BORKVELL
KASVAND
LAARENS
MAASIK
VIHMAN
O. PAAS

KESKKOOLI ALGEBRA I

$a+b=?$

K./Ü. „LOODUS"

A. BORKVELL / A. KASVAND / F. LAARENS
K. MAASIK / O. PAAS / A. VIHMAN

KESKKOOLI
ALGEBRA I

ÕPPERAAMAT
II ja III klassile

Haridusministeeriumi poolt koolidele tarvitamiseks lubatud.

K./Ü. „LOODUS", TARTU 1937

O./Ü. „ILUTRÜKK", TARTU, 1937.

EESSÕNA.

Tundes tegeliku õppetöö juures äärmist vajadust kohaste matemaatika õpiraamatute ja harjutuskogude järele, asusime tööle lootuses kergendada õpetajale ja õpilasele selle küllaltki raske, kuid ühtlasi vägagi tähtsa aine õpetamist ja õppimist.

Kuigi meie koolikirjanduses on ilmunud küllalt matemaatika õpi- ja tööraamatuid ja nende hulgas mitmeid iseenesest isegi häid, kuid meie praeguste olude ja nõuete kohaseid nende hulgas siiski veel ei ole. Tundub, et me vajame suuremal hulgal töö- ja harjutusmaterjali ühes kokkuvõtlikkude selgitustega ja juhatustega õpilaste virgutamiseks tööle ja nende eneste kontrolli võimaldamiseks tegeliku õppetöö kestes.

Neid nõudeid silmas pidades olemegi kõiki omi kui ka paljude ametivendade kogemusi kasustades koostanud õpiraamatud, mille eesmärgiks seadsime:

1) Anda õpiraamatud kogu keskkooli kursuse ulatuses nii aritmeetikast, algebrast kui ka geomeetriast.

2) Esitada lühidalt ja selgelt teoreetilisi arutlusi ja kaalutlusi kui ka juhatusi iga käsitlemisele tuleva küsimuse kohta.

3) Tuua võimalikult rohkesti metoodiliselt õigesti järjestatud harjutus- ja töömaterjali nii iseseisvaks läbitöötamiseks õpilasele kui ka kontrolli teostamiseks õpetajale.

4) Anda juhatusi ja eeskujulikke lahendusi selleks, et virgutada õpilasi iseseisvale ja viljakale tööle matemaatikas.

5) Võimaldada kõige tihedama kontakti pidamist varemini läbitöötatud aineosadega. Selleks läbi põimida kogu kursus kordamisharjutustega, eriti nendest küsimustest, mis kipuvad kergesti ununema.

6) Rajades kogu õppetöö tööprintsiibile kasustada võtteid ja tööviise, mis vastaksid õpilaste arenemisastmele. Algkoolist tuttavaid induktiivseid töö- ja uurimisviise kasustada ka keskkoolis seni, kuni õpilaste arenemisaste võimaldab asumist deduktiivsetele tööviisidele.

7) Anda materjali ja ergutust järjekindlaks ja pidevaks peastarvutamisvõime arendamiseks õpilastes, seda eriti keskkooli esimestes klassides, sest on ju kiire ja osav peastarvutamisoskus kogu edaspidise töö aluseks.

Kinni pidades neist nõuetest ja sihtidest käesolevate õpiraamatute koostamisel ei taha aga autorid kuidagi kitsendada neid tööviise, millega aineõpetajad juba on harjunud ja milles nad on veendunud. Esitatud näidised ja juhatused ei taha olla ainuõiged, kuid, truuks jäädes oma eesmärkidele, esitame nad siiski selleks, et ergutada õpilasi iseseisvale tööle. Samuti ei mõtle autorid, et tegeliku töö juures oleks võimalus või tarvidus läbi teha kõiki neid harjutusi ja ülesandeid, mis raamatutes toodud, kuid teame, et koolielus on küllalt olukordi, kus tuleb kasustamisele võimalikult suurem hulk neist.

Kuivõrd on õnnestunud meil meie raamatutega loendatud sihtide taotlemine, seda näitab ametivendade suhtumine neisse. Siinkohal olgu südamest tänatud kõik need, kes võtavad vaevaks üles märkida puudusi meie poolt väljaantud raamatutes (Aritmeetika, Algebra I, Algebra II, Geomeetria I, Geomeetria II ja Geomeetria III) ja neist meile, autoreile, ükskõik kellele, teatavaks teevad.

Autorid.

Esimene osa.

I. Täht arvu tähisena. Ülesannete lahendamine üldkujul. Tehete põhiomadusi.

1. Liitmine.

Summa põhiomadusi.

õpilane ostis kaks raamatut, millest üks maksis 1,25 kr., teine 1,50 kr. Mõlemad raamatud kokku maksid:

$$1{,}25 + 1{,}50 = 2{,}75 \text{ (krooni)}.$$

Teiste raamatute eest maksis ta 1,75 kr. ja 2,40 kr. Mõlemad raamatud kokku maksid:

$$1{,}75 + 2{,}40 = \ldots \text{ (krooni)}.$$

Me võime sama ülesande lahendada ka üldkujul, kui võtame ühe raamatu hinnaks a krooni ja teise hinnaks b krooni. Nüüd tuleks raamatute eest maksta kr.:

$$a + b.$$

1. Leia, kui palju tuli õpilasel kahe raamatu eest maksta, kui raamatud maksid a) 0,75 kr. ja 1,50 kr.; b) $1\frac{1}{2}$ kr. ja $2\frac{1}{4}$ kr.; c) 2,4 kr. ja 75 senti; d) $3\frac{1}{5}$ kr. ja 1 kr. 50 senti!

2. õpilane ostis kolm raamatut ja maksis nende eest raha kroonides: a, b ja c. Leia raamatute hind h!

3. Segakoolis oli ühes klassis a poissi ja b tütarlast. Kogu õpilaste arv klassis $n = \ldots\ldots$

Summa kommutatiivsus.

Ants kulutas ühel päeval ühe õpperaamatu ostmiseks a kr., teise ostmiseks b kr. Kokku kulutas ta kahe õpperaamatu ostmiseks kr.: $s = a + b$.

Teisel päeval kulutas ta enne b kr. ja siis a kr. Nüüd kulutas ta kokku kr.: $s = b + a$.

Siin $s = a + b$ on **summa,** a ja b — **liidetavad.**

4. Leia kogu õpilase kulu esimesel ja teisel päeval, kui 1) $a = 2{,}6$ kr.; $b = 4{,}5$ kr.!

2) $a = 4\frac{1}{5}$ kr.; $b = 2\frac{3}{4}$ kr.!

3) $a = 65$ senti; $b = 1{,}20$ kr.!

Arvuta nii: $S = a + b = 2{,}6 + 4{,}5 =$ **7,1 kr.**

$S = b + a = 4{,}5 + 2{,}6 =$ **7,1 kr.**

On ju ükskõik, kas enne kulutada a kr. ja siis b kr., või enne b kr. ja siis a kr. Seega

$$\boldsymbol{a + b = b + a.}$$

Näeme, et **summa ei olene liidetavate liitmise järjekorrast.**

Seda summa omadust nimetatakse summa **kommutatiivsuseks** ehk **vahetatavusseaduseks.**

5. Leia järgnevate suuruste summa!

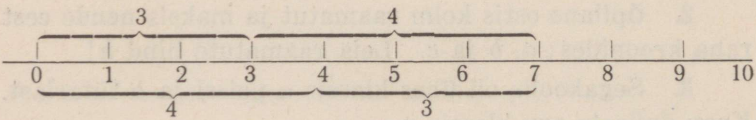
a) 4,8 ja $5\frac{3}{4}$; b) 5,75 ja $9\frac{3}{5}$;

c) 40 senti ja 2,8 krooni; d) 50 cm ja 1,6 m.

Pane tähele: **Summa leidmisel peab liidetavad alati avaldama samades ühikutes.**

6. Joonesta oma vihikusse sirge! Tähista sellel sirgel vasemalt punkt, mis võta algpunktiks ja aseta sellele sirgele algpunktist alates ühesugused lõigud, nagu näidatud juuresoleval joonisel!

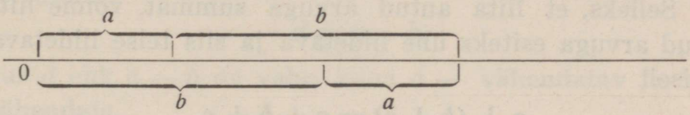
Niisugust sirget nimetame arvteljeks.



1. joonis.

Märgi sellel arvteljel pikkus 3, siit edasi pikkus 4, saad pikkuse $3 + 4$! Võta selle järele enne pikkus 4, siis 3, saad $4 + 3$! Missugused on joonisel $3 + 4$ ja $4 + 3$?

7. Joonesta oma vihikusse enne joonlõik a, siis joonlõik b ning leia siis nende summa $a + b$! Leia lõpuks $b + a$! Võrdle neid pikkusi!



2. joonis.

8. Leia kolme sirglõigu a, b ja c summa! Liida need sirglõigud mitmesuguses järjekorras! Missugused on kõik need summad?

9. Reisija sõitis rongiga $a = 40{,}5$ km, hobusega $b = 12{,}8$ km ja käis jala $c = 5$ km 600 m. Kui palju maad käis reisija üldse?

10. Leia a, b ja c summa, kui $a = 17{,}5$; $b = 20{,}8$ ja $c = 9{,}5$, liites antud arve mitmesuguses järjekorras, nagu $a + b + c$, $a + c + b$, $b + a + c$ jne.

Eelmisest harjutusest võib järeldada, et kommutatiivsus on maksev ka enam kui kahe liidetava puhul.

11. Kasustades kommutatiivsust leia järgmised summad peast kõige lihtsamal teel!

a) $45 + 78 + 15$; b) $20{,}6 + 7{,}8 + 10{,}4$;

c) $5\frac{3}{4} + 1\frac{1}{4} + 5\frac{3}{5}$; d) $5\frac{1}{8} + 6\frac{5}{12} + 2\frac{7}{8}$.

12. Liida veel nii, nagu on lihtsam!

a) $4{,}06 + 7{,}5 + 2{,}94 + 8{,}5$; b) $0{,}08 + 1{,}5 +$
$+ 3{,}02 + 4{,}5$; c) $7\frac{1}{3} + 5{,}75 + 3\frac{1}{4} + 2\frac{2}{3}$;

d) $3\frac{3}{8} + 5\frac{1}{2} + 6\frac{1}{8} + 1\frac{3}{4}$.

Summa assotsiatiivsus.

Isa andis pojale esiteks 15 senti ja siis 5-sendise raha, kuna poisil endal oli enne 20 senti. Isa andis seega $(15 + 5)$ senti ja pojal on nüüd raha: $20 + (15 + 5)$. Aga seda võib üles märkida ka isa rahaandmise järjekorras $20 + 15 + 5$. Nii siis

$$\mathbf{20 + (15 + 5) = 20 + 15 + 5.}$$

Selleks, et liita antud arvuga summat, võime liita antud arvuga esiteks ühe liidetava ja siis teise liidetava. Üldiselt

$$\boldsymbol{a + (b + c) = a + b + c.}$$

Seda summa omadust nimetatakse **assotsiatiivsuseks** ehk **ühenduvusseaduseks.**

13. Leia $a + (b + c)$ ja selle järele $a + b + c$, kui $a = 12{,}5$; $b = 6{,}8$; $c = 4{,}2$!

14. Liida 1) a-ga b, c ja d summa!
2) a-ga esiteks b, siis c ja lõpuks d!
3) a ja b summaga c ja d summa!

15. Leia kõigi nende summade väärtus, kui $a = 40$; $b = 16$; $c = 20$; $d = 14$!

Näidis: 1) $a + (b + c + d) = 40 + (16 + 20 + + 14) = 40 + 50 = 90$.

16. Liida 1) k-ga l, m ja n summa!
2) k ja l summaga m ja n summa!
3) k, l ja m summaga n, kui $k = 12{,}5$; $l = 5\frac{1}{2}$; $m = 3\frac{3}{4}$; $n = 4\frac{3}{8}$!

17. Liida 1) u-ga p, q ja r summa!
2) u ja p summaga q ja r summa!
3) u, q ja r summaga p, kui $u = 6\frac{1}{2}$; $p = = 2{,}5$; $q = 3\frac{1}{5}$; $r = 4\frac{1}{3}$!

2. Lahutamine.

Lahutamise põhiomadusi.

Jukul oli 5 krooni raha. Ta kulutas sellest 2 kr. Seega jäi tal veel järele $5 - 2 = 3$ kr.

Me võime selle ülesande lahendada ka üldkujul, kui ütleme, et Jukul oli a krooni ja tema kulutas sellest ära b krooni. Tähistades järelejääva rahasumma d-ga, võime kirjutada:

$$\boldsymbol{d = a - b},$$

kus d ehk $a - b$ on **vahe**, kuna a — **vähendatav** ja b — **vähendaja**.

18. Leia vahe, kui

a) vähendatav on 10,2, vähendaja 6,4!

b) „ „ 8, „ 3,6!

c) „ „ $3\frac{1}{2}$, „ $2\frac{1}{4}$!

d) „ „ $10\frac{1}{4}$, „ $8\frac{3}{5}$!

19. Kahe arvu summa on 18; kui üks neist arvudest on 10, siis teine arv on $18 - 10 = 8$.

Kahe arvu summa on a; kui üks neist arvudest on b, siis teine arv on $d = a - b$, sest

$$\boldsymbol{a = b + d}.$$

Sellel põhineb lahutamise tulemuse kontroll:

Vähendatav peab alati olema võrdne vahe ja vähendaja summaga.

20. Lahuta ja kontrolli lahutamistulemust!

a) $7\frac{1}{5} - 3\frac{3}{4}$; b) $6{,}2 - 5\frac{1}{2}$;

c) $9\frac{3}{8} - 4{,}75$; d) $12\frac{1}{6} - 5\frac{2}{3}$.

21. Leia järgnevate suuruste vahe!

a) 2 kr. ja 75 senti; b) 5 m ja 2 m 25 cm;

c) 1 km ja 750 m; d) 2 kg ja 1 kg 80 g.

22. Kirjuta oma vihikusse!

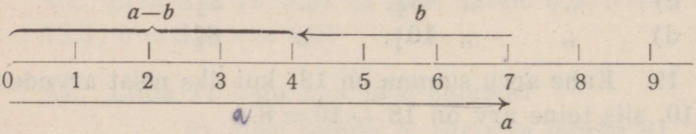
a) a, b ja c summa;

b) m ja n vahe;

c) k ja l summa ja n vahe;
d) n ilma k ja l summata;
e) c ja d vahe ilma c ja d vaheta;
f) k, l, m ja n summa;
g) k ja l summa ilma k ja l vaheta;
h) k, l, m summa ja a, b summa vahe.

23. Märgi oma vihikusse, et
a) a ja b summa on võrdne c-ga!
b) m ja n vahe on võrdne k-ga!
c) m ja n summa on võrdne a ja b vahega!
d) a, b ja c summa on võrdne m ja n vahega!

24. Võta veel arvteljel mingi joonlõik, näit. $a = 7$, lugedes seda pikkust vasakult paremale!



3. joonis.

Jõutud täpist liigu sama joont mööda tagasi näit. $b = 3$ ühikut! Nii jõuame punkti, mille kaugus alguspunktist on $a - b = 7 - 3 = 4$.

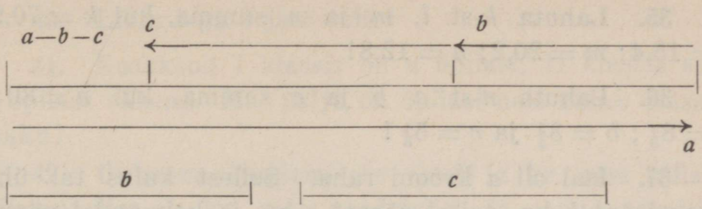
25. Näita sama joonise abil, et $a - a = 0$!

26. Võta oma vihikus veel kaks joonlõiku, näit. m ja h, ja lahuta suuremast väiksem!

27. Kas lahutamisel tohime vahetada vähendatava ja vähendaja kohad? Kas on õige näiteks $a - b = b - a$?

Summa lahutamine.

28. Lahuta mõnest suuremast etteantud joonlõigust, näiteks a-st, esiteks joonlõik b, siis joonlõik c!



4. joonis.

29. Lahuta nüüd a-st enne c ja siis b ja lõpuks liida enne b ja c ja siis lahuta korraga b ja c summa! Mida märkad?

Kas $a - b - c = a - c - b = a - (b + c)$?

30. Lahuta a) 25-st enne 7, siis 8!
b) 25-st enne 8, siis 7!
c) 25-st korraga 8 ja 7 summa!

Harjutusest järeldame, et **me võime lahutamisel vähendajate järjekorda alati muuta.**

Ja lõpuks: **kahe ja enam arvu lahutamisel ühest arvust võime kõik vähendajad liita ja siis lahutada nende summa korraga.**

Lühidalt:

$$\boldsymbol{a - b - c = a - c - b = a - (b + c).}$$

31. $a = 12$; $b = 8{,}4$; $c = 1{,}6$. Leia a) $a - b - c$; b) $a - c - b$; c) $a - (b + c)$!

32. $l = 35\frac{1}{5}$; $m = 12\frac{1}{3}$; $n = 3\frac{1}{2}$. Leia a) $l - m - n$; b) $l - n - m$; c) $l - (m + n)$!

33. $p = 6{,}8$; $q = 2\frac{3}{4}$; $r = 1\frac{1}{5}$. Leia a) $p - q - r$; b) $p - r - q$; c) $p - (q + r)$!

Ka ümberpöördult: **Selleks, et lahutada summat, võime lahutada esiteks ühe liidetava ja siis jäägist lahutada teise liidetava.** Tähendab:

$$\boldsymbol{a - (b + c) = a - b - c.}$$

34. Lahuta 40-st 15 ja 18 summa kolmel viisil!

35. Lahuta k-st l, m ja n summa, kui $k = 70{,}2$; $l = 15{,}4$; $m = 20{,}2$; $n = 12{,}8$!

36. Lahuta n-st a, b ja c summa, kui $n = 30\frac{1}{2}$; $a = 8\frac{1}{3}$; $b = 3\frac{3}{4}$ ja $c = 5\frac{1}{6}$!

37. Isal oli a krooni raha. Sellest kulus tal ühel päeval ära b kr., teisel päeval c kr. ja kolmandal päeval d kr. Anna järelejääva rahasumma arvutamise eeskirjad! Arvuta, kui $a = 22$; $b = 7{,}8$; $c = 6{,}45$; $d = 5{,}08$!

38. Vellol oli n pähklit. Sellest arvust andis ta väikesele õele m tükki, keskmisele õele k ja nooremale vennale l tükki. Kui palju jäi tal järele, kui $n = 36$; $m = 12$; $k = 10$; $l = 8$?

Vahe liitmine.

Selgitamiseks. Äris oli 2 kotti püülijahu. Esimeses oli 75 kg, teises 80 kg jahu. Kaupmees müüs teisest kotist ühele ostjale 25 kg. Kui palju jahu jäi tal veel järele?

Näidis: Teise kotti jäi jahu pärast müümist kg-des: **80 — 25.** Üldse jäi jahu ärri kg-des:

$$75 + (80 - 25).$$

Me võiksime leida jahu hulga äris pärast müümist ka nii, et lahutame müüdud jahu kogu jahu-tagavarast, seega jääks ärri jahu

$$75 + 80 - 25.$$

Nii siis on selge, et

$$\mathbf{75 + (80 - 25) = 75 + 80 - 25.}$$

Siit järeldame: **Selleks, et liita vahet, me liidame vähendatava ja lahutame tulemusest vähendaja.** Seega üldiselt:

$$\boldsymbol{a + (b - c) = a + b - c.}$$

39. Kaupluses oli ühes kotis m kg, teises kotis n kg jahu. Teisest kotist müüdi ära l kg. Kui palju jahu jäi veel järele? Anna eeskiri kahel viisil!

40. Liida k-ga b ja c vahe!

41. Keskkooli I klassis on n õpilast, II klassis aga m õpilast vähem. Kui palju on õpilasi neis kahes klassis kokku?

42. Ülikonna õmblemiseks osteti a kr. eest villast ülikonnariiet, b kr. eest voodririiet ja muud tarvilist materjali, kuna õmblemise eest maksti 20 krooni, millest anti c krooni tagasi. Kui kallis tuli ülikond?

Arvuta ülesanne juhul, kui 1) $a = 36$ kr.; $b = 12$ kr.; $c = 15$ kr.! 2) $a = 42{,}5$ kr.; $b = 18$ kr.; $c = 6$ kr.!

43. Halistel oli linna minnes m krooni raha. Linnas diskonteeris ta veksli, mille valuut k kr., aga mille diskontoks arvati d kr. Kui palju oli nüüd Halistel raha?

Arvuta juhul, kui 1) $m = 27{,}8$ kr.; $k = 15{,}6$ kr.; $d = 1{,}72$ kr.! 2) $m = 120$ kr.; $k = 68$ kr.; $d = 3{,}06$ kr.!

44. Ärimees diskonteeris 2 vekslit, millest ühe valuut oli a kr., kuna selle diskontoks arvati 2,40 kr.; teise veksli hind oli aga b kr., selle viimase diskontoks arvati 1,8 kr. Kui palju raha sai ärimees nende vekslite eest kokku?

Vahe lahutamine.

Selgitamiseks. Juhanil oli 10 krooni raha. Õppetarvete ostmisel andis ta kaupluses 5-kroonise raha ja sai siit veel tagasi 2 kr. Kui palju raha jäi Juhanil veel järele?

Juhan kulutas: $(5 - 2)$ kr.

Tal jäi järele: $10 - (5 - 2) = 7$ kr.

Võiksime arvutada ka nii: 10-st kroonist võttis Juhan alul 5 kr. ja sai pärast 2 kr. tagasi:

$$10 - 5 + 2 = 7 \text{ kr.}$$

Seega:

$$10 - (5 - 2) = 10 - 5 + 2.$$

Selleks, et lahutada vahet, lahutame esiteks vähendatava ja liidame siis vähendaja.

45. Juhanil oli a krooni. Õppetarvete ostmisel andis ta kaupluses b kr., millest talle aga c kr. tagasi anti. Kui palju jäi tal raha veel järele?

Lahendame nii: Juhan kulutas $(b - c)$ kr. Tal jäi siis veel raha järele kr.: $a - (b - c)$. Või ka nii, et võttis oma rahast b kr., sai aga c kr. tagasi: $a - b + c$. Järelikult:

$$a - (b - c) = a - b + c.$$

46. Lahuta kahel viisil:

a) 10-st 5 ja 2 vahe!
b) 12,5-st 3,2 ja 2,8 vahe!
c) $12\frac{1}{2}$-st $2\frac{1}{3}$ ja $1\frac{1}{2}$ vahe!
d) 20,2-st $5\frac{1}{5}$ ja $4\frac{2}{5}$ vahe!

47. Ainol oli 2,5 kr. raha. Ta ostis kooli kooperatiivist raamatu, mille hinnaks oli kaanele märgitud 1,20 kr., millest jäeti aga maha 15 senti. Kui palju raha jäi Ainol veel järele?

48. Ainol oli p krooni raha. Ta ostis kooli kooperatiivist raamatu, mille hind oli q krooni, mida talle aga alandati r krooni võrra. Kui palju raha jäi Ainol veel järele? Avalda vastus kahel viisil!

49. Isal oli k krooni. Ta ostis veksli, mille hind oli a krooni, mille diskontoks arvati aga d krooni. Kui palju raha jäi tal veel järele?

50. Leia vastus eelmisele ülesandele, kui

a) $k = 200$ kr.; $a = 75$ kr.; $d = 1{,}25$ kr.!
b) $k = 150$ kr.; $a = 20{,}5$ kr.; $d = 75$ senti!
c) $k = 100$ kr.; $a = 72{,}25$ kr.; $d = 1\frac{1}{4}$ kr.!
d) $k = 30{,}75$ kr.; $a = 25{,}5$ kr.; $d = 1\frac{2}{5}$ kr.!

Algebralised avaldised.

Selgitamiseks. Kui arvusid tähendavad numbrid või tähed on ühendatud tehtemärkidega, siis saame **avaldised.**

Kui avaldises esinevad ainult numbrid, siis nimetatakse seesuguseid avaldisi **numbrilisteks avaldisteks;** näit.: $10 - 5 + 8$; $7 \cdot 8 - 12$; $\frac{7}{5}$ jne.

Esinevad avaldises aga kas ainult tähelised või tähelised ja numbrilised suurused segamini, siis nimetatakse seesuguseid avaldisi **algebralisteks.**

Nii on algebralised avaldised:

$a + b$; $a - (b + c)$; $k - (m - 10)$; $\frac{a \cdot b}{m^2 + n^2}$ jne.

51. Teisenda järgnevad algebralised avaldised nii, et kaoksid sulud!

a) $a + (b + c)$; b) $a + (b - c)$; c) $a - (b + c)$;
d) $a - (m - n)$; e) $a + b - (c + d)$; f) $(k+l+m)-n$.

52. a) Liida 20-ga m ja n summa! b) Lahuta $2a$-st a ja b vahe! c) Vähenda k-d m ja n summa võrra! d) Suurenda k-d m ja n vahe võrra! e) 16 ja 17 summa vähenda 26 võrra! f) Suurenda $15\frac{1}{2}$ ja $2\frac{5}{8}$ summa $5\frac{3}{4}$ võrra!

53. Ametnikul oli pangas aasta alul k krooni. Sellest võttis ta aasta jooksul välja l kr., kuna aga kapitalile arvati aasta lõpuks i kr. intressi juurde. Kui palju on sel ametnikul aasta lõpuks pangas raha?

54. Liida arvude a ja b summa samade arvude vahega! Koosta avaldis esiteks sulgudega, teiseks ilma sulgudeta!

55. Linda võttis raamatukogust raamatu, milles on 240 lk. Esimesel päeval luges ta p lk., teisel päeval q lk. ja kolmandal päeval r lk. Mitu lk. jäi Lindal veel lugeda?

56. Vello raamatus oli 180 lk. Ta luges esimesel päeval m lk., teisel päeval aga 10 lk. enam kui esimesel päeval. Kolmandal päeval luges ta aga kõik ülejäänud leheküljed. Kui palju luges ta kolmandal päeval?

Ühe ning sama arvu liitmine ja lahutamine.

Ainol oli 25 senti. Koolis ostis ta 5-sendise saia, kodus aga andis ema talle 5 senti jälle juurde. Ainol oli lõpuks raha sentides

$$25 - 5 + 5 = 25.$$

Tähtedega: Ainol oli a senti. Ta ostis b-sendise saia, pärast sai aga jälle b senti juurde. Nüüd oli Ainol raha sentides:

$$a - b + b = a.$$

Lahutades arvust mingi arvu ja liites siis tulemusele sama arvu, mis lahutasime, saame lõpuks endise arvu.

Tähendab:

$$a + b - b = a.$$

57. Anna võimalikult lihtsal kujul!

a) $a - (b + a)$; d) $m + (n - m)$;
b) $k + (l - k)$; e) $n - (m + n)$;
c) $(a + b) + (m - a)$; f) $p - (p - q)$.

58. Emal oli k krooni, sellele sai ta veel n krooni juurde. Sellest rahast kulus tal toidukraami ostmiseks m krooni ja pesu muretsemiseks veel a krooni. Kui palju raha jäi emal veel järele?

59. Jukul oli n õuna, millele ta isalt veel m õuna juurde sai. Oma õuntest andis ta õele b õuna, vennale aga m õuna. Kui palju jäi tal neid veel järele?

60. Kordamiseks *.

1) Leia $y = x + 2{,}5$ väärtus, kui $x = 0$; $0{,}8$; $2\frac{1}{4}$!

2) Leia $y = x - \frac{3}{5}$ väärtus, kui $x = 1$; $2\frac{1}{2}$; $3\frac{1}{4}$!

3) Leia alljärgnevad summad, muutes otstarbekohaselt liidetavate järjekorda!

$3\frac{1}{2} + 7{,}8 + 1\frac{1}{2}$; $0{,}8 + 5{,}7 + 2{,}2$; $5\frac{3}{4} + 7\frac{1}{3} + 2\frac{1}{4} + 6\frac{2}{3}$.

---

* Pealkirja „Kordamiseks" all järgnevad ülesanded ja harjutused on mõeldud harjutamiseks peaasjalikult peast.

4) Anna suuline seletus selle kohta, kuidas leida liidetav, kui summa ja teine liidetav on teada!

$a + b = c$; $a = c \ldots$; $b = c \ldots$.

5) Anna seletus selle kohta, kuidas leida vähendatav, kui vahe ja vähendaja on teada!

$a - b = d$; $a = \ldots$; $a + 7{,}2 = 12{,}8$; $a = \ldots$.

6) Kuidas leida vähendaja, kui vahe ja vähendatav on teada?

$a - b = d$; $b = \ldots$; $10{,}5 - b = 3{,}8$; $b = \ldots$.

3. Korrutamine.

Korrutamise põhiomadusi.

Selgitamiseks. Pliiats maksis 8 senti. 5 pliiatsit maksavad siis $8 + 8 + 8 + 8 + 8 = 40$ senti, või lühemalt $5 \cdot 8 = 40$ senti. 5 ja 8 on siin tegurid, millest esimene on **korrutaja,** teine **korrutatav,** kuna 40 on **korrutis.**

Samuti ka tähtedega:

1 pliiats maksab a senti. 5 pliiatsit maksavad:

$$a + a + a + a + a = 5a \text{ (senti)}.$$

Märkus: Numbriliste tegurite vahele peab panema korrutamismärgi, sest muidu võib arvude lugemisel eksida, aga täheliste ja numbriliste ning täheliste tegurite vahele korrutamismärki tavaliselt ei panda.

61. Üks raamat maksab n krooni. Kuidas üles märkida 10 samasuguse raamatu hind?

62. Ringi raadius on r. Ringi diameeter $d = \ldots$.

63. Võrdkülgse kolmnurga külg on a. Selle kolmnurga ümbermõõt $ü = \ldots$.

64. Arvuta võrdkülgse kolmnurga ümbermõõt, kui kolmnurga külg on $7\frac{1}{2}$ cm!

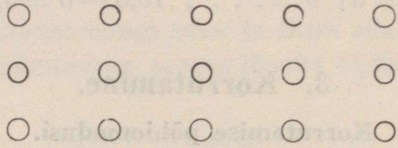
65. Nädalas on 7 päeva. Mitu päeva on n nädalas?

P e a m e e l e s: Numbrilist tegurit tähelise teguri juures nimetatakse **kordajaks** ehk **koefitsiendiks.** Koefitsient kirjutatakse ikka täheliste tegurite ette.

Nii on m nädalas $7m$ päeva.

66. Aastas on 12 kuud. n aastas on siis $12n$ kuud.

Kas võib aga numbrilist tegurit alati ette paigutada? Võtame näite: Isa istutas aeda 3 rida õunapuid, igasse ritta 5 õunapuud, nagu näha alljärgneval joonisel:



Lugedes ridu ülalt alla, saame kokku 3 rida, igaühes 5 õunapuud, seega kokku $3 \cdot 5 = 15$ õunapuud.

Lugedes aga ridu vasakult paremale, saame 5 rida, igaühes 3 õunapuud, seega kokku $5 \cdot 3 = 15$ õunapuud.

Nii siis

$$3 \cdot 5 = 5 \cdot 3.$$

Korrutise suurus ei olene tegurite järjekorrast.

See on korrutise **kommutatiivsus** ehk **vahetatavusseadus.**

Isa istutas n rida õunapuid, igas reas 10 puud. Kokku istutas isa $n \cdot 10 = 10n$ õunapuud.

Isa istutas n rida marjapõõsaid, igas reas m põõsast. Kokku istutas isa siis $n \cdot m = mn$ põõsast.

M ä r k u s 1. Kui mõlemad tegurid on tähelised, siis on ükskõik, mis järjekorras nad asetame, kuid tavaliselt asetatakse tegurid tähestiku järjekorras, näit. kirjutatakse mitte nm, vaid mn.

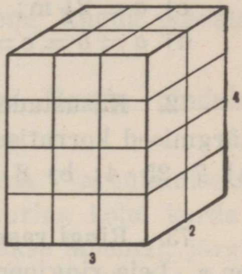
M ä r k u s 2. Kui üks tegureist või ka mõlemad tegurid on 0, siis on ka korrutis 0.

$$0 \cdot m = 0; \quad n \cdot 0 = 0; \quad 0 \cdot 0 = 0.$$

67. Tööline teenis tunnis 25 senti. Ta töötas m päeva, n tundi iga päev. Kui palju teenis tööline selle aja jooksul?

68. Koormasse pandi 5 kotti teri, igas kotis n liitrit, iga liiter kaalus m kg. Mitu kg vilja oli terves koormas?

69. Risttahuka mõõtmed on a, b ja c dm. Leia selle risttahuka ruumala V!



5. joonis.

Võttes a, b, c asemele mingid lihtsad arvud, mis väljendavad mõne risttahuka mõõtmeid (vaata näit. 5. joon.), leia risttahuka ruumala. Võttes selle järele põhja külgedeks kord a ja b, teinekord b ja c ja viimati a ja c, leia risttahuka ruumala! Olgu $a = 3$; $b = 2$; $c = 4$. Leia 1) $(a \cdot b) \cdot c$; 2) $a \cdot (b \cdot c)$; 3) $b \cdot (a \cdot c)$! Mida märkad?

Näidis:

$V = (3 \cdot 2) \cdot 4$; $V = 3 \cdot (2 \cdot 4)$;

seega

$$(3 \cdot 2) \cdot 4 = 3 \cdot (2 \cdot 4).$$

Näidisest selgub, et korrutis ei muutu sellest, kuidas tegureid rühmitada. See on korrutise **assotsiatiivsus** ehk **ühenduvusseadus.**

Selgitamiseks. Kõigi eespool-toodud ülesannete lahendamine toimub üldkujul, kusjuures arvude asemel on antud tähed. Niisuguseid tähelisi eeskirju, mis näitavad, missugused ja mis järjekorras tulevad sooritada tehted, et leida lahendit, nimetatakse **valemiteks.** Nii on risttahuka ruumala valem: $V = a \cdot b \cdot c$.

Tavaliselt antakse valem ikka võimalikult lihtsal kujul. Meie edaspidine ülesanne ongi õppida lihtsustama algebralisi avaldisi ja valemeid ning neid kasustama.

70. Kirjuta üles kolmnurga pindala, trapetsi pindala ja ringjoone pikkuse valem!

71. Tuletatud valemi abil leia risttahuka ruumala numbriline väärtus, kui:

a) $a = 15$ cm; $b = 20$ cm; $c = 18$ cm!
b) $a = 1{,}5$ dm; $b = 0{,}8$ m; $c = 25$ cm!
c) $a = 2\frac{1}{2}$ m; $b = 1$ m 5 dm; $c = 0{,}6$ m!
d) $a = b = c = 2{,}4$ dm!

72. Kasustades korrutise assotsiatiivsust leia peast järgmised korrutised!
a) $7 \cdot 25 \cdot 4$; b) $8 \cdot 16 \cdot 125$; c) $25 \cdot 9 \cdot 40$; d) $7 \cdot 96 \cdot 125$.

73. Ringi raadius on r, ringjoone ja läbimõõdu suhe on π. Leia ringjoone pikkus c!

74. Leitud ringjoone pikkuse valemi abil leia ringjoone pikkus C, kui

a) $r = 2{,}8$ dm; $\pi = 3{,}14$!
b) $r = 2\frac{4}{5}$ m; $\pi = 3\frac{1}{7}$!
c) $r = 0{,}28$ m; $\pi = 3\frac{1}{7}$!
d) $r = 10{,}5$ cm; $\pi = 3{,}14$!

75. Ühelt kroonilt saadakse aastas intressi 0,05 kr. Kui palju saadakse intressi aastas k kroonilt? t aastas k kroonilt? Intress märgi tähega i!

76. Tuletatud valemi abil leia intress i, kui
a) $k = 2600$ kr.; $t = 2$ aastat!
b) $k = 150$ kr.; $t = 3$ kuud!
c) $k = 920$ kr.; $t = 1$ aasta 3 kuud!
d) $k = 42$ kr. 50 s.; $t = 135$ päeva!

77. Trapetsi üks alus on a, teine b ja kõrgus on h. Leia selle trapetsi keskjoon ja pindala!

78. Arvuta valemi abil trapetsi pindala, kui trapetsi
1) alus $a = 15{,}6$ cm; alus $b = 7{,}2$ cm; kõrgus $h = 10$ cm!
2) „ $a = 6\frac{2}{5}$ dm; „ $b = 3{,}8$ dm; „ $h = 4$ dm!
3) „ $a = 5\frac{3}{4}$ m; „ $b = 2{,}25$ m; „ $h = 4\frac{1}{8}$ m!
4) „ $a = 0{,}9$ m; „ $b = 0{,}75$ m; „ $h = 6$ dm!

