

A  
25244 Lens.

TRÜ ♦ LUS

KONVERENTS

MATEMAATIKA

JA TEMA

RAKENDUSALAD



A-25244 IV

TARTU RIIKLIK ÜLIKOOI  
ENSV TA LOODUSUURIJATE SELTS

TEADUSLIK KONVERENTS

"KAASAEGNE MATEMAATIKA JA TEMA

RAKENDUSALAD"

3. - 5. maini 1963

Tartu 1963

Тартуский государственный университет  
ЭССР, Тарту, ул. Эликооли, 18

НАУЧНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ  
СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА И ОБЛАСТИ ЕЁ  
ПРИМЕНЕНИЯ

На эстонском языке

Vastutav toimetaja A. Oja

Korrektor A. Norberg

-----  
TRÜ rotaprint 1963. Trükiplaanid 6,5.

Arvutusplaanid 3,6. Trükiarv 300.

MB 03268. Tell. nr. 1007.

Hind 11 kop.

2

TARTU ÜLIKOOLI  
RAAMATUKOGU

200847

Põllumajanduslike kultuuride fotosünteesi  
ja kiirgusrežiimi matemaatiline teooria

J. Ross

ENSV TA Füüsika ja Astronoomia Instituut

Põllumajandusliku kultuuri (resp. taimkatte) kui optiliselt anisotroopse ja statistilise bioloogilise keskkonna fotosünteesi summaarne intensiivsus Eesti kliimatilistes tingimustes limiteeritakse peamiselt keskkonna temperatuuriga ja keskkonnas neeldunud fotosünteesiliselt aktiivse kiirgusenergia hulgaga.

Kiirgusväli taimkattes on väga ebaühtlane ja tema täpsaks matemaatiliseks kirjeldamiseks tuleb kasutada intensiivsuste statistilisi jaotusfunktsioone. Ligikaudsel kirjeldamisel võib kiirgusvälja taimkattes jagada kaheks komponendiks: varju piirkond, kuhu ei tungi Päikese otsesed kiired ja heledad laigud, kus kiirguse intensiivsust mõõdetakse peamiselt Päikese otsese kiirgusega. Kiirgusvälja taimkattes on põhimõtteliselt võimalik määrata kahel viisil:

- a) eksperimentaalsete mõõtmiste teel,
- b) arvutuste teel, kiirguse transformatsioonivõrrandi lahendamise abil.

Taimkattes neeldunud kiirguse hulk sõltub:

- 1) taimkattele langeva kiirguse intensiivsusest, kestusest,

spektraalsest koosseisust ja kiirguse jaotusest suunda-  
de järgi,

- 2) taimkatet moodustavate biomassi elementide, peamiselt lehtede kui peamiste assimileerivate organite kogupinda-  
last, nende jaotusest kõrguse järgi ja pinnaelementide ruumilisest orientatsioonist,
- 3) biomassi elementide optilistest omadustest, peamiselt lehe spektraalsest neeldumiskoeffitsiendist.

Mingi taimkatte elemendi (lehe) fotosünteesi intensiiv-  
sus sõltub peamiselt neeldunud fotosünteesiliselt aktiivse  
kiirguse hulgast, temperatuurist ja tervest reast bioloogi-  
listest teguritest. Matemaatiliselt iseloomustatakse seda  
sõltuvust fotosünteesi funktsiooniga, mille uurimine on al-  
les algastmel.

On võimalik tuletada matemaatiline avaldis taimkatte  
summaarse fotosünteesi intensiivsuse määramiseks antud aja-  
hetkel. Integrides seda avaldist üle päeva, nädala, kuu jne.  
võime saada fotosünteesi summaarse intensiivsuse vastavate  
ajavahemike jaoks. Integreerimine eeldab kiirgusvälja, bio-  
massi optilisi omadusi, taimkatte geomeetrilist struktuuri  
ja fotosünteesi kirjeldavate matemaatiliste funktsioonide  
ajalise muutumise tundmist. Nende funktsioonide uurimine bio-  
loogias on alles algastmel ja seda tuleb forsseerida.

## Mõningaid rakendusmeteoroloogia küsimusi

H. Mürk

Tartu Riiklik Ülikool

Vaatamata kaasaja teaduse ja tehnika suurtele edusammudele ei ole ilmade mõju osatähtsus inimese tegevussfääris sugugi kahanenud, vaid koguni kasvanud. Selline paradoksaalne olukord on tingitud sellest, et teaduse ja tehnika arenguga on kasvanud nõudmine informatsiooni järele ilmade kohta - on kujunenud mitmeid uusi olukordi (näiteks õhu saastumine, põllumajanduse produktiivsuse suurendamine kliima ressursside ratsionaalse kasutamise teel, intensiivne ehitustegevus jne.), kus ilmade kohta vajatakse senisest täpsemaid ja ulatuslikumaid andmeid. Selliseid praktilise iseloomuga vajadusi rahuldab rakendusmeteoroloogia.

Seoses suurtööstuse, eriti keemiatööstuse kiire arenemisega on õhu saastumine tänapäeval tunduvalt kasvanud. Paljudes tööstusrajoonides on õhu saasta kontsentratsioon ligimetas sanitaarse normi ülempiirile; teatud ilmastikutingimuste juures aga ületab selle. Aatomienergiat tootva tööstuse arenemisega muutub õhu saastumise küsimus veelgi aktuaalsemaks.

Praegu on õhu saastumise küsimust juba hakatud uurima ja saavutatud mõningaid tagajärgi. Meteoroloogia seisukohalt tuleb lugeda nende lihtsustatud lahenduste puuduseks seda, et küsimuse komplitseerituse tõttu on loetud määrava tähtsusega meteoelementid ajaliselt muutumatuteks, mis aga ei vasta tegelikkusele. Samuti ei ole arvestatud kohalike füüsikalise-geograafiliste iseärasustega.

Meie kliima tingimustes on suure praktilise tähtsusega hoonete soojapidavus ja tuulesurvele vastupidavus. Laboratooriumi tingimustes määratud ehitusmaterjalide termilised karakteristikud, mida kasutavad projekteerijad, ei ole piisavad; looduslikes tingimustes tuleb arvestada meteoelemente, eriti tuule ja välise temperatuuri mõju soojuskadudele seinte kaudu. Projekteerijail tuleb silmas pidada eriti soojuskadusid infiltratsiooni teel.

Nagu möödunud talv näitas, esines Eesti NSV-s samal ajamomendil silmatorkavalt suuri temperatuuri erinevusi (üle  $10^{\circ}$ ). See viitab selgesti sellele, et samasuguse makrosünoptilise situatsiooni juures avaldavad lokaalsed iseärasused suurt mõju ilmale. Neid küsimusi meil sünoptika seisukohalt senini uuritud ei ole. Tulevikus peaks küll olukord kujunema selliseks, et üldise makrosünoptilise ennustuse taustal koostatakse väiksema ala kohalik ilma prognoos (eriti sademete ja temperatuuri miinimumi osas).

Rakendusmeteoroloogia küsimuste perspektiivikas lahendamise osutub võimalikuks, kui läheneda asjale atmosfäärifüüsika seisukohalt. Kuna nimetatud küsimused on väga komplitseeritud, on neid seaduspärasusi kirjeldavad

võrrandid üldisel juhul keerulised, ja nende lahendamisel on vajalik elektronarvutusmasinate kaasabi.

Rakendusmeteoroloogiale tuleb meil senisest suuremat tähelepanu pöörata; sellel on nii rahvamajanduslik kui ka teaduslik tähtsus.

#### Kirjandus.

1. Д. Л. Лайтман, Физика пограничного слоя атмосферы, Гидрометеиздат, Л. 1961.
2. Метеорология и атомная энергия. Перевод из англ. языка, Сборник, 1959.
3. Л. С. Гандин, О расчете теплоотдачи зданий в разных климатических условиях, Труды ГГО, вып. 55, 1955.
4. Л. Е. Анапольская и Л. С. Гандин, Методика определения расчетных скоростей ветра для проектирования ветровых нагрузок на строительные сооружения. "Мет. и Гидр." МГО, 1958.

# Õhuelektriliste vaatlusandmete töötlemisest

H. Marran

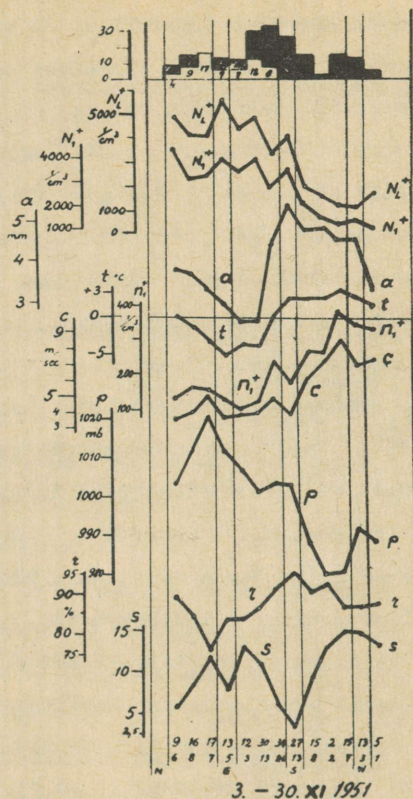
Tartu Riiklik Ülikool

Kaasaegse matemaatika rakendusala ei ulatu õhuelektriliste vaatlusandmete töötlemiseni. Matemaatilise statistika senised meetodid on siin rakendust leidnud peamiselt keskmiste statistika kujul ja kahe muutuja seoste tuletamisel. P.N. Tverskoi (1) on mineviku rohkearvulistele töödele toetuva kriitilise analüüsiga kinnitanud õhu ionisatsiooni ja meteoroloogiliste elementide vahelise seose otsimisel saadud tulemuste vasturääkivust (1). Omalaadsete teiste hulgas mainitagu A. Miti tööd (2), kus meteoroloogiliste elementidega seoste uurimisel on rakendatud üldist korrelatsioonimeetodit. Sama teed on umbes kümme aastat tagasi püüdnud käia ka nende ridade autor, kuid ei ole pidanud reaalseks seda seost, mis võidakse saada üksikkollektiivide aastakollektiiviks liitmise alusel. Põhikollektiiviks on autor pidanud kuuandmeid. Siit on mindud nihästi liitmise kui ka liigendamise teed. Töö tulemused on osaliselt trükitud (3).

1955.-1956. aastal oli autor korrelatsioonimeetodi rakendamisel jõudnud tööfaasini, kus vajati korrelatsiooniväljade koostamist ka vektorilise suuruse (tuul) jaoks. Teiste sõnadega, vajati kaheksaiooniligi seose uurimiseks tuu-

le suuna ja vastavaid korrelatsioonivälju. Mitte nähes korrelatsioonikoefitsiendi arvutamise võimalust selle suurusega ja pidades õigeks Ad. Schmidt'i väidet, et suunatud suuruste jaoks on korrelatsioonikoefitsiendi defineerimine põhimõtteliselt ekslik [4], ongi jäädud graafilise meetodi juurde. See meetod on mõeldud mitte ainult meteoelementide ja õhu ionisatsiooni vahelise mõju uurimiseks, vaid seoste uurimiseks dünaamiliste ridade vahel üldse.

Võtame nn. suundgraafiku 3.-30.XI 1951 (vt. joon.), millest siinkohal peatume ainult kahel ülemisel murdjoonel, nimelt  $N_2^*$  ja  $N_1^*$ . Need on raskete positiivsete ionide tihedused, s.t. ühes  $\text{cm}^3$  õhus sisalduvad ionide arvud.  $N_2^*$  on liikuvuse  $k$  ( $\text{cm}^2/\text{secv}$ ) vahemikus  $0,1 > k > 0,00025$  ja  $N_1^*$  -  $0,1 > k > 0,001$ . Nende murdjoonte üksiklõikudes nähtav pärisuunaline muutus on indikaatoriks, et korrelatsioon  $N_2$  ja  $N_1$  vahel on silmapaistvalt kõrge. Tegelikult on arvutatud lineaarse korrelatsiooni koefitsiendid  $N_2^*$  ja  $N_1^*$  vahel aasta esimese kolme kuu (I kvartal) ja järgnevate kuude (II, III, IV kvartal) andmetel: +0,93; +0,76; +0,87; +0,92 ja aasta kohta +0,92. Langevini ionide tihedus  $N_L$  ( $0,001 > k > 0,00025$ ) on otsese mõõtmise teel saadud andmete vahe  $N_2 - N_1$  ja on graafiliselt saadav ordinaatide vahena. Üllatavas pärikäigus on ka  $N_1$  ja  $N_L$ . Ja seda kõigil kuudel (!). Nagu see teisiti ei võigi olla, kinnitavad aasta kõigi 336 vaatluspäeva üksikvaatluste kujutused seda veenvalt. Siit järeldus: rasked ionid  $N_1$  ja  $N_L$  ehk poolrasked ionid ja Langevini ionid käituvad ühtviisi.



Ka teised näited demonstreerivad suundgraafikute tähtsust informatsiooni salvestajatena ja indikaatoritena üksikvaatluste uurimisel.

Tuntud uurija atmosfäärielektri alal H. Israel on öelnud, et keskmised olukorrad kujutavad igal juhul ainult abstraktsiooni, kuna seevastu igale üksikväärtusele kuulub füüsikaline reaalsus [5].

Käesoleva töö tähtsus seisneb katses viia uurimist üksikvaatlusteni selleks, et jõuda nähtustevaheliste oluliste seoste leidmiseni.

Kirjandus.

1. П. Н. Тверской, Атмосферное электричество, Ленинград 1949.
2. A. Mitt, Mollioonide kõikumine atmosfääris Tartus 1937.a. Tartu Riikliku Ülikooli Toimetised, Füüsika ja keemia 2, 1946.
3. H. Marran, Atmosfääri ioonide tiheduse ja meteoroloogiliste elementide vahelise seose uurimisest. Tartu Riikliku Ülikooli Toimetised, Nr. 59, 1958.
4. Ad. Schmidt, Zur Kritik des Korrelationsfaktors, Met.Zs. 1926, Heft 9.
5. H. Israël, Atmosphärische Elektrizität, Teil I, Leipzig, 1957.

Stellaarstatistika - matemaatilise  
statistika noor distsipliin

H. Belsalu

ENSV TA Füüsika ja Astronoomia Instituut

Tähestatistika kui statistilistele proovidele tugineva induktiivse menetluse Galaktika ehituse uurimiseks rajas W. Herschel XVIII sajandi lõpul. Stellaarstatistika astronoomilise sisu arenemine on toimunud ilma formaalset statistikaaparaati oluliselt vajamata. Tänapäeval on olukord muutumas. Stellaarstatistika spetsiifilise matemaatilise aparadi loomiseks on eelkõige vaja iseloomustada stellaarstatistikat matemaatilise statistika mõistete keeles.

Stellaarstatistikas käsitledavate statistiliste tunnuste üldarv on paarikümne ümber. Enamik tunnustest on pidevalt muutuva väärtusega, mõned aga ainult tüüpide jadasse klassifitseeritavad. Tunnustel kui tähtede ja tähtedevahelise aine elektromagneetilise kiirguse orientatsiooni, intensiivsuse ja spektri iseloomustajatel on piisavalt selge astronoomiline ja füüsikaline mõte. Tunnuseid kandvate objektide identifitseerimiseks meeltele tajutava ruumi mõiste alusel on stellaarastronoomias sündmused. Sündmust kui vaatlusakti võib lugeda seotuks ruumi heliotsentrilise koordinaadistikuga. Teiselt poolt, sündmuse kui Galaktika kirjjel-

damise akti loomulikuks ruumikoordinaadistikuks on galaktotsentriline koordinaadistik, mis põhineb Galaktika ilmsetel sümmeetriaomadustel. Heliotsentrilise koordinaadistiku najal korraldatakse kogu vaatlusandmestik. Vaatlusandmestikku kuuluvad statistilised tunnused jagunevad astromeetrilisteks ja astrofüüsikalisteks vaatlusandmeteks. Galaktotsentrilisele ruumikoordinaadistikule tuginevaid tunnuseid nimetatakse kirjeldavateks tunnusteks. Viimased jagunevad faasitunnusteks (ruumilis-kinemaatilised tunnused) ja morfoloogilisteks tunnusteks (näiteks objekti spektriomadused, mõõtmed ja mass).

Vaatlusandmestiku koordinaadistik, skaalad ja klassifikatsioonid moodustavad vaatlusandmestiku süsteemi. Analoogiliselt mõistetakse kirjeldavate tunnuste süsteemi. Vaatlusandmestiku süsteemi ja kirjeldavate tunnuste süsteemi vastastikune teisendamine on stellaarstatistika keskseks ülesandeks. Teisendus vaatlusandmestiku süsteemilt kirjeldavate tunnuste süsteemile kujutab enesest nii laboratoorselt kui ka päikesesüsteemi omadustega määratud mõõtmisühikute ülekandmist Galaktikale. Vastupidine teisendus määrab kanali informatsiooni saamiseks Galaktikast. Matemaatilises mõttes on Galaktika kui informatsiooniallikas esitatav gravitatsioonilise või laiemal juhul magnetogravitatsioonilise mudeliga stellaar-astronoomiliste sündmuste tõenäosuste jaoks. Sündmused, mis ei mahu mudeli raamidesse (ja mida seepärast tuleb fluktuatsioonidena skematiseerida), kujutavad enesest kosmilist müra informatsioonikanali galaktilises lülis. Informatsioonikanali järgmistes lülides - päikesesüsteemis ja vaatlusaparatuuris - tekib vaatluslik müra. Informatsiooni salvestamise

eelistatavaks vormiks on perfokaartide massiiv. Perfokaardid sobivad objektide individualiseeritud käsitamiseks, mida on vaja astronoomias näiteks objektide hierarhilise grupeeruvuse arvestamiseks või massiivi pidevaks täiendamiseks erinevatest observatooriumitest laekuva värskel informatsiooniga. Stellaarastronoomiline informatsioon töödeldakse statistiliselt vaatlusandmete väärtuste ja tüüpide tegelike esinemissageduste statistiliste proovide vormis.

Galaktika mudel kui informatsiooniallika mudel on sisuliselt võttes kirjeldavate tunnuste väärtuste ja tüüpide esinemissageduste skeem. Galaktika mudeli struktuuris sisaldub aga ka informatsioonikanali kosmilise lüli mudel, s.t. tunnuste süsteemide teisenduseeskiri, mille põhjal kirjeldavate tunnuste väärtuste ja tüüpide esinemissageduste skeem teisendatakse vaatlusandmete esinemissageduste statistiliseks prognoosiks. Statistilise prognoosi võrdlus statistiliste proovidega peab osutama, kui võrd usaldatav on kasutusel olev Galaktika mudel ja missuguseid edasisi vaatlusi on otstarbekas planeerida mudeli usaldatavuse määra suurendamiseks.

# Faktoranalüüsi rakendamisesest astronoomias

E. Tiit

ENSV TA Füüsika ja Astronoomia Instituut

Faktoranalüüsi kui sobivat matemaatilise statistika meetodit paljutunnuseliste statistiliste süsteemide mõjumehhanismide analüüsimiseks ning kirjeldamiseks on viimasel ajal rakendatud paljudes teadusharudes.

Olgu meil  $N$  indiviidist koosnev statistiline kollektiiv, milles teostame  $n$  mõõtmist. Mõõtmistulemuste maatriksiga  $\bar{X}$  on määratud ühtlasi maatriks  $X(x_{ij})$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ;  $j=1, 2, \dots, N$ );

$$x_{ij} = \frac{\bar{x}_{ij} - \bar{x}_i}{\sigma_i} ; \quad \bar{x}_i = \sum_{j=1}^N x_{ij} ; \quad \sigma_i = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^N (x_{ij} - \bar{x}_i)^2}{N-1}} .$$

Võttes aluseks loomuliku eelduse, et kõik mõõtmistulemused väljendavad mingi arvu  $l$ ,  $l < n$  sõltumatute faktorite mõju, milliste kohta meil mingeid hüpoteese ei ole tarvis teha; saame seose

$$X = AF + U,$$

kus lähtemaatriks  $X$  on avaldatud faktorite maatriksi  $F$  ja kordajate maatriksi  $A$  kaudu, kusjuures maatriks  $U$  väljendab seda osa tunnuste muutuvusest, mis ei ole kirjeldatav faktorite  $f_1, \dots, f_l$  abil, ning kannab omapära nimetust.

