_3\omega_2^4, & \omega_4^1 &= \tau_4\omega_1^3 + \sigma_4\omega_2^4, \\ \omega_3^1 &= \varphi_3\omega_1^3 + (\varrho_3 + \psi)\omega_2^4, & \omega_4^2 &= (\varrho_4 - \psi)\omega_1^3 + \varphi_4\omega_2^4. \end{aligned} \quad (6)$$

Замкнутая система, содержащая пфаффовы уравнения (1а) и (6), содержит кроме уравнений (1а') еще следующие внешние уравнения 2-го порядка:

$$\begin{aligned} \nabla\varrho_3 \wedge \omega_1^3 + \nabla\sigma_3 \wedge \omega_2^4 &= 0, \\ [\nabla\sigma_3 + \sigma_3\vartheta^1 - (\varrho_3 + \psi)\pi_1 - \varrho_3\theta^2 + \varphi_3\omega_1^2] \wedge \omega_1^3 + \nabla\tau_3 \wedge \omega_2^4 &= 0, \\ \nabla\sigma_4 \wedge \omega_1^3 + \nabla\varrho_4 \wedge \omega_2^4 &= 0, \\ \nabla\tau_4 \wedge \omega_1^3 + [\nabla\sigma_4 + \sigma_4\vartheta^2 - (\varrho_4 - \psi)\pi_2 - \varrho_4\theta^1 + \varphi_4\omega_2^1] \wedge \omega_2^4 &= 0, \quad (6') \\ \nabla\varphi_3 \wedge \omega_1^3 + [\nabla\varrho_3 + \nabla\psi + \lambda_3\vartheta^2 - \sigma_3(\theta^1 + \pi_2) + \tau_3\omega_2^1] \wedge \omega_2^4 &= 0, \\ [\nabla\varrho_4 - \nabla\psi + \varrho_4\vartheta^1 - \sigma_4(\theta^2 + \pi_1) + \tau_4\omega_1^2] \wedge \omega_1^3 + \nabla\varphi_4 \wedge \omega_2^4 &= 0. \end{aligned}$$

Анализ этой системы показывает, что семейство 1-пар B с 0-фокальными составляющими в P_4 , расслаемое в сторону B_1 , существует с произволом семи функций двух аргументов. Другими словами, к произвольной псевдоконгруэнции прямых B_1 в P_4 можно с произволом трех функций двух аргументов присоединить конгруэнцию плоскостей B_2 и диффеоморфизм B_1 в B_2 , так что в расслоении E_1 , определяемом псевдоконгруэнцией B_1 , индуцируется связность нулевой кривизны.

6. Доказательство предложения Б. Из (1a) и (4) следует, в силу (3), что

$$\begin{aligned} \omega_3^0 &= \lambda_3 \omega_1^3, & \omega_4^0 &= \lambda_4 \omega_2^4, \\ \omega_3^1 &= \mu_3 \omega_1^3 + (\lambda_4 - \lambda_3) \omega_2^4, & \omega_4^2 &= (\lambda_3 - \lambda_4) \omega_1^3 + \mu_4 \omega_2^4, \\ \omega_3^2 &= \mu_4 \omega_1^3, & \omega_4^1 &= \mu_3 \omega_2^4. \end{aligned} \quad (7)$$

При замыкании системы (1a) + (7) к уравнениям (1a') прибавляются следующие внешние уравнения 2-го порядка:

$$\begin{aligned} \nabla \lambda_3 \wedge \omega_1^2 + \lambda_4 \pi_1 \wedge \omega_2^4 &= 0, \\ \lambda_3 \pi_2 \wedge \omega_1^2 + \nabla \lambda_4 \wedge \omega_2^4 &= 0, \\ [\nabla \mu_3 + \mu_3 (\vartheta^1 - \vartheta^2) + (\lambda_4 - \lambda_3) \Theta^1] \wedge \omega_1^3 + \\ + [\nabla \lambda_4 - \nabla \lambda_3 + \lambda_4 \vartheta^1 - \lambda_3 \vartheta^2] \wedge \omega_2^4 &= 0, \\ [\nabla \lambda_3 - \nabla \lambda_4 - \lambda_4 \vartheta^1 + \lambda_3 \vartheta^2] \wedge \omega_1^3 + \\ [\nabla \mu_4 + \mu_4 (\vartheta^2 - \vartheta^1) + (\lambda_3 - \lambda_4) \Theta^2] \wedge \omega_2^4 &= 0, \\ \nabla \mu_4 \wedge \omega_1^3 + [\mu_4 \pi_1 + (\lambda_4 - \lambda_3) \omega_1^2] \wedge \omega_2^4 &= 0, \\ [\mu_3 \pi_2 + (\lambda_3 - \lambda_4) \omega_2^1] \wedge \omega_1^3 + \nabla \mu_3 \wedge \omega_2^4 &= 0, \end{aligned} \quad (7')$$

где

$$\begin{aligned} \nabla \lambda_3 &= d\lambda_3 + \lambda_3 (\omega_0^0 + \omega_1^1 - 2\omega_3^3) + \mu_3 \omega_1^0 + \mu_4 \omega_2^0, \\ \nabla \lambda_4 &= d\lambda_4 + \lambda_4 (\omega_0^0 + \omega_2^2 - 2\omega_4^4) + \mu_4 \omega_2^0 + \mu_3 \omega_1^0, \\ \nabla \mu_3 &= d\mu_3 + \mu_3 (\omega_1^1 + \omega_2^2 - 2\omega_4^4) + (\lambda_3 - \lambda_4) \omega_4^3 + \lambda_4 \omega_0^1 + \mu_4 \omega_2^1, \\ \nabla \mu_4 &= d\mu_4 + \mu_4 (\omega_1^1 + \omega_2^2 - 2\omega_3^3) + (\lambda_4 - \lambda_3) \omega_3^4 + \lambda_3 \omega_0^2 + \mu_3 \omega_1^2. \end{aligned}$$

Анализ замкнутой системы (1a) + (7) + (1a') + (7') показывает, что семейство 1-пар B с 0-фокальными составляющими в P_4 , расслаемое в сторону конгруэнции B_2 , существует с произволом двух функций двух аргументов. Следовательно, к произвольной конгруэнции 2-мерных плоскостей B_2 в P_4 нельзя присоединить псевдоконгруэнцию прямых B_1 и диффеоморфизм B_2 в B_1 так, чтобы в расслоении E_2 , определяемом конгруэнцией B_2 , индуцировалась связность нулевой кривизны. Так как система (7') не накладывает никаких дополнительных соотношений на коэффициенты у базисных форм ω_1^3 и ω_2^4 , полученные при развертывании системы (1a') по лемме Картана, то класс конгруэнций B_2 в P_4 , допускающих индуцируемую указанным образом связность нулевой кривизны, описывается лишь в дифференциальной окрестности 3-го порядка.

Из системы (7) следует, что фокусы и фокальные направле-

ния псевдоконгруэнции B_1 , если они существуют, определяются нетривиальными решениями системы

$$\begin{aligned}\lambda_3 x^3 \omega_1^3 + \lambda_4 x^4 \omega_2^4 &= 0, \\ \mu_3 x^3 \omega_1^3 + [\mu_3 x^4 + (\lambda_4 - \lambda_3) x^3] \omega_2^4 &= 0, \\ [\mu_4 x^3 + (\lambda_3 - \lambda_4) x^4] \omega_1^3 + \mu_4 x^4 \omega_2^4 &= 0\end{aligned}$$

относительно x^3 , x^4 и ω_1^3 , ω_2^4 . Отсюда для x^3 , x^4 получаются уравнения

$$\begin{aligned}(\lambda_3 - \lambda_4) x^3 [\lambda_3 x^3 - \mu_3 x^4] &= 0, \\ (\lambda_3 - \lambda_4) x^4 [\mu_4 x^3 - \lambda_4 x^4] &= 0, \\ (\lambda_3 - \lambda_4) [\mu_4 (x^3)^2 - \mu_3 (x^4)^2 + (\lambda_3 - \lambda_4) x^3 x^4] &= 0,\end{aligned}\tag{8}$$

которым в общем случае нельзя удовлетворить одновременно. Следовательно, в общем случае псевдоконгруэнция B_1 , также как и конгруэнция B_2 , 0-фокальна.

Весьма специальным является здесь случай, когда $\lambda_3 = \lambda_4$. Анализ системы (1а) + (7) + (1а') + (7') в этом случае показывает, что соответствующее семейство 1-пар B в P_4 существует с произволом одной функции двух аргументов. Оказывается, что одним его составляющим является 2-параметрическое семейство прямых некоторой фиксированной двумерной плоскости в P_4 . В самом деле, если $\lambda_3 = \lambda_4$, то в силу (7)

$$\begin{aligned}dX_3 &= \omega_1^3 Z + \omega_3^3 X_3 + \omega_3^4 X_4, \\ dX_4 &= \omega_2^4 Z + \omega_4^3 X_3 + \omega_4^4 X_4,\end{aligned}$$

где

$$Z = \lambda_3 X_0 + \mu_3 X_1 + \mu_4 X_2$$

является точкой в плоскости $\xi_2 \in B_2$, инвариантно присоединенной к 1-паре $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in B$. Совместив вершину X_0 с точкой Z , можно положить

$$\lambda_3 = \lambda_4 = 1, \quad \mu_3 = \mu_4 = 0.$$

Это приводит к равенствам

$$\nabla \lambda_3 - \nabla \lambda_4 = \vartheta^1 - \vartheta^2, \quad \nabla \mu_3 = \omega_0^1, \quad \nabla \mu_4 = \omega_0^2$$

и из последних четырех уравнений (7') следует теперь, что

$$\omega_0^1 = \omega_0^2 = 0.$$

Таким образом

$$dX_0 = \omega_0^0 X_0 + \omega_0^3 X_3 + \omega_0^4 X_4,$$

т. е. плоскость, натянутая на X_0 , X_3 и X_4 , абсолютно неподвижна.

Несложный анализ системы (8) показывает, что, кроме этого случая $\lambda_3 = \lambda_4$ и общего случая 0-фокальной псевдоконгруэнции B_1 , возможен еще случай, когда $\lambda_3 = \mu_4 = 0$ (или $\lambda_4 = \mu_3 = 0$, что равносильно). В этом случае X_3 является фокусом 1-фокальной псевдоконгруэнции B_1 , соответствующим фокальному направлению $\mu_3 \omega_1^3 - \lambda_4 \omega_2^4 = 0$. Соответствующее семейство 1-пар B в P_4 с 0-фокальной B_2 и 1-фокальной B_1 , расслаемое в сторону B_2 , существует с произволом двух функций двух аргументов.

7. Доказательство предложения В. Из (1b) и (4) следует, что

$$\begin{aligned}\omega_3^0 &= \lambda_3 \omega_1^3, & \omega_4^0 &= \lambda_4 \omega_2^4, \\ \omega_3^1 &= -\lambda_3 \omega_2^4, & \omega_4^2 &= \lambda_3 \omega_1^3 + \mu_4 \omega_2^4, \\ \omega_3^2 &= 0, & \omega_4^1 &= \mu_3 \omega_2^4.\end{aligned}\quad (9)$$

При замыкании системы (1b) + (9) к уравнениям (1b') прибавляются следующие внешние уравнения 2-го порядка:

$$\begin{aligned}\Delta \lambda_3 \wedge \omega_1^3 + \lambda_4 \omega_3^4 \wedge \omega_2^4 &= 0, \\ \lambda_3 \omega_0^2 \wedge \omega_1^3 + \Delta \lambda_4 \wedge \omega_2^4 &= 0, \\ -\lambda_3 \omega_1^4 \wedge \omega_1^3 + [\Delta \lambda_3 + \lambda_3 \vartheta^2 + \mu_3 \omega_3^4] \wedge \omega_2^4 &= 0, \\ [\Delta \lambda_3 + \lambda_3 \vartheta^2] \wedge \omega_1^3 + \Delta \mu_4 \wedge \omega_2^4 &= 0, \\ \lambda_3 (\omega_3^4 - \omega_0^2) \wedge \omega_1^3 + (\lambda_3 \omega_1^2 + \mu_4 \omega_3^4) \wedge \omega_2^4 &= 0, \\ -\lambda_3 \omega_2^1 \wedge \omega_1^3 + \Delta \mu_3 \wedge \omega_2^4 &= 0,\end{aligned}\quad (9')$$

где

$$\begin{aligned}\Delta \lambda_3 &= d\lambda_3 + \lambda_3 (\omega_0^0 + \omega_1^1 - 2\omega_3^3), \\ \Delta \lambda_4 &= \nabla \lambda_4, \\ \Delta \mu_3 &= d\mu_3 + \mu_3 (\omega_1^1 + \omega_2^2 - 2\omega_4^4) + \mu_4 \omega_2^1 + \lambda_4 \omega_0^1 + \lambda_3 \omega_4^3, \\ \Delta \mu_4 &= d\mu_4 + 2\mu_4 (\omega_2^2 - \omega_4^4) + \mu_3 \omega_1^2 + \lambda_4 \omega_0^2 + \lambda_3 \omega_1^0.\end{aligned}\quad (9'')$$

Анализ замкнутой системы (1b) + (9) + (1b') + (9') показывает, что семейство 1-пар B с 1-фокальной составляющей конгруэнцией B_2 , расслаемое в сторону B_2 , существует с произволом двух функций двух аргументов. Следовательно, к произвольной 1-фокальной конгруэнции 2-мерных плоскостей B_2 в P_4 нельзя присоединить псевдоконгруэнцию прямых B_1 и диффеоморфизм B_2 в B_1 , так что в расслоении E_2 индуцируется связность нулевой кривизны. Сравнение систем (1b') и (9') показывает, что существование такой псевдоконгруэнции B_1 приводит к некоторым специфическим свойствам 1-фокальной конгруэнции B_2 уже в дифференциальной окрестности 2-го порядка (ср. уравнения последнего столбца (1b') и предпоследнее уравнение (9')).

Фокусы и фокальные направления псевдоконгруэнции B_1 определяются, в силу (9), из системы

$$\begin{aligned}\lambda_3 x^3 \omega_1^3 + \lambda_4 x^4 \omega_2^4 &= 0, \\ (\lambda_3 x^3 - \mu_3 x^4) \omega_2^4 &= 0, \\ \lambda_3 x^4 \omega_1^3 + \mu_4 x^4 \omega_2^4 &= 0.\end{aligned}\quad (10)$$

Отсюда следует, что в общем случае B_1 является 0-фокальной.

Весьма специальным является случай, когда $\lambda_3 = 0$. В этом случае

$$\begin{aligned}dX_3 &= \omega_3^3 X_3 + \omega_3^4 X_4, \\ dX_4 &= \omega_2^4 Z + \omega_4^3 X_3 + \omega_4^4 X_4,\end{aligned}$$

где

$$Z = \lambda_4 X_0 + \mu_3 X_1 + \mu_4 X_2.$$

Следовательно, прямая $\xi_1 = X_3 X_4$ зависит только от одного параметра: при $\omega_2^4 = 0$ она неподвижна. Псевдоконгруэнция B_1 вырождается в семейство касательных к линии, описываемой точкой X_3 . Такое семейство 1-пар B в P_4 с $\lambda_3 = 0$ существует с произволом двух функций двух аргументов — к системе (1b') прибавляются уравнения

$$\omega_3^4 \wedge \omega_2^4 = 0, \quad \Delta \lambda_4 \wedge \omega_2^4 = 0, \quad \Delta \mu_3 \wedge \omega_2^4 = 0, \quad \Delta \mu_4 \wedge \omega_2^4 = 0. \quad (9''')$$

Кроме этого случая $\lambda_3 = 0$ и общего случая 0-фокальной псевдоконгруэнции B_1 возможны еще семейства 1-пар B в P_4 с 1-фокальными составляющими B_1 и B_2 , расслояемые в сторону B_2 . Они выделяются в силу (10) уравнением

$$\lambda_3 \lambda_4 = \mu_3 \mu_4$$

и существуют с произволом одной функции двух аргументов. При их исследовании можно вершины репера нормировать так, чтобы $\lambda_3 = \lambda_4 = \mu_3 = 1$. Тогда для них также $\mu_4 = 1$, и из (9'') следует, что

$$\Delta \mu_4 = 2\vartheta^2 + \Delta \lambda_3 + \Delta \lambda_4 - \Delta \mu_3.$$

Эту зависимость нужно теперь учитывать при исследовании замкнутой системы (1b) + (9) + (1b') + (9').

Следует отметить, что развертывающиеся 1-параметрические подсемейства 1-фокальных составляющих B_1 и B_2 семейства 1-пар B в P_4 , расслояемое в сторону B_2 , не соответствуют друг другу: в B_2 они определяются уравнением $\omega_2^4 = 0$, в B_1 уравнением $\omega_1^3 + \omega_2^4 = 0$.

8. Доказательство предложения Г. В случае односторонней расслояемости семейства 1-пар B в P_4 в сторону конгруэнции B_2 остается доказать предложение Г. Из (1c) и (4) следует, что

$$\begin{aligned} \omega_3^0 &= \lambda_3 \omega_1^3, & \omega_4^0 &= \lambda_4 \omega_2^4, \\ \omega_3^1 &= \mu_3 \omega_1^3, & \omega_4^1 &= \mu_4 \omega_2^4, \\ \omega_3^2 &= \nu_3 \omega_1^3, & \omega_4^2 &= \nu_4 \omega_2^4. \end{aligned} \quad (11)$$

Отсюда внешним дифференцированием получаются уравнения

$$\begin{aligned} \delta \lambda_3 \wedge \omega_1^3 &= \delta \mu_3 \wedge \omega_1^3 = \delta \nu_3 \wedge \omega_1^3 = 0, \\ \delta \lambda_4 \wedge \omega_2^4 &= \delta \mu_4 \wedge \omega_2^4 = \delta \nu_4 \wedge \omega_2^4 = 0. \end{aligned} \quad (11')$$

Сравнение с (1c') показывает, что к произвольной 2-фокальной конгруэнции B_2 (т. е. к произвольной двумерной поверхности V) в P_4 можно с произволом шести функций одного аргумента присоединить псевдоконгруэнцию B_1 и диффеоморфизм B_2 в B_1 , так что в расслоении E_2 (на поверхности V) индуцируется связность нулевой кривизны. Из (11) следует, что псевдоконгруэнция B_1 при этом является всегда также 2-фокальной, и ее развертывающиеся 1-параметрические подсемейства соответствуют таким же подсемействам в B_2 . Последние высекают на расслояющих поверхностях (горизонтальных поверхностях индуцируемой в E_2 связности нулевой кривизны) сопряженную сеть линий.

9. Доказательство предложения Д. Остается рассматривать случаи двусторонне расслояемых семейств 1-пар B в P_4 . Прежде всего нужно доказать предложение Д о несуществовании таких семейств B с 0-фокальными конгруэнциями B_2 .

Пусть при (1a) и (4) удовлетворяются также условия (5). Тогда в (7) имеют место равенства $\lambda_3 + \lambda_4 = 0$, $\mu_3 = \mu_4 = 0$. Вершины репера можно нормировать так, что $\lambda_4 = -\lambda_3 = \frac{1}{2}$. Тогда уравнения (7) принимают вид

$$\begin{aligned} 2\omega_3^0 &= \omega_4^2, & 2\omega_4^0 &= \omega_3^1, \\ \omega_3^1 &= \omega_2^4, & \omega_4^2 &= -\omega_1^3, \\ \omega_3^2 &= 0, & \omega_4^1 &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Отсюда внешним дифференцированием получаются следующие уравнения, дополняющие систему (1a):

$$\begin{aligned} 2\vartheta^2 \wedge \omega_1^3 + (\theta^2 + 3\pi_1) \wedge \omega_2^4 &= 0, & (\theta^1 + 3\pi_2) \wedge \omega_1^3 + 2\vartheta^1 \wedge \omega_2^4 &= 0, \\ (\theta^1 + \pi_2) \wedge \omega_1^3 + 2\zeta \wedge \omega_2^4 &= 0, & 2\zeta \wedge \omega_1^3 + (\theta^2 + \pi_1) \wedge \omega_2^4 &= 0, \\ (\theta^2 - \pi_1) \wedge \omega_1^3 + 2\omega_1^2 \wedge \omega_2^4 &= 0, & 2\omega_2^1 \wedge \omega_1^3 + (\theta^1 - \pi_2) \wedge \omega_2^4 &= 0, \end{aligned} \quad (12')$$

где

$$\zeta = \omega_1^1 + \omega_2^2 - \omega_3^3 - \omega_4^4.$$

Замкнутая система (1a) + (12) + (1a') + (12') не в инволюции. Ее продолжение приводит к дополнительным пфаффовым уравнениям

$$\begin{aligned} \theta^1 &= 3M\omega_1^3 + S\omega_2^4, \\ \vartheta^2 &= S\omega_1^3 + \frac{1}{2}(T + 3P)\omega_2^4, \\ \vartheta^1 &= \frac{1}{2}(S + 3N)\omega_1^3 + T\omega_2^4, \\ \theta^2 &= T\omega_1^3 + 3Q\omega_2^4, \\ \omega_2^1 &= L\omega_1^3 + M\omega_2^4, \\ \pi_2 &= M\omega_1^3 + N\omega_2^4, \\ \pi_1 &= P\omega_1^3 + Q\omega_2^4, \\ \omega_1^2 &= Q\omega_1^3 + R\omega_2^4, \\ 2\zeta &= (S + N)\omega_1^3 + (T + P)\omega_2^4, \end{aligned}$$

из которых

$$\vartheta^2 + \vartheta^1 = 3\zeta,$$

или

$$2(\omega_0^0 + \omega_1^1 + \omega_2^2) = 3(\omega_3^3 + \omega_4^4).$$

Отсюда внешним дифференцированием получается равенство

$$\Omega_0^0 + \Omega_1^1 + \Omega_2^2 = 0,$$

которое, в силу (4) и (12), несовместно с $\omega_1^3 \wedge \omega_2^4 \neq 0$.

10. Предложение Е о двусторонне расслояемых семействах 1-пар B в P_4 с 1-фокальными конгруэнциями B_2 доказывается следующим образом. Если при (1b) и (4) удовлетворяются также (5), то в уравнениях (9) имеют место равенства $\lambda_3 =$

$= \mu_3 = 0$. Тогда в уравнениях (9''') следует, в силу (9''), положить $\Delta\mu_3 = \mu_4\omega_2^1 + \lambda_4\omega_0^1$. Исследование замкнутой системы (1b) + (9) + (1b') + (9''') в этом случае показывает, что рассматриваемые семейства 1-пар B в P_4 существуют с произволом одной функции двух аргументов.

Псевдоконгруэнция B_1 в этом случае вырождается в семейство касательных к линии, описываемой X_3 (см. п. 7). Каждая касательная $\xi_1 \in B_1$ сопоставляется некоторому развертывающемуся 1-параметрическому подсемейству 1-фокальной конгруэнции B_2 . Проектирование прямой $\xi_1' \in B_1$, бесконечно близкой к $\xi_1 \in B_1$, на прямую ξ_1 в этом случае не зависит от выбора «центра проектирования» $\xi_2 \in B_2$ в этом развертывающемся семействе. Расслоенность такого семейства 1-пар B в P_4 (с составляющими B_1 и B_2 неравной размерности) в сторону B_1 нужно понимать в том смысле, что такие проектирования индуцируют в расслоении E_1 связность нулевой кривизны.

11. Наконец остается доказать **предложение Ж**. Из (1c), (11) и (5) следует, что $\nu_3 = \nu_4 = 0$, т. е. последние два уравнения (11) нужно заменить с $\omega_3^2 = \omega_4^1 = 0$. В (11') вместо уравнений последнего столбца получаются

$$\begin{aligned} (\mu_3\omega_1^2 + \lambda_3\omega_0^2) \wedge \omega_1^3 - \mu_4\omega_3^4 \wedge \omega_2^4 &= 0, \\ \mu_3\omega_4^3 \wedge \omega_1^3 - (\mu_4\omega_2^1 + \lambda_4\omega_0^1) \wedge \omega_2^4 &= 0. \end{aligned}$$

Анализ новой замкнутой системы показывает, что двусторонне расслоенное семейство 1-пар B в P_4 с 2-фокальными составляющими B_1 и B_2 существует с произволом десяти функций одного аргумента. Следовательно, произвольную 2-фокальную конгруэнцию (т. е. семейство касательных плоскостей произвольной двумерной поверхности) в P_4 нельзя включить в такое семейство. Нетрудно доказать также справедливость и остальных утверждений предложения Ж.

Литература

1. Гейдельман Р. М., Расслоение k -параметрических семейств $(k-1)$ -мерных плоскостей. Матем. сб., 1954, 34, 499—524.
2. Картан Э., Пространства аффинной, проективной и конформной связности. Казань, 1962.
3. Корovin В. И., Расслоение пары комплексов двумерных плоскостей в пятимерном проективном пространстве. Докл. АН СССР, 1950, 72, 837—840.
4. Лаптев Г. Ф., Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Тр. Моск. матем. о-ва, 1953, 2, 275—382.
5. Лумисте Ю. Г., Индуцированные связности в погруженных проективных и аффинных расслоениях. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1965, 177, 6—42.
6. Розенфельд Б. А., Неевклидовы геометрии. Москва, 1955.
7. Фиников С. П., Теория пар конгруэнций. Москва, 1956.
8. Чжень Шэн-шэнь, Комплексные многообразия. Москва, 1961.

9. Bortolotti, E., Connessioni nelle varietà luogo di spazi; applicazione alla geometria metrica differenziale delle congruenze di rette. Rend. Semin. Fac. Sci. Univ. Cagliari, 1933, 3, 81—89.
10. CenkI, B., Les variétés de König généralisées. Чехосл. матем. ж., 1964, 14, № 1, 1—21.
11. Svec, A., Géométrie intrinsèque des congruences de droites et leurs déformations projectives. Чехосл. матем. ж., 1958, 8, № 3, 395—398.
12. Svec, A., Sur le problème de la stratification des congruences de droites. Чехосл. матем. ж., 1960, 10, № 2, 299—303.

Поступило
20 XII 1965

LADENEVAD 1-PAARIDE PARVED NELJAMOÖTMELISES PROJEKTIIVSES RUUMIS

U. Lumiste

Resümee

Töös tõestatakse mõningad laused kaheparameetriliste ladenevate ja kahepoolset ladenevate 1-paaride parvede kohta neljamõõtmelises projektiivses ruumis.

STRATIFIABLE FAMILIES OF 1-PAIRS IN FOUR- DIMENSIONAL PROJECTIVE SPACE

U. Lumiste

Summary

A pair of unintersecting planes of dimension m and $n-m-1$ in n -dimensional projective space is called a m -pair [6]. Set of all m -pairs in P_n is a symmetric homogeneous space. Suppose that in this space is given a submanifold B . Set $\{(\xi, X) | \xi \in B, X \text{ is the point of } m\text{-plane of } \xi\}$ in $B \times P_n$ is a fibred bundle E . The manifold of $(n-m-1)$ -planes of $\xi \in B$ is a projective rigging, inducing in E a general projective connection [9, 5]. If this connection is locally flat, the manifold B is called stratifiable. If B is stratifiable to both sides, it is called doubly stratifiable.

The classical works on the stratifiable 2-parametric families of 1-pairs in P_3 (couples of congruences) and their immediate generalizations (for which $n=2m+1$ and B is diffeomorphic to the domain U in R^{m+1}) are summarised in [7]. A special stratifiable 2-parametric family of 1-pairs in P_5 is considered in [11].

The purpose of this paper is to prove several propositions on the 2-parametric stratifiable and doubly stratifiable families of 1-pairs in P_4 . For example:

1. The doubly stratifiable 2-parametric family of 1-pairs in P_4 cannot include an afocal (i. e. without developable 1-parametric subfamilies) congruence of 2-dimensional planes.

2. For a given completely focal congruence of 2-dimensional planes in P_4 (i. e. of tangent planes for 2-dimensional surface) exist rectilinear pseudo-congruences (which are necessarily completely focal, i. e. have two families of torsos), so that the arising 2-parametric families of 1-pairs are stratifiables or doubly stratifiable.

In the paper all analogous cases are examined and geometrically explained.

ИНДИКАТРИСЫ КРИВИЗНЫ И ОГИБАЮЩАЯ НОРМАЛЬНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ МНОГОМЕРНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА. II

Р. Муллари

Вычислительный центр

1. Настоящая статья является продолжением предыдущей статьи под тем же заглавием [1]. Хотя система определений и обозначений в основном остается прежней, нам все же оказалось целесообразным повторить некоторые определения и ввести некоторые изменения в систему обозначений. Для достижения целостности изложения заново доказываются результаты о существовании и свойствах огибающей W^1 семейства нормальных плоскостей к поверхности $V_m \subset R_n$, на которые существенно опираются дальнейшие результаты настоящей статьи.

В § 1 подвергается более детальному исследованию индикатриса l -ой кривизны l в заданной точке M поверхности V_m ; в частности, определяется ее порядок кривизны. Получены также результаты, характеризующие расположение плоскости R_l^l наименьшей размерности, содержащей индикатрису l . Доказывается, например, что при четном l плоскость R_l^l всегда совпадает с l -ой нормальной плоскостью R_{m_l} к V_m (теорема 1).

В § 2 рассматривается огибающая W^1 семейства нормальных к V_m плоскостей. Она представляет собой, вообще говоря, некоторое семейство плоскостей, которое может иметь огибающую W^2 и т. д. Получается последовательность семейств плоскостей W^1, W^2, \dots, W^k , каждое из которых является огибающей для предыдущей. Доказываются некоторые свойства огибающих этой последовательности.

2. Напомним основной аппарат исследования, некоторые определения и обозначения. Изложение опирается на формулы Бартельса—Френе [1] для поверхности $V_m \subset R_n$:

$$\begin{cases} dM = \omega^c e_c \\ de_a = \omega^c e_{ac} + \omega_a^c e_c \\ de_{a_0 \dots a_l} = \omega^c (A_{a_0 \dots a_l c} + B_{a_0 \dots a_l c} + e_{a_0 \dots a_l c}) + \sum_{i=0}^l \omega_{a_i}^c e_{a_0 \dots a_{i-1} c} \end{cases} \quad (1)$$

Здесь все индексы, кроме l , принимают значения $1, \dots, m$; \mathbf{M} — радиус-вектор произвольной точки M поверхности V_m , а симметричные по всем индексам векторы l -ой кривизны $\mathbf{e}_{a_0 \dots a_l}$ определяют l -ую нормальную к V_m в M плоскость R_{m_l} . В таких случаях будем пользоваться обозначением вида $R_m = \{M; \mathbf{e}_{a_0 \dots a_l}\}$. Для векторов $\mathbf{A}_{a_0 \dots a_l} \in R_{m_l}$ и $\mathbf{B}_{a_0 \dots a_l} \in R_{m_l}$ имеем $\mathbf{A}_{a_0 \dots a_l} \in R_{m_{l-1}}$ и $\mathbf{B}_{a_0 \dots a_l} \in R_{m_l}$. Минимальное значение l , для которого все векторы $\mathbf{e}_{a_0 \dots a_{l+1}} = 0$, назовем *порядком кривизны* поверхности V_m (если точка M не является на V_m особой в том смысле, что в каждой окрестности $U \subset V_m$ точки M существуют точки $M' \in V_m$, такие, что размерность хотя бы одной нормальной к V_m в M плоскости R_{m_l} отлична от размерности соответствующей плоскости в M').

Вектор $\mathbf{p}(\mathbf{x}^{l+1}) = x^{c_0} \dots x^{c_l} \mathbf{e}_{c_0 \dots c_l}$, где $\mathbf{x} = x^c \mathbf{e}_c$ и $|\mathbf{x}| = 1$, назовем *вектором l -ой кривизны* поверхности V_m в касательном направлении \mathbf{x} . При вращении \mathbf{x} в касательной к V_m в M плоскости R_m конец вектора $\mathbf{M} + \mathbf{p}(\mathbf{x}^{l+1})$ описывает *индикатрису l -ой кривизны I^l* поверхности V_m в M . Плоскость индикатрисы I^l обозначим через R_{I^l} . Очевидно, что $R_{I^l} \subset R_{m_l}$.

Ниже будем пользоваться еще следующими обозначениями:

$F_{,c} = \frac{\partial}{\partial x^c} F$ — производная по пфафовой форме ω^c от произвольной функции F ,

$R = R' + R''$ — плоскость, натянутая на пересекающиеся плоскости R' и R'' .

Во всей работе предполагается, что касательный к V_m в M свободный подвижной репер $\{M, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m\}$ является ортонормированным, т. е. представляет собой элемент главного расслоения касательных к V_m ортонормированных реперов.

§ 1. Плоскость индикатрисы кривизны I^l

1. Пусть в пространстве R_n задана поверхность V_m . К произвольной точке M поверхности V_m присоединяется индикатриса I^l l -ой кривизны поверхности V_m в M , представляющая собой некоторую конечную $(m-1)$ -мерную алгебраическую поверхность или ее вырожденную форму (см. [1]) в l -ой нормальной к V_m в M плоскости $R_{m_l} = \{M; \mathbf{e}_{a_0 \dots a_l}\}$. Займемся определением размерностей плоскостей различных порядков, нормальных к индикатрисе I^l в произвольной ее точке M^l и порядком кривизны индикатрисы I^l . Для простоты изложения предполо-

жим, что l -ая нормальная к V_m в M плоскость R_{m_l} имеет максимальную возможную размерность $m_l = \frac{1}{(l+1)!} m(m+1) \dots (m+l)$, т. е. что все векторы $e_{a_0 \dots a_l}$ линейно независимы.

В силу произвольности выбора касательного к V_m в M ортонормированного репера, мы всегда можем предполагать, что имеет место равенство

$$M^l = M + p(e_{i+1}^l) = M + e_{\overbrace{1 \dots 1}^{l+1}}$$

Выберем в M^l касательный к индикатрисе I^l репер $\{E_A\}$, где $E_A = e_{1 \dots 1 A}$ и $A = 2, \dots, m$, соответствующий кореперу $\left\{ \frac{1}{i+1} \omega_{11}^A \right\}$ (см. (1)). При помощи (1) можно определить дифференциалы (по mod ω_c) векторов E_A и, тем самым, вторую соприкасающуюся к I^l в M^l плоскость, и т. д. Однако, так как в выражениях этих дифференциалов будет фигурировать отличный от нуля вектор $e_{1 \dots 1}$, усложняющий определение искомых плоскостей, то проведем ранее в плоскости R_{m_l} линейное отображение L такое, что $L(e_{1 \dots 1}) = 0$ и $L(e_{a_0 \dots a_l}) = e_{a_0 \dots a_l}$ для всех остальных векторов l -ой кривизны, и займемся исследованием образа $L(I^l)$ индикатрисы I^l в точке $L(M^l)$.

Отображение L может быть истолковано как результат соответствующей деформации поверхности V_m в окрестности точки M . Нетрудно понять, что такая деформация всегда возможна.

В силу (1) очевидно, что вторая соприкасающаяся к $L(I^l)$ в $L(M^l)$ плоскость совпадает с плоскостью $\{L(M^l); E_A, e_{\overbrace{1 \dots 1 A_0 A_1}^{l-1}}\}$,

третья — с плоскостью $\{L(M^l); E_A, e_{1 \dots 1 A_0 A_1}, e_{\overbrace{1 \dots 1 A_0 A_1 A_2}^{l-2}}\}$ и т. д. Поэтому размерность $L(m_s^l)$ s -ой нормальной к $L(I^l)$ в $L(M^l)$ плоскости при $s \leq l$ равна числу различных векторов $e_{1 \dots 1 A_0 \dots A_s}$, где $A_i = 2, \dots, m$ и является поэтому максимально возможной, т. е.

$$L(m_s^l) = \frac{1}{(s+1)!} (m-1)m \dots (m+s-1).$$

Для $s > l$ получим $L(m_s^l) = 0$, ибо плоскость векторов $e_{A_0 \dots A_l}$, совпадающая с l -ой соприкасающейся к $L(I^l)$ в $L(M^l)$ плоскостью, является замкнутой относительно дифференцирований по mod ω^c при $e_{1 \dots 1} = 0$ (см. (1)).

Так как размерность $L(m_s^l)$ при $s \leq l$ максимальная и отображение L , очевидно, не может повысить размерность соприкасающейся плоскости к поверхности, то при $s \leq l$ для размерности m_s^l s -ой плоскости, нормальной к I^l в M^l , имеем

$$m_s^l = \frac{1}{(s+1)!} (m-1)m \dots (m+s-1).$$

Отсюда вытекает соотношение

$$m - 1 + \sum_{s=1}^l m_s^l = \frac{1}{(l+1)!} m(m+1) \dots (m+l) - 1 = m_l - 1,$$

так что размерность m_l l -ой нормальной к V_m плоскости R_{m_l} на единицу превышает размерность $(l+1)$ -ой соприкасающейся плоскости индикатрисы I^l в ее точке M^l . Поэтому плоскость R_{I^l} индикатрисы I^l или является (не проходящей через точку M) гиперплоскостью плоскости R_{m_l} , или совпадает с R_{m_l} . В первом случае имеет место $m_{l+1}^l = 0$ и порядок кривизны индикатрисы I^l равен l ; во втором случае — $m_{l+1}^l = 1$ и порядок кривизны индикатрисы I^l равен $l+1$.

В силу того, что каждая конфигурация $F^l = M' \cup I^l$ (пара, состоящая из точки M' произвольной m -мерной поверхности V'_m и соответствующей ей индикатрисы I^l) может быть получена из конфигурации F^l , соответствующей произвольно выбранному набору линейно независимых векторов $e_{a_0 \dots a_l}$, при помощи линейного отображения плоскости R_{m_l} (см. [1]), то свойство плоскости R_{I^l} или являться гиперплоскостью в R_{m_l} , не проходящей через M , или совпадать с R_{m_l} , распространяется на все случаи.

2. Допустим, что плоскость R_{I^l} индикатрисы I^l в точке M поверхности V_m является гиперплоскостью соответствующей l -ой нормальной плоскости R_{m_l} . Это условие, очевидно, равносильно тому, чтобы существовало линейное отображение L плоскости R_{m_l} , переводящее как плоскость R_{I^l} , так и индикатрису I^l в одну точку M^l , не совпадающую с M . Так как семейство всевозможных конфигураций $F^l = M \cup I^l$ относительно линейных отображений замкнуто (см. [1]), то существование индикатрисы I^l , плоскость R_{I^l} которой не проходит через соответствующую ей точку M , равносильно существованию «точечной» индикатрисы $I^l = M^l$, не совпадающей с M .

Выясним, какая система векторов кривизны $\{e_{a_0 \dots a_l}\}$ соответствует «точечной» индикатрисе $I^l = M^l \neq M$.

Нетрудно убедиться, что в данном случае все векторы $e_{a_0 \dots a_l}$ остаются при преобразовании (ортонормированного) касательного репера неизменными. Так, во-первых, векторы $e_{a_0 \dots a} = M^l - M$ постоянны в силу того, что $e_{a_0 \dots a} = p(e_a^{l+1})$, а вектор l -ой кривизны в произвольном касательном направлении при точечной индикатрисе I^l всегда постоянен. В силу (1), производными векторов $e_{a_0 \dots a}$ при преобразовании касательного к V_m в M репера являются векторы $(l+1) e_{a_0 \dots a_A}$, которые, сле-

довательно, равны нулю. Аналогично выясняется постоянство и остальных векторов l -ой кривизны.

Для удобства дальнейшего изложения введем обозначение

$$e_{a_0 \dots a_l} = \{a_1, \dots, a_m\},$$

где a_α — число индексов a в комбинации $a_0 \dots a_l$ ($\sum a_\alpha = l + 1$). Теперь с помощью (1) можем написать

$$\frac{\partial}{\omega_i^j} \{a_1, \dots, a_m\} = a_i \{a_1, \dots, a_i - 1, \dots, a_j + 1, \dots, a_m\} - \\ - a_j \{a_1, \dots, a_i + 1, \dots, a_j - 1, \dots, a_m\},$$

где предполагается, что $\{a_1, \dots, -1, \dots, a_m\} = 0$.

В данном случае векторы l -ой кривизны постоянны. Поэтому имеет место равенство

$$a_i \{a_1, \dots, a_i - 1, \dots, a_j + 1, \dots, a_m\} = \\ = a_j \{a_1, \dots, a_i + 1, \dots, a_j - 1, \dots, a_m\}$$

или, что то же самое ($a_i - 1 \rightarrow a_i$, $a_j + 1 \rightarrow a_j$),

$$\{a_1, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_m\} = \\ = \frac{a_j - 1}{a_i + 1} \{a_1, \dots, a_i + 2, \dots, a_j - 2, \dots, a_m\},$$

где предполагается, что $a_j \neq 0$.

В результате многократного использования последнего соотношения получим

$$\{a_1, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_m\} = \\ = \frac{(a_j - 1)!!}{(a_i + 1)(a_i + 3) \dots (a_i + a_j - 1)} \times \\ \times \{a_1, \dots, a_i + a_j, \dots, 0, \dots, a_m\},$$

если $a_j (\neq 0)$ четна, и $\{a_1, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_m\} = 0$, если a_j нечетна. Отсюда можем далее писать

$$\{a_1, \dots, a_m\} = \frac{(a_1 - 1)!! \dots (a_m - 1)!!}{l!!} \{l + 1, 0, \dots, 0\} = \\ = \frac{(a_1 - 1)!! \dots (a_m - 1)!!}{l!!} (M^l - M),$$

если все величины a_α четны и условимся, что $-1!! = 1$, и

$$\{a_1, \dots, a_m\} = 0,$$

если хотя бы одна из величин a_α нечетна. В частности, вектор $e_{a \dots a} = M^l - M$ отличен от нуля и, следовательно, «точечная» индикатриса $l^l = M^l$, не совпадающая с точкой M , а также случаи $R_{l^l} \neq R_{m_l}$ возможны тогда и только тогда, когда l — нечетна (так как при $e_{a \dots a}$ имеем $a_\alpha = l + 1$).

Очевидно, что при вышеописанном линейном отображении L в вектор $M^l - M$ преобразуются те и только те исходящие из точки M векторы, концы которых лежат в плоскости R_{l^l} . В то

же время в нулевые векторы преобразуются те и только те ненулевые векторы, которые параллельны плоскости $R_{I'}$.

В итоге может быть сформулирована

Теорема 1. Если величина l четна, то плоскость $R_{I'}$ индикатрисы I' l -ой кривизны поверхности V_m в точке M совпадает с соответствующей l -ой нормальной плоскостью R_{m_l} . Если же l нечетна, то плоскость $R_{I'}$ определяется конечными точками векторов

$$M + \frac{!!!}{(a_1 - 1)!! \dots (a_m - 1)!!} \{a_1, \dots, a_m\}, \quad (2)$$

где $\sum a_a = l + 1$ и все величины a_a четны, и всеми векторами l -ой кривизны, у которых хотя бы одна из величин a_a нечетна (плоскость $R_{I'}$ параллельна этим векторам).

Следствие 1. Если l четна, то в произвольной конфигурации $F^l = M \cup I'$ точка M инвариантно связана с индикатрисой I' . Если l нечетна, то расположение точки M относительно заданной индикатрисы I' является произвольным.

Условимся называть вектор l -ой кривизны «четным», если все величины a_a четны, и «нечетным», если хотя бы одна из величин a_a нечетна.

Следствие 2. Необходимым и достаточным условием того, чтобы при нечетной l имело место $R_{I'} = R_{m_l}$ является разложимость произвольного «четного» вектора l -ой кривизны по разностям векторов вида (2) и «нечетным» векторам l -ой кривизны. В частности, если плоскость R_{m_l} имеет максимальную возможную размерность $m_l = \frac{1}{(l+1)!} m \dots (m+l)$, то имеет место $R_{I'} \neq R_{m_l}$.

3. Пусть между векторами l -ой кривизны $e_{a_0 \dots a_l}$, где l нечетна, задана линейная зависимость

$$x^{c_0 \dots c_l} e_{c_0 \dots c_l} = 0. \quad (3)$$

Требуется выяснить, какому условию должны удовлетворять коэффициенты $x^{c_0 \dots c_l}$ этой зависимости, чтобы из нее следовало, что точка M поверхности V_m находится на плоскости $R_{I'}$ соответствующей индикатрисы I' , т. е. $M \in R_{I'}$ или, что равносильно, — $R_{I'} = R_{m_l}$. Для удобства изложения, назовем зависимость (3) эффективной, если из него можно выводить соотношение $M \in R_{I'}$, и неэффективной в противном случае. Для примера, в силу теоремы 1, зависимость $e_{1 \dots 1} = 0$ эффективна, а зависимость $e_{1 \dots 1 A} = 0$ — неэффективна.

Из следствия 2 теоремы 1 вытекает, что эффективность за-

зависимости (3) равносильна требованию, чтобы из этой зависимости следовала разложимость произвольного «четного» вектора $\{\alpha_1^0, \dots, \alpha_m^0\}$ l -ой кривизны по разностям векторов вида (2) и «нечетным» векторам l -ой кривизны. При этом очевидно, что во всех упомянутых разностях одним членом может быть вектор $\mathbf{M} + \frac{l!}{(\alpha_1^0 - 1)! \dots (\alpha_m^0 - 1)!} \{\alpha_1^0, \dots, \alpha_m^0\}$ и, кроме того, мы для простоты всегда можем выбрать $\alpha_1^0 = l + 1$, $\alpha_m^0 = 0$, т. е. $\{\alpha_1^0, \dots, \alpha_m^0\} = \mathbf{e}_{1\dots l}$.

Разделим левую сторону зависимости (3) на две части, в первую из которых соберем все «четные» члены, а во вторую — «нечетные». Тогда (3) можно записать в следующем виде:

$$\sum x_{\alpha_1 \dots \alpha_m} \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\} + \mathbf{X} = 0, \quad (4)$$

где суммирование происходит по всем четным значениям α_a . Для получения интересующего нас разложения, вместо (4) напишем

$$\begin{aligned} & \sum \frac{(\alpha_1 - 1)! \dots (\alpha_m - 1)!}{l!} x_{\alpha_1 \dots \alpha_m} \times \\ & \times \left[\frac{l!}{(\alpha_1 - 1)! \dots (\alpha_m - 1)!} \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\} - \mathbf{e}_{1\dots l} \right] + \mathbf{X} = \\ & = - \sum \frac{(\alpha_1 - 1)! \dots (\alpha_m - 1)!}{l!} x_{\alpha_1 \dots \alpha_m} \mathbf{e}_{1\dots l}. \end{aligned}$$

Отсюда непосредственно вытекает, что упомянутое разложение существует, т. е. зависимость (3) эффективна, тогда и только тогда, когда

$$\sum (\alpha_1 - 1)! \dots (\alpha_m - 1)! x_{\alpha_1 \dots \alpha_m} \neq 0. \quad (5)$$

Так как линейные комбинации неэффективных зависимостей неэффективны, как нетрудно понять при помощи (5), то может быть сформулирована

Теорема 2. Точка \mathbf{M} поверхности V_m находится вне плоскости R_l соответствующей индикатрисы I , где l нечетна, тогда и только тогда, когда все базисные линейные зависимости $x_i^{c_0 \dots c_l} \mathbf{e}_{c_0 \dots c_l} = 0$ между векторами l -ой кривизны в точке \mathbf{M} — неэффективны, т. е. когда при каждом i имеет место равенство

$$\sum (\alpha_1 - 1)! \dots (\alpha_m - 1)! x_{\alpha_1 \dots \alpha_m}^i = 0.$$

4. Для дальнейшего нам понадобится следующая

Лемма. Если в некоторой окрестности $U \subset V_m$ точки \mathbf{M} имеет место линейная зависимость (3), то на U также имеют место зависимости

$$x^{c_0 \dots c_l} e_{c_0 \dots c_l a_1 \dots a_s} = 0 \quad (6)$$

(для произвольного s и любой комбинации индексов $a_1 \dots a_s$).

Лемма может быть доказана при помощи кратного дифференцирования (3) с учетом (1). Зависимости (6) назовем индуцированными зависимостями (3).

Следует отметить, что при помощи индуцированных линейных зависимостей легко составляются ограничения на размерности высших нормальных к V_m плоскостей, если известны линейные зависимости между векторами кривизны меньшего порядка. В частности, можно доказать, что если l -ая нормальная к двумерной поверхности V_2 плоскость имеет размерность $p < l + 2$, то размерность всех более высоких нормальных плоскостей не превышает p .

5. Пусть в некоторой окрестности $U \subset V_m$ точки M имеют место соотношения (4) и (5). Выпишем для каждого значения a индуцированную зависимость

$$\sum x_{\alpha_1 \dots \alpha_m} \{\alpha_1, \dots, \alpha_m + 2, \dots, \alpha_m\} + X_a = 0, \quad (7)$$

которая получается из зависимости (4), если в ней кратность индекса a в каждом векторе l -ой кривизны $e_{a_0 \dots a_l}$ увеличить на два. При этом «четные» векторы остаются «четными» и «нечетные» — «нечетными». Поэтому обозначения в (7) имеют тот же смысл, что и в (4).

Введем для краткости обозначение $(\alpha_1 - 1)!! \dots (\alpha_m - 1)!! x_{\alpha_1 \dots \alpha_m} = y_{\alpha_1 \dots \alpha_m}$. Теперь условие неэффективности для (7) принимает вид

$$\sum (\alpha_a + 1) y_{\alpha_1 \dots \alpha_m} = 0. \quad (8)$$

Но в силу (5) имеет место неравенство

$$\sum_{a=1}^m \sum (\alpha_a + 1) y_{\alpha_1 \dots \alpha_m} = (l + m + 1) \sum y_{\alpha_1 \dots \alpha_m} \neq 0.$$

Поэтому существует такое значение $a = a_0$, что (8) не соблюдается и, следовательно, зависимость (7) эффективна. Отсюда получается.

Теорема 3. Если точка M поверхности V_m находится на плоскости R_l соответствующей индикатрисы I^l , где l нечетна, и это условие соблюдается также в некоторой окрестности $U \subset V_m$ точки M , то плоскости R_{l+s} всех индикатрис I^{l+s} проходят через точку M .

§ 2. Последовательность огибающих

1. Пусть в пространстве R_n задана поверхность V_m . Предполагаем для простоты, что V_m не помещается в некоторую плоскость пространства R_n . К каждой точке M поверхности

V_m присоединяется плоскость $R_{n-m} = \sum_l R_{m_l}$, ортогонально дополняющая касательную к V_m в M плоскость R_m до всего пространства R_n .

Семейство плоскостей R_{n-m} для всех $M \in V_m$ имеет, вообще говоря, огибающую, которую обозначим через W^1 или, с указанием размерности, через $W_{N_1}^1$. Под огибающей семейства плоскостей подразумевается здесь поверхность максимальной размерности, касательные плоскости к которой являются подплоскостями всех плоскостей данного семейства (за исключением, быть может, плоскостей некоторого подсемейства). Если огибающей W^1 не существует, то обозначим $W^1 = \emptyset$ (огибающая W^1 как точечное множество — пусто).

Очевидно, огибающую W^1 можно представить в виде объединения

$$W^1 = \bigcup_{M \in V_m} R^1,$$

где $R^1 = R_{n_1}^1 \subset R_{n-m}$, т. е. в виде семейства плоскостей. Если, в частности, $W^1 = \emptyset$, то и $R^1 = \emptyset$; если $W^1 \neq \emptyset$, но не содержит плоских образующих, то $n_1 = 0$, т. е. R^1 является точкой.

Огибающую семейства $W^1 = \bigcup_M R^1$ обозначим через $W^2 = W_{N_2}^2$. Она также представится в виде объединения $W^2 = \bigcup_M R^2$, где $R^2 = R_{n_2}^2 \subset R^1$. Вообще, пусть поверхность

$$W_{N_s}^s = \bigcup_M R_{n_s}^s,$$

где $R^s \subset R^{s-1}$, является огибающей для W^{s-1} . Если $W^s = \emptyset$ или $n_s = 0$ и W^s не вырождена в одну точку, то имеем $W^{s+1} = W^{s+2} = \dots = \emptyset$. Если под W^0 подразумевать «поверхность» $W^0 = \bigcup_M R_{n-m}$ ($N_0 = n$), то все поверхности W^s , где $s = 1, 2, \dots$, под-
лежат единому рекуррентному определению.

Определим в M последовательность точек M^0, M^1, M^2, \dots при помощи рекуррентных формул

$$|M^s - M^{s-1}| = \min_{M^{s-1} \in R^s} |M^{(s)} - M^{s-1}|,$$

где $M^0 = M$, $M^s \in R^s$ и $s = 1, 2, \dots$. Очевидно, точка M^s не существует (что условно обозначим через $M^s = \emptyset$) тогда и только тогда, когда $R^s = \emptyset$. Тогда и $M^{s+1} = M^{s+2} = \dots = \emptyset$.

Определим поверхность $V^s = V_{p_s}^s$ как объединение

$$V^s = \bigcup_M M^s.$$

Очевидно, что $V^s \subset W^s$ и $p_s \leq m$. В частности, $V^0 = V_m$. Равенство $V^s = W^s$ имеет место тогда и только тогда, когда $n_s = 0$. Равенство $V^s = \emptyset$ равносильно равенству $W^s = \emptyset$. Касательную к V^s в M^s плоскость обозначим через $R'^s = R'_{p_s}^s \subset R^{s-1}$.

Так как точки M^s однозначно связаны с точками $M \in V_m$, то

формулы Бартельса—Френе (1) для V_m «индуцируют» аналогичные формулы для V^s . Для простоты выпишем их для случая $\omega_a^b = 0$:

$$\begin{cases} M_{,c}^s = e_c^s \\ e_{a,c}^s = B_{ac}^s + e_{ac}^s \\ e_{a_0 \dots a_l, c}^s = A_{a_0 \dots a_l c}^s + B_{a_0 \dots a_l c}^s + e_{a_0 \dots a_l c}^s \end{cases}$$

Здесь векторы e_a^s , как правило, уже не являются ортонормированными и могут быть даже линейно зависимыми.

2. В силу определения, для каждой точки $M^{(1)} \in R^1$ имеет место $M_{,c}^{(1)} \parallel R_{n-m}$, т. е.

$$M_{,c}^{(1)} e_a = 0. \quad (9)$$

Представим вектор $M^{(1)}$ в виде $M^{(1)} = M + \sum_l x^{c_0 \dots c_l} e_{c_0 \dots c_l}$, тогда

$$(e_c + x^{c_0 c_1} A_{c_0 c_1, c}) e_a = 0. \quad (10)$$

Дифференцирование тождества $e_a e_{bc} = 0$ дает $e_a A_{bcd} + e_{ad} e_{bc} = 0$, откуда (10) принимает вид

$$x^{c_0 c_1} e_{c_0 c_1} e_{ab} - \delta_{ab} = 0 \quad (11)$$

или, что равносильно,

$$(M^{(1)} - M) e_{ab} - \delta_{ab} = 0. \quad (12)$$

Так как $R_{m_1} = \{M; e_{ab}\}$, то система (12), если она не противоречива, определяет в R_{m_1} ровно одну точку, которая, очевидно, равна M^1 т. е.

$$R^1 \cap R_{m_1} = M^1.$$

Система (11) не налагает никаких ограничений на коэффициенты $x^{c_0 \dots c_l}$ при $l > 1$, поэтому имеет место равенство

$$R^1 = \{M^1; e_{a_1 \dots a_l} \ (l \geq 1)\}.$$

В частности, $n_1 = n - m - m_1$ и $N_1 \leq \min(n - m, n - m_1)$.

Теорема 1 позволяет для (12) дать довольно наглядную интерпретацию:

$$(M^1 - M) \perp R_{I^1}, \quad |M^1 - M| = \frac{1}{\rho},$$

где $\rho = \min_{M \in R_{I^1}} |M_{I^1} - M|$ и R_{I^1} — плоскость индикатрисы первой

кривизны I^1 в M . В частности, $M^1 = \emptyset$ и, тем самым, $V^1 = W^1 = \emptyset$ тогда и только тогда, когда $M \in R_{I^1}$.

Пример 1. В случае гиперповерхности $V_{n-1} \subset R_n$ условие $M \in R_{I^1}$, т. е. $W^1 \neq \emptyset$, выполнено тогда и только тогда, когда индикатриса I^1 вырождена в точку, не совпадающую с M . Следовательно, M — омбилическая точка поверхности V_{n-1} , а V_{n-1} — сфера. Огибающая W^1 совпадает с центром сферы.

Пример 2. В случае $V_{n-2} \subset R_n$ условие $M \in R_{I^1}$, т. е. $W^1 \neq \emptyset$, выполнено тогда и только тогда, когда индикатриса I^1 вырождена в отрезок прямой, не проходящей через M . В случае $n=4$ это является характеристическим свойством двойственно нормализированной поверхности D_2 (см. [3]).

Дифференцирование (12) дает

$$e_c^1 e_{ab} + (M^1 - M) B_{abc} = 0 \quad (13)$$

или, в силу того же (12),

$$e_c^1 e_{ab} + \sum_d B_{abc}^{dd} = 0,$$

где $B_{abc}^{c_0 c_1} e_{c_0 c_1} = B_{abc}$. Этим определяются компоненты векторов e_c^1 в плоскости R_{m_1} . Компоненты этих же векторов в плоскости R_{m_2} равны $x^{c_0 c_1} e_{c_0 c_1}$, где $x^{c_0 c_1}$ определяются из (11). Больше компонентом векторы e_c^1 не имеют и, тем самым, $R^1 = \{M^1; e_a^1\} \subset R_{m_1} + R_{m_2}$.

Из (13) видно, что плоскости R^1 и R_{m_1} ортогональны тогда и только тогда, когда все дифференциалы векторов e_{ab} первой кривизны ортогональны к вектору $M^1 - M$. Для ортогональности же плоскостей R^1 и R_{m_2} необходимы определенные линейные зависимости между векторами e_{abc} второй кривизны.

Дифференцирование равенства $e_a e_b^1 = 0$ дает

$$e_{1a} e_b^1 - e_a e_{1b}^1 = 0,$$

откуда следует симметричность произведения $e_a e_b^1$ по всем индексам. Если плоскость R^1 ортогональна к плоскости R_{I^1} индикатрисы I^1 , то имеют место равенства $e_a^1 (e_{aa} - e_{bb}) = 0$ и $e_b^1 e_{ab} = 0$ ($a \neq b$). Отсюда, с учетом симметричности, можем записать

$$e_a^1 e_{aa} = e_b^1 e_{bb} = e_b^1 e_{ab} = 0.$$

Поэтому ортогональны и плоскости R^1 и R_{m_1} , т. е. если касательная к поверхности V^1 в M^1 плоскость R^1 ортогональна к плоскости R_{I^1} индикатрисы I^1 поверхности V_m в M , то она ортогональна и к первой нормальной к V_m в M плоскости R_{m_1} . Выражения $R^1 \perp R_{I^1}$ и $R^1 \perp R_{m_1}$ равносильны.

3. Что касается поверхности V^s и W^s для общего значения s , то для них некоторые результаты предыдущего пункта (доказанные для значения $s=1$) обобщаются с помощью математической индукции (переходом от s к $s+1$).

Теорема 4. *Имеет место равенство*

$$R^s = \{M^s; e_{a_0 \dots a_l} (l > s)\}.$$

Если $M^s = \emptyset$, то и $R^s = \emptyset$.

В силу того, что $R^{s+1} \subset R^s$, произвольную точку $M^{(s+1)} \in R^{s+1}$ можно представить вектором вида $M^{(s+1)} = M^s + \sum_{l>s} x^{c_0 \dots c_l} e_{c_0 \dots c_l}$.

По определению имеем $M, c^{(s+1)} \in R^s$, откуда $M, c^{(s+1)} e_{a_0 \dots a_s}$ т. е.

$$(e_c^s + x^{c_0 \dots c_{s+1}} A_{c_0 \dots c_{s+1} c}) e_{a_0 \dots a_s} = 0.$$

Дифференцирование тождества $e_{c_0 \dots c_{s+1}} e_{a_c \dots a_s} = 0$ дает $A_{c_0 \dots c_{s+1} c} e_{a_0 \dots a_s} + e_{c_0 \dots c_{s+1}} e_{a_c \dots a_s c} = 0$. Поэтому имеем

$$x^{c_0 \dots c_{s+1}} e_{c_0 \dots c_{s+1}} e_{a_0 \dots a_s c} - e_c^s e_{a_0 \dots a_s} = 0, \quad (14)$$

что равносильно соотношению

$$(M^{(s+1)} - M^s) e_{a_0 \dots a_s c} - e_c^s e_{a_0 \dots a_s} = 0. \quad (15)$$

Так как векторы $e_{a_0 \dots a_{s+1}}$ образуют в $R_{m_{s+1}}$ базис, то система (15), если она не противоречива, определяет в $R_{m_{s+1}}$ ровно одну точку, соответствующую радиус-вектору $M + M^{s+1} - M^s$. С другой стороны, система (14) не налагает никаких ограничений на коэффициенты $x^{c_0 \dots c_l}$ при $l > s + 1$. Поэтому можно писать

$$R^{s+1} = \{M^{s+1}; e_{a_0 \dots a_l} (l > s + 1)\}.$$

Из теоремы 4 непосредственно получим, что если $M^s \neq \emptyset$, то

$$n_s = \sum_{l \geq s} m_l = n - m - \sum_{l=1}^s m_l \quad \text{и} \quad N_s \leq \min (n - \sum_{l=1}^s m_l, \sum_{l \geq s} m_l).$$

При помощи (15) установим, что поверхность W^{s+1} , а тем самым и поверхность V^{s+1} и точка M^{s+1} существуют тогда и только тогда, когда существует точка M^s и когда все имеющиеся линейные зависимости между векторами $e_{a_0 \dots a_{s+1}}$, как математические тождества, не нарушаются, если в них векторы $e_{a_0 \dots a_{s+1}}$ заменить скалярными произведениями $e_{a_0 \dots a_s} e^s_{a_{s+1}}$.