Korrutis samade tegurite puhul.

Selgitamiseks. Ruudu külg on 5 cm. Ruudu pindala $S = 5 \cdot 5 = 25$ cm^2.

Üldiselt: Ruudu külg on a. Ruudu pindala $S = a \cdot a = a^2$ (loe „a ruudus").

Kuubi serv on 6 cm. Kuubi ruumala V arvutamiseks tuleb kuubi serva pikkus võtta tegurina kolm korda: $V = 6 \cdot 6 \cdot 6$. Viimane korrutis märgitakse lühemalt järgmiselt: $6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3$ (loe „kuus kuubis"). Väikest kolme kuue juures nimetatakse **astendajaks** (astmenäitajaks) ehk **eksponendiks.** See näitab, mitu korda on arv 6 võetud tegurina. Tegurit ennast nimetatakse niisugusel korral **astendatavaks,** kuna terve avaldis 6^3 oleks **aste.**

Avaldame nüüd kuubi ruumala tähtede abil. Tähistame kuubi ruumala V-ga ja kuubi serva a-ga, siis

$$\boldsymbol{V = a \cdot a \cdot a = a^3.}$$

a^3 on siin aste; a — astendatav, 3 — astendaja ehk eksponent.

Nii siis: $a \cdot a = a^2$; $a \cdot a \cdot a = a^3$ (a kuubis ehk a kolmandas astmes); $a \cdot a \cdot a \cdot a = a^4$ (a neljandas astmes); $\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots . a}_{n \text{ tegurit}} = a^n$ (a n astmes).

a^1 on lihtsalt a.

79. Leia ruumala valemi kaudu kuubi ruumala arvuline väärtus, kui kuubi serv on 2,4 dm!

80. Ruudu külg on a. Anna ruudu pindala valem ja arvuta pindala S, kui $a = 0{,}6$ dm!

81. Kuubi serv on a. Anna kuubi täispindala arvutamiseks valem ja leia see täispindala, kui $a = 4{,}8$ cm!

82. Ringi raadius on r, ringi pindala S. Leia ringi pindala, kui $\pi = 3{,}14$ ja $r = 3$!

83. Tuletatud ringi pindala valemi abil leia ringi pindala numbriline väärtus, kui $\pi = 3{,}14$ ja kui a) $r = 7{,}5$ cm; b) $r = 5$ dm; c) $r = 1\frac{3}{4}$ m; d) $r = 5\frac{1}{5}$ dm!

84. Leia veel ringi pindala numbriline väärtus, kui $\pi = 3\frac{1}{7}$ ja kui a) $r = 0{,}14$ m; b) $r = 2{,}1$ dm; c) $r = 3\frac{1}{2}$ cm; d) $r = 8{,}4$ dm!

85. Isa sõitis maalt linna, kuhu oli a km. Kui kaugel on isa linnast siis, kui ta oli ära sõitnud n tundi, keskmiselt n km tunnis?

86. Talunikul on 6 välja põllumaad, iga väli 6 ha. Mitu ha oli talunikul põllumaad?

87. Külvati 8 hl rukkeid. Külv andis 8 seemet. Kui palju saadi üldse rukkeid?

88. Asunikul oli 2 välja kaera; iga väli oli ruut, mille külg a meetrit; igale ruutmeetrile külvati b kg seemet. Kui palju kulus asunikul kaeraseemet?

89. Kirjuta lihtsamal kujul!

a) $a \cdot a \cdot a \cdot a$; b) $a + a + a + a$;

c) $m \cdot m \cdot m \cdot m \cdot m$; d) $m + m + m + m + m$;

e) $(a + b) \cdot (a + b)$; f) $(a + b) + (a + b)$.

90. Avalda korrutisena järgnevad astmed!

a) 3^2; b) c^4; c) mn^3; d) p^2q.

91. Avalda summana! a) $4a$; b) $5m$; c) $3ab$; d) $2cde$; e) $5m^2n$; f) $2m^2n^2$.

N ä i d i s: $2cd = cd + cd$.

92. Avalda korrutisena järgnevad astmed! 1) a^2; 2) 7^3; 3) $(\frac{1}{2})^2$; 4) m^4.

93. Leia avaldiste $2a^2b$; $3ab^2$; a^2b^2 numbrilised väärtused, kui 1) $a = 5$; $b = 2$; 2) $a = 0{,}5$; $b = 3$; 3) $a = \frac{1}{4}$; $b = \frac{1}{3}$!

Arvutamist on lihtis toimetada järgmise tabeli järgi:

a	b	a^2	b^2	$2a^2b$	$3ab^2$	a^2b^2
5	2	25	4	—	—	—
0,5	3					

94. Leia järgmiste avaldiste numbrilised väärtused: $4ab^3$; $2a^3b$; $3a^3b^3$, kui 1) $a = 1$; $b = 0{,}8$; 2) $a = 2{,}4$; $b = 3$; 3) $a = 0{,}1$; $b = 0{,}5$!

Arvutus on soovitav läbi viia eelmise ülesande eeskujul.

95. Kirjuta võimalikult lihtsal kujul!
a) $2 \cdot (a + a + a)$; b) $3 \cdot (a^2 + a^2)$; c) $mn + mn + mn$;
d) $b \cdot b \cdot b + b \cdot b \cdot b$; e) $mn + mn + mn + mn$.

96. Leia järgnevate avaldiste arvulised väärtused!
a) $2mn$; b) $3m^2n$; c) $4mn^3$, kui $m = 0{,}4$; $n = 10$.

97. Kirjuta astmete näol järgnevad korrutised!
a) $(a + b)(a + b)$;
b) $(a - b)(a - b)$;
c) $(a + b)(a + b)(a + b)$;
d) $(m + n)(m + n)(m + n)$;
e) $(m - l)(m - l)(m - l)$.

98. Kirjuta korrutisena järgnevad summad!
a) $(a + b) + (a + b) + (a + b)$;
b) $(a - b) + (a - b) + (a - b) + (a - b)$;
c) $ab + ab + ab$;
d) $m^2n + m^2n + m^2n + m^2n$.

Summa ja vahe korrutamine.

Selgitamiseks. Avaldame liidetavates $2(a+b)$ ja $3(m+n)$:

1) $2(a+b) = a+b+a+b = 2a+2b$

$$\mathbf{2(a+b) = 2a+2b};$$

2) $3(m+n) = m+n+m+n+m+n = 3m+3n$

$$\mathbf{3(m+n) = 3m+3n}.$$

Selleks, et korrutada summat mingi arvuga, võime korrutada iga liidetava eraldi selle arvuga ja siis korrutised liita.

Samuti: 1) $2(a-b) = a-b+a-b = 2a-2b$;

$$\mathbf{2(a-b) = 2a-2b}.$$

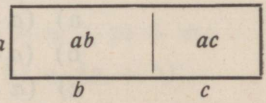
2) $\mathbf{3(m-n) = 3m-3n}.$

Selleks, et korrutada vahet mingi arvuga, võime korrutada selle arvuga vähendatava ja vähendaja eraldi ja siis esimesest korrutisest lahutada teise.

Neid omadusi nimetatakse korrutise **distributiivsuseks** ehk **jaotuvusseaduseks.**

Harjutusi.

99. Veelgi üldisemalt: Joonistame endale esiteks ristküliku, mille alus on $b+c$ ja mille kõrgus on a (6. joon.). Leia selle ristküliku pindala. Jaota selle järele ristkülik alusele tõmmatud ristjoonega kahte ossa nii, et ühe osa alus on b, teise osa alus on c!

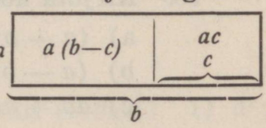


6. joonis.

Näita nüüd, et

$$\mathbf{a(b+c) = ab+ac}.$$

Joonesta teiseks ristkülik, mille alus on b ja kõrgus a! (7. joon.) Selle ristküliku pindala on siis ab. Eralda sellest ristkülikust uus ristkülik alusega c ja näita nüüd, et



7. joonis.

$$\mathbf{a(b-c) = ab-ac}.$$

100. Leia järgnevate avaldiste numbriline väärtus! a) $(a+b)c$; b) $(a-b)c$; c) $(a+b)^2$; d) $(a-b)^2$, kui 1) $a=4$; $b=2$; $c=3$; 2) $a=0{,}2$; $b=0{,}1$; $c=10$.

Arvutamist on soovitav korraldada järgmise tabeli järgi:

Nr.	a	b	c	$a+b$	$a-b$	$(a+b)\cdot c$	$(a-b)\cdot c$	$(a+b)^2$	$(a-b)^2$
1									
2									

101. Ristküliku üks külg on a, teine b. Avalda ristküliku ümbermõõt $ü$!

102. Tuletatud ristküliku ümbermõõdu valemi järgi leia ristküliku ümbermõõt $ü$, kui $a = 7\frac{1}{2}$; $b = 8\frac{3}{4}$!

103. Raamatukaupmees müüs ühel päeval 10 ühesugust raamatut. Kui palju teenis see kaupmees nende raamatute pealt, kui raamat müüdi a krooni eest, kuna raamatu eest oli kaupmees ise maksnud c kr.?

104. Ema laskis õmmelda 5 särki, kusjuures iga särgi materjal tuli maksma m kr., kuna õmblemine maksis n krooni. Kui kallid tulid kõik särgid?

105. Leia särkide õmblemiseks kulunud raha, kui a) $m = 1{,}40$ kr. ja $n = 85$ senti; b) $m = 1{,}50$ kr., $n = 1{,}20$ kr.!

106. Leia järgnevate korrutiste numbriline väärtus! a) $3(2a-b)$; b) $4b(a-c)$; c) $(a-b)(a+b)$, kui 1) $a = 5{,}1$; $b = 2\frac{1}{2}$; $c = 0$; 2) $a = 3\frac{3}{5}$; $b = 0$; $c = 2$.

107. Kordamiseks.

Tee peast järgnevad harjutused!

1) a) $36 \cdot 99$; b) $75 \cdot 102$; c) $43 \cdot 0{,}98$; d) $57 \cdot 1{,}1$.

N ä i d i s: $78 \cdot 99 = 78 \cdot (100 - 1) = 78 \cdot 100 - 78 = 7800 - 78 = 7722$.

2) Avalda liidetavatena: a) $4b$; b) $5mn$; c) $3(a+b)$!

3) Avalda korrutisena: a) $ab + ab$; b) $3ab + 2ab$; c) a^3!

4) Liida nii kiiresti kui võimalik, kasustades summa kommutatiivsust: a) $4,8 + 17,5 + 95,2$; b) $3\frac{4}{5} + 6\frac{1}{4} + 7\frac{1}{2} + 4\frac{1}{5}$!

5) Kasustades korrutise kommutatiivsust ja assotsiatiivsust leia järgnevad korrutised! a) $2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 8$; b) $0,1 \cdot 7,5 \cdot 25 \cdot 4$; c) $8 \cdot 75 \cdot 125 . 0,01$; d) $16 . \frac{5}{7} \cdot \frac{1}{8} \cdot 14$.

6) Leia $a(b - c)$, kui $a = 10$; $b = 2,5$; $c = 1,8$!

7) Leia $(b + c)m$, kui $b = 6\frac{1}{3}$; $c = 2$; $m = 12$!

8) Risttahuka servad on a, b, c. Avalda risttahuka külgpindala, võttes põhja servadeks a ja c!

9) $y = 2(x + 3)$. Leia y väärtus järgmiste x väärtuste puhul: 0; 1; 2; 3; 4; 4,5; $5\frac{1}{4}$!

Tulemused aseta järgmisse tabelisse:

x	0	1	2	3	4	4,5	$5\frac{1}{4}$
y							

10) Leia järgmise summa suurus: $1^2 + 2^2 + 3^2$!

4. Jagamine.

Jagamise põhiomadusi.

Selgitamiseks. Vellole anti nädalas 30 senti saiaraha. Ta jagas kõik selle raha võrdselt 6-de ossa. Igaks päevaks sai ta $\frac{30}{6}$ senti $= 5$ senti.

$$\frac{30 \ldots \text{jagatav}}{6 \ldots \text{jagaja}} = 5 \ldots \text{jagatis}$$

Kontroll: $30 = 6 \cdot 5$

Jagatav = jagaja · jagatis.

Sama ülesanne üldkujul: Vellole anti b päevaks a senti. Ta jagas selle raha vastavalt päevade arvule võrdseteks osadeks, kusjuures ta igaks päevaks sai c senti:

$$\boxed{\frac{a}{b}=c; \qquad a=bc}$$

Jagatav on võrdne jagaja ja jagatise korrutisega.

Harjutusi.

108. Leia järgmised puuduvad arvud!
a) $x:12=5$; b) $m:2\frac{1}{2}=2$; c) $n:0{,}1=20$.

109. Mitmest sendist piisab jagamiseks 5 lapsele nii, et iga laps saaks 10 senti?

110. Mitu õunapuud saaks asetada 10 ritta, igas reas 8 õunapuud?

111. Ristküliku pindala on 1 aar. Kui suur on selle ristküliku alus, kui ta kõrgus on 8 m?

112. Kolmnrga pindala on 48 m². Kui suur on selle kolmnurga kõrgus, kui kolmnurga alus on 12 m?

113. Ristküliku pindala on S, kuna ristküliku alus on a. Avalda ristküliku kõrgus!

114. Kolmnurga pindala on P, kuna kolmnurga kõrgus on h. Avalda selle kolmnurga alus a!

115. Auto sõitis n tunnis a km. Kui palju sõitis ta keskmiselt tunnis?

Kuna jagaja ja jagatise korrutamisel saame jagatava, siis

jagaja saame, kui jagame jagatava jagatisega.

$$\boxed{\frac{a}{b}=c; \qquad b=\frac{a}{c}}$$

116. Leia alljärgnevates avaldistes puuduv numbriline suurus!

a) $\frac{12}{b} = 3$; b) $36 : x = 4$; c) $15 : x = 7{,}5$;
d) $2{,}12 : a = 2$; e) $816 : m = 8$; f) $300 : x = 15$.

117. Leia veel alljärgnevates avaldistes puuduv suurus!

a) $\frac{5}{x} = 2{,}5$; b) $3\frac{1}{3} : x = 10$; c) $9 : x = 27$;
d) $8\frac{1}{3} : y = \frac{4}{5}$; e) $3{,}6 : y = 7{,}2$; f) $8\frac{4}{5} : y = 3\frac{2}{3}$.

118. Leia veel alljärgnevates avaldistes puuduv suurus!

a) $\frac{x}{15} = 0{,}3$; b) $\frac{2{,}4}{x} = 30$; c) $x : 3\frac{1}{5} = 1\frac{1}{3}$;
d) $\frac{y}{23} = 0{,}1$; e) $\frac{y}{3{,}12} = 0{,}5$; f) $y : 5\frac{2}{3} = 2\frac{2}{5}$.

119. Et $0 \cdot n = 0$, siis $\frac{0}{n} = 0$. Leia x, kui a) $x : 5 = 0$; b) $0 : 7 = x$; c) $x : 5 = 0$!

120. Mis on murru nimetaja, mille lugeja on 1 ja mille väärtus on a) 0,5; b) 0,25; c) 0,125?

Näidis: $\frac{1}{x} = 0{,}5$; $x = 1 : 0{,}5 = \ldots$

121. Leia murru nimetaja, kui murru lugeja on 1, murru väärtus aga on: a) 1%; b) 10%; c) $33\frac{1}{3}$ %; d) 1‰.

122. Vali mingi arv, korruta ja jaga seda arvu ühe ning sama arvuga ja järelda siit, et

kui mingit arvu korrutame ja jagame ühe ja sama arvuga, siis jääb esialgne arv muutumatuks.

$$\boxed{\frac{b \cdot a}{b} = a; \qquad \frac{a}{b} \cdot b = a}$$

123. Avalda järgnevad arvud neljandikena!

3; 5; $\frac{1}{2}$; $2\frac{1}{2}$; a; cd.

Näidis: $3 = \frac{4 \cdot 3}{4} = \frac{12}{4}$.

124. Avalda järgnevad arvud viiendikena!
a) 2; b) 3; c) a; d) m; e) $3ab$; f) $4a^2b$.

125. Avalda järgnevad arvud m-dikena!
a) 2; b) 5; c) a; d) ab; e) $4a^2$.

Näidis: $2 = \frac{2m}{m}$.

Korrutise jagamine mingi arvuga.

Selgitamiseks.

$$\frac{4 \cdot 12 \cdot 5}{3} = 240 : 3 = 80.$$

Siin jagasime terve korrutise 3-ga, parem aga on jagada üksikut tegurit:

$$\frac{4 \cdot \overset{4}{\cancel{12}} \cdot 5}{\cancel{3}} = 4 \cdot 4 \cdot 5 = 80.$$

126. Jaga alljärgnevad korrutised: a) $4 \cdot 16 \cdot 25$ 5-ga; b) $24 \cdot 32 \cdot 8$ 12-ga; c) $125 \cdot 45 \cdot 72$ 100-ga; d) $180 \cdot 36 \cdot 48$ 40-ga!

Selleks, et jagada korrutist, võime jagada mõne üksiku teguri selle arvuga.

$$\boxed{\frac{3am}{a} = 3m} \qquad \boxed{\frac{m \cdot n}{a} = m \cdot \frac{n}{a} = n \cdot \frac{m}{a}}$$

Märkus. Seejuures peame tähele panema, et korrutise jagamisel mingi arvuga tohib jagada ainult ühte tegurit antud arvuga või antud korrutise tegureid jagada jagaja teguritega ainult üks kord igaühega.

Harjutusi.

127. Millega oleme jaganud terve korrutise, kui jagame a) ühe teguri 2-ga, teise 3-ga; b) ühe teguri a-ga, teise b-ga; c) ühe teguri korrutame 5-ga, teise jagame 5-ga?

128. Anna alljärgnevad avaldised võimalikult lihtsal kujul!

a) $\frac{1}{3}\cdot 70\cdot 15$; b) $\frac{1}{m}\cdot 25m$; c) $\frac{3}{2}a\cdot 48b$; d) $\frac{3}{5}m\cdot 10n$.

129. Lihtsusta avaldisi, niipalju kui on võimalik:

a) $\frac{2\cdot 4\cdot 18}{9}$; b) $\frac{6ab}{3a}$; c) $\frac{24mn}{18n}$; d) $\frac{a^2}{a}$!

130. Lihtsusta veel avaldisi, niipalju kui on võimalik:

a) $\frac{24b^2}{12b}$; b) $\frac{12a^2b}{5a}$; c) $\frac{36am}{24m^2}$; d) $\frac{a^2b}{ab}$!

131. Lihtsusta veel:

a) $3\cdot\frac{2a}{3}$; b) $m\cdot\frac{2a}{mn}$; c) $\frac{5bc}{a}\cdot am$; d) $\frac{12m}{n}\cdot 2n$!

132. 300 kr. on 5%-ga 2 aastaks hoiule antud. Leia intressi i suurus!

133. a krooni on hoiul p protsendiga t aastat. Avalda intressi i valem!

134. Leia eelmises ülesandes tuletatud intressi valemi järgi intress i, kui:

1) $k = 240$ kr.; $p = 4$; $t = 3$ aastat!
2) $k = 500$ kr.; $p = 5$; $t = 2$ aastat!
3) $k = 180$ kr.; $p = 6$; $t = 2{,}5$ aastat!
4) $k = 90$ kr.; $p = 3\frac{1}{2}$; $t = 6$ kuud!

Arvutamise lihtsustamiseks täida järgmine tabel!

Nr.	k	p	t	$i = \frac{kpt}{100}$
1	240	4	3	
2				
3				
4				

135. Kordamiseks.

1) Kirjuta lühemalt:

a) $a + a + a$; b) $x + x + x + x$; c) $a \cdot a \cdot a \cdot a$;
d) $y \cdot y \cdot y$; e) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$; f) $36 \cdot 36$!

2) Kirjuta liidetavate abil:

a) $4m$; b) $2n$; c) $4 \cdot 3$; d) $3\ mm$!

3) Anna võimalikult lihtne vastus avaldistele:

a) $(17 \cdot 15) : 3$; b) $(36 \cdot 45) : 9$; c) $(7 \cdot 15) : 35$;
d) $(9 \cdot 28) : 21$; e) $(63 \cdot 18) : 128$!

4) Lihtsusta avaldisi:

a) $\frac{2x}{2}$; b) $\frac{3y}{y}$; c) $\frac{7ab}{a}$; d) $\frac{2mn}{2n}$!

5) Lihtsusta veel:

a) $\frac{2a^2b}{ab}$; b) $\frac{4m^2n}{2mn}$; c) $9x^2y : 3xy$!

6) Kirjuta astme näol:

a) $m \cdot m \cdot n \cdot n$; b) $m \cdot m \cdot m$; c) $xyxy$!

7) Leia x väärtus:

a) $\frac{x}{15} = 4$; b) $\frac{3}{x} = 0{,}5$; c) $x = \frac{3{,}6}{0{,}18}$!

8) Määra veel x väärtus:

a) $x : 0{,}25 = 8$; b) $8 = 0{,}4 : x$; c) $3 = \frac{3}{3} : x$;
d) $x : 1\frac{1}{4} = \frac{2}{5}$!

9) Lihtsusta veel:

a) $15a \cdot 2b \cdot \frac{1}{3}c$; b) $3x \cdot 0{,}5y \cdot 4$; c) $\frac{1}{5}m \cdot 2\frac{1}{2}n$!

10) Arv sisaldab 5 kümnelist. Avalda selle arvu numbriline kuju!

11) Arv sisaldab x kümnelist. Anna see arv lühendatud kirjutamisviisil!

12) Kuidas tähistada lühidalt arvu, milles on: a) a kümnelist; b) c sajalist; c) a kümnelist ja 5 ühelist; d) x sajalist ja y ühelist; e) y sajalist ja x ühelist; f) z sajalist, y kümnelist ja x ühelist?

Summa ja vahe jagamine.

Mart ja Rein teenisid kahekesi koos ühel päeval 3 krooni, teisel aga 1 krooni. Kui palju sai sellest rahast kumbki poiss, kui nad jagasid raha ühetasaselt?

Lahendus: Poisid teenisid kahe päevaga $(3 + 1)$ kr. Kumbki sai sellest rahast $\frac{3+1}{2}$ kr. Kui jagada kummagi päeva teenistus eraldi, siis saab kumbki poiss:

a) esimese päeva teenistusest $\frac{3}{2}$ kr.

b) teise „ „ $\frac{1}{2}$ kr.

c) kokku sai kumbki $\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right)$ kr.

Nii siis on ükskõik, kas $\frac{3+1}{2}$ või $\frac{3}{2} + \frac{1}{2}$.

$$\frac{3+1}{2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}.$$

Sama ülesanne üldiselt. Mart ja Rein teenisid koos ühel päeval a kr., teisel b kr. Kui palju teenisid nad kumbki kahel päeval?

Ülesande lahendamisel esimesel viisil sai kumbki $\frac{a+b}{2}$

„ „ aga teisel „ „ „ $\frac{a}{2} + \frac{b}{2}$

Seega:

$$\boxed{\frac{a+b}{2} = \frac{a}{2} + \frac{b}{2}}$$

Siit järgneb: **Selleks, et jagada summat, võime jagada kummagi liidetava eraldi ja siis tulemused liita.**

136. Avalda järgnevad jagatised summadena!

a) $\frac{12 + 15}{3}$; b) $\frac{25 + 10}{5}$; c) $\frac{2a + 4b}{2}$; d) $\frac{3m + 15n}{3}$.

137. Avalda summad jagatistena ja siis lihtsusta!

a) $\frac{7}{2} + \frac{5}{2}$; b) $\frac{13}{5} + \frac{12}{5}$; c) $\frac{3a}{5} + \frac{5a}{5}$; d) $\frac{2m}{7} + \frac{5m}{7}$.

138. Avalda veel järgnevad jagatised summadena!

a) $\frac{m+n}{2}$; b) $\frac{3m+6n}{3}$; c) $\frac{m+2mn}{m}$; d) $\frac{4p+2pq}{2p}$.

139. Avalda summad jagatisena!

a) $\frac{3a}{2}+\frac{b}{2}$; b) $\frac{2}{m}+\frac{5}{m}$; c) $\frac{3p}{2n}+\frac{q}{2n}$; d) $\frac{5mn}{6p}+\frac{mn}{6p}$.

140. Raamatukaupmees müüs 3 ühesugust raamatut, mis maksid tal enesel b krooni, a krooni eest. Kui palju teenis ta iga raamatu pealt?

Lahendus: 3 raamatu pealt teenis ta $(a-b)$ kr.

1 „ „ „ „ $\frac{a-b}{3}$ kr.

1 „ eest sai ta $\frac{a}{3}$ kr.

1 raamat maksis tal enesel $\frac{b}{3}$ kr.

Seega teenis ta 1 raamatu pealt $\left(\frac{a}{3}-\frac{b}{3}\right)$ kr.

Siit järgneb:

$$\boxed{\frac{a-b}{3}=\frac{a}{3}-\frac{b}{3}}$$

Selleks, et jagada vahet, võime jagada eraldi vähendatava ja eraldi vähendaja ja siis esimesest jagatisest lahutada teise.

141. Raamatukaupmees müüs n raamatut, mis maksid tal enesel b krooni, a krooni eest. Kui palju teenis ta keskmiselt iga raamatu pealt?

142. Rühm töölisi, kus n töölist, teenis kokku k krooni, kulutas aga ülalpidamiseks samal ajal l krooni. Kui palju jäi keskmiselt igaühele järele?

143. Avalda vahedena jagatised!

a) $\frac{3a-6b}{3}$; b) $\frac{12m-16n}{4}$; c) $\frac{am-bm}{m}$; d) $\frac{7pq-5pm}{2p}$.

144. Järgnevad vahed avalda jagatistena!

a) $\frac{3a}{5}-\frac{2b}{5}$; b) $\frac{10b}{3}-\frac{7b}{3}$; c) $\frac{am}{n}-\frac{bm}{n}$; d) $\frac{7l}{5k}-\frac{2l}{5k}$.

145. Isa teenis kuus m krooni, ema n krooni. Kui suur oli neil keskmine tulu päevas, kui võtta kuus 30 päeva?

146. Trapetsi üks alus on a, teine b. Leia trapetsi keskjoon m!

147. Leia eelmises avaldises tuletatud keskjoone valemi kaudu trapetsi keskjoone numbriline väärtus, kui 1) $a=15$; $b=7$; 2) $a=20{,}2$; $b=12{,}6$; 3) $a=12\frac{1}{5}$; $b=9\frac{1}{4}$!

Arvutused tee järgmise skeemi järgi!

Nr.	a	b	$a+b$	$m=\frac{a+b}{2}$
1				
2				
3				

148. Trapetsi üks alus on a, teine b, trapetsi kõrgus on h. Avalda trapetsi pindala S!

149. Eelmises ülesandes tuletatud valemi järgi leia trapetsi pindala S, kui 1) $a=24$ cm; $b=16$ cm; $h=1$ dm; 2) $a=18{,}2$ m; $b=15{,}8$ m; $h=14$ m; 3) $a=10\frac{1}{2}$ m; $b=8\frac{1}{5}$ m; $h=10$ m!

Arvutused teosta järgmise skeemi järgi!

Nr.	a	b	$a+b$	h	$S=\frac{(a+b)\cdot h}{2}$
1					
2					
3					

150. Ringi raadius on R. Leia 90^0-se sektori pindala! ($R = 18$ cm.)

151. Ringi raadius on r. Leia 60^0-se sektori pindala! ($r = 10{,}2$ cm.)

152. Ristküliku üks külg on a meetrit, teine b meetrit. Avalda selle ristküliku pindala S aarides! ($a = 30$ m; $b = 25$ m.)

153. Ringi raadius on r dm. Avalda selle ringi pindala ruutmeetrites! ($r = 8$.)

154. Müüdi ruudukujuline tükk maad k kr. eest aar. Kui kallis on see maatükk, kui ruudu külg on a meetrit? ($k = 24$; $a = 42$.)

155. Auto sõitis m tunniga a kilomeetrit. Kui palju sõidaks auto n tunniga, kui oletada, et ta sõidab sama kiirusega? ($m = 3$; $a = 156$; $n = 4{,}5$.)

156. Jagades 14 4-ga saame jagatises 3 ja jäägis 2. Avalda jagatav jagaja ja jagatise ning jäägi kaudu!

157. Missuguse arvu jagamisel p-ga saame jagatisena arvu q ja jäägina r?

158. Kordamiseks.

1) Arvuta peast järgmised korrutised!

   a) $5 \cdot 48 \cdot 25$; b) $32 \cdot 125 \cdot 60$; c) $\frac{3}{4} \cdot 50 \cdot 12$; d) $0{,}25 \cdot 360 \cdot 0{,}5$.

2) Leia $a + b$, kui a) $a = 3\frac{1}{4}$; $b = 2\frac{3}{4}$; b) $a = 7{,}5$; $b = 2\frac{1}{3}$!

3) Leia $a - b$, kui a) $a = 7\frac{1}{8}$; $b = 2\frac{1}{3}$; b) $a = 6{,}75$; $b = 3\frac{4}{5}$!

4) Leia $\frac{m + n}{n}$, kui a) $m = 7{,}2$; $n = 0{,}2$; b) $m = 2\frac{1}{3}$; $n = 3\frac{1}{2}$!

5) Anna võimalikult lihtsal kujul: $aa + aa + aa$!

6) Avalda astme näol: $(m + n)(m + n)(m + n)$!

7) Leia otsitav arv x: a) $4 - x = 1\frac{3}{8}$; b) $x - 2{,}8 = 1{,}4$; c) $x + 0{,}1 = 2$; d) $5{,}2 + x = 10$!

8) Leia puuduv arv: a) $\frac{x}{6} = 12$; b) $\frac{3,2}{x} = 0,4$; c) $7x = 0,21$; d) $3,5x = 105$!

9) Avalda korrutisena: a) $3n + 4n$; b) $2m + 3m$; c) $4mm - 2mm$; d) $2xy - 3xy$!

10) Avalda vahedena: a) $\frac{12a - 8b}{4}$; b) $\frac{mp - mq}{m}$; c) $\frac{75ab - 5cb}{ac}$; d) $\frac{35mc - 7ml}{7m}$!

11) Leia intress i, kui protsendimäär $p = 5,5$; kapital $k = 1600$ kr. ja aeg $t = 36$ päeva!

12) Mitme protsendiga on 1200 kr. $\frac{1}{3}$ aastat hoiul, kui on teada, et sellelt kapitalilt saadakse 22 kr. intressi?

II. Relatiivsed arvud.

1. Negatiivse arvu mõiste.

Selgitamiseks. Mul oli a kr. raha. Ma ostsin b kr. eest kaupa. Mul jäi raha siis veel järele $(a-b)$ krooni.

Võtame tähtede asemele numbrid. Olgu

1) $a=10;\ b=8$

a) $a=10;\ b=10$

3) $a=10;\ b=12$

Mul jäi raha järele:

1) $a-b=10-8=$ **2 krooni**

2) $a-b=10-10=$ **0 krooni**

3) $a-b=10-12=$ **? krooni**

Viimasel juhul olin kulutanud enam, kui mul raha oli. Kuidas on see võimalik? Ilmsesti ei jäänud mul enam raha järele, vaid ma olin teinud endale võlga 2 krooni. Selleks, et lahutamine oleks mõeldav ka niisugusel korral, mil vähendaja on suurem kui vähendatav, asetatakse jäägis selle arvu ette, mis näitab, kui palju on vähendaja ühikute arv vähendatava ühikute arvust suurem, märk „—“.

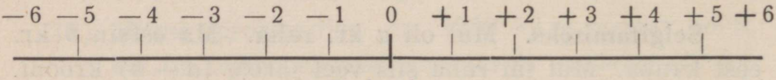
Nii siis $a-b=10-12=-2$ (loe „miinus 2“), kus arv -2 loetakse **negatiivseks** arvuks.

Esimesel juhul, kus

$$a-b=10-8=2,$$

on 2 **positiivne** arv. Seda võib kirjutada ka „+2“ (loe „pluss 2“), kuid tavaliselt jäetakse üksikult seisvale ja avaldise esimesele liikmele + kirjutamata, kui ei ole tarvis seda märki eriliselt rõhutada.

Selgitame veel negatiivse ja positiivse arvu mõistet. Võtame arvteljel 0-punkti telje keskel, kuna paremale poole 0-punktist loeme kaugusi positiivseiks, vasakule aga — negatiivseiks.



8. joonis.

Arvtelg oleks nüüd nagu mingi tee mingist kindlast täpist, näit. Tartust Tallinna poole ja Tartust Valga poole. Läheme seda teed mööda ühele poole (näit. Tallinna poole), siis loeme seda suunda positiivseks suunaks, liikudes aga teisele poole, näit. Valga poole, liigume negatiivses suunas.

Ma sõitsin enne Tallinna poole a km, siis sealt tagasi b km Valga suunas. Kui kaugel olen ma Tartust?

Minu kaugus Tartust on $(a - b)$ km.

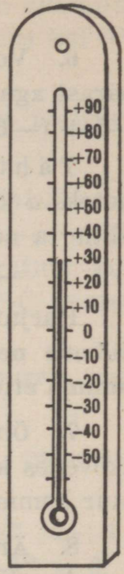
Arvude puhul, kui

1) $a = 10;\ b = 8$
2) $a = 10;\ b = 10$
3) $a = 10;\ b = 12,$

oleks mu kaugus:

1) $a - b = 10 - 8 = 2$ (2 km Tallinna pool);
2) $a - b = 10 - 10 = 0$ (0 km Tallinna pool);
3) $a - b = 10 - 12 = -2$ (2 km Valga pool).

Harjutusi.



9. joonis.

1. Elavhõbeda-samba kõrgus oli hommikul Celsiuse järgi $+a$ jaotust. Päeva jooksul langes temperatuur b jaotust. Avalda termomeetri seis õhtuks!

2. Avalda termomeetri seis õhtuks, kui

1) $a = 5^0$ C; $b = 3^0$ C!
2) $a = 2^0$ C; $b = 2^0$ C!
3) $a = 4^0$ C; $b = 5^0$ C!

3. Avalda järgnevad vahed!

1) $7^0 - 5^0$; 2) $2^0 - 5^0$; 3) $9^0 - 12^0$;
4) $10^0 - 11^0$; 5) $1^0 - 7^0$; 6) $0^0 - 10^0$.

4. Isal oli linna minnes m krooni. Linnas ostis ta n krooni eest kaupa. Kui palju raha jäi isal järele, kui

1) $m = 12$; $n = 7$?
2) $m = 12$; $n = 12$?
3) $m = 7$; $n = 10$?
4) $m = 0$; $n = 5$?

5. Avalda järgnevate rahasummade vahed!

Oli raha	20 kr.	10 kr.	12 kr.	1 kr.	20 s.	0 kr.	1,2 kr.	3 kr.
Kulus ära	15 kr.	15 kr.	12,5 kr.	1,50 kr.	1,20 kr.	2 kr.	1,5 kr.	0 kr.
Jäi järele								

P e a m e e l e s: Negatiivseid ja positiivseid arve nimetatakse koos **relatiivseteks** arvudeks. Nii —2; +3; +5,6; —10 on relatiivsed arvud. Arve aga ilma märgita + ja — nimetatakse **absoluutseteks** arvudeks. Nii 2; 3; 5; 10 on absoluutsed arvud. Aritmeetikas töötasime ainult absoluutsete arvudega.

2. Tehted relatiivsete arvudega.

Negatiivsete arvude liitmine.

6. Voorimees sõitis esiti negatiivses suunas 5 km, pärast aga veel samas suunas 6 km. Kokku sõitis ta siis $-5 + (-6) = -11$ km.

Tähtedega: Voorimees sõitis negatiivses suunas esiteks a km, pärast aga veel samas suunas b km. Kokku sõitis ta negatiivses suunas

$$-a + (-b) = -a - b = -(a + b) \text{ km.}$$

Harjutustest selgub: **Selleks, et liita negatiivseid arve, liidame nende arvude absoluutsed väärtused ja paneme summa ette märgi miinus.**

7. Õhtul näitas termomeeter -10^0 C, öö jooksul „kõvenes külm“ veel 5^0 C võrra. Missugune oli temperatuur hommikul?

8. Ärimehel oli a kr. võlga. Ta tegi b krooni võlga juurde. Kui palju on tal võlga nüüd?