Rakendades operaatorit  $E: EY = \frac{1}{N} YY'$  saame arvestades  $U$  iseloomu

$$R = A(\text{cov } F)A' + \text{cov } U,$$

kus  $\text{cov } U$  on diagonaalmaatriks  $D$ , ehk, eeldades faktorite ortogonaalsust:  $\text{cov } F = E$  ja  $R - D = AA'$ .

Võttes aluseks tingimuse, et faktorid valime nii, et nende arv  $l$  oleks minimaalne, saame tingimuse maatriksi  $D$  jaoks: see tuleb valida nii, et maatriksi  $R-D$  astak, mis on samuti  $l$ , oleks minimaalne.

See tingimus määrab maatriksi  $A$  pöörde täpsusi. Edasi valime sellise pöördmaatriksi  $T$ , et maatriksis  $A_0(a_{ij}^0) \cdot TAT'$  oleks vastavalt etteantud  $\varepsilon$ -le maksimaalne arv selliseid elemente  $a_{ij}^0$ , mis rahuldavad tingimust  $|a_{ij}^0| \leq \varepsilon$ . Sellise maatriksi  $A_0$  puhul on hõlbus tõlgendada faktorite  $f_i$  tähendusi vastavalt katsete tegelikule sisule.

Meil oli vaatlusmaterjaliks 302  $M$ -kääbustähte, millel olid määratud järgnevad tunnused: absoluutne heledus  $M$ , näiv heledus  $m$ , ruumiline kiirus  $V$ , radiaalkiirus  $V_r$ , koordinaadid  $\alpha$  ja  $\delta$ , spektritüüp  $s$ , emissioonijoonte olemasolu  $e$  ja kaksiklus  $B$ . 128 tähel oli ka teada parallaks  $p$ . Spektritüüpi  $s$  kodeerisime 9-ühikulises skaalas, tunnused  $e$  ja  $B$  - kaheühikulises skaalas - tunnuse olemasolu või puudumine. Lisaks viisime sisse suurused  $V^2$  ja  $V_r^2$ , et kontrollida seoste võimalikku mittelineaarsust, mida aga tegelikult ei esinenud.

Arvutasime korrelatsioonid 12 tunnuse:  $m, M, s, e, p, V_r, V^2, V, V^2, \alpha, \delta$  ja  $B$  vahel 128-st tähest koosnevas alarühmas ning seejärel 11 tunnuse vahel (ilma tunnusetähta  $p$ ) kogu materjali kohta.

Esimeses rühmas saadud tulemused olid meile teatud määral kontrollmaterjaliks, kuid kuna saadud valik ei olnud juhuslik, muutusid korrelatsioonid suhteliselt palju, eriti tunnuse

e osas, mis meile pakkus suurimat huvi.

Üldiselt iseloomustas materjali asjaolu, et korrelatsioonid olid väikesed, osalt vaevu ületades usaldatavuse piire, mis seletub asjaoluga, et mitmete tunnuste puhul on teiste tunnustega ühiste faktoritega määratud osa suhteliselt väike.

Faktoranalüüsi teostamisel võtsime arvesse 7 tunnust:  $m, M, s, e, V_r^2, V$  ja  $B$  ning arvutasime 4 faktorit; neljas osutus aga juba tunnuse  $e$  spetsiaalfaktoriks, seega huvi pakuvad järgnevad pööratud faktorid:

$m$	-0,071	0,262	0,315	Esimene faktor on ilmselt seotud Russeli diagrammiga, määrates spektri ning absoluutse heleduse vahelise seose. Tunnuse $B$ erinevuse selles faktoris vajab veel lähemat uurimist.
$M$	0,729	-0,086	0,013	
$s$	0,844	-0,003	-0,074	
$e$	-0,023	-0,236	0,081	
$V$	-0,030	0,703	0,043	

Teine faktor, põhiliselt määratud kiirustega  $V$  ja  $V_2^2$  väljendab kiiruse  $V$  ning emissioonijoonte esinemise vahelist seost, millele ka astronoomiaalases kirjanduses on tähelepanu juhitud, ning mis kosmoloogiliste hüpoteeside põhjal väljendab tähtede vanust. Tunnuse  $m$  esinemine selles faktoris on osaliselt seletatav materjali kitsa valikuga, kuid vajab veel lähemat uurimist. Kolmandas faktoris väljendatud seosed vajavad samuti veel lähemat uurimist.

Lõpuks leiti ka kõikide indiviidide faktorikaalude maatriksseostest  $F = (A'A)^{-1}AX$ ,  $F = (f_{ij})$  ( $i=1,2,3$ ;  $j=1,2,\dots,N$ ) et neist  $f_{1j}$  iseloomustab  $j$ -nda tähe paiknemist Russeli diagrammil,  $f_{2j}$  aga teatud tinglikkusega  $j$ -nda tähe

he vanust.

Kokkuvõttes võiks märkida, et kuigi ilmnes, et materjal on faktoranalüüsiks mõnes mõttes vähesobiv, kinnitasid tulemused mõningaid varem tuntud hüpoteese (faktorite 1 ja 2 osas), ning püstitasid uusi probleeme eriti senini vähetuntud tunnuse 3 osas.

## Graafide teooria rakendusi

R. Noorma

Tartu Riiklik Ülikool

Paljudel aladel puutume kokku mitmesuguste võrkude, tabelite, diagrammide, graafikute jms., mida nende näilisest erinevusest hoolimata on võimalik uurida ühise teooria - graafide teooria abil.

Graafiks nimetatakse mittetühja hulka  $X$ , mille igale elemendile  $x$  on seatud vastavusse teatav hulga  $X$  alamhulk  $\Gamma_x$ .

Graafi võime vaadelda hulgast ja selle hulga kujutisest koosneva paarina  $G = (X, \Gamma)$ . Graafi geomeetriliseks interpretatsiooniks on võrk.

Toome näiteks mõned graafid. Olgu  $X$  Eesti NSV asustatud punktide hulk. Elemendile  $x$  vastavaks alamhulgaks  $\Gamma_x$  on selle punkti nende naaberpunktide hulk, mis on ühenduses  $x$ -ga. Selle graafi geomeetriliseks interpretatsiooniks on Eesti NSV teede kaart.

Olgu  $X$  kõigi inimeste hulk. Seades igale inimesele vastavusse tema laste hulga saame jällegi graafi.

Graafide teooriat on võimalik rakendada näiteks transpordivõrkude uurimisel. Nende võrkude puhul on tihti vaja määrata ekstremaalset läbilaskevõimet antud suunas. Aktuaalne on ka lühima tee määramise ülesanne.

Üheks huvitavaks ülesandeks on nn. liidri leidmise probleem, mis seisneb mõjukama isiku määramises mingis organisatsioonis, võitja leidmises võistlustel jms. Tavaliselt turniiridel kasutatav süsteem, kus liidetakse kokku võidupunktid ja määratakse selle põhjal mängijate paremusjärjestus, ei tarvitse alati anda õiget ülevaadet mängijate tegevusest. Määramatus tekib, kui kaks mängijat saavad võrdse arvu punkte. Graafide teooria võimaldab teatavas iteratsiooniprotsessis välja selgitada tõelise paremusjärjestuse. See on seotud maatriksi omaväärtuste leidmisega.

Graafide teooriaga on seotud veel nn. kaardivärvimise probleem, mis seisneb minimaalse arvu erinevate värvide leidmises nii, et riikide kaardi värvimisel naaberriigid oleksid erivärvilised.

Need on mõned näited graafide teooria paljudest võimalikest rakendustest.

#### Kirjandus.

К. Берг, Теория графов и ее применения, Издательство иностранной литературы, Москва 1962.

Paljutunnuseliste bioloogiliste süsteemide  
uurimisest matemaatiliste meetoditega

L. Võhandu

Tartu Riiklik Ülikool

Paljutunnuseliste süsteemide uurimiseks sobiva meetodi-  
ka valimine on küllalt raske ülesanne ja sõltub suurel mää-  
ral sellest, milline on uurija eesmärk. Üheks efektiivsemaks  
võtteks keeruliste süsteemide uurimisel on mitmesuguste mu-  
delite konstrueerimine.

Ettekandes kirjeldatakse ühe võimaliku mudelite klassi -  
statistiliste mudelite kasutamist nii tagasisideta kui ka ta-  
gasisidega süsteemide puhul.

Analüüsitakse tavaliste regressioonimudelite, faktor-  
analüüsi abil saadud mudelite ja põhjuslike regressioonimu-  
delite vahetõrki.

Lõpuks võrreldakse neid mudeleid klassikalises eksperimen-  
diseades sageli kasutatava dispersioonanalüütilise mu-  
deliga.

Vaatlusandmete töötlemisest  
ENSV TA Küberneetika Instituudi elektronarvutil

U. Oper

ENSV TA Küberneetika Instituut

Kõigil eksperimentaalsetel aladel puutub uurija kokku mahuka materjaliga, millest teda huvitavate seaduspärasuste väljalugemine ei ole vahetult võimalik. Vajalike arvutuste tegemine mehaaniliste vahenditega on aeganõudev, eriti matemaatilise statistika kaasaegsete meetodite rakendamisel. Seetõttu on vaatlusandmete ümbertöötamiseks hakatud kasutama elektronarvuteid.

Ka TA Küberneetika Instituudi elektronarvuti töömahust kulub suur osa vaatlusmaterjalide ümbertöötamisele. Arvutatakse statistika meetodites kasutatavaid põhisuurusi: aritmeetilisi keskmisi, standardhälbeid ja korrelatsioonikordajaid. Sageli on korrelatsioonimaatriksi leidmine küllaldane nähtuse esialgseks analüüsimiseks. Siin võivad leida kinnitust eksperimentaatori esialgsed oletused, kuid võivad ilmuda ka seaduspärasused, mis nõuavad katsete ümberkorraldamist.

Kui  $n$  tunnuse hulgast, mille väärtused on katsetel mõõdetud, on alust lugeda üht sõltuvaks teisest, siis võib leida selle sõltuvuse iseloomustamiseks mitmese regressiooni-

võrrandi

$$y = b_0 + b_1 x_1 + \dots + b_{n-1} x_{n-1} .$$

Kordajad  $b_0, \dots, b_{n-1}$  määratakse vähimruutude meetodil. Normaalkordajate süsteem lahendatakse järk-järgult: igal sammul leitakse ühe argumendi kordaja tunnuste mõju suuruse järjekorras sõltuvale muutujale. Siinjuures kontrollitakse F-kriteeriumi abil tunnuse mõju olulisust. Kordaja leitakse ainult neile parameetritele, mille toomine regressioonivõrrandisse oluliselt vähendab jääkdispersiooni. Igal sammul trükitakse välja lahenduse standardviga, regressiooni kuuluvate parameetrite kordajad, kordajate standardvead ning vabaliige.

Regressioonivõrrand ei tarvitse olla lineaarne, siin võivad esineda tunnuste astmed, logaritmid jms. Ka sõltuv muutuja ei tarvitse olla lihtsalt ühe tunnuse mõõtmise tulemus, vaid mitme meid huvitava tunnuse väärtuste ühendamisel saadud suurus, näiteks sobivate kordajatega võetud kvaliteedi- ja kvantiteedinäitajate summa tehnoloogilises protsessis.

Regressioonanalüüsi programmi kasutamisel peab olema tunnuste arv  $n \leq 25$  ning katsete arv väiksem tuhandest. (Korrelatsioonimaatriksi arvutamisel katsete arv masina mälu mahu poolt praktiliselt piiratud ei ole).

Korrelatsioonanalüüsiks vajalikke suurusi on arvatud Küberneetika Instituudi arvutil mitmete erinevatelt aladelt materjalide kohta. Näiteks on leitud Zooloogia ja Botaanika Instituudi töötajatele metsatakseerandmete ja antropoloogiliste andmete korrelatsioonimaatrikseid, Eksperimentaalse ja Kliinilise Meditsiini Instituudi töötajale korrelatsiooni-

kordajad vererõhu sõltuvuse uurimiseks mitmesugustest näitajatest ning erinevates rühmades. Ühes Tallinna Polütehnilisele Instituudile tehtud töös (keemilise tehnoloogia alalt) leiti astme tüüpi sõltuvuse

$$y = b_0 x_1^{b_1} x_2^{b_2} x_3^{b_3} x_4^{b_4} x_5^{b_5}$$

kordajad  $b_0, b_1, \dots, b_5$ .

Üheks ulatuslikumaks oli töö põlevkivi tuhost valmistatava portlandtsemendi tugevuse sõltuvuse uurimise kohta tema keemilisest koostisest, tehnoloogias jne. (üldse 37-st sõltumatust muutujast). Esimese sammuna leiti korrelatsioonimaatriks, selle põhjal selgitati, millised 24 tunnust võtta regressioonivõrrandi koostamisel aluseks. Lõpuks arvutati vastavad regressioonivõrrandite kordajad 41 sõltuva muutuja (tugevusnäitajad teatud ajavahemike järel) jaoks.

Ajaloo alalt uuriti teekoormiste suuruse sõltuvust talude majanduslikest näitajatest XVIII saj. lõpul ja XIX saj. alguses Eestimaa kubermangus.

Juurutamisel on programm, mis võimaldab arvutada koos aritmeetiliste keskmiste, standardhälvete ja korrelatsioonikordajatega ka juhuslike suuruste astümmeetria ja ekstsessi näitajad ning leida korrelatsioonikordajatega analoogilised suurused, mis iseloomustavad tunnuste ruutsõltuvust üksteisest.

Ajast sõltuvate suuruste, nn. statsionaarsete ajajadade uurimiseks on koostatud programm, mille abil saab avastada ja analüüsida perioodilisuse nähtusi. Arvutamisel saadakse auto-korrelatsioon- ja spektraaltihedusfunktsioonid, mis võimalda-

vad lähtefunktsioonist kõrvaldada juhuslike mürade mõju ning leida vaatlusandmetest nende objektide võrrandid, mis vaadeldavaid funktsioone teisendavad. See meetodika leiab rakendamist Maardu Keemiakombinaadi tehnoloogiliste protsesside uurimisel.

# Osalise loendusmeetodi kasutamisest ja veahinnangust

S. Veldre

Tartu Riiklik Ülikool

Elusorganismide uurimisega tegelevate teadusharude praktikas on tihti vaja teostada organismide või nende osade kvantitatiivset loendust. Paljudel juhtudel pole totaalne analüüs teostatav ja täielikult loendatakse vaid mingi osa - väljavõtu - elemendid. Saadud tulemustelt minnakse üle üldkogumi elementide üldarvu hinnangule. Hinnangu täpsus oleneb väljavõttude jaotustüübist. Üheks levinumaks jaotustüübiks selliste hinnangute puhul on väljavõttude binomiaalne jaotumine, mille lähendamiseks kasutatakse normaalset jaotust. Binomiaalne jaotus sõltub ühest parameetrist - ühe elemendi esinemise tõenäosusest, mille põhjal leitakse ka jaotuse dispersioon. Loendustingimusi on võimalik modifitseerida selliselt, et juba ühe väljavõtu järgi on väga lihtne arvutada saadud hinnangu usaldatavust. Kui mingis väljavõtus (ruumala või pindalaga  $V$ ) loendati  $X$  elementi, siis teatud tingimustes jaotuvad sama tihedusega ( $X$  elementi  $V$  kohta) üldkogumi  $V$ -suurused väljavõttud normaalselt dispersiooniga  $X$ , s.o.

$$\text{kui } \xi = X, \text{ siis } \xi^2 = X.$$

Normaalse jaotuse alusel saab leida piirid, mille vahel asub üldkogumi elementide tihedus või elementide üldarv.

Sellist loendustulemuste hindamist on üksikjuhtudel teostatud juba pool sajandit tagasi, kuid praktikasse pole see meetod kahjuks veel juurdunud. Lihtsad arvutused näitavad, et tavalise vereanalüüsi loendustulemused on väga suure juhusliku veaga. Kui ülejäädud osas on loenduse läbiviimine laitmatu, siis 5% juhtudest on viga erütrotsüütide lugemisel suurem kui  $\pm 9\%$ , leukotsüütide lugemisel isegi suurem kui  $\pm 30\%$ . Praktikas pole aga loendustingimused ideaalsed: pipettide ja loenduskambrite maht pole täpne, pipettide ja loenduskambrite täitmine toimub veaga, mille tõttu on hinnangute vead veel suuremad. Lisaks mainitutele on vigade allikaks veel väljõtu dispersiooni juhuslik suurenemine, veel enam aga väljõtu ebaõnnestumine. Lähtudes eespool toodud kaalutlustest võib soovitada lihtsat meetodit väljõtu headuse kontrollimiseks.

Väljõtt tuleb jagada väiksemateks osadeks ning leida loendusarvude aritmeetiline keskmine ja dispersioon. Aritmeetilise keskmise väärtus on ühtlasi ka teoreetilise dispersiooni väärtuseks. Edasi võib  $\frac{\chi^2}{f}$  jaotuse abil kontrollida, kas tegelik dispersioon on oluliselt suurem teoreetilisest. Viimasel juhul tuleb väljõtt lugeda härrmuslikuks või ebaõnnestunuks ja asendada uuega.

Ettekandes antakse ülevaade loendustingimustest, mis garanteerivad esitatud mudeli sobivuse.

## Ühest faktoranalüüsi meetodist

T. Veldre

Tartu Riiklik Ülikool

Faktoranalüüsi meetodeid arendati alguses peamiselt psühholoogide poolt. Seepärast on ka arusaadav, et nende meetodite juures ei pööratud kuigi tõsist tähelepanu vajalikele statistilistele hinnangutele.

Alles Lawley (1940) ja Andersoni (1956) tööd olid suureks sammuks edasi.

Ettekandes kirjeldatakse Lawley poolt arendatud maksimaalse tõepärasuse printsiibil rajanevat faktoranalüüsi meetodikat ja esitatakse elektronarvutile "Ural-1" sobiva programmi loogiline skeem.

Nakatusjaotuste (Neyman-jaotuste) kasutamisest  
rakusiseste kiirguskahjustuste uurimisel

T. Orav

ENSV TA Eksperimentaalbioloogia Instituut

Esümärgil sedastada rakkude füsioloogilise seisundi mõ-  
ju kiirguskahjustuste väljakujunemisele analüüsiti tsüto-  
loogiliselt  $\gamma$ -kiirtega kiiritatud odraseemnete juureotsakes-  
tes kahjustatud mitoos. Kiiritamine viidi läbi Co-60-sead-  
mel, doos 12 kr.

Seemneid idandati Petri tassides ja fikseeriti Navašini  
või Farmeri fiksaatoriga siis, kui juureotsakesed olid 2-6 mm  
pikkused (esimene kiiritusjärgne raku jagunemine). Juureotsa-  
kestest valmistati ajutised preparaadid atsetokarmiin- või  
atseetortseinmeetodiga või siis püsipreparaadid (8-10  $\mu$  pak-  
sused piki- või ristlõigud), mis värviti gentsiaan- või kris-  
tallvioletiga.

Preparaatide analüüsimisel valmistati juureotsakestest  
skeemid, kuhu kanti koordinaatskaala abil normaalsed ja kah-  
justustega rakud vastavalt raku jagunemise faasidele (meta-,  
ana- ja teleofaas). Jaotused saadi samas faasis olevatest  
rakkudest, kusjuures 0-rühma moodustasid kahjustuseta rakud,  
1-rühma - üksikult paiknevad kahjustatud mitoosid, 2-rüh-  
ma - kahekaupa ja 3-rühma - kolmekaupa paiknevad sama-  
faasilised kahjustused jne.