В частности, эти тождества не нарушаются, когда все линейные зависимости между векторами $e_{a_0 \dots a_{s+1}}$ индуцированы линейными зависимостями между векторами $e_{a_0 \dots a_s}$. Поэтому для того, чтобы поверхность W^s оказалась последней в последовательности W^1, W^2, \dots необходимо определенное уменьшение размерности m_{s+1} плоскости $R_{m_{s+1}}$ (более сильное, чем уменьшение, сопровождаемое индуцированными линейными зависимостями между векторами $e_{a_0 \dots a_{s+1}}$). В частности, в случае кривой V_1 (т. е. $m = 1$) это требование приводит к тому, что кривая V_1 вообще лежит в своей $(s + 1)$ -ой соприкасающейся плоскости (порядок кривизны равен s).

Следует также отметить, что условие существования точки M^{s+1} остается в силе и в случае $s = 0$ ($V^0 = V_m$, $M^0 = M$, $e_a = e_a^0$).

4. Допустим, что $M^s \neq \emptyset$. По определению, для плоскости $R'^s = \{M^s; e_a^s\}$ имеем $R'^s \subset R^{s-1}$, что вместе с теоремой 4 дает $R'^s \parallel R_{m_s} + R_{m_{s+1}}$.

Компоненты векторов e_a^s в плоскости $R_{m_{s+1}}$ равны $x^{c_0 \dots c_s} e_{c_0 \dots c_s a}$, где величины $x^{c_0 \dots c_s}$ определяются из системы, аналогичной (14). Для ортогональности же плоскостей R'^s и $R_{m_{s+1}}$ необходимо и достаточно выполнения соотношений

$$x^{c_0 \dots c_s} e_{c_0 \dots c_s a} = 0.$$

Если эти соотношения не являются индуцированными, то требование $R'^s \perp R_{m_{s+1}} (= R'^s \parallel R_{m_s})$ налагает дополнительные ограничения на размерность плоскости $R_{m_{s+1}}$. В противном случае имеем $M^s = M^{s-1}$ и, следовательно, $V^s = V^{s-1}$ (и также $R'^{s-1} = R'^s$, $R'^{s-1} \perp R_{m_{s-1}}$). В частности, так как $(R_m =) R'^0 \perp R_{m_1}$, то условно можем записать $(V_m =) V^0 = V^{-1}$.

Пусть плоскости R'^s и R_{m_s} ортогональны. Тогда, в силу (15), имеет место $M^{s+1} = M^s$ и, следовательно, $V^{s+1} = V^s$. Если, кроме того, еще $V^{s+2} = V^{s+1}$, то $R'^s = R'^{s+1} \perp R_{m_{s+1}}$, откуда $p_s = 0$ и, следовательно, $V^s = M^s$. Так как точка M^s принадлежит теперь всем плоскостям R_{n-m} , то поверхность V_m находится на гиперсфере пространства R_n с центром в M^s .

Допустим, что поверхность V_m находится на гиперсфере пространства R_n с центром в $M^* \in \cap R_{n-m}$. Так как $M^*, c = 0$, то $M^*, c \parallel R_{n-m}$ и, следовательно, $M^* \in R^1$. В общем получается, что $M^* \in R^s (M^* \in \cap R^s)$. В силу того, что $M^* \neq \emptyset$, имеем также $R^s \neq \emptyset$ (т. е. $W^s \neq \emptyset$). Пусть k — порядок кривизны поверхности V_m . Тогда $n_k = 0$ и, поэтому, $M^* = R^k = M^k (= V^k = W^k)$. Пусть s_0 — такое минимальное значение s , что $M^* = M^{s_0}$. Для каждого значения $s \geq s_0$, очевидно, имеет место $M^s = M^{s_0}$, $V^s = M^{s_0}$. Так как здесь $R'^{s_0} \perp R_{m_{s_0+1}}$ и $V^{s_0} \neq V^{s_0-1}$, то, как видим, налагаются определенные (неиндуцированные) линейные зависимости на векторы $(s_0 + 1)$ -ой кривизны и, тем самым, ограничения на размерность плоскости $R_{m_{s_0+1}}$.

На основе полученных результатов может быть, в частности, доказана следующая

Теорема 5. Пусть l -ая нормальная к поверхности V_m в M плоскость R_{m_l} имеет максимальную возможную размерность,

т. е. $m_l = \frac{1}{(l+1)!} m(m+1) \dots (m+l)$. Тогда существует огибающая W^l и среди поверхностей V^s , где $s \leq l$, имеется не менее $l/2$ различных. Если при этом поверхность V_m находится на гиперсфере пространства R_n , то центр M^* гиперсферы находится вне плоскости $\sum_{s < l} R_{m_s}$. Если $M^* \in \sum_{s < l} R_{m_s}$, то плоскость $R_{m_{l+1}}$

не имеет максимальную возможную размерность.

При доказательстве теоремы следует обратить внимание на то, что если плоскость R_{m_l} имеет размерность $m_l = \frac{1}{(l+1)!} m(m+1) \dots (m+l)$, тогда и для каждой $s < l$ имеет место равенство $m_s = \frac{1}{(s+1)!} m(m+1) \dots (m+s)$, что означает, что все векторы $e_{a_0 \dots a_s}$ линейно независимы.

5. Сделаем еще некоторые довольно очевидные замечания.

а) Если $V^s = V^{s+1}$ и $V^{s+2} = V^{s+3}$, то поверхности V^s и V^{s+2} — эквидистантные (так как плоскости R'^s и R'^{s+2} обе ортогональны вектору $M^{s+2} - M^s$). Если $V^1 = V^2 \neq \emptyset$, то поверхности V_m и V^1 — эквидистантные.

б) Если поверхность V_m является орбитой некоторой группы движений в R_n , и $V^s \neq \emptyset$, то все поверхности V^s являются орбитами той же группы. При этом все поверхности V_m и V^s — попарно эквидистантные. Если, в частности, поверхность V_m является максимально симметричной ([2]) и $V^s \neq \emptyset$, то V^s является или точкой, или максимально симметричной поверхностью той же размерности m .

в) Ортонормированный касательный к V_m в M репер можно при каждом заданном значении s , где $M^s \neq \emptyset$, выбрать так, чтобы все векторы e_a^s — взаимно ортогональны.

Для доказательства в) заметим, что каждому касательному к V_m в M вектору $x = x^c e_c$ ($|x| = 1$) соответствует вектор $x^s = x^c e_c^s \parallel R'^s$. При вращении вектора $x \parallel R_m$ конец соответствующего вектора x^s , отложенного от точки M^s , описывает некоторое точечное многообразие K^s , которое является или $(m-1)$ -мерным эллипсоидом с центром в M^s , или его конечной вырожденной формой. Главные радиусы-векторы x_a^s многообразия K^s , очевидно, приобретают среди всех радиусов-векторов x^s стационарный квадрат и поэтому определяются из системы

$$x^c (e_c^s e_d^s - k e_c e_d) = 0, \quad |x| = 1.$$

Из главных радиусов-векторов $(m-1)$ -мерного эллипсоида или его конечной вырожденной формы всегда могут быть выбраны m ортогональных векторов $x_a^s = x_a^c e_c^s$. Ортогональны и соответствующие векторы $x_a = x_a^c e_c$.

Нетрудно установить, что корни k_a уравнения

$$|e_c^s e_d^s - k e_c e_d| = 0$$

равны квадратам главных радиусов-векторов многообразия K^s . Если же все корни k_a различны, то соответствующие друг другу ортогональные реперы в плоскостях R_m и R'^s однозначно определены. Это условие является и необходимым. Число отличных от нуля корней k_a равно размерности p_s плоскости R'^s .

Литература

1. Муллари Р., Индикатрисы кривизны и огибающие нормальных плоскостей многомерной поверхности евклидова пространства. I. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1966, **192**, 47—64.
2. Муллари Р., О максимально симметричных поверхностях многомерного евклидова пространства. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1962, **129**, 62—73.
3. Ча км а з я н А. В., Эволютные поверхности двумерной двойственно нормализованной D_2 в R_4 . Докл. АН СССР, 1962, **144**, 1233—1236.

Поступило
14 VI 1966

EUKLEIDILISE RUUMI MITMEMOÖTMELISE PINNA KÖVERUS- INDIKATRISSID JA NORMAALTASANDITE MÄHISPIND. II

R. Mullari

Resümee

Töös tuletatakse tarvilikud ja piisavad tingimused, mis võimaldavad vastavate pinna V_m kõverusvektorite vahel esinevate lineaarsete sõltuvuste põhjal otsustada, kas pinna V_m punktiga M seotud l -nda kõveruse indikatriissi I^l tasand R_l^l ühtub vastava l -nda normaaltasandiga R_{m_l} või osutub selles hüper-tasandiks, mis ei läbi punkti M .

Teiseks uuritakse pinna V_m normaaltasandite R_{n-m} parve mähispinda W^1 . Viimane osutub üldjuhul tasandite parveks, millel omakorda on tasandite parvest mähispind W^2 . Niimoodi jätkates saame mähispindade jada W^1, W^2, \dots . Selgitatakse mõningaid selle jada omadusi.

THE CURVATURE INDICATRIXES AND THE ENVELOPE OF NORMAL SPACES OF A V_m IN EUCLIDEAN R_n . II

R. Mullari

Summary

In the paper necessary and sufficient conditions have been derived that enable us, by means of the linear dependences between the corresponding curvature vectors of the surface V_m , to decide whether the plane R_l^l of the l -th curvature indicatrix I^l bound to the point M of the surface V_m coincides with the corresponding l -th normal space R_{m_l} or proves to be a hyperplane in it not passing the point M .

Secondly the envelope W^1 of the family of normal spaces R_{n-m} of the surface V_m is examined. In the general case the latter turns out to be a family of planes that has in its turn an envelope W^2 consisting of a family of planes. Following up the same process we get a sequence of envelopes W^1, W^2, \dots . Some properties of this sequence are explained.

ВТОРАЯ СРЕДНЯЯ ОГИБАЮЩАЯ ИЗОТРОПНОЙ КОНГРУЭНЦИИ В R_4

Л. Туулметс

Кафедра алгебры и геометрии

Известная теорема Рибокура утверждает, что средняя огибающая изотропной конгруэнции [1] в евклидовом пространстве 0R_3 является минимальной поверхностью ([5] стр. 65). В статье [3] доказан аналог теоремы Рибокура: *средняя огибающая изотропной конгруэнции V_3 (т. е. минимальной неконической гиперповерхности ранга 2) в собственно-евклидовом пространстве 0R_4 является также изотропной конгруэнцией $'V_3$ в 0R_4 , причем образующие конгруэнции V_3 параллельны нормальям конгруэнции $'V_3$ и наоборот.*

Эту теорему можно без изменений перевести и в псевдоевклидово пространство 1R_4 индекса 1, (т. е. в пространство Лоренца—Минковского), если ограничиться изотропными конгруэнциями, образующие которых находятся внутри изотропных конусов в их точках. Следует отметить, что под конгруэнцией здесь понимается двухпараметрическое семейство прямолинейных образующих неконической гиперповерхности V_3 ранга 2 в 0R_4 . Здесь изотропность равносильна тому, что гиперповерхность V_3 минимальна (т. е. ее средняя кривизна равна нулю) [3].

Для $'V_3$, в свою очередь, можно найти среднюю огибающую $''V_3$. Поверхность $''V_3$ будем называть *второй средней огибающей* изотропной конгруэнции V_3 . Возникает вопрос: существуют ли изотропные конгруэнции V_3 , которые или конгруэнтны, или совпадают со своими вторыми средними огибающими $''V_3$.

В настоящей статье, являющейся непосредственным продолжением статей [3, 4], доказываются две теоремы, которые дают положительный ответ на этот вопрос.

§ 1. Конгруэнтность поверхностей V_3 и $''V_3$

Пусть в пространстве R_4 задана изотропная конгруэнция V_3 . К каждой ее точке M присоединяем подвижный ортонормированный канонический репер так, чтобы единичный (или мнимо-

единичный) вектор e_0 был направлен вдоль образующей, единичный вектор e_3 — вдоль нормали к гиперповерхности V_3 ранга 2 в точке M_0 , единичные векторы e_i ($i = 1, 2$) имели асимптотические направления, а начальная точка M_0 была расположена в центре образующей. В полученном таким образом каноническом репере изотропная конгруэнция определяется следующей системой пфаффовых уравнений [3]:

$$\begin{aligned} \omega^3 &= \omega_0^3 = 0, \\ \omega_0^1 &= t\omega^2, & \omega_1^3 &= c\omega^2, \\ \omega_0^2 &= -t\omega^1, & \omega_2^3 &= c\omega^1. \end{aligned} \quad (1.1)$$

При продолжении системы (1.1) найдем

$$\begin{aligned} \omega^0 &= \frac{\mu}{t} \omega^1 + \frac{\nu}{t} \omega^2, \\ \omega_1^2 &= \sigma\omega^1 + \tau\omega^2, \\ d \ln t &= -\nu\omega^1 + \mu\omega^2, \\ d \ln c &= -(2\tau + \nu)\omega^1 + (2\sigma + \mu)\omega^2, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где предполагается, что $t \neq 0$. Продолжение системы (1.2) дает

$$\begin{aligned} d\sigma &= P\omega^1 + Q\omega^2, \\ d\tau &= \{Q + \varepsilon(t^2 - c^2) - \sigma^2 - \tau^2 - \sigma\mu - \tau\nu\}\omega^1 - \\ &\quad - (P + \nu\sigma - \mu\tau)\omega^2, \\ d\mu &= R\omega^1 + T\omega^2, \\ d\nu &= \{T + 2\varepsilon t^2 - 2(\mu^2 + \nu^2) - \mu\sigma - \nu\tau\}\omega^1 - \\ &\quad - \{R - \nu\sigma + \mu\tau\}\omega^2. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Далее, продолжая систему (1.3), находим

$$\begin{aligned} dP &= y_1\omega^1 + y_2\omega^2, \\ dQ &= (y_2 + Q_1)\omega^1 + (-y_1 + Q_2)\omega^2, \\ dR &= z_1\omega^1 + z_2\omega^2, \\ dT &= (z_2 + T_1)\omega^1 + (-z_1 + T_2)\omega^2, \end{aligned} \quad (1.4)$$

Инварианты t и c назовем инвариантами первой группы, инварианты μ, ν, σ, τ — инвариантами второй группы; P, Q, R, T — инвариантами третьей группы, y_i, z_i — инвариантами четвертой группы и т. д. Величины Q_i, T_i выражаются через инварианты первых трех групп. Допустим, что гиперплоскость, проведенная перпендикулярно к образующей в ее центре M_0 , касается средней огибающей V_3 вдоль прямолинейной образующей, произвольная точка которой определяется радиусом-вектором

$$'M_0 = M_0 + x^\varrho e_\varrho \quad (\varrho = 1, 2, 3). \quad (1.5)$$

Тогда

$$\omega^0 = \varepsilon t(x^2\omega^1 - x^1\omega^2), \quad \varepsilon = \pm 1, \quad (1.6)$$

$$\Delta x^1 = \alpha\omega^1 + \beta\omega^2 \quad \text{и} \quad \Delta x^2 = \beta\omega^1 - \alpha\omega^2, \quad (1.7)$$

где

$$\Delta x^1 = dx^1 + \omega^1 - x^2\omega_1^2 \quad \text{и} \quad \Delta x^2 = dx^2 + \omega^2 + x^1\omega_1^2. \quad (1.8)$$

Точка $'M_0$ совпадает с центром образующей изотропной конгруэнции V_3 тогда и только тогда, когда

$$x^3 = \frac{\beta}{c}, \quad (1.9)$$

где мы предполагаем, что $c \neq 0$, т. е. изотропная конгруэнция не вырождается гиперплоскостью. Обозначим векторы репера, формы инфинитезимального перемещения и инварианты, относящиеся к средней огибающей $'V_3$ через $'e_I$ ($I, K, \dots = 0, 1, 2, 3$), $'\omega^I$, $'\omega_{K^I}$, $'t$, $'c$, $'a$, $'\beta$ и т. д. Тогда

$$\begin{aligned} 'e_0 &= e_3, & 'e_i &= e_i, & 'e_3 &= e_0, \\ '\omega^1 &= a\omega^1, & '\omega^2 &= -a\omega^2, \\ 't &= -\frac{\varepsilon}{a}c, & 'c &= -\frac{\varepsilon}{a}t. \end{aligned} \quad (1.10)$$

На основании (1.2) и (1.6) имеем

$$x^1 = -\frac{\varepsilon\nu}{t^2}, \quad x^2 = \frac{\varepsilon\mu}{t^2}. \quad (1.11)$$

Дифференцируя последнее соотношение и используя (1.2—3) и (1.6—8), получим

$$\begin{aligned} a &= \frac{\varepsilon}{t^2} \{-T - \varepsilon t^2 + 2\mu^2 + \nu\tau\}, \\ \beta &= \frac{\varepsilon}{t^2} \{R - \nu\sigma + 2\mu\nu\}. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Инвариантные формы (см. [2]) изотропной конгруэнции V_3 и ее средней огибающей связаны следующими соотношениями

$$\begin{aligned} 'd\varphi^2 &= \frac{c^2}{t^2} d\varphi^2, & '\chi^{(2)} &= \chi^{(2)}, \\ '\Psi^{(2)} &= \varepsilon a \frac{c}{t} \Psi^{(2)}, & '\Theta^{(1)} &= \Theta^{(1)}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Теорема 1. *Изотропная конгруэнция V_3 и ее вторая средняя огибающая $''V_3$ конгруэнтны тогда и только тогда, когда имеет место равенство*

$$'aa = 1.$$

Доказательство. Обозначим векторы, формы и инварианты гиперповерхности $''V_3$ (средней огибающей гиперповерхности $'V_3$) по аналогии с $'V_3$, через $''e_I$, $''\omega^I$, $''\omega_{K^I}$, $''t$, $''c$ и т. д. Тогда, в силу (1.10),

$$\begin{aligned} ''e_0 &= e_0, & ''e_i &= e_i, & ''e_3 &= 'e_3, \\ ''\omega^1 &= 'aa\omega^1, & ''\omega^2 &= 'aa\omega^2, \\ ''t &= \frac{1}{'aa}t, & ''c &= \frac{1}{'aa}c. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Как следствие из (1.13—14) имеют место следующие соотношения между инвариантными формами гиперповерхностей V_3 и $''V_3$

$$\begin{aligned} ''d\varphi^2 &= d\varphi^2, & ''\chi^{(2)} &= \chi^{(2)}, \\ ''\Psi^{(2)} &= 'aa\Psi^{(2)}, & ''\Theta^{(1)} &= \Theta^{(1)}. \end{aligned}$$

Поскольку инвариантные формы $d\varphi^2$, $\psi^{(2)}$, $\chi^{(2)}$, $\Theta^{(4)}$ определяют изотропную конгруэнцию V_3 в R_4 с точностью до движения [2], изотропная конгруэнция V_3 и ее вторая средняя огибающая конгруэнтны тогда и только тогда, когда $'\alpha\alpha = 1$. Теорема доказана.

Отметим, что инвариант $'\alpha$ средней огибающей $'V_3$ можно выразить через инварианты исходной конгруэнции. Поэтому условие теоремы 1 накладывает некоторые ограничения на инварианты, связанные с исходной изотропной конгруэнцией. Найдем соответствующие соотношения непосредственным вычислением величин, относящихся к средней огибающей $''V_3$. Гиперплоскость, проведенная перпендикулярно к образующей в ее центре $'M_0$, касается средней огибающей $''V_3$ вдоль прямолинейной образующей, произвольная точка которой определяется радиусом-вектором

$$''M_0 = 'M_0 + 'x^p e_p \quad (p = 1, 2, 3).$$

В силу (1.2) и (1.4) получим

$$''M_0 = M_0 + (x^i + 'x^i) e_i + 'x^3 e_0 + x^3 e_3. \quad (1.15)$$

Дифференцируя последнее соотношение и учитывая (1.1), получаем

$$''dM_0 = A^J e_J,$$

где, в частности,

$$A^3 = dx^3 + c(x^1 + 'x^1)\omega^1 + c(x^2 + 'x^2)\omega^2. \quad (1.16)$$

С другой стороны, из условия касания следует, что

$$(d''M_0' e_0) = 0,$$

или же, в силу (1.10),

$$(d''M_0 e_3) = 0. \quad (1.17)$$

Следовательно, из (1.16) и (1.17) вытекает условие

$$dx^3 + c(x^1 + 'x^1)\omega^1 + c(x^2 + 'x^2)\omega^2 = 0. \quad (1.18)$$

Из соотношения (1.9) найдем

$$dx^3 = \frac{1}{c} d\beta - \frac{\beta}{c^2} dc.$$

Обозначим $d\beta = \beta_i \omega^i$ ($i = 1, 2$). Величины β_i можно найти из уравнений (1.12). Теперь, в силу линейной независимости форм ω^i и соотношений (1.18), (1.11), имеем

$$\begin{aligned} 'x^1 &= \frac{\varepsilon\nu}{l^2} - \frac{\beta}{c^2} (2\tau + \nu) - \frac{1}{c^2} \beta_1, \\ 'x^2 &= -\frac{\varepsilon\mu}{l^2} + \frac{\beta}{c^2} (2\sigma + \mu) - \frac{1}{c^2} \beta_2. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Обозначим еще $d'x^i = 'x_j^i \omega^j$. Здесь $'x_j^i$ можно определить из соотношений (1.19). Отметим, что β_i в силу (1.12) выражаются через инварианты первых четырех групп, упомянутых выше, а величины $'x^i$ выражаются через инварианты первых пяти групп.

По аналогии с соотношениями (1.7—8), имеем

$$' \Delta x^1 = ('x_1^1 + a - 'x^2\sigma)\omega^1 + ('x_2^1 - 'x^2\tau)\omega^2 = 'aa\omega^1 - '\beta a\omega^2,$$

$$' \Delta x^2 = ('x_1^2 + \sigma'x^1)\omega^1 + ('x_2^2 - a + 'x^1\tau)\omega^2 = '\beta a\omega^1 + 'aa\omega^2.$$

Так как гиперповерхность $'V_3$ является изотропной конгруэнцией [3], должны выполняться следующие равенства

$$'x_2^2 = 'x_1^1 + 2a - 'x^2\sigma - 'x^1\tau,$$

$$'x_2^1 = -'x_1^2 - 'x^1\sigma + 'x^2\tau.$$

Наконец, находим искомые величины

$$'a = \frac{1}{a} ('x_1^1 + a - 'x^2\sigma), \quad (1.20)$$

$$'b = \frac{1}{a} (x_1^2 + 'x^1\sigma).$$

Следовательно, инварианты $'a$ и $'b$ определяются инвариантами первых пяти групп инвариантов исходной гиперповерхности V_3 .

§ 2. Совпадение поверхностей V_3 и $''V_3$

Обозначим изотропную конгруэнцию V_3 в R_4 , совпадающую со своей второй средней огибающей $''V_3$, через V_3^0 . Предполагая, что изотропная конгруэнция V_3^0 существует, докажем следующую теорему.

Теорема 2. *Изотропная конгруэнция V_3 в пространстве R_4 является конгруэнцией V_3^0 тогда и только тогда, когда центр образующей средней огибающей M_0 находится в ортогональной плоскости $\{M_0, e_1, e_2\}$ поверхности V_3 . Для этого, в свою очередь, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\beta = 0. \quad (2.1)$$

Доказательство. Второе утверждение теоремы следует непосредственно из формул (1.5) и (1.10). Переходим к доказательству первого утверждения.

Необходимость. Допустим, что конгруэнции V_3 и $''V_3$ совпадают. Тогда, в силу (1.5) и (1.15)

$$M_0''M_0 = 'x^3e_0 + (x^1 + 'x^1)e_1 + (x^2 + 'x^2)e_2 + x^3e_3 = 0. \quad (2.2)$$

Отсюда, в силу линейной независимости векторов e_i , получаем $x^1 + 'x^1 = 0$, $x^2 + 'x^2 = 0$, $'x^3 = 0$, и, в частности, $x^3 = 0$. Из (1.9) следует, что $\beta = 0$.

Достаточность. Допустим, что имеет место соотношение (2.1). Тогда из (1.9) следует, что

$$x^3 = 0. \quad (2.3)$$

В силу (1.14) теорема будет доказана, если будет установлено соотношение (2.2). Из соотношения (1.18), в силу (2.3) и линейной независимости формы ω^i , получаем

$$'x^1 = -x^1, \quad 'x^2 = -x^2. \quad (2.4)$$

По аналогии с соотношениями (1.7—8) можно писать

$$\Delta'x^1 = -\Delta x^1 + (1 + \alpha)\omega^1 = \alpha' a \omega^1 - \alpha' \beta \omega^2,$$

$$\Delta'x^2 = -\Delta x^2 + (1 - \alpha)\omega^2 = \alpha' \beta \omega^1 + \alpha' a \omega^2,$$

откуда на основании (1.7—8) и (2.1) получаем

$$-\alpha\omega^1 + (\alpha + 1)\omega^1 = \alpha' a \omega^1 - \alpha' \beta \omega^2,$$

$$\alpha\omega^2 + (1 - \alpha)\omega^2 = \alpha' \beta \omega^1 + \alpha' a \omega^2.$$

В силу линейной независимости форм ω^i из последних соотношений следует, что

$$\alpha' a = 1, \quad (2.5)$$

$$\alpha' \beta = 0. \quad (2.6)$$

По аналогии с соотношением (1.9) точка M_0 находится в центре образующей V_3^0 тогда и только тогда, когда

$$c' x^3 = \frac{\beta}{c}, \quad c' \neq 0,$$

и, в силу (2.16),

$$c' x^3 = 0. \quad (2.7)$$

Таким образом, в силу (2.6) и теоремы 1, поверхности V_3^0 и V_3^0 конгруэнтны, а в силу (2.3—4), (2.7), (2.12), эти же поверхности не только конгруэнтны, но и совпадают. Теорема доказана.

§ 3. Существование изотропной конгруэнции V_3^0

Изотропная конгруэнция V_3^0 определяется системой пфаффовых уравнений (1.1) при конечном условии (2.1). Из соотношений (1.12), в силу (2.1), имеем

$$R = \nu\sigma + 2\mu\nu. \quad (3.1)$$

Путем внешнего дифференцирования системы (1.3) с учетом соотношения (3.1), находим

$$\begin{aligned} [dT - T_1\omega^1, \omega^2] &= 0, \\ [dT - T_2\omega^2, \omega^1] &= 0, \\ [\Delta P\omega^1] + [dQ\omega^2] &= 0, \\ [dQ\omega^1] - [\Delta P\omega^2] &= 0, \end{aligned} \quad (3.5)$$

где $\Delta P = dP - P_1\omega^1 - P_2\omega^2$ и P_1, P_2, T_1, T_2 — известные величины. Отсюда, в силу леммы Картана, получаем

$$\begin{aligned} dT &= T_1\omega^1 + T_2\omega^2, \\ \Delta P &= y_1\omega^1 + y_2\omega^2, \\ dQ &= y_2\omega^2 - y_1\omega^2, \end{aligned} \quad (3.6)$$

где x, y новые неизвестные величины. Из системы (3.5—6) видно, что $s_1 = 2, s_2 = 0, Q = 2, N = Q$ (см. [4], стр. 252). Следовательно, системы (3.2) и (3.4) находятся в инволюции, изотропная конгруэнция V_3^0 существует и определяется с произволом двух функций одного аргумента.

Как общий вывод из результатов, полученных в этой статье, можно утверждать, что в евклидовом пространстве R_4 существует изотропная конгруэнция V_3^0 , совпадающая со своей второй средней огибающей ${}''V_3^0$.

Литература

1. Dubnow, J., Differentialgeometrie der Strahlenkongruenzen in tensorieller Darstellung. Тр. семинара по вект. и тенз. анализу, 1933, 1, 223—300.
2. Лумисте Ю. Г., Дифференциальная геометрия линейчатых гиперповерхностей V_3 в R_4 . Матем. сб. 1960, 50 (92), № 2, 203—220.
3. Лумисте Ю. Г., Туулметс Л. А., Минимальные конгруэнции V_3 в евклидовом пространстве R_4 . Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1962, № 1, (26), 74—82.
4. Туулметс Л. А., Изгибание минимальной конгруэнции V_3 в R_4 . Изв. АН Эст. ССР, сер. физ.-матем. и техн. наук, 1964, 13, 210—216.
5. Фиников С. П., Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. Москва—Ленинград, 1948.
6. Фиников С. П., Теория конгруэнций. Москва—Ленинград, 1948.

Поступило
20 XI 1965

ISOTROOPSE KONGRUENTSI TEINE KESKMÄHISPIND RUUMIS R_4

L. Tuulmets

Resümee

Kongruentsi V_3 keskmähispinnaks ruumis R_4 nimetatakse kongruentsi moodustajate keskpunkte läbivate ja moodustajatega ortogonaalsete hüpertasandite parve mähispinda. Isotroopse kongruentsi V_3 keskmähispind ruumis R_4 on samuti isotroopne kongruents [3]. Isotroopse kongruentsi $'V_3$ keskmähispinda nimetatakse isotroopse kongruentsi V_3 teiseks keskmähispinnaks ${}''V_3$. Osutub, et isotroopne kongruents V_3^0 (isotroopse kongruentsi erijuht) ja tema teine keskmähispind ${}''V_3^0$ ühtivad siis ja ainult siis, kui keskmähispinna $'V_3$ moodustaja tsenter M_0 asub pinna ortogonaaltasandil. Isotroopne kongruents V_3^0 eksisteerib ja määratakse kahe kahemuutuja funktsiooni suvaga. Käesolev töö on artiklite [3, 4] otsene järg.

THE SECOND MIDDLE ENVELOPE OF THE ISOTROPIC CONGRUENCE IN R_4

L. Tuulmets

Summary

A middle envelope of a rectilinear congruence V_3 in Euclidean space R_4 is a hypersurface of rank 2, enveloping the hyperplanes orthogonal to the rectilinear generators of V_3 through their centres.

A middle envelope of the isotropic congruence V_3 in R_4 is also isotropic congruence $'V_3$. A middle envelope ${}''V_3$ of the isotropic congruence $'V_3$. A middle envelope ${}''V_3$ of the isotropic congruence $'V_3$ is called second middle envelope of the isotropic congruence V_3 . In this paper two theorems about isotropic congruence V_3 and ${}''V_3$ are proved which describe cases where V_3 and ${}''V_3$ are congruent or coincide.

ОБ ОБОБЩЕНИИ ТЕОРЕМЫ МАЗУРА—ОРЛИЧА

Э. Юрмяэ

Кафедра математического анализа

В данной заметке доказывается, что теорема Мазура—Орлича о суммировании неограниченной последовательности не верна без видоизменения для всех корегулярных обобщенных матричных методов суммирования. В п. 5 дается обобщение этой теоремы Мазура—Орлича.

1. Матричное преобразование последовательности $x = \{\xi_k\}$ в последовательность $y = \{\eta_n\}$ с

$$\eta_n = A_n(x) = \sum_k a_{nk} \xi_k,$$

где a_{nk} , ξ_k и η_n — комплексные числа, определяет матричный метод суммирования $A = (a_{nk})$. Говорят, что метод A суммирует последовательность $x = \{\xi_k\}$ к числу η , если $\lim_n \eta_n = \eta$.

В этом случае последовательность x называется A -суммируемой. Множество всех A -суммируемых последовательностей называется *полем суммируемости* метода A и обозначается через A^* .

Как известно, *метод A сохраняет сходимость тогда и только тогда, когда*

- 1) $\lim_n a_{nk} = a_k$,
- 2) $\lim_n \sum_k a_{nk} = a$,
- 3) $\sum_k |a_{nk}| \leq M$.

Если $a_k = 0$ и $a = 1$, то метод A называется *регулярным*.

Для регулярных методов суммирования Мазур и Орлич дали следующую теорему (см. [1]):

Если регулярный матричный метод A суммирует ограниченную расходящуюся последовательность, то он суммирует и неограниченную последовательность.

¹ Для краткости обозначим $\sum_{k=0}^{\infty}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty}$ через Σ_k и \lim_n . Если пределы изменения индексов не указаны, то они принимают все значения $0, 1, \dots$.

Эта теорема была обобщена Целлером [3] на корегулярные матричные методы суммирования, т. е. на те методы A , при которых $a - \sum_k a_k \neq 0$.

2. Пусть теперь X и Y — некоторые банаховы пространства. Преобразование

$$y_n = \sum_k A_{nk} x_k,$$

где $y_n \in Y$, $x_k \in X$, и A_{nk} — непрерывные линейные операторы из X в Y , определяет так называемый *обобщенный матричный метод суммирования* $\mathfrak{A} = (A_{nk})$. Последовательность $\{x_k\}$ называется \mathfrak{A} -суммируемой, если существует $\lim_n y_n = y$ в смысле метрики пространства Y . Множество всех \mathfrak{A} -суммируемых последовательностей обозначается через \mathfrak{A}^* и называется полем суммируемости метода \mathfrak{A} . Множество \mathfrak{A}^* является полным метрическим пространством со сходимостью по координатам (FK -пространством).

Как известно, *метод \mathfrak{A} сохраняет сходимость тогда и только тогда, когда*

$$4) \lim_n A_{nk} x = A_k x \text{ для всех } x \in X,$$

$$5) \lim_n \sum_k A_{nk} x = Ax \text{ для всех } x \in X,$$

$$6) \sup_{\|x_k\| \leq 1} \left\| \sum_{k=0}^m A_{nk} x_k \right\| \leq M.$$

Если $X = Y$, $Ax = x$ и $A_k x = 0$, то метод \mathfrak{A} называется *регулярным*.

Оказывается, что приведенная теорема Мазура—Орлича верна и для регулярных обобщенных матричных методов суммирования (см. [4]).

Обобщенный матричный метод суммирования \mathfrak{A} , сохраняющий сходимость, называется *корегулярным*, если слабая сходимость по отрезкам не имеет места для всех постоянных последовательностей $\{x, x, \dots, x, \dots\}$ ($x \in X$) в поле суммируемости \mathfrak{A}^* . Под отрезками последовательности $\{x, x, \dots, x, \dots\}$ понимаются последовательности.

$$\underbrace{\{x, x, \dots, x, 0, 0, \dots\}}_{r \text{ элементов}}$$

Для корегулярных обобщенных матричных методов суммирования аналог теоремы Мазура—Орлича доказан только при определенном ограничении (см. условие (T) в [5]). Оказывается, что эта теорема в обычной формулировке, вообще, не верна для всех корегулярных обобщенных матричных методов суммирования. Это утверждение будет доказано в следующем пункте при помощи одного примера.

3. Будем рассматривать регулярные матричные методы B и C , определенные преобразованиями

$$\eta_n = B_n(x) = \xi_{2n}$$

и

$$\eta_n = C_n(x) = \xi_{2n+1}.$$

Каждый из этих двух регулярных методов суммирует ограниченную расходящуюся последовательность $\{(-1)^k\}$, но $B^* \cap C^* \subset m$, т. е. они не суммируют ни одной общей неограниченной последовательности.

Возьмем² $X = R_1$, $Y = R_2$ и определим обобщенный матричный метод $\mathfrak{A} = (A_{nk})$ следующим преобразованием

$$y_n = B_n(x) \cdot e_1 + C_n(x) \cdot e_2,$$

где $e_1 = (1, 0)$ и $e_2 = (0, 1)$. Определенный таким образом обобщенный матричный метод суммирования является корегулярным, суммирует ограниченную расходящуюся последовательность $\{(-1)^k\}$, но не суммирует ни одной неограниченной последовательности.

4. Приведенная в п. 1, теорема Мазура—Орлича была обобщена на корегулярные матричные методы суммирования при помощи следующего важного топологического факта: все ограниченные расходящиеся последовательности являются точками прикосновения множества сходящихся последовательностей в поле корегулярного матричного метода. Известно (см. [5]), что если для данного обобщенного корегулярного метода имеет место вышеуказанное топологическое свойство, то для него верно и утверждение теоремы Мазура—Орлича. С другой стороны, это свойство поля суммируемости имеет место не для всех корегулярных обобщенных матричных методов суммирования (см. [6]). Теперь возникает вопрос, суммирует ли корегулярный обобщенный матричный метод \mathfrak{A} неограниченную последовательность только тогда, когда все ограниченные расходящиеся последовательности являются точками прикосновения множества сходящихся последовательностей в поле суммируемости данного метода. Следующий пример показывает, что это не так.

Пусть $X = R_1$ и $Y = R_2$. Определим обобщенный матричный метод $\mathfrak{A} = (A_{nk})$ равенством

$$A_{nk}x = b_{nk}xe_1 + c_{nk}xe_2,$$

где $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$,

$$b_{nk} = \begin{cases} 1 & \text{при } k = 3n, \\ -1 & \text{при } k = 3n + 1, \\ 0 & \text{при остальных,} \end{cases}$$

² Через R_n обозначено n -мерное евклидово пространство.

$$c_{nk} = \begin{cases} 1 & \text{при } k = 3n + 2, \\ 0 & \text{при остальных.} \end{cases}$$

Корегулярный обобщенный матричный метод $\mathfrak{A} = (A_{nk})$ суммирует все сходящиеся последовательности к точкам одномерного подпространства $Q = \{x_{e_2} : x \in R_1\}$ пространства R_2 . Ограниченная расходящаяся последовательность $x_1 = \{1, -1, 0, 1, -1, 0, \dots\}$ суммируема методом \mathfrak{A} к точке $2e_1 \in R_2$. Отсюда следует, что x_1 не является точкой прикосновения множества сходящихся последовательностей в \mathfrak{A}^* .

Этот метод \mathfrak{A} суммирует и неограниченную последовательность

$$\{1, 1, 1, 2, 2, 1, 3, 3, 1, 4, 4, 1, \dots\}.$$

5. Теперь возникает вопрос, каким должно быть обобщение теоремы Мазура—Орлича, чтобы оно было верно для всех корегулярных обобщенных матричных методов суммирования. Мы докажем, что этим обобщением является следующая

Теорема. Если корегулярный обобщенный матричный метод \mathfrak{A} суммирует ограниченную расходящуюся последовательность, являющуюся точкой прикосновения множества сходящихся последовательностей в \mathfrak{A}^* , то метод \mathfrak{A} суммирует и неограниченную последовательность.

Доказательство. Пусть ограниченная расходящаяся последовательность $x_0 \in \mathfrak{A}^*$ является точкой прикосновения множества сходящихся последовательностей в \mathfrak{A}^* . Тогда найдется последовательность $\{x_n\}$ сходящихся последовательностей такая, что

$$\lim_n x_n = x_0 \text{ в } \mathfrak{A}^*. \quad (1)$$

Известно, что при FK -пространствах из сходимости в подпространстве следует такая же сходимость во всем пространстве. Так как (1) не имеет места в пространстве ограниченных последовательностей (там множество сходящихся последовательностей является замкнутым), то \mathfrak{A}^* не может быть подпространством пространства ограниченных последовательностей. Отсюда и следует утверждение теоремы.

Примечание. В доказательстве вышеприведенной теоремы не было применено условие корегулярности данного метода. Но эта теорема имеет смысл только при корегулярных методах суммирования, так как каждый конулевой обобщенный метод суммирует неограниченную последовательность (см. [4]).

6. Из доказанной теоремы следует, что для метода $\mathfrak{A} = (A_{nk})$ приведенного в п. 3, множество сходящихся последовательностей является замкнутым в \mathfrak{A}^* . Поскольку этот метод суммирует расходящуюся последовательность, то для всех корегулярных обобщенных матричных методов не верна теорема Виланского—Целлера о суммировании ограниченной последовательности (см. [2], теорема 1, или [5]).

Автор пользуется случаем, чтобы выразить свою признательность и глубокую благодарность проф. Г. М. Питерсену (Новая Зеландия) за указание приведенных в п. 3 двух регулярных методов, суммирующих одну общую ограниченную расходящуюся последовательность, при которых общая часть полей суммируемости не содержит ни одной неограниченной последовательности.

Примечание при корректуре. Ранее автор доказал аналогичную теорему для методов абсолютного суммирования ([7], теорема 7), где использовалось понятие абсолютной O -совершенности. Учитывая доказательство настоящей теоремы, можно сказать, что условие абсолютной O -совершенности можно заменить условием: в $|A|^*$ находится расходящийся ряд с ограниченными частичными суммами, являющийся точкой прикосновения множества l в $|A|^*$.

Автор пользуется случаем выразить сожаление, что в формулировке понятия абсолютной O -совершенности в [7] остался непочеркнутым важный момент: абсолютно O -совершенный метод должен абсолютно суммировать некоторый расходящийся ряд с ограниченными частичными суммами, т. е. $m_r \cap |A|^* \setminus c_r \neq \emptyset$ (через c_r обозначено множество сходящихся рядов). Без этого требования не верна теорема 7 в [7], так как в ее доказательстве важно, что $z \in m_r \cap |A|^* \setminus c_r$. Для $z \in c_r$ найдутся $x_h \in l$ такие, что $\lim x_h = z$ в m_r .

Литература

1. Mazur, S., Orlicz, W., Sur les méthodes linéaires de sommation. C. r. Acad. Sci., 1933, 196, 32—34.
2. Wilansky, A., Zeller, K., Summation of bounded divergent sequences, topological methods. Trans. Amer. Math. Soc., 1955, 78, 501—509.
3. Zeller, K., Allgemeine Eigenschaften von Limitierungsverfahren. Math. Z., 1951, 53, 463—487.
4. Ю р и м я э, Э., Некоторые вопросы обобщенных матричных методов суммирования. Корегулярные и конулевые методы. Изв. АН Эст. ССР, сер. физ.-матем. и техн. наук, 1959, 8, 115—121.
5. Ю р и м я э, Э., Об одном классе обобщенных матричных методов суммирования. Изв. АН Эст. ССР, сер. физ.-матем. и техн. наук, 1959, 8, 166—172.
6. Ю р и м я э, Э., Заметки о корегулярных обобщенных матричных методах суммирования. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1965, 177, 62—66.
7. Ю р и м я э, Э., Некоторые вопросы включения и совместности методов абсолютного суммирования. Уч. зап. Тартуск. ин-та, 1964, 150, 132—143.

Поступило
3 IV 1966

MAZUR-ORLICZI TEOREEMI ÜLDISTUSEST

E. Jürimäe

Res ü m e e

Käesolevas artiklis vaadeldakse üldistatud maatriksmenetlusi ja antakse üldistus ühele hästituntud Mazur-Orliczi teoreemile. Osutub nimelt, et see Mazur-Orliczi teoreem pole vahetult üle kantav üldistatud maatriksmenetluste juhule, vaid viimaste puhul on ta õige vaid järgmises üldisemas formulatsioonis.

Teoreem. Kui koregulaarne üldistatud maatriksmenetlus summeerib tõkestatud hajuva jada, mis on koonduvate jadade hulga kuhjumispunktiks antud menetluse summeerimisväljas, siis see menetlus summeerib ka tõkestamata jada.

ON GENERALIZATION OF A THEOREM OF MAZUR AND ORLICZ

E. Jürimäe

Summary

Let X and Y be Banach spaces, and A_{nk} continuous linear operators from X into Y . The summability method $\mathfrak{A} = (A_{nk})$ defined by the transformation

$$y_n = \sum_k A_{nk} x_k \quad (n = 0, 1, \dots)$$

is called the generalized matrix method of summability. If $X = Y = R_1$ (one-dimensional Euclidean space) then we have an ordinary matrix method of summability.

We use the symbol \mathfrak{A}^* for the summability field of the method \mathfrak{A} .

A conservative generalized matrix method \mathfrak{A} is called conull (see [4]) if for every $x \in X$ the sequence

$$g^n = \underbrace{\{0, 0, \dots, 0, x, x, \dots\}}_{n \text{ elements}} \rightarrow 0$$

weakly in \mathfrak{A}^* ; otherwise coregular.

For the ordinary matrix method of summability, the following theorem is known (see [1—3]).

Theorem (Mazur—Orlicz). *If a coregular ordinary matrix method sums a bounded divergent sequence, then it sums an unbounded sequence too.*

It is shown in this paper (see Section 3) that this theorem is not true for the coregular generalized matrix method. In Section 5 is proved the following generalization of the preceding theorem of Mazur and Orlicz.

Theorem. *If a coregular generalized matrix method \mathfrak{A} sums a bounded divergent sequence, which is a point of limit of the set of convergent sequences in \mathfrak{A}^* , then \mathfrak{A} sums an unbounded sequence too.*

This theorem is a generalization of the preceding theorem because every \mathfrak{A} -summable bounded sequence is a point of limit of the set of convergent sequences in the summability field of the coregular ordinary matrix method \mathfrak{A} .

Wilansky and Zeller proved that a coregular ordinary matrix method sums a bounded divergent sequence if and only if the set of convergent sequences is not closed in \mathfrak{A}^* (see [2], Theorem 1). This paper shows (see Sections 3 and 6) that this statement is not true for the coregular generalized matrix method of summability.

КОНТИНУАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ СУММИРОВАНИЯ

Э. Реймерс

Кафедра математического анализа

Введение

Настоящая статья является продолжением исследований, начатых автором в статье [8]. Мы определяем понятие s -сходимости (§ 1), вводим новый континуальный метод суммирования (§ 2), изучаем его свойства (§ 3) и применяем к интегрированию функций (§ 4).

В § 1 определяются булева алгебра Ω (раздел 1.1) и направленное множество Q (раздел 1.2), на основе которых определяется понятие s -сходимости, определяющей понятие суммы для ограниченных и почти ограниченных числовых последовательностей (раздел 1.3), а также для q -последовательностей, введенных в статье (раздел 1.4). Многие результаты, приведенные в этом параграфе, имеются уже в статье [8].

В § 2 определяется континуальный метод суммирования числовых последовательностей (раздел 2.1), который однотипен общему методу суммирования, введенному в [8], но обладает рядом новых свойств, например, свойством, данным в теореме 3.1.3. Дается понятие единичных континуальных методов суммирования (раздел 2.2), понятие реверсивных континуальных методов (раздел 2.3) и изучаются поля суммируемости реверсивных методов, которые, как показано, оказываются BK -пространствами (раздел 2.4).

В § 3 рассматриваются вопросы, связанные с консервативностью и регулярностью континуальных методов суммирования (раздел 3.1). Эти свойства изучены уже в статье [8]. Доказаны две теоремы (раздел 3.2), дающие общий вид линейного непрерывного функционала в пространствах ограниченных последовательностей (теоремы 3.2.1 и 3.2.2). Эти теоремы дополняют аналогичные теоремы 4.2.1 и 4.2.2 из [8]. Далее выводится общий вид линейного непрерывного функционала в поле ограниченной суммируемости реверсивного континуального метода (раз-

дел 3.3), даются условия существования обратного метода (раздел 3.4) и изучаются вопросы, связанные с включением континуальных методов (раздел 3.5).

В § 4 показывается, что мера Лебега на $[0,1]$ выражается через последовательности из булевой алгебры Ω (раздел 4.1), что позволяет L -измеримые функции, заданные на $[0, 1]$, представлять в виде числовой последовательности (раздел 4.2). И наконец, показано, что интеграл Лебега на $[0,1]$ от ограниченной измеримой функции выражается через регулярный континуальный метод суммирования. Результаты этого параграфа связывают теорию функций вещественной переменной с теорией континуального суммирования.

Во всей статье для двух последовательностей $x = \{x_k\}$ и $y = \{y_k\}$ сложение и умножение понимается в следующем смысле: $x + y = \{x_k + y_k\}$, $xy = \{x_k y_k\}$. Если пределы изменения индексов не указаны, то они могут принимать все целочисленные значения от 0 до ∞ . Вместо $x = \{x_k\}$ часто будем писать $x = (x_0, x_1, \dots)$.

§ 1. Определение и вспомогательные результаты

1.1. Множество Ω . Обозначим через $\omega = \{\delta_k\}$ бесконечную последовательность, состоящую из нулей и единиц, т. е. в этой последовательности

$$\delta_k = \begin{cases} 1 & \text{при } k \in V, \\ 0 & \text{при остальных } k \end{cases}$$

для какого-нибудь числового множества $V \subseteq N = \{0, 1, 2, \dots\}$. Множество всех возможных последовательностей ω обозначим через Ω , а множество тех последовательностей ω , которые содержат бесконечно много единиц, обозначим через Ω^∞ . Тогда $\Omega^\infty \subset \Omega$. Последовательности ω будем часто называть *элементами* множества Ω . Для элементов ω используем еще следующие специальные обозначения: $e = (1, 1, \dots)$; $e_k = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots)$, где 1 стоит на k -том месте ($k = 0, 1, \dots$); $\theta = (0, 0, \dots)$. Элементы множества Ω будем в случае надобности обозначать также символами ω' , ω'' , ω_v , ω'_v и т. д.

Введем в Ω частичное упорядочение. Пусть $\omega = \{\delta_k\} \in \Omega$ и $\omega' = \{\delta'_k\} \in \Omega$. Мы будем говорить, что элемент ω *больше* элемента ω' и писать $\omega > \omega'$, если $\delta_k \geq \delta'_k$ при всех k и при этом $\delta_k > \delta'_k$ хотя бы при одном k , т. е. при этом k должно быть $\delta_k = 1$ и $\delta'_k = 0$. Если $\delta_k = \delta'_k$ при всех k , то пишем $\omega = \omega'$. Запись $\omega \geq \omega'$ будет означать, что $\omega > \omega'$ или $\omega = \omega'$. Вместо $\omega > \omega'$ мы будем иногда писать $\omega' < \omega$ и вместо $\omega \geq \omega'$ писать $\omega' \leq \omega$. По введенному упорядочению в Ω наибольшим элементом будем считать e и наименьшим — θ . Для всех остальных ω имеем $\theta < \omega < e$.

Верхней гранью элементов ω' и ω'' будем называть наименьшую из элементов ω , при котором $\omega' \leq \omega$ и $\omega'' \leq \omega$. Аналогично определяем нижнюю грань. При таком упорядочении в Ω будут выполнены условия:

- 1) $\omega > \omega'$ исключает $\omega = \omega'$;
- 2) если $\omega > \omega'$ и $\omega' > \omega''$, то $\omega > \omega''$;
- 3) любая пара элементов ω' и ω'' имеет верхнюю и нижнюю грани.

Ввиду условий 1), 2) и 3) множество Ω будет структурой [5]. Структуру называют *полной*, если всякое ее не пустое подмножество имеет верхнюю и нижнюю грани. Структура Ω *полна* (см. [8]).

Назовем два элемента ω и ω' из Ω *дизъюнктивными* и пишем $\omega \delta \omega'$, если $\omega \omega' = \theta$. В Ω операция сложения элементов ω и ω' осуществима тогда и только тогда, когда $\omega \delta \omega'$, а разность $\omega - \omega'$ имеет смысл только, если $\omega \geq \omega'$. Для пары дизъюнктивных элементов введенное упорядочение \leq и $<$ не применимо, так что это упорядочение частичное.

Структура Ω дистрибутивна, так как для $\omega \delta \omega'$ имеем

$$(\omega + \omega')\omega'' = \omega\omega'' + \omega'\omega''.$$

В Ω для любого элемента ω существует элемент ω' , дополняющий его до e , т. е. $\omega + \omega' = e$. Ввиду сказанного мы можем структуру Ω рассматривать как полную булеву алгебру.

Пусть s — некоторый функционал, определенный на Ω , обладающий следующими свойствами:

- 1° $s(e) = 1$,
- 2° $s(\omega) \geq 0$,
- 3° если $\omega_1 \delta \omega_2$, то $s(\omega_1 + \omega_2) = s(\omega_1) + s(\omega_2)$,
- 4° если $\omega_1 = \{\delta_k\}$ и $\omega_2 = \{\delta_{k+1}\}$, то $s(\omega_1) = s(\omega_2)$.

Такие функционалы s существуют. Например, такими функционалами s могут быть банаховы функционалы f , определенные на множестве ограниченных последовательностей m , которые удовлетворяют условиям 1°—4° (см. [10], стр. 34, [4], стр. 144). Функционалы s будут сужениями этих функционалов f на $\Omega \subset m$. Из условий 1°—4° следует, что

- 5° $s(\theta) = 0$,
- 6° $s(e_k) = 0$,
- 7° если $\omega_1 \leq \omega_2$, то $s(\omega_1) \leq s(\omega_2)$.

Таким образом, каждому элементу $\omega \in \Omega$ мы поставили в соответствие некоторое число $s(\omega) \in [0, 1]$, удовлетворяющее условиям 1°—7°. Если ω содержит конечное число единиц, то $s(\omega) = 0$ по условиям 3° и 6°. В Ω существуют и элементы ω , содержащие бесконечно много единиц, для которых также будет $s(\omega) = 0$ (см. [8], примечание 1.3.3). Из свойств 2° и 7° следует, что если $\omega' \leq \omega$ и $s(\omega) = 0$, то также $s(\omega') = 0$.

1.2. Множество Q . Будем говорить, что элемент $\omega \in \Omega$ разложен на части

$$\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_m,$$

если

$$\omega = \omega_0 + \omega_1 + \dots + \omega_m.$$

В этом разложении части ω_ν ($\nu = 0, 1, \dots, m$) попарно дизъюнкты, т. е. $\omega_\nu \wedge \omega_\mu = \emptyset$, если $\nu \neq \mu$, а само разложение не зависит от того, в какой последовательности части расположены в сумме. В разложениях могут быть также части $\omega_\nu = \emptyset$. Через $q^m = \{\omega_\nu\}_{\nu=0}^m$ будем обозначать разложение элемента $e \in \Omega$ на части $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_m$. Тогда

$$e = \omega_0 + \omega_1 + \dots + \omega_m.$$

При $m = 0$ имеем тривиальное разложение $q^0 = \{\omega_\nu\}_{\nu=0}^0 = \{e\}$.

Через L будем обозначать множество всех разложений q^m . Множество L имеет мощность континуума. Разложения из L мы будем в случае надобности обозначать также другими символами q_e, q', p и т. д.

Введем во множестве L частичное упорядочение. Если два разложения $q' = \{\omega_\nu\}_{\nu=0}^{n_1}$ и $q'' = \{\omega'_\nu\}_{\nu=0}^{n_2}$ состоят из одних и тех же частей, то пишем $q' = q''$. Если разложение q'' можно получить из разложения q' путем дальнейшего разложения на части его элементов ω_ν , то пишем $q'' > q'$. При этом разложение q'' будем называть продолжением разложения q' .

Например, если в тривиальном разложении $q^0 = \{e\}$ разложим элемент e на две части ω_0 и ω_1 , то получим новое разложение $q^1 = \{\omega_0, \omega_1\}$ и $q^1 > q^0$. Если в полученном разложении q^1 разложить элемент ω_1 на какие-нибудь части ω'_1 и ω'_2 , то опять получим новое разложение $q^2 = \{\omega_0, \omega'_1, \omega'_2\}$ и $q^2 > q^1$.

Запись $q'' \geq q'$ будет означать, что $q'' > q'$ или $q'' = q'$. Иногда вместо $q'' > q'$ и $q'' \geq q'$ будем соответственно писать $q' < q''$ и $q' \leq q''$.

Введенное упорядочение обладает свойствами *рефлексивности*, т. е. $q' \leq q'$, *транзитивности*, т. е. из $q' \leq q''$ и $q'' \leq q'''$ следует $q' \leq q'''$, а также свойством *антисимметрии*, т. е. из $q' \leq q''$ и $q'' \leq q'$ следует $q' = q''$. Кроме того, для двух произвольных разложений q' и q'' всегда существует их общая *мажоранта* q''' , т. е. такое разложение q''' , что $q''' \geq q'$ и $q''' \geq q''$ (см. [8], лемма 1.2.1). Следовательно, множество L будет *направленным множеством* (см., например, [2], стр. 38; [12], стр. 7).

Пусть в $\omega_\nu = \{\delta_k\} \in \Omega$ числа $\delta_k = 1$ расположены только в тех местах, где индекс k принимает значения $\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_n, \dots$, т. е. пусть

$$\delta_k = \begin{cases} 1 & \text{при } k = \nu_n \quad (n = 0, 1, \dots), \\ 0 & \text{при } k \neq \nu_n. \end{cases} \quad (1.2.1)$$

Например, если $\omega_v = (1, 0, 1, 0, \dots)$, то $v_n = 2n$, т. е. тогда

$$\delta_k = \begin{cases} 1 & \text{при } k = 2n, \\ 0 & \text{при } k \neq 2n. \end{cases}$$

Ниже мы будем пользоваться системами разложений $q = \{q_n^m\}$, где

$$\begin{aligned} q_0^m &= \{\omega_v\}_{v=0}^m, \quad \omega_v \in \Omega^\infty, \\ q_1^m &= \{e_{v_0}, \omega_v - e_{v_0}\}_{v=0}^m, \\ &\dots \\ q_n^m &= \{e_{v_0}, e_{v_1}, \dots, e_{v_{n-1}}, \omega_v - \sum_{k=0}^{n-1} e_{v_k}\}_{v=0}^m \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

Как видно система $q = \{q_n^m\}$ определяется заданием первого разложения q_0^m . Мы имеем

$$q_0^m < q_1^m < \dots < q_n^m < q_{n+1}^m < \dots$$

При $m = 0$ система (1.2.2) превращается в систему $q = \{q_n^0\}$, где

$$\begin{aligned} q_0^0 &= \{e\}, \\ q_1^0 &= \{e_0, e - e_0\}, \\ &\dots \\ q_n^0 &= \{e_0, e_1, \dots, e_{n-1}, e - \sum_{k=0}^{n-1} e_k\}. \end{aligned}$$

Для каждой системы разложений $q = \{q_n^m\}$ с $q_0^m = \{\omega_v\}_{v=0}^m$ составим системы разложений $\bar{q} = \{\bar{q}_n^m\}$ с $\bar{q}_0^m = \{\omega^v, \omega_v - \omega^v\}_{v=0}^m$, где ω^v имеют конечное число единиц ($\omega^v \leq \omega_v$), т. е. пусть в системе $\bar{q} = \{\bar{q}_n^m\}$ первое разложение \bar{q}_0^m будет продолжением разложения q_0^m , полученного путем отделения от ω_v элементов ω^v с конечным числом единиц, а \bar{q}_n^m получается из \bar{q}_0^m аналогично равенствам (1.2.2). Тогда каждой системе $q = \{q_n^m\}$, в зависимости от выбора элементов ω^v , будет соответствовать бесконечно много различных систем $\bar{q} = \{\bar{q}_n^m\}$. Если все $\omega^v = \theta$, то $\bar{q}_n^m = q_n^m$.

Например, пусть дана система разложений $q = \{q_n\}$ с $q_0 = \{\omega_0, \omega_1\}$, где

$$\omega_0 = (1, 0, 1, 0, \dots) \quad \text{и} \quad \omega_1 = (0, 1, 0, 1, \dots).$$

Взяв $\omega^0 = \theta$ и $\omega^1 = e_1 + e_3$, получим систему разложений $\bar{q} = \{\bar{q}_n\}$, где

$$\begin{aligned} \bar{q}_0 &= \{\omega_0; e_1 + e_3; \omega'_1\} \quad (\omega'_1 = \omega_1 - e_1 - e_3), \\ \bar{q}_1 &= \{e_0, \omega_0 - e_0; e_1, e_3; e_5, \omega'_1 - e_5\}, \\ &\dots \end{aligned}$$

Для упрощения записи мы часто вместо $q = \{q^{m_n}\}$ и $\bar{q} = \{\bar{q}^{m_n}\}$ будем соответственно писать $q = \{q_n\}$ и $\bar{q} = \{\bar{q}_n\}$, если указывать индекс m не существенно.

Если в двух системах $q = \{q_n\}$ и $q' = \{q'_n\}$ будет $q_0 \geq q'_0$, то также $q_n \geq q'_n$.