9. Avalda ilma sulgudeta:

1) $-5 + (-7)$; 2) $(-a) + (-2a)$;
3) $(-5m) + (-2m)$; 4) $(-2a) + (-a)$;
5) $(-2ab) + (-4ab) + (-ab)$!

10. Liida järgnevad negatiivsed suurused!

a) -7 ja -12; b) $-b$ ja $-2b$;
c) $-7a$ ja $-2a$; d) $-16a$; $-15a$ ja $-8a$;
e) $-11m$; $-13m$; $-8m$.

11. Avalda veel ilma sulgudeta:

a) $(0 + a) + (0 + b)$; b) $(0 - 5) + (0 - 6)$;
c) $(0 - a) + (0 - b)$; d) $(0 - 2ab) + (0 - 3ab)$!

12. Ärimehel ei olnud kauba ostmiseks enam raha, kuid ta võttis siiski veel esiteks m krooni eest ja siis veel n krooni eest kaupa. Kuidas avaldada algebraliselt tema kassa seis pärast ostu?

Relatiivsete arvude võrdlemine.

On selge, et 5 kr. võlga on väiksem varandus kui 5 kr. raha. Ka loeme -2^0 madalamaks temperatuuriks kui 0^0, $+1^0$, $+2^0$ jne.

Seega on iga negatiivne arv väiksem igast positiivsest arvust ja nullist.

5 kr. võlga on kassa seisukohalt siiski kasulikum, s. o. suurem kui 8 kr. võlga, sellepärast on ka —5 suurem —8-st. 3 kraadi külma on kõrgem temperatuur kui 7 kraadi külma ja sellepärast loeme ikka -3^0 C suuremaks kui -7^0 C.

Siit selgub: **Negatiivsetest arvudest on suurem see arv, kumma absoluutne väärtus on väiksem.**

13. Näita, kumb arv on järgnevates paarides suurem!

1) —5 ja 0;	2) —2 ja +7;	3) —3 ja +1;
4) —7 ja +7;	5) 0 ja +7;	6) —12 ja 0.

Näidis: $-5 < 0$.

Pane tähele, et märgi „<“ (võrratuse märk) terav ots on pööratud ikka väiksema arvu poole!

14. Nimeta järgmine suurem täisarv, mis järgneb —3-le, samuti —3-le eelnev täisarv!

15. Täienda järgmine arvude rida puuduvatega: —5; —4; ... ; —2; ... ; 0; +1; +2; ... ; ...!

Relatiivsete arvude lahutamine.

Kaupmees Kullastel oli 1000 kr. raha, aga tal oli ka 800 kr. võlga. Kaupmehe kassa seis oli seega

$$1000 + (-800) = +200 \text{ (kr.)}.$$

Teisel puhul oli jälle kaupmehel 1000 kr. raha, seekord aga oli tal tekkinud võlga 1200 kr. Nüüd on kaupmehe kassa seis järgmine:

$$1000 + (-1200) = -200 \text{ (kr.) (200 kr. võlga)}.$$

Eespool-toodust järgneb: **Selleks, et liita positiivse arvuga negatiivne, tuleb absoluutselt suuremast arvust lahutada väiksem ja jäägi ette panna absoluutselt suurema arvu märk.**

$$(+a)+(-b)=a-b.$$
$$15+(-18)=15-18=-3.$$

Kaks vastasmärgiga ühesugust arvu annavad summas 0:

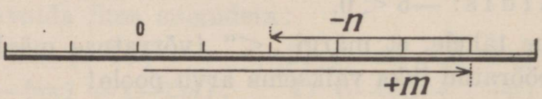
$$+4+(-4)=0;\quad -36+36=0.$$

Liida!

16. a) $40+(-10)$; b) $30+(-50)$;
c) $-70+(+40)$; d) $2a+(-4a)$;
e) $8b+(-4b)$; f) $(-8m)+(+7m)$.

17. Mootorrong sõitis jaamast 0 positiivses suunas m kilomeetrit, siis aga veel n km, seekord aga negatiivses suunas. Kui kaugel on nüüd rong jaamast 0?

$$m+(-n)=m-n$$



10. joonis.

18. Leia rongi kaugus 0-st, kui
a) $m=50$ km; $n=-7$ km!
b) $m=50$ km; $n=-50$ km!
c) $m=50$ km; $n=-65$ km!
d) $m=75$ km; $n=-90$ km!

19. Liida!
a) $2{,}5+(-0{,}45)$ c) $7\frac{1}{2}+(-2\frac{3}{4})$
b) $5{,}08+(-6)$ d) $-10\frac{1}{5}+(+5{,}4)$

20. a) $6\frac{1}{3}+(-2\frac{3}{4})$ c) $8{,}75+(-10\frac{1}{5})$
b) $-8{,}25+(+6\frac{1}{3})$ d) $-2{,}125+(3\frac{3}{8})$

21. a) 5 cm + (—0,8 dm)
b) —6 m + (—12 dm)
c) 5 kg + (—2 kg 800 g)
d) —1,7 hl + (—50 l)

22. a) 3,5 m + (—$2\frac{3}{4}$ m) c) $3\frac{1}{2}$ a + (—$4\frac{1}{3}$ a)
b) —$5\frac{1}{5}$ kg + (+6,5 kg) d) $5\frac{1}{5}$ + (—$3\frac{2}{3}$)

23. Ühel isikul on 700 kr. raha ja 360 kr. võlga. Teisel isikul on 480 kr. raha ja 150 kr. võlga. Kumb isik on rikkam?

24. Termomeeter näitas hommikul kl. 7 $+12^0$ C, lõunal kl. 1 $+16^0$ C ja õhtul kl. 9 $+11^0$ C. Leia päeva keskmine temperatuur ja näita, kui palju erinevad sellest keskmisest temperatuurist hommikune, lõunane ja õhtune temperatuur!

25. Perekonnal kulus jaanuaris 13 kilovatt-tundi, veebruaris 11 kilovt. ja märtsis 8 kilovt. elektrienergiat. Kui palju elektrienergiat kulus sellel perekonnal keskmiselt kuus ja kui palju erineb üksikute kuude elektritarvitus keskmisest tarvitusest?

26. Leia arvude 0,7; 2,3; 4,2; 2,8 keskmine aritmeetiline ja määra, kui palju need üksikud arvud erinevad sellest keskmisest!

Relatiivsete arvude lahutamine.

a) Ametnikul on +120 kr. Kui ta sellest ära kulutab +70 kr., siis jääb tal raha järele:

$$+120 - (+70) = 120 - 70 = 50 \text{ kr.};$$

kulu aga on negatiivne kapital, sellepärast võib lahendada ka järgmiselt:

$$\mathbf{+120 + (-70) = 120 - 70 = 50.}$$

b) On aga ametnikul raha asemel 120 kr. võlga ja on ta sunnitud siiski veel 70 kr. kulusid tegema (muidugi võlgu), siis on tal selle järele kassa seis kroonides järgmine:

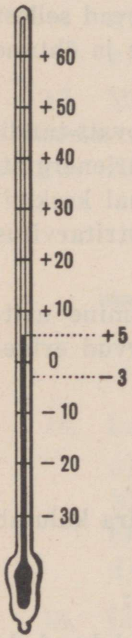
$$(-120) - (+70) = -120 - 70 = -190.$$

Siit järgneb:

$$-120 + (-70) = -190$$ (120 kr. võlga ja veel 70 kr. võlga).

Seega on ükskõik, kas lahutame positiivse või liidame sama absoluutse väärtusega negatiivse arvu.

$$a - (+b) = a + (-b) = a - b;$$
$$-a - (+b) = -a + (-b) = -a - b.$$



11. joonis.

c) Keskpäeval näitas C termomeeter $+5^0$, õhtul aga -3^0. Mitme kraadi võrra on temperatuur keskpäeval kõrgem kui õhtul?

Lahendame ülesande jälle lahutamise teel:

$$+5^0 - (-3^0) = +8^0,$$

sest $+5^0$ on nullpunktist kõrgem $+5^0$, nullpunkt ise aga -3^0-st kõrgem veelgi $+3^0$, seega $+5^0$ on -3^0-st kõrgem $+5^0 + 3^0 = +8^0$. (Vaata kõrvalolev joonis!)

Edaspidi kirjutamegi niisugusel korral:

$$+5^0 - (-3^0) = +5^0 + 3^0 = +8^0.$$

d) Tallinna jaanuari keskmine temperatuur on -6^0 C, Pärnu -4^0 C. Seega on Tallinna jaanuari keskmise temperatuuri ja Pärnu jaanuari keskmise temperatuuri vahe

$$-6^0 - (-4^0) = -6^0 + 4^0 = -2^0,$$

sest selleks, et Pärnu keskmisest temperatuurist saada Tallinna keskmist temperatuuri, peame Pärnu keskmisele temperatuurile -2^0 juurde arvama (vaata 12. joonis!).

Pärnu keskmise jaanuari ja Tallinna keskmise jaanuari temperatuuri vahe aga on:

$$-4^0 - (-6^0) = -4^0 + 6^0 = +2^0,$$

sest selleks, et Tallinna keskmisest temperatuurist saada Pärnu keskmist temperatuuri, peame Tallinna keskmisele temperatuurile $+2^0$ juurde arvama.

Järgneb: **Selleks, et lahutada negatiivne arv, peame liitma selle arvu absoluutse väärtuse.**

$$+a - (-b) = a + b;$$
$$-a - (-b) = -a + b.$$

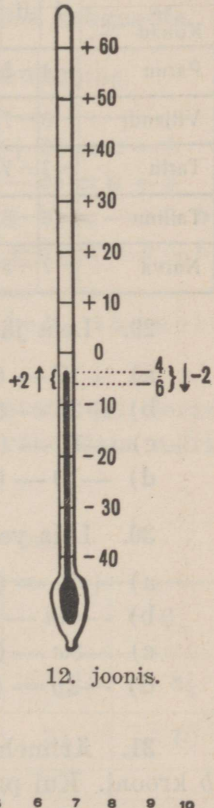
27. Valmista endale allpool-näidatud eeskujul kaks arvtelge ja näita nende abil, missugune on Tallinna ja Pärnu jaanuarikuu keskmiste temperatuuride vahe ja ümberpöördult!

N ä i d i s: $-6 - (-4) = -6 + + 4 = -2$, sest -6 saame, kui me -4-ga liidame -2.

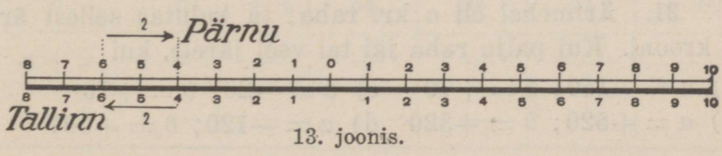
Näita arvtelje abiga, kuidas saab

-2-st -7 ehk $-7 - (-2) =$
-10-st -5 „ $-5 - (-10) =$
-4-st $+8$ „ $+8 - (-4) =$
$+3$-st -6 „ $-6 - (+3) =$

28. Kasustades arvtelge ja allantud keskmiste temperatuuride tabelit leia keskmiste temperatuuride vahed!



12. joonis.



13. joonis.

a) Tartu ja Narva augusti keskmiste temperatuuride vahe;
b) Viljandi ja Tallinna novembri keskmiste temperatuuride vahe;
c) Tallinna veebruari ja juuli keskmiste temperatuuride vahe;
d) Tartu märtsi ja novembri keskmiste temperatuuride vahe.
e) Koosta vastavaid harjutusi ka ise ja lahenda!

Kuude nr. / Kohad	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
Pärnu	−4	−5	−2	+4	+10	+15	+17	+16	+12	+7	+1	−3
Viljandi	−6	−7	−4	+3	+11	+16	+17	+15	+11	+5	−1	−5
Tartu	−7	−7	−3	+3	+10	+15	+17	+15	+11	+5	−1	−5
Tallinn	−6	−6	−4	+2	+9	+15	+17	+16	+12	+6	+1	−3
Narva	−7	−8	−5	+3	+9	+15	+17	+16	+12	+5	−1	−5

29. Leia järgnevad vahed!

a) $+17-(+15)$
b) $+25-(-18)$
c) $-15-(-12)$
d) $-19-(-25)$
e) $-12{,}5-(+9{,}8)$
f) $-2\frac{1}{2}-(-1\frac{3}{4})$
g) $+16\frac{1}{3}-(-3\frac{3}{4})$
h) $+6\frac{1}{5}-(+8{,}6)$

30. Leia veel vahed!

a) $+5a-(-3a)$
b) $-6m-(-7m)$
c) $-8x-(+3x)$
d) $-2y-(+5y)$
e) $-2a-(-3)$
f) $-5b-(+12)$
g) $+20-(+15a)$
h) $+7\frac{1}{8}-(-\frac{3}{4}a)$

31. Ärimehel oli a kr. raha; ta kulutas sellest ära b krooni. Kui palju raha jäi tal veel järele, kui

a) $a=+150$; $b=+70$
b) $a=+520$; $b=+320$
c) $a=-20$; $b=+70$
d) $a=-120$; $b=+50$?

32. Antsul on a krooni raha, Jukul aga b kr. võlga. Mitme krooni võrra on Ants Jukust rikkam, kui

a) $a = 17$; $b = 12$ c) $a = 4{,}5$; $b = 7{,}5$
b) $a = 25$; $b = 30$ d) $a = 6\frac{3}{4}$; $b = 0$?

33. Antsu kassa seis näitab a krooni, Juku oma aga b krooni. Kui palju on Ants Jukust rikkam, kui

1) $a = -12$; $b = +5$ 3) $a = -36{,}2$; $b = -15{,}5$
2) $a = +15$; $b = -8$ 4) $a = 0$; $b = +25{,}5$?

Relatiivsete arvude liitmise ja lahutamise kokkuvõte.

a) Liitmine.

$$\boxed{\begin{aligned}(+a)+(+b)&=a+b\\(+a)+(-b)&=a-b\\(-a)+(+b)&=-a+b\\(-a)+(-b)&=-a-b\end{aligned}}$$

b) Lahutamine.

$$\boxed{\begin{aligned}(+a)-(+b)&=a-b\\(+a)-(-b)&=a+b\\(-a)-(+b)&=-a-b\\(-a)-(-b)&=-a+b\end{aligned}}$$

K õ i k i n e i d v a l e m e i d t u l e b t ä p s e l t m e e l e s p i d a d a!

Pane tähele: Liitmisel jäävad liidetavate ees olevad märgid alles, lahutamisel aga muutub vähendaja märk v a s t u p i d i s e k s.

34. Täida oma vihikusse alljärgnev tabel!

Harjut. nr.	1	2	3	4	5	6
a	4,5	3,2	$2\frac{1}{2}$	-12	$-6{,}75$	$-8\frac{1}{6}$
b	6	-4	$3\frac{4}{5}$	$9\frac{3}{4}$	$5\frac{1}{3}$	-10
$a+b$	—	—	—	—	—	—
$a-b$	—	—	—	—	—	—

35.

a) $+8{,}6$-ga liida $+7{,}8$
b) $+9{,}5$-ga liida $-5{,}8$
c) $+10{,}2$-ga liida $-12{,}5$
d) $-7\frac{1}{2}$-ga liida $+6$
e) $-2{,}6$-ga liida $+8\frac{1}{2}$
f) $-9\frac{1}{3}$-ga liida -7
g) $-12\frac{1}{4}$-ga liida $-8\frac{1}{2}$
h) $+10$-ga liida $-9\frac{3}{8}$

36.

a) $+7{,}2$-st lahuta -8
b) $+9$-st lahuta -5
c) $+13\frac{1}{2}$-st lahuta $-8\frac{3}{4}$
d) -16-st lahuta $+20$
e) $+9{,}25$-st lahuta $+8\frac{1}{2}$
f) $-4{,}8$-st lahuta $-4{,}8$
g) $-10\frac{4}{5}$-st lahuta $-5{,}4$
h) $+8\frac{1}{3}$-st lahuta $-9\frac{2}{3}$!

37.

a) $+2a-(+a)$
b) $+4mn-(-3mn)$
c) $-2p+(-4p)$
d) $-6pq-(+5pq)$
e) $-5n-(+3n)$
f) $+8ab+(-5ab)$
g) $-12{,}5bd-(-6{,}8bd)$
h) $+8\frac{1}{2}a+(-9a)$

Selgitamiseks. Avaldist, milles esineb relatiivsete arvude liitmine ja lahutamine, nimetatakse **algebraliseks summaks.** Selle üksikuid liidetavaid ühes nende märkidega nimetatakse selle summa **liikmeteks.**

Nii on $(+a)+(-3b)-(-\frac{1}{2}c)$ algebraline summa ja $+a$, $-3b$, $+\frac{1}{2}c$ — tema liikmed.

Eespool-toodud juhiste järgi võime antud algebralise summa teisendada järgmiselt:

$$(+a)+(-3b)-(-\tfrac{1}{2}c)=\boldsymbol{a-3b+\tfrac{1}{2}c}.$$

Ka viimasel kujul saadud algebralise summa liikmed on ikka samad: $+a$; $-3b$ ja $+\frac{1}{2}c$.

38. Avalda järgnevad algebralised summad lihtsamal kujul!

a) $+12a+(-8a)$
b) $-9b-(+15b)$
c) $+25m-(+16m)$
d) $-15p+(-19p)$
e) $+7\frac{1}{6}+(-2\frac{1}{3})$
f) $+2{,}6a-(+7{,}2a)$
g) $-10\frac{1}{2}m-(-6{,}2m)$
h) $-9\frac{1}{4}b+(-3\frac{4}{5}b)$

39. Teisenda veel algebralised summad võimalikult lihtsateks!

a) $+5x-(-2x)-(+3x)$

b) $+9a-(+7a)+(+6a)-(-8a)$

c) $+7{,}2m+(-3{,}6m)-(+2{,}5m)-(-0{,}8m)$

d) $6y-(+7y)+(-5\frac{1}{5}y)+(+5{,}4y)-(+3{,}6y)$.

40. Kordamiseks.

1) Leia tundmatu liige avaldises:

a) $3+x=12$ b) $12{,}2-x=7{,}8$

c) $x-2\frac{3}{5}=10\frac{3}{4}$ d) $9\frac{1}{3}+2\frac{1}{2}+x=15$!

2) Leia veel tundmatu arv:

a) $3\cdot x=12$ b) $7:x=3{,}5$

c) $x:0{,}2=10$ d) $6\frac{2}{3}:x=17$!

3) Leia $a+(-b)$ väärtus, kui $a=12\frac{3}{4}$; $b=7\frac{3}{5}$!

4) Leia $a-(-b)$ väärtus, kui $a=2\frac{7}{8}$; $b=1\frac{1}{3}$!

5) Avalda korrutisena:

a) $a+a+a$; b) $ab+ab+ab+ab$;

c) $2ab+3ab-4ab$!

6) Avalda astme näol: a) $a\cdot a\cdot a$; b) $m\cdot m\cdot m\cdot m$; c) $(a+b)(a+b)$; d) $(a-b)(a-b)(a-b)$!

7) Lihtsusta, niipalju kui oskad:

a) $\frac{2a}{5}+\frac{3a}{5}$; b) $\frac{8m}{3}+\left(-\frac{5m}{3}\right)$!

8) Lihtsusta veel:

a) $\frac{3x}{2}+\left(-\frac{5x}{2}\right)-\left(-\frac{x}{2}\right)+\left(+\frac{9x}{2}\right)$;

b) $0{,}7y+(-8y)-(+7{,}5y)-(-12{,}6y)$!

9) Avalda summa ja vahena:

a) $3\cdot(m+n)$; b) $7\cdot(a-b)$; c) $\frac{2}{3}\cdot(6m+2n)$;

d) $\frac{1}{4}\cdot(2k-1{,}2l)$!

10) $4a^2-(+2a^2)-(-a^2)$.

Korrutamine.

Selgitamiseks. Rong sõidab minutis keskmiselt 500 m. Kui kaugele jõuab see rong 10, 30, 60 minutiga?

Me lahendame ülesande korrutamise teel.

Näidis: 10 minutiga jõuab rong edasi:

$$10 \cdot 500 = 5000 \text{ m} = 5 \text{ km}.$$

Siin oli meil tegemist absoluutsete suurustega, seepärast lahendasimegi ülesande nii, nagu seda tegime alati aritmeetikas.

Lahendame sama ülesande nüüd relatiivsete arvudega. Relatiivse kiiruse selgitamiseks võtame jälle arvtelje (näit. raudteeliini Valga—Tartu—Tapa).

14. joonis.

Nimetame kiiruse, mis suunatud vasakult paremale, positiivseks. Nii näiteks, kui rong liigub Valgast Tartu poole või Tartust Tapa poole kiirusega 0,5 km minutis, siis me ütleme, et rong liigub positiivse kiirusega, ja me paneme kiirust väljendavale arvule ette märgi +.

On aga kiiruse suund vastupidine (näit. Tapa—Tartu—Valga), siis on kiirus negatiivne, nimelt — 0,5 km minutis.

Ka aega võime vaadelda relatiivse suurusena. Olgu negatiivse ja positiivse aja lõikemomendiks näit. kesköö, mida tähistame 0-ga. Aega pärast lõikemomenti loeme positiivseks, kuna aega enne seda loeme negatiivseks.

Arvesse võttes nüüd veel seda, et kaugused 0-punktist paremal pool on positiivsed ja kaugused 0-punktist vasakul — negatiivsed, asume oma ülesande juurde.

1) Rong sõitis kiirusega + 0,5 km minutis, kusjuures ajamomendil 0 oli rong 0-punktis. Kus on rong 10 minuti pärast?

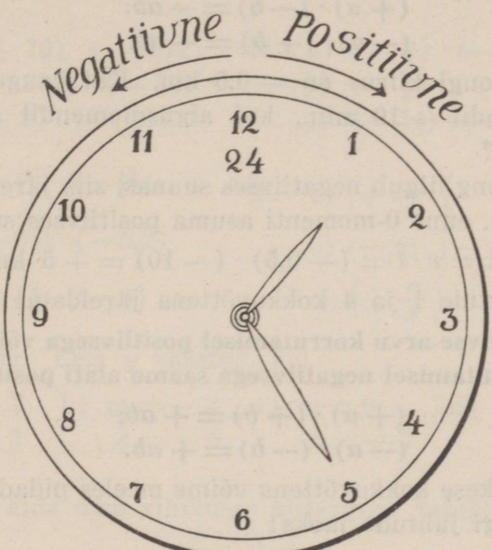
Olgu kauguse alguspunktiks k, kiirus v ja aeg t, siis

$$\mathbf{k} = \boldsymbol{vt}.$$

Käesoleval korral $v = +\ 0{,}5$ km/min., $t = 10$ min.,

$$k = (+\ 0{,}5) \cdot (+\ 10) = +\ 5\ \mathbf{km},$$

s. t. rong osutub 10 minuti pärast paremal pool nullpunkti 5 km kaugusel.



15. joonis.

2) Rongi kiirus on — 0,5 km/min. Kui kaugel on rong + 10 minuti pärast kui ta on lähtemomendil alguspunktis?

$$k = v \cdot t = -\ 0{,}5 \cdot (+\ 10) = -\ 5\ \text{km},$$

sest rong liigub negatiivses suunas ja järelikult peab ta + 10 minuti pärast asuma ka negatiivses suunas 5 km.

3) Rongi kiirus on + 0,5 km/min. Kui kaugel on rong ajamomendil — 10 min., kui rong asub 0-momendil 0-punktis?

Et rongi liikumise kiirus on positiivne ja et ajamomendil 0 peab ta asuma nullpunktis, siis ajamomendil

— 10 minutit peab ta asuma nullpunktist vasakul, järelikult peab kaugus osutuma negatiivseks:

$$k = v \cdot t = (+0{,}5) \cdot (-10) = -5 \text{ km}.$$

Punktide 2 ja 3 kokkuvõttena järeldame:

Positiivse arvu korrutamisel negatiivsega või ümberpöördult saame ikka negatiivse arvu.

$$(+a) \cdot (-b) = -ab;$$
$$(-a) \cdot (+b) = -ab.$$

4) Rongi kiirus on — 0,5 km. Kui kaugel on rong ajamomendil — 10 min., kui algusmomendil asub rong 0-punktis?

Et rong liigub negatiivses suunas, siis järelikult peab ta 10 min. enne 0-momenti asuma positiivses suunas.

$$k = v \cdot t = (-0{,}5) \cdot (-10) = +5 \text{ km}.$$

Punktide 1 ja 4 kokkuvõttena järeldame:

Positiivse arvu korrutamisel positiivsega või negatiivse arvu korrutamisel negatiivsega saame alati positiivse arvu.

$$(+a) \cdot (+b) = +ab;$$
$$(-a) \cdot (-b) = +ab.$$

Lühikese kokkuvõttena võime meeles pidada järgmise lause kõigi juhtude jaoks:

Kahe samade märkidega arvu korrutamisel saame alati positiivse arvu, aga kahe isemärkidega arvu korrutamisel saame negatiivse arvu.

$$\boxed{\begin{aligned}(+a) \cdot (+b) &= +ab\\ (-a) \cdot (-b) &= +ab\\ (+a) \cdot (-b) &= -ab\\ (-a) \cdot (+b) &= -ab\end{aligned}}$$

Harjutusi.

41. Temperatuur muutus toas keskmiselt $+1^0$ C tunnis. Kui palju muutus see temperatuur: 1) + 5 tunniga? 2) — 3 tunniga?

42. Temperatuur muutus toas keskmiselt $-1{,}2^0$ C tunnis. Kui palju muutus temperatuur 1) $+2$ tunniga? 2) -5 tunniga?

43. a) $(-6)\cdot(-3)$
b) $(-7)\cdot(+5)$
c) $(-2{,}4)\cdot(+5)$

44. a) $(-0{,}2)\cdot(+5)$
b) $(+0{,}4)\cdot(-5)$
c) $(+0{,}015)\cdot(+100)$

45. a) $(+10)\cdot(-0{,}12)$
b) $(-100)\cdot(-32)$
c) $(+8)\cdot(-0{,}5)$

46. a) $(+\frac{2}{3})\cdot(-6)$
b) $(-\frac{3}{4})\cdot(+12)$
c) $(-1\frac{1}{2})\cdot(-4)$

47. a) $(-1\frac{1}{4})\cdot(+\frac{3}{5})$
b) $(+2\frac{1}{2})\cdot(-0{,}2)$
c) $(-1\frac{1}{2})\cdot(-4)$

48. a) $(+a)\cdot\left(-\frac{2}{a}\right)$
b) $(-n)\cdot\left(-\frac{m}{n}\right)$
c) $\left(+\frac{a}{b}\right)\cdot\left(-\frac{b}{a}\right)$

49. $y=mx$. Leia y väärtus, kui

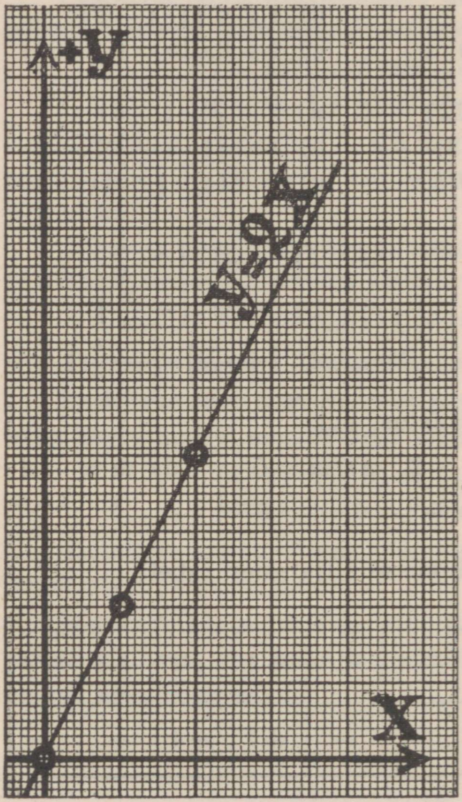
a) $m=+2$, $x=+3$ b) $m=-3$, $x=+5$ c) $m=0$, $x=-7$ d) $m=-4$, $x=-4$

50. Täida oma vihikusse alljärgnev tabel!

x	-4	-3	-2	-1	0	$+1$	$+2$	$+3$	$+4$
$y=2x$	—	—	-4	—	—	$+2$	$+4$	—	—

Leitud x ja y väärtustepaarid määravad tasapinnal punktid, mille asukohad on määratud kahe suunatud x ja y suurusega ehk **koordinaadiga,** kusjuures x väärtusi loeme ühes sihis, näiteks rõhtsihis, y väärtusi aga teises, näiteks püstsihis.

Rõhtsihti tähistatakse tavaliselt tähega x ja nimetatakse ka x-teljeks. See ongi meie tuntud arvtelg. Tema punktide kaugusi paremale poole nullpunktist loetakse positiivseteks, vasakule aga — negatiivseteks. Püstsihti tähistame y-teljega. Kõiki kaugusi, mis on rööbiti x-teljega ja mida loeme y-teljest alates, nimetame edaspidi **rõhtlõikudeks.** Teisi kaugusi aga, mis asetsevad esimesega risti ja mida loetakse rõhtteljest alates, nimetatakse **püstlõikudeks.**



16. joonis.

Kõik püstlõigud, mis on suunatud x-teljest ülespoole, on positiivsed ja lõigud, mis on suunatud x-teljest allapoole, on negatiivsed. Tahame tasapinnal üles märkida näiteks täppi, mille $x = +1$ ja $y = +2$, siis liigume x-telje positiivses suunas 1 ühiku ja y-telje positiivses suunas 2 ühiku võrra; jõuame punkti, mille määrab arvudepaar $(+1; +2)$.

Kuidas samal tasapinnal leida punkt $(-2; -4)$?

Leida kõigile ülesandes nr. 50 leitud väärtustepaaridele vastavad punktid! Kuidas asetuvad need punktid?

51. Joonesta eelmise joonise eeskujul ruudulisele paberile teljestik, leia siis $y = -1{,}5x$ väärtused allantud tabeli andmetel ja leia neile väärtustepaaridele ka vastavad punktid joonisel!

x	-6	-3	-2	0	$+2$	$+4$	$+6$
y	—	—	—	—	—	—	—

52. Termomeeter näitas ühel päeval üksteisele järgnevatel kellaaegadel järgmisi temperatuure:

Kellaaeg	0	2	4	6	7	10	12
Temper.	—2	—3	—5	—4	—2	+1	+3

Võta kellaaegadele vastavad punktid ühel (näit. x-) teljel, temperatuurid teisel teljel ja leia igale arvupaarile vastav punkt!

53. Täida oma vihikusse alljärgnev tabel!

a	$+1{,}5$	$+0{,}8$	$+\frac{3}{4}$	0	$-1{,}5$	$-0{,}12$	-10	$+5\frac{1}{3}$	$+2{,}12$	$-5{,}1$
x	$+6$	-5	$-\frac{4}{5}$	$+0{,}8$	$+3\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$	0	$-1\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{5}$
$y=ax$										

54. Arvuta järgnevate võrrandite väärtustepaarid ja esita nad siis graafiliselt!

a) $y=3x$; b) $y=2x-5$; c) $y=\frac{2}{3}x+3$;
d) $y=0{,}8x+2{,}5$; e) $y=5-2x$; f) $y=1-0{,}5x$.

Õpime lõpuks veel tuletama korrutise enam kui kahest tegurist.

55. a) $(+3)\cdot(+2)\cdot(+4)$
b) $(+7)\cdot(+0{,}5)\cdot(+0{,}02)$
c) $(+\frac{3}{4})\cdot(+\frac{3}{5})\cdot(+3\frac{1}{3})$.

N ä i d i s: $(+3) \cdot (+2) = +6$; $(+6) \cdot (+4) = +24$, või korraga: $(+3) \cdot (+2) \cdot (+4) = +24$.

56. a) $(-4) \cdot (+2) \cdot (+3)$
b) $(-12) \cdot (+0{,}1) \cdot (+0{,}5)$
c) $(+\frac{5}{8}) \cdot (-2\frac{2}{3}) \cdot (+\frac{3}{5})$.

57. a) $(-2) \cdot (-1) \cdot (+3) \cdot (+5)$
b) $(-1{,}5) \cdot (+4) \cdot (-7{,}5) \cdot (+6)$.

Neist harjutustest järeldame:

Kui on korrutada paarisarv negatiivseid tegureid, siis saame korrutise positiivse, on aga negatiivsete tegurite arv paarituarv, saame alati negatiivse korrutise.

58. a) $\frac{2}{3} \cdot (-6) \cdot (-1\frac{1}{2}) \cdot (-5)$
b) $(+\frac{3}{7}) \cdot (-1{,}4) \cdot (+\frac{5}{9})$.

59. a) $3a \cdot (-2a) \cdot (-\frac{2}{3}a)$
b) $(+1{,}5m) \cdot (-0{,}8m) \cdot (-24m) \cdot (+0{,}5)$.

60. a) $\left(-\frac{m}{n}\right) \cdot \left(-2n\right) \cdot \left(-2\frac{1}{2}n\right)$
b) $\left(+2\frac{1}{2}n\right) \cdot \left(-\frac{3n}{m}\right) \cdot \left(-\frac{m}{7n}\right)$.

Jagamine.

Selgitamiseks. Kui on tarvis leida 12-ne ja 4-ja jagatist, siis tähendab see seda, et tarvis leida niisugune arv, mida korrutades jagajaga 4 saame jagatava 12.

$$12 : 4 = 3, \text{ sest } 3 \cdot 4 = 12.$$

Siit ei ole raske otsustada jagatise märki relatiivsete arvude jagamisel.

1) Olgu antud jagada positiivne arv positiivsega:

$$(+ab) : (+a) = +b,$$
$$\text{sest } (+a) \cdot (+b) = +ab.$$

2) Või olgu antud jagada negatiivne arv negatiivsega:

$$(-ab) : (-a) = +b,$$
$$\text{sest } (-a) \cdot (+b) = -ab.$$

Kui jagatav ja jagaja on samade märkidega, siis on jagatis positiivne.

3) On aga jagatav positiivne ja jagaja negatiivne:

$$(+ab) : (-a) = -b,$$

siis peab jagatis olema negatiivne, sest

$$(-a) \cdot (-b) = +ab.$$

4) Samuti tuleb toimida, kui jagatav on negatiivne ja jagaja on positiivne:

$$(-ab) : (+a) = -b,$$

siis peab jagatis olema negatiivne, sest

$$(+a) \cdot (-b) = -ab.$$

Kui jagatav ja jagaja on erimärkidega, siis on jagatis negatiivne.

Harjutusi.

61. a) $(+40) : (-5)$; b) $(+a) : (-a)$

62. a) $(-36) : (-9)$; b) $(-ab) : (-b)$

63. a) $(-72) : (+12)$; b) $(-3a) : (+3)$

64. a) $(+150) : (-30)$; b) $(+5m) : (-m)$

65. a) $(+64) : (+1{,}6)$; b) $(+1{,}5a) : (+0{,}15a)$

66. a) $(+1{,}28) : (-0{,}4)$; b) $(+0{,}2) : (-0{,}02)$

67. a) $(-12{,}12) : (-6)$; b) $(-8) : (-0{,}4)$

68. a) $(+36{,}9) : (-60)$; b) $(+4{,}2a) : (-70)$

69. a) $(-\frac{3}{8}) : (-\frac{4}{5})$; b) $(-\frac{3}{5}a) : (-0{,}4ab)$

70. a) $(+1\frac{1}{5}) : (-\frac{3}{5})$; b) $(-3\frac{1}{3}a) : (-0{,}5b)$

71. a) $(+2{,}4) : (+2\frac{2}{5})$; b) $\left(-\frac{a}{b}\right) : \left(-\frac{ab}{n}\right)$

72. a) $(-1\frac{3}{8}) : (-0{,}125)$; b) $(-m) : \left(-\frac{m}{n}\right)$

73. a) $(+48) : \left(-\frac{8}{11}\right)$; b) $\left(-3\frac{1}{5}\right) : (+4)$

74. a) $\frac{-12{,}5}{+25}$; b) $\frac{-7{,}8}{-0{,}078}$

75. a) $\frac{(-3)\cdot(+2)}{(+4)\cdot(-12)}$; b) $\frac{(+0{,}12)\cdot(-5)}{(-1{,}21)\cdot(-0{,}5)}$

76. a) $\frac{(-2a)\cdot(+\frac{1}{4}b)}{(-1{,}4a)\cdot(+0{,}75)}$; b) $\frac{(-3\frac{1}{3})\cdot(-1)}{(-10)\cdot(-\frac{1}{9})}$

77. Hommikul kell 7 näitas termomeeter -2^0 C, lõunaajal kl. 1 -1^0 C ja õhtul kl. 8 -3^0 C. Leia päevane keskmine temperatuur!