Juhul, kui kahjustatud rakkude rühmiti paiknemine oleks tekkinud juhuslikult, peaksid vaatlused rühmades jaotuma Poissoni jaotuse järgi, nagu Lea (1956) näitab *Drosophila*, *Chortophaga* ja *Tradescantia* rakutuumades esinevate muutuste arvu suhtes ühe raku kohta. Ooteväärtused arvutati valemi

$$P_{ni} = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}$$

alusel, kus  $\lambda = np$  on sündmuste esinemisarv;  $n$  - vaatluste üldarv;  $p$  - sündmuste esinemissagedus ja  $i$  - rühmanumber (0, 1, 2, ...).

Ooteväärtuste ja empiiriliste väärtuste võrdlus  $\chi^2$ -kriteeriumiga näitas nende halba kokkulangevust.

Järgnevalt kasutasime võrdluseks ooteväärtusi, mis olid arvutatud nn. nakatusjaotuste (Neymani) alusel:

$$P\{X = k+1\} = \frac{m_1 m_2 e^{-m_2}}{k+1} \sum_{t=0}^k \frac{m_2^t}{t!} P\{X = k-t\} .$$

Võrreldi 3 tüüpi Neyman-jaotustega, kusjuures

$$\text{Neyman-A} \quad m_2 = \frac{s^2 - \bar{x}}{\bar{x}} \quad , \quad m_1 = \frac{\bar{x}}{m_2} \quad ,$$

$$\text{Neyman-B} \quad m_2 = \frac{3(s^2 - \bar{x})}{2\bar{x}} \quad , \quad m_1 = \frac{4(\bar{x})^2}{3(s^2 - \bar{x})} \quad ,$$

$$\text{Neyman-C} \quad m_2 = \frac{2(s^2 - \bar{x})}{\bar{x}} \quad , \quad m_1 = \frac{3(\bar{x})^2}{2(s^2 - \bar{x})} \quad .$$

Real juhtudel andsid Neyman-jaotused häid kokkulangevusi katsejaotustega.

Analüüside alusel tehti järeldus, et kiirguskahjustustega rakutuumade paiknemine odra juureotsakeste koes ei ole juhuslik, vaid on tingitud kindlatest seaduspärasustest. Need seaduspärasused baseeruvad mitoosi eri faaside erineval kiirgustundlikkusel ning lähestikku paiknevate rakkude geneetilisel sugulusel.

Hemolüütiliste erütrospektrite jaotuskõverad  
ja nende parameetrite arvutamine

Ü. Vaher

BNSV TA Eksperimentaalbioloogia Instituut

Normaalse vere erütrotsüütide jaotust hemolüütilise resistentsuse järgi nõrgalt happelistes keskkondades keskmistel temperatuuridel aproksimeerib hästi kõver

$$u(t) = \frac{km t^{m-1}}{(1+kt^m)^2}, \quad (1)$$

kus  $u(t)dt$  on erütrotsüütide osa, mille resistentsus, mõõdetuna nende hemolüüseerumiseks kuluva aja järgi, on vahemikus  $(t, t+dt)$ ;  $m$  ja  $k$  on aga spektrit määravad parameetrid.

Erütrospektrite määramine taandub parameetrite  $m$  ja  $k$  väärtuste leidmisele vastavates tingimustes. Parameetrite  $m$  ja  $k$  empiiriline määramine toimub rea ükssteisele järgnevateks ajamomentideks  $t_i (t_i > 0)$  summaarselt hemolüüseerunud erütrotsüütide osade  $y_i (0 < y_i < 1)$  mõõtmise teel. Kuna  $u(t)$  väljendab samaaegselt ka hemolüüsi kiirust, siis  $y_i = \int_0^{t_i} u(t)dt$ , ehk arvestades seost (1):

$$y_i = \frac{kt_i^m}{1+kt_i^m} \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (2)$$

Kasutades asendusi

$$\begin{cases} \eta_i = \lg \frac{y_i}{1-y_i} \\ \xi_i = \lg t_i \end{cases}, \quad (3)$$

saab süsteemi (2) taandada lineaarsete võrrandite süsteemile:

$$\eta_i = -x + m \xi_i, \quad (4)$$

kus

$$x = -\lg k. \quad (5)$$

Kasutades süsteemi (4) lahendamisel vähimruutude meetodit, saame:

$$\begin{cases} x = \frac{AE - BC}{nB - A^2} \\ m = \frac{nE - AC}{nB - A^2} \end{cases}, \quad (6)$$

kus

$$\begin{cases} A = \sum \lg t_i \\ B = \sum (\lg t_i)^2 \\ C = \sum \lg \frac{y_i}{1-y_i} \\ D = \sum \left( \lg \frac{y_i}{1-y_i} \right)^2 \\ E = \sum (\lg t_i) \left( \lg \frac{y_i}{1-y_i} \right) \end{cases}. \quad (7)$$

Parameetrite  $m$  ja  $x$  standardvea hindamiseks saame seosed:

$$\begin{cases} s_m = \frac{\sqrt{n} s}{\sqrt{nB - A^2}} \\ s_x = \frac{s}{\sqrt{n}} \sqrt{1 + \frac{A^2}{nB - A^2}} \end{cases}, \quad (8)$$

kus

$$S = \frac{1}{n(n-2)} \frac{(nB-A^2)(nD-C^2) - (nE-AC)^2}{nB-A^2} . \quad (9)$$

Praktikas on sobivam abstraktsete  $m$  ja  $x$  asemel kasutada järgmisi lihtsama geomeetrilise sisuga parameetreid.

1. Mediaani  $T$  (50% erütrotsüütidel on hemolüütiline resistentsus väiksem mediaanist ja 50% suurem), mille leiame, lahendades võrrandi

$$\frac{1}{2} = \int_0^T u(t) dt .$$

Kasutades seost (1), saame:

$$T = A \lg \frac{x}{m} . \quad (10)$$

Mediaani  $T$  asemel võib kasutada ka tõenäoiseimat resistentsust  $\tau$  (nn. moodi). Moodi  $\tau$  leiame, lahendades võrrandi

$$\left. \frac{du(t)}{dt} \right|_{\tau} = 0, \text{ millest} \\ \tau = \left( A \lg \frac{x}{m} \right) \left( \frac{m-1}{m+1} \right)^{\frac{1}{m}} . \quad (11)$$

Kuna  $m \gg 1$  (tavaliselt  $m = 8 \div 12$ ), siis:

$$\tau = \left( A \lg \frac{x}{m} \right) \left( 1 - \frac{2}{m^2} \right) \quad (12)$$

ehk

$$\tau = T \left( 1 - \frac{2}{m^2} \right) . \quad (12')$$

2. Spektri laius  $w$  on spektri osa laius, mis hõlmab 50% erütrotsüüte, haarates neid võrdselt mõlemalt poolt mediaani.

Suuruse  $w$  leidmiseks lähtume seostest

$$w = t'' - t', \quad \frac{1}{4} = \int_0^{t'} u(t) dt$$

ja

$$\frac{3}{4} = \int_0^{t''} u(t) dt .$$

Nendest saame:

$$w = \left( \text{Alg} \frac{x}{m} \right) \frac{\left( \text{Alg} \frac{3}{m} \right)^2 - 1}{\text{Alg} \frac{3}{m}} . \quad (13)$$

Kui  $m \gg 3$ , siis

$$w = \left( \text{Alg} \frac{x}{m} \right) \frac{2 \ln 3}{m} . \quad (14)$$

Suuruste  $T$  ja  $w$  standardhälbed avalduvad  $S_x$  ja  $S_m$  kaudu järgmiselt:

$$\left\{ \begin{array}{l} s_T = \frac{\ln 10}{m} T \left( S_x^2 + \frac{x}{m} S_m^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ s_w = \frac{2 \ln 3}{m^2} T \left[ (\ln 10) S_x^2 + \frac{x \ln 10 + m}{m} S_m^2 \right]^{\frac{1}{2}} . \end{array} \right.$$

## Algandmete probleemist metsamajanduses

T. Krigul

Eesti Põllumajanduse Akadeemia

Teaduslike ja praktiliste küsimuste lahendamist metsanduses raskendab pikk aeg metsa arenemises, metsa esine mine suurtel pindaladel ja kõigi määratavate tunnuste väga ulatuslik varieerumine ajamomendil ja ajas. Samuti ei ole alati võimalik kõiki metsa mõjustavaid tegureid kvantitatiivselt määrata. Induktsioonjärelendus metsanduslikel uurimistel ei ole usaldatav. Ainult küllaldaselt suur arv kor-duskatseid võimaldab avastada seaduspärasusi. Metsamajanduse praktikas kui ka teaduslikel uurimistel on võimalik edukalt kasutada matemaatilise statistika meetodeid ning lineaarset ja dünaamilist programmeerimist. Lineaarset programmeerimist saab rakendada laiatarbetehhi tööprotsessi planeerimisel, metsamaterjalide transpordi korraldamisel jt. küsimuste lahendamisel. Entneed metsamajanduslikud probleemid, kus küsimusi vaadeldakse seoses metsa arenguga - nagu peakasutuse või hooldusraiate planeerimine teatavaks perioodiks või mis tahes metsamajanduses rakendatavad abinõud metsade juurde-kasvude arvestusega - nõuavad dünaamilist programmeerimist. [1]

Kirjanduses on senini väga vähe andmeid metsanduslike probleemide lahendamisest programmeerimismeetodite abil. See on tingitud metsanduslike küsimuste suurest komplitseeritusest, osalt algoritmide puudumisest ülesannete lahendami-

seks ja algandmete ebaühtlasest kvaliteedist.

Paljudel juhtudel on uurimisandmete kõrval heaks andmete allikaks metsanduses perioodiliselt läbiviidavad metsakorraldustööd, igaaastased kultuuride, hooldusraiate ja peakasutuse hindamisandmed, aastaaruanded jm. Eriti olulist tähtsust omavad nii teaduslike kui ka praktiliste küsimuste lahendamisel metsakorralduse materjalid, kuna nende kaudu kajastub metsade igakülgne dünaamiline areng. Paraku määratakse puistute kirjeldamisel olulised tunnused okulaarselt, mistõttu süstemaatilised vead jäävad varjatuks. Samuti kultuuride, hooldus- ja peakasutuse raielankide hindamisel kasutatakse kohati ebaõigeid mõõtmisviise või jälle iseloomustatakse tegelikusest paremate näitearvudega.

Need on lüngad, millised tuleksid metsamajanduses likvideerida, sest matemaatiliste meetodite kasutamisel sõltub tulemuste objektiivsus algandmete kvaliteedist.

#### Kirjandus

I. P. Беллман. Динамическое программирование. М., 1960.

Bioloogilise andmestiku vormistamisest  
seoses matemaatilise töötlemisega

A. Nilson

ENSV TA Füüsika ja Astronoomia Istituut

Käesolevas ettekandes vaatleme bioloogilise katse- ja vaatlusandmestiku vormistamise küsimusi, lähtudes andmestiku töötlemisel kaasaegse matemaatikaaparatuuri kasutamisest, mida peame obligatoorseks.

Teaduslikku tunnetamist vaatleme kui tunnetatava protsessi informatsioonilist modelleerimist inimajus, kusjuures tunnetuskanali sisendil on informatsiooniallikas (tunnetatav protsess), väljundil aga protsessi mudel inimajus - teadmus. Mudeli üldistavus ja tunnetusprotsessi viljakus oleneb eeskätt modelleerimiseks kasutatud informatsiooni mahust ja mürade kõrvaldamise tasemest, ehk teisiti - tunnetuskanali akumul eerivate ja filtreerivate omaduste ning läbilaskevõime suurusest. Tunnetuskanali struktuuri ajaloolise arengu jooksul on tekkinud olukord, kus nimetatud omaduste poolest kõige nõrgemaks ja seega tunnetusprotsessi limiteerivaks lüliks käesolevas ettekandes vaadeldavat tüüpi informatsiooni töötlemisel on inimene. Seepärast püütaksegi tunnetuskanali omadusi parandada eeskätt inimese asendamise teel võimalikult paljudes informatsiooni töötlemise lülides vastavate automaatidega.

Informatsiooni fikseerimine tunnetuskanalis väljaspool inimaju ja tunnetatavat protsessi on käesolevaks ajaks muutunud teadusliku tunnetamise lahutamatuks komponendiks. Edasises nimetame sellist fikseeritud informatsiooni dokumentatsiooni. Kuna valdav osa teaduslikus tunnetusprotsessis liikuvad informatsiooni peab läbima (ja enamasti mitmekordselt) dokumentatsiooni vormi, on arusaadav ka viimase tähtsus teaduslikus tunnetamises. Dokumentatsiooni ülesandeks on kadudeta akumuloida informatsiooni ja võimaldada seda uuesti paindlikult lülitada edasisse tunnetusprotsessi.

Me lähtume seisukohast, et kaasajal pole bioloogias peamised raskused mitte katsete teostamises, vaid nende tulemuste interpreteerimises, mistõttu praegu pole tähtis mitte ainult mitmesuguste informatsiooni vastuvõtmise ja fikseerimise automatide igakülgne kasutamine, vaid esmajoones "selliste informatsiooni ülesmärkimise vormide süstemaatiline kasutamine (ja mõnikord ka väljatõõtamine), mis sobivad automaatseks töötlemiseks" (2).

Vaatleme informatsiooni liikumist tunnetuskanalis alates tunnetatavast protsessist kuni automaatse arvutini. Tunnetusprotsessi arengus väljakujunenud "klassikaline" tee on lihtsustatult järgmine:

Tunnetatav protsess ( $P_t$ ) - inimene (I) - dokumentatsioon ( $D_1$ ) - I -  $D_2$  - I -  $D_3$  - Automaatne arvuti (AA) - .

Kui inimene  $P_t$  ja  $D_1$  vahel asendada informatsiooni vastuvõtva ja registreeriva automaatseadmega (AR), saame süsteemi:

$P_t$  - AR -  $D_1$  - I -  $D_2$  - I -  $D_3$  - AA - .

Et viimane süsteem võiks bioloogias laialt levida, peab AR olema tehniliselt küllalt täiuslik ja vastama uuritava protsessi füüsilisele spetsiifikale, seega peaks AR olema väga mitmekesine. Pealegi vajab  $D_1$  kahekordset ümbertöötamist ( $D_2$  - numbriline dokumentatsioon ja  $D_3$  - perforeritud dokumentatsioon). Nendeks teisendusteks puudub vabariigis praegu vajalik automaatika ja nii peab kogu informatsioon senise kolme korra asemel ikkagi kaks korda inimest läbima.

Bioloogias valdavatena ei tule lähemal ajal ENSV-s tehnilistel põhjustel arvatavasti kõne alla ka süsteemid:

$$P_t - AR - D - AA - \text{ ja } P_t - AA - .$$

Küll aga on juba praegu väga suures ulatuses realiseeritavad süsteemid:

$$P_t - I - D_1 - AA - \text{ ja } P_t - AR - D_1 - I - D_2 - AA - ,$$

kus kogu informatsiooni voog enne arvutit läbib inimest ainult ühekordselt. Võimalused nende süsteemide kasutamiseks avab nn. duaalperfokaartide ja lugeva perforaatori ИС-80 kasutamine. Duaalperfokaart kujutab endast põhimõtteliselt perfokaardile trükitud ankeeti, mis täidetakse tunnuste läbi või allakriipsutamiseega pehme grafiitpliatsiga (soovitatav 5M).

Ühe kaardi maht on 54 kümnend- ja 54 kahendjärku. Duaalperfokaardi "dualism" avaldub selles, et ta võib üheaegselt olla nii alg-, kui ka arvutite poolt "loetav" dokument.

Informatsiooni kandmise viljakus duaalperfokaardile on võrdne tavalise kirjutamise viljakusega numbrilise informat-

siooni puhul, ületab viimast aga tunduvalt sõnalise informatsiooni korral. Informatsiooni automaatse lugemise-perforeerimise kiirus on umbes 45 kümnendnumbrit sekundis, koos samaaegse küllaltki range kaardi täitmise-perforeerimise õigsuse kontrolliga vastavalt kaardi täitmise eeskirjadele. Viimaste skeemide suure plussina tuleb märkida asjaolu, et duaalperfokaartidega seotud automaatika ei sõltu uuritava protsessi füüsilisest spetsiifikast, vaid mõnevõrra ainult informatsioonilisest spetsiifikast. See aga muudab kogu süsteemi tunduvalt universaalsemaks.

Duaalperfokaardid on edukalt kasutatavad metsandusliku (1), (3), meditsiinilise, botaanilise, aga ka ühiskonnateaduste vaatlus- ja katseandmete registreerimisel. Rakendatuna möödunud aasta lõpul ENSV metsakorralduse praktikasse, võimaldasid nad rohkem kui 1 milj. takseernäitajast lähtudes koostada rea koondtabeleid ja välja tuua mitusada empiirilist regressioonjoont, mis sisaldavad nii vabariigi metsamajanduse organiseerimise ja planeerimise kui ka teadusliku uurimise seisukohalt küllalt palju olulist ja suhteliselt kergesti tõlgitsetavat informatsiooni. Andmete töötlemine aga jätkub.

Lähtudes senistest ligi 100000 duaalperfokaardi täitmisel ja töötlemisel saadud kogemustest, võib teha järgmised järeldused:

1. Vektoritena kirjeldatavate objektide (protsesside) puhul vastab duaalperfokaardi vorm hästi objekti ja tunnetusprotsessi spetsiifikale, olles sõltumatu objekti füüsilisest spetsiifikast.

2. Duaalperfokaartide kasutamine tõstab oluliselt tunnetuskanali läbilaskevõimet ja vähendab mürasid.

3. Kaartide vormistamisel ja täitmisel:

a) peetagu kaardimaketi koostamisel silmas insenerpsühholoogia seisukohti;

b) kasutatagu automaatse kontrolli ranguse tõstmiseks kaarti ainult 54 kümnendjärgu ulatuses.

#### Kirjandus.

1. A. Weidemann, F. Thommen, Das maschinelle Lochkartenverfahren als Ratioanalysierungsmittel in der Forstwirtschaft, Schweizerische Anstalt für das Forstliche Versuchswesen, Mitteilungen, Bd. 35, N.4, 1959.
2. Б.В. Гнеденко, С.В. Фомин, Я.И. Хургин, Применение математических методов при обработке результатов биологических наблюдений, Биологические аспекты кибернетики, Изд. АН СССР, М, 1962.
3. А.М. Нильсон, А.А. Ару, Автоматизация обработки таксационных описаний в лесоустройстве, "Лесное Хозяйство" 1962, № I.

Kaasaja diferentsiaalgeomeetria  
meetodid ja rakendusala

Ü. Lumiste  
Tartu Riiklik Ülikool

Kaasaja diferentsiaalgeomeetria põhimõisteks on diferentseeruva muutkonna mõiste [1], millel on põhiline tähendus ka tänapäeva mehaanika ja füüsika mitmetes teooriates. Niipea, kui on tegemist mingite elementide pideva kogumiga (topoloogilise ruumiga), milles iga elementi on võimalik üks-ühesel viisil määrata  $n$  reaalarvu süsteemiga (koordinaatidega), nii et arvude pideval muutumisel vastav element muutub kogumis samuti pidevalt, on uurimise all teatav  $n$ -mõõtmeline muutkond. Muutkonnaks on näiteks Maa pinna punktide kogum ( $n = 2$ ), aeg-ruumis toimuvate elementaarühenduste kogum ( $n = 4$ ),  $n$  vabadusastmega mehaanikalise süsteemi asendite kogum jne. Diferentseeruvuse nõue kujutab endast lihtsustavat analüütilist tingimust, mille seadmine on praeguste meetodite puhul vähegi keerukamatel juhtudel hädavajalik.