Определение 1.2.1. Множеством $Q \subseteq L$ назовем направленное множество разложений q^m , удовлетворяющих следующему условию:

- 1° для каждого $q^{m_0} \in Q$ также $q^{m_n} \in Q$ и $\bar{q}^{m_n} \in Q$,
- 2° $q^0 = \{e\} \in Q$.

Через Q^∞ обозначим множество таких разложений $q_0 = \{\omega_\nu\}_{\nu=0}^\infty \in Q$, в которых все $\omega_\nu \in \Omega^\infty$. Множество Q , которое содержит из разложений $q_0 \in Q^\infty$ только тривиальное разложение $q_0 = \{e\}$, мы будем обозначать через Q_0 . По определению 1.2.1 множество Q_0 содержит также разложения

$$q_n = \{e_0, e_1, \dots, e_{n-1}, e - \sum_{k=0}^{n-1} e_k\},$$

а также разложения \bar{q}_n с $\bar{q}_0 = \{\omega^0, e - \omega^0\}$, где ω^0 содержит конечное число единиц. Множество Q_0 самое простое из множеств Q . Мы имеем

$$Q_0 \subseteq Q \subseteq L.$$

Множество Q_0 содержит только одно разложение $q_0 = \{e\}$.

Пусть $f(\bar{q}_n)$ — некоторый функционал, определенный на Q . Такие функционалы встретятся ниже, например, в следующем разделе 1.3. Значения функционала $f(\bar{q}_n)$ определяют некоторое направленное семейство на Q (см. [12], стр. 7).

Определение 1.2.2. Мы скажем, что направленное семейство $f(\bar{q}_n)$, где $\bar{q}_n \in Q$, сходится на Q к f , если для каждого числа $\varepsilon > 0$ можно найти такое разложение $q_\varepsilon \in Q$, что

$$|f - f(\bar{q}_n)| < \varepsilon \quad (1.2.3)$$

для всех $\bar{q}_n \geq q_\varepsilon$. При этом будем писать

$$f = \lim_Q f(\bar{q}_n). \quad (1.2.4)$$

Предельная величина f , если она существует, определена однозначно, как предел типа Мура—Шатуновского (см. [9, 14], также [11], стр. 204).

Если $Q = Q_0$, то Q будет содержать только разложения \bar{q}^0_n и предел (1.2.4) превращается в обычный предел (где $n \rightarrow \infty$)

$$f = \lim f(q^0_n).$$

Теорема 1.2.1. Направленное семейство $f(\bar{q}_n)$ сходится на Q тогда и только тогда, когда для каждого $\varepsilon > 0$ можно найти такое разложение $q_\varepsilon \in Q$, что

$$|f(\bar{q}^m_n) - f(\bar{q}^l_k)| < \varepsilon \quad (1.2.5)$$

для всех $\bar{q}^m_n \geq q_\varepsilon$, $\bar{q}^l_k \geq q_\varepsilon$, где $\bar{q}^m_n \in Q$, $\bar{q}^l_k \in Q$.

Доказательство. Необходимость следует из неравенства

$$|f(\bar{q}_n^m) - f(\bar{q}_k^l)| \leq |f(\bar{q}_n^m) - f| + |f - f(\bar{q}_k^l)|.$$

Достаточность. Пусть $\varepsilon_i > 0$ и $\lim \varepsilon_i = 0$. Ввиду условия (1.2.5) мы можем найти такие разложения $q^{(i)} \in Q$, что

$$|f(\bar{q}_n^m) - f(\bar{q}_k^l)| < \varepsilon_i \quad (1.2.6)$$

для всех $\bar{q}_n^m \geq q^{(i)}$, $\bar{q}_k^l \geq q^{(i)}$.

Из (1.2.6) выберем такую подпоследовательность p_i в разложении \bar{q}_n^m , чтобы было

$$p_1 < p_2 < \dots < p_i < \dots \quad \text{и} \quad p_i > q^{(i)}.$$

Такой выбор возможен, так как Q является направленным множеством. Тогда из (1.2.6) получим

$$|f(p') - f(p'')| < \varepsilon_i \quad (1.2.7)$$

при всех $p' \geq p_i$, $p'' \geq p_i$. Следовательно, выполняется неравенство

$$|f(p_n) - f(p_k)| < \varepsilon_i$$

при всех $n, k \geq i$. Обозначим $z_n = f(p_n)$, тогда будет

$$|z_n - z_k| < \varepsilon_i$$

при всех $n, k \geq i$. Так как $\varepsilon_i \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$, то из последнего неравенства следует, что последовательность $\{z_n\}$ сходится. Пусть $z = \lim z_n$. Положив в (1.2.7) разложение $p' = p_n$, то при $n \rightarrow \infty$ получим

$$|z - f(p'')| < \varepsilon_i$$

для всех $p'' \geq p_i$.

Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное число. Выберем такое большое число i , что $\varepsilon_i < \varepsilon$, тогда также

$$|z - f(p'')| < \varepsilon$$

для всех $p'' \geq p_i$. Следовательно, $f(p'')$ сходится к z по определению 1.2.2. Теорема доказана.

Из теоремы 1.2.1 непосредственно следует

Теорема 1.2.2. *Направленное семейство $f(q_n^m)$ сходится на Q тогда и только тогда, когда для каждого $\varepsilon > 0$ можно найти такое разложение $\bar{q}_k^l \in Q$, что*

$$|f(\bar{q}_n^m) - f(\bar{q}_k^l)| < \varepsilon$$

для всех $\bar{q}_n^m \geq \bar{q}_k^l$, где $\bar{q}_n^m \in Q$.

Ниже (например, в разделе 1.4) будут встречаться функционалы $f(\bar{q}_n^m)$, которые на Q определены неоднозначно. Тогда неравенство (1.2.3) будет означать, что оно должно выполняться при указанных условиях для всех значений $f(\bar{q}_n^m)$.

Примечание 1.2.1. У нас Q — направленное множество. Однако Q^∞ может уже и не быть направленным множеством, так как для двух разложений q' и q'' из Q^∞ может не существовать их общей мажоранты $q''' \in Q^\infty$. Например, если $q' = \{\omega_0, \omega_1\}$

с $\omega_0 = (1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)$, $\omega_1 = (0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, \dots)$ и $q'' = \{\omega'_0, \omega'_1\}$ с $\omega'_0 = (1, 0, 1, 0, \dots)$, $\omega'_1 = (0, 1, 0, 1, \dots)$ принадлежат Q^∞ , то у них нет общей мажоранты в Q^∞ .

Примечание 1.2.2. Если нужно обозначить разложение элемента ω , которое составляет часть разложения $q^m = \{\omega_v\}_{v=0}^m$, то будем писать ωq^m . Например, если $\omega = \omega_0 + \omega_1 + \dots + \omega_k$, где $k \leq m$, то $\omega q^m = \{\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_k\}$.

Примечание 1.2.3. Обозначим через Ω_Q все множество элементов ω_v , входящих в разложения $q^m = \{\omega_v\}_{v=0}^m \in Q$. Если $\omega_v \in \Omega_Q$ и $\omega_v \in \Omega^\infty$, то будем писать, что $\omega_v \in \Omega^\infty_Q$, т. е.

$$\Omega^\infty_Q = \Omega^\infty \cap \Omega_Q.$$

Примечание 1.2.4. Если $q^m_0 = \{\omega_v\}_{v=0}^m \geq q^l_0 = \{\omega'_\mu\}_{\mu=0}^l$, то мы можем сгруппировать индексы v в группы V_μ так, чтобы было

$$\omega'_\mu = \sum_{v \in V_\mu} \omega_v$$

при каждом $\mu = 0, 1, \dots, l$.

1.3. Определение суммы для $x \in m$. Пусть даны последовательность $x = \{x_k\}$ и система разложений $q = \{q_n\}$ с $q_0 = \{\omega_v\}_{v=0}^m \in Q^\infty$. Разложим последовательность x на части $x\omega_v$. Из каждой части $x\omega_v$ выделим n -ый член из совокупности членов x_k , попавших в эту часть $x\omega_v$, т. е. член x_{v_n} .

Ниже всегда будем полагать, что n -ый член x_{v_n} из части $x\omega_v$ означает член x_k из последовательности $x = \{x_k\}$, взятый с места, где находится n -ная единица в ω_v . Например, если при некотором v будет $\omega_v = (1, 0, 1, 0, \dots)$, то

$$x\omega_v = (x_0, 0, x_2, 0, \dots).$$

В эту часть $x\omega_v$ попали из $x = \{x_k\}$ члены x_0, x_2, x_4, \dots , и мы имеем

$$x_{v_0} = x_0, \quad x_{v_1} = x_2, \dots, \quad x_{v_n} = x_{2n}, \dots$$

Следовательно, рассматриваемую часть $x\omega_v$ можно записывать и так:

$$x\omega_v = (x_{v_0}, 0, x_{v_1}, 0, x_{v_2}, 0, \dots).$$

Составим сумму

$$s(x, q_n) = \sum_{v=0}^m x_{v_n} s(\omega_v). \quad (1.3.1)$$

Перейдем в (1.3.1) к какой-нибудь системе разложений $\bar{q} = \{\bar{q}_n\}$ с $\bar{q}_0 = \{\omega^v, \omega_v - \omega^v\}_{v=0}^m$, где ω^v имеют конечное число единиц. Из-за $s(\omega^v) = 0$ в (1.3.1) новых членов не добавится и мы будем иметь

$$s(x, \bar{q}_n) = \sum_{v=0}^m x_{v_n} s(\omega^v), \quad (1.3.2)$$

где $\omega^v = \omega_v - \omega^v$.

В последнем выражении (1.3.2) значения индексов ν_n при $\omega^\nu \neq \theta$ будут отличаться от значений индексов ν_n из (1.3.1), так как выше мы уже договорились всегда считать ν_n равным значению индекса, где в ω'_ν стоит n -ная единица. Например, если при некотором ν будет $\omega_\nu = (1, 0, 1, 0, \dots)$, то в (1.3.1) при члене $x_{\nu_n} s(\omega_\nu)$ будет $\nu_n = 2n$. Если $\omega^\nu = e_0$, то $\omega'_\nu = \omega_\nu - e_0 = (0, 0, 1, 0, 1, 0, \dots)$ и в (1.3.2) при члене $x_{\nu_n} s(\omega'_\nu)$ будет $\nu_n = 2n + 2$, а если $\omega'_\nu = (0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, \dots)$, то $\nu_n = 2n + 4$ и т. д. При этом всегда $s(\omega_\nu) = s(\omega'_\nu)$. Если $\omega^\nu = \theta$ при каждом ν , то (1.3.1) и (1.3.2) совпадают.

Итак, переход от (1.3.1) к (1.3.2) изменяет значения индексов ν_n в зависимости от выбора ω^ν , оставляя $s(\omega'_\nu) = s(\omega_\nu)$.

Для любой последовательности $x = \{x_k\}$ выражение (1.3.2) определяет некоторый функционал, определенный на направленном множестве Q . Следовательно, $s(x, \bar{q}_n)$ есть направленное семейство на Q . Наша дальнейшая цель: найти множество последовательностей x , для которых функционал $s(x, q_n)$ имеет предел \lim_Q . Для этого введем следующие определения.

Определение 1.3.1. Скажем, что последовательность $x = \{x_k\}$ s -сходится на Q к сумме $s(x)$, если

$$s(x) = \lim_Q s(x, \bar{q}_n). \quad (1.3.3)$$

Определение 1.3.2. Скажем, что последовательность $x = \{x_k\}$ почти ограничена, если она оказывается ограниченной при исключении из нее некоторой части $x\omega$ с $s(\omega) = 0$.

Таким образом, почти ограниченность последовательности x означает, что существует такой элемент ω с $s(\omega) = 0$, что часть $x(e - \omega)$ ограничена.

Множество всех ограниченных и почти ограниченных последовательностей будем обозначать соответственно через m и m^* . Мы имеем $m \subset m^*$. Следующая теорема дает область определения предельного функционала $s(x)$.

Теорема 1.3.1. Последовательность x s -сходится на $Q = L$ тогда и только тогда, когда она почти ограничена.

Эта теорема доказана в [8] (см. теорема 1.4.3). Таким образом, сумма $s(x)$ определена нами для множества последовательностей m^* , т. е. линейный функционал s , заданный условиями 1°—4° на Q (см. раздел 1.1), распространяется определением 1.3.1 на множество m^* .

Обозначим через $|x| = \{|x_k|\}$ последовательность абсолютных значений членов последовательности $x = \{x_k\}$.

Определение 1.3.3. Скажем, что последовательность x ограничено s -сходится (или \bar{s} -сходится) к $s(x)$ на Q , если она s -сходится к $s(x)$ на Q и $s(|x|, \bar{q}_n) < M$ для всех $\bar{q}_n \in Q$.

Теорема 1.3.2. Последовательность x \bar{s} -сходится на $Q = L$ тогда и только тогда, когда $x \in m$.

Эта теорема доказана в [8] (см. теорема 1.4.4). Мы можем теперь сказать, что множество ограниченных последовательностей является множеством \bar{s} -сходящихся последовательностей.

Пусть c — множество сходящихся последовательностей. Сумма $s(x)$, введенная определением 1.3.1, зависит от заданного функционала $s(\omega)$, определенного на Ω , так как значения последнего входят в выражение (1.3.2). Однако, если $x \in c$, то при каждом $\bar{q} = \{\bar{q}_n\}$ будет

$$\lim_n s(x, \bar{q}_n) = \sum_{v=0}^m \lim_n x_{v_n} s(\omega'_v) = \lim_n x_n \cdot 1$$

и, следовательно,

$$s(x) = \lim_n x_n, \quad (1.3.4)$$

т. е. для $x \in c$ понятие s -сходимости совпадает с понятием обычной сходимости, т. е. определение 1.3.1 может только, в зависимости от выбора Q , расширять понятие обычной сходимости, причем для $x \in c$ сумма $s(x)$ не зависит от выбора функционала $s(\omega)$. Если $Q = Q_0$, то предел (1.3.3) также превращается в (1.3.4) и тогда $s(x)$ определяется только на множестве c .

Таким образом, определение 1.3.1, в зависимости от выбора Q , определяет сумму $s(x)$ для последовательностей x из некоторого множества v^Q , заключенного в пределы

$$c \subseteq v^Q \subseteq m^*,$$

причем для $x \in c$ всегда справедливо равенство (1.3.4). Если $Q \subseteq Q_1$, где Q_1 — множество, данное определением 1.2.1, то $v^Q \subseteq v^{Q_1}$. Это следует непосредственно из определения 1.3.1.

1.4. Направленные семейства $x = \{x_h(q)\}$. В этом разделе мы покажем, что понятие s -сходимости применимо к более широкому классу последовательностей, чем класс ограниченных последовательностей.

Для этого, соответственно каждой системе $q = \{q_n\}$, построим последовательность $x = x(q) = \{x_h(q)\}$ следующим образом. Пусть каждому $\omega \in \Omega^\infty$ соответствует некоторая последовательность чисел $\{x_h(\omega_v)\}$. Пусть в системе $q = \{q_n\}$ будет $q_0 = \{\omega_v\}_{v=0}^m$. В каждой части $x\omega_v$ член $x_{v_n}(q)$ положим равным n -ному члену последовательности $\{x_h(\omega_v)\}$, т. е. пусть при каждом v будет

$$x_{v_n}(q) = x_n(\omega_v). \quad (1.4.1)$$

При этом будем считать, что в системе $q = \{q_n\}$ первому разложению q_0 соответствует член $x_{v_0}(q)$, второму разложению q_1 — член $x_{v_1}(q)$ и т. д., в общем будем считать, что разложению q_n соответствует $x_{v_n}(q)$.

Определим таким образом последовательность $x = \{x_h(q)\}$ для всех систем $q = \{q_n\}$. Это определение расширим на системы $\bar{q} = \{\bar{q}_n\}$. Если последовательность $x = \{x_h(q)\}$ соответствует системе $q = \{q_n\}$ с $q_0 = \{\omega_v\}_{v=0}^m$, то ее будем считать соответст-

вующей также всем системам $\bar{q} = \{\bar{q}_n\}$ с $\bar{q}_0 = \{\omega^\nu, \omega_\nu - \omega^\nu\}_{\nu=0}^m$. Различными будут только части, на которые можно разложить $x = \{x_h(q)\}$ и $x = \{x_h(\bar{q})\}$. Последовательность $x = \{x_h(q)\}$ составлена из частей $x\omega_\nu$, а $x = \{x_h(\bar{q})\}$ — из частей $x\omega^\nu$ и $x\omega'_\nu$, где $\omega'_\nu = \omega_\nu - \omega^\nu$. Следовательно, индексы ν_n при членах $x_{\nu_n}(q)$ и $x_{\nu_n}(\bar{q})$ имеют различные значения, если $\omega^\nu \neq \theta$, но оба члена принадлежат одной и той же части (1.4.1). Это явление мы подробно рассмотрели в начале раздела 1.3.

Возьмем один пример. Пусть элементу $\omega_0 = (1, 0, 1, 0, \dots)$ соответствует последовательность чисел $x_h(\omega_0) = a_h$, а элементу $\omega_1 = (0, 1, 0, 1, \dots)$ последовательность чисел $x_h(\omega_1) = b_h$. Тогда для $x = \{x_h(q)\}$ при $q = \{q_n\}$ с $q_0 = \{\omega_0, \omega_1\}$ будем иметь

$$x_{\nu_n}(q) = \begin{cases} a_n & \text{при } \nu = 0, \\ b_n & \text{при } \nu = 1. \end{cases}$$

Следовательно,

$$x\omega_0 = (a_0, 0, a_1, 0, \dots), \quad x\omega_1 = (0, b_0, 0, b_1, \dots)$$

и

$$x = \{x_h(q)\} = (a_0, b_0, a_1, b_1, \dots).$$

Эту же последовательность будем считать соответствующей всем системам $\bar{q} = \{\bar{q}_n\}$, полученным из $q = \{q_n\}$ с $q_0 = \{\omega_0, \omega_1\}$, т. е. $x = \{x_h(q)\} = \{x_h(\bar{q})\}$. Если $\bar{q}_0 = \{e_0, \omega'_0, \omega_1\}$, где $\omega'_0 = \omega_0 - e_0$, то

$$x_{\nu_n}(\bar{q}) = \begin{cases} a_{n+1} & \text{при } \nu = 0, \\ b_n & \text{при } \nu = 1. \end{cases}$$

Последовательности $x = x(q)$ будем называть q -последовательностями. По существу q -последовательности являются направленными семействами на Q . Поэтому мы иногда будем $x = \{x_h(q)\}$ записывать в виде обычной последовательности $x = \{x_h\}$, говоря, что это направленное семейство на Q , или, что это q -последовательность.

Обычную числовую последовательность $x = \{x_h\}$ можно рассматривать как частный случай q -последовательности $x = \{x_h(q)\}$, где $x_h(q) = x_h$ при каждом $q = \{q_n\}$. Последовательность $x = \{x_h(q)\}$ превращается в обычную последовательность также, если $Q = Q_0$.

Члены последовательности $x = \{x_h(q)\}$ определены однозначно, но члены последовательности $x = \{x_h(\bar{q})\}$ могут быть определены уже не однозначно, так как разложения \bar{q}^m_n можно получить из различных разложений q^m_0 . Например, разложение $\bar{q}^1 = \{e_0, \omega_0, \omega_1\}$ можно получить из разложения $q^1_0 = \{\omega_0 + e_0, \omega_1\}$, а также из $q^1_0 = \{\omega_0, \omega_1 + e_0\}$. Если этим разложениям соответствуют различные последовательности $\{x_h(\omega_\nu)\}$, то для $\bar{q} = \{\bar{q}^1_n\}$ будет $x = \{x_h(\bar{q})\}$ определен неоднозначно.

Примечание 1.4.1. Последовательность $x = \{x_h(q)\}$ по определению обладает следующим свойством. Если в двух системах $q = \{q_n\}$ с $q_0 = \{\omega_\nu\}_{\nu=0}^m$ и $q' = \{q'_n\}$ с $q'_0 = \{\omega'_\mu\}_{\mu=0}^m$ неко-

торые элементы ω_ν и ω'_μ равны, т. е. если $\omega_\nu = \omega'_\mu$ при некоторых ν и μ , то в последовательностях $x = \{x_h(q)\}$ и $x' = \{x_h(q')\}$ части $x\omega_\nu$ и $x'\omega'_\mu$ равны, т. е. $x\omega_\nu = x'\omega'_\mu$.

Примечание 1.4.2. Простой пример q -последовательности можно построить следующим образом. Пусть $x = \{x_h\}$ — обычная последовательность и пусть $q = \{q_n\}$ с $q_0 = \{\omega_\nu\}_{m_\nu=0} \in Q$. Для каждой части $x\omega_\nu$ определим разности

$$u_{\nu_n}(q) = x_{\nu_n} - x_{\nu_{n-1}}$$

Определив такие разности для всех систем $q = \{q_n\}$ с $q_0 \in Q^\infty$, мы получим q -последовательность $u = \{u_h(q)\}$.

Определим понятие суммы для $x = \{x_h(q)\}$. Аналогично, как в разделе 1.3, составим для систем $\bar{q} = \{q_n\}$ с $\bar{q}_0 = \{\omega^\nu, \omega'_\nu\}_{m_\nu=0}$, где $\omega'_\nu = \omega_\nu - \omega^\nu$, суммы

$$s(x, \bar{q}_n) = \sum_{\nu=0}^m x_{\nu_n}(\bar{q}) s(\omega'_\nu). \quad (1.4.2)$$

Пусть $|x| = \{|x_h(q)|\}$.

Определение 1.4.1. Скажем, что q -последовательность x s -ограничена на Q , если $s(|x|, \bar{q}_n) < M$ для всех $\bar{q}_n \in Q$.

Определение 1.4.2. Скажем, что q -последовательность $x = \{x_h(q)\}$ s -сходится на Q к сумме $s(x)$, если

$$\lim_Q s(x, \bar{q}_n) = s(x).$$

Определение 1.4.3. Скажем, что q -последовательность $x = \{x_h(q)\}$ ограничено s -сходится (или \bar{s} -сходится) на Q к сумме $s(x)$, если она s -ограничена и s -сходится к $s(x)$ на Q .

Множество всех s -сходящихся и \bar{s} -сходящихся q -последовательностей (при $Q = L$) обозначим соответственно через cs и $c\bar{s}$. Для $x \in t$ определение 1.4.2 совпадает с определением 1.3.1 и определение 1.4.3 с определением 1.3.3, т. е. определения 1.4.2 и 1.4.3 обобщают понятие s -сходимости и \bar{s} -сходимости на q -последовательности.

В качестве примера отметим, что q -последовательность $u = \{u_h(q)\}$ из примечания 1.4.2 s -сходится к нулю, так как

$$s(u, \bar{q}_n) = s(x, \bar{q}_n) - s(x, \bar{q}_{n-1}).$$

Следующие две теоремы дают условия для \bar{s} -сходимости q -последовательностей.

Теорема 1.4.1. Последовательность $x = \{x_h(q)\}$ s -сходится на Q тогда и только тогда, когда для каждого $\varepsilon > 0$ можно найти такое разложение $q_\varepsilon \in Q$, что

$$|s(x, \bar{q}_n^m) - s(x, \bar{q}_k^l)| < \varepsilon \quad (1.4.3)$$

для всех $\bar{q}_n^m \geq q_\varepsilon$ и $\bar{q}_k^l \geq q_\varepsilon$, где $\bar{q}_n^m \in Q$ и $\bar{q}_k^l \in Q$.

Теорема 1.4.2. Последовательность $x = \{x_h(q)\}$ s -сходится на Q тогда и только тогда, когда для каждого $\varepsilon > 0$ можно найти

такое разложение $q'_k \in Q$, что

$$|s(x, \bar{q}_n^m) - s(x, q'_k)| < \varepsilon \quad (1.4.4)$$

для всех $\bar{q}_n^m \geq \bar{q}'_k$, где $\bar{q}_n^m \in Q$.

Эти теоремы являются частными случаями теорем 1.2.1 и 1.2.2. Эти же теоремы 1.4.1 и 1.4.2 применимы и для \bar{s} -сходимости на Q при дополнительном условии s -ограниченности.

Примечание 1.4.3. В теоремах 1.4.1 и 1.4.2 вместо разложений q_ε и \bar{q}'_k можно взять любое их продолжение, так как это может только усилить неравенства. Это следует также из доказательств этих теорем.

Примечание 1.4.4. Если \bar{s} -сходимость задана на Q , то каждая $\omega \in \Omega_Q$ также \bar{s} -сходится на Q .

Следующая теорема показывает, что s -сходимость обладает свойством аддитивности.

Теорема 1.4.3. Если $x = \{x_k(q)\}$ s -сходится на Q , то любая ее часть $x\omega$, где $\omega \in \Omega^\infty_Q$, также s -сходится на Q .

Доказательство. Пусть $x = \{x_k(q)\}$ s -сходится на Q . Тогда по теореме 1.4.2 для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\bar{q}'_k \in Q$, что выполняется неравенство (1.4.4) для любого $\bar{q}_n^m \geq \bar{q}'_k$. Покажем, что произвольная часть $x\omega$, где $\omega \in \Omega^\infty_Q$, s -сходится. Для этого предположим, что мы выбрали \bar{q}'_k так, что $\bar{q}'_k \geq q' = \{\omega, \omega'\}$ (см. примечание 1.4.3). В неравенстве (1.4.4) при каждом разложении \bar{q}_n^m возьмем части $\omega' \bar{q}_n^m$ и $\omega' \bar{q}'_k$ одинаковыми (см. примечание 1.2.2) и затем продолжим часть $\omega' q'_k$ так, чтобы было

$$s(\omega'x, \bar{q}_n^m) = s(\omega'x, \bar{q}'_k).$$

Так как при каждом \bar{q}_n^m имеем

$$s(x, \bar{q}_n^m) = s(x\omega, \bar{q}_n^m) + s(x\omega', \bar{q}_n^m),$$

то неравенство (1.4.4) превращается в

$$|s(x\omega, \bar{q}_n^m) - s(x\omega, \bar{q}'_k)| < \varepsilon$$

при каждом $\bar{q}_n^m \geq \bar{q}'_k$, т. е. часть $x\omega$ s -сходится по теореме 1.4.2. Теорема доказана.

Аналогичная теорема справедлива и для \bar{s} -сходимости. При $Q = Q_0$ теорема становится тривиальной, так как тогда Ω^∞_Q содержит только один элемент $\omega = e$. При $Q = L$ в теореме часть $x\omega$ может быть уже любая. Тогда Ω^∞_Q содержит все ω с бесконечным числом единиц. Для последовательностей $x \in m$ теорема 1.4.3 при $Q = L$ следует из теоремы 1.3.2, так как каждая часть $x\omega \in m$.

Примечание 1.4.5. Из доказательства теоремы 1.4.3 видно, что если для q -последовательности x выполняется неравенство (1.4.4), то это же неравенство будет выполняться и для любой части $x\omega$, где $\omega \in \Omega^\infty_Q$, при тех же ε и \bar{q}'_k . То же самое справедливо и для неравенства (1.4.3).

Примечание 1.4.6. Если элемент ω_v такой, что $s(\omega_v) = 0$, то мы можем допустить, что последовательность $x = \{x_h(q)\}$ в части $x\omega_v$ имеет бесконечные значения $x_{v_n} = \infty$, так как при определении s -сходимости встречаются лишь произведения $x_{v_n}s(\omega_v)$. Тогда нужно только каждому символу $x_{v_n}s(\omega_v) = \infty \cdot 0$ задать определенные значения X_{v_n} т. е. считать, что $x_{v_n}s(\omega_v) = X_{v_n}$. Для таких $x = \{x_h(q)\}$ понятие s -сходимости дается также определением 1.4.2. Остаются справедливыми и теоремы 1.4.1, 1.4.2 и 1.4.3.

Теорема 1.4.4. Если q -последовательность $x = \{x_h(q)\}$ s -сходится, то при каждом $\varepsilon > 0$ существует такое разложение q_ε и число N , что

$$\sum_{v=0}^m |x_{v_n}(q) - x_{v_k}(q)|s(\omega_v) < \varepsilon \quad (1.4.5)$$

для всех разложений $q^m = \{\omega_v\}_{v=0}^m \geq q_\varepsilon$ при $n, k \geq N$.

Доказательство. Из-за s -сходимости, последовательность x удовлетворяет неравенству (1.4.3), которое при $l = m$ превращается в

$$\left| \sum_{v=0}^m [x_{v_n}(q) - x_{v_k}(q)]s(\omega_v) \right| < \varepsilon. \quad (1.4.6)$$

Пусть в (1.4.6) k и n зафиксированы. Не умаляя общности мы можем предположить, что

$$x_{v_n}(q) - x_{v_k}(q) \begin{cases} \geq 0 & \text{при } 0 \leq v \leq l, \\ < 0 & \text{при } l+1 \leq v \leq m. \end{cases} \quad (1.4.7)$$

Учитывая примечание 1.4.5, можно вместо (1.4.6) написать

$$\left| \sum_{v=0}^l [x_{v_n}(q) - x_{v_k}(q)]s(\omega_v) \right| < \varepsilon,$$

откуда, ввиду (1.4.7),

$$\sum_{v=0}^l |x_{v_n}(q) - x_{v_k}(q)|s(\omega_v) < \varepsilon.$$

Аналогично,

$$\sum_{v=l+1}^m |x_{v_n}(q) - x_{v_k}(q)|s(\omega_v) < \varepsilon.$$

Из последних двух неравенств следует неравенство (1.4.5). Аналогичные рассуждения справедливы и при других k и n , а также при других разложениях q^m . Теорема доказана.

§ 2. Суммирование последовательностей

2.1. Определение метода \mathfrak{A} . Пусть задано множество Q . Предположим, что каждой $\omega_v \in \Omega^\infty_Q$ поставлено в соот-

ветствие одна и только одна матрица $\{a_{nh}(\omega_v)\}$. Каждой системе разложений $q = \{q_n\}$ с $q_0 = \{\omega_v\}_{m_{v=0}} \in Q^\infty$ поставим в соответствие матрицу $\mathfrak{A} = \{a_{nh}(q)\}$, где

$$a_{nv_h}(q) = a_{nh}(\omega_v), \quad (2.1.1)$$

следующим образом: пусть разложению q_0 соответствует первая строка $a_{0h}(q)$ из матрицы \mathfrak{A} , разложению q_1 — вторая строка $a_{1n}(q)$ и т. д., в общем пусть разложению q_n соответствует n -ная строка $a_{nh}(q)$ из матрицы \mathfrak{A} .

Пусть задано некоторое направленное семейство $x = \{x_h(q)\}$. Определим q -последовательность $y = \{y_n\}$ следующим образом: в каждой части $y\omega_v$ элементы y_{v_n} определим равенством

$$y_{v_n}s(\omega_v) = \sum_k x_{v_h}(q)a_{nh}(\omega_v), \quad (2.1.2)$$

предполагая, что сумма справа существует. Если $s(\omega_v) = 0$, то предположим, что существует произведение $y_{v_n}s(\omega_v)$, равное сумме из (2.1.2) (см. примечание 1.4.6). Ввиду (2.1.1) мы можем написать

$$\sum_{v=0}^m y_{v_n}s(\omega_v) = \sum_{v=0}^m \sum_k x_{v_h}a_{nv_h}(q) = \sum_k x_h a_{nh}(q).$$

Обозначив

$$\mathfrak{A}(x, q_n) = \sum_k x_h a_{nh}(q), \quad (2.1.3)$$

мы получим равенство

$$s(y, q_n) = \mathfrak{A}(x, q_n), \quad (2.1.4)$$

причем

$$s(y\omega_v, q_n) = \mathfrak{A}(x\omega_v, q_n).$$

Направленное семейство $y = \{y_n\}$, определенное в (2.1.2), будем называть \mathfrak{A} -преобразованием направленного семейства $x = \{x_h\}$. Если $x = \{x_h\}$ обычная последовательность, то \mathfrak{A} -преобразованная последовательность y будет также направленным семейством на Q .

Пусть $Y_{v_n} = y_{v_n}s(\omega_v)$. Для каждой системы $q = \{q_n\}$ с $q_0 = \{\omega_v\}_{m_{v=0}} \in Q^\infty$ определим матрицу $\{a_{nh}(q)\}$ следующим образом: при каждом $v = 0, 1, \dots, m$ положим

$$a_{v_nv_h}(q) = a_{nh}(\omega_v), \quad (2.1.5)$$

а остальные $a_{nh}(q) = 0$. Тогда

$$Y_n = \sum_h a_{nh}(q)x_h \quad (2.1.6)$$

и

$$y_{v_n}s(\omega_v) = \sum_k a_{v_nv_h}(q)x_{v_h}. \quad (2.1.7)$$

Таким образом, матрица $\{a_{nk}(q)\}$ преобразовывает q -последовательность $x = \{x_k(q)\}$ в последовательность $y = \{y_n(q)\}$. Матрицу $\{a_{nk}(q)\}$ мы будем называть *матрицей преобразования* \mathfrak{A} и обозначать также буквой \mathfrak{A} . Если матрицы $\{a_{nk}(\omega_v)\}$ треугольны, то матрица $\mathfrak{A} = \{a_{nk}(q)\}$ также треугольна.

Пример 2.1.1. Составим матрицу $\{a_{nk}(q)\}$ для системы $q = \{q_n\}$, где $q_0 = \{\omega_0, \omega_1\}$ с $\omega_0 = (1, 0, 1, 0, \dots)$ и $\omega_1 = (0, 1, 0, 1, \dots)$. Элементам ω_0 и ω_1 по определению соответствуют матрицы $\{a_{nk}(\omega_0)\}$ и $\{a_{nk}(\omega_1)\}$. Согласно равенству (2.1.5) матрица $\mathfrak{A} = \{a_{nk}(q)\}$ будет иметь следующий вид:

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} a_{00}(\omega_0) & 0 & a_{01}(\omega_0) & 0 & \dots \\ 0 & a_{00}(\omega_1) & 0 & a_{01}(\omega_1) & \dots \\ a_{10}(\omega_0) & 0 & a_{11}(\omega_0) & 0 & \dots \\ 0 & a_{10}(\omega_1) & 0 & a_{11}(\omega_1) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Если матрицы $\{a_{nk}(\omega_0)\}$ и $\{a_{nk}(\omega_1)\}$ треугольны, то матрица $\{a_{nk}(q)\}$ также треугольна.

Пусть наряду с системой $q = \{q_n\}$, где $q_0 = \{\omega_v\}_{v=0}^m \in Q^\infty$, дана какая-нибудь система $\bar{q} = \{\bar{q}_n\}$ с $\bar{q}_0 = \{\omega^v, \omega_v - \omega^v\}$, где ω^v имеет конечное число единиц. Определим величину (2.1.3) для системы $\bar{q} = \{\bar{q}_n\}$ так, чтобы было

$$s(y, \bar{q}_n) = \mathfrak{A}(x, \bar{q}_n). \quad (2.1.8)$$

Величину $s(y, \bar{q}_n)$ для направленных семейств $y = \{y_n(q)\}$ мы уже определили в разделе 1.4 равенством (1.4.2). Поставим каждому $\bar{q} = \{\bar{q}_n\}$ в соответствие ту же матрицу $\{a_{nk}(q)\}$, которую мы определили для системы $q = \{q_n\}$, и определим

$$a_{nv_k}(\bar{q}) = a_{v_n v_k}(q),$$

где первый индекс v_n — индекс от y_{v_n} из части y_{ω^v} , где $\omega^v = \omega_v - \omega^v$.

Для полученных элементов $a_{nk}(q)$ будет выполняться равенство (2.1.8). Действительно, вместо (2.1.7) имеем

$$y_{v_n} s(\omega^v) = \sum_k x_{v_k} a_{v_n v_k}(q)$$

и

$$\begin{aligned} s(y, \bar{q}_n) &= \sum_{v=0}^m \sum_k x_{v_k} a_{v_n v_k}(q) = \\ &= \sum_{v=0}^m \sum_k x_{v_k} a_{nv_k}(\bar{q}) = \sum_k x_k a_{nk}(\bar{q}) = \mathfrak{A}(x, \bar{q}_n). \end{aligned}$$

Если $\bar{q} = q$, то равенство (2.1.8) превращается в (2.1.4).

Определение 2.1.1. Скажем, что q -последовательность $x = \{x_k(q)\}$ суммируема на Q континуальным методом \mathfrak{A} (или \mathfrak{A} -суммируема) к сумме $\mathfrak{A}(x)$, если ее \mathfrak{A} -преобразование $y = \{y_n(q)\}$ s -сходится на Q к $\mathfrak{A}(x)$, т. е., если

$$\lim_Q s(y, \bar{q}_n) = \mathfrak{A}(x),$$

где $s(y, \bar{q}_n)$ определено равенством (2.1.8).

Определение 2.1.2. Скажем, что q -последовательность $x = \{x_k(q)\}$ ограничено \mathfrak{A} -суммируема (или $\bar{\mathfrak{A}}$ -суммируема) к $\mathfrak{A}(x)$, если ее \mathfrak{A} -преобразование $y = \{y_n(q)\}$ s -сходится на Q к $\mathfrak{A}(x)$.

Матрицу $\mathfrak{A} = \{a_{nk}(\bar{q})\}$ будем называть матрицей метода \mathfrak{A} . Как видно, мы метод и его матрицу обозначаем одной и той же буквой, как это делают и в случае обычных матричных методов суммирования. Поэтому мы иногда будем метод обозначать коротко через $\mathfrak{A} = \{a_{nk}(\bar{q})\}$, т. е. отождествлять его с матрицей метода.

Множества всех \mathfrak{A} -суммируемых и $\bar{\mathfrak{A}}$ -суммируемых направленных семейств $x = \{x_k(q)\}$ обозначим соответственно через $s\mathfrak{A}$ и $s\bar{\mathfrak{A}}$, и будем называть соответственно полями суммируемости и ограниченной суммируемости метода \mathfrak{A} . Имеем $s\bar{\mathfrak{A}} \subset s\mathfrak{A}$.

Метод \mathfrak{A} назовем *треугольным* на Q , если все матрицы $\{a_{nk}(\omega_v)\}$, где $\omega_v \in \Omega^\infty_Q$, треугольны. Тогда, как мы уже отметили, матрица \mathfrak{A} -преобразования $\{a_{nk}(q)\}$ также треугольна.

Если $Q = L$, то мы получаем самый сильный метод \mathfrak{A} . При $Q = Q_0$ у нас будет только одна система разложений $q = \{q_n\} \in Q^\infty$ с $q_0 = \{e\}$, и метод \mathfrak{A} определяется только одной матрицей $\{a_{nk}(q)\}$, т. е. мы можем написать $a_{nk}(q) = a_{nk}(e) = a_{nk}$. Вместо (2.1.3) имеем тогда

$$\mathfrak{A}(x, q_n) = \sum_k a_{nk} x_k,$$

а выражения (2.1.2) и (2.1.4) совпадают и дают

$$y_n = \sum_k a_{nk} x_k.$$

Следовательно,

$$\mathfrak{A}(x) = \lim y_n,$$

т. е. при $Q = Q_0$ континуальный метод \mathfrak{A} превращается в обычный матричный метод суммирования $A = (a_{nk})$. В этом случае матрица метода \mathfrak{A} и матрица преобразования \mathfrak{A} совпадают.

Примечание 2.1.1. Мы можем метод \mathfrak{A} определить и так. При каждом $\omega_v \in \Omega^\infty_Q$ определим матрицу $\{a_{nk}(q)\}$ не равенством (2.1.5), а равенством

$$a_{v_n v_k}(q) = a_{nk}(\omega_v) s(\omega_v). \quad (2.1.9)$$

Тогда из (2.1.2) или (2.1.7) получаем последовательность $y = \{y_n(q)\}$, где

$$y_{v_n} = \sum_k x_{v_k} a_{nk}(\omega_v),$$

т. е. каждая матрица $\{a_{nk}(\omega_v)\}$ преобразовывает часть $x\omega_v$ в часть $y\omega_v$.

Примечание 2.1.2. В определениях 2.1.1 и 2.1.2 мы можем вместо предела $\lim s(y, \bar{q}_n)$ взять предел $\lim s(y, q_n)$, определенный аналогично определению 1.2.2, используя только разложения $q = \{q_n\}$ с $q_0 \in Q^\infty$. Тогда получим определение метода \mathfrak{A} , данное в статье [8], но тогда у метода нет некоторых важных свойств, которые будут изучены в следующем параграфе 3 (см. теорема 3.1.3).

Примечание 2.1.3. Если все матрицы $\{a_{nh}(\omega_v)\}$ при $\omega_v \in \Omega^\infty_Q$ одинаковы, т. е.

$$a_{nh}(\omega_v) = a_{nh}$$

при всех $\omega_v \in \Omega^\infty_Q$, то равенство (2.1.4), где $q = \{q_n\}$ с $q_0 \in Q^\infty$, превращается в

$$\bar{s}(y, q_n) = \sum_k a_{nh} s(x, q_h), \quad (2.1.10)$$

и мы для определения суммируемости можем применить предел $\lim_Q s(y, q_n)$, отмеченный в предыдущем примечании 2.1.2. Тогда получим метод \mathfrak{A}_2 из [8]. Для $\bar{q} = \{\bar{q}_n\}$ равенство (2.1.10) усложняется.

2.2. Единичные континуальные методы. Пусть задано множество Q . Пусть, как и выше (см. (1.2.1)), в последовательности $\omega_v \in \Omega^\infty$ единицы расположены в местах с индексами ν_n , а остальные члены равны нулю. Зададим матрицу $\mathfrak{A} = \{a_{nh}(q)\}$ следующим образом: для всех систем $q = \{q_n\}$ с $q_0 = \{\omega_v\}_{v=0}^m \in Q^\infty$ положим

$$a_{nh}(q) = \begin{cases} s(\omega_v) & \text{при } k = \nu_n, \\ 0 & \text{при } k \neq \nu_n. \end{cases} \quad (2.2.1)$$

Это значит, что

$$a_{nh}(\omega_v) = \begin{cases} s(\omega_v) & \text{при } k = \nu_n, \\ 0 & \text{при } k \neq \nu_n. \end{cases}$$

во всех матрицах $\{a_{nh}(\omega_v)\}$.

Определение 2.2.1. Метод $\mathfrak{A} = \{a_{nh}(q)\}$, где $a_{nh}(q)$ даны равенством (2.2.1), назовем единичным континуальным методом суммирования и обозначим буквой α .

В случае единичного континуального метода α величину (2.1.1) будем обозначать через $\alpha(x, q_n)$, поле суммируемости через $s\alpha$. Ввиду (2.2.1) мы имеем

$$\alpha(x, q_n) = s(x, q_n),$$

т. е., если $\mathfrak{A} = \alpha$, то \mathfrak{A} -суммируемость на Q превращается в s -сходимость на Q . Следовательно, единичные методы α суммируют только s -сходящиеся направленные семейства и всегда $\alpha(x) = s(x)$.

При $Q = L$ мы будем единичный метод α обозначать через s . Единичный метод s , следовательно, будет самым сильным из единичных континуальных методов α . Его полем суммируемости является все множество s -сходящихся q -последовательностей.

Самый слабый единичный метод получается при $Q = Q_0$, тогда $ca = c$. Ограниченная α -суммируемость т. е. $\bar{\alpha}$ -суммируемость совпадает с \bar{s} -сходимостью на Q и при $Q = L$ имеем $ca \supset m$.

Из (2.2.1) видно, что единичный метод α определяется заданием Q . Таким образом, для каждого континуального метода \mathfrak{A} , заданного на Q , имеется единичный метод $\bar{\alpha}$, определенный на этом же Q . Такой метод α назовем единичным методом, *соответствующим* методу \mathfrak{A} .

Введем символ $\delta_{nk}(q)$, где для $q = \{q_n\}$ с $q_0 = \{\omega_v\}_{v=0}^m$ положим

$$\delta_{v_n v_k}(q) = \begin{cases} s(\omega_v) & \text{при } n = k, \\ 0 & \text{при } n \neq k, \end{cases} \quad (2.2.2)$$

$$\delta_{nk}(q) = 0 \quad \text{для остальных индексов.}$$

При $q_0 = \{e\}$ этот символ превращается в обычный символ Кронекера

$$\delta_{nk} = \begin{cases} 1 & \text{при } n = k, \\ 0 & \text{при } n \neq k. \end{cases}$$

Для единичного метода α матрицей преобразования будет матрица $\{\alpha_{nk}(q)\}$, где

$$\alpha_{nk}(q) = \delta_{nk}(q),$$

а равенство (2.1.2) принимает вид

$$y_{v_n} s(\omega_v) = x_{v_n} s(\omega_v),$$

и вместо (2.1.4) имеем

$$s(y, q_n) = s(x, q_n),$$

т. е. единичный метод α преобразовывает направленное семейство x снова в то же направленное семейство x , являясь, таким образом, идентичным преобразованием. Поэтому матрицу преобразования единичного метода мы будем называть *единичной* матрицей и обозначать через

$$\mathfrak{E} = \{\delta_{nk}(q)\}.$$

Пример 2.2.1. Возьмем систему разложений $q = \{q_n\}$ из примера 2.1.1. Тогда матрица преобразования единичного метода α будет иметь вид

$$\mathfrak{E} = \begin{pmatrix} s(\omega_0) & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & s(\omega_1) & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & s(\omega_0) & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & s(\omega_1) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

2.3. Реверсивные методы \mathfrak{A} . Пусть метод \mathfrak{A} задан на некотором Q и пусть α — соответствующий единичный метод, т. е. единичный метод, заданный на этом же Q . Тогда для каждого направленного семейства $x \in c\mathfrak{A}$ будем иметь направленное семейство $y \in ca$, определенное равенством (2.1.2).

Определение 2.3.1. Если каждому направленному семейству $y \in sa$ при каждой системе q соответствует одно и только одно направленное семейство $x = \{x_h(q)\}$, то скажем, что метод \mathfrak{M} c -реверсивен на Q .

Аналогично определяется b -реверсивность для ограниченной \mathfrak{M} -суммируемости.

Согласно определению 2.3.1 c -реверсивность означает, что система (2.1.2) имеет для каждого $y \in sa$ при каждом q одно и только одно решение $x = \{x_h(q)\}$.

Если метод \mathfrak{M} треуголен, то система (2.1.2) принимает вид

$$y_{v_n} s(\omega_v) = \sum_{h=0}^n x_{v_h} a_{nv_h}(q). \quad (2.3.1)$$

Назовем метод \mathfrak{M} *нормальным*, если он треуголен и при каждом v элементы $a_{nv_n}(q) \neq 0$. В этом случае при каждом v система (2.3.1) разрешима относительно x_{v_n} , т. е. нормальный метод \mathfrak{M} реверсивен. Имеет место следующая

Теорема 2.3.1. Метод \mathfrak{M} c -реверсивен тогда и только тогда, когда при каждом $q^m = \{\omega_v\}_{v=0}^m \in Q^\infty$ системы (2.1.2) имеют одно и только одно решение для каждого $y_{v_n} \in sa$.

Доказательство. **Необходимость.** Пусть метод \mathfrak{M} c -реверсивен. Если $y \in sa$, то по теореме 1.4.3 также ее каждая часть y_{v_n} , где $\omega_v \in \Omega^\infty Q$, принадлежит sa и для этой части y_{v_n} также должно соответствовать одно и только одно направленное семейство $x_{v_n} \in c\mathfrak{M}$. Это и означает, что система (2.1.2) имеет одно и только одно решение для каждого $y_{v_n} \in sa$. Если $s(\omega_v) = 0$, то рассматриваем решение системы (2.1.2) относительно произведения $y_{v_n} s(\omega_v)$ (см. примечание 1.4.6).

Достаточность. Если система (2.1.2) при каждом v имеет одно и только одно решение, то каждому $y_{v_n} \in sa$ соответствует одно и только одно направленное семейство $x_{v_n} \in c\mathfrak{M}$. Учитывая теперь определение направленного семейства $y = \{y_n\}$, видим, что каждому $y = y_{v_0} + y_{v_1} + \dots + y_{v_m} \in sa$ соответствует одно и только одно направленное семейство $x = x_{v_0} + x_{v_1} + \dots + x_{v_m}$, т. е. метод \mathfrak{M} c -реверсивен. Теорема доказана.

Аналогичную теорему можно доказать и для b -реверсивности.

Примечание 2.3.1. Если метод \mathfrak{M} задан матрицами $\{a_{nh}(\omega_v)\}$ так, как это показано в примечании 2.1.1, то для c -реверсивности метода \mathfrak{M} необходима и достаточна реверсивность каждой матрицы $\{a_{nh}(\omega_v)\}$, относительно ограниченных последовательностей, т. е. чтобы каждая система (2.1.2) имела одно и только одно решение при каждом $y \in m$. В данном случае $s(\omega_v)$ выпадает из системы (2.1.2), так как имеем

$$y_{v_n} s(\omega_v) = \sum_h x_{v_h} a_{nh}(\omega_v) s(\omega_v),$$

откуда

$$y_{v_n} = \sum_k x_{v_k} a_{nk}(\omega_v). \quad (2.3.2)$$

Если $s(\omega_v) = 0$, то также считаем, что y определяется равенством (2.3.2). В данном случае метод \mathfrak{A} будем называть треугольным, если все матрицы $\{a_{nk}(\omega_v)\}$ треугольны, и нормальным, если он треуголен и все $a_{nn}(\omega_v) \neq 0$.

2.4. Поля суммируемости. Рассмотрим вначале поля ограниченной суммируемости единичных методов суммирования α , т. е. поля α_1 .

Пусть метод α задан на Q . В поле α_1 для каждого $x = \{x_k(q)\}$ введем норму

$$\|x\|_{\alpha_1} = \sup_{\bar{q}_n \in Q} s(|x|, \bar{q}_n), \quad (2.4.1)$$

где

$$s(|x|, q_n) = \sum_{v=0}^m |x_{v_n}| s(\omega_v). \quad (2.4.2)$$

Чтобы в (2.4.1) из $\|x\| = 0$ следовало $x = \theta$, нужно при $s(\omega_v) = 0$ считать, что $|x_{v_n}| s(\omega_v) = 0$ влечет $x_{v_n} = 0$.

Теорема 2.4.1. *Множество α_1 при любом Q является полным нормированным пространством с нормой (2.4.1), в котором имеет место сходимость по координатам, т. е. ВК-пространством.*

Доказательство. Покажем вначале, что в α_1 имеет место сходимость по координатам. Пусть направленные семейства $x^t = \{x^t_k\}$ и $x = \{x_k\}$ принадлежат пространству α_1 и пусть $x^t \rightarrow x$ при $t \rightarrow \infty$ по норме (2.4.1). Тогда при каждом $\varepsilon > 0$ можно найти число $M(\varepsilon)$ такое, что $\|x^t - x\| < \varepsilon$ при $t > M(\varepsilon)$. Следовательно,

$$|x^t_{v_n} - x_{v_n}| s(\omega_v) \leq \|x^t - x\| < \varepsilon$$

при $t \geq M(\varepsilon)$, т. е. $x^t_{v_n} \rightarrow x_{v_n}$ при каждом v_n , если $t \rightarrow \infty$. Если $s(\omega_v) = 0$, то полагаем

$$|x^t_{v_n} - x_{v_n}| s(\omega_v) = |x^t_{v_n} s(\omega_v) - x_{v_n} s(\omega_v)|,$$

т. е. тогда $x^t_{v_n} s(\omega_v) \rightarrow x_{v_n} s(\omega_v)$. При этом мы символически также записываем $x^t_{v_n} \rightarrow x_{v_n}$.

Докажем теперь полноту пространства α_1 . Возьмем фундаментальную последовательность направленных семейств $x^t = \{x^t_k\} \in \alpha_1$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ можно найти число M такое, что $\|x^t - x^u\| < \varepsilon$ при $t, u \geq M$. Следовательно,

$$\sum_{v=0}^m |x^t_{v_n} - x^u_{v_n}| s(\omega_v) < \varepsilon \quad (2.4.3)$$

при $t, u \geq M$ независимо от $q_0 = \{\omega_v\}_{v=0}^m \in Q$, т. е. при каждом v_n существует предел $x^{t_{v_n}} \rightarrow x_{v_n}$. Если в (2.4.3) $u \rightarrow \infty$, то

$$\sum_{v=0}^m |x^{t_{v_n}} - x_{v_n}| s(\omega_v) < \varepsilon$$

при $t > M$ независимо от $q_n \in Q$. Следовательно, для направленного семейства $x = \{x_k\}$ будем иметь $\|x^t - x\| \leq \varepsilon$ при $t \geq M$, т. е. последовательность x^t сходится к x при $t \rightarrow \infty$. Остается показать, что $x \in \bar{ca}$. Для этого рассмотрим разность

$$\begin{aligned} s(x, \bar{q}^{m_n}) - s(x, \bar{q}^k) &= s(x, \bar{q}^{m_n}) - s(x^t, \bar{q}^{m_n}) + \\ &+ s(x^t, \bar{q}^{m_n}) - s(x^t, \bar{q}^k) + \\ &+ s(x^t, \bar{q}^k) - s(x, \bar{q}^k) = \\ &= I + II + III. \end{aligned}$$

Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Так как $x^t \rightarrow x$ по норме (2.4.1), то мы можем выбрать постоянную M такую, что $I \leq \|x - x^t\| < \varepsilon$ и $III \leq \|x - x^t\| < \varepsilon$ при $t \geq M$. Из-за $x^t \in ca$ существует такое разложение $q_\varepsilon \in Q$, что $II < \varepsilon$ при $q^{m_n} \geq q_\varepsilon$ и $q^k \geq q_\varepsilon$. Следовательно, тогда

$$|s(x, \bar{q}^{m_n}) - s(x, \bar{q}^k)| < 3\varepsilon.$$

По теореме 1.4.1 будет $x \in \bar{ca}$. Теорема доказана.

Во множестве m для $x = \{x_n\}$ обычно определяется норма

$$\|x\|_m = \sup |x_n|. \quad (2.4.4)$$

При любом Q (из-за условия 2° определения 1.2.1) норма (2.4.1) для $x \in m$ превращается в норму (2.4.4), т. е. для $x \in m$

$$\|x\|_{ca} = \|x\|_m. \quad (2.4.5)$$

Норма (2.4.1), следовательно, дает другое выражение для нормы в m .

Перейдем теперь к рассмотрению полей ограниченной \mathfrak{A} -суммируемости, т. е. полей $c\bar{\mathfrak{A}}$. Пусть $y = \{y_n\}$ есть \mathfrak{A} -преобразование направленного семейства $x = \{x_k\} \in c\bar{\mathfrak{A}}$, определенное равенством (2.1.2). Пусть \mathfrak{A} b -реверсивен на Q . Определим в $c\bar{\mathfrak{A}}$ для каждого направленного семейства $x = \{x_k\}$ норму

$$\|x\|_{c\bar{\mathfrak{A}}} = \sup_{\bar{q}_n \in Q} s(|y|, \bar{q}_n) \quad (2.4.6)$$

Пусть α — единичный метод, заданный на Q , т. е. соответствующий методу \mathfrak{A} . Тогда можем написать, что

$$\|x\|_{c\bar{\mathfrak{A}}} = \|y\|_{c\bar{\alpha}} \quad (2.4.7)$$

Теорема 2.4.2. Если метод \mathfrak{A} b -реверсивен на Q , то поле суммируемости $c\bar{\mathfrak{A}}$ является ВК-пространством с нормой (2.4.6).

Доказательство. Докажем полноту пространства $c\bar{\mathfrak{A}}$. Возьмем в $c\bar{\mathfrak{A}}$ фундаментальную последовательность направленных семейств $x^t = \{x_k^t\}$. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ можно выбрать постоянную M такую, что

$$\|x^t - x^u\|_{c\bar{\mathfrak{A}}} < \varepsilon$$

при $t, u \geq M$. Пусть $y^t = \{y_n^t\}$ будет \mathfrak{A} -преобразованием направленного семейства x^t . Ввиду равенства (2.4.7) будет $\|y^t - y^u\| < \varepsilon$ при $t, u \geq M$. Но $c\bar{\mathfrak{A}}$ является ВК-пространством, то y^t сходится к некоторому направленному семейству $y = \{y_n\} \in c\bar{\mathfrak{A}}$. Из-за b -реверсивности направленному семейству $y \in c\bar{\mathfrak{A}}$ соответствует одно и только одно направленное семейство $x = \{x_k\} \in c\bar{\mathfrak{A}}$, причем

$$\|x^t - x\|_{c\bar{\mathfrak{A}}} = \|y^t - y\|_{c\bar{\mathfrak{A}}} < \varepsilon$$

при $t > M$, т. е. $x^t \rightarrow x$ в $c\bar{\mathfrak{A}}$ по норме (2.4.6). Следовательно, $c\bar{\mathfrak{A}}$ — полное нормированное пространство, т. е. B -пространство.

Остается показать, что в $c\bar{\mathfrak{A}}$ имеет место сходимост по координатам. Достаточно показать, что $y \rightarrow \Theta$ влечет $x_k(q) \rightarrow 0$ при каждом k и q . Множество последовательностей $y = \{y_k(q)\} \in c\bar{\mathfrak{A}}$ при каждой системе $q = \{q_n\}$ составляет также ВК-пространство с нормой

$$\|y\|_q = \sup_n s(|y|, q^n).$$

Это видно из доказательства теоремы 2.4.1. Обозначим это множество через ca_q . В силу одной известной теоремы Банаха ([10], стр. 47, теорема 10) существует линейный непрерывный функционал $f_k(y, q)$, определенный в ca_q такой, что

$$x_k(q) = f_k(y, q), \quad (2.4.8)$$

где $x = \{x_k(q)\}$ и $y = \{y_n(q)\}$ связаны равенством (2.1.2). Так как $f_k(y, q)$ при каждом k и q линеен и непрерывен, то $y \rightarrow \Theta$ влечет $x_k(q) \rightarrow 0$ при каждом k и q . Если для части $x\omega_v$, соответствующей части $y\omega_v$, будет $s(\omega_v) = 0$, то нужно рассматривать то же самое относительно произведения $y_{v_n}s(\omega_v)$, как указано в примечании 1.4.6.

§ 3. Общие свойства континуальных методов суммирования

3.1. Консервативные методы. Пусть метод $\mathfrak{A} = \{a_{nh}(q)\}$ задан на Q . Предположим, что существуют числа

$$\varrho(\mathfrak{A}, \omega_v) = \mathfrak{A}(\omega_v) - \sum_n \mathfrak{A}(e_{v_n})$$

для всех $\omega_v \in \Omega^\infty_Q$. Пусть задана система разложений $\bar{q} = \{\bar{q}_n\}$ с $\bar{q}_0 = \{\omega^v, \omega_v - \omega^v\}_{m_v=0} \in Q$ и обычная последовательность $x = \{x_k\}$. Из ее каждой части $x\omega'_v$, где $\omega'_v = \omega_v - \omega^v$, возьмем элемент x_{v_n} и составим сумму

$$S^{\mathfrak{A}}(x, q_n) = \sum_{v=0}^m x_{v_n} \varrho(\mathfrak{A}, \omega'_v). \quad (3.1.1)$$

Определение 3.1.1. Число $S^{\mathfrak{A}}(x)$ будем называть \mathfrak{A} -интегралом на Q для последовательности x , если

$$S^{\mathfrak{A}}(x) = \lim_Q S^{\mathfrak{A}}(x, \bar{q}_n).$$

Если \mathfrak{A} -интеграл для x существует, то он однозначно определен как предел типа Мура—Шатуновского (см. определение 3.1.1. из [8]).

Назовем число

$$W^{\mathfrak{A}}(q_n) = \sum_{v=0}^m [|\mathfrak{A}(\omega_v) - \sum_{k=0}^{n-1} \mathfrak{A}(e_{v_k})| + \sum_{k=0}^{n-1} |\mathfrak{A}(e_{v_k})|], \quad (3.1.2)$$

где $q_n \in Q$, вариационной суммой метода \mathfrak{A} на Q .

Определение 3.1.2. Скажем, что метод \mathfrak{A} с ограниченной вариацией на Q , если существует такое число $M > 0$, что $W^{\mathfrak{A}}(q_n) < M$ для всех $q_n \in Q$.

Определение 3.1.3. Верхнюю грань вариационных сумм $W^{\mathfrak{A}}(q_n)$ на Q назовем вариацией метода \mathfrak{A} на Q .

Вариацию метода \mathfrak{A} обозначим через $\text{Var } \mathfrak{A}$, а верхнюю грань сумм

$$\sum_{v=0}^m |\varrho(\mathfrak{A}, \omega_v)|$$

— через $\text{Var } S^{\mathfrak{A}}$.

Если метод \mathfrak{A} с ограниченной вариацией на Q , то ряд $\sum |\mathfrak{A}(e_k)|$ сходится (это видно из (3.1.2), см. также [8], стр. 138), и мы имеем

$$\text{Var } \mathfrak{A} = \text{Var } S^{\mathfrak{A}} + \sum |\mathfrak{A}(e_k)| \quad (3.1.3)$$

(см. [8], лемма 3.1.2).