78. Mõõdeti õhutemperatuuri kolm korda ja leiti järgnevad kraadide arvud:

a) -5^0 C; $+1^0$ C; $+2^0$ C
b) -2^0 C; $+5^0$ C; $+1^0$ C
c) -12^0 R; -15^0 C; -6^0 C

Leia keskmine temperatuur täpsusega kuni $0{,}1^0$ iga päeva kohta eraldi!

79. Leia järgnevate arvude keskmine aritmeetiline ja leia selle keskmise erinevus igast üksikust antud arvust!
a) -5; $+6$; -7; b) $-2{,}6$; $-3{,}2$; 0; $+1{,}2$;
c) 0; $+7{,}2$; $-1{,}2$; $-3{,}6$.

Astendamine.

Selgitamiseks.

$a \cdot a = a^2$; $b \cdot b \cdot b = b^3$ jne.
$(+a)(+a) = +a^2$; $(+b)(+b)(+b) = +b^3$;
$(-a)\cdot(-a) = +a^2$; $(-b)\cdot(-b)\cdot(-b) =$
$= +b^2 \cdot (-b) = -b^3$.

Nii siis:

$$(+a)^2 = (+a)(+a) = +a^2$$
$$(+a)^3 = (+a)(+a)(+a) = +a^3$$
$$(-a)^2 = (-a)(-a) = +a^2$$
$$(-a)^3 = (-a)(-a)(-a) = -a^3.$$

Pane tähele, et märgiga + ja — varustatud astendatavad on alati sulgudes. Nii kirjutatakse $(-2)^2$; $(+3)^2$; $(-2)^3$; $(+a)^3$ jne.

Neist harjutustest järeldame:

1) **Positiivse aluse astendamisel saame alati positiivse arvu.**

2) **Negatiivse aluse astendamisel paarisarvulise astendajaga saame alati positiivse arvu.**

3) **Negatiivse aluse astendamisel paarituarvulise astendajaga saame aga alati negatiivse arvu.**

Harjutusi.

80. a) $(-2)^3$; b) $(-2a)^2$

81. a) $(-10)^2$; b) $(-0{,}1a)^2$

82. a) $(-0{,}1)^3$; b) $(-2)^3 \cdot (-3)^3$

83. a) $(-2{,}5)^2 \cdot (+10)^3$; b) $(-0{,}12)^2 \cdot 10^2$

84. a) $(-1{,}2)^3 \cdot 10^2$; b) $(-3{,}5)^2 \cdot 10^2$

85. a) $(-1)^2 \cdot 2^3 \cdot (+0{,}1)^2$; b) $(-1)^3 \cdot 10^3 \cdot 0{,}5^3$

86. a) $(-1)^3 \cdot 5^2$; b) $(-1)^2 \cdot (0{,}2)^3$

87. a) $(-1)^3 \cdot 10^3$; b) $(-xy)^4$

88. a) $(-1)^2 \cdot 0{,}01m$; b) $(-2x)^2 \cdot (-2x)^3$

89. a) $x^3 \cdot (-x) + (-0{,}1)^3 \cdot x^4$
b) $(-0{,}2a)^2 + (-0{,}1a)^2$

90. Leia avaldise $\frac{x}{x-1}$ väärtus, võttes
a) $x = \frac{1}{2}$; b) $x = 2\frac{1}{2}$; c) $x = 1{,}8$!

91. Leia avaldise $\frac{y-1}{y^2}$ väärtus, võttes
a) $y = 2$; b) $y = \frac{3}{4}$; c) $y = 1\frac{1}{5}$!

92. Leia avaldise $\frac{u-v}{u+v}$ väärtus, võttes
a) $u = 5$ ja $v = 3$; b) $u = 2$ ja $v = 7$;
c) $u = \frac{3}{4}$; $v = 2\frac{1}{2}$!

93. Kordamiseks.

1) Liida $3a$ ja $2b$ summa samade arvude vahega!

2) a) $a - 2b - (3a + 2b)$; b) $4m + (2m - 5n)$.

3) Korruta peast: a) $98 \cdot 48$; b) $101 \cdot 78$!

4) a) $1{,}5^2 - 0{,}4^2$; b) $(\frac{2}{3})^2 + (\frac{1}{2})^2$!

5) Leia $2ab^2$ väärtus, kui $a = \frac{1}{5}$; $b = \frac{1}{2}$!

6) Leia x, kui a) $\frac{1{,}2}{x} = 30$; b) $\frac{x}{1\frac{1}{2}} = 6$!

7) Trapetsi alused on $3a$ ja a. Leia trapetsi aluste poolsumma!

8) Ristküliku üks külg on a, teine b. Leia ümbermõõt!

9) Leia avaldise $a + b$ väärtus, kui
   a) $a = +3\frac{1}{2}$; $b = -2\frac{3}{4}$
   b) $a = -4\frac{1}{5}$; $b = +2\frac{1}{3}$
   c) $a = -2{,}5$; $b = -0{,}8$

10) Leia avaldise $\frac{a \cdot b}{c}$ väärtus, kui
   a) $a = +1$; $b = -2$; $c = +0{,}5$
   b) $a = +2$; $b = -3$; $c = -1{,}5$
   c) $a = -0{,}2$; $b = -5$; $c = +\frac{1}{2}$.

III. Üksliige ja hulkliige.

1. Tehete järjekord ja sulud.

Selgitamiseks. Mõnikord soovitakse tehteid avaldises sooritada mitte märkide kirjutamise, vaid mõnes teises järjekorras; siis tarvitatakse selle järjekorra kindlaksmääramiseks sulgusid; need on ( ) ... ümmargused sulud, [ ] ... nurgelised sulud ja { } ... loogelised sulud.

Nii näiteks avaldises

$$(20 - 15) \cdot 6$$

tuleb kõige enne teostada lahutamine, siis alles korrutamine.

Avaldises aga

$$(42 - 36) \cdot (7 + 8)$$

tuleb toimetada enne lahutamine, siis liitmine ja lõpuks tuleb leitud vahe korrutada leitud summaga.

Mõnikord on tarvis veelgi enam sulgusid selleks, et tehete järjekorda kindlaks määrata:

$$2 \cdot \{[(2 + 5) \cdot 10 + 5] \cdot 12 + 10\}$$

Siin tuleb kõige enne täita ümmargused sulud: $2 + 5 = 7$. Selle järel: $7 \cdot 10 = 70$; $70 + 5 = 75$. Seega on avaldise väärtus nurgelistes sulgudes leitud. Seda nurgelistest sulgudest leitud arvu 75 tuleb nüüd korrutada 12-ga; $75 \cdot 12 = 900$; $900 + 10 = 910$. Viimane on loogelistest sulgudest leitud väärtus. Kui lõpuks seda viimast korrutada veel 2-ga, siis on avaldis arvutatud: $2 \cdot 910 = 1820$.

Harjutusi.

Leia järgnevate avaldiste väärtused!

1. $(36 + 35) - (48 - 25)$
2. $(25 - 16) \cdot 20 - 38$
3. $(75 + 38) \cdot (25 + 15)$
4. $(2\frac{1}{2} - 1\frac{3}{4}) \cdot 2 + (7\frac{1}{3} - 4\frac{2}{3}) \cdot 6$
5. $(9\frac{1}{4} - 2{,}5) \cdot [10 - 3 \cdot (5\frac{1}{2} - 2\frac{3}{4})]$
6. $[10 \cdot (3\frac{1}{3} - 2\frac{5}{6}) - 4\frac{3}{8}] \cdot (3\frac{1}{5} - 2\frac{3}{5})$
7. $[0{,}2 \cdot (3{,}1 - 2{,}5) + 0{,}1 \cdot (2 - 1{,}2)] \cdot 10$

Aga ka sulgudeta avaldises tuleb teatud muudatusi tehete järjekorras ette võtta, kui seal peale liitmise ja lahutamise, mida nimetatakse *alama järgu* teheteks, esineb veel korrutamine ja jagamine kui *keskmise järgu* tehted või astendamine kui *kõrgema järgu* tehe.

Peame meeles: Kui avaldises ei ole sulgusid, siis tuleb üksteisele järgnevaist tehetest kõige enne teostada kõrgema järgu tehted (astendamine), siis keskmise järgu tehted ja viimaks alama järgu tehted.

Näidis: $3 \cdot 7 + 2 \cdot 4 = 21 + 8 = 29$.

Harjutusi.

Leia järgnevate avaldiste numbrilised väärtused, tehes enne ikka kõrgema järgu, siis keskmise ja lõpuks alama järgu tehted!

8. $7 \cdot 5 - 4 \cdot 6$
9. $3^2 \cdot 4 + 2^3 \cdot 10$
10. $3 \cdot 5^2 - 6 \cdot 4^2$
11. $\frac{3}{4} \cdot 2^3 - \frac{3}{5} \cdot 10^2$
12. $2 \cdot (\frac{2}{5})^2 + \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5}$
13. $0{,}2 : 4 - 2\frac{3}{4} : 22$
14. $8\frac{3}{4} : (\frac{1}{2})^3 + 0{,}75 : 0{,}05$

15. $(5\frac{1}{3} : 1\frac{3}{5} + (\frac{3}{4})^2 \cdot 2^3$
16. $(7{,}2 \cdot 10^2 - 180) : 40$
17. $0{,}92 : 0{,}4 + (+ 0{,}1)^2 \cdot 840$
18. $(4{,}8 : 0{,}012 - 5{,}4 : 0{,}3^3) : 40$

Märkus 1. On kõrgema ja keskmise järgu tehted kõik täide viidud, siis on ükskõik, missuguses järjekorras sooritame liitmise ja lahutamise, kusjuures aga iga liige ikka tuleb võtta oma märgiga, kui ainult need viimased tehted ei ole kitsendatud sulgudega.

Märkus 2. Järgnevad avaldises üksteisele korrutamine ja jagamine, siis tarvis tehted sooritada tehete kirjutamise järjekorras.

Näidis: $6:3 \cdot 2 = (6:3) \cdot 2 = 2 \cdot 2 = 4.$
Mitte $6:(3 \cdot 2) = 6:6 = 1.$

19. $2^3 : 0{,}4 - 7{,}2 : 1{,}2 + 0{,}5^2 : 0{,}05$
20. $0{,}6 \cdot 2{,}5 + 0{,}5^2 \cdot 10^2 - 7{,}8 \cdot 0{,}5$
21. $\frac{3}{4} \cdot 2{,}8 + 7{,}5 \cdot 40 - 30 \cdot 0{,}1^2$
22. $(9{,}2 - 0{,}5) \cdot (3{,}5 \cdot 10^2 - 70 \cdot 0{,}1)$
23. $5 \cdot \frac{4}{9} + 12 : 3 \cdot 2 - 90 \cdot (0{,}1)^2$
24. $120 \cdot 0{,}01 : 0{,}04 + 5{,}8 \cdot 10$

Leia järgnevate avaldiste numbrilised väärtused!

25. $(am - bm) : (a - b)$, kui $a = 10$; $b = 5$; $m = 3$.
26. $(a^2 - b^2) : (a - b)$, kui $a = 7{,}6$; $b = 5{,}2$.
27. $(a^2 - 16) : (a + 4)$, kui $a = 10$.
28. $(\frac{4}{5} m^2 + \frac{3}{7} m - 2\frac{1}{2}) : (\frac{3}{5} m - \frac{1}{2})$, kui $m = 5$.
29. $(a^3 - b^3) : (a - b)$, kui $a = 1{,}5$; $b = 0{,}8$.
30. $24 + [27 + (19m - 5)]$, kui $m = \frac{1}{2}$.
31. $(104 - 3n) + [(66 - 3n) - 15]$, kui $n = 2{,}6$.
32. $(7x + 5) + [3x + (6x - 9)]$, kui $x = 1{,}4$.
33. $(22y + 8) - [17 - (13 - 19y)]$, kui $y = \frac{1}{3}$.

2. Üksliige ja hulkliige.

Selgitamiseks. Kui avaldise viimane tehe ei ole mitte liitmine ega lahutamine, vaid mõni keskmise või kõrgema järgu tehe, siis nimetatakse seesugust avaldist **üksliikmeks** ehk **monoomiks.**

Nii näiteks on üksliikmed (monoomid):

a . . . . ei olegi viimast tehet.

$2a$ . . . . viimane tehe on korrutamine.

$3a^2$ . . . . „ „ „ korrutamine.

$\frac{a+b}{c}$ . . . . . „ „ „ jagamine.

$(a-b)^2$. . . . „ „ „ astendamine.

$\frac{(a+b)(a-b)}{cd}$ . . „ „ „ jagamine.

Kõik eespool-toodud avaldised on üksliikmed, sest nendes ei ole viimane tehe mitte liitmine ega lahutamine.

On kaks üksliiget ühendatud teineteisega liitmis- või lahutamismärgiga, siis saame **kaksliikme** ehk **binoomi**; on aga kolm üksliiget ühendatud liitmis- või lahutamismärgiga, siis saame **kolmliikme** ehk **trinoomi**.

Avaldisi, milles on kaks või enam üksliikmeid, nimetatakse **hulkliikmeiks** ehk **polünoomideks.**

Nii on polünoomid:

$2a + 3a^2b$ . . . kaksliige (binoom).

$\frac{3a}{c} + \frac{a-b}{c} - 2c^2d$ . . . kolmliige (trinoom).

$2ax - 36x - y + 5by - 3$ . . . viisliige.

3. Polünoomide koondamine.

Polünoome saame lihtsustada, s. t. vähendada nende liikmete arvu. On näiteks meie polünoom

$$2a + 3a - b - 2b - a,$$

siis on võimalik ühendada kõik liikmed, mis sisaldavad a-sid, ja teiseks ühendada liikmed, mis sisaldavad b-sid:

$$2a + 3a - a = 5a - a = 4a;$$
$$-b - 2b = -3b;$$
$$2a + 3a - b - 2b - a = \mathbf{4a - 3b}.$$

Viieliikmelisest polünoomist oleme saanud kaheliikmelise. Seesugust polünoomi lihtsustamist nimetatakse polünoomi **koondamiseks.**

Koondada saame ainult **sarnaseid** liikmeid, s. o. neid liikmeid, mis ei erine üksteisest üldse või milles erinevad ainult eesolevad märgid või kordajad või nii märgid kui ka kordajad.

Nii on polünoomis

$$3a^2b - 0{,}2a^2b + a^2b - \tfrac{3}{5}a^2b + 10$$

sarnased järgmised liikmed:

$$+3a^2b;\ -0{,}2a^2b;\ +a^2b;\ -\tfrac{3}{5}a^2b.$$

On sarnaseid liikmeid enam kui 2, siis koondame enne kõik sarnased liikmed märgiga $+$, selle järel sarnased liikmed märgiga $-$ ja lõpuks koondame mõlemad tulemused.

Näidis:

$$3a^2b - 0{,}2a^2b + a^2b - \tfrac{3}{5}a^2b + 10 =$$
$$= 3a^2b + a^2b - 0{,}2a^2b - 0{,}6a^2b + 10 =$$
$$= 4a^2b - 0{,}8a^2b + 10 = \mathbf{3{,}2a^2b + 10}.$$

34. Avalda järgnevate liikmete summa ja koonda saadud hulkliiget!

$$+12a;\ +3b;\ +4a;\ +2b.$$

35. Avalda veel summana ja koonda summat!

$$+x;\ +2y;\ +2x;\ +5x;\ +2y.$$

36. Koonda järgnevad hulkliikmed, niipalju kui võimalik!

a) $3x - 4y - 2y$; b) $4x - 2x + 3y$

37. a) $15a - 20b - 7a$; b) $2a - 6b + 7b$

38. $1{,}2 - 0{,}8a + 2{,}5b - 0{,}7b$

39. $\frac{1}{2}m - \frac{1}{4}n + \frac{3}{4}m + \frac{1}{2}n$

40. $\frac{3}{5}ab - \frac{1}{2}ab + 3a^2b - 7a^2b$

41. $\frac{3}{8}x - 2y - \frac{3}{4}y + \frac{3}{4}x$

42. $27a^2b - 16a^2b + 24ab^2 + 15a^2b - 36ab^2$

43. $4{,}2m^2 - 3{,}8n^2 - 2{,}8m^2 - 1{,}2mn - 5{,}2n^2$

44. $2\frac{1}{5}n - 4\frac{3}{4}v + 1\frac{1}{2}n - 0{,}8v$

45. $2\frac{1}{3}a - 3\frac{1}{2}b - 4\frac{1}{2}a - \frac{3}{4}c + 5b$

46. $6a^2b - 3\frac{3}{8}a^2b + ab^2 - 1\frac{3}{5}ab^2 + ab$

47. $4p^2 - 12q + 2p^2 + 10q^2 - 7q$

48. $2{,}2m - 1{,}15m + 7n - 6{,}5n + 2mn$

49. $4\frac{1}{6}x - 2\frac{1}{2}x + 5\frac{1}{3}y - 2\frac{1}{4}y + 6xy$

50. $15x^2 - 9x^3 + 2x + 6x^3 - 9x^2$

51. $2ab^3 + ab^3 - 3a^2b - 4ab^3 - 6a^2b$

52. $5\frac{1}{2}a^2b - 2\frac{1}{4}ab^2 - 3\frac{1}{4}a^2b + 2\frac{3}{5}ab^2$

53. Moodusta summa järgnevatest monoomidest ja koonda siis summat!

$2a^2b$; $-3ab^2$; $+5a^2b$; $-3a^2b$

54. Moodusta veel summa järgnevatest monoomidest ja koonda siis summat!

$2x^2y$; $-3x^2y$; $+5xy^2$; $-4xy^2$

Koonda järgnevad summad (vt. lk. 40—47)!

55. $4a + (-3a) - 5b + (-2b)$

56. $5{,}6m - (+6{,}2m) + 7{,}2n - (-6{,}5n)$

57. $9\frac{1}{4}x - (-\frac{1}{2}x) + 6\frac{1}{4}y + (-2\frac{1}{2}y)$

58. $8\frac{1}{5}a + (-5\frac{2}{3}a) - 4\frac{1}{2}b - (-3\frac{2}{3}b)$

4. Polünoomide liitmine.

Selgitamiseks. 1. Selleks, et liita mingi arvuga kahe arvu summat, liidame selle arvuga esiti ühe, siis teise liidetava:

$$a + (b + c) = a + b + c$$

Kui meil on antud arvuga liita aga enam kui kahe arvu summa, siis lahutame selle viimase veel eraldi liidetavateks:

$$a + (b + c + d) = a + [(b + c) + d] =$$
$$= a + (b + c) + d = a + b + c + d.$$

2. Me teame, et vahe liitmisel peame liitma enne vähendatava ja siis summast lahutama vähendaja:

$$a + (b - c) = a + b - c.$$

Kui meil on aga liita polünoom, siis lahutame viimase eraldi liidetavateks ja liidame.

a) $a + (b + c - d) = a + [(b + c) - d] =$
$= a + (b + c) - d = \mathbf{a + b + c - d}$;

b) $a + (b - c - d) = a + [(b - c) - d] =$
$= \mathbf{a + b - c - d}$.

Märkus. Pane tähele üksikute liikmete märke!

Siit selgub: **Selleks, et antud arvuga liita polünoom, tuleb selle polünoomi liikmed kirjutada antud arvule juurde samade märkidega, nagu nad esinevad polünoomis.**

Harjutusi.

Liida järgnevad polünoomid!

59. $2a$ ja $3a + 2b$
60. $6m$ ja $4m - 2n$
61. $5x + 2y$ ja $3x - 5y$
62. $7x$ ja $3x - 2y + 5$
63. $6m + 2n$ ja $5m - 3n$
64. $4q - 2p$ ja $5q - p + 2$

Koonda järgnevad polünoomid!

65. $2a + (3a - 4b)$
66. $7m + (5n - 2m)$
67. $(6a + 2b) + (7a - 5b)$
68. $(4mn - 5m) + (2mn - 3mn)$

69. $(7ab - b) + (-6ab - 7b)$
70. $(2\frac{1}{3}a - 5\frac{1}{2}b) + (4\frac{2}{5}a - 3\frac{1}{2}b)$
71. $(4\frac{1}{8}x - 5\frac{1}{2}y) + (x + \frac{1}{2}y)$
72. $5u + (7\frac{1}{2}u - 2\frac{1}{2}v)$
73. $(76a - 548) + (25a - 184)$
74. $36m + [58 + (46m - 20)]$
75. $(7a + 5) + [3a + (6a - 9)]$
76. $5a + (3a - 2b - 6)$
77. $(3x + 2y) + (5x - 2y + 3)$
78. $(9a - 5b) + (7a - 2b + 6)$
79. $(2ab - 3a - 5) + (3ab + 4a - 6)$

5. Polünoomide lahutamine.

Selgitamiseks. 1. Kaheliikmelise summa lahutamiseks (vt. lk. 11) lahutame kummagi liidetava eraldi:

$$a - (b + c) = a - b - c.$$

On aga lahutada enam kui kahe liidetava summa, siis lahutame selle summa osade kaupa:

$$a - (b + c + d) = a - [(b + c) + d] =$$
$$= a - (b + c) - d = \boldsymbol{a - b - c - d}.$$

2. Vahe lahutamiseks (vt. lk. 14) lahutame vähendatava ja liidame vähendaja:

$$a - (b - c) = \boldsymbol{a - b + c}.$$

On aga lahutada polünoom, siis lahutame selle polünoomi osade kaupa:

a) $a - (b + c - d) = a - [(b + c) - d] =$
$= a - (b + c) + d = \boldsymbol{a - b - c + d}$;

b) $a - (b - c + d) = a - [(b - c) + d] =$
$= a - (b - c) - d = \boldsymbol{a - b + c - d}.$

Kui vaadelda kõiki eespool-toodud lahutamistulemusi, siis näeme, et **polünoomi lahutamisel kirjutame vähendatavale juurde polünoomi liikmed, muutes nende ees olevad märgid vastupidisteks.**

Harjutusi.

80. $30 - (12 + 15)$

81. $70 - (25 + 36 - 18)$

82. $25{,}2 - (15 - 8{,}6)$

83. $20 - (14\frac{1}{2} + 18\frac{3}{4})$

84. $2a - (b + c + d)$

85. $a + b - (a - b + c)$

86. $12a - 10b - (5a + 3b)$

87. $2m - 3n - (m - 5n)$

88. Lahuta *a* ja *b* summast samade arvude vahe!

89. Lahuta *m* ja *n* vahest samade arvude summa!

90. Lahuta *m* ja *n* summast $2m$ ja $3n$ vahe!

91. $15ab - (2ab - 3ab + 2ab)$

92. $4a^2 - 2b^2 - (2a^2 + 3b^2 - 2b^3)$

93. $3{,}5a - 4{,}2b - 5{,}6c - (2{,}8a - 3{,}6b) + 5{,}2a$

94. $9{,}2m - 3\frac{1}{3}u - (2\frac{2}{3}m - 3\frac{3}{4}u + 5\frac{1}{5}mn)$

95. $5\frac{1}{2}n - \frac{3}{4}v - (6\frac{1}{3}u - 2\frac{3}{5}v) - 6$

96. $2{,}2a - 6{,}1b - 4{,}5 - (1{,}25a - 5{,}05b) + 5$

97. $3a^2b - 2ab^2 - 5ab - (6a^2b - 2{,}5ab^2 - 10ab)$

98. $4mn - 5m^2 + 2n^2 - (2mn - 2m^2) - (5n^2 - 6)$

99. $3ab + 2a^2 - 3b^2 - (2ab - 3a^2) - (4b^2 - ab)$

100. $4x + 5y - (2x - 3y + 5xy)$

101. $3n - 2x - (5n - x + 2nx)$

Sagedasti on lihtsam liita ja lahutada, kui kirjutame polünoomid üksteise alla nii, et sarnased liikmed tulevad üksteisega kohastikku.

1. n ä i d i s: Liita polünoomid $3x - 2y$ ja $-4x + 5y$!

Me kirjutame nad üksteise alla ja liidame järgmiselt:

$$\begin{array}{r} 3x - 2y \\ -4x + 5y \\ \hline -x + 3y \end{array}$$

2. näidis: Lahuta polünoomid: $4{,}6a + 2{,}5b$ ja $3{,}3a - 1{,}9b$!

Me kirjutame polünoomid üksteise alla, muutes vähendaja liikmete ees märgid vastupidisteks:

$$\begin{array}{r} 4{,}6a + 2{,}5b \\ -3{,}8a + 1{,}9b \\ \hline 0{,}8a + 4{,}4b \end{array}$$

3. näidis: Avalda järgmised polünoomid lihtsamalt: $5m - 5n - (12m + 3n) + 3{,}6m - 4{,}2n + 12$!

Ka nüüd kirjutame üksikud polünoomid üksteise alla, muutes enne selle polünoomi liikmete märke, mille ees seisab miinus:

$$\begin{array}{r} 5m - 5n \\ -12m - 3n \\ 3{,}6m - 4{,}2n + 12 \\ \hline 3{,}4m - 12{,}2n + 12 \end{array}$$

102. Liida alljärgnevad polünoomid!

a) $\begin{array}{r} 3x - 5y \\ -2x + 6y \\ +4x - 7y \\ \hline \end{array}$ b) $\begin{array}{r} 0{,}6a - 5{,}2 \\ -1{,}5a + 2{,}8 \\ 3{,}9a - 6{,}4 \\ \hline \end{array}$

103. Liida veel alljärgnevad polünoomid, kirjutades liidetavad üksteise alla.

a) $\frac{3}{4}p - \frac{1}{2}q$ ja $2\frac{1}{2}p + \frac{2}{3}q$

b) $0{,}8m + 1{,}2n$ ja $-3{,}2m - 1{,}5n + 2{,}8$.

Lahuta esimesest binoomist teine!

104. a) $n - 2$; $n + 3$

b) $3m + 2$; $2n - 9$

105. a) $5 - m$; $6m + m$

b) $7 - x$; $2x + 8$.

106. a) $3a - b$; $b + 3a$

b) $7a + 2b$; $5b - 2a$

107. $6ab - 5a + 2ab$; $7a - 2ab$

108. $8m - 9n$; $5m + 6n - 7$
109. $9x - 5y - 6$; $8x + 2y + 5$
110. $m - 2n - 3p$; $5m - n + 6p$
111. $3a - 2b - 9$; $5a + 6b - 2c$
112. $2n - 3v - 6$; $2n - 2v - 7$
113. Vähendatav on $6x - 5y - 6$ ja vähendaja on $2x - 6y$. Leia vahe!
114. Leia järgnevate liidetavate summa!
$2a - 5b$; $3a - 6$; $7a + 2b - 6$

Liida esimese polünoomiga teine!

115. $2m + 3n - 7$; $m - n + 10$
116. $8a - 16b - 12$; $5a + 2{,}8b - 10\frac{3}{4}$
117. $6a - 2\frac{3}{4}b + 5\frac{1}{2}$; $-4{,}5a + 7\frac{1}{2}b + 6$
118. $4p - 2\frac{3}{8}q$; $-12p - 6\frac{1}{4}p - 15$

Koonda järgnevaid avaldisi!

119. $2a - 3b - (a - 2b) + (3a - 7b)$
120. $5m - 2n - (-m + 2n) + (-2m - 5n)$
121. $2a^2 - 3b + (-2a^2 + 3b) - (4a^2 - 5b^2 + 6)$
122. $12{,}6p - (7{,}8p - 3{,}2q) - (-2{,}4p + 7{,}8q)$
123. $4\frac{1}{5}x - (2{,}5x - 3{,}6y - 2) + (-x - 2\frac{3}{4})$
124. Leia a) $3\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{3}y$ ja $1\frac{3}{4}x - 2\frac{1}{2}$ summa!
b) $4\frac{1}{5}p - 2\frac{1}{2}q$ ja $3\frac{3}{4}p + 1\frac{3}{5}$ vahe!
125. $12c - [(3c - 2) - (c + 5)]$
126. $4a - 5{,}6b - [8a - (2a - 6b)]$
127. $5x - 2 + [8\frac{1}{3}x - (5\frac{1}{2}x + 6)]$
128. $15a - 12b - (4a - 2b) - 18b - (6a - 5b)$
129. $2a^2 - 3\frac{5}{8}ab - b^2 - (-a^2 + 2ab) - 2a^2$
130. $[45x + (12y - 10z)] -$
$- [6y + (12x - 18y) - 8x]$
131. $12a - \{b + [a - (b + c) - b] + a\} - c$
132. $(42a + 5b) + \{[12c - (b - 3a)] + c\} - 6a$
133. $36a - [(45 - 18a) + 21] + (25a - 12)$
134. $(3a - 15) - [(42 - 6a) - 38]$
135. $(26x - 240) - [240 - (8x - 36)]$
136. $(45x - 26y - 15) - [72 - (36 - 2x) + 15y]$

137. $(92x + 25y - 12) - [42 + (72 - 6y) - 25x]$

138. $(0{,}5x + 1{,}2y - 3{,}6z) - [(25x - 36{,}5y) -$
$- (12x - 6y)]$

139. $(6\frac{1}{2}x - 2\frac{1}{3}y) - (3\frac{1}{5}x + 2\frac{1}{2}y) - [(5x - 3\frac{1}{4}y) - 7{,}6]$

140. $(2\frac{1}{2}x + 3\frac{1}{3}y - 2\frac{1}{4}z) - [(3\frac{1}{3}x - 3\frac{1}{4}y) - (3\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}z)]$

141. **Kordamiseks.**

1) Leia $4a^2 - 5b$ väärtus, kui a) $a = 0{,}5$; $b = \frac{1}{8}$!
b) $a = 1\frac{1}{2}$; $b = 0{,}4$!

2) Auto sõitis 3 tunnis a km. Kui palju maad sõidaks see auto t tunnis?

3) Kui palju saadakse intressi a kroonilt, mis on 5 %-ga hoiule antud 4 kuuks?

4) Ruudu ümbermõõt on $ü$. Avalda selle ruudu pindala!

5) Lihtsusta järgnevaid avaldisi, niipalju kui oskad!
a) $3 \cdot (a - 2b) + 2 \cdot (a + b)$
b) $\frac{3a + b}{2} - \frac{a - 3b}{2}$

6) Leia arv, millega tuleks liita $2\frac{3}{4}$, et saada $5\frac{1}{2}$!

7) Ringjoone pikkus on C. Avalda selle ringi raadius!

8) Lihtsusta järgnevaid avaldisi, niipalju kui oskad:
a) $2a - (-4a)$; b) $5m + (-2m)$;
c) $-2x - (+3x)$

9) a) $5x \cdot (-2)$; b) $5m + (-2m)$;
c) $-2x - (+3x)$
a) $2a \cdot (-4a)$; b) $(-6a) \cdot (+2a)$;
c) $(-3m) \cdot (-2m)$

10) a) $(-3)^2$; b) $(-2)^3 \cdot 0{,}1$;
c) $(+5)^3 : 10$

11) a) $(-4{,}5) : (+0{,}15)$; b) $7{,}3 : (-40)$;
c) $(-3{,}6) : (-\frac{3}{5})$

12) Liida ja lahuta järgmised polünoomid!
$4{,}2a - 3\frac{3}{5}b - 2$ ja $2{,}8a + 4b + 5$.

IV. Võrdus ja võrratus.

1. Võrduse ja võrratuse mõiste.

Selgitamiseks.

Me teame, et $\frac{29}{3}$ on $9\frac{2}{3}$. Mõlemad arvud on teineteisega võrdsed; sellepärast võime kirjutada:

$$\frac{29}{3} = 9\frac{2}{3}.$$

Kui kaks avaldist annavad pärast tehete läbiviimist ühesugused tulemused, siis võib neid avaldisi ühendada võrdusmärgiga ja me saame siis **võrduse.**

Anname mõned võrdused: $3\frac{1}{5} = \frac{16}{5}$; $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$; $(-a) \cdot (+b) = -ab$; $(a-b) \cdot n = an - bn$ jne.

Ei anna aga avaldised peale tehete läbiviimist mitte võrdseid tulemusi, siis pole meil õigust nende avaldiste vahele võrdusmärki panna. Küll aga võime sel korral nende vahele panna võrratusemärgi, kas $\neq$, $<$ või $>$. Esimene märk $\neq$ näitab üldiselt võrratust, kaks teist aga näitavad, kumb avaldisest on suurem, kusjuures märgi terav ots on suunatud selle avaldise poole, kumb on väiksem.

Nii: $2 \cdot 7 < 15$; $\pi > 3{,}1$ jne.

Loe: „$2 \cdot 7$ on väiksem kui 15; π on suurem kui 3,1“.

Peame meeles, et avaldised, mis on ühendatud võrratusemärgiga, annavad **võrratuse.**

M ä r k u s: Võrduse ja võrratuse osa, mis asub vasakul pool võrdusmärki, nimetatakse v a s a k u k s p o o l e k s, kuna paremal pool asuvat osa nimetatakse p a r e m a k s p o o l e k s.

Harjutusi.

Pane järgnevate avaldiste ja arvupaaride vahele **võrduse-** või **võrratuse-**märk, nii kuis tarvis!

1. a) $3 \cdot 4\frac{1}{5}$ ja 12,5; b) $2{,}25 \cdot 4$ ja 10.
2. a) $2\frac{1}{2} \cdot 3\frac{1}{5}$ ja $0{,}16 : 0{,}02$; b) $0{,}15 \cdot 28$ ja $3 \cdot 1{,}4$.
3. $2a + 5$ ja $4a - 3$, kui $a = 4{,}5$.
4. $\frac{a+b}{2}$ ja $\frac{a-b}{2}$, kui $a = +5$; $b = -1$.
5. $2\pi r$ ja 44, kui $\pi = 3\frac{1}{7}$ ja $r = 14$.
6. πr^2 ja 19,6, kui $\pi = 3{,}14$ ja $r = 2\frac{1}{2}$.
7. $\frac{kpt}{100}$ ja 6,3, kui $k = 300$; $p = 4{,}5$; $t = \frac{7}{15}$.
8. $\frac{(a+b)\cdot h}{2}$ ja 50, kui $a = 18$; $b = 12$; $h = 3\frac{1}{5}$.
9. $\frac{1}{2}(a - b)$ ja 1,3, kui $a = 6{,}4$; $b = 3{,}8$.
10. $4x - 5y - 8$ ja 14, kui $x = +3$; $y = -2$.
11. $x^2 - 5x - 8$ ja 16, kui $x = -3$.
12. $4(x - y)(x + y)$ ja 36, kui $x = 5$; $y = 4$.
13. $3\left(\frac{x}{2} - 5\right)\left(\frac{x}{2} + 5\right)$ ja 48, kui $x = 6$.
14. $3 \cdot \frac{a-b}{2} \cdot \frac{a+b}{2}$ ja 40, kui $a = 2$; $b = 6$.

2. Võrduse omadusi.

Selgitamiseks.

Võrdusel on mõnesugused omadused, mille teadmine on edaspidiste arvutuste teostamiseks väga tarvilik. Seepärast õpime neid tundma.

1. Vaatame, kas võrdus $2 \cdot 3 = 6$ jääb püsima, kui võrduse kummalegi poolele liidame ühe ja sama arvu, näit. 4:

$$\underbrace{2 \cdot 3 + 4}_{10} = \underbrace{6 + 4}_{10}.$$

Esita veel seesuguseid näiteid!

Ka tähelise võrduse pooltele võime liita ühe ja sama suuruse.

a) Liidame näiteks järgmise võrduse pooltele b:

$$\begin{array}{r} a - b = 2 \\ + b = + b \\ \hline a = 2 + b \end{array}$$

b) Või liidame järgmise võrduse pooltele 5:

$$\begin{array}{r} x - 5 = 12 \\ + 5 = + 5 \\ \hline x = 12 + 5 = 17 \end{array}$$

P a n e t ä h e l e, et seesuguse liitmise teel saame mõne liikme ühelt võrduse poolelt kaotada, kusjuures ta esineb nüüd võrduse teisel poolel. Missuguse märgiga?

2. Samuti võib võrduse kummastki poolest lahutada ühe ja sama suuruse.

a) $9 + 6 = 15$.

Lahutame selle võrduse kummastki poolest näit. 6:

$$\begin{array}{r} 9 + 6 = 15 \\ - 6 = - 6 \\ \hline 9 = 15 - 6 = 9 \end{array}$$

b) $5x + 12 = 7$.

Lahutame antud võrduse kummastki poolest 12:

$$\begin{array}{l} 5x + 12 = 7 \\ \quad - 12 = - 12 \\ \hline 5x \quad = 7 - 12 = - 5 \end{array}$$

P a n e t ä h e l e, et me võime alati võrduse kummalegi poolele liita või võrduse kummastki poolest lahutada ühe ning sama suuruse. Nii et võime kaotada ühelt poolelt võrduse mistahes liikme, kusjuures see liige läheb teisele poolele vastupidise märgiga.