Muutkondade käsitlemisel eritletakse lokaalset ja globaalset aspekti. Asja olemust võib ilmekalt selgitada Maa pinna punktide hulga kui muutkonna ühe näite abil. Lokaalse aspektiga on tegemist, kui teatava paikkonna igale punktile seatakse vastavusse tema koordinaadid mingil selle paikkonna geograafilisel kaardil. Globaalse aspektiga on tegemist,

kui tahetakse haarata Maa pinna punktide hulka kui tervikut. Ühestainsast kaardist siis ei piisa, tuleb anda omavahel seostatud kaartide atlas. (Nn. "maailma kaardid" ei rahulda seatud nõudeid, sest nendel poolused kujutuvad tervete sirgetena ja läheb kaotsi vastavuse üks-ühesus.) Ka üldiste muutkondade teoorias leiavad analoogilistes tähendustes kasutamist terminid "lokaalne kaart (või koordinaatsüsteem)" ja "atlas". Vahe on selles, et tasandiliste kaardilehtede asemele tulevad piirkonnad  $n$ -mõõtmelises arvuruumis.

Kui varasemad uurimised kandsid enamasti lokaalset ise loomu - piirduti ühe lokaalse kaardi uurimisega -, siis nüüdisajal lööb järjest enam läbi globaalne vaatekoht. Seoses sellega on põhilisteks kujunenud sellised mõisted, nagu skaalarväljad, vektorväljad, tensorväljad, lineaar- ja välisvormid tervel muutkonnal, vektorväljade Poissoni sulud, vormide välisdiferentsiaalid [2, 3] jne. Ühesõnaga, on kujunenud välja "üldistatud diferentsiaalarvutus" mis tahes muutkonna tarvis.<sup>1</sup>

Mõtteprotsess, mille abil B. Riemann XIX sajandi keskel jõudis üldise muutkonna mõisteni, on märksa sügavam abstraktsioonist, mis üle kahe aastatuhande tagasi sünnitas eukleidilise geomeetria ja hiljem XVII sajandil- analüütilise geomeetria. Üldine muutkond võib olla enam kui kolmemõõtmeline, tema puhul ei pruugi olla määratud näiteks kahe punkti vaheline kaugus, sihtide paralleelsus jne. Kõik sedalaadi mõisted tu-

---

<sup>1</sup> Väärtuslikke tulemusi selles suunas sisaldab M. Rahula peatselt valmiv kandidaadiväitekiri.

leb vajaduse korral uuesti täiendavalt defineerida, kusjuures seda tehakse suurema paindlikkuse saavutamiseks hoopis uutel alustel.

Põhilisteks on siin kaks juba möödunud sajandil väljendatud viljakat ideed - B.Riemanni meetriline kontseptsioon (1854) ning F. Kleini ja S.Lie rühmateoreetiline kontseptsioon (1872, 1888-1893). B. Riemann määras "kõvera" geomeetria muutkonnas teatava diferentsiaalruutvormi võtmisega kaarediferentsiaali ruuduks  $ds^2$ . Olulisemateks etappideks Riemanni geomeetria arengus on suure rakendusliku väärtusega tensoranalüüsi ("Ricci arvutuse") kasutuselevõtmine G.Ricci poolt 1887.a. ja vektori rööpülekande mõiste sissetoomine Levi-Civita poolt 1917.a. Kui A. Einstein 1915.a. avaldas oma üldise relatiivsusteooria, sai selgeks, et füüsikalist aegruumi tuleb ulatuslikumate piirkondade uurimisel käsitleda just neljamõõtmelise Riemanni ruumina, mille meetrilisel diferentsiaalruutvormil on signatuur (+ + + -). Teiseks mittemõõtmelise Riemanni geomeetria viljakate rakenduste alaks on dünaamiliste süsteemide teooria. Käesoleva sajandi algul selgus nimelt, et süsteemi jõuvaba liikumist saab esitada geodeetilise joone abil vastavas muutkonnas, kui sellesse hooanalüütilise avaldise abil sisse viia Riemanni meetrika.

F. Kleini ja S. Lie seisukohalt kõneldakse, et muutkonnas on antud teatav geomeetria, kui on määratud mingi piõeva rühma (nn. Lie rühma) toime muutkonnal (teisiti öeldes, kui muutkond on muudetud hõmogeenseks ruumiks). Selles geomeetrias uuritakse niisuguseid mõisteid muutkonnas, mis on invariantid rühma elementidele vastavate teisenduste suhtes.

Käesoleva sajandi esimesel kahel aastakümnel toimus ülalmainitud kahe kontseptsiooni süntees. Peale Levi-Civita töid (1917) selgus, et Riemanni ruum on käsitletav muutkonana, mille puutujaruumid on eukleidilised (s.t. neis toimib ortogonaalrühm) ja milles on määratud teatav eriline nn. eukleidiline seostus. Veelgi kaugemale läks H. Weyl, kes ühtse väljateooria loomise püüdes tõi 1918.a. sisse afiinse seostusega ruumide mõiste. Seostusega ruumide üldise kontseptsiooni väljendas 1926. aastal E. Cartan. Kaasajal on sellest välja kasvanud ulatuslik teooria seostustest kiht-ruumides [2, 3].

E. Cartanil on suuri teeneid ka kaasaja diferentsiaalgeomeetria meetodite väljatöötamise alal. Tema loodud on diferentsiaalvälisvormide arvutus, tema poolt arendati praeguse täiuseni liikuva reeperi meetod.<sup>2</sup> Vastav aparatuur on praegu täiuslikemaks Lie rühmade teoorias [4] ja diferentsiaalgeomeetrias [5, 6], kus ta üldistab klassikalist tensoranalüüsi, võimaldades näiteks üldiste Riemanni ruumide (sealhulgas ka aeg-ruumi) puhul kasutada ortonormeeritud reeperit ning lihtsustades eriti tunduvalt analüütilisest mehhanikast välja kasvanud mittehologoomsete probleemide uurimist.

Tartu matemaatikud, kes tegelevad praegu diferentsiaalgeomeetriaga (K. Ariva, Ü. Lumiste, M. Rahula, L. Tuulmets jt.), kasutavad kõik Cartani meetodit.

---

<sup>2</sup> Huvitav on märkida, et lihtsaimal erijuhul - kõverate teoorias - võeti see meetod esmakordselt kasutusele Tartus M. Bartelsi poolt 1830. aastal.

Kirjandus.

1. Ж. де Рам. Дифференцируемые многообразия. Москва. 1956.
2. А. Лихнерович. Теория связностей в целом и группы голономии. Москва 1960.
3. К. Номидзу. Группы Ли и дифференциальная геометрия. Москва 1960.
4. К. Шевалле. Теория групп Ли. Москва 1948.
5. С.П. Фиников. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. Москва-Ленинград 1948.
6. Э. Картан. Внешние дифференциальные системы и их геометрические приложения. Изд. Московского Ун-та. 1962.

## Liikumiste geometriast

M. Rahula

Tartu Riiklik Ülikool

Liikumise mõiste. Vaatleme kujutust  $t \rightarrow \xi_t$ ,

mis seab igale arvule  $t$  arvsirgelt  $R'$  vastavusse mingisuguse elemendi  $\xi_t$  hulgast  $M$ . Väärtusele  $t=0$  vastaku element  $\xi_0$ . Kõnelgem, et element  $\xi_0$  liigub hulgas  $M$ , kusjuures ajamendile  $t$  vastab tema asend  $\xi_t$ .

Ruum liigub. Olgu antud eukleidiline ruum  $R$ . Seame igale arvule  $t \in R'$  vastavusse ruumi teisenduse

$$\xi_t = a_t(\xi), \quad (1)$$

mis viib punkti  $\xi \in R$  punktiks  $\xi_t \in R$ . Väärtusele  $t=0$  vastaku ruumi samasusteisendus. Kujutus  $t \rightarrow \xi_t$  määrab punkti  $\xi$  liikumise mööda oma trajektoori. Kuna ruumi  $R$  iga punkt liigub, siis on tegemist kogu selle ruumi liikumisega (muidugi mitte meetrilisega).

Kiiruste väli. Teisendust (1) võib esitada funktsioonide abil; nimelt,

$$\xi_t^i = a^i(\xi^1, \dots, \xi^n; t) \equiv a^i(\xi, t),$$

kus  $\xi^i$  on punkti  $\xi$  koordinaadid ja  $\xi_t^i$  on punkti  $\xi_t$  koordinaadid. Diferentseerides neid funktsioone  $t$  järgi, saame (kohal  $t=0$ ) n funktsiooni

$$x^i(\xi) = [a^i(\xi, t)]'_{t=0},$$

mida võib vaadelda vektorvälja  $X = \bar{e}_i x_i(\xi)$  komponentidena.

Vektorvälja  $X$  nimetatakse ruumi  $R$  vaadeldava liikumise kiiruste väljaks.

Kiiruste väli liigub. Niisiis, ruumi  $R$  iga punkt  $\xi$  liigub mööda oma trajektoori  $\xi_t$ , tekitades kiiruste välja  $X$ . Kui nüüd ruumis  $R$  teostada uus teisendus  $b$ , siis trajektoorid teisenduvad teisteks trajektoorideks, liikumine teisendub liikumiseks mööda uusi trajektoore ning kiiruste väli  $X$  "deformeerub" teiseks väljaks  $dbX$  (tähistame seda välja nii).

Seades vastavusse igale arvule  $\tau \in R^1$  ühe sellise teisenduse  $b_\tau$ , saame:

esiteks, esialgsete trajektooride liikumise;

teiseks, esialgse liikumise liikumise (teist järku liikumise);

ja kolmandaks, välja  $X$  liikumise

$$\tau \longrightarrow db_\tau X.$$

Kiirendused välja suhtes. Vektorvälja  $db_\tau X$  komponendid osutuvad parameetri  $\tau$  funktsioonideks. Teatud tingimustel võib seda välja esitada valemiga

$$db_\tau X = \bar{c}_i B_j^i(\tau) x^j(\tau).$$

Diferentseerides saadud valemit  $\tau$  järgi (kohal  $\tau=0$ ) saame uue vektorvälja

$$[XY] = \bar{c}_i \left( \frac{\partial y^i}{\partial \xi^j} x^j - \frac{\partial x^i}{\partial \xi^j} y^j \right),$$

kus  $Y$  -ga on tähistatud liikumise  $\tau \rightarrow b_\tau(\xi)$  kiiruste väli ja  $y^i$  on selle välja komponendid. Tähistus  $[XY]$  näitab, et siin on tegemist väljade  $X$  ja  $Y$  sulgudega (Poisson'i sulgudega).

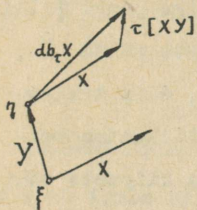
Vektorväli  $[XY]$  määrab välja  $X$  liikumise kiiruse.

Kujutust

$$\delta_y : X \rightarrow [XY]$$

nimetatakse kiirenduste väljaks välja  $\mathcal{Y}$  suhtes.

Kiirenduste tekkimine. Vektorvälja  $[XY]$  tekkimist infini-



tesimaalselt võib ette kujutada järgmiselt (vt. joon.). Vaatleme kahte välja  $X$  ja  $\mathcal{Y}$ . Väljade trajektoore punkti  $\xi$  ümbruses võib esitada sirgetena. Lükudes mööda  $\mathcal{Y}$  trajektoore väli  $X$  "deformeerub" väljaks  $db_r X$ . Kui võtta

mingisuguses punktis  $\eta = b_r(\xi)$  väljade  $X$  ja  $db_r X$  vektorid ning moodustada  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{db_r X - X}{\tau}$ , siis saamegi välja  $[XY]$  vektori.

Toodud mõisteid võib laialdaselt üldistada teist järku liikumise liikumise ja ka "kõrgemat järku" liikumiste puhul. Rakendusi võib leida, esiteks, diferentsiaalgeomeetrias, jätkatud rühmade teoorias ja diferentsiaalvõrrandite süsteemide uurimisel, kuid ka füüsikas (väljateoorias) ning hüdro- ja aerodünaamikas (näit. keeriste tekkimine kahe vooluse kohtumisel).

Tartu algebraistide tööd järjestatud algebraliste  
süsteemide alal

J. Gabovitš (jun.)  
Tartu Riiklik Ülikool

Hulka  $A$  nimetatakse poolrühmaks, kui temal on defineeritud assotsiatiivne liitmise (või korrutamise) operatsioon. Poolrühma nimetame rühmaks, kui temas on üheselt lahenduvad võrrandid  $a+x=b$ ,  $y+a=b$  (või  $ax=b$ ,  $ya=b$ ). Hulka  $A$ , milles on defineeritud korruga kaks operatsiooni - liitmine ja korrutamine, nimetatakse ringiks, kui 1)  $A$  on kommutatiivne rühm liitmise suhtes; 2)  $A$  on poolrühm korrutamise suhtes; 3) iga  $a, b, c \in A$  jaoks on  $(a+b)c = ac+bc$ ,  $c(a+b) = ca+cb$ . Rühma  $A$  (liitmise suhtes) nimetatakse  $\Omega$ -rühmaks, kui iga nn. operaatori  $\omega \in \Omega$  jaoks leidub  $n=n(\omega)$  ( $n$  tähistab naturaalsel ja  $z$  täisarvu), nii et 1/  $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$  korral  $a_1 a_2 \dots a_n \omega$  on üheselt määratud  $A$  element; 2/  $00 \dots 0 \omega = 0$  ja 3/  $a_1 a_2 \dots a_{i-1} (a_i + b) a_{i+1} \dots a_n \omega = a_1 a_2 \dots a_n \omega + a_1 a_2 \dots a_{i-1} b a_{i+1} \dots a_n \omega$ . Hulka  $A$ , mille mõningate elementide paaride  $a, b$  jaoks on defineeritud seos  $\succcurlyeq$ , nimetatakse järjestatud hulgaks kui 1)  $\forall a \in A: (a \succcurlyeq a)$ ; 2)  $(a \succcurlyeq b, b \succcurlyeq a) \rightarrow (a=b)$ ; 3)  $(a \succcurlyeq b, b \succcurlyeq c) \rightarrow (a \succcurlyeq c)$ . Poolrühma  $A$ , mille elemendid moodustavad järjestatud hulga, nimetatakse järjestatud poolrühmaks, kui  $a, b, c \in A$  jaoks 1.  $(a \succcurlyeq b) \rightarrow (ac \succcurlyeq bc)$ ; 2.  $(a \succcurlyeq b) \rightarrow (ca \succcurlyeq cb)$ . Rühma nimetatakse järjestatud rühmaks, kui ta on järjestatud poolrühm; ringi nimetatakse järjestatud ringiks, kui tema aditiivne rühm on järjestatud rühm ja

$(a \geq 0, b \geq 0) \rightarrow (ab \geq 0)$ .  $\Omega$ -rühma nimetatakse järjestatud  $\Omega$ -rühmaks, kui ta on järjestatud rühm ja  $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$  korral  $a_1 a_2 \dots a_n \omega \geq 0$  iga  $\omega \in \Omega$  jaoks. Järjestatud algebra-  
 liste süsteemide all mõistamegi järjestatud poolrühmi, jär-  
 jestatud rühmi, järjestatud ringe ja järjestatud  $\Omega$ -rühmi ning  
 nende üldistusi. Kui järjestatud algebraalises süsteemis on  
 täidetud tingimus: iga  $a \neq b$  korral kas  $a \geq b$  või  $b \geq a$ , siis  
 räägitakse lineaarselt järjestatud poolrühmast, rühmast jne.

Järjestatud algebraaliste süsteemide teooriaga on Tartus  
 tegelenud TRÜ algebra ja geomeetria kateedri dotsendi k.t.  
 J. Hion ja rida tema õpilasi. J. Hion lõpetas 1955.aastal prof.  
 A.G. Kuroši teaduslikul juhendamisel aspirantuuri Moskva Riik-  
 liku Ülikooli juures ning kaitses samal aastal kandidaadiväi-  
 tekirja teemal "Poolrühmade abil normeeritud ringid" (vt. [6]),  
 milles käsitleb paljusid järjestatud algebraalisi süsteeme.  
 Väitekirjas saadud tulemused olid ette kantud III Üleliiduli-  
 sel matemaatika kongressil 1956.a. ning avaldatud artiklites  
 [1]-[5].

Töös [4] vaadeldakse nullelementi sisaldavat lineaarselt  
 järjestatud poolrühma, milles on täidetud tingimused:  
 a)  $\forall a: (a \geq 0)$ ; b)  $(ac=bc \neq 0) \rightarrow (a=b)$ ,  $(ca=cb \neq 0) \rightarrow (a=b)$ .  
 Nimetame sellist poolrühma Hioni järjestatud poolrühmaks. Jär-  
 jestatud poolrühma  $A$  alamhulka  $K$  nimetatakse kumeraks, kui  
 $k, l \in K$ ,  $a \in A$  jaoks  $(k \geq a \geq 1) \rightarrow (a \in K)$ . Töös on näidatud, et  
 kui Hioni järjestatud poolrühma  $A$  kahepoolne ideaal  
 $I((i \in I, a \in A) \rightarrow (ia \in I, ai \in I))$  on kumer, siis faktorpool-  
 rühma  $A/I$  saab muuta Hioni järjestatud poolrühmaks. Hioni jär-  
 jestatud poolrühmade uurimine on töös taandatud nil-  $(\forall a]n: a^n = 0$ .

ja nulliteguriteta  $((a \neq 0 \neq b) \rightarrow (ab \neq 0))$  Hioni järjestatud poolrühmade uurimisele ning laiendite teooriale Hioni järjestatud poolrühmade jaoks. Samas uuritakse nulliteguriteta Hioni poolrühmi, milledes iga  $a$  korral  $a > a^2$ . Iga selline poolrühm on mittelõikuvate kumerate arhimeediliste  $(\forall a \neq 0 \forall b \neq 0 \exists n: (a^n = b))$  alampoolrühmade ühend. Lineaarselt järjestatud ringide teooriale on pühendatud J. Hioni artiklid [1]-[2]. Esimeses neist on antud arhimeediliselt  $(\forall a, b) \exists z: (za = b)$  lineaarselt järjestatud ringide täielik kirjeldus: iga arhimeediliselt lineaarselt järjestatud ring on kas nullkorrutamisega  $(\forall a, b: (ab = 0))$  reaalarvude ring või reaalarvude korpuse mõni alamring. See teoreem, mis on üks tuntumaid tulemusi järjestatud ringide teoorias üldse, oli hiljem tõestatud veel Tallini (Atti Accad. Naz. Linsei, Rend. 1955, 18, 367-373) poolt ja üldistatud järjestatud  $\Omega$ -rühmade peale M.A. Taizlini poolt; seda teoreemi on oma monograafiates esitanud mitmed autorid. Teises töös on toodud mitmed tulemused järjestatud ringide kumerate ideaalide ja radikaalide kohta. Töös [5] on mõned järjestatud ringide omadused üle kantud normeeritud ringidele.

Asudes tööle TRÜ-sse organiseeris J. Hion Tartus aktiivselt tegutseva algebra seminari, mille töös on järjestatud algebraliste süsteemide teoorial tähtis koht. Ettekandeid järjestatud algebraliste süsteemide kohta tegid seminaris peale J. Hioni veel J. Lõhmus, J. Gabovitš, J. Rebane, U. Kaljulaid. J. Hion ja tema juhendamisel seminarist osavõtjad J. Gabovitš, U. Kaljulaid ja M. Kilp said rea uusi tulemusi järjestatud algebraliste süsteemide kohta. Oma tulemustest kandsid Tartu algebraistid ette III ja IV Üleliidulistel algebra kollokviumi-

del, IV Üleliidulisel matemaatika kongressil ning mitmel üli-  
õpilaste teaduslikul konverentsil, mõned nendest aga tulevad  
ettekandmisele Novosibirskis V Üleliidulisel algebra kollok-  
viumil.