Теорема 3.1.1. Метод \mathfrak{A} , заданный на Q , ограниченно суммирует все сходящиеся последовательности, тогда и только тогда

$$1^\circ \sum_k |a_{nk}(\bar{q})| < M \text{ для всех } \bar{q}_n \in Q;$$

$$2^\circ \text{ последовательность } e \text{ } \bar{\mathfrak{A}}\text{-суммируема;}$$

$$3^\circ \text{ последовательность } e_k \text{ } \bar{\mathfrak{A}}\text{-суммируема.}$$

При выполнении условий 1° — 3° для всех $x = \{x_k\} \in c$ будет

$$\mathfrak{A}(x) = \varrho(\mathfrak{A}, e) \lim x_n + \sum x_k \mathfrak{A}(e_k).$$

Эта теорема доказана в [8] (теорема 2.2.1) при $Q = L$. Учитывая примечание 1.4.5, видим, что это доказательство применимо при любом Q .

Для регулярности метода \mathfrak{A} необходимо и достаточно дополнительно к условиям теоремы 3.1.1 требовать, чтобы было

$\mathfrak{M}(e_k) = 0$ и $\mathfrak{M}(e) = 1$. Тогда $\mathfrak{M}(x) = \lim x_k$. Если рассматривать в теореме 3.1.1 регулярность относительно последовательностей, сходящихся к нулю, то условие 3° надо исключить.

Определение 3.1.4. Скажем, что метод \mathfrak{M} b -консервативен на Q или сохраняет s -сходимость на Q , если

$$s\mathfrak{M} \supseteq \bar{c}\alpha$$

Скажем, что метод \mathfrak{M} b -регулярен на Q , если он b -консервативен на Q и $\mathfrak{M}(x) = s(x)$ для всех $x \in \bar{c}\alpha$.

Аналогично определяются s -консервативность и s -регулярность на Q . Если $Q = L$, то $c\alpha \supseteq t$ и тогда вместо b -консервативности и b -регулярности на Q будем говорить соответственно, что метод \mathfrak{M} t -консервативен и t -регулярен (см. в [8] определение 3.2.1 и 3.2.2).

Теорема 3.1.2. Метод \mathfrak{M} суммирует все $x \in t$ тогда и только тогда, когда

1° выполняется условие 1° теоремы 3.1.1 при $Q = L$,

2° все $\omega \in \Omega$ $\bar{\mathfrak{M}}$ -суммируемы.

При выполнении условий 1° и 2° для всех $x \in t$ будет

$$\mathfrak{M}(x) = S^{\bar{\mathfrak{M}}}(x) + \sum x_k \mathfrak{M}(e_k).$$

Необходимость 1° следует из теоремы 3.1.1, так как $c \subseteq t$. Условие 2° необходимо из-за $\Omega \subset t$. Доказательство достаточности совершенно аналогично доказательству теоремы 3.2.1 из [8]. Напомним только, что из-за условий 1° и 2° метод \mathfrak{M} с ограниченной вариацией (см. [8], теорема 3.1.1) и \mathfrak{M} -интеграл $S^{\bar{\mathfrak{M}}}(x)$ существует для всех $x \in t$ (см. [8], теорема 3.1.3).

Для t -регулярности метода \mathfrak{M} необходимо и достаточно дополнительно к условиям теоремы 3.2.1 требовать, чтобы было $\mathfrak{M}(\omega) = s(\omega)$ для всех $\omega \in \Omega$.

Из определения 3.1.4 следует, что t -регулярный метод \mathfrak{M} будет также регулярным, т. е. будет суммировать все сходящиеся последовательности к их обычной сумме. Среди обычных матричных методов суммирования таких методов нет (см. [8], примечание 3.2.1).

Следующая теорема дает также одно свойство, которым обладают континуальные методы, но которое отсутствует у обычных регулярных матричных методов.

Теорема 3.1.3. Пусть метод \mathfrak{M} задан на Q . Если последовательность $x = \{x_k(q)\}$ \mathfrak{M} -суммируема, то любая ее часть $x\omega$, где $\omega \in \Omega^\infty_Q$, также \mathfrak{M} -суммируема.

Доказательство. \mathfrak{M} -суммируемость направленного семейства $x = \{x_k(q)\}$ означает, что \mathfrak{M} -преобразованное направленное семейство $y = \{y_n(q)\}$ s -сходится на Q . Каждая часть $x\omega$, где $\omega \in \Omega^\infty_Q$ преобразуется равенством (2.1.4) в часть $y\omega$, которая по теореме 1.4.3 s -сходится на Q . По определению 2.1.1 это и означает, что часть $x\omega$ \mathfrak{M} -суммируема.

Такая же теорема имеет место и для ограниченной \mathfrak{A} -суммируемости. Если $Q = Q_0$, то теорема 3.1.3 становится тривиальной, так как тогда Ω^∞_Q содержит только один элемент $\omega = e$. Если $Q = L$, то Ω^∞_Q содержит все ω с бесконечным числом единиц и тогда утверждение теоремы 3.1.3 относится уже к любой части $x\omega$.

3.2. Линейные непрерывные функционалы в m . Пусть f — произвольный линейный непрерывный функционал в m . Определим метод $\mathfrak{A} = \{a_{nh}(q)\}$ на $Q = L$ следующим образом: для всех разложений $q_0 = \{\omega_\nu\}_{\nu=0}^m$ положим при каждом ν

$$a_{n\nu h}(q) = \begin{cases} fe_{\nu h} & \text{при } k < n, \\ f\omega_\nu - \sum_{k=0}^{n-1} fe_{\nu k} & \text{при } k = n, \\ 0 & \text{при } k > n. \end{cases} \quad (3.2.1)$$

Метод \mathfrak{A} , определенный матрицами (3.2.1), суммирует все $x \in m$ к значению fx (см. [8], стр. 144—145). Поэтому мы можем обозначить этот метод \mathfrak{A} через f . По теореме 4.2.1 из [8] тогда будет

$$fx = S^f(x) + \sum x_k f e_k \quad (3.2.2)$$

и (4.2.2) из [8] дает для нормы $\|f\|$ функционала f выражение

$$\|f\| = \text{Var } f = \text{Var } S^f + \sum |f e_k| \quad (3.2.3)$$

(см. также выражение (3.1.3)).

Пусть на Ω задан линейный функционал $c(\omega)$, обладающий следующими свойствами

$$c(e_k) = 0, \quad (3.2.4)$$

$$\text{Var } c < M, \quad (3.2.5)$$

где $\text{Var } c$ — верхняя грань сумм $\sum_{\nu=0}^m |c(\omega_\nu)|$ по разложениям $q_0 = \{\omega_\nu\}_{\nu=0}^m \in L$, т. е.

$$\text{Var } c = \sup_{q_0 \in L} \sum_{\nu=0}^m |c(\omega_\nu)|.$$

Составим сумму (аналогичную сумме (3.1.1))

$$c(x, q^m_n) = \sum_{\nu=0}^m x_\nu c(\omega_\nu)$$

и пусть

$$c(x) = \lim_L c(x, \bar{q}^m_n). \quad (3.2.6)$$

Теперь мы сможем сформулировать следующую теорему.

Теорема 3.2.1. *Любой линейный непрерывный функционал f в m представим в виде*

$$fx = c(x) + \sum x_k c_k, \quad \sum |c_k| < \infty, \quad (3.2.7)$$

где $c(x)$ определен равенством (3.2.6) и удовлетворяет условиям (3.2.4) и (3.2.5), причем

$$\|f\| = \text{Var } c + \sum |c_k|, \quad (3.2.8)$$

и, наоборот, каждое выражение (3.2.7), удовлетворяющее условиям (3.2.4) и (3.2.5), является линейным непрерывным функционалом в m .

Доказательство. Выше, в начале этого раздела, мы уже показали, что любой линейный непрерывный функционал f в m представим в виде (3.2.2) с нормой (3.2.3). Полагая

$$c(\omega_v) = \varrho(f, \omega_v) = f\omega_v - \sum f e_{v_k},$$

видим, что условия (3.2.4) и (3.2.5) выполнены (условие (3.2.5) следует из (3.2.3)), т. е. функционал f имеет вид (3.2.7). Норма (3.2.8) следует из (3.2.3).

Остается показать наоборот, что каждое выражение (3.2.7), удовлетворяющий условиям (3.2.4) и (3.2.5), есть линейный непрерывный функционал в m . Учитывая примечание 1.2.4, мы можем при $q^{m_0} = \{\omega_v\}_{v=0}^m$ и $q^l = \{\omega'_\mu\}_{\mu=0}^l$ написать для каждого $x = \{x_k\} \in m$, что

$$\begin{aligned} \delta &= c(x, \bar{q}^{m_n}) - c(x, \bar{q}^l_k) = \\ &= \sum_{\mu=0}^l \sum_{v \in V_\mu} x_{v_n} c(\omega_v) - \sum_{\mu=0}^l x_{\mu_k} c(\sum_{v \in V_\mu} \omega_v) = \\ &= \sum_{\mu=0}^l \sum_{v \in V_\mu} (x_{v_n} - x_{\mu_k}) c(\omega_v). \end{aligned}$$

Ввиду условия (3.2.5) мы имеем

$$|\delta| \leq \text{Var } c \cdot \sup |x_{v_n} - x_{\mu_k}|.$$

При каждом $\varepsilon > 0$ мы можем выбрать разложение \bar{q}^l_k так, что $\sup |x_{v_n} - x_{\mu_k}| < \varepsilon$ независимо от $\bar{q}^{m_n} \geq \bar{q}^l_k$ (это доказано в [8], лемма 1.4.1). Поэтому, $|\delta| < \varepsilon$ при некотором \bar{q}^l_k для всех $\bar{q}^{m_n} \geq \bar{q}^l_k$. Функционал $c(x)$ существует по теореме 1.2.2. Следовательно, функционал (3.2.7) определен для всех $x \in m$. Линейность функционала (3.2.7) очевидна. Так как для $x \in m$ имеем

$$|c(x, q^{m_n})| \leq \|x\| \sum_{v=0}^m |c(\omega_v)|,$$

где $\|x\| = \sup |x_k|$, то

$$|c(x)| \leq \|x\| \text{Var } c.$$

Учитывая (3.2.8), мы получим

$$|fx| \leq \|f\| \|x\|,$$

т. е. f непрерывен в m . Теорема доказана.

Рассмотрим частный вид функционала (3.2.7), когда $c(\omega) \geq 0$ и $c(\omega) > 0$ хотя бы при одном ω (назовем такой функционал положительным). Тогда $c(e) > 0$. Пусть $m \leq x_n \leq M$ при достаточно большом n , тогда для $q_0 = \{\omega_v\}_{v=0}^m$ будет

$$mc(\omega_v) \leq x_{v_n} c(\omega_v) \leq Mc(\omega_v),$$

и

$$mc(e) \leq \sum_{v=0}^m x_{v_n} c(\omega_v) \leq Mc(e).$$

Тогда также

$$mc(e) \leq c(x) \leq Mc(e).$$

Следовательно,

$$m \leq \frac{c(x)}{c(e)} \leq M.$$

Полагая $\mu = c(x)/c(e)$, мы получим

$$c(x) = \mu c(e), \quad \mu \in [m, M]. \quad (3.2.9)$$

Отметим, что если $c(e) = 0$, то все $c(\omega) = 0$ и тогда $c(x) = 0$, т. е. тогда тоже имеет место (3.2.9).

Если предельные точки последовательности $x = \{x_n\}$ заполняют весь отрезок $[m, M]$, то мы можем выбрать подпоследовательность $\{x_{k_n}\}$ такую, что

$$\mu = \lim_n x_{k_n}$$

Такой же результат получается, если $c(\omega) \leq 0$ и $c(\omega) < 0$ хотя бы при одном ω (назовем такой функционал отрицательным). Следовательно имеет место

Теорема 3.2.2. Положительный или отрицательный функционал f в m имеет вид

$$fx = \mu c + \sum x_k c_k, \quad \sum |c_k| < \infty,$$

где $|\mu| \leq \|x\|$, причем

$$\|f\| = |c| + \sum |c_k|.$$

Для части последовательности x_{ω_v} выражение (3.2.9) будет иметь вид

$$c(x_{\omega_v}) = \mu_v c(\omega_v).$$

3.3. Функционалы в поле суммируемости. Пусть $\bar{c}\alpha$ — поле ограниченной суммируемости метода α , заданного на Q , и пусть

$$x = x(q) = \{x_k(q)\} \in \bar{c}\alpha.$$

При каждой фиксированной системе разложений

$$q = \{q_n\} \text{ с } q_0 = \{\omega_v\}_{v=0}^m \in Q^\infty \quad (3.3.1)$$

множество последовательностей $x = x(q)$ обозначим через $\bar{c}\alpha_q$. Множество $\bar{c}\alpha_q$ является множеством ограниченных последовательностей. При $Q = L$ будет $\bar{c}\alpha_q = m$, а при $Q = Q_0$ будет $\bar{c}\alpha_q = c$.

Пусть fx линейный и непрерывный функционал в $\bar{c}\alpha$. При фиксированной системе (3.3.1) обозначим его значения через $fx(q)$. Функционал $fx(q)$ будет линейным и непрерывным в $\bar{c}\alpha_q$.

По теореме 3.2.1 общий вид для функционала $fx(q)$ в $\bar{c}\mathfrak{A}_q$ будет следующим:

$$fx(q) = c\{x(q)\} + \sum x_k(q)c_k, \quad \sum |c_k| < \infty, \quad (3.3.2)$$

где $c\{x(q)\}$ обозначает величину (3.2.6) для последовательности $x = x(q)$ при данной системе q .

Пусть $\bar{c}\mathfrak{M}$ — поле ограниченной суммируемости b -реверсивного метода \mathfrak{M} , заданного на Q , и пусть $x = x(q) \in \bar{c}\mathfrak{M}$. Из-за b -реверсивности метода \mathfrak{M} каждому

$$y = y(q) = \{y_h(q)\} \in \bar{c}\mathfrak{A}$$

соответствует одна и только одна последовательность $x \in \bar{c}\mathfrak{M}$. Тогда существует линейный непрерывный оператор \mathfrak{M}^{-1} , определенный в $\bar{c}\mathfrak{A}$ такой, что $x = \mathfrak{M}^{-1}y$. Следовательно, если f — линейный непрерывный функционал в $\bar{c}\mathfrak{M}$, то

$$fx = f\mathfrak{M}^{-1}y = hy,$$

где $h = f\mathfrak{M}^{-1}$ линейный непрерывный функционал в $\bar{c}\mathfrak{A}$.

Обозначим через $\bar{c}\mathfrak{M}_q$ множество последовательностей $x = x(q)$ при фиксированной системе (3.3.1). Через $fx(q)$ обозначим значения функционала при заданной системе q .

При каждой системе (3.3.1) из формулы (3.3.2) получим

$$fx(q) = c\{y(q)\} + \sum y_h(q)c_h, \quad \sum |c_h| < \infty, \quad (3.3.3)$$

где $y(q)$ является \mathfrak{M} -преобразованием последовательности $x(q)$. Выражение (3.3.3) дает общий вид линейного непрерывного функционала в $\bar{c}\mathfrak{M}_q$.

3.4. Существование обратного метода \mathfrak{M}^{-1} . Пусть b -реверсивный метод $\mathfrak{M} = \{a_{nk}(q)\}$ задан на Q . Тогда в $\bar{c}\mathfrak{M}$ существует линейный непрерывный функционал (2.4.8), который ввиду (3.3.6) имеет при системе (3.3.1) вид

$$x_{v_k}(q) = c_k^q(y\omega_v) + \sum_i y_{v_i}(q)c_{kv_i}(q), \quad (3.4.1)$$

где

$$\sum_i |c_{kv_i}(q)| < \infty, \quad (3.4.2)$$

$$c_k^q(y) = \lim_{L \rightarrow \infty} \sum_{v=0}^L y_{v_k}(q)c_k^q(\omega_v).$$

В (3.4.1) можно матрицу $\mathfrak{C} = \{c_{ki}(q)\}$ рассматривать как некоторый континуальный метод суммирования, преобразующий последовательность $y = y(q)$ в новую последовательность.

Пусть $y = \varepsilon_{vj}$, тогда из (3.4.1) получим

$$x_{v_k}(q) = c_{kv_j}(q).$$

Учитывая равенство (2.1.2), мы имеем

$$\delta_{v_i v_j}(q) = \sum_k a_{iv_k}(q) c_{kv_j}(q), \quad (3.4.3)$$

где $\delta_{nk}(q)$ определены в (2.2.2).

Если $\mathfrak{A} = \{a_{nk}(q)\}$ и $\mathfrak{C} = \{c_{nk}(q)\}$ — соответственно матрицы преобразования методов \mathfrak{A} и \mathfrak{C} , то из (3.4.3) получим

$$\delta_{v_i v_j}(q) = \sum_k a_{v_i v_k}(q) \gamma_{v_k v_j}(q),$$

или

$$\delta_{ij}(q) = \sum_k a_{ik}(q) \gamma_{ki}(q).$$

Из последнего равенства следует, что произведение матриц преобразований \mathfrak{A} и \mathfrak{C} дает идентичную матрицу \mathfrak{E} , определенную в разделе 2.2, т. е.

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{A}\mathfrak{C}.$$

По нашим определениям матрица \mathfrak{C} будет правосторонней обратной матрицей к матрице \mathfrak{A} .

Следовательно, у *b*-реверсивного метода \mathfrak{A} всегда существует правосторонняя обратная к матрице преобразования \mathfrak{A} .

Предположим, что метод \mathfrak{A} *b*-консервативен. Возьмем в (3.4.1) $x = e_{v_j}$, тогда, учитывая равенство (2.1.2), получим

$$\delta_{v_k v_j}(q) = c_k^q(a_{v_j}) + \sum_i a_{iv_j}(q) c_{kv_i}(q), \quad (3.4.4)$$

где

$$a_{v_j} = \{a_{iv_j}(q)\} = \{\mathfrak{A}(e_{v_j}, q_i)\}$$

обозначает столбец матрицы $\mathfrak{A} = \{a_{ik}(q)\}$.

Возьмем в (3.4.1) $x = \omega_v$, тогда, учитывая опять равенство (2.1.2), получим

$$s(\omega_v) = c_k^q(\mathfrak{A}_v) + \sum_i c_{kv_i}(q) \sum_j a_{iv_j}(q), \quad (3.4.5)$$

где

$$\mathfrak{A}_v = \left\{ \sum_j a_{iv_j}(q) \right\} = \mathfrak{A}(\omega_v, q_i).$$

Суммируя равенство (3.4.4) по $j = 0, 1, \dots$, получим

$$s(\omega_v) = \sum_j c_k^q(a_{v_j}) + \sum_i c_{kv_i}(q) \sum_j a_{iv_j}(q),$$

так как из-за условия (3.4.2) и *b*-консервативности метода \mathfrak{A} можно менять порядок суммирования в двойной сумме. Вычтем последнее равенство из равенства (3.4.5), получим

$$c_k^q(\mathfrak{A}_v) - \sum_j c_k^q(a_{v_j}) = 0 \quad (3.4.6)$$

при каждой системе $q = \{q_n\}$ и $k = 0, 1, \dots$.

Предположим, что все матрицы $\{a_{nv_k}(q)\}$ сохраняют сходимость, т. е. удовлетворяют условиям теоремы Кожима—Шура

(см. [6], стр. 77—78; [1], стр. 12—13), тогда существуют пределы

$$\mathfrak{A}^q(\omega_v) = \lim_i \mathfrak{A}(\omega_v, q_i),$$

$$\mathfrak{A}^q(e_{v_j}) = \lim_i \mathfrak{A}(e_{v_j}, q_i).$$

Поэтому

$$c^{q_h}(\mathfrak{A}_v) = \mathfrak{A}^q(\omega_v) c^{q_h}(\omega_v),$$

$$c^{q_h}(a_{v_j}) = \mathfrak{A}^q(e_{v_j}) c^{q_h}(\omega_v),$$

и из (3.4.6) получим

$$c^{q_h}(\omega_v) [\mathfrak{A}^q(\omega_v) - \sum_j \mathfrak{A}^q(e_{v_j})] = 0.$$

Если матрицы $\{a_{nv_k}(q)\}$ корегулярны (см. [1], стр. 51), т. е. если

$$\mathfrak{A}^q(\omega_v) - \sum_j \mathfrak{A}^q(e_{v_j}) \neq 0 \quad (3.4.7)$$

при каждом ω_v из систем (3.3.1), то $c^{q_h}(\omega_v) = 0$, и тогда (3.4.1) превращается в

$$x_{v_k}(q) = \sum_i y_{v_i}(q) c_{kv_i}(q). \quad (3.4.8)$$

Полагая $x = e_{v_j}$ и учитывая (2.1.2), получим

$$\delta_{v_k v_j}(q) = \sum c_{kv_i}(q) a_{iv_j}(q)$$

или, выражая это через матрицы преобразований $\mathfrak{C} = \{c_{nk}(q)\}$ и $\mathfrak{A} = \{a_{nk}(q)\}$, получим

$$\delta_{kj}(q) = \sum_i c_{ki}(q) a_{ij}(q),$$

т. е.

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{C}\mathfrak{A}.$$

Следовательно, если матрицы $\{a_{nv_h}(q)\}$ сохраняют сходимость и справедливо (3.4.7), то матрица \mathfrak{C} будет также левосторонней обратной матрицей к матрице \mathfrak{A} . Обозначив $\mathfrak{C} = \mathfrak{A}^{-1}$, видим из (3.4.8), что \mathfrak{A}^{-1} является обратным методом к методу \mathfrak{A} .

Для обычных матричных методов суммирования аналогичные результаты получили Г. Кангро [3], а также А. Виланский и К. Целлер [15].

3.5. Включение континуальных методов. Пусть $\mathfrak{A} = \{a_{nk}(q)\}$ и $\mathfrak{B} = \{b_{nk}(q)\}$ — континуальные методы суммирования, заданные на Q . Для метода \mathfrak{B} используем те же обозначения, которые были даны для метода \mathfrak{A} .

Определение 3.5.1. Если $c\mathfrak{B} \cong c\mathfrak{A}$, то скажем, что метод \mathfrak{B} включает метод \mathfrak{A} , и пишем $\mathfrak{B} \supseteq \mathfrak{A}$. Если $c\bar{\mathfrak{B}} \cong c\bar{\mathfrak{A}}$, то скажем, что метод \mathfrak{B} включает метод \mathfrak{A} ограниченно, и пишем $\bar{\mathfrak{B}} \supseteq \bar{\mathfrak{A}}$.

Найдем условия для включения $\overline{\mathfrak{B}} \supseteq \overline{\mathfrak{A}}$, если \mathfrak{A} — b -реверсивный метод и $Q = L$.

Рассмотрим случай, когда все матрицы $\{a_{nv_k}(q)\}$ консервативны и корегулярны. Тогда имеет место равенство (3.4.8), где $\{c_{nh}(q)\} = \mathfrak{A}^{-1}$. Мы можем для системы (3.3.1) написать

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}(x\omega_v, q) &= \lim_r \sum_{k=0}^r x_{v_k} b_{nv_k}(q) = \\ &= \lim_r \sum_i y_{v_i}(q) d^{n_{rv_i}}(q), \end{aligned}$$

где

$$d^{n_{rv_i}}(q) = \sum_{k=0}^r b_{nv_k}(q) c_{kv_i}(q).$$

Для существования предела по теореме Шура (см. [1], стр. 17) необходимы и достаточны условия

$$\begin{aligned} 1^\circ \lim_r d^{n_{rv_i}}(q) &= d^{n_{v_i}}(q), \\ 2^\circ \sum_i |d^{n_{rv_i}}(q)| &\leq M^n, \\ 3^\circ \lim_r \sum_i |d^{n_{rv_i}}(q) - d^{n_{v_i}}(q)| &= 0. \end{aligned}$$

Тогда

$$\mathfrak{B}(x\omega_v, q_n) = \sum_i y_{v_i}(q) d^{n_{v_i}}(q), \quad (3.5.1)$$

где

$$d^{n_{v_i}}(q) = \sum_k b_{nv_k}(q) c_{kv_i}(q).$$

Учитывая (3.5.1), мы имеем

$$\mathfrak{B}(x, q_n) = \sum_i y_i(q) d_{ni}(q). \quad (3.5.2)$$

Из последнего равенства (3.5.2) видно, что для $\overline{\mathfrak{B}} \supseteq \overline{\mathfrak{A}}$ дополнительного к условиям 1° — 3° необходимо и достаточно, чтобы континуальный метод $\mathfrak{D} = \{d_{ni}(q)\}$ ограниченно суммировал все s -сходящиеся последовательности.

Аналогично рассматривается случай $\mathfrak{B} \supseteq \mathfrak{A}$.

Таким образом, при реверсивном методе \mathfrak{A} вопрос о включении сводится к условиям, при которых метод \mathfrak{D} (ограниченно) суммирует все (ограниченно) s -сходящиеся последовательности. При некоторых ограничениях условия теоремы 3.1.2 оказываются достаточными и для суммируемости s -сходящихся последовательностей. В ближайшем будущем мы рассмотрим это подробно вместе с другими вопросами в отдельной статье.

§ 4. Применение непрерывных методов в теории функций

4.1. Выражение меры Лебега через функционал $s(\omega)$. В этом разделе мы покажем, что меру Лебега любого L -измеримого множества I_ν на отрезке $[0, 1]$ можно выразить через значения функционала $s(\omega)$, связав каждое множество I_ν с некоторым элементом ω_ν .

Если множества I_ν и I_μ не пересекаются, то будем писать

$$I_\nu \cap I_\mu = 0.$$

Определение 4.1.1. Скажем, что измеримое множество $I_\nu \subset [0, 1]$ представлено последовательностью $\omega_\nu \in \Omega$, если

$$\begin{aligned} 1^\circ \text{ mes } I_\nu &= s(\omega_\nu), \\ 2^\circ \text{ если } I_\nu \cap I_\mu &= 0, \text{ то } \omega_\nu d\omega_\mu. \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

При выполнении условий 1° и 2° будем писать

$$I_\nu = \omega_\nu.$$

Теорема 4.1.1. Каждое L -измеримое множество $I_\nu \subset [0, 1]$ представимо последовательностью $\omega_\nu \in \Omega$.

Доказательство теоремы 4.1.1 проведем в трех этапах.

1. Поставим сначала каждому интервалу

$$\Delta_\nu = (\alpha_\nu, \beta_\nu) \subset [0, 1]$$

в соответствие последовательности ω_ν так, чтобы было

$$\Delta_\nu = \omega_\nu.$$

Такое соответствие можно построить, например, следующим образом. Возьмем исходными следующие соответствия для полу-сегментов, удовлетворяющие условиям (4.1.1.):

$$\Delta^0_0 = \left(0, 1 \right] = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots) = e,$$

$$\Delta^1_0 = \left(0, \frac{1}{2} \right] = (0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots) = \omega^1_0,$$

$$\Delta^1_1 = \left(\frac{1}{2}, 1 \right] = (1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots) = \omega^1_1,$$

$$\Delta^2_0 = \left(0, \frac{1}{4} \right] = (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, \dots) = \omega^2_0,$$

$$\Delta^2_1 = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right] = (0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, \dots) = \omega^2_1,$$

$$\Delta^2_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4} \right] = (0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, \dots) = \omega^2_2,$$

$$\Delta^2_3 = \left(\frac{3}{4}, 1 \right] = (1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, \dots) = \omega^2_3,$$

Для таких соответствий

$$\Delta^{n_\nu} = \left(\frac{\nu}{2^n}, \frac{\nu+1}{2^n} \right] = \omega^{n_\nu}, \quad \nu = 0, 1, \dots, 2^n - 1,$$

условие 1° в (4.1.1) следует из равенства

$$\text{mes } \Delta^{n_\nu} = \frac{1}{2^n} = s(\omega^{n_\nu}),$$

где значения сумм

$$s(\omega^{n_\nu}) = \frac{1}{2^n}$$

следуют из свойств 1° и 4° функционала $s(\omega)$ (см. раздел 1.1, а также [8], стр. 124), а условие 2° в (4.1.1) выполняется по построению элементов ω^{n_ν} .

Каждый интервал (α, β) можно рассматривать как некоторую счетную сумму попарно не пересекающихся полусегментов $\Delta^{n_\nu} \subset (\alpha, \beta)$. Следовательно,

$$\Delta_\nu = (\alpha_\nu, \beta_\nu) = \bigcup \Delta^{n_i} = \bigcup \omega^{n_i} = \omega_\nu,$$

где сумма \bigcup состоит из попарно не пересекающихся полусегментов $\Delta^{n_i} \subset (\alpha_\nu, \beta_\nu)$. Верхняя грань суммы $\bigcup \omega^{n_i}$ существует, так как множество Ω является полной булевой алгеброй (см. раздел 1.1, также [8], стр. 121).

Итак, $\Delta_\nu = \omega_\nu$, т. е. мы каждому интервалу $\Delta_\nu = (\alpha_\nu, \beta_\nu) \subset [0, 1]$ поставили в соответствие последовательность ω_ν такую, что выполняются условия (4.1.1).

2. Поставим теперь каждому открытому множеству $G \subset [0, 1]$ в соответствие элемент $\omega^G \in \Omega$ и каждому замкнутому $F \subset [0, 1]$ — в соответствие элемент $\omega^F \in \Omega$ следующим образом. Каждое открытое множество G можно рассматривать как счетную сумму ее составляющих интервалов Δ_ν , т. е.

$$G = \bigcup_\nu \Delta_\nu = \bigcup_\nu \omega_\nu.$$

Обозначив $\bigcup_\nu \omega_\nu = \omega^G$ (элемент ω^G существует, так как Ω полная булева алгебра), получим

$$G = \omega^G.$$

Для каждого замкнутого множества $F = [0, 1] - G$ получим $F = e - \omega^G$. Обозначив $e - \omega^G = \omega^F$, имеем

$$F = \omega^F.$$

Если $F \subset (0, 1)$, то (см. [7], стр. 48) $F = (0, 1) - G = e - e_0 - \omega^G$, так как имеем представления $(0, 1) = e - e_0$, $\{0\} = \emptyset$ и $\{1\} = e_0$.

3. Покажем теперь, что для каждого L -измеримого множества $L_\nu \subset [0, 1]$ существует такой элемент ω_ν , что

$$L_\nu = \omega_\nu.$$

Мы имеем

$$\begin{aligned} \text{mes } L_\nu &= \sup \text{mes } F = \sup s(\omega^F) \\ &= \inf \text{mes } G = \inf s(\omega^G), \end{aligned} \tag{4.1.2}$$

где (здесь и в дальнейшем)

$$\sup = \sup_{F \subseteq I_\nu} \quad \text{и} \quad \inf = \inf_{G \supseteq I_\nu}$$

Так как $F \subseteq I_\nu \subseteq G$, то $\omega^F < \omega^G$ при каждом F и G .

Следовательно,

$$\omega^F \leq \sup \omega^F \leq \inf \omega^G \leq \omega^G.$$

Из-за монотонности суммы $s(\omega)$ (см. условие 7° в разделе 1.1) будет

$$s(\omega^F) \leq s(\sup \omega^F) \leq s(\inf \omega^G) \leq s(\omega^G),$$

откуда (опять из-за условия 7° из раздела 1.1) также

$$\sup s(\omega^F) \leq s(\sup \omega^F) \leq s(\inf \omega^G) \leq \inf s(\omega^G).$$

Так как крайние члены последнего выражения равны из-за (4.1.2), то

$$\sup s(\omega^F) = s(\sup \omega^F) = s(\inf \omega^G) = \inf s(\omega^G).$$

Обозначив

$$\sup \omega^F = \omega_\nu,$$

мы получим из последнего равенства, ввиду (4.1.2), что

$$\text{mes } I_\nu = s(\omega_\nu),$$

т. е. ω_ν удовлетворяет условию 1° определения 4.1.1.

Покажем, что выполнено и условие 2° определения 4.1.1. Пусть $I_\nu \cap I_\mu = 0$. Обозначим через F и H замкнутые множества такие, что $F \subseteq I_\nu$ и $H \subseteq I_\mu$. Тогда

$$\omega^F \text{ и } \omega^H.$$

Это будет справедливо и для их верхних граней, т. е. $\omega_\nu \text{ и } \omega_\mu$, где

$$\omega_\nu = \sup_{F \subseteq I_\nu} \omega^F, \quad \omega_\mu = \sup_{H \subseteq I_\mu} \omega^H.$$

Теорема доказана.

4.2. Представление измеримых функций в виде числовой последовательности. Пусть $\Delta = \{I_\nu\}_{\nu=0}^m$ означает некоторое разбиение отрезка $[0, 1]$ на попарно не пересекающиеся L -измеримые множества I_ν , т. е. пусть

$$[0, 1] = \bigcup_{\nu=0}^m I_\nu, \quad I_\nu \cap I_\mu = 0.$$

Представим по определению 4.1.1 множества I_ν последовательностями ω_ν . Тогда

$$\sum_{\nu=0}^m \text{mes } I_\nu = \sum_{\nu=0}^m s(\omega_\nu) = 1,$$

где $\omega_\nu \text{ и } \omega_\mu$. Следовательно, имеет место

Лемма 4.2.1. Для каждого разбиения $\Delta = \{I_\nu\}_{\nu=0}^m$ существует разложение $q^m = \{\omega_\nu\}_{\nu=0}^m$ такое, что $I_\nu = \omega_\nu$.

Пусть задана некоторая числовая последовательность $x = \{x_k\}$ и ограниченная L -измеримая функция $x = x(t)$, где $t \in [0, 1]$.

Определение 4.2.1. Мы скажем, что функция $x = x(t)$ на отрезке $[0, 1]$ представлена в виде числовой последовательности $x = \{x_k\}$, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое разбиение $\Delta = \{l_\nu\}_{\nu=0}^n$, что для каждой части последовательности $x\omega_\nu$, где $\omega_\nu = l_\nu$ и $s(\omega_\nu) \neq 0$, будет

$$|x_{\nu n} - x(t)| < \varepsilon,$$

если $t \in l_\nu$ и $n > N(\varepsilon)$.

Теорема 4.2.1. Любая ограниченная L -измеримая функция на $[0, 1]$ представима в виде ограниченной числовой последовательности.

Доказательство проведем конструктивно. Пусть ограниченная и L -измеримая функция $x = x(t)$ задана на сегменте $E = [0, 1]$, и пусть

$$A < x(t) < B.$$

Разобьем сегмент $[A, B]$ при каждом $n = 0, 1, \dots$ на части точками

$$\xi_\nu^{n_\nu} = A + \frac{B-A}{2^n} \nu, \quad \nu = 0, 1, \dots, 2^n.$$

При каждом n мы имеем точки

$$\xi^{n_0}, \xi^{n_1}, \dots, \xi^{n_{2^n}},$$

разбивающие сегмент $[A, B]$ на $2^n - 1$ равных частей.

При каждом n составим множества

$$l_\nu^{n_\nu} = E(\xi_\nu^{n_\nu} \leq x(t) < \xi_{\nu+1}^{n_\nu}), \quad \nu = 0, 1, \dots, 2^n - 1,$$

т. е. множества $l_\nu^{n_\nu}$, где $\xi_\nu^{n_\nu} \leq x(t) < \xi_{\nu+1}^{n_\nu}$. Пусть последовательности $\omega_\nu^{n_\nu} \in \Omega$ такие, что $\omega_\nu^{n_\nu} = l_\nu^{n_\nu}$.

Последовательность $x = \{x_k\}$, представляющую функцию $x = x(t)$, построим следующим образом. Обозначим через x_ν члены последовательности x , попавшие в часть $x\omega_\nu^{n_\nu}$. Последовательно при $n = 0, 1, \dots$ в частях $x\omega_\nu^{n_\nu}$ положим

$$x_{\nu k} = \xi_\nu^{n_\nu}$$

при $k = 0, 1, \dots, n$, кроме тех $x_{\nu k}$, которые были определены при $n - 1$.

Например, при $n = 0$ имеем одно множество

$$l_0^0 = E(A < x(t) < B)$$

и одну последовательность $\omega^0 = e$. В части $x\omega^0 = x$ возьмем $x_0 = x_0 = \xi^0$. При $n = 1$ имеем множества l_ν^1 и последовательности ω_ν^1 , где $\nu = 0, 1$. Имеем части $x\omega_\nu^1$ ($\nu = 0, 1$), в которых положим при $k = 0, 1$

$$x_{\nu k} = \xi_\nu^1, \quad \nu = 0, 1,$$

кроме члена x_0 , который был определен при $n = 0$. Продолжая аналогично, мы получим последовательность $x = \{x_k\}$, которая представляет на $[0, 1]$ функцию $x = x(t)$ по определению 4.2.1. Теорема доказана.

4.3. Выражение интеграла Лебега через континуальный метод \mathfrak{M} . Обозначим через Q_L такое множество Q , которое содержит все разложения $q_0 = \{\omega_\nu\}_{m_\nu=0}$, в которых для каждой ω_ν существует L -измеримое множество l_ν такое, что $\omega_\nu = l_\nu$. Тогда любому разбиению $\Delta = \{l_\nu\}_{m_\nu=0}$ сегмента $E = [0, 1]$ соответствует разложение $q_0 = \{\omega_\nu\}_{m_\nu=0} \in Q_L$, где каждое ω_ν представляет L -измеримое множество l_ν и наоборот. Пусть α — единственный континуальный метод, заданный на Q_L .

Теорема 4.3.1. Если ограниченная последовательность $x = \{x_k\}$ представляет ограниченную L -измеримую функцию $x = x(t)$ на $[0, 1]$, то

$$\alpha(x) = (L) \int_E x(t) dt, \quad (4.3.1)$$

где $\alpha(x) = s(x)$ — сумма последовательности x на Q_L .

Доказательство. Пусть $A < x(t) < B$. Разобьем сегмент $[A, B]$ на части точками

$$A = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_{m+1} = B,$$

и составим множества

$$l_\nu = E(\xi_\nu \leq x(t) < \xi_{\nu+1}), \quad \nu = 0, 1, \dots, m.$$

Пусть разбиению $\Delta = \{l_\nu\}_{m_\nu=0}$ соответствует разложение

$$q_0 = \{\omega_\nu\}_{m_\nu=0}, \text{ где } \omega_\nu = l_\nu.$$

Обозначим

$$\sigma = \sum_{\nu=0}^m \xi_\nu \text{mes } l_\nu.$$

Мы можем написать из-за условия 1° из (4.1.1), что

$$|\sigma - s(x, \bar{q}_n)| \leq \sum_{\nu=0}^m |\xi_\nu - x_{\nu n}| s(\omega_\nu).$$

Последовательность $x = \{x_k\}$ представляет функцию $x = x(t)$, значит по определению 4.2.1 для каждого $\varepsilon > 0$ существует разбиение $\Delta = \{l_\nu\}_{m_\nu=0}$ такое, что для частей $x\omega_\nu$ будет

$$|\xi_\nu - x_{\nu n}| < \varepsilon$$

при $n > N(\varepsilon)$. Это же неравенство будет справедливо и для всех частей $x\omega^1_\nu$ где $\omega^1_\nu < \omega_\nu$. Так как функция $x = x(t)$ L -интегрируема, то сумма σ стремится к интегралу I от функции $x = x(t)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Следовательно, $I = s(x)$, что и дает равенство (4.3.1). Теорема доказана.

Теорему 4.3.1 можно сформулировать в следующем более общем виде.

Теорема 4.3.2. Пусть континуальный метод \mathfrak{A} b -регулярен на Q_L . Если последовательность $x = \{x_n\}$ представляет ограниченную L -измеримую функцию $x = x(t)$ на $[0, 1]$, то справедливо равенство

$$\mathfrak{A}(x) = (L) \int_E x(t) dt. \quad (4.3.2)$$

Доказательство очевидно из-за b -регулярности метода \mathfrak{A} .

Из теоремы 3.1.2 следует, что при b -регулярном методе \mathfrak{A} будет

$$S^{\mathfrak{A}}(x) = \mathfrak{A}(x),$$

где $S^{\mathfrak{A}}(x)$ — \mathfrak{A} -интеграл, определенный в разделе 3.1. Учитывая равенство (4.3.2), видим, что \mathfrak{A} -интеграл является обобщением интеграла Лебега от ограниченной функции.

Литература

1. Барон С., Введение в теорию суммируемости рядов. Тарту, 1966.
2. Данфорд Н., Шварц Дж. Т., Линейные операторы, Общая теория. Москва, 1962.
3. Кангро Г., О множителях суммируемости. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1955, 37, 191—232.
4. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. Москва, 1959.
5. Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г., Функциональный анализ в полупорядоченных пространствах. Москва—Ленинград, 1950.
6. Кук Р., Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. Москва, 1960.
7. Натансон И. П., Теория функций вещественной переменной. Москва, 1957.
8. Реймерс Э., Новые общие методы суммирования. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1962, 129, 119—154.
9. Шатуновский С. О., Введение в анализ. Одесса, 1932.
10. Banach, S., Théorie des opérations linéaires. Warszawa, 1932.
11. Choquet, G., Cours d'analyse II, Topologie. Paris, 1964.
12. Edwards, R. E., Functional Analysis, Theory and Applications. New York, 1965.
13. Hill, I. D., Some properties of summability. Duke Math. J., 1942, 9, 373—381.
14. Moore, R. L., Foundations of point set theory. New York, 1932.
15. Wilansky, A., Zeller, K., Inverses of matrices and matrix transformations. Proc. Amer. Math. Soc., 1955, 6, 414—420.

Поступило
17 X 1967

KONTINUAALSED SUMMEERIMISEMENETLUSED

E. Reimers

Resümee

Käesolevas töös jätkatakse uurimusi, mida alustati artiklis [8]. Me defineerime s -koonduvuse (§ 1) ja uue kontinuaalse summeerimismenetluse mõiste (§ 2), uurime tema omadusi (§ 3) ja rakendame menetlust funktsioonide integreerimiseks (§ 4).

Paragrahvis 1 defineeritakse Boole'i algebra Ω (osa 1.1), suunatud pere Q (osa 1.2), mis on aluseks s -koonduvuse mõiste defineerimisel tõkestatud, peaaegu tõkestatud ja q -jadade korral. Paljud selle paragrahvi tulemused leiduvad juba töös [8].

Paragrahvis 2 defineeritakse kontinuaalne summeerimismenetlus (osa 2.1), mis on töös [8] sisse toodud üldise summeerimismenetlusega ühte tüüpi, kuid tal on rida uusi omadusi, näiteks omadus, mis on antud teoreemis 3.1.3. Edasi defineeritakse kontinuaalse ühikmenetluse (osa 2.2) ja pööratava menetluse mõiste (osa 2.3) ja vaadeldakse nende summeerimisvälju (osa 2.4).

Paragrahvis 3 vaadeldakse regulaarseid ja konservatiivseid menetlusi (osa 3.1). On tõestatud kaks teoreemi, mis annavad pideva lineaarse funktsionaali üldkuju tõkestatud jadade ruumis (osa 3.2). Need teoreemid täiendavad analoogilisi teoreeme 4. 2. 1 ja 4. 2. 2. tööst [8]. Leitakse pöördmenetluse olemasolu tingimused (osa 3.4) ja uuritakse menetluste sisalduvust (osa 3.5).

Paragrahvis 4 näidatakse, et Lebesque'i mõõtu lõigul $[0, 1]$ võib avaldada Boole'i algebra Ω jadade kaudu (osa 4.1). See võimaldab tõkestatud L -mõõtuvaid funktsioone esitada arvujada kujul. Ja, lõpuks, on näidatud, et tõkestatud funktsiooni Lebesque'i integraali võib avaldada regulaarse kontinuaalse menetluse kaudu (osa 4.3). Selle paragrahvi tulemused seovad reaalmuutuja funktsiooni teooria kontinuaalse summeerimise teooriaga.

CONTINUAL METHODS OF SUMMABILITY

E. Reimers

Summary

The present paper is the continuation of the research started in the paper [8]. We define the notion of s -convergence (§ 1), introduce the new continual method of summability (§ 2), investigate its properties (§ 3) and apply it to the integration of functions (§ 4).

In § 1 the Boole's algebra Ω (section 1.1) and the directed family Q (section 1.2) are defined, on the basis of which the notion of s -convergence is introduced defining the notion of sum for bounded and almost bounded sequences of numbers (section 1.3) as well for q -sequences defined in the paper (section 1.4). Many results of this paragraph are already in the paper [8].

In § 2 there is introduced the continual method of summability of sequences of numbers (section 2.1) being of the same type as the general method of summability defined in [8], but which have a number of new properties, for example, the property given in the theorem 3.1.3. The notion of the continual unity methods (section 2.2) and of the reversible continual

methods (section 2.3) are defined and the summability fields of reversible methods are investigated which are found to be BK -spaces (section 2.4).

In § 3 there are considered the questions connected with the conservativity and regularity of continual methods (section 3.1). These properties are investigated already in the paper [8]. There are proved two theorems (section 3.2) which give the general form of continuous linear functional in the space of bounded sequences. These theorems complement analogous theorems 4.2.1 and 4.2.2 from [8]. Further, the form of linear continuous functional in the summability field of reversible continual method is derived (section 3.3), the conditions for the existence of reverse continual methods are given and the questions connected with the inclusion of continual methods are investigated.

In § 4 it is shown that the Lebesgue measure on the segment $[0, 1]$ can be expressed by the sequences of the Boole's algebra Ω (section 4.1), which allows the bounded L -measurable functions given on segment $[0, 1]$ to be presented in the form of the sequence of numbers (section 4.2). And, finally, it is shown that Lebesgue integral on segment $[0, 1]$ from the bounded L -measurable function can be expressed by the regular continual method of summability (section 4.3). The results of this paragraph connect the theory of functions of real variable with the theory of continual summability.

МНОЖИТЕЛИ СУММИРУЕМОСТИ ДЛЯ МЕТОДОВ РИССА

Х. Тюрнпу

Кружок СНО при кафедре математического анализа

Пусть задан числовой ряд¹

$$\sum x_k \quad (1)$$

Мы говорим, что ряд (1) является суммируемым методом Рисса P^α целочисленного порядка α (коротко P^α_c -суммируемым), ограниченным методом P^α (коротко P^α_m -суммируемым), к нулю суммируемым методом P^α (коротко P^α_n -суммируемым), абсолютно суммируемым методом P^α (коротко P^α_l -суммируемым), если последовательность

$$y_n = \sum_{k=0}^n \pi^{\alpha_{nk}} x_k \quad (2)$$

соответственно сходится, ограничена, сходится к нулю, абсолютно сходится, причем

$$\pi^{\alpha_{nk}} = \left(1 - \frac{P_{k-1}}{P_n}\right) \left(1 - \frac{P_{k-1}}{P_{n+1}}\right) \dots \left(1 - \frac{P_{n-1}}{P_{n+\alpha-1}}\right),$$

где $\{P_k\}$ — произвольная последовательность комплексных чисел, удовлетворяющая следующим условиям: $P_{-1} = 0$, $P_k \neq 0$, $p_k = P_k - P_{k-1} \neq 0$ и $p_k + \dots + p_{k+i} \neq 0$ ($i = 1, 2, \dots, \alpha - 1$).

Если в качестве чисел $(\pi^{\alpha_{nk}})$ в преобразовании (2) взять числа

$$\bar{\pi}^{\alpha_{nk}} = \left(1 - \frac{P_{k-1}}{P_n}\right)^\alpha,$$

где $P_{-1} = 0$, $P_k \neq 0$ и α целое число, то мы получаем определение \bar{P}^α_σ -суммируемости ($\sigma = c, m, n, l$) ряда (1). Метод \bar{P}^α известен под названием метода Рисса порядка α с разрывным параметром.

¹ Через $\sum x_k$ мы обозначаем ряд $\sum_{n=0}^{\infty} x_k$, а через $\sum_k x_{nk}$ ряд $\sum_{k=0}^{\infty} x_{nk}$.
Здесь и всюду в дальнейшем свободные индексы имеют все значения $0, 1, \dots$

Ряд (1) мы называем $(R, \lambda, \alpha)_c$ -суммируемым, или суммируемым методом Рисса с непрерывным параметром (соответственно $(R, \lambda, \alpha)_m$ -суммируемым, $(R, \lambda, \alpha)_n$ -суммируемым, $(R, \lambda, \alpha)_l$ -суммируемым), если функция

$$\Lambda(t) = \sum_{\lambda_k < t} \left(1 - \frac{\lambda_k}{t}\right)^\alpha x_k$$

имеет конечный предел при $t \rightarrow \infty$ (ограничена, сходится к нулю при $t \rightarrow \infty$, имеет ограниченное изменение для всех $t > t_0$).

Напомним, что комплексные числа ε_k называются множителями суммируемости типа $(P^\alpha_\Delta, P^\beta_\sigma)$, где $\Delta, \sigma = c, m, n, l$, если из P^α_Δ суммируемости ряда (1) всегда следует P^β_σ -суммируемость ряда

$$\sum \varepsilon_k x_k. \quad (3)$$

Аналогично определяются множители суммируемости типов $(P^\alpha_\Delta, P^\beta_\sigma)$ и $[(R, \lambda, \alpha)_\Delta, (R, \lambda, \beta)_\sigma]$.

Если же ряд (3) сходится или абсолютно сходится для всех P^α_Δ -суммируемых (соответственно $(R, \lambda, \alpha)_\Delta$ -суммируемых) рядов (1), то мы называем числа ε_k множителями сходимости или абсолютной сходимости относительно метода P^α_Δ (соответственно $(R, \lambda, \alpha)_\Delta$).

В настоящей статье мы исследуем в основном множители суммируемости типов $(P^\alpha_\Delta, P^\beta_\sigma)$, используя для получения неэффективных условий метод обратного преобразования, причем эффективные необходимые условия получаем главным образом из неравенств (9) и (10) и из включений² $P^\alpha_c \subset P^\beta_c$ и $P^\alpha_l \subset P^\beta_l$ ($\beta \geq \alpha$). Используя этот метод, мы найдем эффективные необходимые и достаточные условия также для множителей суммируемости типов $(P^\alpha_\Delta, \bar{P}^\beta_\sigma)$. В силу включения $P^\alpha_c \subset (R, P_n, \alpha)_c$, $P^\alpha_l \subset (R, P_n, \alpha)_l$, $\bar{P}^\alpha_c \supset (R, P_n, \alpha)_c$ и $\bar{P}^\alpha_l \supset (R, P_n, \alpha)_l$ из последних получаем эффективные необходимые условия для множителей суммируемости типов $[(R, \lambda, \alpha)_\Delta, (R, \lambda, \beta)_\sigma]$.

Исследованием множителей суммируемости для метода (R, λ, α) занимались многие математики. Так, например, в [7] находят условия для множителей абсолютной сходимости относительно метода $(R, \lambda, \alpha)_l$, если $|\Delta \lambda_n|$ монотонны. В следствии 15 мы покажем, что при целочисленном α эти условия являются необходимыми и без этого ограничения. В работе [10] находят необходимые и достаточные условия для множителей суммируемости типов $[(R, n, \alpha)_c, (R, n, \beta)_c]$, которые совпадают с соответствующими множителями суммируемости для метода Чезаро

² Символом $P^\alpha_c \subset P^\beta_c$ ($P^\alpha_l \subset P^\beta_l$) мы обозначаем, что из P^β_c суммируемости (P^β_l -суммируемости) ряда (1) всегда следует и P^α_l -суммируемость (P^α_c -суммируемость) этого ряда.

и вытекают как частный случай из теоремы 1 нашей работы. В работах [9, 6, 8] рассматриваются множители суммируемости типов $((R, \lambda, \alpha)_m, (R, \lambda, \alpha)_l)$ и $((R, \lambda, \alpha)_c, (R, \lambda, \beta)_c)$ для целых и нецелых порядков α и β . Мы добавляем к полученным там достаточным условиям в следствиях 16 и 8 эффективные необходимые условия для целого порядка.

Рассматриваемые в работах [4, 5] множители суммируемости для метода (R, λ, α) во многом отличаются от наших. Во-первых, множители ε_k , рассматриваемые в этих работах являются функциями от последовательности $\{\lambda_k\}$, т. е. $\varepsilon_k = \varphi(\lambda_k)$. Мы такого ограничения не делаем. Зато, там в качестве метода (R, λ, β) взят метод $(R, \psi(\lambda), \beta)$. Значит, наши необходимые условия сравнимы с достаточными условиями из [4, 5] в случае, когда там $\psi(x) \equiv x$ и α целое число, а у нас $\beta = \alpha$ и $\varepsilon_k = \varphi(\lambda_k)$.

Все полученные нами условия о множителях суммируемости для метода P^α обобщают соответственные множители суммируемости для метода Чезаро C^α целочисленного порядка α , так как $P^\alpha = C^\alpha$, если $P_{k-1} = k$.

Отмечаем еще то, что множители суммируемости для метода P^1 исследованы в работе [2] в самом общем случае.

§ 1. Вспомогательные результаты

В последующем изложении мы воспользуемся следующими результатами.

Лемма 1 (см. [2]). *Комплексные числа ε_k являются множителями суммируемости типа (P^α_c, P^β_c) тогда и только тогда, когда*

$$1^\circ \sum_n \xi^{\alpha}_{nk} \varepsilon_n \quad \text{и} \quad \sum_n \xi^{\alpha}_n \varepsilon_n \quad P^\beta_c\text{-суммируемы,}$$

$$2^\circ \sum_{k=0}^n |c_{nk}| = O(1),$$

где

$$c_{nk} = \sum_{v=k}^n \pi^{\beta}_{nv} \xi^{\alpha}_{vk} \varepsilon_v, \quad (4)$$

$$(\xi^{\alpha}_{nk}) = (\pi^{\alpha}_{nk})^{-1} \quad \text{и} \quad \xi^{\alpha}_n = \sum_{k=0}^n \xi^{\alpha}_{nk}.$$

Следствие 1 (см. [2]). *Если комплексные числа ε_k являются множителями суммируемости типа (P^α_c, P^β_c) и метод P^β регулярен³, то*

$$\sum |c_k| < \infty,$$

где

$$c_k = \lim_n c_{nk}.$$

³ См., например, [1], стр. 196.

Лемма 2 (см. [2]). *Комплексные числа ε_k являются множителями суммируемости типа $(P^{\alpha_b}, P^{\beta_c})$ тогда и только тогда, когда*

$$1^\circ \sum \xi'^{\alpha_{hn}} \varepsilon_k \quad P^{\beta_c}\text{-суммируем,}$$

$$2^\circ c'_{nk} = O(1),$$

где

$$c'_{nk} = \sum_{v=h}^n \pi^{\beta_{nv}} \xi'^{\alpha_{vh}} \varepsilon_v \quad (5)$$

и

$$(\xi'^{\alpha_{nk}}) = (\overline{\Delta \pi^{\alpha_{nk}}})^{-1}.$$

Следствие 2 (см. [2]). *Если комплексные числа ε_k являются множителями суммируемости типа $(P^{\alpha_b}, P^{\beta_c})$ и P^{β} регулярен, то*

$$c'_h = O(1), \quad (6)$$

где

$$c'_h = \lim_n c'_{nh}.$$

Лемма 3 (см. [2]). *Комплексные числа ε_k являются множителями суммируемости типа $(P^{\alpha_l}, P^{\beta_l})$ тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{n=h}^{\infty} |\overline{\Delta c'_{nh}}| = O(1),$$

где величины c'_{nh} определяются формулой (5).

Лемма 4 (см. [11]). *Комплексные числа ε_k являются множителями суммируемости типов $(P^{\alpha_m}, P^{\beta_l})$ или $(P^{\alpha_c}, P^{\beta_l})$ или $(P^{\alpha_n}, P^{\beta_l})$ тогда и только тогда, когда*

$$\sum_h \left| \sum_{n=h}^{\infty} d_n \overline{\Delta c_{nh}} \right| < \infty,$$

где величины c_{nh} определяются формулой (4), а $\{d_n\}$ произвольная ограниченная последовательность комплексных чисел.

Лемма 5 (см. [12]). *Если преобразование*

$$y_n = \sum_{k=0}^n c_{nk} x_k$$

преобразует каждую ограниченную, сходящуюся или к нулю сходящуюся последовательность $\{x_k\}$ в абсолютно сходящийся ряд $\sum y_n$, то

$$\sum_h |c_{n(h),k}| < \infty,$$

где $n(k)$ — целочисленная монотонно возрастающая функция натуральных чисел.

Лемма 6 (см. [1]). *Если комплексные числа ε_k являются множителями суммируемости типа $(P^{\beta_c}, P^{\beta_c})$, то*

$$\sum |\Delta \varepsilon_k| < \infty. \quad (7)$$

Ниже мы воспользуемся и следующими результатами.

Лемма 7. Элементы матрицы $(\pi^{\alpha}_{nk})^{-1}$ имеют вид

$$\xi^{\alpha}_{k, k-\kappa} = (-1)^{\kappa} \frac{P_{k-\kappa} P_{k-\kappa+1} \dots P_{k-\kappa+\alpha-1} (P_{k+\alpha-\kappa} - P_{k-\kappa-1})}{\rho_k (\alpha - \kappa) \rho_{k-1} (-\kappa)},$$

если $0 \leq \kappa \leq \alpha + 1$,

$$\xi^{\alpha}_{k\nu} = 0$$

в остальных случаях, где

$$\rho_k (\alpha - \kappa) = \rho_k (\rho_k + \rho_{k+1}) \dots (\rho_k + \dots + \rho_{k+\alpha-\kappa})$$

и

$$\rho_{k-1} (-\kappa) = \rho_{k-1} (\rho_{k-1} + \rho_{k-2}) \dots (\rho_{k-1} + \dots + \rho_{k-\kappa}).$$

Доказательство проведем методом математической индукции. При $\alpha = 1$ наше утверждение вытекает из [2], стр. 219, при каждом κ . Предположим, что оно справедливо при $\alpha = \sigma - 1$. При $\alpha = \sigma$ мы должны показать, что $P^{\alpha} (P^{\alpha})^{-1} = E$. т. е.

$$\sum_{l=0}^q \xi^{\sigma}_{k, k-l} \pi^{\sigma}_{k-l, k-i} = \delta_{k, k-i},$$

где $q = \min(i, \sigma + 1)$. Так как

$$\xi^{\sigma}_{k, k-l} \pi^{\sigma}_{k-l, k-i} =$$

$$= (-1)^l \frac{(P_{k-l} - P_{k-i-1}) (P_{k-l+1} - P_{k-i-1}) \dots (P_{k+\sigma-l-1} - P_{k-i-1})}{\rho_k (\sigma - l) \rho_{k-1} (-l + 1)} +$$

$$+ (-1)^l \frac{(P_{k-l} - P_{k-i-1}) (P_{k-l+1} - P_{k-i-1}) \dots (P_{k+\sigma-l-1} - P_{k-i-1})}{\rho_k (\sigma - l - 1) \rho_{k-1} (-l)} =$$

$$= \beta^{\sigma i}_{k, k-l} + \gamma^{\sigma i}_{k, k-l},$$

$$\pi^{\sigma}_{k, k-i} \xi^{\sigma}_{kk} = \gamma^{\sigma i}_{kk},$$

$$\pi^{\sigma}_{k-\sigma-1, k-i} \xi^{\sigma}_{k, k-\sigma-1} = \beta^{\sigma i}_{k, k-\sigma-1},$$

$$\gamma^{\sigma i}_{k, k-l} + \beta^{\sigma i}_{k, k-l-1} = \pi^{\sigma-1}_{k-l, k-i} \xi^{\sigma-1}_{k, k-l}$$

и

$$\gamma^{\sigma i}_{k, k-i} = \beta^{\sigma-1, i}_{k, k-i} + \gamma^{\sigma-1, i}_{k, k-i},$$

то в силу предположения

$$\sum_{l=0}^{\sigma+1} \xi^{\sigma}_{k, k-l} \pi^{\sigma}_{k-l, k-i} = \sum_{l=0}^{\sigma} \xi^{\sigma-1}_{k, k-l} \pi^{\sigma-1}_{k-l, k-i} = \delta_{k, k-i} \quad (i \geq \sigma + 1)$$

и

$$\sum_{l=0}^i \xi^{\sigma}_{k, k-l} \pi^{\sigma}_{k-l, k-i} = \sum_{l=0}^i \xi^{\sigma-1}_{k, k-l} \pi^{\sigma-1}_{k-l, k-i} = \delta_{k, k-i} \quad (i < \sigma + 1).$$

Лемма 8. Элементы матрицы $(\Delta \pi_{k, k-x}^{\alpha})^{-1}$ имеют вид

$$\xi_{k, k-x}^{\alpha} = (-1)^x \frac{P_{k-x-1} \dots P_{k-2} P_k \dots P_{k+\alpha-x-1}}{\rho_k (\alpha - x - 1) \rho_{k-1} (-x)} \quad (0 \leq x \leq \alpha),$$

$\xi_{k, k-x}^{\alpha} = 0$, если $k + \alpha > x$ или $k < x$.