T e i s t e s õ n a d e g a: **Võrduse liikmeid võib alati viia ühelt poolelt teisele, muutes üleviimisel nende liikmete märgid vastupidisteks.**

15. Teisenda järgnevad võrdused nii, et võrduse vasakule poolele jääks ainult a!

a) $a + 5 = 12$; b) $18 + a = 36$; c) $a + b = c$.

M ä r k u s: Tuleta meelde, kuidas arvutatakse üht liidetavat, kui summa ja teine liidetav on teada!

16. Teisenda järgnevad võrdused nii, et võrduse vasakule poolele jääks ainult x!

a) $x - 5 = 18$; b) $x - 10 = 36$; c) $x - a = b$.

M ä r k u s: Tuleta meelde, kuidas leitakse vähendatav, kui vahe ja vähendaja on teada!

17. Teisenda alljärgnevad võrdused nii, et võrduse ühele poolele jääks ainult y:

a) $2a + y = 5a$; b) $2a - b = y + a$;
c) $3m - 5 = y - 12$

18. Teisenda veel võrdusi nii, et võrduse vasakule poolele jääks ainult täheline suurus!

a) $m + 2 = 12$; b) $7 + x - 5 = 36$; c) $y - 9 + 2 = 20$.

3. Me teame, et kui võrdseid suurusi korrutada ühe ning sama suurusega, siis saame alati võrdsed suurused.

N ä i d i s: a) $\frac{1}{2}$ kr. $= 50$ senti. Korrutame mõlemaid pooli 2-ga:

$2 \cdot \frac{1}{2}$ kr. $= 2 \cdot 50$ senti; 1 kr. $= 100$ senti

b) $\frac{1}{4}$ m $= 25$ cm;

$4 \cdot \frac{1}{4}$ m $= 4 \cdot 25$ cm; 1 m $= 100$ cm

c) $\frac{1}{5}\, a = 12$;

$5 \cdot \frac{1}{5}\, a = 5 \cdot 12$; $a = 60$

4. Samuti võime võrduse kumbagi poolt jagada ühe ning sama suurusega, kusjuures võrdus jääb ikka püsima.

N ä i d i s: a) 3 dm $= 30$ cm; $\frac{3dm}{3} = \frac{30}{3}$ cm;

1 dm $= 10$ cm.

b) 5 m $= 50$ dm; 1 m $= 10$ dm.

c) $6x = 120$; $x = ?$

Märkus. Võrduse kumbagi poolt võime korrutada ja jagada ka negatiivse suurusega, ilma et võrdus kaotaks maksvuse.

Näidis: a) Kui $-a = 5$, siis korrutades kumbagi poolt -1-ga saame:

$$(-1)\cdot(-a) = (-1)\cdot 5;\ +a = -5$$

ehk lihtsalt $a = -5$.

b) $-3x = 12$.

Jagame kumbagi võrduse poolt -3-ga:

$$\frac{-3x}{-3} = \frac{12}{-3};\ x = -4.$$

Pane tähele, et kui korrutada või jagada võrduse kõiki liikmeid -1-ga, siis muutuvad võrduse kõigi liikmete ees märgid vastupidisteks.

Näidis: $-2x + 15 = 7$.

Korrutame kõiki liikmeid -1-ga.

$$+2x - 15 = -7;\text{ ja edasi}$$

$$2x = 15 - 7;\ 2x = 8;\ x = 8:2 = 4.$$

Märkus. Pane tähele, et kui $\frac{3}{4}$ m $= 75$ cm, siis ka 75 cm $= \frac{3}{4}$ m; kui 0,2 kr. $= 20$ senti, siis ka 20 senti $=$ 0,2 kr.

Seega võime võrduse pooled teineteisega alati vahetada.

Harjutusi.

19. Korrutades võrduse mõlemaid pooli ühe ning sama arvuga, teisenda võrdus nii, et ühele poolele jääks ainult täheline arv!

$$\text{a) } \frac{3}{a} = 1;\ \text{b) } \frac{5}{x} = 1;\ \text{c) } \frac{1}{y} = 1.$$

Märkus. Tuleta meelde, kuidas leitakse jagaja, kui jagatav ja jagatis on teada!

20. Jagades võrduse mõlemaid pooli ühe ning sama arvuga, teisenda võrdus nii, et ühele poolele jääks ainult täheline arv!

$$\text{a) } 3m = 15;\ \text{b) } 2a = 16;\ \text{c) } 4y = 24.$$

M ä r k u s. Tuleta meelde, kuidas leitakse üks tegur, kui korrutis ja teine tegur on teada!

21. Teisenda järgnevaid võrdusi nii, et vasakule poolele jääks ainult täheline arv!

a) $\frac{3}{4}a = 12$; b) $\frac{3}{5}m = 1{,}2$; c) $\frac{2x}{9} = 3{,}2$.

M ä r k u s. Tuleta meelde, kuidas leitakse osa järgi terve!

22. Leia x, kui

a) $\frac{3}{4}x = 15$; b) $\frac{2x}{5} = 1{,}8$; c) $\frac{2}{x} = 16$!

23. Leia y, kui

a) $\frac{1}{5}y = \frac{2}{5}$; b) $\frac{y}{7} = 0{,}5$; c) $\frac{2}{y} = \frac{3}{5}$!

24. Leia m, kui

a) $\frac{3}{2m} = 6$; b) $\frac{3m}{2} = 7$; c) $\frac{0{,}2m}{1} = 2{,}4$!

K o k k u v õ t e: **Võrduse kumbagi poolt võime sama arvu võrra suurendada ja vähendada kui ka sama arvuga korrutada ja jagada. Ei tohi aga võrdust kunagi jagada 0-ga.**

3. Võrduste liigid.

Samasus.

Selgitamiseks.

Võrdustes võivad esineda nii t ä h e l i s e d kui ka n u m b r i l i s e d suurused; seejuures on täheliste suuruste all mõeldavad ikka numbrilised suurused.

N ä i t e i d: a) $3a = a + a + a$. Siin on ükskõik, millist arvu me a all mõtleme, ikka on võrdus õige.

b) $b^3 = b \cdot b \cdot b$ on samuti õige b igasuguse väärtuse puhul.

c) $5(a + b) = 5a + 5b$ on jälle õige a ja b igasuguse väärtuse puhul.

Seesuguseid võrdusi, mis jäävad püsima igasuguste numbriliste väärtuste puhul, mille paneme täheliste asemele, nimetatakse samasusteks.

25. Näita, et samasustena esinevad järgnevad võrdused!

a) $3(a - b) = 3a - 3b$; b) $\frac{m-n}{2} = \frac{m}{2} - \frac{n}{2}$

26. Näita veel, et järgnevad võrdused on samasused!

a) $\frac{3}{8}(m+n) = \frac{3}{8}m + \frac{3}{8}n$; b) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$;
c) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; d) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Võrrand.

Kui võrdus jääb püsima ainult mõninga arvväärtuse puhul, mille võime panna tähelise suuruse asemele, siis seesuguseid võrdusi nimetatakse **võrrandeiks.**

Näiteid: a) $3x = 15$. Seesugune võrdus jääb rikkumata ainult ühe x-väärtuse puhul, nimelt $x = 5$ puhul, sest $3 \cdot 5 = 15$. Iga teise x väärtuse puhul kaotab võrdus maksvuse.

b) $a^2 = 9$. Leidub ainult 2 a väärtust, mille puhul võrrand jääb rikkumata, nimelt $a = +3$ ja $a = -3$.

$$(+3)^2 = 9 \text{ ja } (-3)^2 = 9.$$

c) $2y - 5 = 3$. Leia ise niisugune y väärtus, mille puhul võrdus jääb maksvaks!

Peame meeles, et otsitavat tähelist suurust võrrandis nimetatakse selle võrrandi **tundmatuks.**

Tundmatuid tähistatakse harilikult tähestiku viimaste tähtedega: x, y, z, u, v, neid võib tähistada aga ka teiste tähtedega.

Võrrandi tundmatu väärtuse leidmist nimetatakse võrrandi lahendamiseks.

Tundmatu väärtust, mis rahuldab võrrandit, nimetatakse võrrandi **lahendiks** ehk **juureks.**

27. Alljärgnevatest võrdustest tõmba üks joon alla nendele, mis on samasused, kaks joont aga nende võrduste alla, mis on võrrandid!

a) $\frac{3}{4}x = 36$; b) $\frac{3}{5}a + a = \frac{8}{5}a$; c) $2 - a = 8$;
d) $2m - n = 2(m - n) + n$.

Võrrandite lahendamine ja koostamine.

Selgitamiseks.

Esialgu lahendame ainult neid võrrandeid, milles esineb tundmatu esimeses astmes. Nimetame neid võrrandeid *esimese astme* ehk *lineaarseiks võrrandeiks*.

a) Kast ühes kaubaga kaalus 75 kg, kuna kast tühjalt kaalus 8 kg. Kui palju kaalus kaup kastis?

Lahendus:

Me ei tea kauba raskust. Tähistame selle raskuse x-ga. Kauba raskus ühes kasti raskusega annab 75 kg:

$$x + 8 = 75.$$

Lahutame võrduse kummastki poolest 8 (või lühidalt viime 8 teisele poolele):

$$x = 75 - 8 = \mathbf{67\ (kg)}.$$

b) Osteti 3 kg jahu; arve tasumisel saadi kroonisest 28 senti tagasi. Kui kallis oli kilo ostetud jahu?

Lahendus:

Kui oletame, et kilo jahu maksis x senti, siis 3 kg jahu maksab $3x$; aga raha maksti selle eest $(100 - 28)$ senti.

Nii on meil lahendada võrrand:

$$3x = 100 - 28;$$

$$3x = 72;\ x = \frac{72}{3} = \mathbf{24\ (senti)}.$$

c) Missuguse arvuga tuleb 56 jagada, et saada 8? Võrrand: $\frac{56}{x} = 8$.

Selle võrrandi lahendamiseks korrutame mõlemaid võrrandi pooli x-ga:

$$56 = 8x;\ 8x = 56.$$

Nüüd leiamegi x: $x = 56 : 8 = 7$.

Järelkatse: $\frac{56}{7} = 8$.

d) Lahendame veel võrrandi:

$$\tfrac{4}{5}x - 2 = 5 - 2x.$$

Viime võrrandi tundmatud kõik vasakule poolele, tuntud liikmed aga paremale poolele:

$$\tfrac{4}{5}x + 2x = 2 + 5;$$
$$2\tfrac{4}{5}\,x = 7;\ \tfrac{14}{5}x = 7;\ 14x = 7 \cdot 5;$$
$$x = \frac{7 \cdot 5}{14} = \frac{5}{2}.$$

Kontroll: $\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{2} - 2 = 5 - 2 \cdot \frac{5}{2}$; $2 - 2 = 5 - 5$; $0 = 0$.

Seega tuleb esimese astme võrrandi lahendamiseks:

1) **viia kõik tundmatuid sisaldavad liikmed vasakule ja kõik teised liikmed paremale poolele;**

2) **koondada saadud avaldisi;**

3) **jagada mõlemaid võrrandi pooli tundmatu kordajaga;**

4) **kontrollida tulemust.**

Harjutusi.

Lahenda järgnevad võrrandid!

28. $x + 15 = 25$.

29. $x - 6 = 20$.

30. $42 - x = 48$.

31. $5 - x = 72$.

32. $12 - x + 5 = 7$.

33. $16 + x - 7 = 12$.

34. $x - 3\frac{1}{2} = 7\frac{5}{4}$.

35. $32\frac{3}{5} - x = 19$.

36. $3\frac{5}{8} - y = 1\frac{3}{4}$.

37. $1{,}8 + u = 3{,}2$.

38. $3{,}6 - x + 6{,}4 = 1{,}2$.

39. $10{,}5 + x - 2\frac{3}{4} = 15$.

40. $12{,}4 - 3{,}8 = x + 5\frac{1}{2}$.

41. $4\frac{1}{9} - 1\frac{1}{3} = 2 + x$.

42. $2{,}25 - z = 3\frac{1}{2} - 2z$.

43. $8{,}75 + z = 5\frac{1}{4} + 2z$.

44. $16{,}2 + t = 8{,}8 + 2t$.

45. $4\frac{1}{5} + 2t = 3t - 2{,}3$.

Koosta järgnevate ülesannete andmeil võrrandid ja lahenda!

46. Missuguse arvuga tuleks liita $3\frac{3}{7}$, et saada $7\frac{1}{2}$?

47. Missugusest arvust tuleb lahutada 4,2, et saada 10?

48. Jaga 1 meeter kahte niisugusesse ossa, et teine osa oleks esimesest 20 cm võrra pikem!

49. Teekäija kõndis kahel päeval kokku 45 km, kusjuures ta esimesel päeval käis 3 km enam kui teisel. Mitu km kõndis ta kummalgi päeval eraldi?

50. Missugune arv on 5 võrra suurem kui 15 ja 5 korrutis?

51. Leia arv, mis on $1\frac{1}{2}$ võrra vähem kui $3\frac{3}{4}$ ja $1\frac{3}{5}$ jagatis!

52. Ma mõtlesin arvu, liitsin selle arvuga 5 ja lahutasin siis saadud summast 12 ning sain siis 25. Missuguse arvu ma mõtlesin?

53. Kolmnurga üks külg on teisest küljest 5 cm võrra lühem ja kolmandast küljest 2 cm võrra pikem. Kui suured on kolmnurga küljed, kui kolmnurga ümbermõõt on 45 cm?

Lahenda veel järgnevad võrrandid!

54. $5x - 2 = 3x + 5$.

55. $6y + 24 = 2y - 36$.

56. $6\frac{1}{4}x - 2 + 3\frac{1}{2} = 5\frac{1}{2}x.$
57. $4\frac{3}{5}x - 6 - x = 9.$
58. $4,2 - 5y - 2,4 = 2,5y.$
59. $6,25z - 4 = 3,5z + 1,5.$
60. $1,6u - 4,8 = 0,9u + 0,3.$
61. $0,1v - 2,8 = 0,01v + 1,7.$

Koosta järgnevate ülesannete andmeil võrrandid ja lahenda!

62. Ristküliku ümbermõõt on 56 cm, kuna pikkus on laiusest 8 cm võrra pikem. Leia ristküliku küljed!

63. Ristküliku üks külg on teisest 2 korda pikem. Leia selle ristküliku küljed, kui ta ümbermõõt on 1,5 m!

64. Kolmnurga üks nurk on 90^0, kuna üks teravnurk on teisest 2 korda suurem. Kui suured on kolmnurga nurgad?

65. Trapetsi üks alus on teisest 5 cm võrra pikem, kuna trapetsi keskjoon on 2,3 dm. Leia trapetsi alused!

66. Ristküliku ümbermõõt on 2,6 m, kuna ristküliku pikkus on 6 dm võrra pikem laiusest. Leia selle ristküliku pikkus, laius ja pindala!

67. Ristküliku ümbermõõt on 28 cm, laius $1\frac{1}{2}$ korda lühem kui pikkus. Leia selle ristküliku pikkus, laius ja pindala!

Lahenda järgnevad võrrandid!

68. $15\frac{1}{2} - x = 2,75.$
69. $2,5 - x = 4\frac{3}{5}.$
70. $40 - 5x = 15.$
71. $62 - 4x = 4.$
72. $36 - 2,4x = 12.$
73. $18 - 0,8x = 2.$
74. $15 = 12 - \frac{3}{4}x.$
75. $28 = 16 - \frac{5}{6}y.$

76. $5\frac{1}{8} = 2\frac{1}{2} + \frac{3}{5}y$.

77. $7\frac{1}{2} = 5z - 12\frac{1}{2}$.

78. $18{,}3 - 6z = 15$.

79. $\frac{3}{7}u - 2\frac{1}{2} = 1\frac{1}{7}$.

80. $5\% u - 24 = 11$.

81. $12\% v + 32 = 50$.

82. $3\frac{1}{2}\% x - 1{,}5 = 0{,}8$.

83. $45 = 4\frac{1}{4}\% y - 6$.

Koosta järgnevate ülesannete andmeil võrrandid ja lahenda!

84. Tööline sai nädalase töö eest $13\frac{1}{2}$ kr. Sellest tasus ta ära söögiarve, mille järel tal üle jäi vaid 9,75 kr. Kui palju tasus ta söögi eest?

85. Isal kulus linnaskäimiseks 12 tundi. Sellest ajast kulus tal sinnasõiduks $2\frac{1}{2}$ tundi, tagasisõiduks $3\frac{1}{4}$ tundi. Kui kaua viibis isa linnas?

86. Ärimehel oli 320 kr. raha. Sellest rahast tasus ta 140 kr. võlga, maksis 56 kr. maksusid, ülejäänud rahasumma eest ostis aga kaupa. Kui palju raha eest ostis ta kaupa?

87. Mootorrong sõitis ühes tunnis positiivses sihis 35 km, teises tunnis sõitis rong veel teatud maa, kuid nii, et rongi kaugus lähtekohast oli -15 km. Kui palju sõitis rong teises tunnis?

88. Termomeeter näitas hommikul $+5^0$ C, päeva jooksul langes temperatuur 6^0 C. Kui palju näitas termomeeter õhtul?

89. Päevane keskmine temperatuur oli ühel päeval $+5^0$ C; hommikul näitas termomeeter -2^0 C, keskpäeval $+8^0$ C. Kui palju näitas termomeeter õhtul?

90. 80^0 R $= 100^0$ C. Leia, mitu C kraadi on a) 62^0 R; b) -25^0 R; c) $+120^0$ R!

91. Leia, mitu R kraadi on a) 90^0 C; b) -12^0 C; c) $+150^0$ C!

92. Fahrenheit'i termomeetri astmiku sulamispunkt asetseb numbril 32. Keemispunkt aga numbril 212. Seega on keemispunkti ja sulamispunkti vahe $212 - 32 = 180$ jaotust. 100^0 C $= (180^0 + 32^0)$ F. a) 1^0 C $=$? b) 15^0 C $=$? c) -20^0 C $=$?

93. 80^0 R $= (180^0 + 32^0)$ F. a) 1^0 R $=$? b) 30^0 R $=$? c) -16^0 R $=$?

94. Hoiusumma tõusis pangas 3% võrra. Kui suur oli esialgne hoiusumma, kui pangast saadi kätte 206 kr.?

95. Kaupmees kaotas kauba müümisel 5%. Kui kallis oli kaupmehel kaup, kui ta kauba müümisel sai 225 kr.?

96. Missugune rahasumma, olles hoiul 4%-ga, muutub poole aasta pärast 408 krooniks?

97. Missugune rahasumma, olles hoiul 5%-ga, muutub 5 kuuga 626 krooniks?

98. Hoiusummalt makstakse 4% $\frac{1}{2}$ aastas. Mitme kuu eest makstakse 480 kroonilt 36 kr. intressi?

99. Hoiusummalt makstakse 5% aastas. Mitme päeva eest makstakse 150 kroonilt 5 kr. intressi?

100. Mitme protsendiga oli 240 krooni hoiul, kui talt saadi 4 $\frac{1}{2}$ kuu eest 9,6 kr. intressi?

101. Mitme protsendiga oli 760 kr. hoiul, kui talt saadi 135 päeva eest 19 kr. intressi?

102. Ühel külmal talvisel koolipäeval puudusid koolist 30 õpilast ehk 12% kogu õpilaste arvust. Kui palju oli selles koolis õpilasi?

103. Odaval raamatunädalal kuulutas kirjastusühisus „N.-E.“, et mõne raamatu hinda on alandatud $99\frac{1}{3}$ %.

Missugune võiks olla siis 150-sendise raamatu alandatud hind?

Lahenda järgnevad võrrandid!

104. $\frac{3x}{5} = 18.$ **105.** $\frac{4y}{12} = 4{,}2.$

106. $\frac{4}{x} = 12.$ **107.** $\frac{5}{x} = 2{,}5.$

108. $\frac{4}{5x} = 3{,}6.$ **109.** $\frac{6}{54} = 24.$

110. $\frac{5}{3z} = 7\frac{1}{2}.$ **111.** $\frac{7}{2z} = 2\frac{4}{5}.$

112. $\frac{1}{x} = 3{,}2.$ **113.** $\frac{1}{y} = \frac{4}{5}.$

Koosta järgnevate ülesannete andmeil võrrandid ja lahenda!

114. 5 meest jaotasid nelja päevaga teenitud rahasumma võrdselt omavahel ära, kusjuures iga mees sai 16 krooni. Kui palju teenisid nad päevas?

115. Poisikese sammu keskmine pikkus on 60 cm. Mitu sammu astub see poiss käies 1 km?

116. Talunikul oli 15 hl vilja turule viia. Mitmesse kotti mahutab ta kogu selle vilja, kui ühte kotti mahub tal $1\frac{1}{2}$ hl?

117. Trapetsi pindala on 120 cm^2. Kui suured on trapetsi alused, kui on teada, et üks alus on teisest 5 cm võrra pikem ja kõrgus on 10 cm?

Lahenda järgnevad võrrandid!

118. $(2x - 5) \cdot 3 = 16.$

119. $(4 - x) \cdot 1{,}5 = 8.$

120. $4(x - 2) + 3x = 7.$

121. $8(2 - u) - 2 \cdot (4u - 5) = 10.$

122. $(25x - 6) - (15x + 4) = 12x - 10.$

123. $5x - (10 - 2x) = 6x + (x - 2).$

124. $9y - (6y - 14) = 11y - (3y - 7)$.

125. $6z + [17 - (3z + 8)] = 27$.

126. $6(n - 10) + 3 \cdot (20 - n) = 5(n - 10)$.

127. $7(4v - 6) - 5(5v - \frac{1}{2}) = 6(2v + 3)$.

128. $2z + 6[5 - (z - 3)] - 4 = 0$.

129. $8[6(t - 4) + 8] = 4(5t + 10) + 224$.

Koosta järgnevate ülesannete andmeil võrrandid ja lahenda!

130. Kui igas pingis istuks 2 õpilast, siis tuleks 1 pink puudu; istuks aga igas pingis 3 õpilast, siis jääks üks pink üle. Mitu õpilast ja mitu pinki oli?

131. Tühjalt kaalus võianum $\frac{3}{4}$ kilo, täidetult aga 5 korda niipalju. Mitu kilo oli nõus võid?

132. Isa andis pojale lahendada 10 ülesannet; seejuures lubas ta pojale iga õigestilahendatud ülesande eest anda 10 senti, iga valestilahendatud ülesande eest aga pidi poeg maksma isale 15 senti. Arvutamise lõpul selgus, et poiss sai isalt 25 senti. Mitu ülesannet lahendas poiss õigesti?

133. Poeg on isast praegu 3 korda noorem. Kui poeg sündis, oli isa 36 aastat vana. Kui vana on poeg praegu?

134. Õe ja venna vanus on kokku 50 aastat. 10 aastat tagasi oli vend 2 korda nii vana kui õde. Kui vanad on nad praegu?

135. Raamatukaupmees müüs 5 vihikut ja andis ühe vihiku „pealekauba". Mitmeprotsendise hinnaalanduse tegi seega kaupmees vihikuid müües?

136. Kaupmees müüs oma kauba $3\frac{1}{2}\%$-se kasuga 420 krooni eest. Kui palju maksis see kaup kaupmehel enesel?

137. Värskete heeringate kohalejõudmisel pidi kaupmees vanad heeringad müüma 5%-se kahjuga, nimelt 30 senti kilo. Kui kallilt müüs ta neid heeringaid varemalt?

138. Kirjastus müüs raamatukaupmeestele ühel päeval 380 krooni eest raamatuid. Milline on nende raamatute nimesväärtus, kui on teada, et kirjastused annavad raamatukauplustele 25% hinnaalandust raamatute nimesväärtusest?

Leia x väärtus järgnevaist võrrandeist!

139. a) $3 + x = 5$; b) $5x - 9 = 12$; c) $2\frac{1}{2}x - 3 = 1{,}5$.

140. a) $\frac{x}{5} = 1{,}2$; b) $\frac{4}{x} = 0{,}2$; c) $\frac{1{,}8}{0{,}6}x = 0{,}2$.

141. a) $2 : x = 1\frac{1}{2}$; b) $x : 5\frac{1}{2} = 12{,}5$; c) $\frac{3}{4} : x = 2$.

142. a) $3 - \frac{1}{2}x = 4$; b) $2\frac{1}{2} + \frac{3}{4}x = \frac{3}{4}$; c) $4 - 2\frac{1}{5}x = 3\frac{9}{10}$.

143. a) $3 = \frac{2x}{5}$; b) $4 = \frac{5x}{2}$; c) $10 = \frac{0{,}4x}{5}$.

144. a) $\frac{3}{5} = \frac{2x}{4}$; b) $1{,}6 = \frac{1{,}8x}{5}$; c) $2\frac{1}{2} = \frac{5x}{4}$.

Varemalt tuletatud intressivalemisse $i = \frac{kpt}{100}$ aseta alamalantud suurused ja arvuta tundmatu!

145. Mitu krooni intressi saadakse 540 kroonilt, mis oli hoiul 4,5%-ga $\frac{1}{3}$ aastat?

146. Mitu krooni intressi saadakse 1360 kroonilt, mis on antud jooksvale arvele 3,75%-ga 3 kuuks?

147. Mitme protsendiga oli hoiul kapital 260 kr., millelt saadi 8 kuu eest intressi 10,40 kr.?

148. Mitme protsendiga diskonteeriti veksel, mille valuut oli 380 kr., kui talt arvati 5 kuu eest diskontot 9,5 kr.?

149. Missugune kapital, hoiul olles 5,5%-ga 2 kuud, annab 5,5 kr. intressi?

150. Missugune kapital, hoiul olles 6,5%-ga 1 aasta 8 kuud, annab 45,5 kr. intressi?

151. Missugune kapital, hoiul olles 4%-ga $\frac{1}{4}$ aastat, muutub 547,2 krooniks?

152. Missugune kapital, hoiul olles 5%-ga 9 kuud, muutub 747 krooniks?

153. Missuguse aja jooksul annab 1200 kr., hoiul olles 5,2%-ga, 20,8 kr. intressi?

154. Missuguse aja jooksul annab 960 kr. 18,4 kr. intressi, kui hoiusummalt makstakse 4,6% ?

155. Kasustades võrrandite lahendamise oskust leia intressivalemi järgi puuduvad suurused alljärgnevas tabelis!

Harjut. nr.	1	~~2~~	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~
i	—	—	72 kr.	16 kr. 25 s.	10 kr.	8,58 kr.	675 kr.	3,19 kr.
k	1480 kr.	540 kr.	—	—	800 kr.	2160 kr.	9000 kr.	88 kr.
p	5,6 %	4,5 %	5,5 %	6 %	—	—	5 %	$3\frac{3}{4}$ %
t	2 kuud	$\frac{5}{8}$ aast.	45 p.	135 p.	3 kuud	26 p.	—	—

156. Kolmnurga ümbermõõt on 32 m, kusjuures külg a on 5 m võrra pikem kui külg b, see viimane aga omakord 2 m võrra pikem kui külg c. Leia kolmnurga külgede pikkused!

157. Võrdhaarse kolmnurga küljed on 7 m võrra pikemad kui alus. Leia selle kolmnurga küljed, kui kolmnurga ümbermõõt on 86 dm!

158. Täisnurkse kolmnurga üks teravnurk on $\frac{2}{3}$ teisest teravnurgast. Määra kõik kolmnurga nurgad!

159. Täisnurkse kolmnurga teravnurgad suhtuvad nagu $2:2\frac{1}{2}$. Leia selle kolmnurga nurgad!

160. Kolmnurga nurk α on 30^0 võrra suurem kui β, see viimane aga 25^0 võrra väiksem γ-st. Määra selle kolmnurga kõik nurgad!

161. Kolmnurgas on α kolm neljandikku β-st, β ise aga on niisama suur kui γ. Leia α, β ja γ!

162. Trapetsi suurem alus on $1\frac{1}{2}$ korda pikem lühemast alusest. Leia trapetsi küljed, kui trapetsi keskjoon on 2,5 m!

163. Trapetsi pindala on 14,28 m^2. Leia selle trapetsi kõrgus, kui trapetsi alused on 4,8 m ja 3,6 m!

164. Kordamiseks.

1) Leia x võrrandist: a) $2x - 5 = 3$; b) $3 - x = 1$; c) $2 = 5 - x$!

2) Lahenda võrrandid: a) $\frac{x}{3} = \frac{1}{4}$; b) $\frac{5}{2x} = 10$; c) $\frac{1}{2}x = 2{,}5$!

3) Avalda korrutisena: a) $\frac{3}{5}a - \frac{1}{5}a$; b) $2a^2 - 3ab$; c) $\frac{3}{8}mn - \frac{1}{4}mn$!

4) Avalda astme näol: a) $a \cdot a \cdot a$; b) $(a - b)(a - b)$; c) $4m \cdot m \cdot m \cdot n \cdot n$!

5) Avalda veel astme näol: a) $(-3) \cdot (-3)$; b) $(-\frac{2}{3}) \cdot (-\frac{2}{3}) \cdot (-\frac{2}{3})$; c) $(-\frac{3}{5}) \cdot (-\frac{3}{5})$!

6) Kirjuta järgnevate avaldiste paaridele vahele võrdus- või võrratusmärk!

a) $2x - 3$ ja $2 - x$, kui $x = +2$;

b) $\frac{x}{2}$ ja $2x - 8$, kui $x = +5\frac{1}{3}$;

c) $\frac{4x - 3}{6}$ ja $\frac{12 - 2x}{3}$, kui $x = 3$.

7) Ristküliku pikkus on $\frac{3}{4}$ laiusest. Leia selle ristküliku pindala, kui ristküliku ümbermõõt on 56 cm!

8) Trapetsi suurem alus on väiksemast 3 cm võrra pikem. Leia selle trapetsi alused, kui on teada, et tema aluste poolsumma on 12 cm!

9) Leia järgnevate avaldiste väärtus!

a) $5{,}2 : 0{,}26 + (-0{,}1)^2 \cdot 960$;

b) $4{,}25 \cdot 10^2 - (-2)^3 \cdot 12$;

c) $5\frac{5}{8} : 2\frac{1}{2} - (\frac{1}{2})^3 \cdot 12$.

10) Lihtsusta järgmine polünoom ja leia tema väärtus, kui $a = 10$; $b = 5$!

$$6(a - b) - (2a - \tfrac{3}{5}) \cdot b + (-a)(-2b).$$

11) Missugune arv on 36-st niisama palju väiksem, kui palju on ta 24-st suurem?

4. Võrratuse omadusi.

Selgitamiseks.

1. Võtame kaks mittevõrdset suurust ja paneme nende vahele vastava võrratusmärgi, näit.:

$$7 > 5.$$

Liidame kummalegi võrratuse poolele näit. 3:

$$7 + 3 > 5 + 3; \quad \mathbf{10 > 8}.$$

Samuti võime kummastki võrratuse poolest lahutada näit. 4:

$$7 - 4 > 5 - 4; \quad \mathbf{3 > 1}.$$

Ka täheliste suurustega võime toimetada samuti.

Näidis: $a > b$.

Liidame kummalegi poolele näit. m:

$$a + m > b + m,$$

sest on ju ka siin võrratuse parem pool suurem kui vasak pool.

Samuti võime lahutada võrratuse kummastki poolest m:

$$a - m > b - m.$$

Järgneb: **Võrratuse kummalegi poolele võib liita, samuti võib võrratuse kummastki poolest lahutada ühe ning sama suuruse, ilma et võrratus seejuures kaotaks maksvuse.**

Märkus. Et $+m$ lahutamine on samaväärne $-m$ liitmisega, siis võib öelda: võrratuse kummalegi poolele võib alati liita ühe ja sama relatiivse suuruse, ilma et võrratus kaotaks maksvuse.

2. Näitame nüüd, et võrratuse kumbagi poolt võime korrutada ning jagada ühe ning sama **positiivse arvuga.**

a) Korrutame näiteks võrratuse $10 > 8$ mõlemaid pooli 2,- 3-, 5-ga, saame:

$$20 > 16; \quad 30 > 24; \quad 50 > 40.$$

b) Või korrutame võrratuse $-5 < -3$ mõlemaid pooli näit. 4-ga:

$$-5 \cdot 4 < -3 \cdot 4; \quad -20 < -12.$$

Näeme, et võrratus ei kaota maksvust, kui korrutame tema pooli positiivse arvuga.

c) Ka täheliste arvudega võime toimetada samuti:

$$a > b; \quad b < a.$$

Korrutame mõlemaid pooli positiivse arvu m-ga, saame:

$$\boldsymbol{am > bm; \quad bm < am.}$$

Ka võime võrratuse kumbagi poolt jagada ühe ja sama positiivse arvuga.

d) Jagame näiteks võrratuse $20 > 15$ mõlemaid pooli 5-ga:

$$4 > 3$$

e) Või jagame võrratuse $-12 < -8$ mõlemaid pooli näiteks 2-, 4-, 6-ga:

$$-6 < -4; \quad -3 < -2; \quad -2 < \tfrac{4}{3}.$$

f) Jagame veel $a > b$ kumbagi poolt näiteks positiivse arvu m-ga:

$$\frac{a}{m} > \frac{b}{m}$$

Kokkuvõte: **Võrratuse kumbagi poolt võime alati korrutada ja jagada ühe ning sama positiivse arvuga, ilma et võrratus kaotaks maksvuse.**

3. Nüüd vaatame, mis toimub võrratusega, kui tema kumbagi poolt korrutame või jagame mõne negatiivse arvuga.

a) Võrratuse $+5 > +2$ kumbagi poolt korrutame näiteks -3-ga:

Vasakul poolel saame: $(-3) \cdot (+5) = -15$.
Paremal poolel saame: $(-3) \cdot (+2) = -6$.

Et negatiivsetest arvudest on suurem see, kumma absoluutne väärtus on väiksem, siis

$$-15 < -6.$$

Selgub, et võrratusemärk on muutunud vastupidiseks.

b) Võrratuse $-3 < -2$ pooli korrutame näit. -5-ga:

$$(-5) \cdot (-3) > (-5) \cdot (-2); \quad +15 > +10$$

c) Võrratuse $-3 > 0$ kumbagi poolt korrutame näiteks -4-ga:

$$(-4) \cdot (-3) > (-4) \cdot 0; \quad +12 > 0.$$

d) Korrutame võrratuse $a > b$ kumbagi poolt veel $-n$-ga, saame: $-an < -bn$.

e) Samuti jagame võrratuse $-18 < -15$ kumbagi poolt -3-ga:

Vasakul poolel saame: $(-18) : (-3) = +6$.
Paremal poolel saame: $(-15) : (-3) = +5$.

$$+6 > +5.$$

f) Jagame veel võrratuse $-4 < +4$ kumbagi poolt näiteks -2-ga: $\frac{-4}{-2} > \frac{+4}{-2}$; $+2 > -2$.

g) Jagame veel võrratuse $-4m > -6m$ kumbagi poolt -2-ga: $\frac{-4m}{-2} < \frac{-6m}{-2}$; $+2m < +3m$.

Kokkuvõte: **Võrratuse kumbagi poolt võime korrutada ja jagada ühe ning sama negatiivse arvuga, muutes vaid võrratuse märgi vastupidiseks.**

Võrratuse lahendamine.

Selgitamiseks.

Kasustades selgitatud võrratuse omadusi, me võime võrratusi ka lahendada, s. o. määrata tingimused, milliste numbriliste väärtuste puhul on võrratus õige.

1) Milliste väärtuste puhul on rahuldatud näit. võrratus $2a - 3 > 13$?

Lahendamiseks esiteks liidame kummalegi poolele $+3$:

$$2a - 3 + 3 > 12 + 3;\ 2a > 12 + 3.$$

Siin oleme -3 viinud võrratuse teisele poolele, muutes üleviidava arvu ees märgi vastupidiseks, seega

$$2a > 15.$$

Nüüd jagame mõlema poole 2-ga:

$$a > \tfrac{15}{2};\ a > 7{,}5.$$

Järgneb, et võrratus on õige iga a numbrilise väärtuse puhul, mis on suurem kui 7,5. Katsu järele!

2) Lahendame veel võrratuse $4 - 3x < 12 - x$. Siin korraldame liikmed nii ümber, et x sisaldavad liikmed on vasakul poolel ja kõik teised paremal poolel.

Selleks toome $-x$ vasakule ja $+4$ viime paremale poolele, muutes üleviimise juures vastavate liikmete ees märgi vastupidiseks:

$$-3x + x < 12 - 4;\ -2x < 8.$$

Jagame nüüd võrratuse mõlemaid pooli -2-ga, muutes võrratuse märki:

$$x > -4.$$

Harjutusi.