J. Hioni töödes [7] ja [8] on näidatud, et iga järjestatud poolrühm, millel puuduvad kumerad alampoolrühmad, on ühe-  
elemendiline ning et iga järjestatud poolrühm, mille ühelgi  
kahel erineval alampoolrühmal pole ühiseid elemente, on kas  
ühe- või kaheelemendiline või siis algarvulist järku tsükli-  
line rühm. Töös [9] on J. Hion andnud tarvilikud ja piisavad  
tingimused selleks, et järjestatud poolrühma järjestust saaks  
jätkata lineaarse järjestuseni. Peale selle on J. Hionil se-  
ni avaldamata töid perioodiliste järjestatud poolrühmade ja  
struktuurselt normeeritud ringide kohta.

J. Gabovitši töödes [10] ja [11] on mõned tulemused jär-  
jestatud rühmade ja järjestatud ringide kohta kantud lineaar-  
selt juhult üldjuhule (muuseas ka J. Hioni tuntud teoreem ar-  
himeediliselt järjestatud ringide kohta), töödes [12] ja [13]  
aga järjestatud  $\Omega$ -rühmadele. Poolrühma A ühest kujutust  
 $\varphi$  iseendasse nimetatakse poolrühma endomorfismiks, kui  
 $\forall a, b \in A: ((ab)\varphi = a\varphi \cdot b\varphi)$ . Järjestatud poolrühma A endomor-  
fismi  $\varphi$  nimetatakse 0-endomorfismiks, kui  $\forall a, b \in A: (a \geq b) \implies$   
 $\implies (a\varphi \geq b\varphi)$ . J. Gabovitši töös [14] on antud mõningate järjes-  
tatud poolrühmade klasside 0-endomorfismide kirjeldus.

U. Kaljulaid [15] on uurinud järjestatud rühmade üldis-  
tust - rühmi seosega "vahel" (vahelrühmi). Vahelrühmade peale  
on kantud üle homo-, isomorfismi ja kumera normaaljagaja mõis-  
ted. On näidatud, et vahelrühma homomorfismi tuum on kumer

normaaljagaja ning faktorrühm kumera normaaljagaja järgi on ise vahelrühm. On antud rühmade vahelseostatavuse tingimus ja tõestatud teoreem homomorfismidest, II teoreem isomorfismist ja teoreem vahelseose jätkamise kohta.

M. Kilp on näidanud, et järjestatud poolrühm on isomorfsete lineaarselt järjestatud rühmade antikommutatiivne sidum parajsti siis, kui ta on idempotentidega lineaarselt järjestatud vasakpoolse pööratavusega poolrühm, mille kõik parempoolsed ideaalid on kumerad. See ja teised järjestatud albegralisete süsteemide kohta käivad M.Kilbi tulemused on seni trükkis avaldamata.

#### Kirjandus.

1. Я.В. Хион, Архимедовски упорядоченные кольца, УМН, 1954, 96(62), 237-242.
2. Я.В. Хион. Упорядоченные ассоциативные кольца. ДАН, 1955, 101, 1005-1007.
3. Я.В. Хион. Кольца, нормированные при помощи полугрупп. Труды 3-го Всесоюзного матем. съезда, М. 1956, т. I, 36-37.
4. Я.В. Хион. Упорядоченные полугруппы. ИАН, сер. матем., 1957, 21, 209-222.
5. Я.В. Хион. Кольца, нормированные при помощи полугрупп. ИАН, сер. матем., 1957, 21, 311-328.
6. Я.В. Хион. Кольца, нормированные при помощи полугрупп. Автореферат диссертации, М. 1955.
7. Я.В. Хион. Кольца, упорядоченные с условием пересечения. УМН, 1961, 16:2(98), 218.
8. Я.В. Хион. О частично упорядоченных полугруппах, в которых собственные выпуклые подполугруппы не пересекаются. ИАН, сер. матем., 1963, 27, I, 67-74.

9. Я.В. Хион. О продолжении частичной упорядоченности подгрупп. УМН, 1962, 17:6(108), 202.
10. Е.Я. Габович. Частично упорядоченные группы и кольца, лишенные нетривиальных выпуклых подгрупп. УМН, 1961, 16:2(98), 238.
11. Е.Я. Габович. Частично упорядоченные группы, лишенные нетривиальных выпуклых подгрупп. Уч. зап. Тартуск. Гос. ун-та, 1961, 102, 289-293.
12. Е.Я. Габович. Частично упорядоченные  $\Omega$ -группы. Уч. зап. Тартуск. гос. ун-та, 1961, 102, 294-300.
13. Е.Я. Габович. Об архимедовски упорядоченных  $\Omega$ -группах. Уч. зап. Тартуск. гос. ун-та, 1962, 120, 19-22.
14. Е.Я. Габович. Об эндоморфизмах полугрупп. УМН, 1962, 17:6(108), 210.
15. У. Кальклайд. О группах с отношением промежуточности. УМН, 1962, 17:6(108), 226.

## Matemaatiline loogika ja tema rakendused

I. Kull

Tartu Riiklik Ülikool

Kuigi esimesed fragmendid matemaatilise loogika valdkonnast kuuluvad G.W. Leibnizile (1679-1690), tuleb matemaatilise loogika tekkeajaks siiski lugeda XIX sajandi keskpaika, millest alates algab matemaatilise loogika pidev areng.

Matemaatilise loogika ajalugu võib jaotada kolme perioodi: I periood - nn. Boole'i algebra periood - kuni XIX sajandi 90-ndate aastateni (G. Boole, P. Poretski, B. Schröder jt.), II periood - matemaatilise loogika rakendamine matemaatiliste teooriate ülesehitamiseks (G. Frege, G. Peano, A. Whitehead, B. Russell jt.), III - kaasaegne periood - alates XX sajandi 30-ndatest aastatest, kus matemaatilist loogikat rakendatakse viljakalt väga mitmesugustel aladel: matemaatikas (matemaatiliste teooriate ülesehitamisel ja matemaatika aluste uurimisel), tehnikas, küberneetikas, füüsikas, bioloogias, keeleteaduses, õigusteaduses jne.

Matemaatiline loogika ei kujuta endast mitte mingisugust tühset deduktiivset teooriat, vaid paljude matemaatilis-loogiliste arvutussüsteemide kogumit. Põhilistel loogilistel arvutussüsteemidel - lausearvutusel ja predikaatarvutusel on täiesti ilmne üldloogiline sisu. Kuid lausearvutust saab üles ehitada ka kahendmuutuja funktsioonide teorianana, ilma mingite viideteta loogikale. Boole'i algebrat võib interpreteerida

hulgateoreetilise algebrana ja tal on seega tavalisest loogikast laiem tähendus. Mõnedel teistel matemaatilise loogika osadel (rekursiivsete funktsioonide teooria) on ka ainult osaline seos loogikaga tavalises mõttes. Seega ei saa matemaatilist loogikat vaadelda kui ainult loogikasse kuuluvat teooriat. Matemaatiline loogika on matemaatilis-loogiline teooria, s.t. teooria, mis uurib reaalse maailma kõige üldisemaid vahekordi (nagu samasus, sisalduvus, järjestus jne.), mis loomulikult esinevad ka loogilise mõtlemise puhul. Formaal-loogilise mõtlemise seaduspärasuste ja reaalse maailma teiste vahekordade vahele ei saa kuskile asetada piirjoont. See asjaolu saab ilmseks kui meenutada mõtlemist imiteerivate küberneetiliste seadmete olemasolu. Märkime, et kaasaja loogika arengu peasuundadeks tuleb tunnistada matemaatilise loogika ja dialektilise loogika suunad.

Anname nüüd ülevaate matemaatilise loogika põhilistest arvutussüsteemidest.

Lausearvutuses on defineerimatuks mõisteks kõigepealt lause mõiste (mida võib sisuliselt mõista kui tavalise keele väitvat lauset). Lauseid tähistame  $X, Y, Z, \dots$  abil. Peale nende on defineerimatuteks mõisteteks veel loogilised tehted:  $\&$  (konjunktsioon, keeleline vaste "ja"),  $\vee$  (disjunktsioon, keeleline vaste mitteväljavastav "või"),  $\rightarrow$  (implikatsioon, "kui ..., siis ...") ja  $\neg$  (eitus) ning sulud  $(, )$ . Loogiliste tehetete ja lausete abil moodustatakse lausearvutuse valemid. Ehitame lausearvutuse aksiomaatika, millest saame tuletada kõik lausearvutuse valemid, mis on samaselt tõesed kahendmuutuja funktsioonide interpretatsioonil seisukohalt. Aksiomid on

järgmised: 1)  $X \rightarrow (Y \rightarrow X)$ , 2)  $(X \rightarrow Y) \rightarrow ((X \rightarrow (Y \rightarrow Z)) \rightarrow (X \rightarrow Z))$ ,  
 3)  $X \rightarrow (Y \rightarrow X \& Y)$ , 4)  $X \& Y \rightarrow X$ , 5)  $X \& Y \rightarrow Y$ , 6)  $X \rightarrow X \vee Y$ ,  
 7)  $Y \rightarrow X \vee Y$ , 8)  $(X \rightarrow Z) \rightarrow ((Y \rightarrow Z) \rightarrow (X \vee Y \rightarrow Z))$ , 9)  $(X \rightarrow Y) \rightarrow$   
 $\rightarrow ((X \rightarrow \neg X)$ , 10)  $\neg \neg X \rightarrow X$ , 11) valemist  $\mathcal{A}$  saame substi-  
 titutsiooni  $S_x^{\mathcal{B}}$  abil valemi  $S_x^{\mathcal{B}}(\mathcal{A})$  12) valemitest  $\mathcal{A}$  ja  
 $(\mathcal{A}) \rightarrow (\mathcal{B})$  saame valemi  $\mathcal{B}$ .

Predikaatarvutuses eristatakse lause koosseisus indiviidid (objektid, mille kohta midagi väidetakse) ja predikaadid (indiviidide või nende korteezide omadused). Indiviide tähistatakse  $x, y, z, \dots$  abil, predikaate  $F(x), F(x, y), F(x, y, z), \dots$  abil. Peale nende kasutatakse veel üldsuse kvantorit ( $\forall x$ ) (loetakse: "Iga  $x$  korral kehtib ..."). Esimest järku predikaatarvutuses võib kvantoritega siduda ainult indiviide. Et saada esimest järku predikaatarvutuse aksiomaatika, tuleb aksiomidele 1)-12) lisada veel järgmised aksiomid:

13)  $(\forall x)F(x) \rightarrow F(y)$ , 14)  $F(y) \rightarrow (\exists x)F(x)$ , 15) valemist  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}(x)$  ( $\mathcal{A}$  ei sisalda  $x$ -i) saame valemi  $\mathcal{A} \rightarrow (\forall x)\mathcal{B}(x)$ ,  
 16) valemist  $\mathcal{B}(x) \rightarrow \mathcal{A}$  saame valemi  $(\exists x)\mathcal{B}(x) \rightarrow \mathcal{A}$ ,  
 17) seotud muutujat võib ümber tähistada ilma vabade ja seotud muutujate vahetada rikkumata. Aksiomi 11) tuleb täiendada individuaal- ja predikaatmuutuja substitutsiooni erijuh-  
 tudega.

Teist järku predikaatarvutuses lubatakse kvantoritega siduda ka predikaatmuutujaid, millega selle arvutussüsteemi võimalused veelgi avarduvad.

Loogilistes arvutussüsteemides kasutatakse veel funkto-  
 reid ja operaatoreid, mitmeid indiviidide piirkondi. Tuubi mõiste abil saab predikaatarvutust nii avardada, et predikaat-

did võivad esineda ka predikaatide argumentavaldistes. Kui hinnata lausete tõlevastavust  $n$ -pallilises süsteemis, saame  $n$ -valentsed loogilised arvutussüsteemid, mis leiavad rakendusi nii teoreetiliste kui ka praktiliste probleemide käsitlemisel.

Intuitsionistliku ehk konstruktiivse lausearvutuse (resp. predikaatarvutuse) saame, kui asendame aksioomi 10) uue aksiomiga 10')  $\neg X \rightarrow (X \rightarrow Y)$ . Selles arvutussüsteemis pole tuletatav valem 10) ega ka välistatud kolmanda seadus  $X \vee \neg X$ . Konstruktiivse loogika loojaks on L. Brouwer. Oulis tulemusi on siin andnud ka A. Heyting, V. Glivenko, A. Kolmogorov jt.

Seoses loogiliste arvutussüsteemidega peab märkima veel K. Gödeli tulemust (1930) esimest järku predikaatarvutuse täielikkuse kohta ja A. Churchi tulemust (1936) selle kohta, et pole võimalik algoritm, mis selgitaks iga predikaatarvutuse valemi puhul, kas see on tuletatav aksiomaatikast lähtudes või mitte.

Seoses sajandi vahetusel ilmenud hulgateoreetiliste paradoksidega püüdsid L. Brouwer ja H. Weyl üles ehitada intuitsionistlikku matemaatikat, kus ei kasutata aktuaalset lõpmatust ja välistatud kolmanda seadust. D. Hilbert polnud aga nõus aktuaalse lõpmatuse abstraktsioonist loobuma ja esitas oma programmi: kogu aktuaalse lõpmatuse mõistet kasutatav matemaatika tuleb üles ehitada formaliseeritud aksiomaatilise teooriana. Seda teooriat tuleb uurida aga aktuaalset lõpmatust mitte kasutava matemaatika nn. metamatemaatika abil. D. Hilberti programmi mitteteostatavust näitas aga K. Gödel

(1931.a.), tõestades, et aritmeetilise formaalse süsteemi mittevasturääkivus ja täielikkus pole kooskõlastatavad.

K. Gödel tõestab muuhulgas ka tulemust, et mittevasturääkiva aritmeetilise süsteemi mittevasturääkivust pole võimalik tõestada sellesama süsteemi vahendite abil. Need ja mõned teised K.Gödeli tulemused avasid uue perspektiivi matemaatika aluste uurimisel, juhtides tähelepanu formaliseeritud süsteemide üldiste omaduste käsitlemisele.

Käesoleva sajandi 30-ndatel aastatel anti mitmeid vormilt erinevaid, kuid sisult samaväärseid algoritmi mõiste täpsustusi (J. Herbrand, K. Gödel, S. Kleene, A. Church, E. Post, A. Turing, A. Markov), millest alates osutus võimalikuks tõestada tulemusi ka algoritmide mittevõimalikkuse kohta. Algoritmi mõiste loomisega pandi kindel alus ka konstruktiivsele matemaatikale, mis peale selle mõiste tugineb veel konstruktiivsele loogikale. Konstruktiivse matemaatika alal töötavad viljakalt nõukogude matemaatikud A. Markov, N. Šanin, I. Zaslavski ja G. Tseitin [12,18,19].

Mis puutub matemaatilise loogika rakendustesse, siis tuleb kõigepealt kõnelda matemaatiliste teooriate ülesehitusest formaliseeritud teooriatena ja nende teooriate kui teoreemide uurimist. Sel alal on saadud palju tulemusi eriti naturaalarvude aritmeetika [2,9,13], hulgateooria [1,2,7,13,15] ja geomeetria [2,3] valdkonnas. Näitena esitame K.Gödeli [7] tulemust, et valiku aksiom ja üldistatud kontinuumi-hüpotees on kooskõlas teiste hulgateooria aksiomidega, kui viimased on kooskõlas.

Matemaatilise loogika kasutamine annab aga ka siis posi-

tiivse efekti (täpsus, selgus, kompaktsus), kui me ei esita teooriat formaliseeritud kujul. Nii näiteks võib fundamentaaljada defineerida matemaatilise loogika sümboolika abil lühidalt:

$$\{x_n\} \in \text{fund. jada} \equiv_{\text{def}} (\forall k)(\exists l)(\forall n)[(m, n \geq l) \rightarrow (x_m - x_n < 2^{-k})]$$

( $k, l, m, n$  - naturaalarvud).

Matemaatilist loogikat (ühes hulgateooriaga) on hakatud intensiivselt kasutama ka keeleteaduses. Matemaatilise loogika meetoditega püütakse uurida keele mitmesuguseid aspekte, keele struktuuri ning anda keeleteaduse põhimõistete täpsad definitsioonid [8,14,15,16].

Matemaatilist loogikat kasutatakse ka selliste eksperimentaalsete valdkondade aksiomaatiliseks ülesehituseks nagu seda on füüsika ja bioloogia [2,3,5]. Niisuguse ülesehituse mõte seisneb selles, et avaneb võimalus nende teooriate kui tervikute uurimiseks, kusjuures on võimalik uurida eksperimenti osatähtsust teooria ülesehitamisel.

Õigusteaduse valdkonnas on matemaatilist loogikat seni kasutatud veel vähe [4], kuid võib arvata, et olukord siin peatselt muutub. Tundub, et siin peaks häid tulemusi andma konstruktiivse loogika kasutamine.

Tuleb märkida, et matemaatilise loogika rakendamist ootab veel ajalooteadus, majandusteadus, esteetika, eetika ja filosoofia.

Omlette peatüki moodustab matemaatilise loogika rakendamine tehnika (esimene töö sellel alal kuulub V.I. Šestakovile 1935.a.) ja küberneetika alal. Sellistes rakendustes esineb matemaatiline loogika tüüpilise matemaatilise teooriana. Töö-

dest selles valdkonnas nimetame abstraktsete automaatide põhialuste uurimist [6,10] ning skeemide sünteesi ja loogiliste funktsioonide minimeerimise teooriat [11,14,15,17].

Kokkuvõttes tuleb märkida, et matemaatilisel loogikal on peale suure teoreetilise tähtsuse ka suur rakenduslik tähtsus ja ta vääriks seetõttu laialdasemat käsitlemist meie vabariigi kõrgemates koolides ja uurimisinstituutides.

#### Kirjandus.

1. Bernays, P., Fraenkel, A. Axiomatic Set Theory, Amsterdam, 1958.
2. Carnap, R. Einführung in die symbolische Logik, Wien, 1954.
3. Henkin, L., Suppes, P., Tarski, A. (väljaandjad). The Axiomatic Method, with special reference to geometry and physics, 1959.
4. Klug, U. Juristische Logik, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1958.
5. Woodger, J.H. The Axiomatic Method in Biology, Cambridge, 1937.
6. Автоматы (сб.), Москва 1956.
7. Гегель, К., Совместимость аксиомы выбора и обобщенной континуум-гипотезы с аксиомами теории множеств, УМН, III(1948), I(23), 96-149.
8. Карнап, Р., Значение и необходимость, Москва 1959.
9. Клини, С.К., Введение в метаматематику, Москва 1957.
10. Корбинский, Н., Трахтенброт, Б., Введение в теорию конечных автоматов, Москва 1962.
11. Колдуэлл, С., Логический синтез нелинейных устройств, Москва 1962.

12. Марков, А.А., Теория алгоритмов, Труды матем. инст. им. В.А. Стеклова, XLII, 1954.
13. Мостовский, А., Современное состояние исследований по основам математики, УМН, IX (1954), 3(61), 3-38.
14. Логические исследования (сб.), Москва, 1959.
15. Применение логики в науке и технике (сб.), Москва, 1960.
16. Ревзин, И.И., Модели языка, Москва, 1962.
17. Труды матем. инст. им. В.А. Стеклова, LI, 1958.
18. Труды матем. инст. им. В.А. Стеклова, LII, 1958.
19. Труды матем. инст. им. В.А. Стеклова, LXVII, 1962.

## Kirjanduse uurimise matemaatilistest meetoditest

J. Lotman

Tartu Riiklik Ülikool

Matemaatiliste meetodite rakendamine kunsti probleemide uurimisel peaks huvi pakkuma mitte üksnes kunstiteoreetiku-  
le, vaid ka matemaatikule, eeskätt küberneetikule.

Kunsti- või kirjandusteost võib vaadelda informatsiooni säilitava ning edasiandva süsteemina ja samal ajal inimese poolt loodud meid ümbritseva maailma mudelina. Kunstiteoses tekivad niivõrd keerulised nähtused, mida ei ole tähele-  
datud teistes reguleeritavates süsteemides.

Tänapäeval võib kunsti probleemide uurimisel kasutada kaht matemaatilise iseloomuga meetodit: statistilist ning struktuur-  
aal-tüpoloogilist. Ettekandja seab endale eesmärgiks näidata, et neist teine on teaduslikult perspektiivsem.