Доказательство проведем методом математической индукции. При $x=0$ наше утверждение тривиально. Предположим, что наше утверждение справедливо при $x=i$. Так как

$$\xi_{k, k-x}^{\alpha} = \sum_{\mu=0}^x \xi_{k, k-\mu}^{\alpha}$$

то при $x=i+1$ имеем:

$$\begin{aligned} \xi_{k, k-i-1}^{\alpha} &= \sum_{\mu=0}^i \xi_{k, k-\mu}^{\alpha} + \xi_{k, k-i-1}^{\alpha} = \\ &= (-1)^i \frac{P_{k-i-1} \dots P_{k-2} P_k \dots P_{k+\alpha-i-1}}{\rho_k (\alpha - i - 1) \rho_{k-1} (-i)} - \\ &- (-1)^i \frac{P_{k-i-1} \dots P_{k+\alpha-i-2} (P_{k-i-1+\alpha} - P_{k-i-2})}{\rho_k (\alpha - i - 1) \rho_{k-1} (-i - 1)} = \\ &= (-1)^{i+1} \frac{P_{k-i-2} \dots P_{k-2} P_k \dots P_{k+\alpha-i-2}}{\rho_k (\alpha - i - 2) \rho_{k-1} (-i - 1)}. \end{aligned}$$

Так как доказательство не зависит от α , то, тем самым, мы доказали наше утверждение для каждого конечного натурального числа α .

Лемма 9. Справедливо тождество

$$\sum_n \xi_{nh}^{\alpha} \varepsilon_n = P_k \dots P_{k+\alpha-1} \Delta^{\alpha+1}(\rho_k) \varepsilon_k,$$

где

$$\Delta^{\alpha+1}(\rho_k) \varepsilon_k = \Delta \frac{\Delta \varepsilon_k}{\rho_k \dots \rho_{k+\alpha-1}}.$$

Доказательство проведем методом математической индукции. По лемме 7 имеем $\sum_n \xi_{nh}^{\alpha} \varepsilon_n = \sum_{n=k}^{k+\alpha+1} \xi_{nh}^{\alpha} \varepsilon_n$. При $\alpha=1$ последнее совпадает с формулой (5.1) из [2], что и доказывает утверждение леммы 9 при $\alpha=1$. Предположим, что наше утверждение справедливо при $\alpha=\sigma-1$. Так как справедливы тождества

$$\begin{aligned} \xi_{k+l,k}^\sigma &= (-1)^l \frac{P_k \dots P_{k+l\sigma-1}}{\rho_{k+l}(\sigma-l)\rho_{k+l-1}(-l+2)} + \\ &+ (-1)^l \frac{P_k \dots P_{k+\sigma-1}}{\rho_{k+l}(\sigma-l-1)\rho_{k+l-1}(-l+1)} \\ &= \tau_{k+l,k}^\sigma + \theta_{k+l,k}^\sigma, \end{aligned}$$

$$\xi_{kh}^\sigma = \theta_{kh}^\sigma,$$

$$\xi_{k+\sigma+1,k}^\sigma = \tau_{k+\sigma+1,k}^\sigma,$$

$$\sum_{l=0}^{\sigma} \theta_{k+l,k}^\sigma \varepsilon_{k+l} = \frac{P_{k+\sigma-1}}{\rho_k + \dots + \rho_{k+\sigma-1}} \sum_{l=0}^{\sigma} \xi_{k+l,k}^{\sigma-1} \varepsilon_{k+l}$$

и

$$\sum_{l=1}^{\sigma+1} \tau_{k+l,k}^\sigma \varepsilon_{k+l} = \frac{P_k}{\rho_{k+1} + \dots + \rho_{k+\sigma}} \sum_{l=0}^{\sigma} \xi_{k+l+1,k+1}^{\sigma-1} \varepsilon_{k+l+1},$$

то

$$\begin{aligned} \sum_n \xi_{nk}^\sigma \varepsilon_n &= \frac{P_k \dots P_{k+l\sigma-1}}{\rho_k + \dots + \rho_{k+\sigma-1}} \Delta^\sigma(p_k) \varepsilon_k - \\ &- \frac{P_k \dots P_{k+\sigma-1}}{\rho_{k+1} + \dots + \rho_{k+\sigma-1}} \Delta^\sigma(p_{k+1}) \varepsilon_{k+1} = \\ &= P_k \dots P_{k+\sigma-1} \Delta^{\sigma+1}(p_k) \varepsilon_k. \end{aligned}$$

Следствие 3. *Справедливо тождество*

$$\xi_n^\alpha = \sum_{k=0}^n \xi_{nk}^\alpha = \begin{cases} 1, & \text{если } n=0, \\ 0, & \text{если } n>0. \end{cases}$$

Лемма 10. *Справедливо тождество*

$$\sum_n \xi_{nk}^{\prime\alpha} \varepsilon_n = \sum_{i=1}^{\alpha} \frac{P_{k+\alpha-i} \dots P_{k+\alpha-1}}{\rho_{k+\alpha-i} + \dots + \rho_{k+\alpha-1}} \Delta^i(p_{k+\alpha-i}) \varepsilon_{k+\alpha-i} + \varepsilon_{k+\alpha},$$

где

$$\Delta^1(p_k) \varepsilon_k = \Delta \varepsilon_k.$$

Доказательство проведем методом математической индукции. Так как

$$\sum_n \xi_{nk}^{\prime\alpha} \varepsilon_n = \sum_{i=0}^n \xi_{k+i,k}^{\prime\alpha} \varepsilon_{k+i} = c'_k,$$

то справедливость утверждения при $\alpha = 1$ вытекает из [2] (формула (7.1)). Допустим, что наше утверждение справедливо и при $\alpha = \sigma - 1$. При $\alpha = \sigma$ из тождеств

$$\xi_{k+i,h}^{\sigma} = \theta_{k+i,h}^{\sigma} + \xi_{k+i,h+1}^{\sigma-1},$$

$$\sum_{i=0}^{\sigma} \theta_{k+i,h}^{\sigma} = \frac{P_{k+\sigma-1}}{\rho_k + \dots + \rho_{k+\sigma-1}} \sum_{i=0}^{\sigma} \xi_{k+i,h}^{\sigma-1},$$

из леммы 8 вытекает, что

$$\begin{aligned} \sum_n \xi' \alpha_{nk} \varepsilon_n &= \sum_{i=1}^{\sigma-1} \frac{P_{k+\sigma-i} \dots P_{k+\sigma-1}}{\rho_{k+\sigma-i} + \dots + \rho_{k+\sigma-1}} \Delta^i (\rho_{k+\sigma-i}) \varepsilon_{k+\sigma-i} + \\ &+ \varepsilon_{k+\sigma} + \frac{P_k \dots P_{k+\sigma-1}}{\rho_k + \dots + \rho_{k+\sigma-1}} \Delta^{\sigma} (\rho_k) \varepsilon_k = \\ &= \sum_{i=1}^{\sigma} \frac{P_{k+\sigma-i} \dots P_{k+\sigma-i}}{\rho_{k+\sigma-i} + \dots + \rho_{k+\sigma-1}} \Delta^i (\rho_{k+\sigma-i}) \varepsilon_{k+\sigma-i} + \varepsilon_{k+\sigma}. \end{aligned}$$

Лемма 11. Пусть методы суммирования A и B определены соответственно преобразованиями ряда $\sum x_k$

$$y(t) = \sum_k a_k(t) x_k,$$

$$y_n = \sum_{k=0}^n \beta_{nk} x_k.$$

Включение $A_1 \supset B_1$ имеет место тогда и только тогда, когда

$$\int_a^{\infty} |dc_k(t)| = O(1) \quad (a > 0),$$

где

$$c_k(t) = \sum_n \xi'_{nk} a_n(t) \quad \text{и} \quad (\xi'_{nk}) = (\bar{\Delta} \beta_{nk})^{-1}.$$

Доказательство. Из [3] вытекает, что преобразование

$$y(t) = \sum c_k(t) x_k$$

должно сохранять абсолютную сходимость⁴, что равносильно нашему условию.

⁴ См., например, [1] стр. 196.

§ 2. Множители суммируемости для родов, суммируемых методом Рисса

Из леммы 1 получаем следующий результат.

Теорема 1. Пусть P^1 регулярен и последовательность $\{p_k\}$ удовлетворяет условиям

$$(p_{k-i} + \dots + p_{k+\beta-1})P_{k-1} = O\{(p_{k-i} + \dots + p_{k-1})P_{k+\beta-1}\} \quad (8)$$

$$(p_k + \dots + p_{k+\alpha-i})P_{k-l-1} = O\{(p_{k-1} + \dots + p_{k-i})P_{k+\alpha-i}\},$$

где $1 \leq i \leq \beta$ и $1 \leq l \leq \alpha$.

Комплексные числа ε_k являются множителями суммируемости типа (P^α_c, P^β_c) тогда и только тогда, когда выполнены условия 1° и 2°, если $\alpha \leq \beta$, и условия 2° и 3°, если $\alpha > \beta$, причем

$$1^\circ \sum |\Delta \varepsilon_k| < \infty,$$

$$2^\circ \sum |P_k \dots P_{k+i-1} \Delta^{i+1}(p_k) \varepsilon_k| < \infty \quad (i = 1, \dots, \alpha),$$

$$3^\circ \frac{P_{k+\beta} \dots P_{k+\alpha-1} \varepsilon_k}{(p_k + \dots + p_{k+\beta}) \dots (p_k + \dots + p_{k+\alpha-1})} = O(1).$$

Доказательство. Достаточность. Условие 1° леммы 1 вытекает из условий 1° и 2° теоремы 1 в силу леммы 9 и следствия 4. Условие 2° леммы 1 следует из условия 1°, 2° и 3° теоремы 1. Действительно, при $k < n - \alpha$ справедливо тождество:

$$\begin{aligned} \xi_{k+i, k}^\alpha \pi_{n, k+i}^\beta \varepsilon_{k+i} &= \frac{P_{k+\alpha-1} (P_{k+\alpha} - P_{k-1})}{P_{n+\beta-1} (P_{k+\alpha-1} - P_{k-1})} \xi_{k+i, k}^{\alpha-1} \pi_{n, k+i}^{\beta-1} \varepsilon_{k+i} + \\ &+ \frac{P_n - P_{k+\alpha}}{P_{n+\beta-1}} \xi_{k+i, k}^\alpha \pi_{n, k+i}^{\beta-1} \varepsilon_{k+i}. \end{aligned}$$

Следовательно, в силу леммы 9 и условия (8)

$$\begin{aligned} c_{nk} &= \sum_{i=0}^{\alpha+1} \xi_{k+i, k}^\alpha \pi_{n, k+i}^\beta \varepsilon_{k+i} = \\ &= O(1) \left[\sum_{l=1}^{\alpha} \left| \sum_{i=0}^{l+1} \xi_{k+i, k}^l \varepsilon_{k+i} \right| + |\Delta(\varepsilon_k \pi_{nk}^{\beta-\alpha})| \right] = \\ &= O(1) \left(\sum_{l=1}^{\alpha} |P_k \dots P_{k+l-1} \Delta^{l+1}(p_k) \varepsilon_k| + \right. \\ &\quad \left. + |\Delta \varepsilon_k| + |\varepsilon_k \Delta \pi_{nk}^{\beta-\alpha}| \right), \end{aligned}$$

если $\beta > \alpha$. Итак, при $\beta > \alpha$

$$\begin{aligned} c_{nk} &= O(1) \left(\sum_{l=1}^{\alpha} |P_k \dots P_{k+l-1} \Delta^{l+1}(p_k) \varepsilon_k| + |\Delta \varepsilon_k| + \right. \\ &\quad \left. + |\varepsilon_k \Delta \pi_{nk}^{\beta-\alpha}| \right), \end{aligned} \quad (9)$$

и аналогично, при $\alpha \geq \beta$

$$c_{nk} = O(1) \sum_{l=\alpha-\beta}^{\alpha} |P_k \dots P_{k+l-1} \Delta^{l+1}(p_k) \varepsilon_k|. \quad (10)$$

Следовательно,

$$\sum_{k=0}^n |c_{nk}| = \sum_{k=0}^{n-\alpha-2} |c_{nk}| + |c_{n, n-\alpha-1}| + \dots + |c_{nn}| = I_1 + I_2.$$

Из условий 1°, 2° и из регулярности P^1 следует, что $I_1 = O(1)$. Далее, из условия (8) выводим, что $c_{nk} = O(\xi_{nk}^{\alpha} \varepsilon_n \pi_{nn}^{\beta})$ при $n - \alpha - 1 \leq k \leq n$, значит, из условий 1° и 3° вытекает, что $I_2 = O(1)$.

Так как числа $\varepsilon_k \equiv 1$ удовлетворяют условиям 1° и 2° теоремы 1, то имеет место следующее утверждение.

Следствие 4. Если $\beta \geq \alpha$ и последовательность $\{p_k\}$ удовлетворяет условиям (8), то имеет место включение $P^{\alpha}_c \subset P^{\beta}_c$.

Необходимость условий теоремы 1. Условие 1° вытекает из леммы 6 и следствия 4; условие 2° вытекает из следствий 1 и 4; наконец, условие 3° выводим из условия 2° леммы 1 при помощи условия (8).

Следствие 5. Комплексные числа ε_k являются множителями сходимости относительно метода P^{α}_c тогда и только тогда, когда

$$1^{\circ} \sum |P_k \dots P_{k+\alpha-1} \Delta^{\alpha}(p_k) \varepsilon_k| < \infty,$$

$$2^{\circ} P_k \dots P_{k+\alpha-1} (P_{k+\alpha} - P_{k-1}) \varepsilon_{k+i} = O[p_{k+i}(i + \alpha) p_{k-1}(-i)],$$

где $i = 0, 1, \dots, \alpha + 1$.

Если в лемме 1 метод P^{β} заменить на метод \bar{P}^{β} и учесть, что для чисел $\bar{c}_{nk} = \sum_{i=k}^n \xi_{ik}^{\alpha} \varepsilon_i \bar{\pi}_{ni}^{\beta}$ имеют место неравенства (9) и (10), то аналогично теореме 1 доказывается и следующее утверждение.

Следствие 6. Пусть P^1 регулярен и последовательность $\{p_k\}$ удовлетворяет условиям (8). Комплексные числа ε_k являются множителями суммируемости типа $(P^{\alpha}_c, \bar{P}^{\beta}_c)$ тогда и только тогда, когда выполнены условия 1° и 2°, если $\alpha \leq \beta$, и условия 2° и 3°, если $\alpha > \beta$, причем

$$1^{\circ} \sum |\Delta \varepsilon_k| < \infty,$$

$$2^{\circ} \sum |P_k \dots P_{k+i-1} \Delta^{i+1}(p_k) \varepsilon_k| < \infty \quad (i = 1, 2, \dots, \alpha),$$

$$3^{\circ} \frac{P_k \dots P_{k+\alpha-1} \varepsilon_k}{p_k(\alpha-1)} = O\left\{ \left| \frac{P_k}{p_k} \right|^{\beta} \right\}.$$

Заменим теперь в лемме 1 метод P^{β} методом (R, P_n, α) и предположим, что $\{P_n\}$ — действительная последовательность,

монотонно стремящаяся к бесконечности. Так как теперь для последовательности функции

$$c_k(t) = \sum_{m=k}^n \xi_{mk}^{\alpha} \varepsilon_m \left(1 - \frac{P_{m-1}}{t} \right)^{\alpha},$$

где $P_{n-1} < t \leq P_n$, имеет место неравенство (9), то $c_k(t) \equiv 0$, если $k < n - \alpha$ и $\varepsilon_k \equiv 1$. Но если же $k \geq n - \alpha$ то, в силу монотонности последовательности $\{P_n\}$, заключаем, что $c_k(t) = O(1)$, если $\varepsilon_k \equiv 1$. Итак, числа $\varepsilon_k \equiv 1$ являются множителями суммируемости типа $[P_{\alpha_c}, (R, P_n, \alpha)_c]$, и, следовательно, справедливо следующее утверждение.

Следствие 7. Если $P_k \uparrow \infty$, то имеет место включение $P_{\alpha_c} \subset (R, P_n, \alpha)_c$.

Теперь, учитывая, что всегда имеет место включение $\bar{P}_{\alpha_c} \supset (R, P_n, \alpha)_c$, то из следствий 6 и 7 получаем.

Следствие 8. Если α и β целые числа и комплексные числа ε_k являются множителями суммируемости типа $[(R, \lambda, \alpha)_c, (R, \lambda, \beta)_c]$, то

$$1^{\circ} \sum |\Delta \varepsilon_k| < \infty,$$

$$2^{\circ} \sum |\lambda_{k+1}^{\alpha} \Delta^{\alpha+1} (\lambda_{k+1} - \lambda_k) \varepsilon_k| < \infty, \text{ при } \alpha \leq \beta,$$

$$3^{\circ} \varepsilon_k = O \left[\frac{\lambda_k^{\beta-\alpha}}{(\lambda_{k+1} - \lambda_k)^{\beta-\alpha}} \right], \text{ при } \alpha > \beta.$$

§ 3. Множители абсолютной суммируемости для рядов, абсолютно суммируемых методом Рисса

Из лемм 3 и 2 получаем следующий результат.

Теорема 2. Пусть P^i сохраняет абсолютную сходимость и регулярен, а последовательность $\{p_k\}$ удовлетворяет условиям (8). Комплексные числа ε_k являются множителями суммируемости типов $(P_{\alpha_i}, P_{\beta_c})$ или $(P_{\alpha_i}, P_{\beta_i})$ тогда и только тогда, когда выполнены условия 1° и 2° , если $\beta \geq \alpha$, и условия 2° и 3° , если $\beta < \alpha$, причем

$$1^{\circ} \varepsilon_k = O(1),$$

$$2^{\circ} \frac{P_k \dots P_{k+i-1}}{p_k \dots p_{k+i-1}} \Delta^i(p_k) \varepsilon_k = O(1) \quad (i = 1, \dots, \alpha),$$

$$3^{\circ} \frac{P_{k+\beta} \dots P_{k+\alpha-1} \varepsilon_k}{(p_k + \dots + p_{\alpha+\beta}) \dots (p_k + \dots + p_{k+\alpha-1})} = O(1).$$

Доказательство. Достаточность. В силу включения $P_{\alpha_i} \subset P_{\alpha_c}$ надо показать, что из условий 1° — 3° вытекает условие леммы 3. Для последнего имеет место оценка

$$\sum_{n=k}^{\infty} |\bar{\Delta}c'_{nh}| = O(1) (|c'_{kh}| + \dots + |c'_{k+\alpha, h}|) + \\ + \sum_{n=k+\alpha+1}^{\infty} |\bar{\Delta}c'_{nh}| = J_1 + J_2.$$

Из условий 1°, 3° и (8) вытекает, что $J_1 = O(1)$, так как из условия (8) следует, что $\xi'_{\alpha kh} = O(\xi'_{\alpha kh})$, а из условий 1°, 2° и 3° выводим, что $J_2 = O(1)$. Действительно,

$$J_2 = O(1) P_{k+\beta+1} \sum_{n=k}^{\infty} \left| \frac{p_n + \dots + p_{n+\beta-1}}{P_{n-1}P_{n+\beta-1}} \right| \times \\ \times \left(\left| \sum_{i=0}^{\alpha} \xi'_{k+i, h} \varepsilon_{k+i} \pi_{n, k+i}^{\beta-1} \right| + \right. \\ \left. + \left| \sum_{i=0}^{\alpha} \xi'_{k+i, h} \varepsilon_{k+i} \pi_{n, k+i}^{\beta-1} \frac{p_{k+i} + \dots + p_{k+\alpha+1}}{P_{k+\alpha+1}} \right| \right),$$

а для величин

$$c'_{nh} = \sum_{i=0}^{\alpha} \xi'_{k+i, h} \varepsilon_{k+i} \pi_{n, k+i}^{\beta-1}$$

и

$$c''_{nh} = \sum_{i=0}^{\alpha} \xi'_{k+i, h} \varepsilon_{k+i} \pi_{n, k+i}^{\beta-1} \frac{p_{k+i} + \dots + p_{k+\alpha+1}}{P_{k+\alpha+1}}$$

имеют место неравенства (9) и (10). Значит, на основании леммы 10 из условий 1°, 2° и 3° следует, что $J_2 = O(1)$.

Следствие 9. Если последовательность $\{p_k\}$ удовлетворяет условиям (8), то имеет место включение $P^{\alpha}_1 \subset P^{\beta}_1$ при $\beta \geq \alpha$.

Необходимость условий теоремы 2. В силу включения $P^{\alpha}_1 \subset P^{\alpha}_c$ надо показать, что условия 1°, 2° и 3° вытекают из леммы 2 и из следствия 2.

Условие 1° теоремы 2 вытекает из леммы 6, условие 2° теоремы 2 выводим из следствия 2, а условие 3° теоремы 2 заключаем из условия 2° леммы 2 при помощи условия (8).

Следствие 10. Комплексные числа ε_k являются множителями сходимости или абсолютной сходимости относительно метода P^{α}_1 тогда и только тогда, когда

$$\frac{P_{n-1} \dots P_{n+i-2} P_{n+i} \dots P_{n+\alpha-1} \varepsilon_{n+i}}{p_{n+i}(\alpha) p_{n+i-1}(-i+1)} = O(1) \quad (i = 0, 1, \dots, \alpha).$$

Следствие 11. Пусть P^1 сохраняет абсолютную сходимость и регулярен, а последовательность $\{p_k\}$ удовлетворяет условиям (8). Комплексные числа ε_k являются множителями суммируемости типов $(P^{\alpha}_1, \bar{P}^{\beta}_1)$ или $(P^{\alpha}_1, \bar{P}^{\beta}_1)$ тогда и только тогда, когда выполнены условия 1° и 2°, если $\beta \geq \alpha$, и условия 2° и 3°, если $\beta < \alpha$, причем

$$1^\circ \varepsilon_k = O(1),$$

$$2^\circ P_k \dots P_{k+i-1} \Delta^i (p_k) \varepsilon_k = O(p_k + \dots + p_{k+i-1}) \quad (i=1, \dots, \alpha),$$

$$3^\circ \frac{P_k \dots P_{k+\alpha-1} \varepsilon_k}{p_k(\alpha)} = O\left(\left|\frac{P_k}{p_k}\right|^{\beta}\right).$$

Следствие 12. Если $P_n \uparrow \infty$ и P^1 сохраняет абсолютную сходимость, то имеет место включение $P^{\alpha}_1 \subset (R, P_n, \alpha)_1$.

Доказательство. По лемме 11 мы должны показать, что

$$\int_{P_{k-1}}^{\infty} |dc'_k(t)| = O(1),$$

где

$$dc_k(t) = \alpha \sum_{i=0}^n \xi_{k+i,k}^{\alpha} \left(1 - \frac{P_{k+i}}{t}\right)^{\alpha-1} P_{k+i-1} t^{-2},$$

причем верхний индекс суммирования удовлетворяет условию $P_{n-1} < t \leq P_n$. Но

$$\int_{P_{k-1}}^{\infty} |dc'_k(t)| = O(1) c'_k(t) \Big|_{P_{k-1}}^{P_{k+\alpha}} + \int_{P_{k+\alpha+1}}^{\infty} |dc'_k(t)| = I_1 + I_2.$$

Так как $P_n \uparrow \infty$, то $I_1 = O(1)$. Далее, для величин $c'_k(t)$ имеет место неравенство (9), значит в силу леммы 10 заключаем, что и $I_2 = O(1)$.

Аналогично следствию 8 получаем следующее утверждение.

Следствие 13. Пусть P^1 сохраняет абсолютную сходимость и регулярен, а последовательность $\{p_k\}$ удовлетворяет условиям (8). Если комплексные числа ε_k являются множителями суммируемости типа $[(R, \lambda, \alpha)_1, (R, \lambda, \beta)_c]$ или $[R, \lambda, \alpha)_1, (R, \lambda, \beta)_1]$, то

$$1^\circ \varepsilon_k = O(1),$$

$$2^\circ \lambda^\alpha \Delta^\alpha (\lambda_{k+1} - \lambda_k) \varepsilon_k = [O(\lambda_{k+1} - \lambda_k)^\alpha],$$

$$3^\circ \lambda_k^{\alpha-\beta} \varepsilon_k = O[(\lambda_{k+1} - \lambda_k)^{\alpha-\beta}], \quad (\alpha > \beta).$$

§ 4. Множители абсолютной суммируемости для суммируемых или ограниченных методом Рисса рядов

Из лемм 4 и 5 получаем следующее предложение.

Теорема 3. Пусть P^1 сохраняет абсолютную сходимость и регулярен, а последовательность $\{p_k\}$ удовлетворяет условиям (8). Комплексные числа ε_k являются множителями суммируемости типа $(P^{\alpha}_\Delta, P^{\beta}_1)$, где $\Delta = s, t, n$, тогда⁵ и только тогда,

⁵ Необходимость условия 4 остается открытым.

когда выполнены условия 1° и 2°, если $\beta = \alpha$, условия 2° и 3°, если $\beta < \alpha$, и условия 2°, 4° и 5°, если $\beta > \alpha$, причем

$$1^\circ \sum |\varepsilon_k| < \infty,$$

$$2^\circ \sum |P_k \dots P_{k+i-1} \Delta^{i+1}(\rho_k) \varepsilon_k| < \infty. \quad (i = 1, \dots, \alpha),$$

$$3^\circ \sum \left| \frac{P_{k+\beta} \dots P_{k+\alpha-1} \varepsilon_k}{(\rho_k + \dots + \rho_{k+\beta}) \dots (\rho_k + \dots + \rho_{k+\alpha-1})} \right| < \infty,$$

$$4^\circ \sum \left| \frac{\varepsilon_k \rho_k}{P_k} \right| < \infty,$$

$$5^\circ \sum |\Delta \varepsilon_k| < \infty.$$

Доказательство. Необходимость. Условия 2° и 5° следуют из теоремы 1, а условия 3° и 1° выводим из леммы 5, если в последнем $n(k) = k - i$.

Достаточность. Условие леммы 4 имеет вид

$$\sum |c_{kk} d_k + \sum_{n=k+1}^{n+\alpha+1} (c_{nk} - c_{n-1,k}) d_n + \sum_{n=k+\alpha+2}^{\infty} d_n \bar{\Delta} c_{nk}| < \infty.$$

Так как в силу условий (8), 1° и 3°

$$\sum |c_{nk}| < \infty$$

при $k \leq n \leq k + \alpha + 1$, то остается показать, что

$$\sum_k \left| \sum_{n=k+\alpha+2}^{\infty} d_n \bar{\Delta} c_{nk} \right| < \infty. \quad (11)$$

Сходимость ряда (11) вытекает из условий 2°, 3°, 4° и 5°. Действительно, из неравенства

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=k+\alpha+2}^{\infty} d_n \Delta c_{nk} \right| &= O(1) |P_{k+\beta+1}| \sum_{n=k+\alpha+2}^{\infty} \left| \frac{\rho_n + \dots + \rho_{n+\beta-1}}{P_{n-1} P_{n+\beta-1}} \right| \times \\ &\times \left(\left| \sum_{i=k}^{k+\alpha+1} \xi_{k+i,k}^{\alpha} \varepsilon_{k+i} \pi_{n,k+i}^{\beta-1} \right| + \right. \\ &\left. + \left| \sum_{i=k}^{k+\alpha+1} \xi_{k+i,k}^{\alpha} \varepsilon_{k+i} \pi_{n,k+i}^{\beta-1} \frac{\rho_{k+i} + \dots + \rho_{k+\alpha+1}}{P_{k+\alpha+1}} \right| \right) \end{aligned}$$

и из того, что для величин

$$c''_{nk} = \sum_{i=k}^{k+\alpha+1} \xi_{k+i,k}^{\alpha} \varepsilon_{k+i} \pi_{n,k+i}^{\beta-1}$$

и

$$c'''_{nk} = \sum_{i=k}^{k+\alpha+1} \xi_{k+i,k}^{\alpha} \varepsilon_{k+i} \pi_{n,k+i}^{\beta-1} \frac{\rho_{k+i} + \dots + \rho_{k+\alpha+1}}{P_{k+\alpha+1}}$$

справедливы неравенства (9) и (10), в силу того, что P^1 сохраняет абсолютную сходимость, заключаем сходимость ряда (11).

Следствие 14. *Комплексные числа ε_k являются множителями абсолютной сходимости относительно метода P_{α_m} , или P_{α_n} , или P_{α_c} , тогда и только тогда, когда*

$$\sum \left| \frac{P_{k-i} \dots P_{k+\alpha-i-1} (p_{k-1} + \dots + p_{k+\alpha-i}) \varepsilon_k}{p_k (\alpha - i + 1) p_{k-1} (-i)} \right| < \infty,$$

где $i = 0, 1, \dots, \alpha + 1$.

Если же предполагать, что $P_n \uparrow \infty$, то из следствий 7 и 14 получаем предложение.

Следствие 15. *Если $P_n \uparrow \infty$ и комплексные числа ε_k являются множителями абсолютной сходимости относительно метода $(R, P_n, \alpha)_c$, то*

$$\sum \left| \left(\frac{P_k}{p_k} \right)^\alpha \varepsilon_k \right| < \infty.$$

Следствие 15 показывает, что найденное в [7] условие для множителей абсолютной сходимости относительно метода $(R, \lambda, \alpha)_c$ для целого α является необходимым и без монотонности $|\Delta \lambda_k|$.

При $P_n \uparrow \infty$ из следствия 7 и теоремы 3 вытекает еще следующее предложение.

Следствие 16. *Если $P_n \uparrow \infty$, то для множителей суммируемости типа $[(R, P_n, \alpha)_m, (R, P_n, \alpha)]$ необходимо выполнение условия*

$$\sum |P_k \dots P_{k+\alpha-1} \Delta^{\alpha+1} (p_k) \varepsilon_k| < \infty.$$

Аналогично следствию 6 получаем следующее предложение.

Следствие 17. *Если P^1 сохраняет абсолютную сходимост и регулярен, а последовательность $\{p_k\}$ удовлетворяет условиям (8), то комплексные числа ε_k являются множителями суммируемости типов $(P_{\alpha_c}, \bar{P}^{\beta_l})$, $(P_{\alpha_m}, \bar{P}^{\beta_l})$ или $(P_{\alpha_n}, \bar{P}^{\beta_l})$ тогда и только тогда, когда выполнены условия 1° и 2°, если $\alpha = \beta$, условия 2° и 5°, если $\alpha > \beta$ и условия 2°, 3° и 4°, если $\alpha < \beta$, причем*

$$1^\circ \sum |\varepsilon_k| < \infty,$$

$$2^\circ \sum |P_k \dots P_{k+i-1} \Delta^{i+1} (p_k) \varepsilon_k| < \infty \quad (i = 1, \dots, \alpha),$$

$$3^\circ \sum \left| \frac{p_k \varepsilon_k}{P_k} \right| < \infty,$$

$$4^\circ \sum |\Delta \varepsilon_k| < \infty,$$

$$5^\circ \sum \left| \frac{P_{k+\beta} \dots P_{k+\alpha-1} \varepsilon_k}{(p_k + \dots + p_{k+\beta}) \dots (p_k + \dots + p_{k+\alpha-1})} \right| < \infty.$$

Литература

1. Кангро Г., О множителях суммируемости. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1955, 37, 191—232.

2. Кангро Г., Вихманн Ф., Об абстрактных множителях суммируемости для метода взвешенных средних Рисса. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1961, 102, 209—225.
3. Кулль И., Умножение суммируемых двойных рядов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1958, 62, 3—59.
4. Ahmad, Z. U., Absolute summability factors of infinite series by Rieszian means. Rend. Circolo mat. Palermo, 1962, 11, 91—104.
5. Borwein, D., Sawyer, B. L., On absolute Riesz summability factors. J. London Math. Soc. (3), 1964, 39, 455—465.
6. Maddox, I. J., Convergence and summability factors for Riesz means. Proc. London Math. Soc., 1962, 12, 345—366.
7. Maddox, I. J., On Riesz summability factors. Tôhoku Math. J., (2), 1962, 14, 431—435.
8. Maddox, I. J., On absolute Riesz summability factors. Tôhoku Math. J., (2), 1963, 15, 116—120.
9. Maddox, I. J., On absolute Riesz summability factors II. Tôhoku Math. J., (2), 1964, 16, 60—71.
10. Maddox, I. J., A note on summability factors theorems. Quart. J. Math., 1964, 59, 208—216.
11. Peyerimhoff, A., Über Summierbarkeitsfaktoren und verwandte fragen bei Cesàroverfahren I. Publs. Inst. math. Acad. serbe sci., 1955, 8, 139—156.
12. Peyerimhoff, A., Über ein Lemma von H. C. Chow. J. London Math. Soc., 1957, 32, 33—36.

Поступило
20 XII 1965

SUMMEERUVUSTEGURID RIESZ'I MENETLUSTE JAOKS

H. Tüرنpu

Resümee

Käesolevas töös leitakse efektiivsed tarvilikud ja piisavad tingimused järgmist tüüpi summeeruvustegurite jaoks: $(P_c\alpha, P_c\beta)$, $(P_l\alpha, P_c\beta)$, $(P_l\alpha, P_l\beta)$, $(P_m\alpha, P_l\beta)$, $(P_n\alpha, P_l\beta)$ ja $(P_c\alpha, P_l\beta)$. Sümboliga $P\alpha$ me tähistame α järku Riesz'i menetlust, mille rida-jada teisenduse maatriks $(\pi_{nk}\alpha)$ on määratud teisendusega (1).

Saadud tulemusi rakendatakse pideva parameetriga Riesz'i menetluse (R, λ, α) summeeruvustegurite uurimisel.

SUMMIERBARKEITSAKTÖREN FÜR DAS RIESZSCHE VERFAHREN

H. Tüرنpu

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit werden die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für Summierbarkeitsfaktoren folgender Typen gefunden: $(P_c\alpha, P_c\beta)$, $(P_l\alpha, P_c\beta)$, $(P_l\alpha, P_l\beta)$, $(P_m\alpha, P_l\beta)$, $(P_n\alpha, P_l\beta)$ und $(P_c\alpha, P_l\beta)$. Hier bezeichnet $P\alpha$ ein Rieszches Verfahren mit dreieckiger Matrix $(\pi_{nk}\alpha)$; wo

$$\pi_{nk}^{\alpha} = \left(1 - \frac{P_{k-1}}{P_n}\right) \cdots \left(1 - \frac{P_{n-1}}{P_{n+\alpha-1}}\right).$$

Die in dieser Arbeit gefundenen Bedingungen werden bei der Untersuchung der Summierbarkeitsfaktoren für das Rieszsche Verfahren mit stetigen Parametern (R, λ, α) gebraucht.

МНОЖИТЕЛИ ψ -СХОДИМОСТИ

М. Абель, Х. Тюрппу

Кружок СНО при кафедре математического анализа

Введение

Пусть X и Y — банаховы пространства. Ряд¹

$$\sum x_n \tag{1}$$

из X (последовательность $\{x_n\}$ из X) называется φ - A -суммируемой (или φ - \mathfrak{A} -суммируемой), если последовательность

$$x'_n = \varphi_n \sum_{k=0}^n a_{nk} x_k \quad (\text{соответственно } x''_n = \varphi_n \sum_{k=0}^n a_{nk} x_k) \tag{2}$$

сходится, где $A = (a_{nk})$ (соответственно $\mathfrak{A} = (a_{nk})$) матрица преобразования ряда в последовательность (соответственно последовательности в последовательность), определяющей метод суммирования, а $\{\varphi_n\}$ — заданная числовая последовательность.

Аналогично определяются φ - A -ограниченность и к нулю φ - A -суммируемость (или φ - \mathfrak{A} -ограниченность и к нулю φ - \mathfrak{A} -суммируемость) ряда (1) из X (соответственно последовательности $\{x_n\}$ из X), которые соответственно обозначаем через φ - A_0 и φ - A_∞ (соответственно φ - \mathfrak{A}_0 и φ - \mathfrak{A}_∞).

Ряд (1) из X (последовательность $\{x_n\}$ из X) называется абсолютно φ - A -суммируемым или φ - $|A|$ -суммируемым (соответственно абсолютно φ - \mathfrak{A} -суммируемым или φ - $|\mathfrak{A}|$ -суммируемым), если сходится ряд²

$$\sum_n \|\varphi_n (\sum_{k=0}^n \bar{\Delta}_n a_{nk} x_k)\| \quad (\text{соответственно } \sum_n \|\varphi_n (\sum_{k=0}^n \bar{\Delta}_n a_{nk} x_k)\|). \tag{3}$$

¹ Как правило, в дальнейшем мы $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ заменяем через Σx_n и $\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}$ через Σa_{nk} . Кроме того, свободные индексы, если не указано противное, имеют все значения 0, 1, 2 ...

² Здесь и в дальнейшем $\bar{\Delta}_n a_{nk} = a_{nk} - a_{n-1, k}$ и $\bar{\Delta} a_n = a_n - a_{n-1}$.

Если $a_{nk} \equiv 1$ при $n \geq k$ и $a_{nk} = 0$ при $k > n$ (или $a_{nk} = \delta_{nk}$), т. е. если метод A (или \mathfrak{A}) есть метод сходимости, то мы получаем определение φ -сходимости или абсолютной φ -сходимости ряда (1) из X (последовательности $\{x_n\}$ из X).

Пусть ε_n — линейные непрерывные операторы из X в Y .

Операторы ε_n называем *множителями φ -сходимости* (соответственно *множителями абсолютной φ -сходимости*) относительно метода φ - A , если из φ - A -суммируемости ряда (1) из X всегда следует φ -сходимость (абсолютная φ -сходимость) ряда

$$\sum \varepsilon_n x_n \quad (4)$$

из Y . Аналогично определяются множители φ -сходимости и абсолютной φ -сходимости относительно методов φ - A , φ - A_0 и φ - A_{00} . Обычно такие множители называют множителями второго рода.

Операторы ε_n называем *множителями φ -сходимости* (соответственно *множителями абсолютной φ -сходимости*) относительно метода φ - \mathfrak{A} , если из φ - \mathfrak{A} -суммируемости последовательности $\{x_n\}$ из X , всегда следует φ -сходимость (абсолютная φ -сходимость) ряда (4) из Y . Аналогично определяются множители φ -сходимости и абсолютной φ -сходимости относительно методов φ - \mathfrak{A} , φ - \mathfrak{A}_0 и φ - \mathfrak{A}_{00} . Обычно такие множители называют множителями первого рода.

Операторы ε_n называем *множителями φ -сходимости* (соответственно *множителями абсолютной φ -сходимости*) в последовательности относительно метода φ - \mathfrak{A} , если из φ - \mathfrak{A} -суммируемости последовательности $\{x_n\}$ из X всегда следует φ -сходимость (абсолютная φ -сходимость) последовательности $\{\varepsilon_n x_n\}$ из Y . Аналогично определяются множители φ -сходимости и абсолютной φ -сходимости в последовательности относительно методов φ - \mathfrak{A} , φ - \mathfrak{A}_0 и φ - \mathfrak{A}_{00} .

В настоящей статье мы исследуем все три рода множителей сходимости в случае, если A (и тем самым также \mathfrak{A}) треугольный метод суммирования, который удовлетворяет условию

$$\sum_{k=0}^n a_{nk} = 1 \quad (5)$$

и имеет в обратной к \mathfrak{A} матрице (ξ_{nk}) точно $\alpha + 1$ отличных от нуля диагоналей, т. е.

$$\begin{cases} \xi_{nk} \neq 0 & \text{при } n \leq k \leq n - \alpha, \\ \xi_{nk} = 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (6)$$

Такой метод суммирования \mathfrak{A} впредь обозначаем через \mathfrak{A}^α .

Аналогично так, как в [3], стр. 80, из (6) и

$$\sum_{k=0}^n \xi_{nk} \equiv 1$$

вытекает

$$\xi'_{nk} = \sum_{s=k}^n \xi_{ns} \equiv 1 \text{ при } k \leq n - \alpha. \quad (7)$$

Далее, в этом случае в обратной к A матрице (η_{nk}) есть $\alpha + 2$ отличных от нуля диагоналей, причем, если $n \geq k + \alpha + 1$, то

$$\sum_{k=0}^n \eta_{nk} \equiv 0. \quad (8)$$

Такой метод суммирования A впредь обозначаем через A^α . Методами A^α (или \mathfrak{A}^α) являются, например, метод Рисса R^α целочисленного порядка α , (см. [5], стр. 90), метод Чезаро C^α целочисленного порядка α и др.

Полученные в данной работе³ результаты при $\varphi_n \equiv \psi_n \equiv 1$ имеются в статьях [1, 2, 4], а при $X = Y = R_1$ и $\varphi_n \equiv \psi_n \equiv 1$ в статьях [3, 10].

Мы обобщаем последние результаты на случай, когда последовательности $\{\varphi_n\}$ и $\{\psi_n\}$ произвольные.

§ 1. Неэффективные условия

В дальнейшем мы воспользуемся следующими леммами, которые доказываются аналогично, как в [2, 4].

Обозначаем через

$$\eta_n = \sum_{k=0}^n \varphi_k^{-1} \eta_{nk} \quad \text{и} \quad \xi_n = \sum_{k=0}^n \varphi_k^{-1} \xi_{nk}.$$

Лемма 1. *Операторы ϵ_n являются множителями ψ -сходимости а) относительно метода φ - A , б) относительно метода φ - \mathfrak{A} , в) в последовательности относительно метода φ - \mathfrak{A} , тогда и только тогда, если выполнены условия: в случае а) — условия*

$$1^\circ \sum_n \eta_{nk} \epsilon_n x \quad \text{и} \quad \sum \eta_n \epsilon_n x$$

являются ψ -сходящимися ($x \in X$),

$$2^\circ \sup_{\|x_k\| \leq 1} \left\| \sum_{k=0}^m \psi_n c_{nk} x_k \right\| = O(1)$$

при

$$c_{nk} = \sum_{s=k}^n \varphi_k^{-1} \eta_{sk} \epsilon_s, \quad (9)$$

в случае б) — условие 2° леммы 1 при

$$c_{nk} = \sum_{s=k}^n \varphi_k^{-1} \xi_{sk} \epsilon_s, \quad (10)$$

³ Результаты в §§ 2 и 3 получил Х. Тюрнпу, а в § 4 — М. Абель.

3° $\sum_n \xi_{nk} \varepsilon_n x$ и $\sum \xi_n \varepsilon_n x$ являются ψ -сходящимися ($x \in X$),
а в случае в) — условие 2° леммы 1 при

$$c_{nk} = \varphi_k^{-1} \xi_{nk} \varepsilon_n, \quad (11)$$

4° $\{\xi_{nk} \varepsilon_n x\}$ и $\{\xi_n \varepsilon_n x\}$ являются ψ -сходящимися ($x \in X$).
Обозначаем через

$$\eta'_{nk} = \sum_{s=k}^n \eta_{ns} \quad \text{и} \quad \xi'_{nk} = \sum_{s=k}^n \xi_{ns}.$$

Лемма 2. Операторы ε_n являются множителями ψ -сходимости а) относительно метода φ -|A|, б) относительно метода φ -|M| и в) в последовательности относительно метода φ -|M|, тогда и только тогда, если выполнены условия: в случае а) — условия

$$1^\circ \sum_n \eta'_{nk} \varepsilon_n x \quad \text{является} \quad \psi\text{-сходящимся} \quad (x \in X),$$

$$2^\circ \|\gamma_{nk}\| = O(\psi_n^{-1})$$

при

$$\gamma_{nk} = \sum_{s=k}^n \varphi_k^{-1} \eta'_{sk} \varepsilon_s, \quad (12)$$

в случае б) — условие 2° леммы 2 при

$$\gamma_{nk} = \sum_{s=k}^n \varphi_k^{-1} \xi'_{sk} \varepsilon_s, \quad (13)$$

$$3^\circ \sum_n \xi'_{nk} \varepsilon_n x \quad \text{является} \quad \psi\text{-сходящимся} \quad (x \in X),$$

а в случае в) — условие 2° леммы 2 при

$$\gamma_{nk} = \varphi_k^{-1} \xi'_{nk} \varepsilon_n, \quad (14)$$

$$4^\circ \{\xi'_{nk} \varepsilon_n x\} \quad \text{является} \quad \psi\text{-сходящейся} \quad (x \in X).$$

Лемма 3. Операторы ε_n являются множителями абсолютной ψ -сходимости а) относительно метода φ -|A|, б) относительно метода φ -|M| и в) в последовательности относительно метода φ -|M|, тогда и только тогда, если выполнено условие

$$\sum_n \|\psi_n \bar{\Delta}_n \gamma_{nk} x\| = O(\|x\|) \quad (x \in X),$$

где γ_{nk} задаются в случае а) — формулами (12), в случае б) — формулами (13) и в случае в) — формулами (14).

Лемма 4 (см. [8]). Пусть $X = Y = R_1$. Числа ε_n являются множителями абсолютной ψ -сходимости, а) относительно методов φ -A, φ -A₀ или φ -A₀, б) относительно методов φ -M, φ -M₀ или φ -M₀ и в) в последовательности относительно методов φ -M, φ -M₀ или φ -M₀, тогда и только тогда, если выполнено условие

$$\sum_k | \sum_{n=k}^{\infty} \psi_n \bar{\Delta}_n c_{nk} d_n | < \infty,$$

где $\{d_n\}$ — произвольная ограниченная последовательность и c_{nk} задаются в случае а) — формулами (9), в случае б) — формулами (10) и в случае в) формулами (11).

Лемма 5 (см. [9]). Пусть $X = Y = R_1$. Если числа ε_n являются множителями абсолютной ψ -сходимости а) относительно методов φ -A, φ -A₀ или φ -A₀, б) относительно методов φ -X, φ -X₀ или φ -X₀ и в) в последовательности относительно методов φ -X, φ -X₀ или φ -X₀, то

$$\sum_k |\psi_{n(k)} c_{n(k),k}| < \infty,$$

где $n(k)$ строго возрастающая целочисленная функция от k , а c_{nk} задаются в случае а) — формулами (9), в случае б) — формулами (10), и в случае в) — формулами (11).

§ 2. Множители ψ -сходимости второго рода

Используя лемму 1а, получаем следующий результат.

Теорема 1. Пусть последовательность $\{\psi_n\}$ удовлетворяет условиям:

$$\text{существует } \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n \quad (15)$$

и

$$\psi_n = O(\psi_{n-1}). \quad (16)$$

Операторы ε_n являются множителями ψ -сходимости относительно метода φ -A $^\alpha$ тогда и только тогда, когда ⁴

$$1^\circ \sum \eta_n \varepsilon_n x \text{ является } \psi\text{-сходящимся } (x \in X),$$

$$2^\circ \sup_{\|x_k\| \leq i} \left\| \sum_{k=0}^p \varphi_k^{-1} A_k x_k \right\| = O(\psi_n^{-1}) \quad (0 \leq p \leq n - \alpha - 1),$$

$$3^\circ \|\eta_{nk} \varepsilon_n\| = O(\varphi_k \psi_n^{-1}) \quad (n - \alpha - 1 \leq k \leq n),$$

где

$$A_k = \sum_{s=k}^{k+\alpha+1} \eta_{sk} \varepsilon_s.$$

Доказательство. Необходимость. Условие 1^o является одним из условий 1^o леммы 1а, а условие 2^o следует из условия 2^o леммы 1а. Из условия 2^o леммы 1а выводим, что

$$\|c_{nk}\| = O(\psi_n^{-1}), \quad (17)$$

откуда при $k = n$ получаем условие 3^o для $k = n$. Далее,

$$c_{n,n-1} = \varphi_{n-1}^{-1} \eta_{n-1,n-1} \varepsilon_{n-1} + \varphi_{n-1}^{-1} \eta_{n,n-1} \varepsilon_n,$$

⁴ Выражение $(0 \leq p \leq n - \alpha - 1)$ означает, что условия 2^o должны выполняться при всех $p = 0, 1, \dots, n - \alpha - 1$. Аналогично условия 3^o должны выполняться при всех $k = n - \alpha - 1, \dots, n$. Такие же обозначения применяем и в следующих теоремах.

значит, в силу условия (16), из условия 3° при $k = n$ выводим условие 3° для $k = n - 1$. Точно так же и доказываем необходимость условия 3° для остальных $k = n - 2, \dots, n - \alpha - 1$.

Достаточность. Условие 1° леммы 1а вытекает из условия 1° теоремы 1 из того, что ψ -сходимость ряда

$$\sum_n \eta_{nk} \varepsilon_n x$$

равносильна сходимости при $n \rightarrow \infty$ последовательности

$$\psi_n \sum_{s=k}^n \eta_{sk} \varepsilon_s x.$$

Последняя вытекает из условий (15) и (17). Условие 2° леммы 1а при $k \leq n - \alpha - 1$ вытекает из условия 2°, а при $k > n - \alpha - 1$ — из условий 2° и 3°.

Если $A^\alpha = P^\alpha$, то (см. [5], стр. 98) из теоремы 1 получаем

Следствие 1. *Операторы ε_n являются множителями ψ -сходимости относительно метода φ - P^α тогда и только тогда, когда*

1° $\sum \eta_n \varepsilon_n x$ является ψ -сходящимся ($x \in X$),

$$2^\circ \sup_{\|x_k\| \leq 1} \left\| \sum_{k=0}^n \varphi_k^{-1} P_k \dots P_{k+\alpha-1} (\Delta^{\alpha+1}(p_k) \varepsilon_k) x_k \right\| = O(\psi_n^{-1})$$

$$(0 \leq p \leq n - \alpha - 1),$$

$$3^\circ \left\| \frac{P_{k-x} \dots P_{k-x+\alpha-1} (p_{k-x} + \dots + p_{k-x+\alpha}) \varepsilon_k}{p_k (\alpha - x) p_{k-1} (-x)} \right\| = O(\varphi_{k-x} \psi_k^{-1})$$

$$(0 \leq x \leq \alpha + 1),$$

где η_n определяется так как в лемме 1, причем

$$\eta_{k, k-x} = \frac{P_{k-x} \dots P_{k-x+\alpha-1} (p_{k-x} + \dots + p_{k-x+\alpha}) (-1)^x}{p_k (\alpha - x) p_{k-1} (-x)}.$$

Из леммы 2а выводим следующее утверждение.

Теорема 2. *Если последовательность $\{\psi_n\}$ удовлетворяет условиям (15) и (16), то операторы ε_n являются множителями ψ -сходимости относительно метода φ - $|A^\alpha|$ тогда и только тогда, когда*

$$1^\circ \|\eta'_{nk} \varepsilon_n\| = O(\varphi_k \psi_n^{-1}) \quad (n - \alpha - 1 \leq k \leq n),$$

$$2^\circ \|A_k\| = O(\varphi_k \psi_n^{-1}) \quad (0 \leq k \leq n - \alpha),$$

где A_k определены в теореме 1.

Доказательство. Необходимость. Условие 2° непосредственно вытекает из условия 2° леммы 2а. Далее, из условия 2° леммы 2а при $k = n$ выводим условие 1° при $k = n$. Для $k = n - 1$ из условия 2° леммы 2а имеем

$$\|\eta'_{n-1, n-1} \varepsilon_{n-1} + \eta'_{n, n-1} \varepsilon_n\| = O(\varphi_{n-1} \psi_n^{-1}),$$

откуда и заключаем условие 1° теоремы 2 при $k = n - 1$, так как последовательность $\{\psi_n\}$ удовлетворяет условию (16). Так же и выводим необходимость условия 1° для остальных $k = n - 2, \dots, n - \alpha - 1$.

Достаточность. Условие 1° и 2° леммы 2а следуют из условий 1° и 2° в силу условий (15) и (16).

Примечание 1. Если $\psi_n = O(\varphi_k)$ для всех $k \leq n$, то условие 2° теоремы 2 отпадает.

Если $|A^\alpha| = |P^\alpha|$, то (см. [5], стр. 100) из теоремы 2 получаем

Следствие 2. Пусть последовательность $\{\psi_n\}$ удовлетворяет условиям (15) и (16). Операторы ε_n являются множителями ψ -сходимости относительно метода φ - $|P^\alpha|$ тогда и только тогда, когда при $0 \leq \kappa \leq \alpha + 1$ выполнены условия

$$1^\circ \left\| \frac{P_{k-1} \dots P_{k+\kappa} P_{k+\kappa+2} \dots P_{k+\alpha-1} \varepsilon_{k+\kappa}}{p_{k+\kappa}(\alpha-1) p_{k+\kappa-1}(-\kappa)} \right\| = O(\varphi_k \psi_{k+\kappa}^{-1}),$$

$$2^\circ \left\| \frac{P_k \dots P_{k+\kappa-1}}{p_k + \dots + p_{k+\kappa-1}} \Delta^\kappa(p_k) \varepsilon_k \right\| = O(\varphi_k \psi_k^{-1}).$$

Из леммы 3а выводим следующее утверждение

Теорема 3. Пусть последовательность $\{\psi_n\}$ удовлетворяет условию (16). Операторы ε_n являются множителями абсолютной ψ -сходимости относительно метода φ - $|A^\alpha|$ тогда и только тогда, когда

$$\|\eta'_{nk} \varepsilon_n\| = O(\varphi_k \psi_n^{-1}) \quad (n - \alpha \leq k \leq n).$$

Доказательство. Необходимость. Из условия леммы 3а выводим, что

$$\|\bar{\Delta}_n \gamma_{nk}\| = O(\psi_n^{-1}), \quad (18)$$

откуда при $k = n$ вытекает условие теоремы 3 с $k = n$. Далее, из (18) при $k = n - 1$ выводим, что

$$\|\gamma_{n,n-1} - \gamma_{n-1,n-1}\| = O(\psi_n^{-1}),$$

откуда $\|\gamma_{n,n-1}\| = O(\psi_n^{-1})$, в силу условия (16). Но

$$\gamma_{n,n-1} = \varphi_{n-1}^{-1} \eta'_{n-1,n-1} \varepsilon_{n-1} + \varphi_{n-1}^{-1} \eta'_{n,n-1} \varepsilon_n,$$

и мы получаем необходимость условий теоремы 3 при $k = n - 1$. Точно так же и выводим необходимость условий теоремы 3 для остальных $k = n - 2, \dots, n - \alpha$.

Достаточность. В силу (16) и условий теоремы 3, имеем

$$\begin{aligned} \|\psi_k \gamma_{kk} x\| + \|\psi_{k+1} (\gamma_{k+1,k} - \gamma_{kk}) x\| + \dots + \\ + \|\psi_{k+\alpha} (\gamma_{k+\alpha,k} - \gamma_{k+\alpha-1,k}) x\| = \end{aligned}$$

$$= O(1) \|\psi_k \varphi_k^{-1} \eta'_{kk} \varepsilon_k x\| + \dots + \\ + O(1) \|\psi_{k+\alpha} \varphi_k^{-1} \eta'_{k+\alpha, k} \varepsilon_{k+\alpha} x\| = O(\|x\|).$$

Следствие 3. Пусть последовательность $\{\psi_n\}$ удовлетворяет условию (16). Операторы ε_n являются множителями абсолютной ψ -сходимости относительно метода φ - $|P^\alpha|$ тогда и только тогда, когда выполнено условие 1° следствия 2.

Из лемм 4а и 5а вытекает следующее утверждение.

Теорема 4. Пусть последовательность $\{\psi_n\}$ удовлетворяет условию (16). Числа ε_n являются множителями абсолютной ψ -сходимости относительно методов φ - A^α , φ - A_0^α или φ - A_σ^α тогда и только тогда, когда

$$\sum_n |\psi_n \varphi_{n-k}^{-1} \eta_{n, n-k} \varepsilon_n| < \infty \quad (0 \leq k \leq \alpha + 1).$$

Доказательство. Необходимость. Из леммы 5а следует, что сходятся ряды

$$\sum_n |\psi_n c_{n, n-k}| \quad (0 \leq k \leq \alpha + 1).$$

Но так как

$$c_{n, n-k} = \varphi_{n-k}^{-1} (\eta_{n-k, n-k} \varepsilon_{n-k} + \\ + \eta_{n-k+1, n-k} \varepsilon_{n-k+1} + \dots + \eta_{n, n-k} \varepsilon_n),$$

то из условия (16) следует необходимость условий теоремы 3 для каждого k .

Достаточность. Так как условие леммы 4 имеет теперь вид

$$\sum_n |\psi_k c_{kk} d_k + \psi_{k+1} (c_{k+1, k} - c_{kk}) d_{k+1} + \dots \\ \dots + \psi_{k+\alpha+1} (c_{k+\alpha+1, k} - c_{k+\alpha, k}) d_{k+\alpha+1}|$$

и в силу условия (16) будет

$$c_{n, n-k} = O(\varphi_{n-k}^{-1} \eta_{n, n-k} \varepsilon_n),$$

то из условий теоремы 3 следуют условия леммы 4а.

Следствие 4. Если последовательность $\{\varphi_n\}$ и $\{\psi_n\}$ удовлетворяют условию (16) и

$$D_k = \sup_n |\eta_{n+k, n} \alpha_{n+k, n+k}| = O(1),$$

то условия теоремы 4 равносильны условию

$$\sum |\psi_n \varphi_n^{-1} \alpha_{nn}^{-1} \varepsilon_n| < \infty.$$

Следствие 5. Пусть последовательность $\{\psi_n\}$ удовлетворяет условию (16). Числа ε_n являются множителями абсолютной ψ -сходимости относительно методов φ - P^α , φ - P_0^α или φ - P_σ^α , тогда и только тогда, когда

$$\sum \left| \frac{P_{k-x} \dots P_{k-x+\alpha-1} (p_{k-x} + \dots + p_{k-x+\alpha}) \varphi_{k-x} \psi_k}{p_k (\alpha - x) p_{k-1} (-x)} \varepsilon_k \right| < \infty$$

$$(0 \leq x \leq \alpha + 1).$$

§ 3. Множители ψ -сходимости первого рода

Из лемм 16—36 выводим следующие утверждения.

Теорема 5. Пусть последовательность $\{\psi_n\}$ удовлетворяет условиям (15) и (16). Операторы ε_n являются множителями ψ -сходимости относительно метода φ - \mathfrak{A}^α тогда и только тогда, когда

- 1° $\sum \xi_n \varepsilon_n x$ является ψ -сходящимся ($x \in X$),
- 2° $\|\xi_{nk} \varepsilon_n\| = O(\varphi_k \psi_n^{-1}) \quad (n - \alpha \leq k \leq n)$,
- 3° $\sup_{\|x_k\| \leq 1} \left\| \sum_{k=0}^p \varphi_k^{-1} A_k x_k \right\| = O(\psi_n^{-1}) \quad (0 \leq p \leq n - \alpha)$,

где

$$A_k = \sum_{s=k}^{k+\alpha} \xi_{sk} \varepsilon_s.$$

Доказательство. Необходимость. Условия 1° и 2° вытекают из условия 2° леммы 16 в силу соотношения (10), а условие 1° из условия 3° леммы 16.

Достаточность. Условия 3° леммы 16 вытекают из условий 1°, 2° и 3° теоремы 5, в силу условий (15) и (16), а условие 2° леммы 16 следует из условий 2° и 3°.

Теорема 6. Если последовательность $\{\psi_n\}$ удовлетворяет условию (16), а метод \mathfrak{A}^α сохраняет абсолютную сходимость, то операторы ε_n являются множителями ψ -сходимости относительно метода φ - \mathfrak{A}^α тогда и только тогда, когда

- 1° $\sum \varepsilon_n x$ является ψ -сходящимся ($x \in X$),
- 2° $\|\xi'_{nk} \varepsilon_n\| = O(\varphi_k \psi_n^{-1}) \quad (n - \alpha + 1 \leq k \leq n)$,
- 3° $\|A_k\| = O(\varphi_k \psi_n^{-1}) \quad (0 \leq k < n - \alpha)$,

где

$$A_k = \sum_{s=k}^{k+\alpha} \xi'_{sk} \varepsilon_s + \sum_{s=k+\alpha+1}^{\infty} \varepsilon_s.$$

Доказательство. Необходимость. Если \mathfrak{A}^α сохраняет абсолютную сходимость, то все условия необходимые для множителей ψ -сходимости являются необходимыми и относительно абсолютной φ -сходимости. Для последних, как вытекает из условия 3° леммы 26, необходимо условие 1° теоремы 6. Условие 2° при $k = n$ вытекает из условия 2° леммы 26. Далее, в силу условия 2° леммы 26 при $k = n - 1$, имеем

$$\|\xi'_{n-1, n-1} \varepsilon_{n-1} + \xi'_{n, n-1} \varepsilon_n\| = O(\varphi_{n-1} \psi_{n-1}),$$

откуда ввиду (16) следует условие 2° нашей теоремы при $k = n - 1$. Точно так же выводим условие 2° для остальных $k = n - 2, \dots, n - \alpha + 1$. Условие 3° следует из условия 2° леммы 2б в силу условия 1°.