Lahenda alljärgnevad võrratused:

165. $3x - 5 > 12$

166. $5y + 10 > 2y$

167. $4z - 2 < 5z + 3$

168. $2v - 13 < 4v + 12$

169. $0{,}6v - 1{,}2 > 0{,}5v + 0{,}8$

170. $\frac{3}{4}u - 12 > \frac{1}{2}u + 4$

171. $2\frac{1}{5} - \frac{3}{5}a < 7\frac{1}{2}a - 2\frac{3}{4}$

172. $6\frac{1}{3} - \frac{3}{4}m < 2\frac{1}{2}m$

173. $2{,}5 - 0{,}8m > 5{,}8 - 1{,}2m$

174. $4{,}2 - 1{,}3u > 2{,}5u - 1{,}4$

175. $\frac{3}{8}t + 1{,}5 < 2{,}25 + \frac{1}{2}t$

176. $\frac{1}{3} - \frac{2}{9}t > \frac{1}{2} + \frac{1}{9}t$

177. Kordamiseks.

1) Leia avaldise $a - b$ ja $a + b$ väärtus, kui $a = +6$ ja $b = -3$!

2) Leia avaldise ab ja $\frac{a}{b}$ väärtus, kui $a = -2\frac{1}{2}$; $b = \frac{2}{5}$!

3) Aseta kas võrdus- või võrratusmärk järgnevate avaldiste paaride vahele:
   a) a^2 ja $2ab$, kui $a = -3$, $b = 1\frac{1}{2}$!
   b) ab^2 ja a^3b, kui $a = +2$; $b = -4$!

4) Lahenda võrrandid:
   a) $\frac{2}{1{,}5x} = 6$; b) $\frac{5x}{0{,}75} = 2$; c) $2x - 5 = 12 - x$!

5) Ma mõtlen ühe arvu. Suurendades teda 1 võrra ja korrutades tulemust 4-ga saan 24. Missuguse arvu ma mõtlesin?

6) Arve järgi, mida alandati 2% võrra, maksti 16,17 kr. Kui suur oli esialgne arvesumma?

7) Mitme protsendiga oli tehtud 240-kroonine laen, kui tema pealt maksti 5 kuud enne tähtaega 8 krooni intressi?

8) Linna elanikkude arv oli 5 aasta jooksul kasvanud 2% ehk 35 inimese võrra. Mitu elanikku oli selles linnas?

9) Lahenda võrratused:

a) $2\frac{1}{2}x - 10 < 72$; b) $\frac{3x}{5} + 2 > 2{,}75$!

10) Esita graafiliselt võrrand:

$$y = \frac{15 - 2x}{5}!$$

Teine osa.

V. Tehted üksliikmete ja hulkliikmetega.

1. Hulkliikmete liitmine.

Selgitamiseks.

On teada: Selle asemel, et liita arvuga kahe teise arvu summat, võime liita selle arvuga esimese liidetava ja tulemusega teise liidetava:

$$a + (b + c) = a + b + c.$$

Et liita arvuga kahe teise arvu vahet, selleks liidame selle arvuga vähendatava ja tulemusest lahutame vähendaja:

$$a + (b - c) = a + b - c.$$

Neil kahel lausel põhineb hulkliikmete liitmine. Liidame arvuga A hulkliikme $a - b + c - d$:

$$A + (a - b + c - d) = A + [(a - b) + (c - d)] =$$
$$= A + (a - b) + (c - d) = A + a - b + c - d.$$

Seega:

$$A + (a - b + c - d) = A + a - b + c - d.$$

Et liita mingi arvuga hulkliiget, selleks kirjutame sellele arvule juurde hulkliikme kõik liikmed ühes nende märkidega ja koondame sarnased liikmed.

Näidis:

$$(2a^2 + 3ab - 6b^2) + (5a^2 - 6ab + 4b^2) =$$
$$= 2a^2 + 3ab - 6b^2 + 5a^2 - 6ab + 4b^2 =$$
$$= 7a^2 - 3ab - 2b^2.$$

Mõnikord on kasulik liidetavad hulkliikmed kirjutada üksteise alla, nii et sarnased liikmed seisaksid üksteise kohal.

N ä i d i s:

Liidame hulkliikmed $2a^2b + 3a^2b^2 - 4a$, $-5a^2b + 5a - 8a^2b^2$ ja $3a + 4a^2b + 5a^2b^2$.

$$\left\{\begin{array}{rrr} 2a^2b & +\,3a^2b^2 & -\,4a \\ -\,5a^2b & -\,8a^2b^2 & +\,5a \\ 4a^2b & +\,5a^2b^2 & +\,3a \\ \hline a^2b & & +\,4a \end{array}\right.$$

Harjutusi.

1. a) $a + (b + c)$ i) $(-a + b) + (-c + d)$
b) $a + (b - c)$ j) $(-a - b) + (-c + d)$
c) $a + (-b + c)$ k) $(-a + b) + (-c - d)$
d) $a + (-b - c)$ l) $(-a - b) + (-c - d)$
e) $(a + b) + (c + d)$ m) $(a + b) + (a + b + c)$
f) $(a + b) + (c - d)$ n) $(a - b) + (a + b - c)$
g) $(a - b) + (c + d)$ o) $(-a + b) + (a - b - c)$
h) $(a - b) + (c - d)$ p) $(-a - b) + (-a + b + c)$

2. a) $6a + (3a + 2b)$ e) $18a + (24a - 9b)$
b) $8a + (6 + 4a)$ f) $4x + (14x - 16x)$
c) $(3m + 7n) + 5m$ g) $(3p - 8q) + 4q$
d) $(6x + 15y) + 17x$ h) $(11r - 4) + 18$

3. Arvuta peast:

a) $487 + 113$ h) $2396 + 1454$
b) $793 + 669$ i) $2975 + 701$
c) $478 + 94$ j) $425 + 88$
d) $886 + 87$ k) $475 + 997$
e) $396 + 844$ l) $696 + 78$
f) $582 + 248$ m) $1985 + 234$
g) $664 + 376$ n) $1975 + 750$

N ä i d i s: $487 + 113 = 487 + (13 + 100) =$

4. a) $5g^2 + (4g^2 - 8f^2)$

b) $-4mn + (-3m^2n + 7mn)$

c) $-9\frac{1}{2}pq^2 + (4p^2q - 1\frac{3}{4}pq^2)$

d) $12x^3 + (-16x^3 - 4y^3)$

e) $7a^2b - 4ab^2 + (3ab^2 - 2a^2b)$

f) $-12cd + 9c^2d + (-6c^2d + 8cd)$

g) $28m^2 - 36n^2 + (-16m^2 - 4n^2)$

h) $19xy^2 - 16z^2 + (-17z^2 - 16xy^2)$

i) $2\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{3}b^2 + (\frac{1}{6}b^2 - \frac{3}{4}a^2)$

j) $-3\frac{2}{3}mn^2 + 4\frac{1}{5}m^3 + (-2\frac{2}{3}mn^2 - 5\frac{1}{7}m^3)$

k) $24{,}6xyz - 3{,}6xz + (-30{,}4xyz + 1{,}5xz)$

l) $-7{,}4u^3 - 6\frac{1}{8}v^3 + (4\frac{2}{5}u^3 - 4\frac{3}{16}v^3)$

5. a) $(2a^2 - 3b^2 + 4c) + (-3a^2 + 6b^2 - 8c) +$
$+ (5a^2 - 8b^2 - 12c)$

b) $(-13a^2n + 9an^2 - 8an) + (-7a^2n - 4an^2 + 5an) +$
$+ (25a^2n - 3an^2 - 6an)$

c) $-3x^2 + 11x - 8 + (5 - 5x + 3x^2) +$
$+ (-6x + 7 - 13x^2)$

d) $8x^{2n} + 3x^n - 17 + (-7x^{2n} + 4x^n + 14) +$
$+ (2x^{2n} - 9x^n + 2)$

6. Liida järgnevad hulkliikmed!

a) $4m^2 - 18mn + 7n^2$; $-11m^2 + 15mn - 12n^2$;
$6m^2 + 9mn - 16n^2$.

b) $-8x^2y + 15xy^2 - 21y^3$; $14y^3 + 19x^2y - 17xy^2$;
$2xy^2 - 16x^2y + 7y^3$.

c) $2a^n - 4a^{n-1}b + 5a^{n-2}b^2$;
$-6a^n + 3a^{n-1}b - a^{n-2}b^2$;
$8a^n - a^{n-1}b - 9a^{n-2}b^2$.

d) $7(a-b)^3 - 9(a-b)^2 + 14$;
$-15(a-b)^3 - 4(a-b)^2 + 8$;
$18(a-b)^3 + 5(a-b)^2 - 17$.

e) $24(2x - a)^2 + 12(2x - a) - 6;$
$8(2x - a)^2 - 14(2x - a) + 13;$
$-60(2x - a)^2 + 6(2x - a) - 9.$

7. Arvuta järgnevate hulkliikmete summa ja viimase numbriline väärtus!

a) $11a^2 + 8ab + 9b^2 + (-7a^2 - 13ab - 4b^2) +$
$+ (-3a^2 + 5ab - 7b^2);\; a = 2;\; b = 4.$
b) $-x^2y + 4xy^2 - 8xy + 15;\; 5x^2y + 8xy - 17;$
$2x^2y - 3xy^2 + 4;\; x = 2;\; y = -3.$
c) $9m^3 - 5m^2n + 7n^3;\; -4m^3 + 8m^2n - 8n^3;$
$2m^3 - 6m^2n - 3n^3;\; m = 1;\; n = -2.$

2. Hulkliikmete lahutamine.

Selgitamiseks.

On teada: Et arvust lahutada kahe teise arvu summa, lahutame sellest arvust esimese liidetava ja tulemusest teise liidetava:

$$\boldsymbol{a - (b + c) = a - b - c.}$$

Selle asemel et arvust lahutada kahe teise arvu vahet, võime sellest arvust lahutada vähendatava ja tulemusele liita vähendaja:

$$\boldsymbol{a - (b - c) = a - b + c.}$$

Neil kahel lausel põhineb hulkliikme lahutamine. Lahutame arvust A hulkliikme $a - b + c$:

$$A - (a - b + c) = A - [(a - b) + c] =$$
$$= A - (a - b) - c = A - a + b - c.$$
$$\boldsymbol{A - (a - b + c) = A - a + b - c.}$$

Et lahutada mingist arvust hulkliige, kirjutame sellele arvule juurde hulkliikme liikmed vastupidiste märkidega ja koondame sarnased liikmed.

Näidis: $3a - 5b - (2a - 4b + 2c) =$

$= 3a - 5b - 2a + 4b - 2c = a - b - 2c.$

Harjutusi.

8. a) $a - (b + c)$ e) $a + b - (c + d)$

b) $a - (b - c)$ f) $a + b - (c - d)$

c) $a - (-b + c)$ g) $(a - b) - (-c + d)$

d) $a - (-b - c)$ h) $a - b - (-c - d)$

9. Arvuta peast!

a) $276 - 67 = 276 - (60 + 7)$

b) $573 - 279 = 573 - (273 + 6)$

c) $886 - 398 = 886 - (400 - 2)$

d) $1615 - 709 = (1600 + 15) - (700 + 9)$

e) $783 - 297$

f) $627 - 228$

g) $1309 - 811$

h) $988 - 282$

10. a) $16 - (x + 8)$ e) $131m - (48n + 37m)$

b) $3 - (-a + 5)$ f) $28x^2 - (13x^2 - 24y^2)$

c) $b - (-4 + b)$ g) $-16pq - (-18pq + 4s)$

d) $r - (8 - 4r)$ h) $12uv - (-3uv - 4v^2)$

11. a) $18mp + 5mq - (14mp + 22mq)$

b) $-16ab + 15ac - (-17ab + 9ac)$

c) $2{,}9x^2y - 4{,}6xy^2 - (4x^2y - 8{,}2xy^2)$

d) $-7\frac{2}{3}fg - 6\frac{1}{2}f^2g - (-9\frac{1}{6}fg - 2\frac{3}{4}f^2g)$

12. a) $5a^2 - b^2 - (2a^2 - 3ab - b^2)$

b) $7c^2 - 2cd + 3d^2 - (-2c^2 + 4cd - 9d^2)$

c) $6i^3 + 2i^2k - 4ik^2 - (8i^3 + 2i^2k - 6ik^2)$

d) $-8x^3 + 4x^2y - 7xy^2 + 5y^3 -$
$- (-12x^3 + 4x^2y - 3xy^2 + 3y^3)$

13. Esimesest hulkliikmest lahuta teine!

a) $7a - 20b - 15c + 9d$; $4a - 30b + 12c - 25d$.

b) $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$; $x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$.

c) $-5m^3 + 6m^2n - 15mn^2 - 24n^3$;
$-8m^3 + 4m^2n - 7mn^2 + 16n^3$.

d) $17(a-x)^3 - 19(a-x)^2 - 24(a-x)$;
$-13(a-x)^3 + 6(a-x)^2 - 24(a-x)$.

Meeldetuletuseks.

Liitmis- ja lahutamisjuhistest järgneb, et sulgude avamisel, kui sulgude ees on märk +, jäävad sulgudes olevate liikmete märgid peale sulgude avamist muutumata; on sulgude ees märk —, muutuvad sulgudes olevate liikmete märgid peale sulgude avamist vastupidisteks.

Kui avaldises esinevad mitut liiki sulud, siis avatakse nad järjekorras: esiteks harilikult ümmargused ( ), siis nurgelised [ ] ja lõpuks loogelised { } ; sulud võime avada aga ka vastupidises järjekorras.

14. Ava sulud ja koonda sarnased liikmed!

a) $(4x - 5y) - (3x + 8y) + (2x + 15y)$

b) $15a - (12b - 3c) + (-6a + 19b - 12c) -$
$- (-7a - 14b + 20c)$

c) $-18u - (9u - 3v + 24t) - (-16u + 12v - 12t) -$
$- (12t - 7u)$

d) $(11k + 18i - 15l) + (-7k - 13l - 24i) -$
$- (6k - 7i - 4l)$

e) $9a^2 - 4ab + 3b^2 - (16a^2 - 3ab - 7b^2) -$
$- (-4a^2 + 11ab + 18b^2)$

f) $-(20m^2 + 4mn - 32n^2) + (15m^2 - 19mn - 46n^2) -$
$- (-5m^2 + 23mn - 14n^2)$

15.

a) $a + [(b + c) - (a + d)]$

b) $a - [(b + c) - (a - d)]$

c) $f - [-(g - h) + (-f + h)]$

d) $(9i - 12k) - [(14k - 3l) - (-16k + 30i)]$

e) $4x + 7y - [(5x - 3y) - (6x - 9y)] -$
$- (11x + 14y) + 19x$

f) $15m - (8m - 9n - 26p) - [-(18m - 20n + 24p) +$
$+ (-6m + 16n - 12p)]$

g) $6\frac{1}{2}u + [3\frac{1}{3}v - (2p + 2{,}5u - 4{,}2s) + (2\frac{1}{6}v - 3{,}6s)]$

16.

a) $2a - \{6b - [3a - (4b + 2c)]\}$
b) $9x + \{18y - [-(11x - 15y) + 4z]\}$
c) $a - \{3b - 2c - [4a - (3b + 2c - a)]\}$
d) $a + \{-9b + 7a - [-(8c - 5a + 4b) - 12c]\}$

17. Arvuta!

a) $7m - \{2n - 3m - [5m - 4n - (8m - 16n)]\}$
$m = 3;\ n = -2$

b) $22x^2 - \{16x^2 + [4x^2 - 9y^3 - (3x^2 - 7y^3)]\}$
$x = -2;\ y = -3$

c) $12xy - \{6yz - [-3xz + 6yz + (4xy - 5xz)]\}$
$x = 1;\ y = -2;\ z = -3$

3. Astendamine.

Astme mõiste.

Astendamine on tehe, mille abil leitakse võrdsete tegurite korrutis.

Näidised: $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$
$(-3)^3 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -27$
$(-4)^2 = (-4) \cdot (-4) = 16$

Positiivse arvu aste on alati positiivne arv. Negatiivse arvu paarisaste on positiivne arv. Negatiivse arvu paarituaste on negatiivne arv.

18. Arvuta!

a) 7^3	d) -2^4	g) $(0{,}1)^3$	j) $1{,}3^2$
b) $(-3)^4$	e) -5^2	h) $(0{,}02)^2$	k) $(-1{,}2)^3$
c) $(-5)^3$	f) -6^3	i) $(-0{,}01)^4$	l) $-2{,}1^2$

19. Täida tabel!

x	1	2	3	-1	-2	-3	0,5	$\frac{2}{3}$
x^2								
x^3								
$-x^2$								
$-x^3$								
$4x^2$								
$-2x^2$								
$-3x^3$								

Ühe ja sama arvu astmete korrutamine.

$$a^2 \cdot a^3 = \underbrace{a \cdot a}_{2} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a}_{3} = a^{2+3} = a^5.$$

Üldiselt:

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{a \cdot a \ldots a}_{m} \cdot \underbrace{a \cdot a \ldots a}_{n} =$$

$$= \underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots a}_{m+n} = a^{m+n}$$

$$\boxed{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$$

Ühe ja sama arvu astmete korrutamisel astendame seda arvu astendajate summaga.

Harjutusi.

20.

a) $2 \cdot 2^3$
b) $(-3)^2 \cdot (-3)^3$
c) $(\frac{2}{3})^2 \cdot (\frac{2}{3})^3$
d) $(-\frac{1}{2})^2 \cdot (-\frac{1}{2})^4$
e) $(0{,}1)^2 \cdot (0{,}1)^3$
f) $(-0{,}2)(-0{,}2)^3$
g) $b^3 \cdot b$
h) $(-x)^4 \cdot (-x)^3$
i) $c^2 \cdot c^3 \cdot c$
j) $r^4 \cdot r^5 \cdot r^8$
k) $a^4 \cdot a^k$
l) $a^{2x} \cdot a^x$
m) $a^{x-1} \cdot a^4$
n) $a^{2n-3} \cdot a^{n+3}$
o) $a^{2n+5} \cdot a^{3-n}$

Ühe ja sama arvu astmete jagamine.

$$\frac{a^4}{a^2} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a}^{4}}{\underbrace{a \cdot a}_{2}} = a^{4-2} = a^2$$

Üldiselt:

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{\overbrace{a \cdot a \ldots a}^{m}}{\underbrace{a \cdot a \ldots a}_{n}} = \frac{\overbrace{a \cdot a \ldots a}^{n} \cdot \overbrace{a \cdot a \ldots a}^{m-n}}{\underbrace{a \cdot a \ldots a}_{n}} =$$

$$= \overbrace{a \cdot a \ldots a}^{m-n} = a^{m-n}$$

$$\boxed{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}$$

Ühe ja sama arvu astmete jagamisel astendame seda arvu astendajate vahega.

Teame, et $a^n : a^n = 1$ kui võrdsete arvude jagatis; samuti $a^n : a^n = a^{n-n} = a^0$, siis

$$\boxed{a^0 = 1}$$

Iga arv astmes 0 on 1.

Harjutusi.

21.

a) $3^5 : 3^3$ g) $(0,2)^5 : (0,2)^2$ m) $d^{3m+4} : d^{m-1}$

b) $8^3 : 8^2$ h) $(-1,5)^3 : -1,5$ n) $x^{m-5} : x^{m-7}$

c) $(-5)^4 : (-5)^2$ i) $(0,03)^6 : (0,03)^3$ o) $\frac{25^7}{25^5}$

d) $(-2)^5 : (-2)^2$ j) $a^7 : a^2$ p) $\frac{(m-n)^4}{(m-n)^2}$

e) $(\frac{2}{3})^4 : \frac{2}{3}$ k) $b^{2k} : b^{2k}$

f) $(-\frac{1}{2})^6 : (-\frac{1}{2})^3$ l) $c^{2n} : c^n$ q) $\frac{m^{2n-4}}{m^{n-8}}$

22.

a) 3^0 c) $(-0,7)^0$ e) $\left(\frac{2a+3c}{8b^2}\right)^0$

b) $(\frac{5}{8})^0$ d) $(a+b)^0$ f) $(3a^2 - 5a + 6)^0$

Astme astendamine.

$$(2^2)^3 = 2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2 = 2^{3\cdot 2} = 2^6$$

Üldiselt:

$$(a^m)^n = \overbrace{a^m \cdot a^m \ldots a^m}^{n} = \overbrace{a^{m+m+\ldots+m}}^{n} = a^{nm}$$

$$\boxed{(a^m)^n = a^{mn}}$$

Arvu astme astendamisel astendame seda arvu astendajate korrutisega.

23. Astenda!

a) $(2^2)^3$ c) $[(0,1)^2]^3$ e) $(b^{2x})^3$

b) $[(-3)^2]^2$ d) $(a^2)^3$ f) $(c^{x-2})^4$

4. Tehted üksliikmetega.

Üksliikmete korrutamine.

Näidis:

$3a^3b^2c \cdot 4ab^3d = (3 \cdot 4)(a^3 \cdot a)(b^2b^3)cd = 12a^4b^5cd.$

Harjutusi.

24. a) $5a \cdot 4b$
b) $-4a^2 \cdot 3b^3$
c) $-2x^2 : -1{,}5y^4$
d) $3a^2 \cdot 4b \cdot 5c$
e) $2{,}5m^2n \cdot 3p^2$
f) $13x^2y^3z \cdot 11xy^2z^3$
g) $-2{,}4a^2b \cdot 4ab^3c$
h) $-3{,}6m^2n^3 \cdot -\frac{2}{3}m^3p^2$
i) $1{,}5b^2c \cdot -2{,}6bc^3$
j) $-\frac{2}{3}x^2y^2 \cdot \frac{3}{8}x^2y$
k) $-2\frac{2}{5}a^2bc^2 \cdot -2\frac{1}{7}ab^2$
l) $-2\frac{1}{3}x^2y^2 \cdot 0{,}03x$
m) $\frac{3}{7}a^2b^2 \cdot -1{,}4ac^3 \cdot 1\frac{1}{2}a^2c^2$
n) $-6m^2n^2p^2 \cdot 2\frac{2}{3}mn^2p$

25. a) $\frac{3}{4}ab \cdot 2a^mb^n$
b) $0{,}1z^{2m+3} \cdot 0{,}5z^{m-5}$
c) $3a(b-c)^2 \cdot 9a^2(b-c)^3$
d) $-4{,}2a^{2n}x^m \cdot 5a^{n+2}x^{2m-2}$
e) $-\frac{3}{4}x^2(m-2n) \cdot 1\frac{1}{3}y(m-2n)^2$

f) $(2a^2 - 3a^2 + 5a^2) \cdot 4ab^2$

g) $(3x^2y - 2\frac{2}{3}x^2y - 4\frac{2}{3}x^2y) \cdot -3\frac{1}{3}x$

h) $(-5m^2n + 2\frac{2}{3}m^2n - 1\frac{1}{6}m^2n)(3m^2n^2 - 2\frac{1}{3}m^2n^2)$

Üksliikmete jagamine.

Näidis: $-3\frac{3}{4}a^3b^2c : 2\frac{1}{2}ab^2 = -\frac{3}{2}a^2c = -1{,}5a^2c$

Harjutusi.

26.
a) $5a : 5$
b) $2ab : 2a$
c) $m^2n : m^2n$
d) $-3a^2 : 3a^2$
e) $15xy : 5x$
f) $-42a^2x : 7ax$
g) $63mn^2 : -9n$
h) $2a^4b^2 : -2a^4b^2$
i) $-8a : -8$
j) $-7a : a$
k) $3{,}4m^3n^2 : 1{,}7mn^2 = 2m^2$
l) $-52a^2b^2c : 1{,}3a^2c$
m) $-0{,}03\pi r^2 : 0{,}1\pi r$
n) $5a^2h : 0{,}01a$
o) $2{,}4x^3y^2z : \frac{3}{4}x^2y$
p) $-\frac{2}{3}a^2 : 0{,}4$
q) $-2\frac{3}{4}a^2b^4 : -22a^2b$
r) $35{,}35x^3y : -5xy$

27.
a) $0{,}1515a^{3n} : 3a^n$
b) $27a^2(b + 2c)^3 : -9a(b + 2c)$
c) $\frac{1}{9}m^2(2n - 3p)^4 : \frac{3}{4}(2n - 3p)$
d) $(2x^2y^2 - 4x^2y^2 - \frac{2}{3}x^2y^2) : 8x^2y$
e) $(-7ab^2 - 3ab^2 + 6\frac{2}{3}ab^2) : (-4\frac{1}{6}ab^2 + 5ab^2)$

Üksliikmete astendamine.

$$(2 \cdot 3)^3 = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{3} \cdot \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3}_{3} = 2^3 \cdot 3^3 = 8 \cdot 27 = 216.$$

Üldiselt: $(ab)^n = \underbrace{ab \cdot ab \ldots ab}_{n} =$

$$= \underbrace{aa \ldots a}_{n} \cdot \underbrace{b \cdot b \ldots b}_{n} = a^n b^n$$

$$\boxed{(ab)^n = a^n b^n}$$

Korrutise aste on võrdne tegurite astmete korrutisega.

N ä i d i s: $(3a^2b)^3 = 3^3(a^2)^3b^3 = 27a^6b^3$

Harjutusi.

28. a) $(3 \cdot 5)^2$
b) $(2 \cdot 50)^3$
c) $(4a)^2$
d) $(6a^2b)^3$
e) $(-5a^2b^2)^2$
f) $(-\frac{2}{3}xy)^3$
g) $(-0{,}02m^3np^2)^2$
h) $4a^2b \cdot (-\frac{1}{2}ab)^2$
i) $(-3r^2s)^2(-2r)^3$

5. Hulkliikme korrutamine üksliikmega.

Selgitamiseks.

Selle asemel et korrutada kahe arvu summat kolmanda arvuga, võime iga liidetava eraldi korrutada selle arvuga ja tulemused liita.

$$c(a+b) = ac + bc.$$

Et kahe arvu vahet korrutada kolmanda arvuga, selleks korrutame selle arvuga vähendatavat ja vähendajat ja lahutame esimesest tulemusest teise:

$$c(a-b) = ac - bc.$$

Neil lausetel põhineb hulkliikme korrutamine üksliikmega.

Korrutame hulkliikme $a + b - c$ arvuga n:

$$n(a+b-c) = n[(a+b)-c] =$$
$$= n(a+b) - nc = na + nb - nc.$$
$$\mathbf{n(a+b-c) = an + bn - cn.}$$

Hulkliikme korrutamisel üksliikmega korrutame üksliikmega hulkliikme iga liiget.

N ä i d i s:

$$6a(2a^2 - 3ab + 5b^2) = 6a \cdot 2a^2 - 6a \cdot 3ab + 6a \cdot 5b^2 =$$
$$= 12a^3 - 18a^2b + 30ab^2$$

Harjutusi.

29. a) $5(a + b)$ g) $3a(2ab - 4c)$
b) $8(m - n)$ h) $-9m^2(4m - \frac{1}{3})$
c) $a(a + b^2)$ i) $-2{,}2(-0{,}4b^2 + 3ac)$
d) $c(b - c^2)$ j) $\frac{2}{3}a^2b(6ab^2 + 5c^2)$
e) $x^2(a + 2)$ k) $-2\frac{1}{4}a^3(8m^2 + 1)$
f) $-6a^2(4b - 7)$ l) $7x(-\frac{1}{7}x^2 - 0{,}2)$

30.
a) $2(3a - 5b + c)$ e) $-\frac{3}{4}(4a + 6b - 5c)$
b) $-8(-6m + 4n - 1)$ f) $m(-4m + 5am^2 - 7)$
c) $(9x - 7y + 4) \cdot -3x$ g) $2a^2(3ab - 4b^2 - 8a^2c)$
d) $-2{,}4(0{,}1a^2 - 3b^2 - 5ab)$ h) $-\frac{1}{3}xy(6x^2 - 3y + 9xy)$

31. a) $15 + 3(a - 5)$ e) $-16u^2 + 9u(u - 5)$
b) $18m^2 + 4m(m + 8)$ f) $7t(-2v + 11t) - 2vt$
c) $12x - 4(2x + 8)$ g) $-4f^2(12g - 3f) + 50f^2g$
d) $7a - 8(a - 3)$ h) $16zy - 4z(-4y - 1)$

32. a) $9(2x - 1) + 3(x + 6)$
b) $5m(2m + 3) - 6(4m^2 - 7)$
c) $2(a - 3b) + 4(a - 5b)$
d) $15(2a + 3b) - 8(4a - 6b)$
e) $3x(4x - 5y) - 4y(5x + 7y)$
f) $-4a(8a - 9b) - 3b(11a - 7b)$

33. a) $4(a + b) - 5(a + b) + 7(a - b) - 3(a - b)$
b) $-6(m - n) + 8(m + n) - 13(m + n) + 11(m - n)$
c) $8a(3a - 5b) - 5b(2a - 7b) - 7b(4a - 3b) + 6a(11a - 9b)$
d) $3(2x - 6y - 5z) - 2(x - 5y - 8z) - 4(x - 2y)$
e) $7a(a - 5b - 5c) + 5b(7a - 3b + 4c) + 5c(7a - 4b)$

6. Hulkliikme jagamine üksliikmega.

Selgitamiseks. Selle asemel et kahe arvu summat jagada kolmanda arvuga, võime iga liidetavat jagada selle arvuga ja tulemused liita:

$$(a+b):m=a:m+b:m=\frac{a}{m}+\frac{b}{m}.$$

Et kahe arvu vahet jagada kolmanda arvuga, selleks jagame selle arvuga vähendatavat ja vähendajat ja lahutame esimesest tulemusest teise:

$$(a-b):m=a:m-b:m=\frac{a}{m}-\frac{b}{m}.$$

Neil lausetel põhineb hulkliikme jagamine üksliikmega.

Jagame hulkliikme $a+b-c$ arvuga n:

$$(a+b-c):n=[(a+b)-c]:n=(a+b):n-$$
$$-c:n=a:n+b:n-c:n=\frac{a}{n}+\frac{b}{n}-\frac{c}{n}.$$

$$(a+b-c):n=\frac{a}{n}+\frac{b}{n}-\frac{c}{n}.$$

Hulkliikme jagamisel üksliikmega jagame üksliikmega hulkliikme iga liiget.

Näidis:

$(6a^2b-12ab^2+18a^2b^2):6ab=a-2b+3ab.$

Harjutusi.

34. a) $(15a+9b-18c):3$
b) $(am-bm+cm):-m$
c) $(-ax+ay-az):-a$
d) $(20am-16bm+12cm):4m$
e) $(-121ax+88bx-143x):-11x$
f) $(-42abc+28abd+56ab):-14ab$
g) $(51m^2n-187mn^2-85mn):17mn$

35. a) $(25a^4-30a^3+45a^2):5a^2$
b) $(2{,}4a^3b-6a^4+0{,}12a^5):0{,}6a^3$
c) $(-18a^3b^2-27a^2b^3+36ab^4):-9ab^2$
d) $(42m^5n^3-15m^4n^4+8m^3n^5):6m^2n^3$

e) $(-8m^2n^3 + 4m^3n^2 - 16mn) : -1\frac{1}{3}\,mn$
f) $(16x^3y^2 - \frac{4}{5}x^2yz^2 - \frac{2}{3}x^2y^3) : 4x^2y$
g) $(\frac{4}{9}x^4y^3z^2 - 2\frac{2}{3}x^3y^4z^3 + 2{,}4x^2y^2z^4) : \frac{2}{3}x^2y^2z^2$

36. a) $[65(x-y)^4 - 39(x-y)^3 + 26(x-$
$-y)] : 13(x-y)$
b) $[-21(2a-b)^3 + 14(2a-b)^2 - 7(2a-$
$-b)] : -7(2a-b)$

7. Hulkliikme tegureiks lahutamine.

Eespool nägime, et

$$(a+b-c)m = am + bm - cm.$$

Siis ka

$$am + bm - cm = m(a+b-c).$$

Kui hulkliikme kõikidel liikmetel on ühistegur, siis võime selle hulkliikme kujutada korrutisena, tuues ühisteguri sulgude ette.

Näidiseid:

$12a^2b + 20ab^2 - 32a^2b^2 = 4ab \cdot 3a + 4ab \cdot 5b -$
$- 4ab \cdot 8ab = 4ab(3a + 5b - 8ab).$

$16a^2(b-c) - 48a(b-c) = 16a(b-c)(a-3).$

Kujuta järgnevad hulkliikmed korrutise näol!

37. a) $7a + 7b$ i) $3a + 3$
b) $5a - 5b$ j) $8a - 8$
c) $6a + 9b$ k) $-9 + 63x$
d) $10a - 25b$ l) $-36a - 144$
e) $26x - 39y$ m) $68pq - 85$
f) $33u + 44v$ n) $14x - 14y + 14z$
g) $-21s + 35t$ o) $-15m + 15n - 15p$
h) $-34p - 51q$ p) $-8a - 8b - 8c$

38. a) $ax + ay$ c) $-cx + cy$
b) $bx - by$ d) $-cx - cy$

e) $bx + b$
f) $ax - a$
g) $-ax + a$
h) $-ax - a$
i) $an - bn - cn$
j) $lx + mx + nx$
k) $9ax + 18ay$
l) $-8an + 12bn$
m) $-48mp - 64mq$
n) $0{,}7ab - 1{,}4b$
o) $a - 0{,}01ap$
p) $\frac{2}{3}bc + \frac{1}{3}bd$
q) $2{,}5st - 5s$
r) $-\frac{2}{5}uv - 0{,}4u$

39. a) $a^2 + a$
b) $b - b^2$
c) $-a^2 + ab$
d) $-x^3 - x^2y$
e) $5a^2b - 15ab^2$
f) $12a^3m^2 + 18a^2m^3$
g) $-36b^2c^2 + 48$
h) $10a^3x^2 - 35a^2x$
i) $16a^4x^2 - 4a^3x^2$
j) $117m^3n^3 + 91m^2n^2$
k) $-22a^3x - 77a^2x$

40.
a) $l^3 + l + l^2$
b) $-a - a^2 - a^3$
c) $p^2 - p - p^3$
d) $6ax - 14a^2 + 10ab$
e) $-35xy + 49xz - 21x^2$
f) $16an - 12bn - 4n$
g) $54a^3b^2 + 42a^2b^2 - 24ab^3$
h) $-26a^2c^3 - 39a^3c^2 - 52a^2c^2$
i) $-14m^3n + 42m^2n^2 + 84mn^3$
j) $57a^2b - 76ab^2 - 19b$

41. a) $a(m + n) + b(m + n)$
b) $a^2(a - x) + b^2(a - x)$
c) $m(a + x) + n(a + x)$
d) $k(a - b) - l(a - b)$
e) $3a(x - y) + 4b(x - y)$
f) $a(2x + 1) - 2b(2x + 1)$
g) $2x(x - 1) - x^2(x - 1)$
h) $a(m + n) + m + n$
i) $2u(v - 1) + v - 1$
j) $2z(x + y) - x - y$
k) $c(b - a) - b + a$

8. Hulkliikmete korrutamine.

Selgitamiseks. Leiame hulkliikmete $a - b$ ja $x + y - z$ korrutise. Selleks vaatame kordajat $x + y - z$ nagu üksliiget; siis võime korrutamisreegli põhjal kirjutada:

$$(x + y - z)\ (a - b) = (x + y - z)a - (x + y - z)b =$$
$$= ax + ay - az - (bx + by - bz) =$$
$$\boldsymbol{= ax + ay - az - bx - by + bz.}$$

Hulkliikmete korrutamisel korrutame korrutatava hulkliikme iga liiget kordaja hulkliikme iga liikmega ja liidame tulemused.

Märkus. Tarvis on meeles pidada, et liikmete korrutamisel annavad ühesugused märgid + ja isesugused —.

Näidis:

$$(2a-3b)(4a^2-5ab+6b^2)=$$
$$=8a^3-10a^2b+12ab^2-12a^2b+15ab^2-18b^3=$$
$$=8a^3-22a^2b+27ab^2-18b^3.$$

Korruta järgnevad hulkliikmed!

42.

a) $(a+b)(c+d)$	g) $(9m+5n)(4m-5n)$
b) $(a-b)(c+d)$	h) $(13k-7i)(6k-11i)$
c) $(a-b)(c-d)$	i) $(12f-15g)(-4f+7g)$
d) $(a-b)(-c-d)$	j) $(2{,}6p+0{,}3q)(5p-0{,}7q)$
e) $(5x+4y)(3x+2y)$	k) $(7a-5b)(a-b)$
f) $(2x-3y)(7x+8y)$	l) $(4r+9s)(r-5s)$

43. a) $(2a^2+3b^2)(3a^2-2b^2)$
b) $(4c^2-7d^2)(7c^2-4d^2)$
c) $(a^2+1)(a-1)$
d) $(f^3-1)(f^2-1)$
e) $(x-1)(x^2+x+1)$
f) $(a+3)(a^2-3a+9)$
g) $(9a-5b)(2a^2-8ab+3b^2)$
h) $(4m-11n)(5m^2-9mn-12n^2)$
i) $(-6x+15y)(8x^2+3xy-13y^2)$
j) $(3u-5v)(-16uv-v^2+2u^2)$

Korraldatud hulkliikmete korrutamine.