Mõningaid gnoseoloogilisi küsimusi  
seoses uute matemaatika programmidega

R. Kolde  
Tartu Riiklik Ülikool

Kaasaegses pedagoogilises uurimistöös on muutunud põhiliseks õpetamise efektiivsuse küsimused, sealhulgas eriti õppeprogrammide ümberkorraldamine kaasaja nõuetele vastavaks [4].

Matemaatikas on selles osas huvitavad Moskvas teostatavad katsed algebra elementide sisseviimisest algkooli programmi [3].

Sellised muudatused õppeprogrammides põhjustavad vastuväiteid. Kardetakse, et algebraise sümbolika varane kasutamine soodustab formalismi ja takistab sisuliste teadmiste omandamist [7]. Samas unustatakse, et ka numbrid on sümbolid ja väidetega algebraise sümbolika vastu tegelikult absoluutieritakse olemasolevat süsteemi. Viimane on aga välja kujunenud stiihiliselt ja vastab algkooli matemaatika osas 50-60 a. tagasi kehtinud nõuetele, millal külakool oli omaette tsüklilis haridussüsteemis ja millega piirdus rahvamasside kogu haridustase [3]. Praegused algkooli programmid [6] takistavad keskkooli lõpetajatele matemaatiliste teadmiste andmist vajalikus ulatuses ja eriti matemaatilise mõtlemise arendamist.

Seoses uue õpetamissüsteemiga pakuvad huvi selle mõned filosoofilised, gnoseoloogilised aspektid. Käesolevas käsitleme mõningaid neist, pretendeerimata küsimuse ammendavale

lahendamisele.

Marksistliku tunnetusteooria üheks põhiprintsiibiks on ajaloolise ja loogilise ühtsuse printsiip: loogiline kordab ajaloolist, mis on puhastatud juhuslikkustest [5]. Tundub, et uus süsteem vastab sellele printsiibile paremini kui seni- ne, s.o. toob matemaatika õpetamise struktuuri lähemale sel- le ajaloolise arengu põhisuunale.

Lähtudes dialektilise materialismi väitest, et tegelik- kus peegeldub niihästi mõtlemise sisus kui ka vormis [5], näeme, et uus süsteem võimaldab algusest peale teadlikult kasutada mõtlemise üldisi vorme ning leida üldisi struktuur- seid seoseid meid ümbritsevas tegelikkuses.

Samuti võimaldab selline lähenemine kasutada laialdase- malt algoritme ja paneb aluse uute ratsionaalsemate algorit- mide leidmisele.

Neid üldfilosoofilisi kaalutlusi silmas pidades võib ole- tada, et uus süsteem vastab paremini kaasaja nõuetele, aren- dades oskust kasutada matemaatilist aparati ja mõtlemisviisi tegelikkuse paremaks tunnetamiseks.

Samuti on uue programmi järgi õpetamine efektiivsem: võimaldab lühema ajaga anda rohkem ja kvaliteetsemaid teadmisi. Selle lõplikuks kin- nituseks jääb praktika, kuid senised katsetulemused räägivad juba uue süsteemi kasuks.

#### Kirjandus.

1. В.И. Ленин. Философские тетради. Москва 1958.
2. F. Engels. Looduse dialektika. Tln. 1962.
3. В.В. Давыдов. Опыт введения элементов алгебры в началь- ной школе. "Советская педагогика", № 8, 1962.

4. Л.Н. Ланда. О кибернетическом подходе к теории обучения. "Вопросы философии", № 9. 1962.
5. J. Rebane. Mis on dialektiline loogika. Tallinn 1963.
6. Algkooli programmid 1961/62 õ.a. Tallinn 1961.
7. А.С. Пчелко. Актуальные вопросы преподавания арифметики. "Начальная школа", № 3. 1963.

## Keskharidusega arvutusmatemaatikute ettevalmistamisest

O. Prints

Tartu Riiklik Ülikool

Matemaatika osatähtsuse suurenemisega nii teaduslikus töös kui ka rahvamajanduse mitmesugustes harudes käib kaasa suur nõudmine spetsialistide-matemaatikute kaadri järele. Seoses elektronarvutusmasinate üha laialdasema levikuga on kasvanud eriti nõudmine programmistide kaadri järele. Leidub küllaldaselt ülesandeid, mida suudavad lahendada vastava keskharidusega spetsialistid.

Kooli ja elu sidemete tugevdamise seaduse alusel on koolidesse sisse toodud tootmisõpetus. Seda ainetüklit ei tohi mõista kitsalt, näha selles ainuõigete tootmisaladena füüsilist pingutust nõudvaid erialasid, nagu treialali, ehitaja, õmbleja jne. eriala. Et teel kommunismile järjest väheneb füüsilise töö osatähtsus, siis on õige, et juba praegu arvestame tootmisõpetuse ainete hulka ka vaimseid erialasid. Üheks niisuguseks oleks arvutaja-programmisti eriala.

Arvutaja-programmisti erialaga tootmisõpetusele pandi alus 1959/60. õppeaastal Moskva 425. koolis õpetaja S. Švartsburdi initsiatiivil. Seda üritust hakkas toetama Vene NFSV Pedagoogika Teaduste Akadeemia, mille tulemusena asutati nimetatud kooli juurde Vene NFSV Pedagoogika Teaduste Akadeemia instituut. Sm. S. Švartsburd esitas 1962. a. ulatusliku väitekirja programmistide ettevalmistamise küsimuste kohta ja kaitses seda edukalt.

Arvutaja-programmisti tootmisõpetuse erialaga klasse on asutatud paljudes suuremates Nõukogude Liidu keskustes. Moskvas on taolisi klasse praegu juba üle 70. Eesti NSV-s on niisugused klassid avatud Tartu I Keskkooli ja Tallinna I Keskkooli juures.

Arvutaja-programmisti eriala andmise kohta koolides ei ole seni välja antud ühtki ametlikku eeskirja, ei õppeplaani ega programme. 1962.a. novembris toimus Moskvas üleliiduline nõupidamine programmide ja õppeplaani kooskõlastamiseks. Väikestes keskustes on õpilaste keskmine tase neis klassides siiski tunduvalt madalam kui suurtes keskustes, kus nendes klassides õppida soovijate arv ületab kuni kümnekordselt vastuvõetavate arvu.

Sellest tingituna ei ole võimalik meilgi realiseerida kogu seda programmi, mis on ette nähtud vastavates Moskva koolides.

Õpilaste ülekoormamise vältimiseks on tarvis nn. matemaatikaklassides mõnevõrra vähendada teiste üldainete tundide arvu. See peaks toimuma keskmise arvestusega 1 nädalatund ühe poolaasta kohta. Neis klassides peaks olema suurendatud kehalise kasvatuse tundide arv, et anda õpilastele enam võimalusi füüsiliseks tegevuseks. Sellega välditakse ka õpilaste sagedane haigestumine, mis mõnedes koolides on nende klasside õpilaste juures suurem kui teistes klassides.

Arvutaja-programmisti erialaga keskkooli lõpetanud peab olema võimalus edasi õppima asuda ükskõik missugusesse teaduskonda. Meie vabariigis on mõeldav, et ca 25% lõpetanutest rakendatakse programmisti ülesannete täitmisse. Võib oletada,

et umbes 1/3 asub edasi õppima matemaatikat, ülejäänud aga teistel aladel.

Hädasti vajab lahendamist nende klasside jaoks õpetajate ettevalmistamise küsimus. Samuti tuleb need klassid muuta n-õ. vabariiklikeks klassideks, s.t. neid klasse tuleb komplekteerida kõigi meie vabariigi koolide VIII klassi lõpetanud õpilastest ning kui see tõstab neis klassides õppida soovijate arvu mitmekordseks, tuleb avada samal erialal ka paralleelklassid. Eelkõige tuleb aga lahendada internaadi küsimus.

Tõhusama matemaatilise haridusega keskkooliõpetajaid on aga märgatavalt enam vaja, kui seda suudavad anda programmistide klassid. Tuleb kiiremini ellu rakendada keskkooli vanemate klasside diferentseerimine, kus üks suund oleks matemaatiline, mis olenemata tootmisalast annab õpilastele matemaatika alal ulatuslikumaid teadmisi.

Matemaatika õpetamisest  
Eesti Põllumajanduse Akadeemias

H. Merilo

Eesti Põllumajanduse Akadeemia

Matemaatikat õpetatakse Eesti Põllumajanduse Akadeemias kõikidele üliõpilastele. Sisseastujad tulevad peamiselt keskkoolist ja erialastest tehnikumidest. Nende tase on erinev ja tehnikumides võrdlemisi madal. On tarvis tõsta matemaatika õpetamise taset nendes tehnikumides, laiendades programmi ja süvendades õpetamist. Seepärast meie kateeder ei saa nõustuda vabariikliku metoodilise komisjoni seisukohaga, ühtlustada vastuvõtuksamite tingimused vabariligi kõrgemates koolides matemaatika alal. Ühtlustamist keskkooli osas on teostatud küpsuseksamite näol, kõrgematesse koolidesse sisseastumisel ametliku programmi andmisega. Lünka ettevalmistuse osas on püütud täita kursustega, korraldades neid enne sisseastumist mitte ainult keskkooli matemaatika kordamisena, vaid arvestusega, et oleksid paremini valgustatud osad, mis on vajalikud edaspidiseks õppimiseks Eesti Põllumajanduse Akadeemias. Esimese kursuse üliõpilastele korraldatakse konsultatsioone elementaarmatemaatikas vajaduse järgi. Edaspidi on kaivatsus korraldada elementaarmatemaatika kordamist tootmisest tulnud üliõpilastele, vabastades nad septembrikuus tööst kol-

hooside abistamisel.

Vastavalt matemaatika õpetamiseks antud tundide arvule võib jagada osakonnad kolme rühma: 1) inseneriosakonnad (350-400 t.), 2) majanduslikud osakonnad (200 t.) ja 3) bioloogilised osakonnad (50-60 t.).

Kõrgema matemaatika õpetamisel oleme üldiselt loobunud klassikalisest meetodist. Nii näiteks antakse inseneridele esimese semestri jooksul põhimõisted ja esialgne arvutamiskõuetektorarvutuses, diferentsiaal- ja integraalarvutuses. Analüütilise geomeetria probleeme lahendatakse vektorarvutuse abil.

Praktilise arvutamiskõuetektorarvutuse arendamiseks on sisse viidud laboratoorsed tööd. Olgu mainitud, et lähendusarvutus on üliõpilaste nõrgaks kohaks. Keskkool ei pööra sellele küllalt tähelepanu. Mõnedes osakondades on sisse toodud uus distsipliin - arvutusmasinad ja programmeerimine.

Majandusliku kallakuga osakondades suurendati hiljaaegu tundide arvu, seda eriti tõenäosusteooria ja matemaatilise statistika osas. Statistika osa on suurendatud ka bioloogilistes osakondades.

Matemaatikaringis, mis on võrdlemisi väikesearvuline, tõttatakse geomeetria küsimuste ja lähendusvalemite kallal.

## Füüsika osast matemaatiku hariduses

I. Piir

Tartu Riiklik Ülikool

Ühiskondlik praktika on avaldanud stimuleerivat mõju matemaatikale põhiliselt loodusteaduste kaudu. Seejuures on domineerivat osa mänginud füüsikaalased teadused koos astro- noomiaga ja nendele on olnud kõige suurem ka matemaatika viljastav tagasimõju. Füüsika on olnud samuti matemaatika ja tehnikateaduste vahelise vastastikuse mõju peamiseks vahendajaks. Alles kõige viimastel aastatel võib seoses informatsiooniteooria ja küberneetikaga täheldada matemaatika otsest tungimist teistesse, senini puhtkirjeldatavatesse loodusteadustesse, eelkõige bioloogiasse, samuti majandus- ja humanitaarteadustesse ja jälgida esimesi sümptoome nende teaduste mõjust matemaatikale. Matemaatika- ja füüsikaalaste teaduste üksteisega tihedasti seotud arenguloo tõttu on viimased matemaatiku hariduse vältimatuteks koostisosadeks.

Matemaatiku füüsikaalane haridus peab andma talle tänapäevase füüsikalise maailmapildi sellisel tasemel, mis õigesti kajastaks mõlema teadusharu tugevat vastastikust mõju. Ülikoolide praeguste õppeplaanide kohaselt langeb see ülesanne teoreetilise mehaanika, üldise füüsika ja teoreetilise füüsika valitud peatükkide kursustele. Neist esimene, teo-

reetiline mehaanika, on suurepäraseks näiteks füüsika ja klassikalise matemaatika (matemaatiline analüüs, diferentsiaalvõrrandite teooria, variatsioonarvutus jne.) vastastikku üksteist stimuleeriva toime kohta, kuid ei saa enam nüüd, XX sajandil, pretendeerida füüsikalise maailmapildi loomisele. Üldfüüsika kursus, mida on matemaatikutele loetud isegi koos mittematemaatikutega (geoloogid) on pakkunud põhiliselt faktilist toormaterjali, mille valik aga pole kõige otstarbekam nõutava tasemega füüsikalise maailmapildi loomiseks. Teoreetilise füüsika valitud peatükkide kursus, mis on pühendatud küllaliski moodsa matemaatilise aparatuuri, rühmateooria (eriti nende esituste teooria) rakendustele väljateoorias ja elementaarosakeste teoorias, vastab kõigiti kuulajate spetsiifikale ja matemaatiku füüsikaalase hariduse põhinõuetele. Kuid võrdlemisi kitsa, ehkki äärmiselt aktuaalse aine ja meetodi valiku tõttu ei sea ta samuti oma eesmärgiks tervikliku füüsikalise maailmapildi loomist.

Halvem on olukord tulevaste matemaatika õpetajatega, kelle õppeplaanides puuduvad üldse teoreetilise füüsika elemendid. Selle tõttu saadakse vaid äärmiselt pinnaliselt tutvuda relatiivsusteooria ja kvantteooriaga, mis on kaasaegse füüsika alussammasteks. Samal ajal on aga näit. Norra reaalgümnaasiumidesse sisse viidud spetsiaalse relatiivsusteooria alused.

Praeguse ebarahuldava olukorra parandamiseks tuleks eelkõige põhjalikult ümber korraldada füüsika üldkursus. Selle mahtu tuleks faktilise materjali osas piirata, kuid põhiprobleemide sisuline käsitus viia teoreetilise füüsika tasemele.

## Majandusküberneetika põhisuundadest

Ü. Kaasik

Tartu Riiklik Ülikool

Viimase 20 aasta jooksul on arenenud välja uus teadusharu, mis oma põhisas kujutab endast tegelikult matemaatilist distsipliini. Selle teadusharu - majandusküberneetika (nimetatakse ka operatsioonanalüüsiks) ülesandeks on niisuguste meetodite väljatöötamine, mis võimaldavad mingis määratus olukorras sooritada teatud mõttes optimaalseid otsustusi.

Peaaegu kõik majandusküberneetika meetodid ja põhisuundad on välja arenenud vahetult praktikas (majanduselu juhtimisel, seadmete konstrueerimisel, sõjaasjanduses) kerkinud probleemide lahendamiseks. Sealjuures on alati tegemist olnud just niisuguste probleemidega, kus nn. klassikalised meetodid pole kas põhimõtteliselt või tehniliselt rakendatavad.

Majandusküberneetika enam-vähem väljakujunenud suundadest omavad kõige vahetumat praktilist tähtsust järgmised: matemaatiline planeerimine (staatiline planeerimine), dünaamiline planeerimine, järjekordade teooria (massilise teenindamise teooria), mänguteooria (statistiliste otsuste teoo-

ria), majandusliku tasakaalu mudelite teooria. Väljakujunemise järgus on majanduslike nähtuste mehaanilise imiteerimise (simuleerimise) suund. See näib kujunevat üheks olulisemaks suunaks, võimaldades uurida nähtusi, mis n-ö. tavalises mõttes pole täielikult kvantitatiivselt kirjeldatavad.

Nagu nähtub põgusastki tutvumisest nende suundade sisuga, on majandusküberneetika arenemine mõjustanud ka üldse matemaatika arengut. Ühelt poolt on nn. klassikaline matemaatika täienenud rea uute distsipliinidega, teiselt poolt võimaldavad aga uued meetodid lahendada (või lihtsamini lahendada) mitmeid hoopis teisest valdkonnast pärinevaid matemaatilisi probleeme.

Kuigi majandusküberneetika meetodite tegelik rakendamine on seotud kaasaegse arvutustehnika laialdase kasutamisega, pole nad sisuliselt kuigi tihedalt seotud. Erandiks on vaid majanduslike nähtuste imiteerimise suund.

#### Kirjandus.

1. В. С. Немчинов (toimetaja), Применение математики в экономических исследованиях т. 1-2, Изд. соц.-экон. лит. (1959-1961).
2. R. L. Ackoff (toimetaja), Progress in Operations Research v. 1, OR Society of America, Publications 5 (1961).

Mittelineaarsete võrrandite  
numbrilise lahendamise alasest uurimistööst  
ENSV TA Küberneetika Instituudis

I. Petersen, S. Ulm

ENSV TA Küberneetika Instituut

Mittelineaarsete operaatorvõrrandite

$$P(x) = 0, \quad (1)$$

(seega eriti mittelineaarsete võrrandisüsteemide) numbrilise lahendamise meetodeist on põhjalikumalt läbi uuritud Newtoni tüüpi meetodid ja gradientmeetodid. Newtoni tüüpi meetodeile on iseloomulik operaatori  $P(x)$  tuletise pöördoperaatori kasutamine. Gradientmeetodite puhul toimub igal iteratsioonisammul liikumine lahendi poole kas elemendi  $P(x)$  või  $P''(x)P(x)$  suunas, kusjuures sammu pikkus määratakse  $P'(x)$  abil mingist miinimumtingimusest. Mõlemat tüüpi meetodite kasutamine programmjuhtimisega elektronarvutil on raskendatud vajaduse tõttu arvutada operaatori tuletisi.

Küberneetika Instituudis on uuritud niisuguseid mittelineaarsete võrrandite lahendamise meetodeid, mis ei kasuta operaatori tuletisi. Üheks niisuguseks meetodite klassiks on nn. interpolatsioonimeetodid, mille puhul operaatori  $P(x)$  tuletiste asemel kasutatakse teatavaid polülineaarsete operaatoreid, mis ühemuutuja funktsiooni puhul taanduvad harili-

keks diferentssuheteks. Näiteks defineeritakse esimest järku diferentssuhe  $P(x', x'')$  kui lineaarne operaator (iga fikseeritud  $x', x''$  puhul), mis rahuldab seost

$$P(x', x'')(x' - x'') = P(x') - P(x''), \quad (2)$$

kusjuures

$$P(x, x) = P'(x). \quad (3)$$

Analoogiliselt defineeritakse operaatori kõrgemat järku diferentssuhted ja üldistatakse operaatorjuhule Newtoni interpolatsioonivalem.

Asendades Newtoni meetodis tuletise esimest järku diferentssuhtega, saame nn. kõõlude meetodi

$$x_{n+1} = x_n - [P(x_n, x_{n-1})]^{-1} P(x_n), \quad (4)$$

mille koonduvust on uurinud A.S. Sergejev [1]. Lähtudes Newtoni interpolatsioonivalemist, võime tuletada ka puutuvate paraboolide meetodile [2] vastava interpolatsioonimeetodi

$$x_{n+1} = x_n + [E - U_n(x_n - x_{n-1})](\tilde{x}_{n+1} - x_n) \quad (5)$$

ning puutuvate hüperboolide meetodile [3] vastavad interpolatsioonimeetodid

$$x_{n+1} = x_n + [E + U_n(\tilde{x}_{n+1} - x_{n-1})]^{-1} (\tilde{x}_{n+1} - x_n), \quad (6)$$

$$x_{n+1} = x_n + [E + U_n(\tilde{x}_{n+1} - x_n)]^{-1} [E - U_n(x_n - x_{n-1})](\tilde{x}_{n+1} - x_n), \quad (7)$$

kus  $E$  on ühikoperaator,  $U_n = [P(x_n, x_{n-1})]^{-1} P(x_n, x_{n-1}, x_{n-2})$ ,  $P(x_n, x_{n-1}, x_{n-2})$  on  $P(x)$  teist järku diferentssuhe,

$\tilde{x}_{n+1} = x_n - [P(x_n, x_{n-1})]^{-1} P(x_n)$  ja  $x_0, x_{-1}, x_{-2}$  - võrrandi (1) kolm erinevat algühendit.