Достаточность. Условие 2° леммы 2б при $k < n - \alpha$ вытекает из условий 1° и 3°, а при всех $n - \alpha \leq k \leq n - 1$ из условия 2°. Условие 3° леммы 2б следует из условий 1°–3°.

Примечание 2. Если $\psi_n = O(\psi_k)$ для всех $k < n$, то условие 3° теоремы 5 отпадает.

Теорема 7. Если последовательность $\{\varphi_n\}$ и $\{\psi_n\}$ удовлетворяют условию (16), то операторы ε_n являются множителями абсолютной ψ -сходимости относительно метода φ - \mathfrak{M}^α тогда и только тогда, когда

$$1^\circ \|\xi'_{nk} \varepsilon_n\| = O(\varphi_k \psi_{n-1}) \quad (n - \alpha \leq k \leq n),$$

$$2^\circ \sum_{n=k+\alpha+1}^{\infty} \|\psi_n \varepsilon_n x\| = O(\varphi_k \|x\|) \quad (x \in X).$$

Доказательство. Необходимость. Необходимость условия 1° доказывается аналогично тому, как и в теореме 3, а условие 2° вытекает из леммы 3б при $n > k + \alpha$.

Достаточность. Условие леммы 3б имеет теперь вид

$$\begin{aligned} \|\psi_k r_{kk} x\| + \|\psi_{k+1} (r_{k+1, k} - r_{kk}) x\| + \dots + \\ + \|\psi_{k+\alpha} (r_{k+\alpha, k} - r_{k+\alpha-1, k}) x\| + \\ + \sum_{n=k+\alpha+1}^{\infty} \|\psi_n \varphi_{k-1} \varepsilon_n x\| = O(\|x\|) \quad (x \in X). \end{aligned}$$

В силу (16) и условий теоремы 7 следует выполнение условия леммы 3б.

Теорема 8. Пусть последовательность $\{\psi_n\}$ удовлетворяет условию (16). Числа ε_n являются множителями абсолютной ψ -сходимости относительно методов φ - \mathfrak{M}^α , φ - \mathfrak{M}_0^α или φ - \mathfrak{M}_0^α тогда и только тогда, когда

$$\sum_n |\psi_n \varphi_{n-k} \xi_{n, n-k} \varepsilon_n| < \infty \quad (0 \leq k \leq \alpha).$$

Доказательство совпадает с доказательством теоремы 4, если в нем вместо η_{nk} положить ξ_{nk} .

Следствие 6. Если последовательности $\{\varphi_n\}$ и $\{\psi_n\}$ удовлетворяют условию (16) и

$$D'_k = \sup_n |\xi_{n+k, n} \alpha_{n+k, n+k}| = O(1),$$

то условие теоремы 8 равносильно условию

$$\sum |\psi_n \varphi_n^{-1} \alpha_{nn}^{-1} \varepsilon_n| < \infty.$$

Примечание 3. Если в теоремах 1, 2, 3, 5, 6 и 7 требовать ограниченность величин D_k и D'_k , то при $\psi_n \equiv \varphi_n \equiv 1$ из них получаем утверждения теорем 1 и 3 из [1].

§ 4. Множители ψ -сходимости в последовательности

Воспользуясь леммой 1в, получаем следующий результат.

Теорема 9. *Операторы ε_n являются множителями ψ -сходимости в последовательности относительно метода φ - \mathfrak{M}^α тогда и только тогда, когда*

$$\begin{aligned} 1^\circ \{ \xi_n \varepsilon_n x \} &\text{ является } \psi\text{-сходящейся } (x \in X), \\ 2^\circ \| \xi_n \varepsilon_n \| &= O(\varphi_n \psi_n^{-1}) \quad (n - \alpha \leq k \leq n). \end{aligned}$$

Доказательство. **Необходимость.** Условия 1° и 2° получаем непосредственно из условий 4° леммы 1в.

Достаточность. Выполнение условий 4° леммы 1в следует из условий 1° и 2° теоремы 9, а условие 2° леммы 1в тоже выполнено, так как, в силу условия 2° теоремы 9 и (6), получаем

$$\sup_{\|x_k\| \leq 1} \left\| \sum_{k=n-\alpha}^m \psi_n \varphi_k^{-1} \xi_{nk} \varepsilon_n x \right\| \leq \sum_{k=n-\alpha}^m \|\psi_n \varphi_k^{-1} \xi_{nk} \varepsilon_n\| = O(1).$$

Следствие 7. *Если*

$$\varphi_k^{-1} \xi_{nk} = O(\varphi_n^{-1} \xi_{nn}), \quad (19)$$

то операторы ε_n являются множителями ψ -сходимости в последовательности относительно метода φ - \mathfrak{M}^α тогда и только тогда, когда выполняется условие 1° теоремы 9 и

$$\|\varepsilon_n\| = O(\varphi_n \psi_n^{-1} a_{nn}). \quad (20)$$

Следствие 8. *Если выполняется условие*

$$\xi_n \equiv \text{const.},$$

то операторы ε_n являются множителями суммируемости в последовательности относительно метода φ - \mathfrak{M}^α тогда и только тогда, когда выполнено условие (20) и

$$\{ \varepsilon_n x \} \text{ является } \psi\text{-сходящейся } (x \in X). \quad (21)$$

Следствие 9. *Пусть последовательность $\{\varphi_n\}$ удовлетворяет условию (16), то операторы ε_n являются множителями ψ -сходимости в последовательности относительно φ - P^1 тогда и только тогда, когда*

$$1^\circ \left\{ \frac{\Delta(\varphi_n^{-1} P_n)}{p_n} \varepsilon_n x \right\} \text{ является } \psi\text{-сходящейся } (x \in X),$$

$$2^\circ \left\| P_n \frac{\varepsilon_n}{p_n} \right\| = O(\varphi_n \psi_n^{-1}).$$

Если здесь $\varphi_n \equiv 1$, то условие 1° означает условие (21).

При $\varphi_n \equiv \psi_n \equiv 1$, получаем следствие 1 из [4], стр. 251.

Следствие 10. *Пусть последовательность $\{\varphi_n\}$ удовлетворяет условию (16) и $\alpha \geq 0$, то операторы ε_n являются множителями ψ -сходимости в последовательности относительно метода φ - S^α тогда и только тогда, когда*

$$1^\circ \{ (\bar{\Delta}^\alpha \varphi_n^{-1} A_n^\alpha) \varepsilon_n x \} \text{ является } \psi\text{-сходящейся } (x \in X),$$

$$2^\circ \|\varepsilon_n\| = O(\varphi_n \psi_n^{-1} n^{-\alpha}).$$

Если здесь $\varphi_n \equiv 1$, то условие 1° означает условие (21).

При $X = Y = R_1$, $\varphi_n \sim n^{-p}$, $\psi_n \sim n^{-(p+q)}$, $p > -1$ и $p + q > -1$, то из следствия 10 получаем результат⁵ из [6], стр. 24, положив в нем $\varrho = 0$. При $\varphi_n \equiv \psi_n \equiv 1$ получаем результат из [10], стр. 432, положив в нем $\varrho = 0$.

Из леммы 2в выводим следующее утверждение.

Теорема 10. *Операторы ε_n являются множителями ψ -сходимости в последовательности относительно метода φ -| \mathfrak{A}^α | тогда и только тогда, когда*

1° $\{\varepsilon_n x\}$ является ψ -сходящейся ($x \in X$),

2° $\|\xi'_{nk} \varepsilon_n\| = O(\varphi_k \psi_n^{-1})$ ($0 \leq k \leq n$).

Доказательство. **Необходимость.** Из условия 3° леммы 2в и (7) следует необходимость условия 1° теоремы 10. Условие 2° непосредственно следует из условия 4° леммы 2в.

Достаточность. В силу условий 1° и 2° выполняется условие 2° и 4° леммы 2в.

Следствие 11. *Если*

$$\varphi_k^{-1} \xi'_{nk} = O(\varphi_n^{-1} \xi'_{nn}), \quad (22)$$

то операторы ε_n являются множителями ψ -сходимости в последовательности относительно φ -| \mathfrak{A}^α | тогда и только тогда, когда выполняется условие 1° теоремы 10 и

$$\|\varepsilon_n\| = O(\varphi_n \psi_n^{-1} \alpha_{nn}). \quad (23)$$

Следствие 12. *Если последовательность $\{\varphi_n\}$ удовлетворяет условию (16), то операторы ε_n являются множителями ψ -сходимости в последовательности относительно метода φ -| P^1 | тогда и только тогда, когда выполняется условие 1° теоремы 10 и условие 2° следствия 9.*

При $\varphi_n \equiv \psi_n \equiv 1$ получаем следствие 3 из [4], стр. 255.

Следствие 13. *Если последовательность $\{\varphi_n\}$ удовлетворяет условию (16) и $\alpha \geq 0$, то операторы ε_n являются множителями ψ -сходимости в последовательности относительно метода φ -| C^α |, тогда и только тогда, когда выполняется условие 1° теоремы 10 и 2° следствия 9.*

Из леммы 3б выводим следующее утверждение.

Теорема 11. *Если последовательность $\{\psi_n\}$ удовлетворяет условию (16), то операторы ε_n являются множителями абсолютной ψ -сходимости в последовательности относительно метода φ -| \mathfrak{A}^α | тогда и только тогда, когда*

1° $\|\xi'_{nk} \varepsilon_n\| = O(\varphi_k \psi_n^{-1})$ ($n - \alpha + 1 \leq k \leq n$),

2° $\sum_{n=k+\alpha+1}^{\infty} \|\psi_n \bar{\Delta} \varepsilon_n x\| = O(\varphi_k \|x\|)$.

⁵ В своей работе (см. [6], стр. 24) Бозангет рассмотрел случай, когда из сходимости к нулю последовательности $\{\varepsilon_n x_n\}$ следует φ - C^α -суммируемость к нулю последовательности $\{x_n\}$. Тогда необходимо и достаточно выполнение условий $\varepsilon_n = O(n^{\alpha-\varrho})$.

Доказательство. Необходимость. Аналогично, как в теореме 3 или 7, при $n = k$, выводим условие 1° теоремы 11. Так, как

$$\gamma_{k,k-1} = \varphi_{k-1}^{-1} \xi'_{k,k-1},$$

то из

$$\|\gamma_{k,k-1}\| = O(\varphi_{k-1}^{-1})$$

вытекает необходимость условия 1° теоремы 11 при $k = n - 1$. Так же выводим необходимость условия теоремы 11 для остальных $k = n - 2, \dots, n - \alpha + 1$. Необходимость условия 2° теоремы 11 вытекает непосредственно из леммы 3в, в силу (7), при $n \geq k + \alpha + 1$.

Достаточность. В силу условий 1° и 2° выполнение условия леммы 3а вытекает из неравенства.

$$\begin{aligned} \sum_n \|\psi_n \bar{\Delta}_n \gamma_{nk} x\| &\leq \|\psi_k \gamma_{kk} x\| + \sum_{n=k+1}^{k+\alpha} \|\psi_n \gamma_{nk} x\| + \\ &+ O(1) \sum_{n=k}^{k+\alpha} \|\psi_{n-1} \gamma_{n-1,k} x\| + \sum_{n=k+\alpha+1}^{\infty} \|\psi_n \varphi_{k-1}^{-1} \bar{\Delta}_n x\| = O(\|x\|). \end{aligned}$$

Следствие 14. Если выполняется условие (22) и последовательность $\{\psi_n\}$ удовлетворяет условию (16), то операторы ε_n являются множителями абсолютной ψ -сходимости в последовательности относительно метода $\varphi\text{-}|\mathfrak{A}^\alpha|$ тогда и только тогда, когда выполняется условие 2° теоремы 11 и условие (23).

Следствие 15. Если последовательности $\{\varphi_n\}$ и $\{\psi_n\}$ удовлетворяют условию (16) и $\alpha \geq 0$, то операторы ε_n являются множителями абсолютной ψ -сходимости в последовательности относительно метода $\varphi\text{-}|\mathfrak{C}^\alpha|$ тогда и только тогда, когда выполняются условия 2° теоремы 11 и условие 2° следствия 9.

При $X = Y = R_1$, $\varphi_n \equiv \psi_n \equiv 1$ получаем отсюда теорему 1 из [10], стр. 345.

Следствие 16. Если последовательности $\{\varphi_n\}$ и $\{\psi_n\}$ удовлетворяют условию (16), то операторы ε_n являются множителями абсолютной ψ -сходимости в последовательности относительно метода $\varphi\text{-}|\mathfrak{P}^1|$ тогда и только тогда, когда выполняются условия 2° теоремы 11 и условия 2° следствия 8.

При $\varphi_n \equiv \psi_n \equiv 1$ условие 2° теоремы 11 имеет вид

$$\sum_{n=h}^{\infty} \|\bar{\Delta}_n x\| = O(\|x\|),$$

откуда следует абсолютная сходимость последовательности $\{\varepsilon_n x\}$ при $x \in X$, и получаем следствие 4 из [4], стр. 257.

Из леммы 4в и 5в выводим следующее утверждение.

Теорема 12. Пусть последовательность $\{\psi_n\}$ удовлетворяет условию (16). Числа ε_n являются множителями абсолютной ψ -сходимости в последовательности относительно методов $\varphi\text{-}\mathfrak{A}$, $\varphi\text{-}\mathfrak{A}_0$ или $\varphi\text{-}\mathfrak{A}_0$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_n |\psi_n \varphi_{n-k}^{-1} \xi_{n,n-k} \varepsilon_n| < \infty \quad (0 \leq k \leq \alpha).$$

Доказательство. Необходимость. Из леммы 5в следует, что сходятся ряды

$$\sum_n |\psi_n c_{n,n-k}| \quad (0 \leq k \leq \alpha).$$

Так, как

$$c_{n,n-k} = \varphi_{n-k}^{-1} \xi_{n,n-k} \varepsilon_n,$$

то получаем необходимость условия теоремы 12.

Достаточность. Условие леммы 4в можно представить в виде

$$\begin{aligned} \sum & [|\psi_k c_{kk} d_k| + |\psi_{k+1} (c_{k+1,k} - c_{kk}) d_{k+1}| + \dots + \\ & + |\psi_{k+\alpha} (c_{k+\alpha,k} - c_{k+\alpha-1,k}) d_{k+\alpha}| + \\ & + |\psi_{k+\alpha+1} c_{k+\alpha,k} d_{k+\alpha+1}|]. \end{aligned}$$

В силу того, что $d_n = O(1)$, из условия (16) относительно последовательности $\{\psi_n\}$ и условий теоремы 12 следует выполнение условия леммы 4в.

Следствие 17. Если последовательность $\{\psi_n\}$ удовлетворяет условию (16) и выполняется условие (19), то числа ε_n являются множителями абсолютной ψ -сходимости в последовательности относительно методов $\varphi\text{-}\mathfrak{A}^\alpha$, $\varphi\text{-}\mathfrak{A}_0^\alpha$ или $\varphi\text{-}\mathfrak{A}_\infty^\alpha$ тогда и только тогда, когда

$$\sum |\psi_n \varphi_n^{-1} \xi_{nn} \varepsilon_n| < \infty.$$

Следствие 18. Если последовательности $\{\varphi_n\}$ и $\{\psi_n\}$ удовлетворяют условию (16), то числа ε_n являются множителями абсолютной ψ -сходимости в последовательности относительно методов $\varphi\text{-}\mathfrak{C}^\alpha$, $\varphi\text{-}\mathfrak{C}_0^\alpha$ или $\varphi\text{-}\mathfrak{C}_\infty^\alpha$ тогда и только тогда, когда

$$\sum (n+1)^\alpha |\varphi_n^{-1} \psi_n \varepsilon_n| < \infty.$$

Следствие 19. Если последовательности $\{\varphi_n\}$ и $\{\psi_n\}$ удовлетворяют условию (16), то числа ε_n являются множителями абсолютной ψ -сходимости в последовательности относительно методов $\varphi\text{-}\mathfrak{P}^1$, $\varphi\text{-}\mathfrak{P}_0^1$ или $\varphi\text{-}\mathfrak{P}_\infty^1$ тогда и только тогда, когда

$$\sum \left| \varphi_n^{-1} \psi_n P_n \frac{\varepsilon_n}{p_n} \right| < \infty.$$

Литература

1. Кангро Г., Об обобщении одной теоремы Мура. Докл. АН СССР, 1956, 121, 967—969.
2. Кангро Г., Вихманн Ф., Об абстрактных множителях суммируемости для метода взвешенных средних Рисса. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1961, 102, 209—225.
3. Кангро Г., Ламп Ю., Об одном классе матричных методов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1965, 177, 80—91.

4. Кангро Г., Тыннов М., Множители суммируемости в последовательности для метода взвешенных средних Рисса. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1961, 102, 249—262.
5. Тюрнпу Х., Множители суммируемости для методов Рисса. Настоящий сборник, стр. 90—105.
6. Bosanquet, L. S., On convergence and summability factors in a sequence. *Mathematika*, 1954, 1, 24—44.
7. Peyerimhoff, A., Konvergenz- und Summierbarkeitsfaktoren. *Math. Z.*, 1952, 55, 23—54.
8. Peyerimhoff, A., Über Summierbarkeitsfaktoren und verwandte Fragen bei Cesàroverfahren I. *Publ. Inst. math. Acad. serbe sci.*, 1955, 8, 139—156.
9. Peyerimhoff, A., Über ein Lemma von H. C. Chow. *J. London Math. Soc.*, 1957, 32, 33—36.
10. Tayler, B., Absolute convergence and summability factors in a sequence. *J. London Math. Soc.*, 1958, 33, 341—351.

Поступило
20·XII 1965

Ψ -KOONDUVUSTEGURID

M. Abel ja H. Türrpu

R e s ü m e e

Olgu X ja Y Banachi ruumid ja ε_n — pidevad linearsed operaatorid ruumist X ruumi Y .

Rida (1) ruumist X (jada $\{x_n\}$ ruumist X) nimetame φ - A -summeeruvaks (vastavalt φ - \mathfrak{A} -summeeruvaks), kui koondub jada

$$x'_n = \varphi_n \sum_{k=0}^n a_{nk} x_k \quad (\text{vastavalt } x''_n = \varphi_n \sum_{k=0}^n a_{nk} x_k)$$

ning absoluutselt φ - A -summeeruvaks (vastavalt absoluutselt φ - \mathfrak{A} -summeeruvaks), kui

$$\sum_n \|\varphi_n \sum_{k=0}^n \overline{\Delta_n} a_{nk} x_k\| < \infty \quad (\text{vastavalt } \sum_n \|\varphi_n \sum_{k=0}^n \overline{\Delta_n} a_{nk} x_k\| < \infty),$$

kus $A = (a_{nk})$ on rida-jada teisenduse maatriks (vastavalt $\mathfrak{A} = (a_{nk})$ jada-jada teisenduse maatriks) ja $\{\varphi_n\}$ etteantud arvjada.

$$\text{Kui } a_{nk} = \begin{cases} 1, & n \geq k, \\ 0, & n < k, \end{cases} \quad (\text{vastavalt } a_{nk} = \delta_{nk}) \text{ saame rea (1) ruumist } X$$

(vastavalt jada $\{x_n\}$ ruumist X) φ -koonduvuse ja absoluutselt φ -koonduvuse definitsioonid.

Selles artiklis vaadeldakse tarvilikke ja piisavaid tingimusi selleks, et operaatorid ε_n oleksid esimest ja teist liiki rea (jada) ψ -koonduvus- ja absoluutselt φ -koonduvustegurid meetodi φ - A^α (vastavalt φ - \mathfrak{A}^α) suhtes, kus maatriks A^α (vastavalt \mathfrak{A}^α) on kolmnurkne ja maatriksis $(A^\alpha)^{-1}$ (vastavalt $(\mathfrak{A}^\alpha)^{-1}$) on $\alpha + 2$ (vastavalt $\alpha + 1$) nullist erinevat diagonaali.

ON ψ -CONVERGENCE FACTORS

M. Abel and H. Törnpu

Summary

Let X and Y be Banach spaces and ε_n — continuous linear operators from X into Y . Series (1) (resp. sequence $\{x_n\}$) is called φ - A -summable in X (resp. φ - \mathfrak{A} -summable) if the sequence

$$x'_n = \varphi_n \sum_{k=0}^n a_{nk} x_k \quad (\text{resp. } x''_n = \varphi_n \sum_{k=0}^n a_{nk} x_k),$$

is convergent in X . This series is called absolute φ - A -summable (resp. absolute φ - \mathfrak{A} -summable) if

$$\sum_n \|\varphi_n \sum_{k=0}^n \bar{\Delta}_n a_{nk} x_k\| < \infty \quad (\text{resp. } \sum_n \|\varphi_n \sum_{k=0}^n \bar{\Delta}_n a_{nk} x_k\| < \infty),$$

where $A = (a_{nk})$ is a series-to-sequence matrix, ($\mathfrak{A} = (a_{nk})$ is sequence-to-sequence matrix) and $\{\varphi_n\}$ is a given sequence of complex numbers.

If

$$a_{nk} = \begin{cases} 1, & n \geq k \\ 0, & n < k \end{cases} \quad (\text{resp. } a_{nk} = \delta_{nk}),$$

the definition φ - A -summable series (1) (resp. φ - \mathfrak{A} -summable sequence $\{x_n\}$) implies the definition φ -convergence of the series (1) (resp. sequence $\{x_n\}$).

The necessary and sufficient conditions on $\{\varepsilon_n\}$, to be the first and second type of the ψ -convergence factors and absolute ψ -convergence factors of the series (resp. sequence) are considered in this paper in connection with the method φ - A^α (resp. φ - \mathfrak{A}^α). The matrix A^α (resp. \mathfrak{A}^α) is a triangle and its inverse $(A^\alpha)^{-1}$ (resp. $(\mathfrak{A}^\alpha)^{-1}$) has $\alpha + 2$ (resp. $\alpha + 1$) non-zero diagonals.

ОБ АБСОЛЮТНОЙ СУММИРУЕМОСТИ ПРОСТЫХ И ДВОЙНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ МЕТОДАМИ ХАУСДОРФА

Т. Сырмус

Кафедра математического анализа,

В настоящей статье излагаются теоремы, в которых из абсолютной суммируемости последовательности методом Хаусдорфа вытекает абсолютная сходимость рассматриваемой последовательности. Точнее, рассматриваются теоремы типа Мерсера¹ для последовательностей, абсолютно суммируемых методами Хаусдорфа, удовлетворяющими дополнительным условиям.

Теоремы типа Мерсера для простых последовательностей, абсолютно суммируемых методами вида

$$U_\alpha = \alpha E + (1 - \alpha)A,$$

где α — параметр, изменяющийся в определенном промежутке, E — единичный метод и A — матричный метод суммирования последовательностей, рассмотрены Бозанке [5] и Уольшом [16] в случае, когда A — метод средних арифметических, Хаяши [6] для метода A взвешенных средних Рисса и Лавом [8] в случае, когда A — треугольный метод, удовлетворяющий некоторому дополнительному условию. Аналоги обобщенным теоремам типа Мерсера² для случая абсолютной суммируемости рассмотрены Парамесвараном [12].

В § 2 данной статьи содержатся теоремы типа Мерсера для простых последовательностей, абсолютно суммируемых методами вида U_α (A — методы Чезаро, Гелдера и Хаусдорфа) или методами Хаусдорфа, удовлетворяющими дополнительным условиям. Аналоги теорем § 2 для двойных последовательностей даны в § 5. В § 3 обобщается на случай двойных последовательностей теорема Кноппа—Лоренца [7] и Морлей [11], устанавливающая, что метод Хаусдорфа, сохраняющий сходимость, сохраняет и абсолютную сходимость. Ряд лемм, необходимых для доказательства основных теорем § 5, содержится в § 4.

¹ О теоремах типа Мерсера см. [10] или [21], гл. V.

² Об обобщенных теоремах типа Мерсера см. [3, 13].

§ 1.

Ниже рассматриваются следующие классы простых последовательностей³ $\{s_n\}$: \bar{c} — класс сходящихся последовательностей (существует $\lim s_n = s$), \bar{a} — класс абсолютно сходящихся последовательностей⁴ ($\sum |\Delta_n s_n| < \infty$) и двойных последовательностей $\{s_{mn}\}$: c — класс сходящихся последовательностей (существует $\lim s_{mn} = s$), bc — класс ограниченно сходящихся последовательностей ($\{s_{mn}\} \in c$ и $|s_{mn}| < M$), bcn — класс к нулю ограниченно сходящихся последовательностей ($\{s_{mn}\} \in bc$ и $s = 0$) и a — класс абсолютно сходящихся последовательностей ($\sum |\Delta_{mn} s_{mn}| < \infty$).

Метод $A = (a_{nk})$, определяющий преобразование

$$t_n = \sum_k a_{nk} s_k, \quad (1.1)$$

называют методом, *сохраняющим абсолютную сходимость*, если для любой последовательности $\{s_n\} \in \bar{a}$ выполняется условие $\{t_n\} \in \bar{a}$.

Метод $A = (a_{mnhl})$, определяющий преобразование

$$t_{mn} = \sum_{k,l} a_{mnhl} s_{kl}, \quad (1.2)$$

называют методом 1) *сохраняющим сходимость*, если из условия $\{s_{mn}\} \in bc$ всегда следует $\{t_{mn}\} \in bc$; 2) *регулярным для нулевых последовательностей*, если из условия $\{s_{mn}\} \in bcn$ всегда следует $\{t_{mn}\} \in bcn$; 3) *регулярным*, если из условия $\{s_{mn}\} \in bc$ всегда следует $\{t_{mn}\} \in bc$, причем⁵ $b\text{-}\lim s_{mn} = b\text{-}\lim t_{mn}$ и, наконец, 4) *сохраняющим абсолютную сходимость*, если из условия $\{s_{mn}\} \in a$ всегда следует $\{t_{mn}\} \in a$. Множество последовательностей абсолютно A -суммируемых будем обозначать символом $|A|^*$. Через $\Gamma(\beta, \gamma)$, где β и γ — вышеперечисленные классы последовательностей, обозначим класс методов $A = (a_{nk})$ или $A = (a_{mnhl})$, преобразующих все последовательности класса β в последовательности класса γ .

³ Везде, где опущены пределы изменения индексов, они пробегают все целочисленные значения, причем $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim s_n$ и $\lim_{m, n \rightarrow \infty} s_{mn} = \lim s_{mn}$.

⁴ Здесь и в дальнейшем $\sum s_n = \sum_n s_n = \sum_{n=0}^{\infty} s_n$, $\sum s_{mn} = \sum_{m, n=0}^{\infty} s_{mn}$,

$\bar{\Delta}_n s_n = s_n - s_{n-1}$, $\bar{\Delta}_{mn} s_{mn} = \bar{\Delta}_m (\bar{\Delta}_n s_{mn}) = \bar{\Delta}_n (\bar{\Delta}_m s_{mn})$.

⁵ Через $b\text{-}\lim s_{mn}$ обозначаем предел ограниченно сходящейся последовательности $\{s_{mn}\}$.

Из методов преобразования двойных последовательностей в данной статье рассматриваются треугольные методы. Метод $A = (a_{mnl})$, определяющий преобразование (1.2), называют треугольным, если $a_{mnl} = 0$ при $k > m$ или $l > n$ или $k, l > m, n$. При этом метод $A = (a_{mnl})$ называют нормальным, если он треуголен и $a_{mnmn} \neq 0$. Отметим, что в случае нормального метода $A = (a_{mnl})$, существует обратный метод $A^{-1} = (a'_{mnl})$, определяющий преобразование

$$s_{mn} = \sum_{k,l=0}^{m,n} a'_{mnl} t_{kl},$$

причем $a'_{mnmn} = 1/a_{mnmn}$.

Большинство теорем настоящей статьи связано с методами Хаусдорфа преобразования как простых, так и двойных последовательностей. Обозначения, относящиеся к методу Хаусдорфа преобразования простых последовательностей, заимствованы из статьи [20]. Общее определение метода Хаусдорфа преобразования двойных последовательностей дано в статьях [2, 15]. Следуя введенным там определениям, метод Хаусдорфа $[H, \mu_{kl}]$ есть треугольный матричный метод (h_{mnl}) , где

$$h_{mnl} = \binom{m}{k} \binom{n}{l} \Delta^{m-k, n-l} \mu_{kl} \quad (1.3)$$

и

$$\Delta^{ij} \mu_{kl} = \sum_{r,s=0}^{i,j} (-1)^{r+s} \binom{i}{r} \binom{j}{s} \mu_{k+r, l+s}.$$

Последовательность $\{\mu_{kl}\}$ называют *последовательностью Хаусдорфа*. Мы ограничимся факторизируемыми методами Хаусдорфа, т. е. методами

$$[H, \mu_{kl}] = [H, \nu_k] \odot [H, \xi_l], \quad (1.4)$$

где $\{\mu_{kl}\} = \{\nu_k \xi_l\}$, а последовательности $\{\nu_k\}$ и $\{\xi_l\}$ — последовательности Хаусдорфа, соответствующего метода простых последовательностей. Известно также, что в этом случае

$$\Delta^{ij} \mu_{kl} = \Delta^i \nu_k \Delta^j \xi_l. \quad (1.5)$$

Так для метода (1.4) ввиду формул (1.3) и (1.5) имеем

$$\begin{aligned} [H, \nu_k] \odot [H, \xi_l] &= \left(\binom{m}{k} \Delta^{m-k} \nu_k \right) \left(\binom{n}{l} \Delta^{n-l} \xi_l \right) = \\ &= \left(\binom{m}{k} \binom{n}{l} \Delta^{m-k, n-l} \nu_k \xi_l \right). \end{aligned}$$

§ 2.

В этом параграфе выведем для случая абсолютной суммируемости аналоги теоремам типа Мерсера, доказанным Полня-

ковским [14], Питтом и Питергаусом [13], Басу [4] и Сырмус [18].

В доказательствах мы воспользуемся следующей теоремой Морлей [11] и Кноппа—Лоренца [7].

Теорема 2А. Если метод $\{H, \mu_k\} \in \Gamma(\bar{c}, \bar{c})$, то $\{H, \mu_k\} \in \Gamma(\bar{a}, \bar{a})$.

В нижеследующих теоремах $\{H_n^x\}$ и $\{C_n^x\}$ означают соответственно H^x - и C^x -преобразование последовательности $\{s_n\}$. При этом H^x и C^x — методы Гельдера и Чезаро порядка $x \geq 0$.

Теорема 2.1. Если $a > 0$, $0 < x < 1$, последовательность

$$t_n = \alpha s_n + (1 - \alpha) H_n^x \quad (2.1)$$

и $\{t_n\} \in \bar{a}$, то и последовательность $\{s_n\} \in \bar{a}$, причем выполняется равенство⁶

$$\lim t_n = \lim s_n. \quad (2.2)$$

Доказательство. Преобразование (2.1) определено методом $U_\alpha = \alpha E + (1 - \alpha) H^x$, где, как известно (см. [21], гл. XI), $H^x = [H, \frac{1}{(k+1)^x}]$. Поэтому (см. [21], гл. XI) метод U_α — метод Хаусдорфа $[H, \zeta_k]$ с последовательностью $\zeta_k = \alpha + (1 - \alpha) \cdot \frac{1}{(k+1)^x}$. Метод, обратный для $U_\alpha = [H, \zeta_k]$, также является методом Хаусдорфа (см. [21], гл. XI), причем $U_\alpha^{-1} = [H, \frac{1}{\zeta_k}]$. Ввиду леммы 1.4 из статьи [17] заключаем, что метод $U_\alpha^{-1} \in \Gamma(\bar{c}, \bar{c})$. Ввиду теоремы 2А теперь справедливо утверждение $U_\alpha^{-1} \in \Gamma(a, a)$. Равенство (2.2) вытекает из регулярности метода U_α и того, что $\{s_n\} \in \bar{a} \subset \bar{c}$. Теорема доказана.

При помощи лемм 1.2, 1.3 из статьи [17] и леммы 3.2 из [19] аналогично доказываются нижеследующие теоремы 2.2 и 2.3, последняя из которых как частный случай вытекает из следствия 4 статьи [8], а также из теоремы 5 статьи [12]. Теорема 2.2 частично расширяет следствие 5 статьи [8]. Расширением следствия 4 статьи [8], а также теоремы 5 статьи [12] является и теорема 2.1 в случае, если $[H, \mu_k] = H^x = A$ ($0 < x < 1$).

Теорема 2.2. Для метода C^x (или H^x) ($x = 2, 3, \dots$) существует такая постоянная a'_x (соответственно a''_x), что из соотношения $\{t_n\} \in \bar{a}$, где

$$t_n = \alpha s_n + (1 - \alpha) C_n^x$$

(или t_n определена равенством (2.1)), при условии $a > a'_x$ (или $a > a''_x$) вытекает соотношение $\{s_n\} \in \bar{a}$, причем $\lim t_n = \lim s_n$.

⁶ Все пределы в рассматриваемых теоремах подразумеваются конечными.

З а м е ч а н и е. Последовательности $\{\alpha'_k\}$ и $\{\alpha''_k\}$ возрастают при $k = 2, 3, \dots$, неотрицательны и сходятся к числу $1/2$. Для них справедливы следующие асимптотические представления (см. [14])

$$\alpha'_k \sim \frac{1}{2} - \frac{1}{48} \frac{\pi^4}{\ln^2 k} \quad (k \rightarrow \infty),$$

$$\alpha''_k = \frac{\cos^k \frac{\pi}{k}}{1 + \cos^k \frac{\pi}{k}} \sim \frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{8k} \quad (k \rightarrow \infty).$$

Теорема 2.3. Если $a > \frac{1}{2}$, метод $[H, \mu_k]$ вполне регулярен, последовательность

$$t_n = a s_n + (1 - a) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \Delta^{n-k} \mu_k s_k$$

и $\{t_n\} \in \bar{a}$, то и $\{s_n\} \in \bar{a}$, причем выполняется равенство $\lim t_n = \lim s_n$.

Для обобщенных теорем типа Мерсера аналогичными являются теоремы 2.4 и 2.5.

Теорема 2.4. Если абсолютно монотонная и регулярная последовательность Хаусдорфа $\{v_k\}$ удовлетворяет условию $\inf_k v_k > 0$, то справедливо соотношение $[[H, v_k]]^* \subset \bar{a}$, причем

$$\lim_{k \rightarrow 0} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \Delta^{n-k} v_k s_k = \lim s_n. \quad (2.3)$$

Теорема 2.5. Если $\chi(t)$ — функция с конечным изменением без сингулярной составляющей и $\chi(0+) = \chi(0) = 0$, $\chi(1) = 1$, причем

$$\inf_{\operatorname{Re} \omega > 0} \left| \int_0^1 t^\omega d\chi(t) \right| > 0,$$

то имеет место соотношение $[[H, \chi(t)]]^* \subset \bar{a}$ и

$$\lim \int_0^1 \left\{ \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} s_k \right\} d\chi(t) = \lim s_n.$$

В теореме 2.4 требуется доказать, что из соотношения $\{t_n\} \in \bar{a}$, где

$$t_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \Delta^{n-k} v_k s_k,$$

вытекает $\{s_n\} \in \bar{a}$, т. е. требуется доказать справедливость соотношения $[H, v_k]^{-1} \in \Gamma(\bar{a}, a)$. Но это без трудностей вытекает из условий теоремы, леммы 3.3 из статьи [19] и теоремы 2А. Аналогично проводится доказательство теоремы 2.5.

З а м е ч а н и е. Если учесть теорему 1.2 из статьи [18], и вместо леммы 3.3 из [19] применить следствие теоремы 2.3 из [18], то в теореме 2.4 можно требование регулярности метода $[H, \nu_k]$ заменить условием $[H, \nu_k] \in \Gamma(\bar{c}, \bar{c})$. При этом предельное равенство (2.3) может оказаться не выполненным.

§ 3.

Для того, чтобы доказать аналоги теорем § 2 для двойных последовательностей, обобщим теорему 2А из § 2 на случай факторизируемых методов Хаусдорфа. При этом нам понадобятся некоторые вспомогательные теоремы.

Теорема 3А (см. [9]). *Условия*

$$\sum_i a_{mnhl} = a_{mnh\infty}, \quad \sum_k a_{mnhl} = a_{mn\infty l}, \quad (3.1)$$

$$\sum_{k,l} a_{mnhl} = A_{mn}, \quad (3.2)$$

$$\sum_{m,n} \left| \sum_{k,l=0}^{p,q} r_{mnhl} \right| < K \quad (p, q = 0, 1, 2, \dots), \quad (3.3)$$

где $r_{mnhl} = \bar{\Delta}_{mnhl} a_{mnhl}$, необходимы и достаточны для того, чтобы метод $A = (a_{mnhl})$, определяющий преобразование (1.2), сохранял абсолютную сходимость, т. е. чтобы метод $A \in \Gamma(a, a)$.

Соответствующая теорема для простых последовательностей гласит.

Теорема 3В (см. [9]). *Условие*

$$\sum_n \left| \sum_{k=0}^p r_{nh} \right| < K \quad (p = 0, 1, 2, \dots), \quad (3.4)$$

где $r_{nh} = \bar{\Delta}_{nh} a_{nh}$, необходимо и достаточно для того, чтобы метод A , определяющий преобразование (1.1), абсолютно суммировал все абсолютно сходящиеся последовательности.

Теорема 3С (см. [2]). *Если метод $[H, \nu_k \xi_l]$ сохраняет сходимость, но не регулярен для нулевых последовательностей, то его факторы $[H, \nu_k]$ и $[H, \xi_l]$ сохраняют сходимость, ни один из факторов не регулярен для нулевых последовательностей и удовлетворяется условие*

$$\lim_m \Delta_m \nu_0 \cdot \lim_n \Delta_n \xi_0 = \lim_{m,n} \Delta_{mn} \mu_0 \nu_0.$$

Теорема 3Д (см. [2]). *Если метод $[H, \nu_k \xi_l]$ сохраняет сходимость и регулярен для нулевых последовательностей, причем не все его элементы нуль, то факторы $[H, \nu_k]$ и $[H, \xi_l]$ сохраняют сходимость и, по меньшей мере, один из них регулярен для нулевых последовательностей.*

Отметим, что элементы факторизируемого треугольного метода $A = B \odot C$, где $B = (b_{mk})$ и $C = (c_{nl})$ удовлетворяют равенствам

$$\bar{\Delta}_{mn} a_{mnhl} = \bar{\Delta}_m b_{mk} \bar{\Delta}_n c_{nl} \quad (3.5)$$

и

$$\sum_{h,l=0}^{p,q-} \Delta_{mn} a_{mnhl} = \sum_{k=0}^p \Delta_m b_{mk} \sum_{l=0}^q \Delta_n c_{nl}. \quad (3.6)$$

Доказательство равенства (3.5) проводится элементарными вычислениями, а справедливость равенства (3.6) без трудностей вытекает из (3.5).

Теорема 3.1. *Если факторы $B = (b_{mk})$ и $C = (c_{nl})$ треугольного метода $A = B \odot C$ сохраняют абсолютную сходимость, то и метод A сохраняет абсолютную сходимость.*

Доказательство. Покажем, что условия теоремы 3А выполнены. Условиям (3.1) и (3.2) удовлетворяет каждый треугольный метод. Поэтому остается проверить выполнение условия (3.3). Так как по условиям факторы $B, C \in \Gamma(a, a)$, то они удовлетворяют условию (3.4). Ввиду (3.5) и (3.6) теперь следует, что для любых натуральных p, q, M и N выполняется неравенство

$$\begin{aligned} \sum_{m,n=0}^{M,N} \left| \sum_{h,l=0}^{p,q-} \Delta_{mn} a_{mnhl} \right| &= \sum_{m,n=0}^{M,N} \left| \sum_{k=0}^p \Delta_m b_{mk} \sum_{l=0}^q \Delta_n c_{nl} \right| = \\ &= \sum_{m=0}^M \left| \sum_{k=0}^p \Delta_m b_{mk} \right| \sum_{n=0}^N \left| \sum_{l=0}^q \Delta_n c_{nl} \right| < L, \end{aligned}$$

которое гарантирует выполнимость неравенства (3.3).

Теперь мы в состоянии доказать обобщение теоремы 2А.

Теорема 3.2. *Если факторизируемый⁷ метод Хаусдорфа $[H, \nu_k \xi_l] \in \Gamma(bc, bc)$, то $[H, \nu_k \xi_l] \in \Gamma(a, a)$.*

Доказательство. По условиям теоремы метод $[H, \nu_k \xi_l] \in \Gamma(bc, bc)$, где $[H, \nu_k \xi_l] = [H, \nu_k] \odot [H, \xi_l]$. Из теорем 3С и 3D тогда следует, что методы $[H, \nu_k], [H, \xi_l] \in \Gamma(\bar{c}, \bar{c})$. Ввиду же теоремы 2А справедливо утверждение, что $[H, \nu_k], [H, \xi_l] \in \Gamma(\bar{a}, a)$. Теперь выполнены условия теоремы 3.1 и метод $[H, \nu_k \xi_l] \in \Gamma(a, a)$, что и требовалось доказать.

§ 4.

Для вывода теорем типа Мерсера на случай абсолютной сходимости и двойных последовательностей докажем несколько лемм, вытекающих из нижеследующих теорем типа Мерсера.

⁷ Исключается случай, когда все элементы метода $[H, \nu_k \xi_l]$ нули.

Теорема 4А. (см. [17], теорема 3.3). Если $0 < \kappa, \tau < 1$, $\alpha, \beta > 0$, последовательность

$$t_{mn} = \alpha\beta s_{mn} + (1 - \alpha)\beta H_{mn}^{\kappa, 0} + \alpha(1 - \beta)H_{mn}^{0, \tau} + (1 - \alpha)(1 - \beta)H_{mn}^{\kappa, \tau} \quad (4.1)$$

и $b\text{-lim } t_{mn} = t$, то $b\text{-lim } s_{mn} = s$.

Теорема 4В. (см. [17], теоремы 3.1 и 3.2). Если $\kappa, \tau = 2, 3, \dots$, $\alpha > \alpha'_{\kappa}$, $\beta > \beta'_{\tau}$ (или $\alpha > \alpha''_{\kappa}$, $\beta > \beta''_{\tau}$), последовательность

$$t_{mn} = \alpha\beta s_{mn} + (1 - \alpha)\beta C_{mn}^{\kappa, 0} + \alpha(1 - \beta)C_{mn}^{0, \tau} + (1 - \alpha)(1 - \beta)C_{mn}^{\kappa, \tau} \quad (4.2)$$

(или, соответственно, последовательность (4.1)) и $b\text{-lim } t_{mn} = s$, то и $b\text{-lim } s_{mn} = s$.

Замечание. Последовательности $\{\alpha'_{\kappa}\}$, $\{\alpha''_{\kappa}\}$, $\{\beta'_{\tau}\}$ и $\{\beta''_{\tau}\}$ при $\kappa, \tau = 2, 3, \dots$ определены как в замечании к теореме 2.2 (см. также [14, 17]).

Теорема 4С. Если $\alpha, \beta > \frac{1}{2}$, а методы $[H, \nu_k]$ и $[H, \xi_l]$ — вполне регулярные методы Хаусдорфа, последовательность

$$t_{mn} = \alpha\beta s_{mn} + (1 - \alpha)\beta \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \Delta^{m-k} \nu_k s_{kn} + \alpha(1 - \beta) \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \Delta^{n-l} \xi_l s_{ml} + (1 - \alpha)(1 - \beta) \sum_{k,l=0}^{m,n} \binom{m}{k} \binom{n}{l} \Delta^{m-k, n-l} \nu_k \xi_l s_{kl} \quad (4.3)$$

и $b\text{-lim } t_{mn} = s$, то и $b\text{-lim } s_{mn} = s$.

Теорема 4С доказывается при помощи теоремы типа Мерсера из [4], аналогично тому, как теоремы 4А и 4В доказаны в статье [17] при помощи соответствующих теорем типа Мерсера из [18, 14].

Теорема 4D (см. [18], теорема 3.2) Пусть $\{\nu_k\}$ и $\{\xi_l\}$ — абсолютно монотонные и регулярные последовательности Хаусдорфа, а последовательность

$$t_{mn} = \sum_{k,l=0}^{m,n} \binom{m}{k} \binom{n}{l} \Delta^{m-k, n-l} \nu_k \xi_l s_{kl}. \quad (4.4)$$

Для того, чтобы из условия $\{t_{mn}\} \in bc$ вытекало $\{s_{mn}\} \in bc$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\inf_k \nu_k > 0 \quad \text{и} \quad \inf_l \xi_l > 0. \quad (4.5)$$

Теорема 4Е. (см. [18], теорема 3.3). Пусть $\chi(t)$ и $\Psi(t)$ — функции с конечным изменением без сингулярной составляющей и удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned} \chi(0+) = \chi(0) = 0, \quad \chi(1) = 1, \\ \Psi(0+) = \Psi(0) = 0, \quad \Psi(1) = 1, \end{aligned} \quad (4.6)$$

а последовательность $\{t_{mn}\}$ определена равенством (4.4), где

$$v_k = \int_0^1 t^k d\chi(t) \quad \text{и} \quad \zeta_l = \int_0^1 t^l d\Psi(t). \quad (4.7)$$

Для того, чтобы из условия $\{t_{mn}\} \in bc$ вытекало $\{s_{mn}\} \in bc$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\inf_{\operatorname{Re} \omega > 0} \left| \int_0^1 t^\omega d\chi(t) \right| > 0 \quad \text{и} \quad \inf_{\operatorname{Re} \rho \geq 0} \left| \int_0^1 t^\rho d\Psi(t) \right| > 0. \quad (4.8)$$

Если исходить, например, из теоремы 4А, то метод, определяющий преобразование (4.1), есть метод Хаусдорфа $\{H, \mu_{kl}\}$, где

$$\mu_{kl} = \left[\alpha + (1 - \alpha) \frac{1}{(k+1)^\kappa} \right] \left[\beta + (1 - \beta) \frac{1}{(l+1)^\tau} \right]. \quad (4.9)$$

Из теоремы 4А следует, что для $\alpha, \beta > 0$ и $0 < \tau, \kappa < 1$ метод $\{H, \mu_{kl}\}$ с регулярной последовательностью (4.9) равносильен единичному методу в классе ограниченных последовательностей. Ввиду исследований Раманужана [15] это означает, что последовательность $\{1/\mu_{kl}\}$ — также регулярная последовательность Хаусдорфа. Этим и доказана первая из нижеследующих лемм 4.1—4.5. Остальные доказываются аналогично при помощи теорем 4В—4Е.

Лемма 4.1. Если $0 < \kappa, \tau < 1$ и $\alpha, \beta > 0$, то последовательность

$$\lambda_{kl} = \left[\alpha + (1 - \alpha) \frac{1}{(k+1)^\kappa} \right]^{-1} \left[\beta + (1 - \beta) \frac{1}{(l+1)^\tau} \right]^{-1} \quad (4.10)$$

есть регулярная последовательность Хаусдорфа.

Лемма 4.2. Если $\kappa, \tau = 2, 3, \dots$ и $\alpha > \alpha''_\kappa, \beta > \beta''_\tau$ (или $\alpha > \alpha''_\kappa, \beta > \beta''_\tau$), где α''_κ и β''_τ (соответственно, α''_κ и β''_τ) определены как в теореме 4В, то последовательность

$$\lambda_{kl} = \left[\alpha + (1 - \alpha) \frac{1}{\binom{k+\kappa}{\kappa}} \right]^{-1} \left[\beta + (1 - \beta) \frac{1}{\binom{l+\tau}{\tau}} \right]^{-1}$$

(или, соответственно, последовательность (4.10)) есть регулярная последовательность Хаусдорфа.

Лемма 4.3. Если $\alpha, \beta > \frac{1}{2}$, а методы $\{H, \mu_k\}$ и $\{H, \zeta_l\}$ — вполне регулярные методы Хаусдорфа, то последовательность

$$\lambda_{kl} = [\alpha + (1 - \alpha)v_k]^{-1} [\beta + (1 - \beta)\zeta_l]^{-1}$$

есть регулярная последовательность Хаусдорфа.

Лемма 4.4. Если $\{v_k\}$ и $\{\xi_i\}$ — абсолютно монотонные и регулярные последовательности Хаусдорфа, удовлетворяющие условиям (4.5), то последовательность $\lambda_{kl} = \frac{1}{v_k \xi_l}$ — регулярная последовательность Хаусдорфа.

Лемма 4.5. Если $\chi(t)$ и $\Psi(t)$ — функции с конечным изменением без сингулярной составляющей и удовлетворяют условиям (4.6) и (4.8), то последовательность $\lambda_{kl} = \frac{1}{v_k \xi_l}$, где $\{v_k\}$ и $\{\xi_i\}$ определены формулами (4.7), есть регулярная последовательность Хаусдорфа.

Теперь мы в состоянии доказать основные теоремы.

§ 5.

Нам понадобится следующая теорема (см. [9], теорема 41).

Теорема 5А. Условия

$$a) \left| \sum_{k,l=0}^{p,q} a_{mnkl} \right| < K \quad (p, q = 0, 1, 2, \dots), \quad (5.1)$$

$$b) \lim_{m,n} a_{mnkl} = a_{kl}, \quad (5.2)$$

$$c) \text{ условия (3.1), причем} \\ \lim_{m,n} a_{mnk\infty} = a_{k\infty}, \quad \lim_{m,n} a_{mn\infty l} = a_{\infty l}, \quad (5.3)$$

$$d) \text{ условие (3.2), причем} \\ \lim_{m,n} A_{mn} = a_0, \quad (5.4)$$

достаточны для того, чтобы метод A , определяющий преобразование (1.2) принадлежал к классу $\Gamma(a, bc)$.

Приведенную теорему используем для доказательства следующей теоремы.

Теорема 5.1. Если факторы $B = (b_{mk})$ и $C = (c_{nl})$ треугольного метода $A = B \odot C$ сохраняют сходимость, то метод $A \in \Gamma(a, bc)$.

Доказательство. Так как факторы B и C сохраняют сходимость, то они удовлетворяют условиям (см., например, [2], теорема 1)

$$\lim_{i \rightarrow \infty} d_{ij} = \delta_j, \quad (5.5)$$

$$\sum_j |d_{ij}| < M, \quad (5.6)$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sum_j d_{ij} = \delta, \quad (5.7)$$

где d_{ij} — элементы метода B или C соответственно.

Покажем, что метод A удовлетворяет условиям теоремы 5А. При проверке выполнимости условия (5.1), используем неравенство (5.6), именно

$$\left| \sum_{k,l=0}^{p,q} a_{mnhl} \right| \leq \sum_{k,l=0}^{m,n} |b_{mk}| |c_{nl}| = \sum_{k=0}^m |b_{mk}| \sum_{l=0}^n |c_{nl}| < K.$$

Покажем еще выполнимость первого из условий (5.3). При этом используем предельные равенства (5.5) и (5.7):

$$\lim_{m,n} \sum_l b_{mk} c_{nl} = \lim_{m,n} (b_{mk} \sum_l c_{nl}) = \lim_m b_{mk} \lim_n \sum_{l=0}^n c_{nl} = \beta_k \xi.$$

Второе из условий (5.3) проверяется аналогично. Проверку условий (5.2) и (5.4) предоставляем читателю и считаем теорему доказанной.

Наконец, приступим к доказательству основных теорем настоящей статьи. Так как теоремы 5.2, 5.3 и 5.4 доказываются аналогично, мы ограничимся доказательством первой из них.

Теорема 5.2. Если $0 < \kappa, \tau < 1$, $\alpha, \beta > 0$, последовательность $\{t_{mn}\}$ определена равенством (4.1) и $\{t_{mn}\} \in a$, то и последовательность $\{s_{mn}\} \in a$, причем выполняется равенство

$$b\text{-}\lim t_{mn} = b\text{-}\lim s_{mn}. \quad (5.8)$$

Доказательство. Отметим, что метод, определяющий преобразование (4.1), есть метод Хаусдорфа $[H, \mu_{kl}]$ с последовательностью $\{\mu_{kl}\}$, определенной равенством (4.9). Метод, обратный для $[H, \mu_{kl}]$ есть (см. [1], § 5 теорема 7) $[H, \lambda_{kl}] = [H, \frac{1}{\mu_{kl}}]$, где последовательность $\{\lambda_{kl}\}$ определена равенством (4.10). Ввиду леммы 4.1 последовательность $\{\lambda_{kl}\}$ — регулярная последовательность Хаусдорфа. Поэтому метод $[H, \lambda_{kl}] \in \Gamma(bc, bc)$ и удовлетворяет условиям теоремы 3.2. Но тогда справедливо соотношение $[H, \lambda_{kl}] \in \Gamma(a, a)$, и, следовательно, последовательность $\{s_{mn}\} \in a$.

Таким образом, нам осталось доказать равенство (5.8). Если положить, что рассматриваемый метод $[H, \mu_{kl}] \in \Gamma(a, bc)$, то ввиду равенства (4.1) можем теперь сказать, что $\{t_{mn}\} \in bc$. Равенство же (5.8) вытекает из теоремы 4А. Таким образом остается еще доказать, что метод $[H, \mu_{kl}] \in \Gamma(a, bc)$. Это утверждение без трудностей вытекает из теоремы 5.1, если учесть, что факторы $[H, \alpha + (1 - \alpha) \frac{1}{(k+1)^\kappa}]$ и $[H, \beta + (1 - \beta) \frac{1}{(l+1)^\tau}]$ метода $[H, \mu_{kl}]$ регулярны (см. [17], лемма 1.4). Теорема доказана.

Теорема 5.3. Если $\kappa, \tau = 2, 3, \dots$, $\alpha > \alpha'_\kappa$, $\beta > \beta'_\tau$ (или $\alpha > \alpha''_\kappa$, $\beta > \beta''_\tau$), где последовательности $\{\alpha'_\kappa\}$, $\{\beta'_\tau\}$ (или $\{\alpha''_\kappa\}$, $\{\beta''_\tau\}$) определены как в теореме 4В, последовательность $\{t_{mn}\}$ определена равенством (4.2) (или (4.1)) и $\{t_{mn}\} \in a$, то и последовательность $\{s_{mn}\} \in a$, причем выполнено равенство $b\text{-}\lim t_{mn} = b\text{-}\lim s_{mn}$.

Теорема 5.4. Если $\alpha, \beta > \frac{1}{2}$, методы $[H, \nu_k]$ и $[H, \xi_l]$ вполне регулярны, последовательность $\{t_{mn}\}$ определена равен-

ством (4.3) и $\{t_{mn}\} \in a$, то и последовательность $\{s_{mn}\} \in a$, причем выполняется равенство $b\text{-lim } t_{mn} = b\text{-lim } s_{mn}$.

Последние две теоремы 5.5 и 5.6 нашей статьи являются аналогами обобщенных теорем типа Мерсера.

Теорема 5.5. Если $\{v_k\}$ и $\{\xi_l\}$ — абсолютно монотонные и регулярные последовательности Хаусдорфа, удовлетворяющие условиям (4.5), последовательность $\{t_{mn}\}$ определена равенством (4.4) и $\{t_{mn}\} \in a$, то и $\{s_{mn}\} \in a$, причем выполняется равенство $b\text{-lim } t_{mn} = b\text{-lim } s_{mn}$.

Теорема 5.6. Если $\chi(t)$ и $\Psi(t)$ — функции с конечным изменением без сингулярной составляющей, удовлетворяющие условиям (4.6) и (4.8), последовательность $\{t_{mn}\}$ определена равенствами (4.4) и (4.7) и $\{t_{mn}\} \in a$, то и последовательность $\{s_{mn}\} \in a$, причем выполняется равенство $b\text{-lim } t_{mn} = b\text{-lim } s_{mn}$.

Замечание. Можно доказать еще ряд аналогичных теорем, если рассматривать другие возможные комбинации факторов, рассмотренных в теоремах 5.2—5.6.

Литература

1. Adams, C. R., On summability of double series. Trans. Amer. Math. Soc., 1932, **34**, 215—230.
2. Adams, C. R., Hausdorff transformations for double sequences. Bull. Amer. Math. Soc., 1933, **39**, 303—312.
3. Agnew, R. P., Equivalence of methods for evaluation of sequences. Proc. Amer. Math. Soc., 1952, **3**, 550—556.
4. Basu, S. K., On the total relative strength of some Hausdorff methods equivalent to identity. Amer. J. Math., 1954, **76**, 389—398.
5. Bosanquet, L. S., An analogue of Mercer's theorem. J. London Math. Soc., 1938, **13**, 177—180.
6. Hayashi, G., A theorem on limit. Tohoku Math. J., 1939, **45**, 329—331.
7. Кноп, К., Lorentz, G. G., Beiträge zur absolute Limitierung. Arch. Math. 1949, **2**, 10—16.
8. Love, E. R., Mercer's summability theorem. J. London Math. Soc. 1952, **27**, 413—429.
9. Mears, F. M., Transformations of double sequences. Amer. J. Math., 1948, **70**, 804—832.
10. Mercer, J., On the limit of real variants. Proc. London Math. Soc., 1907, **5**, 206—224.
11. Morley, H., A theorem on Hausdorff transformation and its application to Cesàro and Hölder means. J. London Math. Soc. 1950, **25**, 168—173.
12. Parameswaran, M. R., On some Mercierian theorems in summability. Proc. Amer. Math. Soc., 1957, **8**, 968—974.
13. Pitt, H. R., Peterhouse, Ph. D., Mercierian theorems. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1938, **34**, 510—520.
14. Polniakowski, Z., Polynomial Hausdorff transformations. I. Mercierian theorems. Ann. polon. math., 1958, **5**, 1—24.
15. Ramujan, M. S., On Hausdorff transformations of double sequences. Proc. Indian Acad. Sci., 1955, **A 42**, Nr. 3, 131—135.
16. Walsh, C. E., Note on an analogue of Mercer's theorem. J. London Math. Soc., 1942, **17**, 13—17.

17. Сырмус Т. И., О некоторых обобщениях теоремы Мерсера для двойных последовательностей. Изв. АН. Эст. ССР, сер. физ.-матем. и техн. наук, 1962, 11, 1, 37—49.
18. Сырмус Т. И., Об обобщенной теореме Мерсера. Изв. АН, Эст. ССР, сер. физ.-матем. и техн. наук, 1962, 11, 2, 99—106.
19. Сырмус Т. И., Теоремы тауберова типа, связанные с методами Якимовского. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1965, 177, 67—79.
20. Сырмус Т. И., Об одной асимптотической задаче. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1965, 177, 125—133.
21. Харди Г., Расходящиеся ряды. Москва, 1951.

Поступило
18 XI 1965

HARILIKE JA KAHEKORDSETE JADADE ABSOLUUTSEST SUMMEERUVUSEST HAUSDORFFI MENETLUSTEGA

T. Sõrmus

Resümee

Töös tõestatakse teoreemid, milles jada absoluutne koonduvus järeldub selle jada absoluutsest summeeruvusest teatud liiki Hausdorffi menetlustega. Seega on vaatlusel Merceri tüüpi teoreemid Hausdorffi menetlustega absoluutselt summeeruvate jadade jaoks. Kõne all olevad teoreemid tõestatakse nii harilike (§ 2), kui ka kahekordsete jadade (§ 5) jaoks. Tulemused on üldistuseks mõnede autorite (vt. [5, 16, 8]) analoogilistele tulemustele harilike jadade kohta. Töös (§ 3) üldistatakse kahekordsete jadade maatriksteisendustele H. Morley ja Knopp-Lorentzi teoreem, mis väidab, et koonduvust säilitav Hausdorffi menetlus säilitab ka absoluutset koonduvust.

ÜBER ABSOLUTE LIMITIERBARKEIT DER EINFACHEN UND DOPPELFOLGEN NACH DEM HAUSDORFFSCHEN VERFAHREN

T. Sõrmus

Zusammenfassung

In dieser Note wird eine Reihe von Mercer-Sätzen für absolut permanente bzw. absolut konvergenztreue Hausdorffsche Verfahren bewiesen. Die in Rede stehenden Sätze werden für die einfachen Folgen (§ 2) und Doppelfolgen (§ 5) betrachtet. Damit sind auch einige Verallgemeinerungen von bekannten Sätzen für einfache Folgen (s. [5, 16, 8]) bewiesen. In § 3 wird der von H. Morley und K. Knopp—G. G. Lorentz gefundene Satz ([7], Satz 3) über absolut permanente bzw. konvergenztreue Hausdorffsche Verfahren für den Fall der Doppelfolgen verallgemeinert.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ НЕЛИНЕЙНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ, СВЯЗАННОЙ С МНОГОЧЛЕНОМ

Л. Кивистик

Кафедра вычислительной математики

Рассмотрим следующую задачу математического планирования. Среди всех n -мерных ($n > 1$) векторов $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, компоненты которых входят в заданные отрезки

$$a_i \leq x_i \leq b_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (1)$$

найти вектор, максимизирующий (минимизирующий) функцию

$$f(u_0, \mathbf{x}) \quad (2)$$

и удовлетворяющий условиям

$$f(u_i, \mathbf{x}) \leq c_i, \quad i = 1, 2, \dots, l, \quad (3)$$

$$f(u_j, \mathbf{x}) \geq c_j, \quad j = l + 1, \dots, m, \quad (4)$$

где

$$f(u, \mathbf{x}) = f(u, x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1 - u)(x_2 - u) \dots (x_n - u), \quad (5)$$

а c_i, c_j — заданные числа.