Korraldada hulkliiget ühe ja sama tähe astendajate alanevas järjekorras, tähendab paigutada selle hulkliikme liikmed niisugusesse järjekorda, et selle tähe astendajad järjest väheneksid, alates esimesest liikmest viimase poole.

Märkus. Liikmeid võib ümber paigutada ka ühe ja sama tähe astendajate kasvavas järjekorras.

Leiame hulkliikmete $12a^2x - 8a^3 - 6ax^2 + x^3$ ja $-4ax + 4a^2 + x^2$ korrutise.

Korraldame liikmed x astendajate alanevas järjekorras:

$$
\begin{array}{rrrrrr}
x^3 & -\,6ax^2 & +\,12a^2x & -\,8a^3 & & \\
 & x^2 & -\,4ax & +\,4a^2 & & \\
\hline
x^5 & -\,6ax^4 & +\,12a^2x^3 & -\,8a^3x^2 & & \\
 & -\,4ax^4 & +\,24a^2x^3 & -\,48a^3x^2 & +\,32a^4x & \\
 & & +\,4a^2x^3 & -\,24a^3x^2 & +\,48a^4x & -\,32a^5 \\
\hline
x^5 & -\,10ax^4 & +\,40a^2x^3 & -\,80a^3x^2 & +\,80a^4x & -\,32a^5
\end{array}
$$

Hulkliikmete korrutamisel võime enne korrutamisele asumist korrutatava ja korrutaja hulkliikme korraldada ühe ja sama tähe astendajate alanevas (või kasvavas) järjekorras. Korrutamisel kirjutame osakorrutised üksteise alla, nii et sarnased liikmed asuvad sarnaste all; selle järel liidame osakorrutised.

Harjutusi.

44. a) $(3a^2 - 4a + 8)(5a^2 - a - 6)$
b) $(x^2 - 2xy + y^2)(x^2 + 2xy - y^2)$
c) $(-7mn + 3m^2 - n^2)(-6mn + 4m^2 + 5n^2)$
d) $(10pq - 15p^2 - q^2)(-p^2 + 6pq - 2q^2)$
e) $(2a + b)(6a^3 - 5a^2b - 4ab^2 + 3b^3)$
f) $(3a - b)(8a^3 + 7a^2b - 4ab^2 - 9b^3)$

45. a) $(x - 1)(x - 2)(x - 3)$
b) $(2x - 3)(3x - 4)(4x - 5)$
c) $(3x + 2)(5x - 6)(2x - 7)$
d) $(x - a)(x + a)(x^2 + a^2)$
e) $(x - a)(x^2 - a^2)(x + a)$

46. a) $(2a + 3b)(3a - 4b) + (5a - 6b)(a - 3b)$
b) $(7x - 4y)(3x + 5y) - (6x + 7y)(2x - 3y)$

c) $(3m - 7n)(5m - 4n) - (8m - 3n)(2m - 5n)$

d) $(x + y)(x^2 - xy + y^2) - (x - y)(x^2 +$
$+ xy + y^2)$

e) $(2a - 3)(4a^2 + 6a + 9) - (2a + 3)(4a^2 -$
$- 6a + 9)$

f) $(r + 2s)(r - 2s) - (2r + s)(3r - 5s) -$
$- 4r(2r - s)$

g) $- 3a(2a - 11) + (3a + 2)(4a - 5) -$
$- (7a - 3)(a - 6)$

h) $2(3x - 5)(x + 2) - 4(2x - 3)(5x + 2) -$
$- 3(x - 4)(6x - 1)$

Ülesandeid.

47. Mis määral muutub arvude a ja b korrutis, kui esimest neist suurendada 5 võrra ja teist 3 võrra?

48. Mis määral muutub arvude m ja n korrutis, kui esimest arvu vähendada 4 võrra ja teist 7 võrra?

49. Talumehe ristkülikutaolise viljapuu-aia pikkus oli p meetrit ja laius l meetrit. Aia suurendamise otstarbel lisati pikkusele juurde 15 m ja laiusele 8 m. Kui palju suurenes aia pindala?

50. Asunik sai oma põllult a tsentnerit linu ja müüs nad b kr. tsentner. Järgmisel aastal sai ta külvipinna suurendamise tõttu linu 3 tsentnerit rohkem, kuid hindade languse tõttu oli ta sunnitud tsentneri linu müüma 18 kr. odavamalt. Kuidas muutus linadest saadud sissetulek?

51. Jalgrattasõitjal kulus lähemasse linna sõiduks t tundi, kui ta sõitis keskmise kiirusega v km tunnis. Alevisse sõiduks kulus tal 1 tund 30 min. vähem aega, olgugi et tal halbade teeolude tõttu tuli kiirust 3 km võrra tunnis vähendada. Mitme km võrra on tee linna pikem kui alevisse?

52. Käitises töötas n töölist; iga töölise päevane teenistus oli k krooni. Käitise saaduste turustamise võimaluste paranemise tõttu võeti a töölist juurde ja tõsteti iga töölise päevast tasu b krooni võrra. Kui palju suurenes käitise igapäevane kulu tööliste palkadeks?

53. Autojuht suurendas auto keskmist kiirust v a võrra, sõidu aega t aga vähendas b võrra. Mille võrra muutus sõidutee pikkus?

54. Mille võrra muutub hoiusummalt s saadud tulu p protsendi juures, kui hoiusummat vähendada β võrra ja aega a aastat suurendada α aasta võrra?

55. Mis määral vähenes ametniku tulu tema kapitalilt K, kui ta oli sunnitud oma kapitali vähendama k võrra ja pank protsendimäära P vähendas p võrra?

56. Ristkülikutaolise ehituskrundi suurus oli a aari ja m ruutmeetrit. Müügihinnaks arvati k krooni s senti ruutmeeter. Kui kallilt müüdi krunt?

57. Müüdi t tonni k kvintaali linu hinnaga n £ s šillingit tonn. Mitu naelsterlingit saadi linade eest? (1 £ = 20 š.)

58. Ristküliku mõõtmed on: m sülda n jalga ja p sülda q jalga. Leia ristküliku pindala! (1 süld = 7 jalga.)

59. Osteti t tosinat ja $ü$ üksikut rulli niiti hinnaga k krooni s senti tosin. Leia arve suurus!

60. Põllu suurus on h hektaari a aari. Keskmiselt saadi aarilt k kvintaali r kilogrammi vilja. Leia kogusaak!

61. Lenduri keskmine lennukiirus oli k kilomeetrit m meetrit minutis. Missuguse maa kattis lendur t tunni s minutiga?

62. Kordamiseks.

1) a) Leia 8% arvust 120!
   b) „ 200% „ 40!

2) a) Mitu protsenti moodustab arv 25 arvust 400?
b) arv 12,8 arvust 76,2?
3) Arvuta!
$a + b$; $a - b$; ab; $a:b$; $(a + b)^2$; $(a - b)^3$, kui $a = 4$ ja $b = -7$.
4) Lahenda järgnevad võrrandid!
a) $3 - x = 14$; b) $17 = 8 - x$; c) $\frac{5}{x} = 3$;
d) $8 = \frac{1}{x}$.
5) Mida nimetame üksliikmeks, mida hulkliikmeks?
6) Poiss kavatses osta 8 apelsini. Et apelsin maksis 5 senti rohkem, kui ta arvas, siis sai ta oma raha eest ainult 6 apelsini. Kui kallis oli 1 apelsin?
7) Missugust arvu peame vähendama 24 võrra, et saada $\frac{1}{3}$ otsitavast arvust?
8) Kolmnurga küljed suhtuvad nagu 2:3:5. Kui pikk on iga külg, kui kolmnurga ümbermõõt on 30 cm?
9) Ühel õpilasel oli 180 senti, teisel 216 senti. Esimene kulutas iga päev 5 senti, teine 8 senti. Mitme päeva järel oli neil ühepalju raha järele jäänud?
10) Üks ristküliku külg on 6 cm, teine külg on 2 korda pikem. Kui lühendame pikemat külge 4 cm võrra, mille võrra tuleb siis lühemat külge pikendada, et ristküliku pindala jääks muutumatuks?

9. Arvutamise abivalemid.

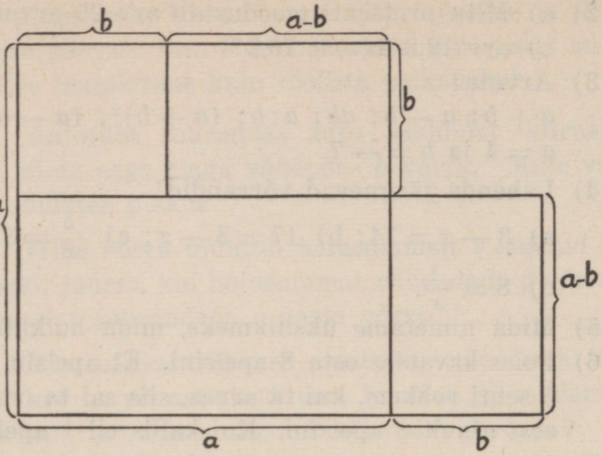
Summa ja vahe korrutis.

$$(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$$

$$\boxed{(a + b)(a - b) = a^2 - b^2}$$

Kahe arvu summa ja vahe korrutis on võrdne samade arvude ruutude vahega.

Sama valemi võime tuletada geomeetriliselt.



17. joonis.

Võtame ruudu, mille külje pikkus olgu a; pikendame ühte külge b võrra ja lühendame teist külge sama võrra, siis saame ristküliku külgedega $a + b$ ja $a - b$. Joonisest näeme, et saadud ristküliku pindala on väiksem antud ruudu pindalast b^2 võrra.

Järelikult: $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

Näidiseid:

$$49 \cdot 51 = (50-1)(50+1) = 50^2 - 1^2 =$$
$$= 2500 - 1 = 2499;$$
$$(3a + 5b^2)(3a - 5b^2) = (3a)^2 - (5b^2)^2 = 9a^2 - 25b^4$$
$$(6x + \tfrac{1}{4})(6x - \tfrac{1}{4}) = (6x)^2 - (\tfrac{1}{4})^2 = 36x^2 - \tfrac{1}{16}.$$

Arvuta valemi abil!

63. a) $23 \cdot 17$ e) $86 \cdot 94$ i) $1004 \cdot 996$
b) $34 \cdot 26$ f) $103 \cdot 97$ j) $20{,}2 \cdot 19{,}8$
c) $42 \cdot 58$ g) $117 \cdot 123$ k) $2\tfrac{1}{2} \cdot 1\tfrac{1}{2}$
d) $64 \cdot 76$ h) $209 \cdot 191$ l) $3\tfrac{1}{4} \cdot 2\tfrac{3}{4}$

64. $37^2 - 13^2 = (37+13)(37-13) = 50 \cdot 24 = 1200$
a) $26^2 - 14^2$ c) $35^2 - 25^2$
b) $98^2 - 52^2$ d) $77^2 - 47^2$

e) $509^2 - 91^2$
f) $455^2 - 45^2$
g) $197^2 - 3^2$
h) $984^2 - 16^2$
i) $223^2 - 177^2$
j) $683^2 - 682^2$
k) $1254^2 - 1251^2$
l) $1079^2 - 79^2$
m) $8{,}16^2 - 1{,}84^2$
n) $84{,}6^2 - 15{,}4^2$

65.

a) $(n+1)(n-1)$
b) $(x+3)(x-3)$
c) $(a+5)(a-5)$
d) $(r+11)(r-11)$
e) $(8+m)(8-m)$
f) $(15+y)(15-y)$
g) $(a-14)(a+14)$
h) $(b-0{,}1)(b+0{,}1)$
i) $(c-0{,}02)(c+0{,}02)$
j) $(d+\frac{3}{4})(d-\frac{3}{4})$
k) $(l-2\frac{1}{4})(l+2\frac{1}{4})$
l) $(f+4\frac{1}{2})(f-4\frac{1}{2})$

66.

a) $(g-7)(7+g)$
b) $(h+13)(13-h)$
c) $(i+17)(-17+i)$
d) $(-k+20)(-k-20)$
e) $(1{,}3+l)(-1{,}3+l)$
f) $(-1{,}4-m)(-1{,}4+m)$
g) $(\frac{2}{3}+n)(-n+\frac{2}{3})$
h) $(\frac{2}{5}-p)(-0{,}4-p)$

67.

a) $(x+a)(x-a)$
b) $(2a+b)(2a-b)$
c) $(3c-2d)(2d+3c)$
d) $(1-5ab)(1+5ab)$
e) $(9x+7y)(7y-9x)$
f) $(-3m+12n)(-3m-12n)$
g) $(-1{,}1r-1{,}2s)(1{,}1r-1{,}2s)$
h) $(0{,}3a+7b)(-0{,}3a+7b)$

68.

a) $(6a^2+5b^2)(6a^2-5b^2)$
b) $(3a^2b-4ab^2)(3a^2b+4ab^2)$
c) $(m^2n+p^3q)(m^2n-p^3q)$
d) $(7xy^3-3\frac{1}{3})(3\frac{1}{3}+7xy^3)$
e) $(-3a^n+b^{2n})(-3a^n-b^{2n})$
f) $(2a^{n+1}-9b^{4-n})(2a^{n+1}+9b^{4-n})$

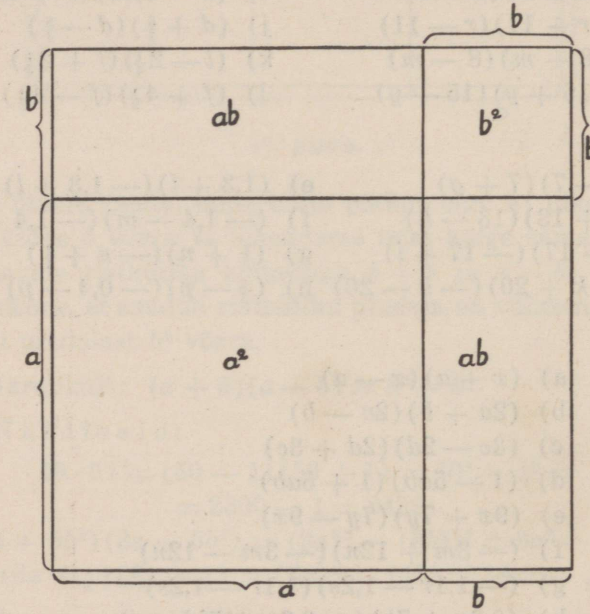
Summa ruut.

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 =$$
$$= a^2 + 2ab + b^2$$

$$\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$

Kahe arvu summa ruut on võrdne esimese arvu ruuduga + esimese ja teise arvu kahekordne korrutis + teise arvu ruut.

Tuletame sama valemi geomeetriliselt.



18. joonis.

Võtame ruudu, mille külje pikkus olgu a. Pikendades külgi b võrra saame uue ruudu küljepikkusega $a + b$.

Joonisest näeme, et uue ruudu pindala on

$(a + b)^2 = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Näidiseid:

$$32^2 = (30+2)^2 = 30^2 + 2 \cdot 30 \cdot 2 + 2^2 =$$
$$= 900 + 120 + 4 = 1024;$$

$$(3a^2 + 2b)^2 = (3a^2)^2 + 2 \cdot 3a^2 \cdot 2b + (2b)^2 =$$
$$= 9a^4 + 12a^2b + 4b^2.$$

Arvuta valemi abil!

69. a) 51^2 e) 102^2 i) 1010^2 m) $(2\frac{1}{3})^2$
b) 62^2 f) 104^2 j) 2005^2 n) $(3\frac{2}{3})^2$
c) 71^2 g) 121^2 k) 1001^2 o) $(5\frac{1}{4})^2$
d) 43^2 h) 111^2 l) 803^2 p) $(14{,}1)^2$

Harjutusi.

70. a) $(x + 3)^2$ e) $(4 + y)^2$ i) $(u + \frac{1}{2})^2$
b) $(x + 7)^2$ f) $(19 + y)^2$ j) $(u + 2\frac{1}{2})^2$
c) $(x + 15)^2$ g) $(2{,}2 + z)^2$ k) $(\frac{2}{3} + z)^2$
d) $(x + 18)^2$ h) $(1{,}3 + z)^2$ l) $(z + 0{,}01)^2$

71. a) $(2a + b)^2$ f) $(5mn + 4)^2$
b) $(3x + 2y)^2$ g) $(8ab + 9cd)^2$
c) $(1 + 9z)^2$ h) $(7cf + 11gh)^2$
d) $(4a + 5b)^2$ i) $(3ab + 2ab)^2$
e) $(12m + 13n)^2$ j) $(12kl + 4kl)^2$

72. a) $(4x^2 + 3x)^2$ h) $(\frac{2}{3}bc + \frac{3}{4}b^2c)^2$
b) $(7a^2 + 3b^2)^2$ i) $(\frac{5}{6}m^2n + \frac{3}{5}mn^2)^2$
c) $(6a^2p + 17m^2)^2$ j) $(0{,}2pq + 0{,}03p^2)^2$
d) $(3u^2 + \frac{2}{3}v^3)^2$ k) $(a^n + \frac{1}{3}ax^2)^2$
e) $(6x^2 + \frac{1}{6}y^3)^2$ l) $(x^n + y^n)^2$
f) $(5m^2 + 0{,}1)^2$ m) $(2x^{n+1} + 3y^2)^2$
g) $(4a^3 + 1{,}2b)^2$ n) $(5x^{n-2} + 0{,}2x^2y^2)^2$

73. Näita, et

$$(a + \tfrac{1}{2})^2 = a(a + 1) + \tfrac{1}{4}$$

ja rakenda valemit!

a) $(1\frac{1}{2})^2$ d) $(15\frac{1}{2})^2$ g) $29{,}5^2$
b) $(6\frac{1}{2})^2$ e) $(20\frac{1}{2})^2$ h) $50{,}5^2$
c) $(10\frac{1}{2})^2$ f) $(9{,}5)^2$ i) $100{,}5^2$

74. Näita, et

$$(10k + 5)^2 = 100k(k + 1) + 25$$

ja rakenda seda valemit!

a) 45^2	d) 105^2	g) 195^2
b) 65^2	e) 115^2	h) 505^2
c) 85^2	f) 155^2	i) 995^2

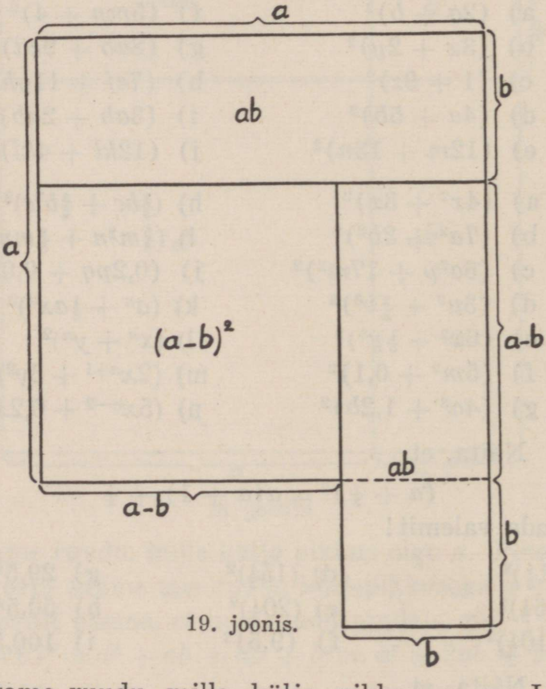
Vahe ruut.

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ab + b^2 =$$
$$= a^2 - 2ab + b^2$$

$$\boxed{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$$

Kahe arvu vahe ruut on võrdne esimese arvu ruuduga — esimese ja teise arvu kahekordne korrutis + teise arvu ruut.

Tuletame sama valemi geomeetriliselt.



19. joonis.

Võtame ruudu, mille külje pikkus on a. Lühendades ruudu külgi b võrra saame uue ruudu, mille külje pikkus on $a - b$.

Joonisest näeme, et uue ruudu pindala on:

$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - ab - ab = a^2 - 2ab + b^2.$

N ä i d i s e i d:

$$49^2 = (50 - 1)^2 = 50^2 - 2 \cdot 50 \cdot 1 + 1^2 =$$
$$= 2500 - 100 + 1 = 2401;$$
$$(5a^2 - 3b)^2 = (5a^2)^2 - 2 \cdot 5a^2 \cdot 3b + (3b)^2 =$$
$$= 25a^4 - 30a^2b + 9b^2;$$
$$(-a - 3b)^2 = (-a)^2 - 2(-a)3b + (3b)^2 =$$
$$= a^2 + 6ab + 9b^2$$

ehk $(-a - 3b)^2 = [-(a + 3b)]^2 = (a + 3b)^2 =$
$$= a^2 + 6ab + 9b^2.$$

75. Arvuta valemi abil!

a) 18^2	e) 99^2
b) 37^2	f) 197^2
c) 68^2	g) 998^2
d) 89^2	h) 1990^2

Harjutusi.

76.

a) $(m - n)^2$	g) $(b - 14)^2$
b) $(n - m)^2$	h) $(-19 + b)^2$
c) $(x - 7)^2$	i) $(-25 + c)^2$
d) $(7 - x)^2$	j) $(d - \frac{3}{4})^2$
e) $(a - 0{,}1)^2$	k) $(e - 1\frac{1}{2})^2$
f) $(0{,}1 - a)^2$	l) $(f - 0{,}06)^2$

77.

a) $(3m - n)^2$	f) $(9ab - 4ab)^2$
b) $(7a - 5b)^2$	g) $(17b - 19b)^2$
c) $(-16c + 3d)^2$	h) $(13xy - 0{,}03)^2$
d) $(1 - 15k)^2$	i) $(12Rr - 5R)^2$
e) $(1 - 0{,}01p)^2$	j) $(-8m - 3n)^2$

78.

a) $(a^2 - b^2)^2$	f) $(\frac{3}{7}a^2b - \frac{7}{3}ab^2)^2$
b) $(5z - 3z^2)^2$	g) $(-0{,}1 - 5a^3)^2$
c) $(11m - 2m^2)^2$	h) $(-0{,}3a - 0{,}4b^2c)^2$
d) $(4a^2 - \frac{1}{4}ab)^2$	i) $(-1{,}6m^2 - 0{,}05mn^2)^2$
e) $(3f^2 - \frac{1}{6}fg)^2$	j) $(-2{,}5a^3 + \frac{1}{2}b^3)^2$

79. a) $(a^n - b^n)^2$ c) $(u^{n+1} - 3\frac{1}{2}u^{n-1}q^2)^2$
b) $(x^n - 2\frac{2}{3}x^2y)^2$ d) $(2p^{2n-1} - \frac{3}{4}pq^3)^2$

Summa kuup.

$$(a + b)^3 = (a + b)(a + b)^2 = (a + b)(a^2 + 2ab + b^2) =$$
$$= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 =$$
$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$\boxed{(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$$

Kahe arvu summa kuup on võrdne esimese arvu kuubiga + esimese arvu ruudu ja teise arvu kolmekordne korrutis + esimese arvu ja teise arvu ruudu kolmekordne korrutis + teise arvu kuup.

Näidis:

$$(2a + 5b)^3 = (2a)^3 + 3(2a)^2 5b + 3 \cdot 2a(5b)^2 +$$
$$+ (5b)^3 = 8a^3 + 60a^2b + 150ab^2 + 125b^3.$$

Harjutusi.

80. a) $(m + 1)^3$ e) $(2 + 0{,}1a)^3$
b) $(1 + n)^3$ f) $(1 + 0{,}01p)^3$
c) $(x + 2)^3$ g) $(a + \frac{2}{3})^3$
d) $(x + 6)^3$ h) $(R + 1\frac{1}{3})^3$

81. a) $(2u + v)^3$ e) $(3a + \frac{1}{3}bc^2)^3$
b) $(5z + 4t)^3$ f) $(4ab^2 + 3abc)^3$
c) $(10x^2 + 3xy)^3$ g) $(5a^2 + 0{,}2b^2)^3$
d) $(\frac{2}{3}x^2 + \frac{3}{4}y)^3$ h) $(6a + 0{,}01ap)^3$

Vahe kuup.

$$(a - b)^3 = (a - b)(a - b)^2 = (a - b)(a^2 - 2ab + b^2) =$$
$$= a^3 - 2a^2b + ab^2 - a^2b + 2ab^2 - b^3 =$$
$$= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$\boxed{(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3}$$

Kahe arvu vahe kuup on võrdne esimese arvu kuubiga — esimese arvu ruudu ja teise arvu kolmekordne korrutis + esimese arvu ja teise arvu ruudu kolmekordne korrutis — teise arvu kuup.

N ä i d i s:

$$(7x^2 - 5y)^3 = (7x^2)^3 - 3(7x^2)^2 5y + \\ + 3 \cdot 7x^2(5y)^2 - (5y)^3 = 343x^6 - 735x^4y + \\ + 525x^2y^2 - 125y^3.$$

Harjutusi.

82. a) $(x - 2)^3$ e) $(1 - 0{,}01p)^3$
b) $(2 - x)^3$ f) $(a - 0{,}2)^3$
c) $(z - 5)^3$ g) $(c - \frac{1}{6})^3$
d) $(5 - z)^3$ h) $(R - 1\frac{1}{2})^3$

83. a) $(-2a + 5b)^3$ f) $(a^2 - 10)^3$
b) $(-3 + 7x^2)^3$ g) $(8a^2 - 5b^3)^3$
c) $(-u - v)^3$ h) $(4x^3 - 7y^2)^3$
d) $(-10 - a^2)^3$ i) $(2abc - 9a^2b)^3$
e) $(10 - a^2)^3$ j) $(\frac{3}{4}m^2n - \frac{2}{3}mn^2)^3$

Mitmesuguseid lühendusi hulkliikmete korrutamisel.

$$(x + a)(x + b) = x^2 + bx + ax + ab = \\ = x^2 + (a + b)x + ab;$$

$$\boldsymbol{(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab.}$$

$$(x + a)(x - b) = x^2 + ax - bx - ab = \\ = x^2 + (a - b)x - ab;$$

$$\boldsymbol{(x + a)(x - b) = x^2 + (a - b)x - ab.}$$

$$(x - a)(x - b) = x^2 - ax - bx + ab = \\ = x^2 - (a + b)x + ab;$$

$$\boldsymbol{(x - a)(x - b) = x^2 - (a + b)x + ab.}$$

N ä i d i s e i d:

$$(x + 3)(x + 7) = x^2 + (3 + 7)x + 3 \cdot 7 = \\ = x^2 + 10x + 21.$$

$$(a+5)(a-1) = a^2 + (5-1)a - 5\cdot 1 =$$
$$= a^2 + 4a - 5.$$
$$(m-8)(m+4) = m^2 + (4-8)m - 8\cdot 4 =$$
$$= m^2 - 4m - 32.$$
$$(g-11)(g-12) = g^2 - (11+12)g + 11\cdot 12 =$$
$$= g^2 - 33g + 132.$$
$$(3a^2+2)(3a^2-5) = (3a^2)^2 + (2-5)3a^2 - 2\cdot 5 =$$
$$= 9a^4 - 9a^2 - 10.$$
$$(5x^2-a)(5x^2+2b) = (5x^2)^2 + (2b-a)5x^2 - a\cdot 2b =$$
$$= 25x^4 + 5(2b-a)x^2 - 2ab.$$

Harjutusi.

84. a) $(x+1)(x+2)$
b) $(x+5)(x-3)$
c) $(x-7)(x+9)$
d) $(x+11)(x-15)$
e) $(x-8)(x-12)$
f) $(a^2+3)(a^2+4)$
g) $(b^2+17)(b^2-5)$
h) $(c^3-11)(c^3+13)$
i) $(g^2-16)(g^2+7)$
j) $(m^3-14)(m^3-9)$

85. a) $(2x+7)(2x-5)$
b) $(4a-3)(4a+9)$
c) $(5b+9)(5b-6)$
d) $(3z-8)(3z+2)$
e) $(7y-4)(7y-6)$
f) $(3x^2+2)(3x^2-9)$
g) $(6x^2-5)(6x^2-7)$
h) $(10y^2+3)(10y^2+1)$
i) $(12m^2-5)(12m^2+3)$
j) $(4am^2-3)(4am^2+2)$

86. a) $(10-a)(10-5b)$
b) $(10-5x)(10+y)$
c) $(1+3a)(1-b)$
d) $(8-3x)(8-2y)$
e) $(x+3)(x+n)$
f) $(x-2)(x+n)$
g) $(x-4)(x-n)$
h) $(3x^2-m)(3x^2+n)$
i) $(7x^2-a)(7x^2-b)$
j) $(ax^n+b)(ax^n-c)$

$$(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3 - a^2b + ab^2 +$$
$$+ a^2b - ab^2 + b^3 = a^3 + b^3$$

$$\boxed{(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3}$$

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 + a^2b + \\ + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3 = a^3 - b^3$$

$$\boxed{(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3}$$

Näidiseid:

$$(3 - x)(9 + 3x + x^2) = (3 - x)(3^2 + 3 \cdot x + x^2) = \\ = 3^3 - x^3 = 27 - x^3;$$

$$(4a^2 + y)(16a^4 - 4a^2y + y^2) = \\ = (4a^2 + y)[(4a^2)^2 - 4a^2 \cdot y + y^2] = \\ = (4a^2)^3 + y^3 = 64a^6 + y^3.$$

Harjutusi.

87. a) $(x + y)(x^2 - xy + y^2)$
b) $(m - n)(m^2 + mn + n^2)$
c) $(4 + 2u + u^2)(2 - u)$
d) $(a^2 - 5a + 25)(a + 5)$
e) $(s^2 + 8s + 64)(8 - s)$
f) $(a^2 + 3ab + 9b^2)(a - 3b)$
g) $(16x^2 - 4xy + y^2)(4x + y)$
h) $(36g^2 - 6gh + h^2)(6g + h)$
i) $(R^2 - 11Rr + 121r^2)(R + 11r)$
j) $(169n^2 + 13mn + m^2)(13n - m)$

88. a) $(x^4 - x^2y^2 + y^4)(x^2 + y^2)$
b) $(a^6 + 3a^3 + 9)(a^3 - 3)$
c) $(25m^6 - 5m^3n^2 + n^4)(5m^3 + n^2)$
d) $(9a^4 + 6a^2b + 4b^2)(3a - 2b)$
e) $(64y^6 + 56y^3z^2 + 49z^4)(8y^3 - 7z^2)$
f) $(81p^6 - 99p^3q^3 + 121p^6)(9p^3 + 11q^3)$

Ülesandeid.

89. Arvuta ruudu pindala, mille külg on:
a) i jardi j jalga (1 jard = 3 jalga)!

b) m meetrit c sentimeetrit (ruutmeetrites)!

c) k kilomeetrit m meetrit (ruutmeetrites)!

d) d detsimeetrit e millimeetrit (ruutdetsimeetrites)!

90. Ruudukujulise ehituskrundi suurus on a^2 ruutmeetrit. Ruudu külg on mõõdetud veaga kuni $\pm\ \alpha$ meetrit. Kui suur hinnavahe tekib, kui mõõtmine arvata ostja kasuks võrreldult selle hinnaga, mis tekib siis, kui mõõtmine arvata müüja kasuks, arvates ruutmeetri hinnaks k krooni?

91. Ringi raadiuse r m mõõtmisel on tehtud viga kuni $\pm\ \varrho$ cm. Missuguste rajade vahel peitub ringi tõeline pindala? Kui lai on ringi pindala määramatuse piirkond?

92. Rauast kera raadius R dm tõmbus jahtumisel kokku $p\%$ võrra. Kui palju vähenes selle kera pindala? (Kera pindala $S = 4\pi R^2$.)

93. Vaskplaadi pikkus ja laius on 2,4 m ja 1,6 m. Plaadi mõõtmed temperatuuri tõusu tagajärjel suurenesid $p\%$ võrra. Mille võrra suurenes plaadi pindala?

94. Kuubi serv a m paisub temperatuuri tõusmisel α cm võrra. Mille võrra kasvab kuubi ruumala?

95. Kui kera raadius r väheneks $p\%$ võrra, mis määral väheneks siis kera ruumala? (Kera ruumala $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.)

96. Kera raadius leiti mõõtmisel r cm veaga mitte üle $\pm\ \varrho$ cm. Missuguste rajade vahel peitub kera ruumala? Kui lai on kera ruumala määramatuse piirkond?

97. Klassiruumi pikkus pidi saama 8 m, laius 7 m ja kõrgus 4 m. Et ruum leiti olevat väike, siis suurendati kõiki ruumi mõõtmeid $p\%$ võrra. Mille võrra suurenes ruumala?

98. N. piimaühisus saatis turule a kvintaali võid, saades kvintaalist keskmiselt k krooni. Järgmisel aastal langes või hind $p\%$ võrra, võid turustati aga $p\%$ võrra rohkem. Mis määral muutus või eest saadud sissetulek?

99. Mille võrra muutub kolmliikme $x^2 - 5x + 6$ väärtus, kui x muutub väärtuselt 3 kuni väärtuseni $3 + h$?

100. Missugune on kolmliikme $2 + 3x - 2x^2$ kasv, kui x kasvab väärtuselt $2 - h$ kuni väärtuseni $2 + h$?

101. Arvuta allpool-järgnevate kolmliikmete kasvud!

Nr.	Kolmliige	x algväärtus	x lõppväärtus
a)	$x^2 + 2x - 5$	$+2$	$+2{,}5$
b)	$x^2 - 3x + 2$	$+4$	$+4 + h$
c)	$x^2 - 6x + 8$	-1	$-1 + h$
d)	$-x^2 + 7x - 4$	$+3$	$+3 + h$
e)	$-x^2 - 4x + 6$	-3	$-3 + h$
f)	$x^2 - 5x + 4$	a	$a + h$
g)	$-x^2 - x + 2$	$-a$	$-a + h$
h)	$-x^2 + 8x - 12$	$a - h$	$a + h$
i)	$2x^2 - 11x + 7$	5	$5 + h$
j)	$-3x^2 - 9x + 5$	-6	$-6 + h$

102. Arvuta allpool-järgnevate hulkliikmete kasvud, kui on antud muutuja alg- ja lõppväärtused!

Nr.	Hulkliige	x algväärtus	x lõppväärtus
a)	$x^3 - 2x^2 + 4x - 1$	0	$0{,}2$
b)	$x^3 - 2x^2 - 3x + 5$	3	$3 + h$
c)	$2x^3 - x^2 - 4x - 2$	-2	$-2 + h$
d)	$-x^3 - 3x^2 + 2x + 4$	$1 - h$	$1 + h$
e)	$-2x^3 - 4x^2 + 9$	a	$a + h$
f)	$2x^3 + 3x^2 - 12$	$a - h$	a
g)	$3x^3 - 2x^2 - 7x + 8$	$b - \beta$	$b + \beta$

10. Hulkliikme jagamine hulkliikmega.

Jagame hulkliikme $2x^3 + 14x - 8x^2 - 12$ hulkliikmega $-2x + x^2 + 3$. Korraldame jagatava ja jagaja liikmed ühe ja sama tähe astendajate alanevas järjekorras.

$$
\begin{array}{rrrr|l}
2x^3 & - 8x^2 & + 14x & - 12 & x^2 - 2x + 3 \\
\cline{5-5}
\mp 2x^3 & \pm 4x^2 & \mp 6x & & 2x - 4 \\
\cline{1-4}
& - 4x^2 & + 8x & - 12 & \\
& \pm 4x^2 & \mp 8x & \pm 12 & \\
\cline{1-4}
\end{array}
$$

Jagades jagatava kõrgemat liiget jagaja kõrgema liikmega saame jagatise esimese liikme. Korrutame jagaja iga liiget jagatise esimese liikmega ja lahutame saadud korrutise jagatavast, saame esimese jäägi. Jagades esimese jäägi kõrgemat liiget jagaja kõrgema liikmega saame jagatise teise liikme. Korrutame jagaja iga liiget jagatise teise liikmega ja lahutame saadud korrutise esimesest jäägist, saame teise jäägi jne.

Harjutusi.