Majorantide printsibi [4] alusel on tõestatud meetodi-

te (5), (6) ja (7) koonduvusteoreemid Banaachi ruumis ja täpsustatud meetodi (4) koonduvusteoreemi. Tulemused on vaadeldavad ka vastavate tuletisi sisaldavate meetodite koonduvusteoreemide üldistustena.

Edasi on vaadeldud gradientmeetodeile vastavaid interpolatsioonimeetodeid

$$x_{n+1} = x_n - \xi_n P^*(x_n, x_{n-1}) P(x_n), \quad (8)$$

$$x_{n+1} = x_n - \xi_n P^*(x_n, x_{n-1}) [P(x_n) + P(x_{n-1})], \quad (9)$$

kus  $\xi_n$  on positiivsed reaalarvud,  $\inf \xi_n > 0$ , ja  $P^*(x_n, x_{n-1})$  on  $P(x_n, x_{n-1})$  kaasoperaator, ning tõestatud vastavad koonduvusteoreemid. Meetodi (8) puhul on uuritud ka spetsiaalseid arvude valikuid, mis vastavad minimaalse vea [5] ja minimaalse jhägi [6] meetodeile.

On tõestatud üldine koonduvusteoreem võrrandi (1) lahendamise niisuguste iteratsioonimeetodite kohta, mis saadakse võrrandi (1) lineariseerimisel igal sammul Newtoni interpolatsioonivalemi abil, ning seejärel lineaarsete võrrandite lahendamise iteratsioonimeetodeid kasutades.

Teiseks suunaks võrrandi (1) numbrilise lahendamise tuletistevabade iteratsioonimeetodite tuletamisel on võrrandi (1) asemel diferentsiaalvõrrandi

$$x'_n(t) = -P(x_n(t)), \quad x(0) = x_n \quad (10)$$

numbrilise lahendamise meetodite kasutamine, mis põhineb asjaolul, et teatud loomulikel eeldustel on võrrandi (9) lahendi  $x_n(t)$  piirväärtuseks  $t \rightarrow \infty$  puhul võrrandi (1) lahend, kusjuures  $\|P(x_n(t))\|$  on hinnatav  $\|P(x_n)\|$  ja  $t$  kaudu.

Juhul kui võrrandi (10) lahendamiseks kasutada Euleri meetodi ühte sammu, saame iteratsioonimeetodi

$$x_{n+1} = x_n - \xi P(x_n), \quad (11)$$

kui aga täiustatud Euler-Cauchy meetodi ühte sammu, siis saame iteratsioonimeetodi

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\xi}{2} [P(x_n) + P(x_n - \xi P(x_n))]. \quad (12)$$

On tõestatud üldine koonduvusteoreem ja antud veahinnangud seda tüüpi iteratsioonimeetodeile Hilberti ruumis ning eriti vaadeldud meetodite (11) ja (12) koonduvust. Meetodi (11) puhul saadud tulemused täpsustavad tuntud koonduvusteoreeme [7;8].

Samade ideede alusel on tuletatud ja uuritud mittelineaarsete funktsionaalide lokaalsete ekstreemumkohtade numbrilise leidmise algoritme lineaarsete lisatingimuste puhul Hilberti ruumis.

On uuritud ka gradientmeetodite ja Newtoni meetodi üht "vahepealset" iteratsioonimeetodite klassi mittelineaarsete võrrandite lahendamiseks Hilberti ruumis, mille puhul pööratava operaatori dimensioon on väiksem lähteoperaatori dimensioonist.

#### Kirjandus.

1. A. C. Сергеев, О методе ход, Сибирский мат. журнал, 1961, 2, № 2, 282-289.
2. В. Е. Мухомов, О принципе мажорант для метода Чебышева, УМН, 1956, II, № 3, 171-174.

3. М. А. Мертвецова, Аналог процесса касательных гипербола для общих функциональных уравнений, ДАН, 1953, т. 88, № 4, 611-614.
4. Л. В. Канторович, Принцип мажорант и метод Ньютона, ДАН, 1951, т. 76, № 1, 17-20.
5. В. М. Фридман, Итеративный процесс с минимальными ошибками для нелинейного операторного уравнения, ДАН, 1961, т. 139, № 5, 1063-1066.
6. Л. А. Кивистик, Об одной модификации итерационного метода с минимальными невязками для решения нелинейных операторных уравнений, ДАН, 1961, т. 136, № 1, 22-25.
7. М. К. Гавурин, Нелинейные функциональные уравнения и непрерывные аналоги итерационных методов, Изв. высш. учебн. зав., сер. матем. (1958), № 5, 18-31.
8. Е. И. Линьков, О методе наискорейшего спуска для нелинейных уравнений, Ученые зап. Московск. обл. пед. ин-та., т. XXVI (1960), вып. 6, 221-230.

Veahindamisest diferentsiaalvõrrandite ligikaudsel  
lahendamisel

E. Tamme  
Tartu Riiklik Ülikool

Vaatleme mõningaid Tartus teostatud uurimusi seoses täp-  
suse hindamisega diferentsiaalvõrrandite ligikaudsel lahenda-  
misel. Seejuures tulemuste rakendamist demonstreerime suhte-  
liselt lihtsa rajaülesande

$$(1) \quad \begin{aligned} L(y) &= y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \\ y(0) &= \gamma, \quad y(1) = \delta \end{aligned}$$

juhul, kus  $p(x)$ ,  $q(x)$  ja  $f(x)$  on lõigul  $[0,1]$  pidevad funktsioonid. Tulemusi võib jaotada kolme rühma.

1. Aposterioorsed veahinnangud. Olgu mingil teel leitud ülesande (1) lähislahend  $Y(x)$ , mis on lõigul  $[0,1]$  kaks korda pidevalt diferentseeruv ja rahuldab rajatingimusi  $Y(0) = \gamma$  ja  $Y(1) = \delta$ . Kui

$$\alpha = \frac{1}{2} \max_{0 \leq x \leq 1} |p(x)| + \frac{1}{6} \max_{0 \leq x \leq 1} |q(x)| < 1,$$

siis rajaülesandel (1) on olemas kaks korda pidevalt diferentseeruv lahend  $y(x)$  ning lõigul  $0 \leq x \leq 1$  kehtivad hinnangud

$$|y(x) - Y(x)| \leq \frac{1}{8(1-\alpha)} \max_{0 \leq x \leq 1} |R(x)| = \varepsilon, \quad |y'(x) - Y'(x)| \leq 4\varepsilon,$$

kus  $R(x) = L(Y) - f(x)$ .

Analoogilisi veahinnanguid saab kasutada mitmesuguste ülesannete korral (vt. [1,2]). Juhul, kui meil on arvutatud ainult lähislahendi tabel, siis funktsiooni  $Y(x)$  võime moo-

dustada kui interpolatsioonipolünoomi.

2. Diferentsmeetodid. Leitagu näiteks rajaülesande (1) lahendi  $y(x)$  lähisväärtus  $y_i$  sõlmedes  $x_i = ih$  ( $h = \frac{1}{n}$ ) võrrandisüsteemist

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p(x_i) \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q(x_i) = f(x_i)$$

( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ).

Kui funktsioonid  $p(x)$ ,  $q(x)$  ja  $f(x)$  on lõigul  $[0, 1]$  kaks korra pidevalt diferentseeruvad ja  $\alpha < 1$ , siis

$$|y(x_i) - y_i| \leq \frac{h^2}{96(1-\alpha)} \left[ M_4 + 2M_3 \max_{0 \leq x \leq 1} |p(x)| \right],$$

kus  $M_1 = \max_{0 \leq x \leq 1} |y^{(1)}(x)|$ . Suurused  $M_3$  ja  $M_4$  on hinnatavad eelmises punktis toodud tulemuste abil. Esitatud tüüpi veahinnanguid diferentsmeetodite jaoks hariliku lineaarse diferentsiaalvõrrandi juhul on andnud R. Jürgenson (vt. [3,4]).

3. Projektsioonmeetodid. Lineaarsete rajaülesannete lahendamisel kasutatakse laialdaselt ka nn. projektsioonmeetodeid, millede hulka kuuluvad Ritzi, Galjorkini ja vähimruutu-de meetodid. G.Vainikko on saanud olulisi tulemusi projektsioonmeetodite koonduvuse iseloomu kohta, samuti veahinnanguid Ritzi ja Galjorkini meetodi jaoks (vt. [5,6,7]).

Lahendatagu näiteks rajaülesanne (1) Galjorkini meetodiga, kusjuures lähislahendit otsitakse kujul

$$y_n(x) = \gamma \cos \frac{\pi}{2} x + \delta \sin \frac{\pi}{2} x + \sum_{k=1}^n a_k \sin k\pi x$$

ning kordajad  $a_1, a_2, \dots, a_n$  arvutatakse lineaarsest võrrandisüsteemist

$$\int_0^1 [L(y_n) - f(x)] \sin i\pi x \, dx = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Kui funktsioonid  $p(x)$ ,  $q(x)$  ja  $f(x)$  on lõigul  $[0,1]$  absoluutselt pidevad ja neil on sellel lõigul integreeruva ruuduga tuletised, siis lõigul  $0 \leq x \leq 1$

$$|y(x) - y_n(x)| \leq \frac{C}{n^2}, \quad |y'(x) - y'_n(x)| \leq \frac{C'}{n},$$

kus  $C$  ja  $C'$  on teatavad konstandid.

#### Kirjandus.

1. Э. Тамме и Р. Юргенсон, О приближенном решении дифференциальных уравнений, Уч. зап. Тартуск. ун-та 102 (1961), 301-316.
2. Р. Юргенсон, Об оценке погрешности приближенного решения линейного интегро-дифференциального уравнения, Тр. Ин-та Физ. и Астр. АН Эст.ССР 20(1963).
3. Р. Юргенсон, О точности метода конечных разностей, Тр. Ин-та Физ. и Астр. АН Эст.ССР 24(1963).
4. Р. Юргенсон, Об оценке погрешности метода конечных разностей решения краевых задач, Тр. Ин-та Физ. и Астр. АН Эст.ССР 24(1963).
5. Г. Вайникко, Оценки погрешности метода Галеркина для линейного дифференциального уравнения, Уч. зап. Тартуск. ун-та 129(1963), 394-416.
6. Г. Вайникко, Оценки погрешности метода Рунге для линейного однородного уравнения, Уч. зап. Тартуск. ун-та 129(1963), 417-427.
7. Г. Вайникко, О скорости сходимости метода Петрова-Галеркина.

## Elektronarvuti kasutamisest projekteerimistödel

H. Poll, A. Pihlak  
(ENSV TA Küberneetika Instituut)

Elektronarvutite kasutamine projekteerimisasutuste töös omab suuri perspektiive. Suuremahuliste insenertehniliste arvutuste automatiseerimine kiirendab projektide valmimist, hoiab ära vigade tekkimist, võimaldab paljude variantide läbiarvutamise teel nende hulgast valida teatavas mõttes parima, vabastab kõrge kvalifikatsiooniga insenere muule tööle jne.

Elektronarvutite projekteerimistödel kasutamise propageerimiseks on Küberneetika Instituudi arvutuskeskuses programmeeritud kaks arvutustööde läiku Tallinna projekteerimisorganisatsioonide praktikast - käigukastide tugevusarvutus Tallinna Ekskavaatoritehasele ja raamide arvutus "Eesti Tööstusprojektile".

Käigukastide tugevusarvutusega määratakse võllide ja hammasrataste tugevusvaru ning veerevlaagrite tööiga. Need arvutused on otstarbekohane teostada tehnilise projekti staadiumis ning täpsustada tööprojekti koostamisel.

Arvutuste suure mahu tõttu on siiani piiratud tehnilise projekti koostamisel ainult kõige nõrgemate sõlmede tugevusarvutusega. Alles tööprojekti koostamisel teostatakse üksikasjalikumad tugevusarvutused, kusjuures piirdatakse ainult ühe-kahe tšeenkõoliselt kõige raskema olukorraga töörežiimil.

Elektronarvuti kasutamisel on üksikasjalikke tugevusarvu-

tusi võimalik teostada tehnilise projekti staadiumis kõigi erinevate töörežiimide jaoks. Seega saab tööprojekti koostamisel juba arvesse võtta eelnevaid tulemusi ning kõrvaldada ohtlikud kohad. Ekskavaatori ЭТУ-201 käigukastis on 16 võlli, 28 hammasratast ja 40 veerevlaagrit. Elektronarvutil M-3 kulub ühe võlli, ühe hammasratta ja ühe veerevlaagri tugevusarvutuseks ühel töörežiimil kokku 20 sekundit. Sama arvutuse teostamiseks kulub konstruktoril üks päev. Kogu käigukasti tugevusarvutuse ühel töörežiimil suudab konstruktor teha ca 1 kuu jooksul, elektronarvutil M-3 kulub selleks 5 minutit. Erinevaid töörežiime on ekskavaatoril 12.

Edaspidi on kavas üldisema programmi koostamine, kus võllide, hammasrataste ja veerevlaagrite parameetreid ning võimsust ja pöörete arvu muutes valitakse parim variant.

"Esti Tööstusprojekti" tellimisel koostati ja programmeeriti Küberneetika Instituudis n-korruseliste ja m-avaliste raamide staatilise tugevusarvutuse algoritm deformatsioonimeetodil.

Selle meetodi põhilise osa moodustab suure tundmatute arvuga lineaarvõrrandisüsteemide lahendamine. Iga raami korral on  $mn + 2$  erinevat koormuskombinatsiooni. Iga kombinatsiooni puhul on vaja lahendada  $n(m+2)$  võrrandist koosnev süsteem. Võrrandisüsteemide lahendamiseks kasutatakse ülereleksatsiooni iteratsioonimeetodit.

3-avalise ja 3-korruselise raami puhul (15 tundmatut) kulub ühe süsteemi arvutamiseks ca 20 sek.

Võrrandisüsteemi lahendid määravad sõlmede ja varraste pöördenurgad. Neid tulemusi kasutatakse paindemomentide epüüri

arvutamiseks. Seejärel arvutatakse väljamomentide ja põikjõudude eptüürid staatika tasakaalutingimustest.

Arvutades käsitsi näiteks 3-avalist ja 3-korruselist raami, kulub selleks lükatiga töötaval inseneril mitu nädalat, kusjuures arvutatakse läbi ainult 4-5 intuitiivselt valitud "raskemat" koormuste kombinatsiooni. Arvutil M-3 kulub aga sama raami kõigi (11) koormuskombinatsioonide läbiarvutamiseks ca 1,5 tundi.

## Tehase töö küberneetiline mudel

M. Krull

Tartu Riiklik Ülikool

Seoses elektronarvutusmasinate üha laialdasema levikuga on tunduvalt laienenud ka nende ülesannete klass, mida kaasajal on võimalik praktiliselt lahendada. Viimaste hulka kuulub terve rida selliseid probleeme, kus elektronarvutusmasina kasutamine võib paista esimesel pilgul mõnevõrra fantastilisena. Nendeks on peamiselt automaatse juhtimise ning reguleerimisega seotud ülesanded.

Tootmise organiseerimine tehaste mehaanikatsehhides kujutab samuti teatavat juhtimissüsteemi, mis peab tagama detailide sellise tootmise, et oleksid õigeaegselt rahuldatud montaažitsehhide vajadused. Otsuste tegemiseks võtab selline juhtimissüsteem informatsiooni tema poolt juhitud süsteemist (s.t. tootmisega seotud tsehhidest). Etteantud algoritmi ning saadud informatsiooni põhjal koostab juhtimissüsteem programmi, mis määrab juhitava süsteemi töö (detailide tootmise) teatavaks ajavahemikuks. Samaaegselt kontrollib ta antud programmi täitmist ja analüüsib juhitud süsteemis tekkinud kõrvalekaldumiste põhjuseid ning püüab nende abil parandada seda algoritmi, mis on aluseks programmi koostamisel.

Milline peab olema sellise tootmist organiseeriva süsteemi struktuur, millist informatsiooni juhitava süsteemi kohta ja mis liiki kanalite kaudu peab ta hankima, kuidas näeb välja algoritm tootmisprogrammi koostamiseks ja kuidas seda pidevalt täiendada - need küsimused tuleb kindlasti lahendada, sest vastasel korral ei ole me õigustatud kõnelema tootmisprotsessi automaatselt juhtimisest. Mainitud küsimuste lahendamiseks on olemas kaks teed.

Lähtudes praktikast, fikseerime juhtimissüsteemi struktuuri ja konstrueerime algoritmi. Edasi peame kontrollima kuivõrd hästi on mainitud algoritm rakendatav praktikas. Selleks tuleb antud süsteemi juurutada tehases. Võib aga osutada, et koostatud algoritm ei osutu heaks ja katsetamise tulemusena oleme tarbetult kulutanud materiaalseid varasid. Peale selle on kirjeldatud protsess väga aeglane. Alles küllalt kauaaegse töö tulemusena võime saada usaldatavaid andmeid oma algoritmi headuse kohta.

Tarbetu riski vältimiseks võib väljatöötatud algoritmi kontrollida elektronarvutusmasina abil. Selleks imiteeritakse tehase tootmisprotsessi elektronarvutusmasinas. Samuti on masinale arusaadavas keeles kirja pandud ka see algoritm, mille alusel toimub tootmise organiseerimine. Edasi juba elektronarvutusmasin organiseerib "tootmise", kontrollib koostatud algoritmi headust ja sellest tulenevalt annab meid huvitavatele küsimustele vastused. Elektronarvutusmasinate suur töökiirus võimaldab suhteliselt lühikese ajaga katsetada väga mitmesuguseid algoritme ja valida nende seast mingis mõttes parima.

## Matemaatika ja põllumajandus

T. Akkel

Tartu Riiklik Ülikool

Põllumajanduse kui tähtsa rahvamajandusharu arendamise üheks teeks on mitmesuguste kasutamata reservide avastamine ja nende kasutuselevõtmine. Paljudel juhtudel esineb "avastaja" osas matemaatika.

Mitmeid põllumajanduses kerkivaid ülesandeid saab taandada matemaatilisteks nn. optimaalse planeerimise ülesanneteks. Neid ülesandeid iseloomustab paljude lahendite olemasolu, millede seast parima lahendi saame elektronarvutusmasina abil suhteliselt kergesti kätte.

Üheks huvitavaks ja küllalt suurt majanduslikku efekti andvaks ülesandeks on põllumajanduslikule ettevõttele sööda- baasi planeerimine. Loomade söötmiseks võib kasvatada väga mitmesuguseid kultuure. Ühtede kultuuride tootmine on odavam, teiste tootmine kallim, ühed annavad hektarilt rohkem, teised vähem söötühikuid. Seepärast kerkib probleem: milliseid söödakultuure ja missuguses vahekorras on kõige otstarbekohasem kasvatada. Sealjuures peavad olema täidetud kõik nõuded söötade koostise ja bioloogilise väärtuse, samuti sööda- liikide vahekorra kohta.

Teistest matemaatiliselt uuritavatest probleemidest pakuvad huvi eeskätt põllumajandusliku tootmise paigutusega seotud ülesanded. Neis tuleb välja selgitada majandi (või rajooni) põhilised tootmissuunad.

Matemaatiliste meetodite kasutamine põllumajanduses annab küllaltki suurt majanduslikku efekti (söödabaasi ülesande juures, näiteks, on võimalik kulusid söötade tootmiseks vähendada ca 15-20% võrra). See ongi põhjuseks, miks matemaatikat tuleb põllumajanduse planeerimises üha rohkem rakendada.