На приведенную задачу внимание автора обратил Ю. Каазик. Эта задача является частным случаем одной, возникшей из практики задачи нелинейного планирования, но она представляет по-видимому и, самостоятельный интерес. Отметим, что область, определенная ограничениями (1), (3) и (4), в общем случае невыпукла. Несмотря на это, задача в определенных частных случаях решается сравнительно просто. Одна возможность следующая. Представим $f(u, \mathbf{x})$ в виде

$$f(u, \mathbf{x}) = f(u) = (-1)^n [u^n - \sigma_1 u^{n-1} + \sigma_2 u^{n-2} - \dots + (-1)^n \sigma_n], \quad (6)$$

где по формулам Виета

$$\sigma_j = \sum_{i_1 < \dots < i_j} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_j}. \quad (7)$$

Поскольку корни x_1, x_2, \dots, x_n многочлена (6) определены его коэффициентами однозначно до порядка, то можем сначала найти коэффициенты $\sigma_1^*, \sigma_2^*, \dots, \sigma_n^*$, при которых $f(u_0, \mathbf{x})$ достигает оптимальное значение при ограничениях (1), (3), (4), а затем найти корни многочлена

$$u^n - \sigma_1^* u^{n-1} + \sigma_2^* u^{n-2} - \dots + (-1)^n \sigma_n^*.$$

Вектор корней $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ и дает оптимальное решение первоначальной задачи планирования. Отметим, что в случае, когда задача, поставленная относительно переменных σ_j , однозначно разрешима, то это еще не означает, что первоначальная задача имеет лишь одно оптимальное решение. Остальные решения получаются из решения \mathbf{x}^* при перестановке его первоначальных компонентов, входящих в пересечения отрезков изменения $[a_i, b_i]$.

Покажем, что в случае, если все интервалы (a_i, b_i) ($i = 1, 2, \dots, n$) являются непересекающимися, то по отношению к переменным $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ получим задачу линейного планирования. В самом деле, функция (2), а также ограничения (3) и (4), уже являются линейными по отношению к $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$. Ограничения, равносильные условиям (1) и линейные по отношению к переменным σ_j , получим тогда, когда потребуем, чтобы значения многочлена $f(u)$ были в концах отрезков изменения корней с противоположными знаками. Если $a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq \dots \leq a_{n-1} < b_{n-1} \leq a_n < b_n$, то это требование приводит к условиям:

$$\begin{aligned} f(a_1) &\geq 0, & f(b_1) &\leq 0, \\ f(a_2) &\leq 0, & f(b_2) &\geq 0, \\ (-1)^{n-1} f(a_{n-1}) &\leq 0, & (-1)^{n-1} f(b_{n-1}) &\geq 0, \\ (-1)^n f(a_n) &\leq 0, & (-1)^n f(b_n) &\geq 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Степенью многочлена обеспечено наличие в каждом отрезке только одного корня.

Для решения задачи линейного планирования, получаемой на первом этапе, где необходимо найти экстремум функции (2) переменных $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ при ограничениях (3), (4) и (8), можно пользоваться, например, симплексным методом. Если линейная задача, получаемая на первом этапе, является неразрешимой, то неразрешимой является и первоначальная задача. Если линейная задача разрешима, то корни $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ алгебраического уравнения n -ой степени

$$u^n - \sigma_1^* u^{n-1} + \sigma_2^* u^{n-2} - \dots + (-1)^n \sigma_n^* = 0, \quad (9)$$

подлежащего решению на втором этапе, являются непременно вещественными. Поскольку они находятся при этом в известных отрезках $a_i \leq x_i \leq b_i$, то можно для их нахождения пользоваться, например, методом хорд.

В случае если линейная относительно переменных σ_j задача имеет бесконечно много решений, то бесконечно много решений имеет и первоначальная задача. Такой случай может встретиться, например, тогда, когда u_0 входит в какой-нибудь отрезок $[a_i, b_i]$ и оптимальное значение $f(u_0, \mathbf{x})$ равняется нулю. В упомянутом случае один из корней совпадает с u_0 , а остальные

корни могут принимать из своих отрезков изменения любые значения так, чтобы условия (3) и (4) остались выполненными.

Применение описанного метода к случаю пересекающихся интервалов связано с трудностями, главная из которых состоит в том, что условия (1) нельзя естественным путем заменить ограничениями (8).

Примечание при корректуре. Первоначально настоящая заметка была значительно обширнее. В ней также был выведен для случая пересекающихся интервалов (1) алгоритм нахождения оптимального решения при одном ограничении (3) или (4), т. е. при $m = 1$. В то время, когда настоящий сборник находился в печати, автору удалось обобщить этот алгоритм на более общую задачу. Учитывая это, редакция, по предложению автора, решила не опубликовывать части статьи, в которой был рассмотрен вышеуказанный частный случай. Тот же самый алгоритм для более общей задачи будет опубликован в одном из следующих номеров настоящего сборника.

Поступило
20 V 1966

ÜHEST POLÜNOOMIGA SEOTUD MITTELINEAARSEST PLANEERIMIS-ÜLESANDEST

L. Kivistik

Res ü m e e

Artiklis käsitletakse järgmist ülesannet: määrata n -astme polünoomi $f(u)$ nullkohad x_1, x_2, \dots, x_n etteantud lõikudes $a_i \leq x_i \leq b_i$, nii et polünoom omandaks kohal u_0 maksimaalse (või minimaalse) väärtuse, teistel kohtadel u_i ($i = 1, 2, \dots, l$), u_j ($j = l+1, \dots, m$) rahuldaks aga tingimusi $f(u_i) \leq c_i$, $f(u_j) \geq c_j$. Näidatakse, et juhul kui vahemikud (a_i, b_i) on ühisosata, taandub ülesanne lineaarse planeerimisülesande ja n -astme algebraalse võrrandi lahendamisele.

ON A NON-LINEAR PROGRAMMING PROBLEM CONNECTED WITH A POLYNOMIAL

L. Kivistik

S u m m a r y

In the present paper the following problem is considered: determine zeroes x_1, x_2, \dots, x_n of the polynomial

$$f(u) = (x_1 - u)(x_2 - u) \dots (x_n - u)$$

in segments $a_i \leq x_i \leq b_i$ so, that in a fixed point u_0 the polynomial reaches its maximum (or minimum) and satisfies in some other points u_i, u_j ($i = 1, 2, \dots, l$; $j = l+1, \dots, m$) the restrictions

$$f(u_i) \leq c_i, \quad f(u_j) \geq c_j.$$

It is proved that, if the intervals (a_i, b_i) are without common points, the solution of the problem may be reduced to solution of a linear programming problem and the algebraic equation $f(u) = 0$.

О НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИНОК

Э. Вирма

Кафедра вычислительной математики

§ 1. Введение

При современной технике необходимо учитывать кроме упругих деформаций также пластические деформации. При этом важной проблемой является определение несущей способности какой-либо конструкции. При расчете несущей способности прямоугольных пластинок успех достигнут только методом предельного анализа. П. Г. Ходж первым определил нижнюю и верхнюю границы несущей способности квадратной пластинки. Х. Э. Шулл и Л. В. Ху определили нижнюю и верхнюю границы свободно опертой прямоугольной пластинки, применяя условие текучести Треска.

В данной работе рассмотрено определение нижней границы несущей способности равномерно нагруженной прямоугольной пластинки, применяя условие текучести Мизеса. Проблема связана теорией нелинейного программирования и решение найдено градиентным методом. Полученные значения несущей способности лучше результатов Шулля и Ху.

§ 2. Условие текучести

Для получения условия текучести введены следующие основные допущения:

1. Деформация такова, что элементы, нормальные к первоначальной срединной поверхности пластинки, остаются прямолинейными и нормальными к деформированной срединной поверхности.

2. Вертикальное перемещение срединной плоскости мало по сравнению с толщиной пластинки.

3. Материал жестко-пластический.

При этих предположениях деформация пластинки определяется лишь вертикальным перемещением $W = W(X, Y)$, и деформация пропорциональна расстоянию от срединной плоскости. Следовательно, напряжение должно быть постоянным во всех точках по одну сторону от срединной плоскости и, в силу симметрии, такой же величины, но противоположного знака по другую сторону. Таким образом получаем для моментов следующие выражения:

$$M_x = \sigma_x H^2, \quad M_y = \sigma_y H^2, \quad M_{xy} = \tau_{xy} H^2,$$

где $2H$ — толщина пластинки. Условие Мизеса (в напряжениях) имеет вид:

$$\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2 \leq \sigma_0^2,$$

где σ_0 предел текучести при растяжении. Если перейти к следующим безразмерным величинам:

$$m_x = \frac{M_x}{M_0}, \quad m_y = \frac{M_y}{M_0}, \quad m_{xy} = \frac{M_{xy}}{M_0},$$

где $M_0 = \sigma_0 H^2$, тогда условие текучести принимает вид:

$$m_x^2 + m_x m_y + m_y^2 + 3m_{xy}^2 \leq 1. \quad (2.1)$$

§ 3. Формулы для определения несущей способности

Рассмотрим свободно опертую прямоугольную пластинку длины $2L$ с отношением ширины к длине $\eta \leq 1$ и толщиной $2H$. Пластинка нагружена равномерно распределенной нагрузкой с интенсивностью P . Выбрав следующие безразмерные величины:

$$x = \frac{X}{L}, \quad y = \frac{Y}{L}, \quad p = \frac{PL^2}{6M_0}$$

уравнение равновесия пластинки

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial Y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial X \partial Y} + P = 0$$

преобразуется к виду

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} + 6p = 0. \quad (3.1)$$

Чтобы получить нижнюю границу для несущей способности, необходимо найти такое поле моментов, которое удовлетворяло бы уравнению равновесия (3.1), условию пластичности (2.1) и крайевым условиям свободно опертой пластинки $m_x = 0$, если $x = \pm 1$, $m_y = 0$, если $y = \pm \eta$.

П. Г. Ходж [2] дал решение для квадратной пластинки в виде:

$$m_x = c(1 - x^2), \quad m_y = c(1 - y^2).$$

Шулл и Ху [3] выбрали выражения для моментов, считая, что

$$m_x = m_y = c(1 - x^3) \left(1 - \frac{y^3}{\eta^3} \right).$$

В данной работе взято аналогичное предположение, но решение основано на использовании поля моментов:

$$m_x = m_y = c_1(1 - x^2) \left(1 - \frac{y^2}{\eta^2} \right) + c_2(1 - |x|^3) \left(1 - \frac{|y|^3}{\eta^3} \right) + c_3(1 - x^4) \left(1 - \frac{y^4}{\eta^4} \right). \quad (3.2)$$

Вследствие симметрии рассматривается только первый квадрант пластинки. Вычислив соответственные частные производные и вставив их в уравнение равновесия (3.1), получаем для момента m_{xy} следующее выражение:

$$m_{xy} = -3\rho xy + c_1 xy \left(1 - \frac{y^2}{3\eta^2} + \frac{1}{\eta^2} - \frac{x^2}{3\eta^2} \right) + 3c_2 xy \left(\frac{x}{2} - \frac{xy^3}{8\eta^3} + \frac{y}{2\eta^3} - \frac{yx^3}{8\eta^3} \right) + 6c_3 xy \left(\frac{x^2}{3} - \frac{x^2 y^4}{15\eta^4} + \frac{y^2}{3\eta^4} - \frac{x^4 y^2}{15\eta^4} \right). \quad (3.3)$$

Так как $m_x = m_y$, то из условия текучести (2.1) получаем:

$$m_x^2 + 3m_{xy}^2 \leq 1.$$

Отсюда $m_{xy} \leq \sqrt{\frac{1 - m_x^2}{3}}$ и $-m_{xy} \leq \sqrt{\frac{1 - m_x^2}{3}}$.

Вставив в последнее условие выражения для m_x и m_{xy} и решив неравенство в отношении ρ , получаем

$$\rho \leq \frac{1}{9xy} \sqrt{3 \left\{ 1 - \left[\sum_{k=1}^3 c_k (1 - x^{k+1}) \left(1 - \frac{y^{k+1}}{\eta^{k+1}} \right) \right]^2 \right\}} + \sum_{k=1}^3 \frac{c_k (k+1)}{6} \left[x^{k-1} + \frac{y^{k-1}}{\eta^{k-1}} - \frac{x^{k-1} y^{k-1} (x^2 + y^2)}{(k+2)\eta^{k+1}} \right] = F(x, y, c_1, c_2, c_3). \quad (3.4)$$

где $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq \eta$ и c_1, c_2, c_3 — положительные постоянные. Если в выражении моментов (3.2) взять $x = 0$, $y = 0$, то получим

$$m_x = m_y = c_1 + c_2 + c_3.$$

Так как $m_x = \frac{M_x}{M_0} \leq 1$, $m_y = \frac{M_y}{M_0} \leq 1$, то постоянные должны удовлетворять требованию:

$$c_1 + c_2 + c_3 \leq 1.$$

Чтобы найти наибольшее значение p для какого-нибудь фиксированного η , необходимо определить c_1, c_2, c_3 так, чтобы минимальное значение функции, стоящей на правой стороне неравенства (3.4) было бы максимальным, т. е.

$$p = \max_{c_1, c_2, c_3} \min_{x, y} F(x, y, c_1, c_2, c_3).$$

§ 4. Квадратная пластинка

Проблему можно рассматривать как задачу нелинейного программирования. Для упрощения вопроса рассматриваем сначала квадратную пластинку ($\eta = 1$):

$$p \leq \frac{1}{9xy} \sqrt{3 \{ 1 - [\sum_{k=1}^3 c_k (1 - x^{k+1}) (1 - y^{k+1})]^2 \} + \sum_{k=1}^3 \frac{c_k (k+1)}{6} \left[x^{k-1} + y^{k-1} - \frac{x^k - y^k (x^2 + y^2)}{k-2} \right]}. \quad (4.1)$$

Так как минимум вогнутой симметричной функции может находиться только на прямой $x = y$, то вместо нахождения минимума функции двух переменных можно найти минимум функции одной переменной, т. е. исследовать выражение:

$$p \leq \frac{1}{9x^2} \sqrt{3 \{ 1 - [\sum_{k=1}^3 c_k (1 - x^{k+1})^2]^2 \} + \sum_{k=1}^3 \frac{c_k (k+1)}{3} x^{k-1} \left(1 - \frac{x^{k+1}}{k+2} \right)} = f(x, c_1, c_2, c_3), \quad (4.2)$$

где $0 \leq x \leq 1$, $c_1 + c_2 + c_3 \leq 1$, $c_1 \geq 0$, $c_2 \geq 0$, $c_3 \geq 0$.

Чтобы найти наибольшее значение p , необходимо определить c_1, c_2, c_3 так, чтобы $c_1 + c_2 + c_3 \leq 1$ и f_{\min} был бы максимальным, т. е.

$$p = \max_{c_1, c_2, c_3} \min_x f(x, c_1, c_2, c_3).$$

Условия задачи можно сформулировать и по-иному. Для этого вместо неравенства (4.2) составим систему неравенств, придавая x определенные значения x_i :

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_m = 1.$$

В результате этого получаем следующую систему

$$\begin{cases} f(x_0, c_1, c_2, c_3) - f(x_1, c_1, c_2, c_3) \geq 0 \\ f(x_1, c_1, c_2, c_3) - f(x_2, c_1, c_2, c_3) \geq 0 \\ \dots \\ f(x_{m-1}, c_1, c_2, c_3) - f(x_m, c_1, c_2, c_3) \geq 0 \\ 1 - (c_1 + c_2 + c_3) \geq 0 \\ c_1 \geq 0, c_2 \geq 0, c_3 \geq 0. \end{cases} \quad (4.3)$$

$$\varphi'_{y_k} = a_{k0} \sqrt{3 \left\{ 1 - \left[\sum_{n=1}^3 c_n a_{kn} \right]^2 \right\}} + \sum_{n=1}^3 c_n a_{1n} -$$

$$- a_{00} \sqrt{3 \left\{ 1 - \left[\sum_{n=1}^3 c_n a_{0n} \right]^2 \right\}} - \sum_{n=1}^3 c_n a_{0n} \quad (4.6b)$$

$$\varphi'_{y_{m+1}} = 1 - (c_1 + c_2 + c_3),$$

где $l = 1, 2, 3$; $k = 1, 2, \dots, m$.

Вычисления можно проводить по следующим этапам:

1. Выберем исходное решение $c_1 = c^0_1$, $c_2 = c^0_2$, $c_3 = c^0_3$, $y_1 = y^0_1$, $y_2 = y^0_2 \dots y_{m+1} = y^0_{m+1}$ и определим значения функции $f(x, c^0_1, c^0_2, c^0_3)$ при $x_1, x_2 \dots x_m$. Точка $(x_0, c^0_1, c^0_2, c^0_3)$, в которой $f(x, c^0_1, c^0_2, c^0_3)$ принимает минимальное значение, является допустимым исходным решением задачи программирования.

2. С помощью выражений частных производных (4.6) находим $\varphi'_{c_1} \dots \varphi'_{y_{m+1}}$ в точке $(x^0, c^0_1, c^0_2, c^0_3, y^0_1 \dots y^0_{m+1})$. Для определения частных производных применяются результаты первого этапа, так как практически имеются $f(x_1, c^0_1, c^0_2, c^0_3)$, $f(x_2, c^0_1 \dots)$ и т. д. Также определены $a_{00}, a_{01}, \dots a_{m6}$.

3. Выберем значение ρ и определим теперь новую точку $(x^1, c^1_1, c^1_2, c^1_3, y^1_1, \dots, y^1_{m+1})$. При этом x^1 опять находим при вычислении минимума $f(x, c^1_1, c^1_2, c^1_3)$. Если полученный f^1_{\min} меньше значения начального решения, т. е.

$$f^1_{\min} < f^0_{\min},$$

тогда уменьшаем значение ρ и повторяем этап 3. Если $f^1_{\min} > f^0_{\min}$, повторяем весь процесс сначала, при этом исходной точкой является $(x^1, c^1_1, c^1_2 \dots y^1_{m+1})$. Процесс кончается тогда, когда при достаточно малом ρ невозможно в пределах требуемой точности улучшить значение f_{\min} .

Так как скорость получения оптимального решения зависит от выбора исходного решения, то вычисления проведены сначала для квадратной пластинки (см. таблицу 1). При этом более простом случае возможно найти исходное решение достаточно близкое к оптимальному. Для квадратной пластинки наибольшее значение ρ найдено в точке $c_1 = 0,287$, $c_2 = 0,365$, $c_3 = 0,348$, $\rho = 0,963$; которое несколько лучше результатов Шулля и Ху.

§ 5. Прямоугольная пластинка

Полученные значения c_1, c_2, c_3 взяты исходным решением прямоугольной пластинки ($\eta \neq 1$). Вычисления проведены электронно-вычислительной машиной Урал-4, результаты приведены в следующей таблице. Для сравнения даны во втором и

третьем столбцах значения нижней и верхней границ Шулла и Ху (условия текучести Треска).

Таблица 1

η	p	Шулл и Ху	
		p^-	p^+
1,00	0,963	0,826	1,000
0,95	1,015	0,870	1,055
0,90	1,073	0,921	1,117
0,85	1,137	0,979	1,186
0,80	1,210	1,049	1,274
0,75	1,292	1,108	1,372
0,70	1,388	1,193	1,494
0,65	1,500	1,293	1,639
0,60	1,634		1,828
0,55	1,798	1,561	2,053
0,50	2,002	1,744	2,358

Из полученных результатов можно сделать вывод, что выбор моментов $m_x = m_y$, который значительно упрощает вычисления и дает довольно хорошие результаты при квадратной пластинке, не оправдывает себя при длинных и узких пластинках.

Автором данной работы еще рассматривались случаи, в которых решением выбраны четыре и пять первых членов данного ряда. Вычисления сделаны для квадратной пластинки, но не удалось улучшить значения полученной несущей способности. Чтобы улучшить нижнюю границу несущей способности, надо бы искать решение в каком-либо другом виде.

Литература

1. Эрроу К. Дж., Гурвиц Л., Удзава Х., Исследования по линейному и нелинейному программированию. Москва, 1962.
2. Hodge, P. G. Jr., Plastic Analysis of Structures. New York, 1959.
3. Shull, H. E., Hu, L. W., Load-Carrying Capacities of Simply Supported Rectangular Plates. J. Appl. Mech., 1963, 30, 617—622.

Поступило
15 IV 1966

RISTKÜLIKUKUJULISTE PLAATIDE KANDEVÕIMEST

E. Virma

Resümee

Käesolevas töös vaadeldakse jäikplastilisest materjalist, servadel vabalt toetuvat ristkülikukujulist plaati. Plaadile on rakendatud ühtlane ristkoormus intensiivsusega P . Kasutades Hodge poolt töös [2] esitatud teooriat kande- võime alumise tõkke leidmiseks ruudukujulise plaadi jaoks, on arvutatud kande-

võime alumine tõke ristkülikukujulise plaadi jaoks. Probleem on seotud mitte-lineaarse planeerimise teoriaga ja lahendamiseks on kasutatud gradientmeetodit. Tulemused vabalt toetava plaadi jaoks on esitatud tabelis 1, kus võrdluseks on antud ka Shull'i ja Hu poolt töös [3] saadud kandevõime alumise ja ülemise tõkke väärtused.

ON LOAD-CARRYING CAPACITY OF RECTANGULAR PLATES

E. Virma

Summary

In the present paper the rectangular plate of the rigid-plastic material simply supported on edges is considered. The rectangular plate has been loaded with uniformly distributed transverse load of intensity P . Using the theory, proposed by Hodge in the paper [2], for finding the lower bound for the load-carrying capacity, of a square plate, the lower bound of the load-carrying capacity for a rectangular plate has been found. The problem is connected with the theory of non-linear programming and the gradient method has been used for solving it. The solutions for a simply supported plate have been given in Table 1, showing for comparison computed critical loads and the corresponding results, obtained by Shull and Hu in the paper [3].

БОЛЬШИЕ ПРОГИБЫ ЖЕСТКО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ СОВМЕСТНОМ ДЕЙСТВИИ ОСЕВОГО РАСТЯЖЕНИЯ И ВНЕШНЕГО ДАВЛЕНИЯ

Ю. Лепик

Кафедра теоретической механики

На основании условия текучести Треска и ассоциированного закона течения исследуется осесимметрическое пластическое течение длинных цилиндрических оболочек с идеализированным двуслойным сечением. Оболочка нагружена внешним давлением и заданным (постоянным) осевым растяжением. Ограничиваемся случаем свободно опертых краев, причем прогибы могут быть соизмеримыми с толщиной оболочки. В пределах концепции жестко-пластического тела в статье получены точные решения проблемы. Обсуждается вопрос о применимости найденных решений в зависимости от размеров оболочки и от величины осевого растяжения.

Для оболочек без осевого растяжения решена также упруго-пластическая задача; оказалось, что значительные пластические деформации развиваются в оболочке уже при нагрузке, соответствующей переходу из чисто-упругой стадии в упруго-пластическую.

§ 1. Постановка задачи и основные уравнения

В последнее время большую популярность получила модель оболочки идеализированного двуслойного сечения (см., например, [1, 7, 8, 9, 11]). Эта модель состоит из двух тонких слоев, работающих как мембраны; эти слои разделены заполнителем, передающим лишь сдвиговые усилия. Такая модель, применение которой значительно упрощает математическую сторону проблемы, будет использована и в данной работе.

Рассмотрим круглую цилиндрическую оболочку со свободно опертыми концами. Размеры оболочки и направления координатных осей указаны на фиг. 1; толщину несущих слоев обозначим символом d , причем $d \ll h$, где h — толщина оболочки.



Фиг. 1.

Допустим, что к оболочке приложено равномерное внешнее давление q и постоянное во всем процессе нагружения осевое растяжение T_x . Ограничимся случаем осесимметрического деформирования оболочки, учитывая при этом и геометрическую нелинейность (т. е. прогибы не обязательно малы по сравнению с толщиной h).

Уравнения равновесия элемента оболочки имеют форму:

$$T_x = \text{const}, \quad -\frac{d^2 M_x}{dx^2} + T_x \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{T_\varphi}{R} + q = 0, \quad (1.1)$$

причем прогиб w считается положительным, если он направлен к центру кривизны.

Снабдим все величины во внешнем и внутреннем слоях соответственно индексами «-» и «+»; тогда усилия T_x , T_φ и изгибающие моменты M_x , M_φ определяются формулами

$$\begin{aligned} T_x &= (\sigma_x^+ - \sigma_x^-)d, & T_\varphi &= (\sigma_\varphi^+ + \sigma_\varphi^-)d, \\ M_x &= \frac{1}{2} (\sigma_x^+ - \sigma_x^-)hd, & M_\varphi &= \frac{1}{2} (\sigma_\varphi^+ - \sigma_\varphi^-)hd. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Для дальнейшего целесообразно ввести следующие безразмерные величины (σ_s — предел текучести, u — перемещение вдоль оси x):

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{x}{L}, & U &= \frac{L}{h^2} u, & W &= \frac{w}{h}, & a &= \frac{L}{\sqrt{Rh}}, & Q &= \frac{qR}{2\sigma_s d}, \\ t_1 &= \frac{T_x}{2\sigma_s d}, & t_2 &= \frac{T_\varphi}{2\sigma_s d}, & m_1 &= \frac{M_x}{\sigma_s h d}, & m_2 &= \frac{M_\varphi}{\sigma_s h d} \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$k_1^\pm = \sigma_x^\pm / \sigma_s, \quad k_2^\pm = \sigma_\varphi^\pm / \sigma_s.$$

В этих обозначениях формулы (1.1) — (1.2) приобретают вид (штрихами обозначены производные по ξ):

$$t_1 = \text{const}, \quad m_1'' + 2t_1 W''' + 2a^2(t_2 + Q) = 0, \quad (1.4)$$

$$t_i = 1/2(k_i^+ + k_i^-), \quad m_i = 1/2(k_i^+ - k_i^-) \quad (i = 1, 2). \quad (1.5)$$

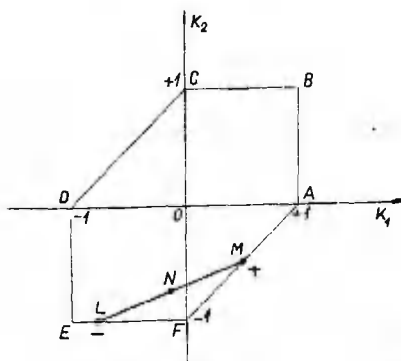
Для компонентов деформаций во внешнем и внутреннем слоях имеем

$$e_x^\pm = \varepsilon_x \pm h/2\kappa_x, \quad e_\varphi^\pm = \varepsilon_\varphi, \quad (1.6)$$

где

$$\varepsilon_x = (h^2/L^2)(U' + 1/2 W'^2), \quad \varepsilon_\varphi = -(h/R)W, \quad \kappa_x = -(h/L^2)W''. \quad (1.7)$$

В качестве условия текучести выбираем условие Треска (фиг. 2), материал оболочек будем считать жестко-пластическим (без упрочнения). Как показано В. Прагером [2], формулам (1.5) можно в плоскости напряжений (k_1 , k_2) дать простое геометрическое истолкование: именно координаты средней точки



Фиг. 2.

рому другому неубывающему параметру):

$$e_{r^{\pm}} = \lambda \frac{\partial f}{\partial k_1^{\pm}}, \quad e_{\varphi^{\pm}} = \lambda \frac{\partial f}{\partial k_2^{\pm}}. \quad (1.8)$$

Формулы (1.8) соответствуют «теории течения». Как известно, соотношения типа (1.8) имеют место и в «теории деформаций», если только в этих формулах заменить скорости деформаций e_r , e_{φ} самими деформациями e_r , e_{φ} . Последняя аналогия дает возможность решать поставленные задачи как по «теории течения», так и по «теории деформаций» и оценить, таким образом, влияние сложного нагружения.

2. Интегрирование основных уравнений проблемы

В зависимости от геометрических параметров и от величины осевого растяжения в оболочке возможен ряд комбинаций пластических режимов, удовлетворяющих всем статическим и кинематическим условиям; полученные для этих режимов решения являются в пределах гипотезы жестко-пластического тела точными. Ниже мы рассмотрим и некоторые типы таких точных решений¹.

Первый тип. Из условия шарнирного опирания $m_1(0) = 0$ вытекает, что вблизи края $\xi = 0$ должно быть реализовано пластическое состояние $FA - FA$ (т. е. во внешнем и внутреннем слоях имеем режим FA из фиг. 2). Допустим, что это состояние налицо до некоторой величины $\xi = \xi_1$. Если ограничиться случаем $t_1 < 1/2$, то на основании геометрической интерпретации движения отрезка LM на фиг. 2 естественно предполагать, что при $\xi_1 < \xi \leq 1$ имеет место состояние $F-FA$ (т. е. слой «—» находится в режиме F , а слой «+» в FA). Проверим, удов-

¹ Следует отметить, что несущая способность однородных растянуто-изогнутых цилиндрических оболочек при малых прогибах исследовалась в работе [3].

летворяются ли при такой комбинации пластических режимов статические и кинематические уравнения проблемы совместно с крайвыми условиями и требованиями непрерывности.

Из ассоциированного закона течения вытекает, что $e_{x^{\pm}} + e_{\varphi} = 0$, на основании (1.6) — (1.7) имеем теперь $W''' = 0$. Интегрируя это уравнение по ξ и выполняя граничное условие $W'(0) = 0$, находим, что $W' = A\xi$. Если допустить, что в процессе нагружения величина ξ_1 убывает монотонно, то в промежутке $(0, \xi_1)$ концы отрезка LM на фиг. 2 попадают на ребро шестиугольника FA сразу из жесткой области, и мы можем интегрировать во времени выражение $W' = A\xi$; в результате получим $W = A\xi$. Так как в режимах $FA - FA$ имеем $k_1^{\pm} - k_2^{\pm} = 1$, то на основании соотношения (1.5) находим, что $t_1 - t_2 = 1$, $m_1 = m_2$ при $0 \leq \xi < \xi_1$. Интегрируя теперь уравнение (1.4), получим:

$$m_1 = B\xi - \alpha^2 Q^* \xi^2, \quad (2.1)$$

где B — постоянная интегрирования, $Q^* = Q + t_1 - 1$.

Что касается промежутка $(\xi_1, 1)$, то здесь выполняются условия $k_1^- = 0$, $k_2^- = -1$, $k_1^+ - k_2^+ = 1$, и в силу (1.5) имеем $m_1 = m_2 = t_1 + t_2 = \text{const}$. Интегрирование уравнения (1.4) при условии $W(1) = W_0$ дает

$$W = W_0 - \frac{\alpha^2}{2t_1} Q^* (1 - \xi)^2. \quad (2.2)$$

Выполняя условия непрерывности величин W , W' , m_1 , m_1' при $\xi = \xi_1$, находим, что

$$A = \frac{1 - \xi_1}{\xi_1^2}, \quad B = \frac{2t_1}{\xi_1}, \quad W_0 = \frac{1}{2\xi_1^2} (1 - \xi_1^2), \\ Q^* = \frac{t_1}{\alpha^2 \xi_1^2}. \quad (2.3)$$

Из формул (2.3) вытекает, что сделанное выше допущение об убывании величины ξ_1 равносильно монотонному возрастанию безразмерного прогиба в центре оболочки W_0 . Исключая параметр ξ_1 из соотношений (2.3), находим окончательно

$$Q^* = (t_1/\alpha^2) (2W_0 + 1). \quad (2.4)$$

Формула (2.4) применима лишь, если выполняются неравенства $0 \leq m_1 \leq t_1$ при $0 \leq \xi < \xi_1$; но на основании формул (2.1) и (2.3) видим, что эти требования всегда удовлетворены. Кроме того, следует еще проверить выполняется ли при $\xi_1 < \xi \leq 1$ закон течения $e_{x^+} + e_{\varphi} = 0$, $e_{x^-} + \lambda e_{\varphi} = 0$, из которого в силу (1.6) — (1.7) находим, что

$$\lambda = -\frac{e_{x^-}}{e_{\varphi}} = 1 + h \frac{\kappa_x}{\varepsilon_{\varphi}} = 1 + \frac{1}{\alpha^2} \frac{W''}{W'}. \quad (2.5)$$

Будем истолковывать операцию (\cdot) как производную по убывающей величине $(1/\xi_1^2)$. Так как в силу (2.3)

$$W = 1/2(2\xi - \xi^2) (1/\xi_1^2) - 1/2,$$

то $W' = 1/2\xi(2 - \xi)$, $W'' = -1$. Имея в виду требование $0 \leq \lambda \leq 1$, приходим к неравенству

$$1/2\alpha^2\xi_1(2 - \xi_1) > 1. \quad (2.6)$$

Если решать задачу на основании «теории деформаций», то все выведенные соотношения остаются применимыми, кроме неравенства (2.6), которое следует заменить требованием

$$\alpha^2\xi_1(1 - \xi_1) > 1. \quad (2.6')$$

Второй тип. Постулируем теперь, что при $(0, \xi_1)$ имеем, как прежде, пластическое состояние $FA - FA$, а при $(\xi_1, 1)$ — состояние $EF - FA$. Из ассоциированного закона течения находим, что $\varepsilon'_x + \varepsilon'_q = 0$, $\kappa'_x = 0$ при $0 \leq \xi < \xi_1$ и $\varepsilon'_x = h/2\kappa'_x = = -1/2\varepsilon'_q$ при $\xi_1 < \xi \leq 1$. Учитывая формулы (1.7), получим для скорости безразмерного прогиба W' дифференциальные уравнения $W'' = 0$ при $0 \leq \xi < \xi_1$ и $W'' + \alpha^2 W' = 0$ при $\xi_1 < \xi \leq 1$. Интегрируя эти уравнения и удовлетворяя граничным условиям $W'(0) = 0$, $W'(1) = W'_0$ и $W''(1) = 0$, находим, что $W' = A\xi$ при $0 \leq \xi < \xi_1$ и $W' = W'_0 \cos[\alpha(1 - \xi)]$ при $\xi_1 < \xi \leq 1$. Требуя еще выполнение условия непрерывности величин W' и W'' в точке $\xi = \xi_1$, приходим к уравнению

$$\cot[\alpha(1 - \xi_1)] = \alpha\xi_1, \quad (2.7)$$

из которого можно определить ξ_1 . Так как величина ξ_1 не зависит от W'_0 и A , то во всех точках оболочки переход в режимы EF и FA происходит из жесткой области. Последнее обстоятельство дает возможность интегрировать закон течения, в результате чего получим

$$\begin{aligned} W &= A\xi & \text{при } 0 \leq \xi < \xi_1; \\ W &= W_0 \cos[\alpha(1 - \xi)] & \text{при } \xi_1 < \xi \leq 1. \end{aligned} \quad (2.8)$$

На основании формул (2.8) можно сделать вывод, что результаты, найденные на основании «теории деформаций» и «теории течения» в данном случае совпадают.

Перейдем теперь к определению величин t_2 , m_1 и m_2 . Величина m_1 в промежутке $(0, \xi_1)$ определяется опять соотношением (2.1). Так как при $\xi_1 < \xi \leq 1$ имеем $k_2 = -1$, $k_1^+ - k_2^+ = 1$, то $m_2 = 1 + t_2$, $m_1 - 2t_2 - t_1 + 2$, и интегрирование уравнения (1.4) дает

$$m_1 = C_3 \cos \alpha\xi + C_4 \sin \alpha\xi - t_1 \xi W' - 2Q^* + t_1. \quad (2.9)$$

Постоянные интегрирования B , C_3 , C_4 определим из условия непрерывности величин m_1 , m_1' при $\xi = \xi_1$; выполняя еще условие симметричности $m_1'(1) = 0$, получим

$$\begin{aligned} \frac{2 + \alpha^2 \xi_1^2}{t_1} Q^* = 1 + \alpha W_0 \left\{ \frac{1}{\sin[\alpha(1 - \xi_1)]} - \right. \\ \left. - \alpha \xi_1^2 \cos[\alpha(1 - \xi_1)] \right\} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Еще должны быть выполнены неравенства $k_1^\pm > 0$ при $(0, \xi_1)$ и $k_1^- < 0, k_1^+ > 0$ при $(\xi_1, 1)$. В силу (1.5) эти требования можно написать в форме

$$\begin{aligned} 0 \leq m_1 \leq t_1 & \quad \text{при} \quad 0 \leq \xi \leq \xi_1, \\ t_1 \leq m_1 \leq 1 - t_1 & \quad \text{при} \quad \xi_1 \leq \xi \leq 1. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Более детальный анализ показывает, что при $0 \leq \xi \leq \xi_1$ неравенства (2.11) всегда выполнены, а при $\xi_1 \leq \xi \leq 1$ функция $m_1(\xi)$ имеет максимум на крае $\xi = 1$. Последнее обстоятельство дает возможность заменить условия (2.11) более простым требованием

$$\begin{aligned} 1 \leq \frac{m_1(1)}{t_1} = 1 + 2 \frac{Q^*}{t_1} \left\{ \frac{1}{\cos[\alpha(1 - \xi_1)]} - 1 \right\} - \\ - \left(\frac{1}{\xi_1} - 1 \right) W_0 \leq \frac{1 - t_1}{t_1}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Третий тип. Из проведенных вычислений вытекает, что с увеличением прогибов при решении второго типа уже не выполняется неравенство $t_1 \leq m_1(1)$. Этот факт наводит на мысль искать решение задачи при помощи следующих состояний 1) $FA - FA$ при $0 \leq \xi < \xi_1$, 2) $EF - FA$ при $\xi_1 < \xi < \xi_2$, 3) $F - FA$ при $\xi_2 < \xi \leq 1$. В данном случае концы отрезка LN на фиг. 2 не достигают ребра шестиугольника из жесткой области, а возможен, например, переход от ребра FA к ребру EF . Такие переходы надо было бы учесть и при интегрировании закона течения, однако это привело бы к довольно сложным вычислениям. Кроме того, как показано в следующем параграфе, область применения рассматриваемого решения довольно узкая. Имея в виду эти обстоятельства, интегрируем основные уравнения проблемы лишь на основании «теории деформаций» (т. е. пренебрегаем влиянием сложного нагружения). Ограничиваемся при этом для краткости записи выписыванием основных результатов.

Величины W и m_1 определяются теперь формулами

$$\begin{aligned} W &= A\xi \quad \text{при} \quad 0 \leq \xi \leq \xi_1, \\ W &= C_1 \cos \alpha\xi + C_2 \sin \alpha\xi \quad \text{при} \quad \xi_1 \leq \xi \leq \xi_2, \\ W &= W_0 - \alpha^2 / (2t_1) Q^* (1 - \xi)^2 \quad \text{при} \quad \xi_2 \leq \xi \leq 1, \\ m_1 &= B\xi - \alpha^2 Q^* \xi^2 \quad \text{при} \quad 0 \leq \xi \leq \xi_1, \\ m_1 &= C_3 \cos \alpha\xi + C_4 \sin \alpha\xi - t_1 \xi W' - 2Q^* + t_1 \quad \text{при} \quad \xi_1 \leq \xi \leq \xi_2, \\ m_1 &= t_1 \quad \text{при} \quad \xi_2 \leq \xi \leq 1. \end{aligned}$$

Удовлетворением условий непрерывности величин W, W', m_1, m_1' при $\xi = \xi_1$ и $\xi = \xi_2$, а также условия $m_1(\xi_1) = t_1$ можем определить постоянные интегрирования A, B, C_1, C_2, C_3, C_4 . Кроме того, получим еще следующие уравнения:

$$\left[2(1 - K) + \alpha(1 - \xi_2)S \right] (K - \alpha\xi_1 S) - \alpha^2(\xi_2 - \xi_1)(1 - \xi_2) = 0, \quad (2.13)$$

$$\frac{t_1}{a\xi_1 Q^*} = a\xi_1 + \frac{1}{S} [2(1-K) + a^2(\xi_2 - \xi_1)(1 - \xi_2)] - \frac{a(1 - \xi_2)}{K - a\xi_1 S}, \quad (2.14)$$

$$W_0 = \frac{1}{t_1} Q^* a(1 - \xi_2) \left[\frac{a}{2} (1 - \xi_2) + \frac{S + a\xi_1 K}{K - a\xi_1 S} \right], \quad (2.15)$$

где обозначено $S = \sin [a(\xi_2 - \xi_1)]$, $K = \cos [a(\xi_2 - \xi_1)]$. Если считать величину ξ_2 заданной, то из системы (2.13) — (2.15) можем определить все интересующие нас величины ξ_1 , W_0 и Q^* . Кроме того, надо проверить, выполняются ли следующие неравенства: 1) $|m_1| \leq t_1$ при $0 \leq \xi < \xi_1$, 2) $t_1 \leq m_1 \leq 1 - t_1$ при $\xi_1 < \xi < \xi_2$, 3) $t_1 W_0 \geq [1 + 1/2 a^2 (1 - \xi_2)^2] Q^*$.

Четвертый тип. Рассмотренные выше случаи имеют место при $0 \leq t_1 \leq 0,5$. Переходим теперь к анализу случая $0,5 \leq t_1 \leq 1$. Здесь реализуется состояние $FA - FA$ при $0 \leq \xi < \xi_1$ и состояние $FA - A$ при $\xi_1 < \xi \leq 1$. Если предполагать, что в процессе нагружения величина ξ_1 постепенно уменьшается (такое допущение соответствует возрастанию прогиба W_0), то можно закон течения интегрировать. Удовлетворяя еще граничным условиям и условиям непрерывности при $\xi = \xi_1$, находим, что $a^2 \xi_1^2 Q^* = 1 - t_1$. Функции $W(\xi)$ и $m_1(\xi)$ определяются формулами

$$W = \frac{(1 - t_1)(1 - \xi_1)}{t_1 \xi_1^2} \xi, \quad m_1 = \frac{1 - t_1}{\xi_1^2} \xi (2\xi_1 - \xi) \quad \text{при } 0 \leq \xi < \xi_1,$$

$$W = \frac{1 - t_1}{2t_1 \xi_1^2} (2\xi - \xi^2 - \xi_1^2), \quad m_1 = 1 - t_1 \quad \text{при } \xi_1 < \xi \leq 1.$$

Переходя к величине $W_0 = W(1)$ и элиминируя параметр ξ_1 , получим

$$a^2 Q^* = 1 - t_1 + 2t_1 W_0. \quad (2.16)$$

Кроме того, должны бы быть выполнены в промежутке $(0, \xi_1)$ условие $|m_1| < t_1$ и закон течения $\lambda e'_{x^+} + e'_{\varphi} = 0$, $e'_{x^-} + e'_{\varphi} = 0$, но эти требования всегда выполнены. Решая задачу согласно теории деформаций, приходим опять к результату (2.16).

§ 3. Обсуждение результатов

Начнем наш анализ с предельного случая $t_1 = 0$; тогда реализуется решение второго типа и мы имеем $m_1 \equiv 0$, $Q^* = 0$; тот же самый результат получен в работе [9]. Если $t_1 > 0$, то область применения решения второго типа ограничена, так как неравенства (2.12) могут оказаться невыполненными. Подробный анализ показывает, что решение второго типа имеет место только при $t_1 < t_*$, $W_0 < W_*$. Если $W_0 = W_*$, то происходит пере-

ход к решению третьего типа. Из проведенных вычислений вытекает, что при дальнейшем увеличении безразмерного прогиба величины ξ_1 и ξ_2 уменьшаются и, если $\alpha > 2$, то они при некотором значении $W_0 = W_{**}$ становятся равными, причем $\xi^* = \xi_1 = \xi_2 = 1/2 + \sqrt{1/4 - 1/\alpha^2}$. Величины t_* , W_* , W_{**} , ξ^* для некоторых значений параметра α даны в таблице 1. При $W_0 > W_{**}$ происходит переход к решению первого типа. Отметим еще, что из трех решений типов 1—3 наибольшую область применения имеет решение первого типа: единственным ограничением является здесь неравенство (2.6) или — в случае деформационной теории — неравенство (2.6').

Из сказанного следует, что при $0 < W_0 \leq W_{**}$ решение проблемы неединственно: с одной стороны возможно решение типа 1, с другой стороны решения типа 2 и 3. Однако из таблицы 1 вытекает, что решения 2—3 применимы лишь в случае более коротких оболочек; если $\alpha > 3$, то практически уже реализуется только решение типа 1. Кроме того, расчет, выполненный при $\alpha = 2$ показал, что в случае решений 1 и 3 графики функций $Q^* = Q^*(W_0)$, $W = W(\xi)$, $m_1 = m_1(\xi)$ почти полностью совпадают; что касается решений 1 и 2, то здесь получено хорошее совпадение с диаграммой $Q^* = Q^*(W_0)$, но небольшие различия появляются в случае функций $W = W(\xi)$, $m_1 = m_1(\xi)$.

Применяемость рассмотренных решений зависит и от величины параметра α . Из неравенств (2.6) и (2.6') явствует, что первый тип решения возможен лишь при $\alpha > \sqrt{2}$ (по теории течения) или при $\alpha > 2$ (по теории деформаций). Решения второго и третьего типов имеют место при $\alpha > \pi/2$, так как в противном случае уравнение (2.7) не имело бы в промежутке $0 < \xi < 1$ корня. Что касается решения типа 4 (случай $t_1 > 0,5$), то здесь никакого ограничения не поставлено и, следовательно, это решение существует для оболочки любой длины.

В случаях 1, 2 и 4 результаты, найденные на основании теории течения и теории деформаций полностью совпали. Различие между обоими теориями выяснилось только при решении типа 3. Но имея в виду, что область применения этого решения довольно узкая, приходим к выводу, что у достаточно длинных оболочек ($\alpha \gtrsim 3$) влияние сложного нагружения незначительное.

Основываясь на вышесказанное, можно рекомендовать произвести расчет растянуто-изогнутых оболочек по формулам (2.4) и (2.16), из которых вытекает, что безразмерная нагрузка Q возрастает пропорционально безразмерному прогибу W_0 .

§ 4. Учет влияния упругих деформаций

С целью оценить влияние упругих деформаций на несущую способность оболочки, была решена и упруго-пластическая за-

дача. Для простоты будем считать коэффициент Пуассона равным половине и ограничиваться лишь случаем² $t_1 = 0$. Данная работа не ставит себе целью дать исчерпывающий анализ всех возможных случаев; рассматриваются лишь оболочки, которые при $(0, \xi_*)$ деформируются упруго, а при $(\xi_*, 1)$ находятся в пластическом состоянии $EF - FA$ (см. фиг. 2).

В упругой области имеем

$$t_2 = -W_*, \quad m_1 = -\frac{2}{3\alpha^2} W_*'' \quad \left(W_* = \frac{Eh}{\sigma_s R} W \right). \quad (4.1)$$

Уравнение равновесия оболочки (1.4) получает теперь вид $W_*^{IV} + 3\alpha^4 W_* = 3\alpha^4 Q$; интегралом которого является

$$W_* = C_1 \operatorname{ch} \gamma \xi \cos \gamma \xi + C_2 \operatorname{sh} \gamma \xi \sin \gamma \xi + \\ + C_3 \operatorname{ch} \gamma \xi \sin \gamma \xi + C_4 \operatorname{sh} \gamma \xi \cos \gamma \xi + Q \quad (\gamma = \alpha \sqrt[3]{3/4}). \quad (4.2)$$

Переходим теперь к анализу упруго-пластической области $(\xi_*, 1)$. Полные деформации состоят из упругих и пластических составляющих:

$$e_x^\pm = e_{x(y)}^\pm + e_{x(n)}^\pm, \quad e_\varphi^\pm = e_{\varphi(y)}^\pm + e_{\varphi(n)}^\pm. \quad (4.3)$$

Пластические составляющие определим путем интегрирования закона течения $e_{x(n)}^- = 0$, $e_{x(n)}^+ + e_{\varphi(n)}^+ = 0$. Определяя упругие составляющие $e_{x(y)}^\pm$, $e_{\varphi(y)}^\pm$ из закона Гука, приходим на основании соотношений (1.6) и (4.3) к формулам

$$k_1^- = E/\sigma_s (\varepsilon_x - h/2 \kappa_x) - 1/2, \quad k_2^- = -1, \\ k_1^+ = 1/2 + E/\sigma_s (\varepsilon_x + \varepsilon_\varphi + h/2 \kappa_x), \\ k_2^+ = -1/2 + E/\sigma_s (\varepsilon_x + \varepsilon_\varphi + h/2 \kappa_x). \quad (4.4)$$

Исключая из этой системы величину ε_x , с учетом формул (1.5), (1.7) находим, что

$$t_2 = m_2 - 1 = -\frac{3}{4} - \frac{1}{4} W_* - \frac{1}{4\alpha^2} W_*'', \\ m_1 = \frac{1}{2} (1 - W_*) - \frac{1}{2\alpha^2} W_*''. \quad (4.5)$$

Уравнение (1.5) можно теперь написать в виде

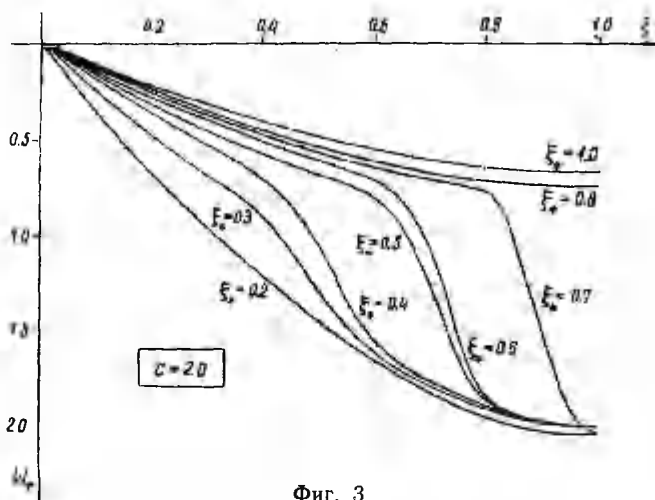
$$W_*^{IV} + 2\alpha^2 W_*'' + \alpha^4 W_* = (4Q - 3)\alpha^4, \quad (4.6)$$

которое имеет общий интеграл

$$W_* = (C_5 + C_6 \xi) \cos \alpha \xi + (C_7 + C_8 \xi) \sin \alpha \xi + 4Q - 3. \quad (4.7)$$

Удовлетворяя граничным условиям $W_*(0) = W_*''(0) = 0$, $W_*(1) = \Delta$, $W_*'(1) = W_*'''(1) = 0$, а также условиям непрерывности величин m_1 , W_* , W_*' , при $\xi = \xi_*$, приходим к системе

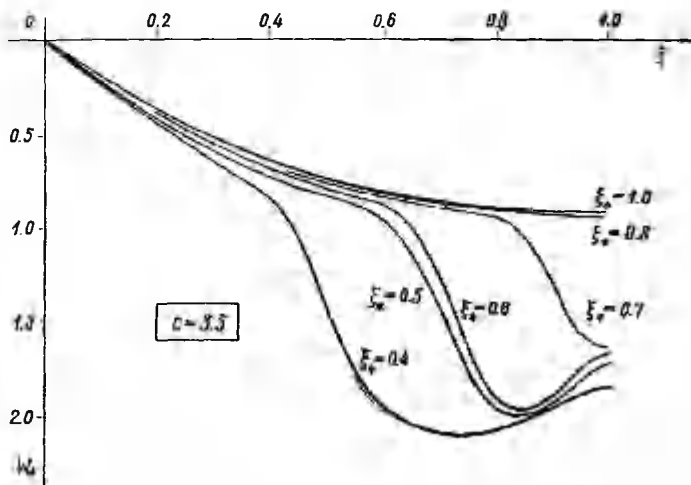
² Отметим, что та же задача для квадратичного условия пластичности в плоскости (t_1, m_1) решена в работе [12], где принимается в расчет и изотропное упрочнение.



Фиг. 3

уравнений, из которой можно при заданной ξ_p вычислить коэффициенты $C_1—C_8$ и величины Δ и Q . Так как эти формулы имеют довольно сложный вид, то мы их здесь выписывать не будем, а ограничимся лишь представлением численных результатов.

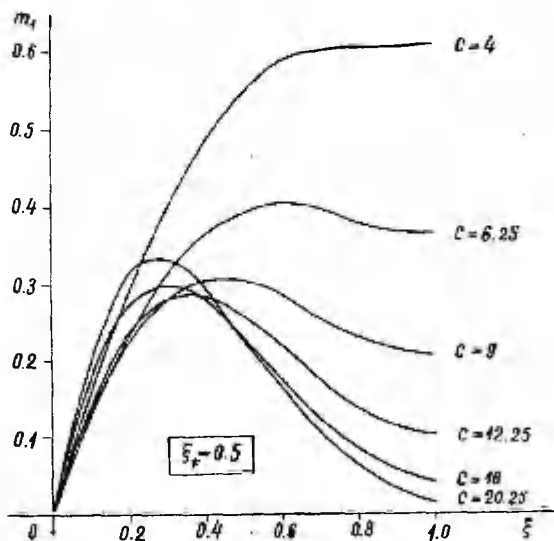
Изменение формы прогиба изогнутой оболочки с увеличением зон пластических деформаций для двух значений параметра $c = \alpha \sqrt{2}$ указано на фиг. 3 и 4. Из анализа этих чертежей



Фиг. 4

выясняется следующее интересное обстоятельство. При малораспространенных пластических деформациях ($\xi_* = 0,9$ и $\xi_* = 0,8$) величины прогибов почти не различаются от прогибов в момент возникновения первых пластических деформаций (что происходит при $\xi_* = 1,0$). При $\xi_* \approx 0,7$ происходит скачкообразное изменение формы кривой прогибов: прогиб в центре $\xi = 1$ резко увеличивается и вблизи центра возникает выпучина. При дальнейшем распространении пластических деформаций величина Δ изменяется уже сравнительно мало, а происходит существенное изменение формы кривой (наибольшие прогибы уже обязательно возникают в центре $\xi = 1$). Приблизительно та же картина имеет место и при других значениях параметра c .

Рассматриваемый вариант решения не позволяет исследовать поведение оболочки до полного перехода в пластическое состояние. Дело в том, что с уменьшением величины ξ_1 в центре оболочки $\xi = 1$ момент m_1 может превращаться в отрицательный, что не согласуется с выбранными нами пластическими режимами. Распределение безразмерного момента m_1 в оболочке при $\xi_* = 0,5$ показано на фиг. 5.



Фиг. 5

Зависимость безразмерной нагрузки Q от величины ξ_* , характеризующей распространение области пластических деформаций, указана в таблице 2. Из этой таблицы выясняется, что в момент достижения предельной упругой нагрузки (когда $\xi_* = 1$) начинается быстрый рост пластических деформаций, причем этот

процесс происходит при почти неизменяемой нагрузке, которая значительно меньше предельной нагрузки, предсказанной жестко-пластической теорией. Интересно отметить, что для жестко-заделанных оболочек такой эффект установлен и экспериментально в работе [4]. В последующей дискуссии относительно этой работы (ср. [5]) выдвинут ряд гипотез для выяснения этого «парадоксального» эффекта; но, имея в виду данные таблицы 2, этот результат вполне естественный (обстоятельство, что граничные условия в настоящей работе и в [4] различны, не должно было бы быть решающим, так как есть основание предполагать, что у достаточно длинных оболочек предельная нагрузка существенно не зависит от граничных условий).

Экспериментальное исследование цилиндрических оболочек с одним заделанным и с другим свободным концом и проведено в работе [6]. Интересно отметить, что, несмотря на различие в граничных условиях и в значении параметров c , кривые прогиба в [6] по общему виду напоминают кривые на фиг. 4 данной работы. Вследствие этого нельзя согласиться с утверждением авторов работы [6], что двухслойная модель не описывает правильно деформированную форму реальных оболочек.

Основные результаты данной работы опубликованы на английском языке в статье [10].

В заключение автор выражает благодарность И. Вайникко, Э. Перле и П. Пунгар за помощь при проведении вычислений.

Таблица 1.

α	t_*	ξ_1	W_*	ξ^*	W_{**}
1,8	0,397	0,5715	1,849	—	—
2	0,471	0,6846	0,535	0,5000	1,500
3	0,496	0,8791	0,145	0,8727	0,157
5	0,4995	0,9589	0,044	0,9582	0,045

Таблица 2.

ξ^* \ c	1,0	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2
2	0,799	0,818	0,788	0,771	0,762	0,759	0,760	0,764	0,773
2,5	0,792	0,763	0,748	0,742	0,741	0,744	0,750	0,757	0,768
3	0,792	0,776	0,769	0,768	0,772	0,780	0,792	0,813	
3,5	0,819	0,813	0,810	0,809	0,812	0,820	0,836		
4	0,858	0,858	0,856	0,853	0,851	0,855			
4,5	0,899	0,904	0,901	0,894	0,886	0,880			

³ Испытанные в работе [6] оболочки соответствовали значениям параметра $c = 8,95$ и $c = 13,4$.

Литература

1. Микеладзе М. Ш., Основные уравнения полубезмоментной теории цилиндрических ортотропных пластичных оболочек. Прикл. механ., 1965, **1**, 62—69.
2. Прагер В., Проблемы теории пластичности. Москва, 1958.
3. Ходж Ф., Панарелли И., Кривые нагрузки текучести Мизеса и Треска. Прикл. мех. (Труды Америк. Общ. Инж. Механиков). 1962, **E29**, 172—178.
4. Augusti, G., d'Agostino, S., Tests of cylindrical shells in the plastic range. J. Eng. Mech. Div. (Proc. Amer. Soc. Civil Engrs), 1964, **90**, № EM1, 69—81.
5. Augusti, G., d'Agostino, S., Tests of cylindrical shells in the plastic range (authors closure). J. Eng. Mech. Div. (Proc. Amer. Soc. Civil Engrs), 1965, **91**, № EM2, 70—74.
6. Freudenthal, A. M., Bieniek, M. P., Tests of cylindrical shells in the plastic range. Intern J. Mech. Sci., 1960, **2**, № 1—2, 128—130.
7. Hodge, P. G., Piecewise-linear bounds on the yield-point load of shells. J. Mech. Phys. Solids, 1963, **11**, № 1, 1—12.
8. Hodge, P. G., Rigid-plastic analysis of symmetrically loaded cylindrical shells. J. Appl. Mech., 1954, **21**, № 4, 336—342.
9. Lee, S. L., Thorn, B. I., Outer and inner bounds on Tresca limit loads of cylindrical shells. J. Franklin Inst., 1964, **277**, № 6, 517—533.
10. Lepik, Ü. Large deflections of rigid-plastic cylindrical shells under axial tension and external pressure. Nuclear Eng. and Design, 1966, **4**, 29—38.
11. Sawczuk, A., Hodge, P. G., Comparison of yield conditions for circular cylindrical shells. J. Franklin Inst., 1960, **269**, № 5, 362—374.
12. Thorn, B. J., Lee, S. L., Linear strain hardening of cylindrical shells. J. Engn. Mech. Div. (Proc. Amer. Soc. Civil Engrs), 1964, **90**, № 4, 97—122.

Поступило
18 II 1966

JÄIP-PLASTILISTE SILINDRILISTE KOORIKUTE SUURED DEFORMATSIOONID TELGTÖMBE NING VÄLISRÖHU ALL

Ü. Lepik

Resümee

Lähtudes Tresca voolamistingimusest ja assotsieeritud voolamiseadusest, on analüüsitud vabalt toetatud ideaalse kahekihilise silindrilise kooriku telgsummeerilisi deformatsioone. Koorikule on rakendatud ühtlane välisrõhk ja muutumatu telgtõmme. Läbipained on kooriku paksusega sama suurusjärku. Tehtud eelduste piires on saadud probleemile täpsed ning lõplikud lahendid.

Töös on vaadeldud ka elastilis-plastilisi koorikuid, mille puhul silindri telje sihiline koormus puudub. Arvutustest nähtub, et tunduvad plastilised deformatsioonid ilmnevad koorikus juba koormuse juures, mis vastab ülemineku puhelastsest seisundist elastilis-plastilisse. Saadud tulemusi on võrreldud olemasolevate eksperimentaalsete andmetega.