Söödakõlvikute ja -kultuuride struktuuri  
arvutamine lineaarplaneerimise meetodite abil

V. Aasmäe

Moskva Maakorralduse Instituut

Maa kui põhilise tootmisvahendi ratsionaalne kasutamine põllumajanduses on ja jääb tähtsaimaks probleemiks. Selle probleemi lahendamisel saab edukalt kasutada matemaatilisi meetodeid ja kaasaegset arvutustehnikat.

Peatume kõlvikute organiseerimise ühel põhiküsimusel - kõlvikute ja kultuuride struktuuri määramisel. Matemaatiliste meetodite kasutamine siin on võimalik ainult siis, kui ökonoomilise protsessi tulemust saab väljendada ühe näitaja abil. Kuna meil vabariigis põhiline osa taimekasvatuse toodangust kasutatakse loomakasvatuses, siis selliseks näitajaks võiks olla tingsõötühik (100 g seeduva proteiini sisaldusega sõötühik). Vastavalt valitud ühisele näitajale saame arvutada ainult söödakõlvikute ja -kultuuride struktuuri.

Üldist kriteeriumi põllumajanduses - maksimaalne toodang minimaalsete kuludega - ei saa matemaatiliselt väljendada, sest ta sisaldab kaks näitajat: toodang ja kulud. Seepärast tuleb kriteeriumidena kasutada: 1) maksimaalne toodang olemasolevate ressurssidega; 2) planeeritud toodangu

maht minimaalsete kuludega; 3) maksimaalne kasum jne. Nendest põhiliseks kõlvikute ja kultuuride struktuuri efektiivsuse näitajaks käesoleval ajal peaks olema toodang tingsõttühikutes põllumajanduslike kõlvikute, tšõjõu ja materiaalsete tehniliste ressursside kompleksi kohta.

Väljendame eeltoodu matemaatiliselt:

$$\sum c_j x_j = \max ,$$

kus  $c_j$  on üksikute kultuuride saagikus sõttühikutes ha-lt;  
 $x_j$  - samade kultuuride pindalad ha-des.

Sealjuures peavad olema täidetud järgmised tingimused:

1. Üksikute sõdakõlvikute ja -kultuuride pindalade summa ei tohi ületada sõda tootmiseks ettenähtud üldpinda

$$\sum x_j \leq S ,$$

kus  $S$  on sõda tootmiseks ettenähtud pind ha-des.

2. Intensiivsed kultuurid (mais, suhkrupeet) nõuavad kõrge agrofooniga muldasid, viimaste pind aga on piiratud. Siit kitsendus

$$\sum x_a \leq S_1 ,$$

kus  $x_a$  on üksikute intensiivsete kultuuride pindalad ha-des;  
 $S_1$  - kõrge agrofooniga muldade üldpind.

3. Määrame tehnoloogiliste kaartide järgi kõikide põllumajanduslike kõlvikute ja kultuuride tšõjõu- ja tehnikavajaduse dekaadide lõikes hektari kohta. Saadud andmete järgi eraldame tšõjõu ja tehnika, mis on vajalikud aia-, tehniliste jt. varem eraldatud kultuuride harimiseks. Sõdakõlvikute ja -kultuuride kasvatamiseks jäänuud tšõjõu ja tehnika kohta seame kitsendused:

$$\sum a_{ij} x_j \leq P_i \quad \text{ja} \quad \sum b_{ij} x_j \leq T_i ,$$

kus  $a_{ij}$  ja  $b_{ij}$  on  $j$ -nda kultuuri või kõlviku tõõjõu- või tehnikavajadus  $i$ -ndal dekaadil;  $P_i$  ja  $T_i$  - tõõjõu või tehnika ressursid  $i$ -ndal dekaadil.

4. Loomade ühtlaseks söödaga kindlustamiseks koostame aastaringse söötade konveieri. Selleks jagame aasta söötade saamise ja kasutamise seisukohalt kaheksasse perioodi (1.XII - 15.V; 16. - 31.V; VI; VII; VIII; IX; 1. - 15.X ja 16.X - 30.XI). Valitud perioodide söötade kogused moodustavad söötade üldsummast teatava protsendi. Siit saame kitsenduse:

$$k \sum c_j x_j = \sum c_j^{\circ} x_j^{\circ} ,$$

kus  $k$  on valitud perioodil vajatav söötade protsent;

$c_j^{\circ}$  -  $j$ -nda kultuuri saak söötühikutes valitud perioodil (erineb  $c_j$  -st karjamaade ja ädalate puhul);

$x_j^{\circ}$  -  $j$ -nda kultuuri pind, mille saak kasutatakse samal ajavahemikul.

5. Söödad peavad igal perioodil sisaldama vähemalt 10% seeduvat proteiini:

$$\sum (0,10c_j^{\circ} - d_j) x_j^{\circ} \leq 0 ,$$

kus  $d_j$  on  $j$ -nda kultuuri seeduva proteiini saak kg/ha.

Sellisel saame söödakõlvikute ja -kultuuride struktuuri, mis kindlustab maksimaalse kogusaagi. Kõlvikute organiseerimise küsimuse täielikumaks lahendamiseks matemaatiliste meetodite abil tuleb esitatud mudel siduda transportülesande kaudu kultuuride ja kõlvikute paigutusega.

## Analoogarvutid

V. Allsalu, A. Oja

Tartu Riiklik Ülikool

Teaduses ja tehnikas on laialdaselt kasutamist leidnud modelleerimine kui uurimismeetod. Tuginedes objekti ja mudeli formaalsele sarnasusele saab objektist lihtsama ehitusega mudeli järgi teha järelduse objekti enda omaduste kohta.

Kõik ainelised mudelid võib jaotada kolme suurde rühma: geomeetrilised mudelid, füüsikalised mudelid ja matemaatilised mudelid.

Geomeetiline mudel on vaid väliselt sarnane objekti endaga (kasutatakse enamasti demonstratsiooniks).

Füüsikalised ja matemaatilised mudelid sarnanevad objektidega sisemiste seoste poolest, s.t. muutuvad suurused (ehk muutujad) objektis ja mudelis on kirjeldatavad ühesuguste matemaatiliste seostega. Füüsikalise mudeli juures muutuvad suurused on samasuguse füüsikalise sisuga nagu modelleeritava objektilgi, matemaatilisel mudelil muutuvad suurused on aga teistsuguse füüsikalise sisuga.

Matemaatilisi mudeleid võib konstrueerida mitmesuguste võrrandite lahendamiseks, jättes kõrvale nende füüsikalise sisu. See asjaolu õigustabki matemaatiliste (aineliste) mu-

delite nimetust, - pideva toimega arvutusmasin ehk analoogarvuti.

Analoogarvutid on leidnud laialdase rakenduse diskreetse toimega arvutite kõrval. Kui ei ole nõutud arvutuste suurt täpsust, vajalik on aga arvutamise suur kiirus ja hea ülevaade arvutuste tulemustest, eelistatakse sageli analoogarvutite kasutamist.

Kõige levinumateks on elektrilised analoogarvutid nende kasutamise lihtsuse tõttu.

Oma ehituse ja tööpõhimõtte järgi võib matemaatilised mudelid jaotada mudelanalooogideks ja struktuurseteks mudeliteks. Mudelanalooogis modelleerib iga sõlm füüsikalise protsessi teatud aeg-ruumilist elementi. Struktuursetes mudelis iga sõlm modelleerib protsessi matemaatilise kirjelduse, s.t. võrrandi üht osa. Mudeli struktuuriskeem tervikuna vastab teatud võrrandile või võrrandite süsteemile.

Struktuursetid mudelid kasutatakse enamasti alg- ja rajatingimustega harilike diferentsiaalvõrrandite lahendamiseks. Nende abil on suhteliselt kergesti lahendatavad ka oluliselt mittelineaarsed diferentsiaalvõrrandid, mille analüütilise lahenduse leidmine on tavaliselt komplitseeritud. Sisuliselt toimub lahendamine järkjärgulise integreerimise meetodil.

Lahenduskeemi koostamiseks viiakse lineaarne diferentsiaalvõrrand tavaliselt kujule

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j + f_i(t) \quad (i=1,2,\dots,n)$$

ja mittelineaarne diferentsiaalvõrrand kujule

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

TRÜ Arvutuskeskuses on käesoleval ajal kasutusel kaks struktuurset mudelit MH-7 ja ЭMY-8. Nende abil on võimalik lahendada eespool toodud algtingimustega võrrandeid, kus maksimaalne võrrandi järk võib olla MH-7 korral kuus ja ЭMY-8 korral kümme.

Mudelanalooide hulgas kõige levinumateks on võrkmodelid. Neid kasutatakse peamiselt rajatingimustega osatuletistega diferentsiaalvõrrandite lahendamiseks. Võrkmasinate tüüpiliseks esindajaks on mudel YCM-1, mis võimaldab lahendada järgmist tüüpi võrrandeid

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ A_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right] = F_n,$$

kus

$$F_n = \begin{cases} F(x_1, x_2, \dots, x_n) & \text{— elliptilist tüüpi} \\ & \text{võrrandi jaoks} \quad ; \\ a^2(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial t} & \text{— paraboolset tüüpi} \\ & \text{võrrandi jaoks} \quad . \end{cases}$$

## Elektronarvutusmasinate arengusuunad

P. Piirikivi

Tartu Riiklik Ülikool

Automatiseerimise probleemid lahendatakse käesoleval ajal lahutamatus seoses elektronarvutusmasinate kasutamisega, kusjuures tihti on elektronarvutusmasin kogu seadmete kompleks peamine lüli. Seda silmas pidades on konstruktorite üheks tähtsamaks ülesandeks kiiretoimeliste elektronarvutusmasinate täiustamine, mis võimaldab suhteliselt lühikese ajaga läbi töötada suurt hulka informatsiooni.

Mitte palju aega tagasi kasutati arvutusmasinates peamiselt elektronlampe, kuid viimasel ajal on nad välja tõrjumisel pooljuht-, ferriit-, ülijuhtivusel töötavate ja teiste seadmete poolt. Nendel on võrreldes elektronlampidega olulisi eeliseid, nagu kiiretoimelisus, väikesed gabariidid, suur töökindlus ja väike energia kulu, mis võimaldab luua palju tootlikumaid, kuid seejuures väikeste mõõtmetega elektronarvutusmasinaid. Uute seadmete näiteks võiks tuua deplistorid, tiristorid, biaksid, tvistorid, tensorid, teknetronid, persistorid, parametronid jm.

Juba kauemat aega uurivad konstruktorid elektronarvutusmasinate töökindluse ja stabiilsuse suurendamise võimalusi. Efektiiu seteks vahenditeks nende eesmärkide saavutamisel tuleb lugeda trükitud montaaži juurutamist ja plokk-konstruksioonide väljatöötamist koos uute raadiotehniliste seadmete kasuta-

misega.

Intensiivselt uuritakse praegu nn. isekorrastuvate või, nagu neid nimetatakse, "iseorganiseeruvate" süsteemide ehitamise võimalusi, mis ise oleksid võimalised likvideerima mitte ainult tehnilisi rikkeid, vaid reageerima ka ümbritsevast keskkonnast saadud signaalidele.

Kirjandus.

1. А.С. Вавилова, И.С. Жевелева, Электронные вычислительные машины за рубежом.
2. Радиоэлектроника за рубежом, Вып. 147, 156, 180, 1962.
3. Elektronik News, 1962, 28 III Nr. 310 стр. 30.

## Doomino mängimisest elektronarvutusmasinaga

P. Eelma

Tartu Riiklik Ülikool

Ettekandes kirjeldatakse elektronarvutusmasinate kasutamise võimalust mitmesuguste mängude mängimisel. Konkreetse näitena vaadeldakse doominomängu kahe osavõtja vahel, kus üheks mängijaks on elektronarvutusmasin. Ettekande aluseks on võetud elektronarvutusmasinale "Ural" koostatud programm. Kõigepealt kirjeldatakse programmi üldist loogilist skeemi, seejärel avakäiguga, käigu valikuga ning mängu lõpetamisega tekkivaid probleeme ja nende lahendamist antud programmis. Tuuakse lühike ülevaade programmi kasutamise senistest tulemustest.

### Kirjandus.

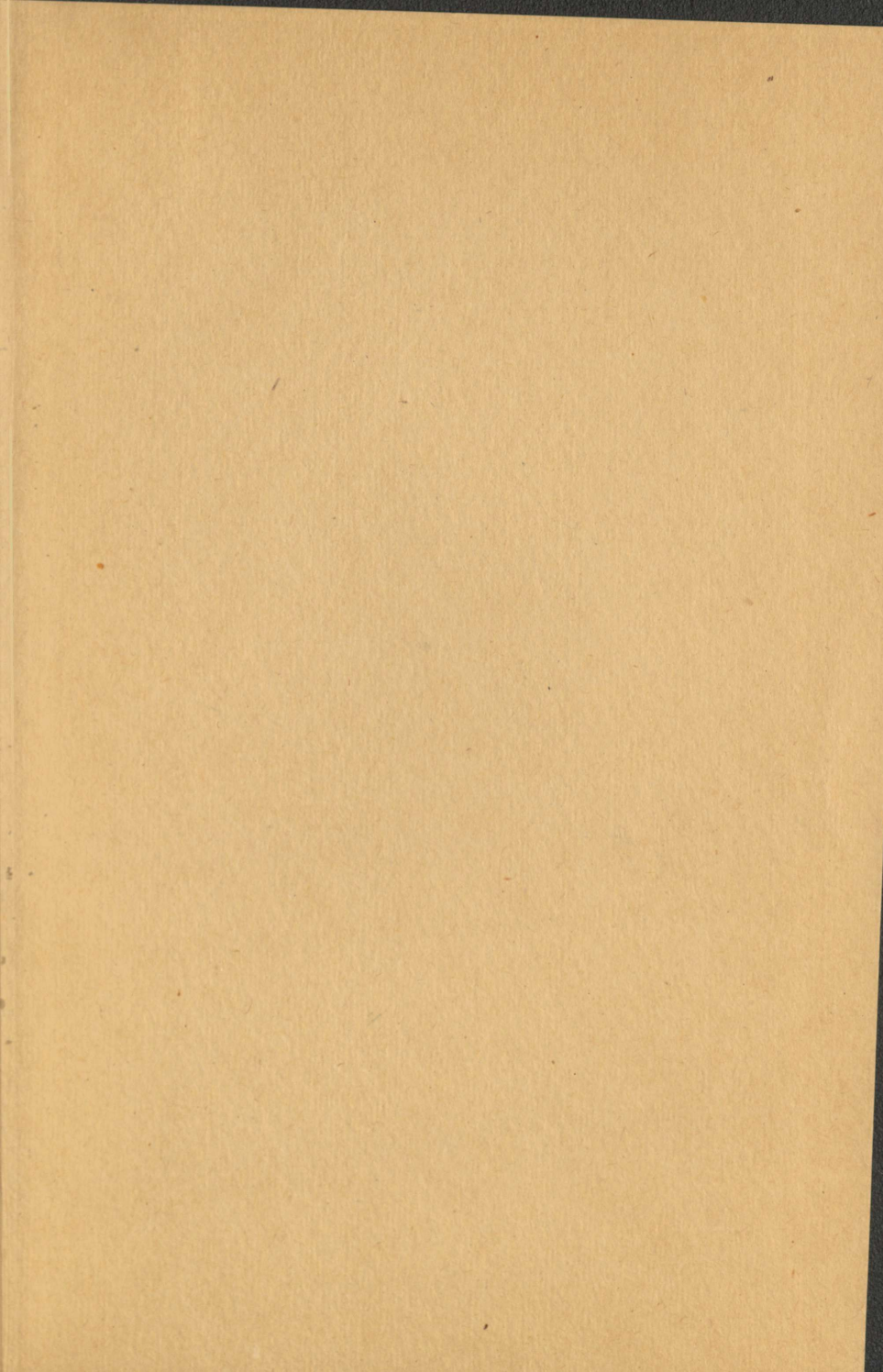
Ю. А. Первин, Об алгоритмизации и программировании игры в домино, Докл. Акад. Наук СССР, 124, I, 1959.

## S i s u k o r d

1.	J. Ross	Põllumajanduslike kultuuride fotosünteesi ja kiirgusrežiimi matemaatiline teooria . . . . .	3
2.	H. Mürk	Mõningatest rakendusmeteoroloogia küsimustest . . . . .	5
3.	H. Marran	Õhuelektriliste vaatlusandmete töötlemisest . . . . .	8
4.	H. Belsalu	Stellaarstatistika - matemaatilise statistika noor distsipliin . . .	12
5.	E. Tiit	Faktoranalüüsi rakendamisest astronoomias . . . . .	15
6.	R. Noorma	Graafide teooria rakendusi . . . .	19
7.	L. Võhandu	Paljutunnuseliste bioloogiliste süsteemide uurimisest matemaatiliste meetoditega . . . . .	21
8.	U. Oper	Vaatlusandmete töötlemisest ENSV TA Küberneetika Instituudi elektronarvutil . . . . .	22
9.	S. Veldre	Osalise loendusmeetodi kasutamisest ja veahinnangust . . . . .	26
10.	T. Veldre	Ühest faktoranalüüsi meetodist . .	28
11.	T. Orav	Nakatusjaotuse (Neyman-jaotuse) kasutamisest rakusiseste kiirguskahjustuste uurimisel . . . . .	29
12.	Ü. Vaher	Hemolüütiliste erütrospektrite jaotuskõverad ja nende parameetrite arvutamine . . . . .	32

13.	T. Krigul	Algandmete probleemist metsa- majanduses . . . . .	36
14.	A. Nilson	Bioloogilise andmetiku vormis- tamisest seoses matemaatilise töötlemisega . . . . .	38
15.	Ü. Lumiste	Kaasaja diferentsiaalgeomeetria meetodid ja rakendusala . . . . .	43
16.	M. Rahula	Liikumiste geometriast . . . . .	48
17.	J. Gabovitš	Tartu algebraistide tööd järjesta- tud algebraliste süsteemide alal.	51
18.	I. Kull	Matemaatiline loogika ja tema ra- kendused . . . . .	57
19.	J. Lotman	Kirjanduse uurimise matemaatilis- test meetoditest . . . . .	65
20.	R. Kolde	Mõningaid gnoseoloogilisi küsimu- si seoses uute matemaatika prog- rammidega . . . . .	66
21.	O. Prints	Keskharidusega arvutusmatemaatiku- te ettevalmistamisest . . . . .	69
22.	H. Merilo	Matemaatika õpetamisest Eesti Põl- lumajanduse Akadeemias . . . . .	72
23.	I. Piir	Füüsika osast matemaatiku haridu- ses . . . . .	74
24.	Ü. Kaasik	Majandusküberneetika põhisuunda- dest . . . . .	76
25.	I. Petersen, S. Ulm	Mittelineaarsete võrrandite numbrilise lahendamise alasest uurimis- tööst ENSV TA Küberneetika Insti- tuudis . . . . .	78
26.	E. Tamme	Veahindamisest diferentsiaalvõr- randite ligikaudsel lahendamisel .	83

27.	H. Poll, A. Pihlak	Elektronarvuti kasutamisest pro- jekteerimistöödel . . . . .	86
28.	M. Krull	Tehase töö küberneetiline mudel . .	89
29.	T. Akkel	Matemaatika põllumajanduses . . . .	91
30.	V. Aasmäe	Söödakõlvikute ja -kultuuride struk- tuuri arvutamine lineaarplaneerimi- se meetodi abil . . . . .	93
31.	V. Allsalu, A. Oja	Analoogarvutid . . . . .	96
32.	P. Piirikivi	Elektronarvutusmasinate arengusuu- nad . . . . .	99
33.	P. Belma	Doomino mängimisest elektronarvu- tusmasinaga . . . . .	101



20  
Hind 11 kop.

A

25244

200817

TÜ RAAMATUKOGU



1 0300 00425335 9