LARGE DEFLECTIONS OF RIGID-PLASTIC CYLINDRICAL SHELLS UNDER AXIAL TENSION AND EXTERNAL PRESSURE

Ü. Lepik

Summary

Using Tresca's yield condition and associated flow rule, axis-symmetric modes of deformation for sandwich type cylindrical shells with simply supported ends are studied. The shell under observation is loaded with external pressure and with a prescribed constant tensile end-load. Deflections may be of the same order as the thickness of the shell. Within the limits of the concept of a rigid-plastic body, exact and closed-form solutions are found. The applicability of the solutions obtained depending on the shell length and the end-load value is discussed.

The elastic-plastic problem is resolved for shells without an end-load. It turned out that considerable plastic deformations developed in the shell already under a load corresponding to a transition from a pure elastic state to an elastic-plastic one. This fact is compared with some experimental data available.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОСЛЕКРИТИЧЕСКОЙ СТАДИИ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ПЛАСТИН ПРИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ФОРМЕ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ

Э. Сакков

Кружок СНО при кафедре теоретической механики

В настоящей статье рассматривается поведение прямоугольной пластинки в закритической стадии в случае, когда потеря устойчивости происходит за пределом упругости. Учитывается и возможность возникновения зон упругого разгружения и вторичных пластических деформаций. Края пластинки считаются свободно опертыми или жестко заделанными. Поставленная задача решается методом последовательных приближений; при этом исходит из теории малых упруго-пластических деформаций и считается материал пластинки несжимаемым и имеющим линейное упрочнение.

Дифференциальное уравнение равновесия интегрируется методом Галеркина. Вычисления выполнены в Вычислительном центре Тартуского гос. университета на ЭЦВМ «Урал 4».

1. Постановка проблемы и основные соотношения

Рассмотрим прямоугольную пластинку с постоянной толщиной h и длиной l . Пусть координатные оси x и y лежат в срединной плоскости пластинки. Начало координат помещаем в угол края пластинки. Ось z направим по нормали к срединной плоскости, за ее положительное направление примем направление прогибов. Предположим, что пластинка достаточно длинная в направлении оси y и равномерно сжата в направлении оси x . Обозначим через P сжимающую силу, отнесенную к единице длины края. При определенном значении P пластинка теряет устойчивость. Допустим, что отношение длин краев таково, что выпучивание пластинки в направлении x происходит по одной поперечной линии. Изгиб пластинки при потере устойчивости и в закритической стадии будем считать цилиндрическим.

$$\frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial y^2} = -q + T_1 \kappa_1 + T_2 \kappa_2 + 2S \kappa_3, \quad (1.2)$$

б) уравнение совместности деформаций

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_3}{\partial x \partial y} = \kappa_3^2 - \kappa_1 \kappa_2. \quad (1.3)$$

В этих формулах символами ε_1 , ε_2 , ε_3 , κ_1 , κ_2 , κ_3 обозначены деформации и кривизны срединной поверхности пластинки, причем

$$\kappa_1 = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \kappa_2 = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \kappa_3 = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (1.4)$$

Усилия T_1 , T_2 , S и моменты M_1 , M_2 , H вычисляются по формулам:

$$T_1 = \int_{-h/2}^{h/2} X_x dz, \quad T_2 = \int_{-h/2}^{h/2} Y_y dz, \quad S = \int_{-h/2}^{h/2} X_y dz, \quad (1.5)$$

$$M_1 = \int_{-h/2}^{h/2} X_x z dz, \quad M_2 = \int_{-h/2}^{h/2} Y_y z dz, \quad H = \int_{-h/2}^{h/2} X_y z dz. \quad (1.6)$$

При цилиндрическом выпучивании $\kappa_1 = \kappa_1(x)$; $\kappa_2 = \kappa_3 = 0$. По условию задачи всякое поперечное сечение пластинки плоскостью $y = \text{const}$ остается плоским и после потери устойчивости, поэтому имеем $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(x)$, $\varepsilon_2 = \text{const}$, $\varepsilon_3 = 0$, и, следовательно, уравнение (1.3) выполняется автоматически.

В случае рассматриваемой задачи из первого уравнения системы (1.1) находим, что $T_1 = -P = \text{const}$, и уравнение (1.2) принимает вид:

$$\frac{d^2 M_1}{dx^2} - P \frac{d^2 w}{dx^2} = 0. \quad (1.7)$$

Условие для того, что вдоль оси y никаких сил приложено не было, имеет вид:

$$\int_0^l T_2 dx = 0. \quad (1.8)$$

Переходим к безразмерным величинам:

$$\xi = \frac{2x}{l}, \quad z^* = \frac{2}{h} z, \quad W = \frac{w}{h W_0}, \quad P^* = \frac{P l^2}{E h^3} \quad (1.9)$$

$$\varepsilon_1^* = \frac{l^2}{4h^2} \varepsilon_1, \quad \varepsilon_2^* = \frac{l^2}{4h^2} \varepsilon_2, \quad \kappa_1^* = \frac{-h}{2} \kappa_1.$$

Символом W_0 обозначено отношение $W_0 = \frac{f}{h}$, где f — стрела прогиба.

К уравнениям равновесия (1.1) и (1.2) прибавляются еще физические соотношения. В области активных деформаций имеем:

$$\begin{aligned} X_x - \frac{1}{2} Y_y &= E(1 - \omega) e_{xx}, \\ Y_y - \frac{1}{2} X_x &= E(1 - \omega) e_{yy}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Здесь $\omega = \lambda \left(1 - \frac{e_s}{e_i}\right)$ — модуль разупрочнения, e_i — интенсивность деформаций, e_s — интенсивность деформаций на пределе текучести.

Наряду с активными пластическими деформациями в пластинке могут возникнуть и зоны упругой разгрузки и вторичного догружения. Обозначим символами $X_x^0, Y_y^0, e_{xx}^0, e_{yy}^0$ критические значения напряжений и деформаций. По сделанной гипотезе с этих значений напряжений и деформаций в пластинке начинается разгрузка.

Введем еще напряжения и деформации некоторого фиктивного состояния формулами

$$\begin{aligned} X'_x &= X_x^0 - X_x, & Y'_y &= Y_y^0 - Y_y, & e'_{xx} &= e_{xx}^0 - e_{xx}, & (1.11) \\ e'_{yy} &= e_{yy}^0 - e_{yy}, & \varepsilon'_1 &= \varepsilon_1^0 - \varepsilon_1, & \varepsilon'_2 &= \varepsilon_2^0 - \varepsilon_2, & \kappa'_1 &= -\kappa_1. \end{aligned}$$

По теореме, доказанной для зоны разгрузки А. А. Ильиным [2] и обобщенной на область вторичных пластических деформаций В. В. Москвитиным [5], получаем:

$$\begin{aligned} X'_x - \frac{1}{2} Y'_y &= E(1 - \omega') e'_{xx}, \\ Y'_y - \frac{1}{2} X'_x &= E(1 - \omega') e'_{yy}. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Здесь $\omega' = \lambda \left(1 - \frac{2e_s}{e'_i}\right)$, где символом e'_i обозначена интенсивность деформаций фиктивного состояния.

Так как по гипотезам Кирхгофа $e_{xx} = \varepsilon_1 + z\kappa_1$, $e_{yy} = \varepsilon_2$, то система уравнений (1.12) получает после подстановок (1.11) следующий вид:

$$\begin{aligned} X_x - \frac{1}{2} Y_y &= X_x^0 - \frac{1}{2} Y_y^0 - E(1 - \omega') (\varepsilon_1^0 - \varepsilon_1 - z\kappa_1), \\ Y_y - \frac{1}{2} X_x &= Y_y^0 - \frac{1}{2} X_x^0 - E(1 - \omega') (\varepsilon_2^0 - \varepsilon_2). \end{aligned} \quad (1.13)$$

Эти уравнения представляют собой соотношения между компонентами напряжений и деформаций в зонах разгрузки и вторичных пластических деформаций (в зоне упругой разгрузки имеем $\omega' = 0$).

По примеру работ [3, 4] введем обозначения

$$\begin{aligned}
 z_0 &= -\frac{2}{h} \frac{P(\varepsilon, \kappa)}{P(\kappa, \kappa)}, & z_\varepsilon &= \frac{2}{h} \sqrt{\frac{P(\varepsilon, \varepsilon)}{P(\kappa, \kappa)}}, \\
 z_s &= \frac{\sqrt{3}}{h} \frac{e_s}{\sqrt{P(\kappa, \kappa)}}, \\
 z'_0 &= -\frac{2}{h} \frac{P(\varepsilon', \kappa')}{P(\kappa', \kappa')}, & z'_\varepsilon &= \frac{2}{h} \sqrt{\frac{P(\varepsilon', \varepsilon')}{P(\kappa', \kappa')}} \\
 z'_s &= \frac{\sqrt{3}}{h} \frac{2e_s}{\sqrt{P(\kappa', \kappa')}}.
 \end{aligned} \tag{1.14}$$

В этих формулах символами $P(\varepsilon, \varepsilon), \dots, P(\kappa', \kappa')$ обозначены биквадратичные формы

$$P(s, t) = s_1 \left(t_1 + \frac{1}{2} t_2 \right) + s_2 \left(\frac{1}{2} t_1 + t_2 \right).$$

Как известно, в случае плоского напряженного состояния выражение для интенсивности деформаций имеет следующий вид:

$$e_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{e_{xx}^2 + e_{xx} e_{yy} + e_{yy}^2}.$$

Пользуясь гипотезой Кирхгофа и обозначениями (1.14), получаем для реального и фиктивного состояний

$$\begin{aligned}
 e_i &= \frac{e_s}{z_s} \sqrt{z^{*2} - 2z_0 z^* + z_\varepsilon^2}, \\
 e'_i &= \frac{2e_s}{z'_s} \sqrt{z^{*2} - 2z'_0 z^* + z'_\varepsilon^2},
 \end{aligned} \tag{1.15}$$

Пусть будет $z^* = z_p$ уравнением, определяющим границу между зонами нагрузки и разгрузки. Уравнение граничной поверхности между зонами упругой разгрузки и вторичной нагрузки обозначаем через $z^* = z_b$. Так как мы допускаем, что разгрузка начинается с критических значений деформаций, то величину z_p можно определить из требования $e_i = e_{i0}$, где e_{i0} — интенсивность деформаций в момент потери устойчивости. По сделанному предположению материал пластинки подчиняется идеальному эффекту Баушингера, и, следовательно, величину z_b можно определить из условия $e'_i = 2e_s$.

В дальнейшем следует различать два случая: 1) Зона разгрузки примыкает к краю пластинки $z^* = 1$; тогда имеем следующее распределение зон: активные пластические деформации при $-1 \leq z^* < z_p$, упругая разгрузка при $z_p < z^* < z_b$, вторич-

ные пластические деформации при $z_b < z^* \leq 1$. 2) Разгрузка происходит вблизи края $z^* = -1$; тогда имеем следующие зоны: активные пластические деформации при $1 \geq z^* > z_p$, упругая разгрузка при $z_p > z^* > z_b$, вторичные деформации при $z_b > z^* \geq -1$.

Можно указать признак, позволяющий выяснить, у какого края пластинки при заданной x возникает зона разгрузки. Из первой формулы (1.15) находим, что $e_i^2(1) - e_i^2(-1) = -4e_s^2 z_0 z_s^{-2}$. Если в данной точке $z_0 > 0$, то $e_i(1) < e_i(-1)$ и, следовательно, разгрузка происходит у края $z^* = +1$; при $z_0 < 0$ разгрузка начинается вблизи края $z^* = -1$. Чтобы разработать оба случая вместе, будем в дальнейшем применять двойные знаки; условимся, что первому случаю (разгрузка начинается у края $z^* = 1$) соответствует всегда верхний знак, второму — нижний.

Из условий $e_i = e_{i0}$ и $e'_i = 2e_s$ находим, что

$$\begin{aligned} z_p &= z_0 \mp \sqrt{\left(\frac{z_0 e_{i0}}{e_i}\right)^2 + z_0^2 - z_s^2}, \\ z_b &= z'_0 \pm \sqrt{z_s'^2 + z'_0{}^2 - z'_s{}^2}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Следует отметить, что формулы (1.16) применимы только в случае, когда $|z_p| \leq 1$, $|z_b| \leq 1$. Если, вычисляя величины z_p и z_b по формулам (1.16), мы находим, что $|z_p| > 1$ или $|z_b| > 1$, то это соотношение следует заменить условием $|z_p| = 1$ или $|z_b| = 1$.

Имея в виду соотношения (1.10) (1.13) и (1.16), вычисляем интегралы (1.5) и (1.6). Сделав это, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{Eh} (T_1 - \frac{1}{2} T_2) &= \frac{1}{2} \varepsilon_1^0 [(\pm z_p - 1) \omega_0 + \Omega'_1] + \\ &+ (1 - \frac{1}{2} \Omega_1 - \frac{1}{2} \Omega'_1) \varepsilon_1 - \frac{1}{2} (\Omega_2 + \Omega'_2) \kappa^2, \end{aligned} \quad (1.17)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{Eh} (T_2 - \frac{1}{2} T_1) &= \frac{1}{2} \varepsilon_2^0 [(\pm z_p - 1) \omega_0 + \Omega'_1] + \\ &+ (1 - \frac{1}{2} \Omega_1 - \frac{1}{2} \Omega'_1) \varepsilon_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{4}{Eh^2} (M_1 - \frac{1}{2} M_2) &= \frac{1}{2} \varepsilon_1^0 [\pm (z_p^2 - 1) \omega_0 + 2\Omega'_2] - \\ &- \varepsilon_1 (\Omega_2 + \Omega'_2) + \left(\frac{2}{3} - \Omega_3 - \Omega'_3\right) \kappa^2, \end{aligned} \quad (1.18)$$

$$\frac{4}{Eh^2} (M_2 - \frac{1}{2} M_1) = \frac{1}{2} \varepsilon_2^0 [\pm (z_p^2 - 1) \omega_0 + 2\Omega'_2] - \varepsilon_2 (\Omega_2 + \Omega'_2).$$

Смысл вышеупотребленных обозначений следующий:

1) разгрузка начинается у края $z^* = +1$ ($z_0 > 0$):

$$\Omega_i = \int_{-1}^{z_p} \omega z^{*i-1} dz^*, \quad \Omega'_i = \int_{z_b}^1 \omega' z^{*i-1} dz^* \quad (i = 1, 2, 3), \quad (1.19)$$

2) зона разгрузки примыкает к краю $z^* = -1$ ($z_0 < 0$):

$$\Omega_i = \int_{z_p}^1 \omega z^{*i-1} dz^*, \quad \Omega'_i = \int_{-1}^{z_b} \omega' z^{*i-1} dz^* \quad (i = 1, 2, 3). \quad (1.20)$$

Символом ω_0 обозначено значение параметра ω в критической точке.

Учитывая формулы (1.15) и (1.16), можем теперь вычислить интегралы (1.19)–(1.20):

$$\frac{1}{\lambda} \Omega_1 = 1 \pm z_p - z_s \Phi,$$

$$\frac{1}{\lambda} \Omega_2 = \pm \frac{1}{2} (z_p^2 - 1) - z_s [\pm f(z_p) \mp f(\mp 1) + z_0 \Phi], \quad (1.21)$$

$$\frac{1}{\lambda} \Omega_3 = \frac{1}{3} (1 \pm z_p^3) - \frac{1}{2} z_s [\pm (z_p + 3z_0) f(z_p) +$$

$$+ (1 \mp 3z_0) f(\mp 1) + (3z_0^2 - z_s^2) \Phi]$$

$$\frac{1}{\lambda} \Omega'_1 = 1 \mp z_b - z'_s \Phi',$$

$$\frac{1}{\lambda} \Omega'_2 = \pm \frac{1}{2} (1 - z_b^2) - z'_s [\mp f'(z_b) \pm f'(\pm 1) + z'_0 \Phi'], \quad (1.22)$$

$$\frac{1}{\lambda} \Omega'_3 = \frac{1}{3} (1 \mp z_b^3) - \frac{1}{2} z'_s [\mp (z_b + 3z'_0) f'(z_b) +$$

$$+ (1 \pm 3z'_0) f'(\pm 1) + (3z'^0_0 - z'^2_s) \Phi'].$$

В этих формулах

$$f(z^*) = \sqrt{z^{*2} - 2z_0 z^* + z_s^2}, \quad f'(z^*) = \sqrt{z^{*2} - 2z'_0 z^* + z'^2_s}. \quad (1.23)$$

Смысл символов Φ и Φ' следующий:

1) если $z_0 > 0$, тогда

$$\Phi = \ln \frac{f(z_p) + z_p - z_0}{f(-1) - 1 - z_0}, \quad \Phi' = \ln \frac{f'(1) + 1 - z'_0}{f'(z_b) + z_b - z'_0}. \quad (1.24)$$

2) если $z_0 < 0$, тогда

$$\Phi = \ln \frac{f(1) + 1 - z_0}{f(z_p) + z_p - z_0}, \quad \Phi' = \ln \frac{f'(z_b) + z_b - z'_0}{f'(-1) - 1 - z'_0}. \quad (1.25)$$

Можно доказать, что выражения, стоящие под логарифмами, не имеют отрицательных значений. Следовательно, формулы для определения величин Φ и Φ' имеют всегда смысл.

Переходим теперь к представлению основных уравнений проблемы. Уравнения (1.17) можно после исключения величины T_2 и подстановки $T_1 = -P$ привести к виду

$$\varepsilon_1^* + \frac{1}{2} \varepsilon_2^* = -\frac{3}{16} P^* \Omega_7 - \frac{W_0}{4} \Omega_8 W'' + \left(\varepsilon_1^{0*} + \frac{1}{2} \varepsilon_2^{0*} \right) \left[\omega_0 \left(\frac{1+z_p}{2} \right) - \frac{1}{2} \Omega'_1 \right] \Omega_7, \quad (1.26)$$

где

$$\begin{aligned} \Omega_7 &= \left(1 - \frac{1}{2} \Omega_1 - \frac{1}{2} \Omega'_1 \right)^{-1}, \\ \Omega_8 &= \Omega_7 (\Omega_2 + \Omega'_2), \\ \Omega_9 &= \frac{3}{4} [\Omega_7 (\Omega_2 + \Omega'_2)^2 + 2(\Omega_3 + \Omega'_3)], \\ W' &= \frac{dW}{d\xi}, \quad W'' = \frac{d^2W}{d\xi^2}. \end{aligned}$$

Из системы (1.18) определяем момент M_1 :

$$\begin{aligned} \frac{9J^2}{Eh^4} M_1 &= \frac{9}{4} \Omega_8 P^* - 4W_0 (1 - \Omega_9) W'' - \\ &- 12 \left(\varepsilon_1^{0*} + \frac{1}{2} \varepsilon_2^{0*} \right) \left[\omega_0 \left(\frac{1+z_p}{2} \right) (z_p \pm 1 + \Omega_8) - \right. \\ &\left. - \Omega'_2 - \frac{1}{2} \Omega'_1 \Omega_8 \right]. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Из уравнений (1.17) можно определить усилие T_2 . Из условия (1.8) вытекает, что

$$\begin{aligned} -\frac{1}{8} P^* + \varepsilon_2^* \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{2} \Omega_1 - \frac{1}{2} \Omega'_1 \right) d\xi - \\ - \varepsilon_2^{0*} \int_0^1 \left[\left(\frac{1+z_p}{2} \right) \omega_0 - \frac{1}{2} \Omega'_1 \right] d\xi = 0. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Уравнения (1.7), (1.26)–(1.28) составляют систему основных уравнений рассматриваемой задачи, которую решаем методом последовательных приближений.

2. Метод решения и численные результаты

Дифференциальное уравнение (1.7) вместе с условиями (1.26)–(1.28) позволяет найти связь между нагрузкой P^* и прогибом W_0 .

При интегрировании системы основных уравнений возникают серьезные трудности, так как уравнение (1.7) нелинейно и величины Ω_i , Ω'_i определяются только в ходе решения. Из-за этих затруднений наверно единственным способом решения проблемы является применение метода последовательных приближений. За первое приближение можно выбрать, например, решение, отвечающее критическому состоянию.

Для определения критической нагрузки исходим из уравнения устойчивости для пластинок сжатых в одном направлении (см., например, уравнение (8.143) в монографии [1]), которому после интегрирования по x можно придать вид:

$$(4 - 3\lambda - \omega_0) W'' + 9P_0^* W = C. \quad (2.1)$$

Равенство (2.1) представляет собой дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами при следующих граничных условиях:

1. Свободное опирание:

$$W(0) = M_1(0) = 0. \quad (2.2a)$$

2. Жесткое закрепление:

$$W(0) = W'(0) = 0. \quad (2.2b)$$

Из условия симметрии следует, что $W'(1) = 0$.

Решив уравнение (2.1), получаем для определения критической нагрузки P_0^* следующие уравнения:

1) Свободное опирание:

$$P_0^{*2} - \left[\frac{\pi^2}{9} (1 - \lambda) + \lambda\mu \right] P_0^* + \frac{\pi^2}{12} \lambda\mu (1 - \lambda) = 0. \quad (2.3a)$$

2) Жесткое закрепление:

$$P_0^{*2} - \left[\frac{4\pi^2}{9} (1 - \lambda) + \lambda\mu \right] P_0^* + \frac{\pi^2}{3} \lambda\mu (1 - \lambda) = 0. \quad (2.3b)$$

Символом $\mu = \frac{e_s l^2}{2}$ обозначен параметр, характеризующий гибкость пластинки.

Из двух корней квадратичных уравнений (2.3) нужно выбрать тот, который удовлетворяет неравенству $P_0^* \geq \mu$. В противном случае потеря устойчивости не происходила бы в области пластических деформаций.

Величину P_0^* можно определить и по-другому, исходя из уравнений (1.7) и (1.27). Так как мы считаем, что потеря устойчивости пластинки происходит при чисто пластических деформациях, то в критическом состоянии

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= \int_{-1}^{+1} \omega_0 dz^* = 2\omega_0, & \Omega'_1 = \Omega'_2 = \Omega'_3 = \Omega_8 = 0, \\ \Omega_2 &= \int_{-1}^{-1} \omega_0 z^* dz^* = 0, & \Omega_7 = (1 - \omega_0)^{-1}, \\ \Omega_3 &= \int_{+1}^{+1} \omega_0 z^{*2} dz^* = \frac{2}{3} \omega_0, & \Omega_9 = \omega_0.\end{aligned}\quad (2.4)$$

Учитывая эти соотношения, можно уравнение (1.7) привести к следующему виду:

$$(1 - \omega_0) W'' + \frac{9}{4} P_0^* W = C. \quad (2.5)$$

К этому уравнению прибавляются еще граничные условия (2.2). После решения уравнения (2.5) получаем:

1) Свободное опирание:

$$P_0^* = \frac{\pi^2}{9} (1 - \lambda) + \lambda \mu. \quad (2.6a)$$

2) Жесткое закрепление:

$$P_0^* = \frac{4\pi^2}{9} (1 - \lambda) + \lambda \mu. \quad (2.6b)$$

Различие в формулах (2.3) и (2.6) объясняется применением гипотезы, что разгрузка в пластинке начинается сразу после потери устойчивости.

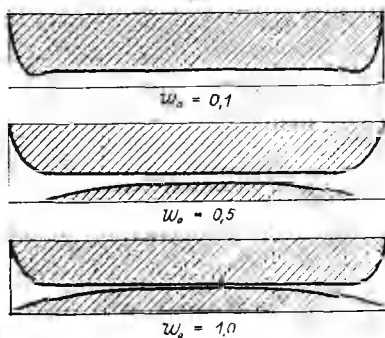
Уравнение (1.7) интегрируем методом Галеркина, принимая $W = W_0 \sin \frac{\pi}{2} \xi$ в случае свободного опирания и $W = -W_0 \frac{1 - \cos \frac{\pi \xi}{2}}$ в случае жесткого защемления.

Схема использования предложенного метода следующая: задаем значение прогиба в центре W_0 , определяем критические параметры и коэффициенты в уравнении (1.27). Как решение уравнения (1.7) получаем второе приближение нагрузки P^* . Уравнения (1.26) и (1.28) являются соотношениями для определения приближений величин ε_2^* и $\varepsilon_1^* + \frac{1}{2}\varepsilon_2^*$, необходимых для вычисления новых приближений для Ω_i , Ω'_i , z_p , z_b . Таким образом, через несколько шагов доходим до некоторого приближения нагрузки P^* , которое в рамках заданной точности не отличается от значения P^* , полученного в предыдущем этапе. Переходя к новому значению прогиба W_0 , будем для ускорения сходимости процесса исходить из состояния, отвечающего предыдущему значению параметра W_0 .

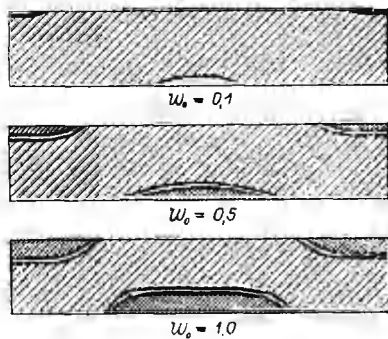
Для изучения поведения пластинки в закритической стадии и выяснения сходимости метода решения были выполнены вычисления на ЭЦВМ «Урал 4». Для параметра упрочнения λ было взято значение $\lambda = 0,95$. Некоторые результаты этих вычислений представлены на фиг. 2—5 и в таблицах 1—2. Диаграмма «нагрузка — прогиб» дана для свободного опирания на фиг. 4 и для жесткого закрепления на фиг. 5. Непрерывной линией отмечено решение, найденное, исходя из уравнений (2.3). Если в качестве первого приближения для нагрузки P^* взять P_0^* из уравнений (2.6), то получаем решение, которое отмечено прерывистой линией. Как видно из фиг. 4, совпадение обеих решений в случае свободного опирания довольно хорошее. Вычисления были проведены и для случая, когда возникновение зон разгрузки и вторичных пластических деформаций пренебрегалось. Различие между решениями в случае свободного опирания оказалось несущественным, решение чисто пластической задачи при жестком закреплении отмечено на фиг. 5 пунктирной линией.

Послекритической стадии прямоугольных пластинок и цилиндрических панелей посвящена работа [6], автор которой исходит из упрощающего допущения, что пластические свойства материала не изменяются по нормали пластинки. Если применить это допущение к рассматриваемой задаче, то получаем решение $P^* = P_0^* = \text{const}$. Как видно на фиг. 4 и фиг. 5 в данном случае это решение не описывает правильно поведения пластинки в закритической стадии.

Распределение зон пластических деформаций в сечении пластинки дается на фиг. 2 и 3 (зоны пластических деформаций отмечены штриховкой). Диаграмма 2 изображает распределение зон в свободно опертой пластинке ($\mu = 0,3$) и фиг. 3 в жестко заделанной пластинке ($\mu = 0,4$). Из проведенных вычислений выяснилась хорошая сходимость метода; для того, чтобы найти безразмерную нагрузку с точностью до $\pm 0,0001$, было нужно в среднем шесть приближений.



Фиг. 2 ($\mu = 0,3$)



Фиг. 3 ($\mu = 0,4$)

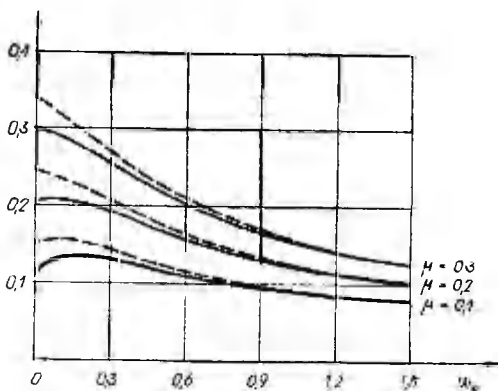
Свободное опирание

W_0	P^*					
	P_0^* определена из (2.3)			P_0^* определена из (2.7)		
	$\mu = 0,1$	$\mu = 0,2$	$\mu = 0,3$	$\mu = 0,1$	$\mu = 0,2$	$\mu = 0,3$
0	0,1162	0,2071	0,3003	0,1498	0,2448	0,3398
0,1	0,1297	0,2094	0,2902	0,1555	0,2368	0,3168
0,2	0,1315	0,2021	0,2719	0,1515	0,2235	0,2927
0,3	0,1272	0,1910	0,2538	0,1411	0,2079	0,2708
0,4	0,1203	0,1784	0,2343	0,1301	0,1911	0,2483
0,5	0,1136	0,1661	0,2170	0,1201	0,1755	0,2275
0,6	0,1073	0,1549	0,2011	0,1118	0,1619	0,2092
0,7	0,1019	0,1452	0,1873	0,1049	0,1504	0,1935
0,8	0,0972	0,1368	0,1753	0,0994	0,1407	0,1802
0,9	0,0933	0,1296	0,1650	0,0949	0,1326	0,1688
1,0	0,0900	0,1234	0,1561	0,0912	0,1257	0,1591
1,1	0,0871	0,1181	0,1484	0,0880	0,1199	0,1508
1,2	0,0847	0,1134	0,1416	0,0854	0,1150	0,1437
1,3	0,0826	0,1094	0,1358	0,0831	0,1106	0,1375
1,4	0,0807	0,1059	0,1306	0,8012	0,1069	0,1320
1,5	0,0791	0,1027	0,1260	0,0795	0,1036	0,1272

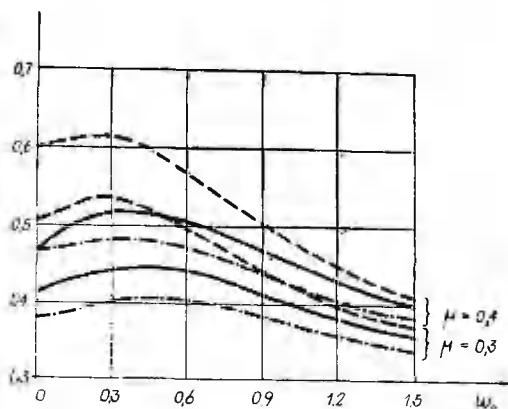
Таблица 2

Жесткое закрепление

W_0	P^*			
	P_0^* определена из (2.3)		P_0^* определена из (2.7)	
	$\mu = 0,3$	$\mu = 0,4$	$\mu = 0,3$	$\mu = 0,4$
0	0,3814	0,4648	0,5043	0,5993
0,1	0,4123	0,4952	0,5234	0,6024
0,2	0,4346	0,5115	0,5345	0,6163
0,3	0,4445	0,5196	0,5346	0,6143
0,4	0,4465	0,5192	0,5253	0,6025
0,5	0,4444	0,5139	0,5100	0,5846
0,6	0,4384	0,5048	0,4910	0,5635
0,7	0,4300	0,4930	0,4719	0,5410
0,8	0,4201	0,4800	0,4529	0,5188
0,9	0,4094	0,4664	0,4457	0,4977
1,0	0,3988	0,4529	0,4239	0,4782
1,1	0,3885	0,4400	0,4102	0,4604
1,2	0,3788	0,4270	0,3987	0,4444
1,3	0,3698	0,4164	0,3853	0,4300
1,4	0,3616	0,4059	0,3820	0,4170
1,5	0,3540	0,3962	0,3740	0,4054



Фиг. 4



Фиг. 5

Литература

1. Вольмир А. С., Устойчивость упругих систем. Москва, 1963.
2. Ильюшин А. А., Пластичность. Москва, 1948.
3. Лепик Ю. Р., О равновесии гибких пластинок за пределом упругости. Прикл. матем. и механика, 1957, 21, № 6, 833—842.
4. Лепик Ю. Р., Определение остаточного прогиба и остаточных усилий при разгрузении гибких упруго-пластических пластинок. Изв. АН СССР, Отд. техн. н., 1959, 3, 154—157.
5. Москвитин В. В., О вторичных пластических деформациях. Прикл. матем. и механика, 1952, 16, № 3, 118—129.
6. Божинський О. М., Стійкість та післякритичний стан циліндричних оболонки і пластинок за границю пружності. Прикл. механіка, 1963, 9, № 1, 39—46.
7. Pflüger A., Zur plastischen Knickung gerader Stäbe. Ingr. — Arch., 1952, 20, № 5, 84—99.

Поступило
28 X 1965

ELASTILIS-PLASTILISTE PLAATIDE PÄRASTKRIITILISE STAADIUMI ANALÜÜS SILINDRILISEL LÄBIPAINDEL

E. Sakkov

Resümee

Käesolevas töös on vaadeldud riskülikulise plaadi käitumist pärast kriitilises staadiumis, juhul kui stabiilsuse kadu toimub plastiliste deformatsioonide piirkonnas. Plaadi servad on vabalt toetatud või jäigalt kinnitatud. Püstitatud ülesanne lahendatakse järk-järgulise lähendamise meetodil. Lähtutakse väikeste elastilis-plastiliste deformatsioonide teooriast; plaadi materjal loetakse kokkumurumatuks ja lineaarselt kaldestuvaks.

Tasakaalu diferentsiaalvõrrand rahuldatakse Galjorkini meetodil. Numbriline arvutustöö on teostatud TRÜ arvutuskeskuses elektronarvutusmasinal «Ural-4»; saadud tulemused on esitatud tabelites 1—2 ja joonistel 2—5.

ANALYSIS OF THE POSTCRITICAL STAGE OF ELASTIC-PLASTIC PLATES IN THE CASE OF CYLINDRICAL BENDING

E. Sakkov

Summary

The behaviour of a rectangular plate that has lost its stability beyond the elastic limit is discussed. The problem posed is solved by the method of step-by-step computation. The theory of small elastic-plastic deformations is used. The material of the plate is regarded as being noncompressible and having linear strainhardening.

The differential condition of equilibrium has been satisfied by the use of the variational method of Galerkin. Numerical work has been carried out at the Computing Centre of Tartu State University. The numerical results obtained are shown in Tables 1—2 and Figures 2—5.

ОБ ИЗГИБЕ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН С УЧЕТОМ ТЕМПЕРАТУРНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

И. Вайникко

Кружок СНО при кафедре теоретической механики

В настоящей заметке рассматривается изгиб круглой пластинки из линейно-упрочняющегося материала при упруго-пластических деформациях. Сжимаемость материала учитывается лишь в области упругих деформаций. Ограничиваясь малыми прогибами пластинки, составляются дифференциальные уравнения равновесия, которые решаются приближенно методом Галеркина.

Рассмотрим круглую пластинку постоянной толщины h и радиуса b . Используем полярную систему координат r, φ, z , где r и φ в срединной поверхности, ось z перпендикулярна к ней и направлена к прогибу. Край пластинки $r = b$ будем считать защемленным; ограничимся случаем, когда радиальное перемещение на крае равняется нулю. Нас интересует величина прогиба пластинки, если кроме равномерно распределенной нагрузки в пластинке влияет еще температура, линейно изменяющаяся по толщине, т. е.

$$t = t_0 + zt_1. \quad (1)$$

Величины t_0 и t_1 считаем известными функциями радиуса.

В случае малых прогибов состояния деформации характеризуются следующими соотношениями:

$$e_1 = -z \frac{d^2 w}{dr^2}, \quad e_2 = -\frac{z}{r} \frac{dw}{dr}. \quad (2)$$

По гипотезе Дюгамеля—Неймана

$$e_1 = e_1^0 + \alpha t, \quad e_2 = e_2^0 + \alpha t, \quad (3)$$

где α — коэффициент линейного расширения.

Компоненты напряжения получаем из уравнений Генки—Ильюшина:

$$\begin{aligned} \sigma_1 - \sigma &= 2G(1 - \omega)(e_1^0 - e^0), \\ \sigma_2 - \sigma &= 2G(1 - \omega)(e_2^0 - e^0), \end{aligned} \quad (4)$$

где $\sigma = 1/3(\sigma_1 + \sigma_2)$ и $e^0 = 1/3(e_1^0 + e_2^0 + e_3^0)$. Будем считать, что процесс нагружения мало отличается от простого. (Иначе соотношения теории малых упруго-пластических деформаций не применимы).

В области пластических деформаций считаем материал несжимаемым, т. е. $e^0 = 0$, если $\nu = 0,5$. Модуль пластичности $\omega = 1 - \sigma_i/Ee_i$ легко определить, если известна характеризующая механические свойства материала диаграмма $\sigma_i = \Phi(e_i)$. В области пластических деформаций уравнения (4) имеют вид

$$\begin{aligned}\sigma_1^p &= \frac{4E(1-\omega)}{3} (e_1 + 0,5e_2 - 1,5at), \\ \sigma_2^p &= \frac{4E(1-\omega)}{3} (0,5e_1 + e_2 - 1,5at).\end{aligned}\quad (5)$$

В области упругих деформаций всегда $\nu \neq 0,5$, так как учитываем влияние сжимаемости материала. Так уравнения (4) примут вид

$$\begin{aligned}\sigma_1^e &= \frac{E}{1-\nu^2} [e_1 + \nu e_2 - (1+\nu)at], \\ \sigma_2^e &= \frac{E}{1-\nu^2} [\nu e_1 + e_2 - (1+\nu)at].\end{aligned}\quad (6)$$

В случае малых прогибов области пластических деформаций возникают симметрично от срединной поверхности. Пусть граница упругих и пластических деформаций задается уравнениями $z = \pm \eta(r)$. Тогда можем найти изгибающие моменты

$$\begin{aligned}M_1 &= \int_{-h/2}^{-\eta} \sigma_1^p z dz + \int_{-\eta}^{+\eta} \sigma_1^e z dz + \int_{+\eta}^{+h/2} \sigma_1^p z dz, \\ M_2 &= \int_{-h/2}^{-\eta} \sigma_2^p z dz + \int_{-\eta}^{+\eta} \sigma_2^e z dz + \int_{+\eta}^{+h/2} \sigma_2^p z dz.\end{aligned}\quad (7)$$

В области пластических деформаций согласно условию Мизеса имеем

$$e_i \geq \frac{\sigma_s}{E}. \quad (8)$$

Интенсивность деформаций в настоящем случае выражается формулой

$$e_i = \frac{2|z|}{\sqrt{3}} \sqrt{A}, \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned}A &= \left(\frac{d^2 w}{dr^2} \right)^2 + \frac{1}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} \frac{dw}{dr} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 + \\ &+ 3at_1 \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + at_1 \right).\end{aligned}$$

Если $e_i = \sigma_s/E$, то $|z| = \eta$. Отсюда получаем выражение для вычисления η :

$$\eta = \frac{\sqrt[3]{3}}{2} \frac{\sigma_s}{E \sqrt{A}}. \quad (10)$$

Допустим, что материал имеет линейное упрочнение, т. е. $\sigma_i e_i$ -диаграмму составляют две прямые; в этом случае

$$\omega = \lambda \left(1 - \frac{e_s}{e_i} \right), \quad (11)$$

где λ — модуль упрочнения, а e_s — значение интенсивности деформаций на пределе текучести.

Из непрерывности деформаций на границе $|z| = \eta$ областей упругих и пластических деформаций следует, что $\omega = 0$. Из этого условия видим, что

$$e_i = \frac{2\eta \sqrt[3]{A}}{\sqrt{3}}.$$

Подставим это в соотношение (11). Принимая во внимание (9), получаем

$$\omega = \lambda \left(1 - \frac{\eta}{|z|} \right), \quad \left(\eta \leq |z| \leq \frac{h}{2} \right). \quad (12)$$

Теперь подставим в формулы моментов изгиба (7) соответствующие напряжения (5) и (6). Учитывая соотношения (1), (2) и (12), получаем

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{E a_1}{9} [4(2+\lambda)\eta^3 - 3\lambda h^2 \eta - (1-\lambda)h^3] - \frac{2E b_1}{3(1-\nu^2)} \eta^3, \\ M_1 &= \frac{E a_2}{9} [4(2+\lambda)\eta^3 - 3\lambda h^2 \eta - (1-\lambda)h^3] - \frac{2E b_2}{3(1-\nu^2)} \eta^3, \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{2r} \frac{dw}{dr} + 1,5 a t_1, \\ a_2 &= \frac{1}{2} \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + 1,5 a t_1, \\ b_1 &= \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} + (1+\nu) a t_1, \\ b_2 &= \nu \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + (1+\nu) a t_1. \end{aligned} \quad (14)$$

Как видно, изгибающие моменты не зависят от t_0 . Ради простоты будем в дальнейшем считать эту величину равной нулю.

Как известно, уравнение равновесия круглой пластинки имеет вид

$$M_1 + r \frac{dM_1}{dr} - M_2 + \frac{qr^2}{2} = 0.$$

Заменим здесь моменты из выражения (13):

$$\begin{aligned} & \frac{E}{9} \left(a_1 - a_2 + r \frac{da_1}{dr} \right) [4(2 + \lambda)\eta^3 - 3\lambda h^3\eta - (1 - \lambda)h^3] - \\ & - \frac{2E}{3(1 - \nu^2)} \left(b_1 - b_2 + r \frac{db_1}{dr} \right) \eta^3 + \\ & + \frac{2Er}{3} \left[2(2 + \lambda)a_1\eta^2 - \frac{3}{(1 - \nu^2)} b_1\eta^2 - \frac{\lambda h^2}{2} a_1 \right] \frac{d\eta}{dr} + \\ & + \frac{qr^2}{2} = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Полученное уравнение (15) сопровождается краевыми условиями, которые в случае жестко заземленной пластинки имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dr} &= 0, & \text{при } r &= 0; \\ \omega &= 0, & \frac{dw}{dr} &= 0 \quad \text{при } r = b. \end{aligned} \quad (16)$$

Для интегрирования уравнения (15) применим метод Галеркина. Приближенное решение разыскиваем в виде

$$\omega = f \left(1 - \frac{r^2}{b^2} \right)^2, \quad (17)$$

удовлетворяющем краевым условиям (16). Постоянную f определим из условия, чтобы функция ω , подставленная в уравнение (15), ортогонализировала левую часть уравнения с координатной функцией $(1 - r^2/b^2)^2$:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left\{ \left\{ \frac{1}{9} [4(2 + \lambda)\eta^3 - 3\lambda\eta^2 - (1 - \lambda)] \left(32\omega_0 \rho^2 + 1,5 \rho \frac{dT}{d\rho} \right) + \right. \right. \\ & + \frac{2\rho}{3} \frac{d\eta}{d\rho} \left\{ \left[2(2 + \lambda)\eta^2 - \frac{\lambda}{2} \right] [2\omega_0(7\rho^2 - 3) + 1,5T] - \right. \\ & - \frac{3\eta^2}{1 - \nu^2} [[4\omega_0[(3 + \nu)\rho^2 - (1 + \nu)] + (1 + \nu)T]] \left. \left. \right\} - \right. \\ & - \frac{2\eta^3}{3(1 - \nu^2)} \left[32\omega_0 \rho^2 + (1 + \nu)\rho \frac{dT}{d\rho} \right] + \\ & \left. \left. + \frac{q^* \rho^2}{2} \right\} (1 - \rho^2)^2 d\rho = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь введены следующие безразмерные величины:

$$\rho = \frac{r}{b}, \quad \omega_0 = \frac{f}{h}, \quad \eta^* = \frac{\eta}{h}, \quad T = \frac{b^2 a t_1}{h}, \quad q^* = \frac{q b^4}{E h^4}.$$

В данном случае граница упругих и пластических деформаций определена соотношением

$$\eta^* = \frac{\sqrt[3]{3} \mu}{2 \sqrt{A^*}}, \quad (19)$$

где

$$\mu = \frac{\sigma_s b^2}{E h^2} \quad A^* = 16 \omega_0^2 (13 \rho^4 - 12 \rho^2 + 3) + 24 T \omega_0 (2 \rho^2 - 1) + 3 T^2.$$

В данном сечении по нормали возникают пластические деформации, если $0 \leq \eta^* < \frac{1}{2}$, а если же $\eta^* = \frac{1}{2}$, то данное сечение деформируется упруго.

В практике представляет интерес найти соотношения между величинами ω_0 , T , q^* и μ , причем нужно определить и области распространения упругих и пластических деформаций. Эти соотношения можно получить следующим образом. Задаем ω_0 , T и μ и определим затем q^* из уравнения (18). Прделав это для достаточного количества значений ω_0 , T и μ , зависимость между ω_0 , T , q^* и μ можно задать, например, графически. Такой подход имеет то преимущество, что q^* , в отличие, например, от ω_0 , из (18) легко вычисляется.

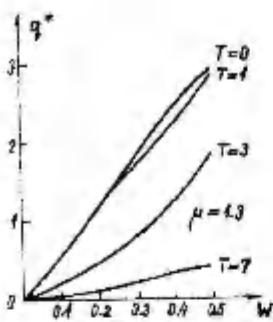
Соответствующие расчеты проводились на ЭВМ «Урал-4». Значение интеграла в уравнении (18) вычислено по формуле Симпсона.

Полученные результаты, т. е. значения безразмерной нагрузки, даны в таблицах 1, 2 и 3. В таблицах 1 и 2 величина $T = \text{const}$, а в таблице 3 учитывается изменение температуры в радиальном направлении: $T = T^* \rho$.

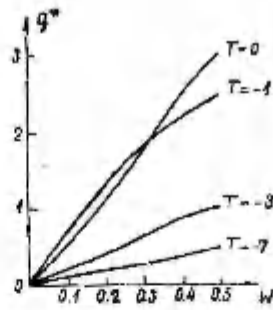
В качестве примера рассмотрим случай, когда $\mu = 1,3$. Соотношение между прогибом ω и нагрузкой q^* при постоянной температуре дано на рисунках 1, 2 и 3. Распространение соответствующих областей пластических и упругих деформаций изображено на рисунках 5а, когда $T = 0$; 5б, когда $T = 1,0$; 5в, когда $T = -1$ и 5г, когда $T = -\rho$. В случае, представленном на рисунке 5б, очевидно имеет место разгрузка, так как при повышении температуры в окрестности центра пластины область пластических деформаций исчезает. Поскольку использованная теория справедлива только в случае простой нагрузки, то к полученным результатам нужно относиться с осторожностью.

На рисунке 4 даны соотношения между температурой и прогибом при постоянной нагрузке. Эти соотношения получены с помощью линейной интерполяции из результатов вычислений.

Поступило
5 XI 1965



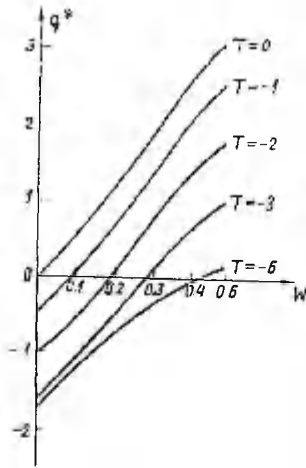
Фиг. 1



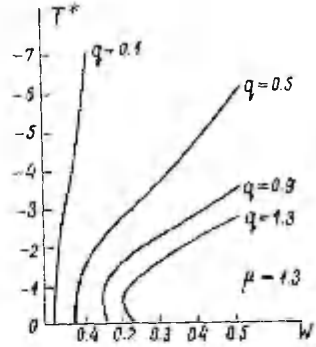
Фиг. 2

Таблица 1

Γ	0	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0
w								
$\mu = 0,05$								
0,1	0,205	0,048	0,042	0,040	0,039	0,038	0,038	0,037
0,2	0,242	0,101	0,084	0,079	0,077	0,076	0,075	0,075
0,3	0,278	0,318	0,125	0,119	0,116	0,114	0,113	0,112
0,4	0,314	0,385	0,170	0,159	0,155	0,152	0,150	0,149
0,5	0,349	0,418	0,256	0,200	0,193	0,190	0,188	0,187
$\mu = 0,3$								
0,1	0,617	0,149	0,076	0,061	0,055	0,051	0,048	0,046
0,2	0,976	0,508	0,155	0,123	0,109	0,101	0,096	0,093
0,3	1,083	0,927	0,248	0,185	0,164	0,152	0,144	0,139
0,4	1,142	1,405	0,409	0,251	0,219	0,202	0,192	0,185
0,5	1,188	1,524	0,792	0,325	0,276	0,254	0,240	0,231
$\mu = 0,8$								
0,1	0,586	0,564	0,198	0,119	0,092	0,079	0,071	0,055
0,2	1,173	1,128	0,456	0,245	0,186	0,158	0,142	0,131
0,3	1,842	1,664	0,915	0,388	0,283	0,238	0,213	0,196
0,4	2,589	2,038	1,417	0,569	0,387	0,320	0,284	0,261
0,5	2,582	2,527	1,795	0,850	0,504	0,406	0,358	0,327
$\mu = 1,3$								
0,1	0,586	0,589	0,469	0,216	0,146	0,115	0,098	0,087
0,2	1,172	1,203	1,121	0,466	0,300	0,233	0,197	0,175
0,3	1,758	1,763	1,608	0,785	0,469	0,355	0,298	0,263
0,4	2,495	2,337	2,074	1,257	0,665	0,486	0,402	0,353
0,5	3,036	2,874	2,585	1,809	0,909	0,628	0,510	0,444



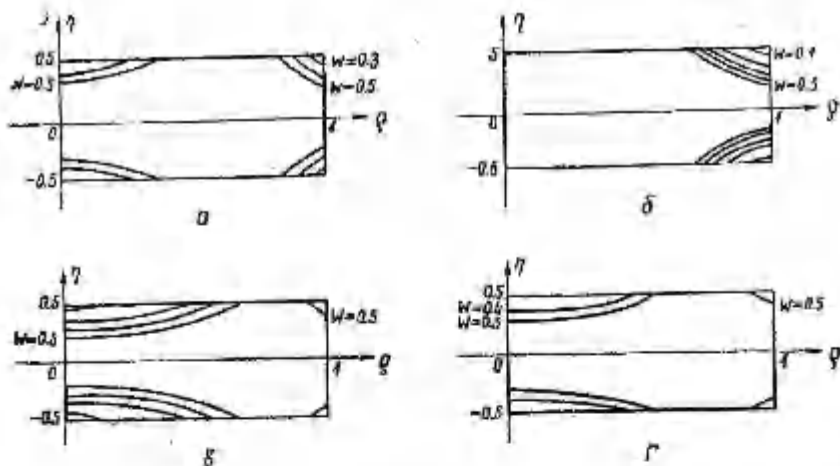
Фиг. 3



Фиг. 4

Таблица 2

T	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7
w								
$\mu = 0,05$								
0,1	0,205	0,050	0,042	0,040	0,039	0,038	0,038	0,037
0,2	0,242	0,105	0,085	0,080	0,078	0,076	0,075	0,075
0,3	0,278	0,164	0,130	0,121	0,117	0,115	0,113	0,112
0,4	0,314	0,220	0,176	0,162	0,156	0,153	0,151	0,150
0,5	0,349	0,271	0,223	0,204	0,196	0,192	0,189	0,187
$\mu = 0,3$								
0,1	0,617	0,134	0,077	0,062	0,055	0,051	0,048	0,046
0,2	0,976	0,292	0,159	0,126	0,111	0,103	0,097	0,093
0,3	1,083	0,462	0,250	0,193	0,169	0,155	0,147	0,140
0,4	1,142	0,614	0,350	0,264	0,228	0,209	0,196	0,188
0,5	1,188	0,738	0,456	0,339	0,289	0,263	0,247	0,236
$\mu = 0,8$								
0,1	0,586	0,515	0,181	0,117	0,093	0,080	0,071	0,066
0,2	1,173	0,877	0,364	0,237	0,187	0,160	0,144	0,132
0,3	1,842	1,171	0,559	0,362	0,284	0,242	0,217	0,200
0,4	2,289	1,459	0,767	0,496	0,385	0,327	0,292	0,268
0,5	2,582	1,684	0,978	0,639	0,491	0,415	0,368	0,337
$\mu = 1,3$								
0,1	0,586	0,644	0,377	0,201	0,143	0,114	0,098	0,088
0,2	1,172	1,307	0,724	0,400	0,285	0,230	0,197	0,176
0,3	1,758	1,780	1,056	0,601	0,431	0,347	0,297	0,265
0,4	2,495	2,186	1,354	0,811	0,581	0,467	0,400	0,356
0,5	3,036	2,513	1,649	1,029	0,738	0,591	0,505	0,448



Фиг. 5

Таблица 3

T	0	-1,0	-2,0	-3,0	-4,0	-5,0	-6,0	-7,0
ω								
	$\mu = 0,05$							
0	0	-0,053	-0,084	-0,114	-0,149	-0,184	-0,220	-0,256
0,1	0,205	0,019	-0,028	-0,067	-0,105	-0,143	-0,180	-0,217
0,2	0,242	0,080	0,018	-0,025	-0,065	-0,103	-0,141	-0,178
0,3	0,278	0,144	0,066	0,017	-0,024	-0,064	-0,102	-0,140
0,4	0,314	0,202	0,115	0,060	0,016	-0,024	-0,063	-0,102
0,5	0,349	0,252	0,165	0,104	0,058	0,016	-0,024	-0,063
	$\mu = 0,3$							
0	0	-0,405	-0,334	-0,336	-0,293	-0,312	-0,319	-0,340
0,1	0,617	0,069	-0,032	-0,079	-0,118	-0,155	-0,191	-0,227
0,2	0,976	0,315	0,106	0,026	-0,029	-0,076	-0,119	-0,160
0,3	1,083	0,518	0,223	0,112	0,043	-0,011	-0,059	-0,104
0,4	1,142	0,679	0,344	0,197	0,113	0,051	-0,001	-0,049
0,5	1,188	0,802	0,468	0,285	0,184	0,114	0,056	0,005
	$\mu = 0,8$							
0	0	-0,546	-1,012	1,036	-0,982	-0,943	-0,886	-0,800
0,1	0,586	0,065	-0,491	-0,532	-0,512	-0,533	-0,512	-0,532
0,2	1,173	0,711	0,081	-0,100	-0,173	-0,219	-0,255	-0,288
0,3	1,842	1,212	0,512	0,212	0,077	-0,006	-0,068	-0,121
0,4	2,289	1,579	0,831	0,441	0,258	0,146	0,065	0,000
0,5	2,582	1,835	1,104	0,648	0,416	0,278	0,181	0,104
	$\mu = 1,3$							
0	0	-0,521	-1,139	-1,500	-1,663	-1,647	-1,595	-1,496
0,1	0,586	0,065	-0,564	-1,083	-1,120	-1,157	-1,167	-1,136
0,2	1,172	0,651	0,032	-0,516	-0,683	-0,679	-0,783	-0,720
0,3	1,758	1,235	0,696	0,081	-0,170	-0,280	-0,344	-0,389
0,4	2,495	2,017	1,320	0,605	0,262	0,084	-0,027	-0,106
0,5	3,036	2,530	1,769	1,010	0,585	0,353	0,207	0,102

ÜMMARGUSTE ELASTILIS-PLASTILISTE PLAATIDE LÄBIPAINET TEMPERATUURIVALJAS

I. Vainikko

Resümee

Käesolevas artiklis vaadeldakse ümmarguse plaadi läbipainet elastilis-plastiliste deformatsioonide korral. Plastiliste deformatsioonide piirkonnas loetakse materjal kokkusurumatuks. Oletatakse, et plaadile mõjuvad ühtlaselt jaotatud koormus ja piki plaadi paksust lineaarselt muutuv temperatuur.

Koostatakse tasakaalu diferentsiaalvõrrandid, mis lahendatakse Galjorkini meetodil. Arvutused on teostatud TRÜ arvutuskeskuses elektronarvutusmasinal «Ural-4», saadud tulemused on esitatud tabelites 1—3 ja joonistel 1—5.

DEFLECTION OF CIRCULAR ELASTIC-PLASTIC PLATES IN THE TEMPERATURE FIELD

I. Vainikko

Summary

The problem of bending of circular clamped plates is discussed. There is considered the plate subjected to a uniformly distributed load and temperature, depending linearly upon z .

The differential equation of equilibrium has been derived and solved by means of the method of Galerkin. Numerical work has been carried out on a «Ural-4» electronic computer. The obtained numerical results are shown in Tables 1—2 and Figures 2—5.

СОДЕРЖАНИЕ — SISUKORD

А. Таутс. Определение значений истинности формулами	3
A. Tauts. Tõeväärtuste defineerimine valemitena. <i>Resümee</i>	8
A. Tauts. Das Definieren der Wahrheitswerte als Ausdrücke. <i>Zusammenfassung</i>	9
Ю. Лумисте. Расслояемые семейства 1-пар четырехмерного проективного пространства	10
Ü. Lumiste. Ladenevad 1-paaride parved neljamõõtmelises projektiivses ruumis. <i>Resümee</i>	21
Ü. Lumiste. Stratifiable families of 1-pairs in four-dimensional projective space. <i>Summary</i>	21
Р. Муллари. Индикатрисы кривизных и огибающая нормальных плоскостей многомерной поверхности евклидова пространства. II	22
R. Mullari. Eukleidilise ruumi mitmemõõtmelise pinna kõverusindikaatorissid ja normaaltasandite mähispind. II. <i>Resümee</i>	36
R. Mullari. The curvature indicatrices and the envelope of normal spaces of a V_m in Euclidean R_n . II. <i>Summary</i>	36
Л. Туулметс. Вторая средняя огибающая изотропной конгруэнции в R_4	37
L. Tuulmets. Isotroopse kongruentsi keskmähispind ruumis R_4 . <i>Resümee</i>	43
L. Tuulmets. The second middle envelope of the isotropic congruence in R_4 . <i>Summary</i>	43
Э. Юримяэ. Об обобщении теоремы Мазура—Орлича	44
E. Jürimäe. Mazur-Orliczi teoreemi üldistusest. <i>Resümee</i>	48
E. Jürimäe. On generalization of a theorem of Mazur and Orlicz. <i>Summary</i>	49
Э. Реймерс. Континуальные методы суммирования	50
E. Reimers. Kontinuaalsed summeerimismenetlused. <i>Resümee</i>	88
E. Reimers. Continual methods of summability. <i>Summary</i>	88
Х. Тюрнпу. Множители суммируемости для методов Рисса	90
H. Törnpu. Summeeruvustegurid Riesz'i menetluste jaoks. <i>Resümee</i>	105
H. Törnpu. Summierbarkeitsfaktoren für das Rieszsche Verfahren. <i>Zusammenfassung</i>	105
М. Абель, Х. Тюрнпу. Множители ψ-сходимости	106
M. Abel ja H. Törnpu. ψ -koonduvustegurid. <i>Resümee</i>	120
M. Abel and H. Törnpu. On ψ -convergence factors. <i>Summary</i>	121
Т. Сырмус. Об абсолютной суммируемости простых и двойных последовательностей методами Хаусдорфа	122
T. Sõrmus. Harilike ja kahekordsete jadade absoluutsest summeeruvusest Hausdorffi menetlustega. <i>Resümee</i>	134
T. Sõrmus. Über absolute Limitierbarkeit der einfachen und Doppelfolgen nach dem Hausdorffschen Verfahren. <i>Zusammenfassung</i>	134
Л. Кивистик. Об одной задаче нелинейного планирования, связанной с многочленом	135

L. Kivistik. Ühest polünoomiga seotud mittelineaarsest planeerimis- ülesandest. <i>Resüme</i>	137
L. Kivistik. On a non-linear programming problem connected with a polynomial. <i>Summary</i>	137
Э. Вирма. О несущей способности прямоугольных пластинок	138
E. Virma. Ristkülikukujuliste plaatide kandevõimest. <i>Resüme</i>	144
E. Virma. On load-carrying capacity of rectangular plates. <i>Summary</i>	145
Ю. Лепик. Большие прогибы жестко-пластических цилиндрических оболочек при совместном действии осевого растяжения и внеш- него давления	146
Ü. Lepik. Jäip-plastiliste silindriliste koorikute suured deformatsioonid telgtõmbe ning välisrõhu all. <i>Resüme</i>	158
Ü. Lepik. Large deflections of rigid-plastic cylindrical shells under axial tension and external pressure. <i>Summary</i>	159
Э. Сакков. Исследование послекритической стадии упруго-пластических пластин при цилиндрической форме потери устойчивости	160
E. Sakkov. Elastilis-plastiliste plaatide pärast kriitilise staadiumi analüüs silindrilisel läbipaindel. <i>Resüme</i>	173
E. Sakkov. Analysis of the postcritical stage of elastic-plastic plates in the case of cylindrical bending. <i>Summary</i>	173
И. Вайникко. Об изгибе упруго-пластических круглых пластин с уч- том температурных напряжений	174
I. Väinikko. Ümmarguste elastilis-plastiliste plaatide läbipaine tempera- tuuriväljas. <i>Resüme</i>	182
I. Väinikko. Deflection of circular elastic-plastic plates in the tempera- ture field. <i>Summary</i>	182

ТРУДЫ ПО МАТЕМАТИКЕ И МЕХАНИКЕ
VII

На русском языке

Резюме на эстонском, английском, немецком языках

Ответственный редактор С. Барон

Корректор Л. Аболдуева

Сдано в набор 9/IX 1966 г. Подписано к печати 29. XII 1967 г. Печ. листов 11,5. Учетн.-издат. листов 12,1. Тираж 500 экз. МВ 11634. Типограф. заказ № 6717. Типографская бумага № 1 бум. фабрики «Кохила», 60 × 90/16.

Типография им. Хауса Хейдеманна, ЭССР, г. Тарту, ул. Юликооля, 17/19, II

Цена 85 коп.