103. a) $(x^2 + 11x + 28) : (x + 4)$
b) $(x^2 - 15x + 36) : (x - 12)$
c) $(x^2 - x - 12) : (x - 4)$
d) $(6x^2 - x - 15) : (2x + 3)$
e) $(-12x^2 + 5x + 28) : (3x + 4)$

104. a) $(2x^3 + x^2 - 8x + 3) : (-x^2 - 2x + 1)$
b) $(2a^4 - a^6 + 6a^2 + 3) : (-3a^2 + a^4 + 3)$
c) $(9x^2 - 6x^2y + 6xy^2 - 4y^2) : (3x - 2y)$
d) $(2x^3 - 15y^3 - 6xy^2 + 5x^2y) : (2x + 5y)$
e) $(15m^3 - 9m^2n - 25mn^2 - 12n^3) : (5m + 4n)$

105. a) $(15a^4 - 34a^3 + a^2 + 2a - 8) : (3a^2 - 5a - 4)$
b) $(56p^4 - 53p^3q + 119p^2q^2 - 47pq^3 + 45q^4) :$
$: (7p^2 - 4pq + 9q^2)$
c) $(18x^4 - 33x^3y + 32x^2y^2 - 9xy^3 - 8y^4) :$
$: (6x^2 - 7xy + 8y^2)$

106. a) $(125x^6 - 27y^3) : (5x^2 - 3y)$
b) $(64a^6 + 216b^6) : (4a^2 + 6b^2)$
c) $(27m^3 + 8n^3) : (9m^2 - 6mn + 4n^2)$
d) $(343p^6 - 512q^6) : (49p^4 + 56p^2q^2 + 64q^4)$

11. Korrutamise abivalemite kasustamine jagatise leidmisel.

107. a) $(a^2 - b^2) : (a + b)$ e) $(a^4 - b^4) : (a^2 + b^2)$
b) $(a^2 - b^2) : (a - b)$ f) $(a^4 - b^4) : (a^2 - b^2)$
c) $(a^3 + b^3) : (a + b)$ g) $(a^6 + b^6) : (a^2 + b^2)$
d) $(a^3 - b^3) : (a - b)$ h) $(a^6 - b^6) : (a^2 - b^2)$

108. a) $(a^2 + 2ab + b^2) : (a + b)$
b) $(a^2 - 2ab + b^2) : (a - b)$
c) $(a^4 + 2a^2b^2 + b^4) : (a^2 + b^2)$
d) $(a^4 - 2a^2b^2 + b^4) : (a^2 - b^2)$

109. a) $(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) : (a + b)$
b) $(a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3) : (a - b)$
c) $(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) : (a^2 + 2ab + b^2)$
d) $(a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3) : (a^2 - 2ab + b^2)$

110. a) $(x^2 - 1) : (x - 1)$ e) $(x^3 - 27) : (x - 3)$
b) $(x^2 - 9) : (x + 3)$ f) $(x^3 + 125) : (x + 5)$
c) $(x^4 - 4) : (x^2 + 2)$ g) $(x^6 - 64) : (x^2 - 4)$
d) $(x^4 - 16) : (x^2 - 4)$ h) $(x^6 + 216) : (x^2 + 6)$

111. a) $(a^3 + b^3) : (a^2 - ab + b^2)$
b) $(a^3 - b^3) : (a^2 + ab + b^2)$
c) $(x^3 + 1) : (x^2 - x + 1)$
d) $(x^3 - 27) : (x^2 + 3x + 9)$

112. a) $(x^2 + 3x + 2) : (x + 1)$
b) $(x^2 + 5x + 6) : (x + 3)$
c) $(x^2 + 7x + 12) : (x + 4)$
d) $(x^2 + 9x + 20) : (x + 5)$

e) $(x^2 - 5x + 6) : (x - 2)$
f) $(x^2 - 8x + 15) : (x - 5)$
g) $(x^2 - 11x + 30) : (x - 6)$
h) $(x^2 - 13x + 42) : (x - 7)$

113. a) $(y^2 + y - 6) : (y + 3)$
b) $(y^2 + 5y - 14) : (y + 7)$
c) $(y^2 + 3y - 10) : (y - 2)$
d) $(y^2 + 6y - 40) : (y - 4)$
e) $(z^2 - 3z - 10) : (z + 2)$
f) $(z^2 - 7z - 30) : (z + 3)$
g) $(z^2 - z - 2) : (z - 2)$
h) $(z^2 - 9z - 22) : (z - 11)$

114. Kordamiseks.

1) Mis sünnib summaga: a) kui ühte liidetavat suurendada 5 võrra ja teist 7 võrra?
b) kui ühte liidetavat suurendada 8 võrra ja teist vähendada 15 võrra?
2) Kuidas määrata ühte liidetavatest summa ja teise liidetava kaudu?
3) Mida nimetame võrrandiks?
4) Lahenda järgnevad võrrandid!
a) $x + 4 = 12$; b) $x + 5 = 3$; c) $x + 7 = 7$; d) $b + y = a$.
5) Kuidas määratakse a) vähendatav vähendaja ja vahe kaudu? b) vähendaja vähendatava ja vahe kaudu?
6) Lahenda järgnevad võrrandid!
a) $x - 4 = 15$; b) $x - 7 = -12$; c) $8 - x = 3$; d) $5 - y = 9$; e) $m - y = n$.
7) Mis sünnib korrutisega mn: a) kui ühte tegurit suurendada 5 korda? b) kui mõlemaid suurendada 5 korda? c) kui ühte tegurit suurendada, teist vähendada 5 korda? d) kui ühte tegurit suu-

rendada 4 korda, teist vähendada 8 korda? e) kui ühte tegurit vähendada 10 korda? f) kui mõlemaid tegureid vähendada 10 korda?

8) a) Kuidas määratakse üks teguritest korrutise ja teise teguri kaudu?

b) Kuidas määratakse: a) jagaja jagatava ja jagatise kaudu? b) jagatav jagatise, jagaja ja jäägi kaudu?

9) Lahenda järgnevad võrrandid!

a) $\frac{x}{3} = 8$; b) $\frac{x+2}{4} = 5$; c) $\frac{x-4}{3} = 7$;

d) $\frac{5}{x} = 2$; e) $\frac{6}{x} = 0{,}3$; f) $\frac{a}{x} = b$.

10) Leia a) 8% arvust 50!
„ b) $12\frac{1}{2}$% arvust 72!
„ c) p% arvust a!

11) Mitu protsenti moodustab:
a) arv 4 arvust 16?
b) „ 2 „ 7?
c) „ 15 „ 45?
d) „ a „ b?
e) „ k „ $m + n$?

12) Kahe äriosaniku kapitalid suhtuvad nagu 3 : 5. Puhaskasu jagamisel sai teine 128 krooni rohkem kui esimene. Mitu kr. sai kumbki?

13) Kaks töölist tegid kokku 12 tööpäeva, kusjuures esimene sai päevas 2,50 kr. ja teine 2 kr. Mitu päeva töötas kumbki, kui kogu töötasu oli 28 kr.?

14) Kaks maameest sõitsid linna, üks kaupa müüma, teine kaupa ostma. Nende kaasasolevad rahasummad suhtuvad nagu 5 : 3. Pärast seda kui üks oli linnas kaupa ostnud 12 kr. eest ja teine oli müünud kaupa 8 kr. eest, oli neil ühepalju raha. Kui palju raha oli kummalgi linna minnes?

15) Missugune summa tuleb paigutada panka $4\frac{1}{2}$%-ga aastas, et ühe aasta järel saada pangast 300 kr.?

16) Kolmel poisil on kokku 260 senti. Teisel on 2 korda rohkem raha kui esimesel ja kolmandal 10 senti rohkem kui teisel. Mitu senti on igaühel?

12. Suurim ühistegur. Väikesim ühiskordne.

Arvude lahutamine tegureiks.

Selgitamiseks.

Poisil on 11 õuna; ta soovib nad jaotada oma sõprade vahel võrdselt ilma õunu tükeldamata. Mitme sõbra vahel on jaotamine võimalik?

Selge, et jaotamine on võimalik ainult siis, kui tal on 1 sõber, kellele ta annab kõik 11 õuna, või kui sõpru on 11, kellest igaüks saab 1 õuna, sest arv 11 on jagatav ilma jäägita ainult 1-ga ja iseenesega.

Niisugust täisarvu, mis ei ole muude täisarvudega jagatav ilma jäägita peale 1 ja iseenese, nimetame **algarvuks.**

Kui poisil oleks 18 õuna, siis on jaotamine samadel tingimustel teostatav sel juhul, kui sõpru on 1, 2, 3, 6, 9 või 18, sest 18 on jagatav peale 1 ja iseenese veel 2, 3, 6 ja 9-ga.

Niisugust täisarvu, mis on jäägita jagatav peale 1 ja iseenese veel mõne muu täisarvuga, nimetatakse **kordarvuks.**

Arvud, mille korrutisena esineb kordarv, on tema **tegurid** ehk **jagajad.**

115. Kirjuta kõik täisarvud 2-st kuni 120-ni! Kriipsuta läbi, lähtudes 2-st (kahte mitte arvestada!) iga teine arv; lähtudes 3-st (kolme mitte arvestada!) iga kolmas arv; lähtudes 5-st iga viies arv jne. Ülejäänud 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 jne. on algarvud („Eratosthenes'e sõel").

116. Tõesta järgnevad laused!

a) Kui kaks arvu eraldi on kolmandaga jagatavad, siis on ka nende summa kolmandaga jagatav.

b) Kui kaks arvu eraldi on kolmandaga jagatavad, siis on ka nende vahe kolmandaga jagatav.

c) Kui kahe arvu summa ja üks liidetavatest on kolmanda arvuga jagatavad, siis on ka teine liidetav kolmandaga jagatav.

117. Tõesta järgnevad laused!

a) Kui üks liidetav on jagatav antud arvuga, teine liidetav aga ei ole, siis ei ole ka summa jagatav selle arvuga.

b) Sõnasta samasugune lause kahe arvu vahe kohta!

c) On arv jagatav kahe ühistegurita arvuga eraldi, siis on ta jagatav ka nende korrutisega.

118. Tõesta järgnevad laused!

a) Kui arvu ühelised jaguvad 2-ga, siis jagub ka arv ise 2-ga.

b) Kui täisarv lõpeb 0-ga või 5-ga, siis on ta jaguv 5-ga.

c) Kui täisarv lõpeb 0-ga, siis on ta jaguv 10-ga.

d) Kui täisarv lõpeb kahe nulliga, siis on ta jaguv 100-ga.

119. Tõesta järgnevad laused!

a) Kui täisarvu kahekohane lõpp jagub 25-ga, siis jagub ka arv ise 25-ga.

b) Kui täisarvu kahekohane lõpp jagub 4-ga, siis jagub ka arv ise 4-ga.

c) Kui täisarvu kolmekohane lõpp jagub 8-ga, siis jagub ka arv ise 8-ga.

120. a) Kui arvu ristsumma jagub 3-ga, siis jagub ka arv ise 3-ga.

b) Kui arvu ristsumma jagub 9-ga, siis jagub ka arv ise 9-ga.

121. Kirjuta järgnevad arvud algarvuliste tegurite korrutistena!

a) 57	h) 280	o) 981
b) 91	i) 312	p) 1001
c) 102	j) 343	q) 1173
d) 119	k) 603	r) 2871
e) 165	l) 665	s) 4104
f) 189	m) 696	t) 7308
g) 231	n) 729	u) 8244

122. Leia antud arvu tegurid!

Selleks lahutame arvu algteguriteks, võtame algtegureid ühekaupa, korrutame neid kahekaupa, kolmekaupa jne.

a) 28	d) 120	g) 620
b) 36	e) 270	h) 828
c) 84	f) 524	i) 1000

123. Mitme isiku vahel on võimalik võrdselt jaotada 60 viiesendist ja 36 kahekümnesendist raha?

124. Mitmel viisil on võimalik moodustada ühesugused rühmad 126-st mustast, 84-st punasest ja 210-st valgest kuulist? Kui suur on maksimaalne rühmade arv?

Kui mitmel arvul on üks ja sama tegur (jagaja), siis nimetame viimast nende arvude **ühisteguriks.**

125. Leia allpool-järgnevate arvude ühistegurid!

a) 36 ja 54	c) 125 ja 225	e) 24, 60 ja 72
b) 28 ja 42	d) 189 ja 252	f) 120, 150 ja 180

126. Leia järgnevate üksliikmete ühistegurid!

a) $4a^2$ ja $6a$	e) $10a^2(b+c)$ ja $25a^5(b+c)^3$
b) $18a^2b$ ja $27ab^2$	f) $6m^3$, $9m^2$ ja $15m^4n$
c) $14x^3y^2$ ja $21x^2y^4$	g) $7a^2b^3c$, $14a^3b^2$ ja $21ac^2$
d) $11x^5yz^2$ ja $33x^3y^3$	

Arvude ja üksliikmete suurima ühisteguri leidmine.

Selgitamiseks. Antud arvude **suurimaks ühisteguriks** nimetame suurimat täisarvu, millega on jaguvad kõik antud arvud.

Antud arvude suurima ühisteguri leiame, kui kirjutame välja antud arvude kõik ühised algtegurid ja korrutame neid omavahel.

Näidis: Leiame arvude 18, 24 ja 54 suurima ühisteguri:

$$18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$$
$$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$$
$$54 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$$

S. ü. t. $= 2 \cdot 3 = \mathbf{6}$.

127. Leia järgnevate arvude suurim ühistegur!

a) 24, 36	i) 148, 222	q) 18, 54, 72
b) 42, 56	j) 255, 425	r) 28, 56, 70
c) 54, 72	k) 343, 392	s) 52, 78, 104
d) 51, 85	l) 342, 456	t) 90, 120, 165
e) 78, 91	m) 3900, 5200	u) 154, 231, 308
f) 132, 198	n) 132, 1650	v) 800, 1200, 2000
g) 112, 168	o) 847, 924	x) 444, 666, 811
h) 135, 225	p) 984, 1314	y) 343, 729, 810

Näidis: Leiame üksliikmete $4a^2b^3c$; $8a^3b^2c^2$; $12a^2b^2d$ suurima ühisteguri:

$$4a^2b^3c = 2 \cdot 2 \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b \cdot c$$
$$8a^3b^2c^2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot c \cdot c$$
$$12a^2b^2d = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot d$$

S. ü. t. $= 2 \cdot 2 \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b = \mathbf{4a^2b^2}$.

128. Leia järgnevate üksliikmete suurim ühistegur!

a) ab; ac	e) xy; xz; ux
b) abc; abd	f) $8mnp$; $16mqp$; $20lmn$
c) $6ab$; $12ac$	g) $21rst$; $35rtv$; $42qrt$
d) $18abd$; $45bcd$	h) $22ab$; $33abc$; $55abd$

129. a) $6x^3y^2$; $18x^2y$
b) $32x^3y^4$; $72x^2y^3$
c) $5a^3b^2c$; $15a^2b^3c^2$; $25a^4b^2c^3$
d) $9m^2n^3$; $12m^3n^2p$; $21m^2np^2$

130. a) $27a^{2n}b^m$; $72a^{3n}b^{2m}$; $81a^{2n}b^{3m}$
b) $14a^{n+1}b^{m+2}$; $28a^{n+2}b^{m+1}$; $21a^{n+3}b^m$
c) $4a^2(m+n)^2$; $12a^3(m+n)^3$
d) $42ab(m^4+n^2)^2$; $64a^2c(m^2+n^2)$

Arvude ja üksliikmete vähim ühiskordne.

Antud arvude **vähimaks ühiskordseks** nimetame vähimat täisarvu, mis on jaguv iga antud arvuga.

Selge, et selles ühiskordses peavad esinema iga antud arvu kõik algtegurid.

Antud arvude vähima ühiskordse leiame, kui ühe antud arvu algteguritele kirjutame teguritena juurde kõik need algtegurid, mis puuduvad selle arvu algtegurite hulgas, kuid esinevad mõne teise antud arvu algtegurite hulgas.

131. Mitu tinasõdurit on poisil, kui ta saab neist moodustada rühmad 8-, 12-, 24- ja 32-kaupa?

Näidis: Leiame arvude 20, 42, 56 vähima ühiskordse:

$$20 = 2 \cdot 2 \cdot 5$$
$$42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$$
$$56 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7$$

$$\text{V. ü. k.} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 5 = \mathbf{840.}$$

133. Leia järgnevate üksliikmete vähim ühiskordne!

a) 16, 28	e) 186, 248	i) 16, 24, 32
b) 27, 72	f) 399, 532	j) 27, 63, 81
c) 42, 140	g) 1800, 2400	k) 52, 65, 91
d) 143, 169	h) 568, 852	l) 84, 126, 189

m) 99, 132, 363
n) 360, 810, 5400
o) 328, 494, 820
p) 12, 20, 30, 36
q) 9, 24, 27, 45
r) 45, 75, 120, 180
s) 21, 56, 63, 84
t) 22, 55, 110, 132
u) 26, 39, 65, 91
v) 34, 51, 85, 136
x) 76, 144, 152, 171
y) 288, 432, 480, 642

Näidis: Leiame üksliikmete $9a^2bc^3$ ja $15a^3b^2d$ vähima ühiskordse:

$$9a^2bc^3 = 3\cdot3\cdot a\cdot a\cdot b\cdot c\cdot c\cdot c$$
$$15a^3b^2d = 3\cdot5\cdot a\cdot a\cdot a\cdot b\cdot b\cdot d$$

$$\text{V. ü. k.} = 3\cdot3\cdot a\cdot a\cdot b\cdot c\cdot c\cdot c\cdot5\cdot a\cdot b\cdot d = 45a^3b^2c^3d.$$

133. Leia järgnevate üksliikmete vähim ühiskordne!

a) ab; bc
b) $4ab$; $12bc$
c) a^2; $7ab$
d) $12x^3$; $16x^4$
e) $32x^2y^3$; $48xy^2$
f) $15a^2bc^3$; $20a^3b^2c^2$
g) $6a^2bc^3$; $7a^3c^2d^2$
h) $9m^2np^2$; $21m^2pq^3$
i) $18a^{2n}b^3$; $27a^nbc^2$
j) $39x^{n+2}y^{n-1}z^2$; $52x^{n-3}y^{2n}z^3$
k) $21a^2(b+c)^3$; $49a^3b(b+c)^2$

134. Leia veel vähim ühiskordne!

a) ab; bc; cd
b) $4x^2y$; $6xy^2$; $9x^3y^2$
c) $8m^2n^3$; $12mn^2$; $20m^3n^4$
d) $15a^{2n}b^n$; $45a^nb^{3n}c$; $60a^{3n}bc^3$
e) $4x^{n-3}y^2z$; $9x^{n+2}y^{n-1}$; $18x^n$
f) $2(x-y)$; $6(x-y)^2$; $8(x+y)$
g) $8a$; $16(a+1)$; $32(a+2)$
h) $7a^2$; $2(4a-1)^2$; $21a^3(4a-1)^3$
i) $6a^3$; $5a-b$; $3a-2b$

135. Kordamiseks.

1) Kuidas korrutada ühe ja sama arvu astmeid?

2) Kuidas astendada korrutist?

3) $(4a - \frac{1}{2}b^2)^2$; $(-2m - 5)^2$; $(1 + 0{,}01p)^3$

4) Arvuta valemite abil!

a) $197^2 - 3^2$; b) 101^2.

5) Lahuta teguriteks!

a) $6a - 18b$; b) $36a^2b^3c - 8ab^2c$.

6) Korruta peast!

a) $(x - 5)(x - 6)$; b) $(6 + m)(9 + m)$.

7) Lahenda võrrandid!

a) $\frac{x}{5} = 0{,}7$; c) $5 - x = 16$; e) $0{,}4 = 5 - x$;

b) $\frac{3}{x} = 0{,}1$; d) $3 = x - 9$; f) $2 \cdot \frac{3}{x} = 5$.

8) Arvuta!

$(-4)^3$; -3^2; $(-1\frac{1}{2})^2$; $-(\frac{2}{3})^2$; -4^3.

9) Korruta!

$(2x^2 + 3x + 6)(6x - 5)$.

VI. Murrud.

1. Harjutusi ja ülesandeid.

1. Perenaine ostis a kilo võid, makstes k krooni s senti. Kui kallilt arvestati kilo võid?

2. Osteti g grossi t tosinat rulle niiti, makstes k krooni s senti. Kui kallis on üksik rull niiti?

3. Segati m kilo jahu hinnaga u senti kilo ja n kilo hinnaga v senti kilo. Kui kallis on segu kilo hind?

4. Ristkülikutaoline ehituskrunt, mille mõõtmed on p ja q meetrit, maksab k krooni. Kui kallilt hinnati 1 ruutmeeter seda krunti?

5. Tigu ronib t minuti jooksul m meetrit s sentimeetrit edasi. Kui palju jõuab ta keskmiselt edasi 1 minuti jooksul?

6. Kui mõeldud arvu korrutada a-ga ja tulemusest lahutada b, siis saame arvu k. Leia mõeldud arv!

7. Kolmnurga pindala

$$S=\tfrac{1}{2}ah,$$

kus a on alus ja h on kõrgus. Avalda kõrgus h pindala ja aluse kaudu!

8. Koonuse ruumala

$$V=\tfrac{1}{3}\pi r^2 h,$$

kus r on põhja raadius ja h on kõrgus. Määra kõrgus ruumala ja raadiuse kaudu!

9. Kapital k krooni annab t aasta jooksul $p\%$-ga tulu

$$i = \frac{kpt}{100}.$$

Määra kapital k suuruste i, p ja t kaudu!

10. Jagatav on võrdne jagaja ja jagatise korrutisega + jääk:

$$m = nq + r.$$

Määra q suuruste m, n ja r kaudu!

11. Trapetsi pindala $S = \frac{1}{2}(a + b)h$.

a) Määra h, kui on teada S, a ja b!

b) Määra b, kui on teada S, a ja h!

12. Lõppkapital K määratakse valemi kaudu

$$K = k + \frac{kpt}{100}.$$

a) Määra p suuruste K, k ja t kaudu!

b) Määra t suuruste K, k ja p kaudu!

c) Määra k suuruste K, p ja t kaudu!

13. Silindri täispindala määratakse põhja raadiuse r ja kõrguse h kaudu valemina

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh.$$

Määra h suuruste S ja r kaudu!

14. Tüvikoonuse ruumala

$$V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + Rr + r^2).$$

Määra h, kui teada on ruumala V ja põhjade raadiused R ja r!

15. Valemist $V = \frac{1}{3}\pi h^2(3R - h)$ määra suurus R suuruste V ja h kaudu!

16. Valemist $a_n = a_1 + d(n - 1)$ määra a) d suuruste a_n, a_1 ja n kaudu; b) n suuruste a_n, a_1 ja d kaudu!

17. Valemist $S = \frac{[2a + d(n - 1)]n}{2}$ määra a) a suuruste S, d ja n kaudu; b) d suuruste S, a ja n kaudu!

2. Murru mõiste ja peaomadus.

Algebraliseks murruks nimetame kahe algebralise avaldise jagatist. J a g a m i s m ä r g i (:) a s e m e l t a r v i t a m e m u r r u k r i i p s u.

Jagatavat nimetatakse murru **lugejaks,** jagajat — murru **nimetajaks;** lugejat ja nimetajat nimetame **murru liikmeteks.**

Kirjutame: $a : b = \frac{a}{b}$; $(a + b) : (c - d) = \frac{a + b}{c - d}$

$$(3x^2 - 5x + 4) : (x - 3) = \frac{3x^2 - 5x + 4}{x - 3}$$

Lause: Kui esimese murru lugeja korrutis teise murru nimetajaga on niisama suur, kui esimese murru nimetaja korrutis teise murru lugejaga, siis on need kaks murdu isekeskis võrdsed.

Antud: kaks murdu $\frac{a}{b}$ ja $\frac{c}{d}$ ning

$$ad = bc.$$

Tõestada: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Tõestus: Et võrdsete suuruste jagamisel kolmanda suurusega saame võrdsed suurused, siis jagades võrdseid suurusi ad ja bc nimetajate korrutisega bd saame

$$ad : bd = bc : bd$$
$$(ad : d) : b = (bc : b) : d$$
$$a : b = c : d$$

ehk $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Järeldus 1. Murru väärtus ei muutu, kui tema lugejat ja nimetajat korrutada ühe ja sama arvuga.

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{ma}{mb}}\text{, sest } amb = bma$$

Järeldus 2. Murru väärtus ei muutu, kui tema lugejat ja nimetajat jagada ühe ja sama arvuga.

Eelmises järelduses nägime, et $\frac{a}{b}=\frac{ma}{mb}$; võrduse pooled ümber vahetades saame

$$\boxed{\frac{ma}{mb}=\frac{a}{b}}$$

Murru lugeja ja nimetaja jagamisel ühe ja sama arvuga jääb murru väärtus muutumatuks.

3. Murdude teisendamine.

Märkide vahetamine murru liikmete ees.

Murru väärtus ei muutu, kui tema liikmete märgid vahetada vastupidisteks, sest alati võime korrutada murru lugejat ja nimetajat arvuga — 1.

Näidiseid:

$$\frac{-a}{-b}=\frac{a}{b};\ \frac{a}{-b}=\frac{-a}{b};$$

$$\frac{-5x}{x-y}=\frac{5x}{-x+y}=\frac{5x}{y-x};$$

$$\frac{2-a}{3-b}=\frac{a-2}{b-3}.$$

Murru väärtus ei muutu, kui murru ühe liikme — kas lugeja või nimetaja — ja murru enese ees vahetada märk vastupidiseks.

Näidiseid:

$$\frac{-a}{b}=-\frac{a}{b};\ \frac{a}{-b}=-\frac{a}{b};\ \frac{-3a}{5b}=-\frac{3a}{5b};$$

$$\frac{m^2-n^2}{n-m}=\frac{m^2-n^2}{-(m-n)}=-\frac{m^2-n^2}{m-n}=-(m+n);$$

$$\frac{a-b}{b-a}=-\frac{a-b}{a-b}=-1.$$

Murru liikmete teisendamine täisavaldisteks.

Kui murru üks või mõlemad liikmed on murdavaldised, siis võime niisugust murdu, korrutades lugejat ja nimetajat vastavalt valitud arvuga, alati teisendada, nii et tema liikmed saavad täisavaldisteks.

Näidiseid:

a) $\dfrac{\frac{3}{4}m}{n}=\dfrac{4\cdot\frac{3}{4}m}{4n}=\dfrac{3m}{4n}$

b) $\dfrac{7a}{2\frac{2}{3}b}=\dfrac{3\cdot 7a}{3\cdot 2\frac{2}{3}b}=\dfrac{21a}{8b}$

c) $\dfrac{\frac{2}{3}x}{\frac{7}{8}y}=\dfrac{24\cdot\frac{2}{3}x}{24\cdot\frac{7}{8}y}=\dfrac{16x}{21y}$

d) $\dfrac{3a+\frac{2}{5}}{1-a}=\dfrac{5\left(3a+\frac{2}{5}\right)}{5(1-a)}=\dfrac{15a+2}{5-5a}$

e) $\dfrac{mx-3}{2-\frac{1}{x}}=\dfrac{x(mx-3)}{x\left(2-\frac{1}{x}\right)}=\dfrac{mx^2-3x}{2x-1}$

f) $\dfrac{2a-\frac{a-3b}{3}}{3a+b}=\dfrac{3\left(2a-\frac{a-3b}{3}\right)}{3(3a+b)}=\dfrac{6a-(a-3b)}{9a+3b}=$

$=\dfrac{6a-a+3b}{9a+3b}=\dfrac{5a+3b}{9a+3b}.$

Harjutusi.

18. Lihtsusta järgnevad murrud!

a) $\dfrac{\frac{2}{7}a}{5b}$ e) $\dfrac{\frac{3}{5}x}{\frac{2}{15}y}$ i) $\dfrac{-\frac{a}{b}}{-c}$

b) $\dfrac{3\frac{1}{3}a}{3b}$ f) $\dfrac{4\frac{1}{8}x}{3\frac{3}{4}y}$ j) $-\dfrac{-m}{\frac{n}{p}}$

c) $\dfrac{6m}{\frac{1}{11}n}$ g) $\dfrac{2\frac{7}{12}r}{3\frac{1}{8}s}$ k) $-\dfrac{0{,}01k}{-3l}$

d) $\dfrac{12m}{2\frac{3}{4}w}$ h) $\dfrac{-0{,}3u}{-7{,}2v}$ l) $-\dfrac{-5s}{-0{,}05r}$

19. Lihtsusta veel!

a) $\dfrac{\frac{a+b}{3}}{5a}$ e) $\dfrac{\frac{5}{6}+3a}{6-a}$

b) $\dfrac{\frac{-(m+n)}{m-n}}{7}$ f) $-\dfrac{1\frac{3}{4}\,a-b}{1-b}$

c) $-\dfrac{\frac{m-3}{p}}{-2n}$ g) $-\dfrac{-\frac{3}{u}-2u}{4+u}$

d) $-\dfrac{-\frac{a}{b}}{-\frac{c}{d}}$ h) $-\dfrac{7uv+4}{-2-\frac{3}{u}}$

Murru taandamine.

Kui murru lugejas ja nimetajas esinevad ühesugused tegurid, siis tuleb murru liikmeid niisuguste ühiste teguritega jagada, sest selle läbi omandab murd lihtsama kuju. Murru liikmete jagamist ühe ja sama arvuga nimetame murru taandamiseks.

20. Taanda järgnevad murrud!

	1	2	3	4	5
a)	$\frac{3}{9}$	$\frac{16}{24}$	$\frac{20}{35}$	$\frac{18}{42}$	$\frac{21}{56}$
b)	$\frac{63}{81}$	$\frac{77}{121}$	$\frac{36}{144}$	$\frac{39}{169}$	$\frac{98}{168}$
c)	$\frac{105}{135}$	$\frac{136}{204}$	$\frac{172}{228}$	$\frac{252}{462}$	$\frac{396}{528}$
d)	$\frac{306}{544}$	$\frac{345}{621}$	$\frac{406}{609}$	$\frac{438}{657}$	$\frac{555}{925}$
e)	$\frac{775}{950}$	$\frac{1400}{3500}$	$\frac{2250}{2750}$	$\frac{2775}{3700}$	$\frac{4280}{7490}$

21. Taanda veel!

a) $\frac{12a}{8}$ b) $\frac{20}{15m}$ c) $\frac{6b}{6}$ d) $\frac{7a}{-7}$ e) $\frac{5ab}{a}$ f) $\frac{-a}{-4ab}$

g) $\frac{-26mn}{-39mp}$ h) $-\frac{9abc}{-27abd}$ i) $-\frac{-0{,}7abk}{4{,}9ack}$ j) $\frac{16a^2b}{24a}$

k) $-\frac{12a^2b^2}{-28a^2b}$ l) $\frac{8{,}8a^3m}{1{,}1\,a^2n}$

22. Lihtsusta!

a) $\frac{48a^2c}{64a^3c^2}$

b) $\frac{26a^3k^2}{65a^2k^3}$

c) $\frac{-42mn^4p^3}{28m^2n^2p}$

d) $\frac{18x^3y^3z^2}{-54x^3y^4z}$

e) $\frac{44am^3}{88\,a^2mn^2}$

f) $\frac{-57c^2d^2l^3}{-95c^3d}$

g) $\frac{0{,}48uv^4}{0{,}36\,u^4v^2}$

h) $\frac{0{,}33\,rs^5t^3}{1{,}32rs^4t^2}$

i) $\frac{\frac{2}{3}k^4l^2}{\frac{2}{3}k^3l^2}$

j) $\frac{1\frac{1}{2}a^5b^3c}{\frac{1}{2}a^4b^4c^3}$

k) $\frac{8m^2(m+n)}{20mn}$

l) $\frac{21a^2b^2}{56a(a+b)}$

23. Lihtsusta veel!

a) $\frac{a+b}{a+b}$

b) $\frac{a^2-b^2}{a^2-b^2}$

c) $\frac{6(m-n)}{9(m-n)}$

d) $\frac{-49\,a^2(a-b)}{-93a(a-b)^2}$

e) $\frac{a-b}{b-a}$

f) $-\frac{m-n}{n-m}$

g) $-\frac{3a^2-b}{b-3a^2}$

h) $\frac{(2a-3b)^2}{3b-2a}$

i) $-\frac{(3x-4y)^3}{4y-3x}$

j) $\frac{8k^2l(k-3l)}{18kl^3(k-3l)^2}$

k) $\frac{14u^2v^4(2u-5v)^2}{35u^3v(5v-2u)^3}$

l) $\frac{26ab(a^2-b^2)^2}{52ab(b^2-a^2)}$

24. Taanda järgnevad murrud, lahutades murru liikmed enne taandamist teguriteks!

a) $\frac{4m^2n-8mn^2}{12mn}$

b) $\frac{15x^2y^2}{5xy^2-10x^2y}$

c) $\frac{3a+6b}{10a+20b}$

d) $\frac{15a^2-10b^2}{18a^2-12b^2}$

e) $\frac{mx+my}{nx+ny}$

f) $\frac{a^2-ab}{b^2-ab}$

g) $\frac{ak-bk}{bl-al}$

h) $\frac{6a-12b}{18b-9a}$

i) $\frac{18a^2+30ab}{36ab+60b}$

j) $\frac{(x-y)^2}{x^2-xy}$

k) $\frac{(m-n)^2}{(n-m)^2}$

l) $\frac{12a^2bc^2+2ab^2c^2}{18a^3b^2c+3a^2b^3c}$

Murdude samanimelisteks muutmine.

Murdude samanimelisteks muutmine põhineb lausel, et murru väärtus ei muutu, kui tema lugejat ja nimetajat korrutame ühe ja sama arvuga.

Kõigepealt tuleb leida vähim ühisnimetaja, see on kõikide nimetajate vähim ühiskordne. Selle järele korrutame antud murru lugejat ja nimetajat ühisnimetaja ja antud murru nimetaja jagatisega. Viimast jagatist nimetame täiendusteguriks.

Näidis 1: Muudame murrud $\frac{a}{8m}$, $\frac{b}{16n}$ ja $\frac{c}{24mn}$ samanimelisteks.

$$\frac{a}{8m}=\frac{a\cdot 6n}{8m\cdot 6n}=\frac{6an}{48mn}$$

$$\frac{b}{16n}=\frac{b\cdot 3m}{16n\cdot 3m}=\frac{3bm}{48mn}$$

$$\frac{c}{24mn}=\frac{c\cdot 2}{24mn\cdot 2}=\frac{2c}{48mn}$$

Näidis 2: Muudame murrud $\frac{am}{15x^2y^3}$; $\frac{5b}{12x^3z}$ ja $\frac{7z}{18xy^2}$ samanimelisteks.

$$\frac{am}{15x^2y^3}=\frac{am\cdot 12xz}{180x^3y^3z}=\frac{12amxz}{180x^3y^3z}$$

$$\frac{5b}{12x^3z}=\frac{5b\cdot 15y^3}{180x^3y^3z}=\frac{75by^3}{180x^3y^3z}$$

$$\frac{7z}{18xy^2}=\frac{10x^2yz\cdot 7z}{180x^3y^3z}=\frac{70x^2yz^2}{180x^3y^3z}$$

25. Korralda järgnevad murrud suuruse järgi ritta, alates vähimast!

a) $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{5}$ $\frac{5}{7}$ f) $\frac{4}{5}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{7}{8}$ $\frac{11}{12}$

b) $\frac{2}{7}$ $\frac{5}{8}$ $\frac{7}{12}$ g) $\frac{6}{11}$ $\frac{7}{12}$ $\frac{8}{13}$ $\frac{9}{14}$

c) $\frac{5}{9}$ $\frac{11}{15}$ $\frac{13}{20}$ h) $\frac{4}{3}$ $\frac{6}{5}$ $\frac{5}{4}$ $\frac{7}{6}$

d) $\frac{3}{4}$ $\frac{5}{6}$ $\frac{19}{24}$ i) $\frac{5}{32}$ $\frac{7}{33}$ $\frac{3}{12}$ $\frac{13}{44}$

e) $\frac{23}{36}$ $\frac{19}{30}$ $\frac{32}{45}$ j) $\frac{11}{50}$ $\frac{23}{125}$ $\frac{29}{150}$ $\frac{34}{225}$

26. Muuda järgnevad murrud samanimelisteks!

a) $\frac{a}{b}$ b) $\frac{a}{3b}$ c) $\frac{a}{b^2}$ d) $\frac{p}{a^2}$

$\frac{c}{d}$ $\frac{c}{4d}$ $\frac{3}{b}$ $\frac{q}{2ab}$

e) $\frac{2a^2}{x}$ f) $\frac{4x}{a^2}$ g) $\frac{2m}{3a^3}$ h) $\frac{p}{4m^2n}$

$\frac{3b}{y}$ $\frac{3y}{2b^2}$ $\frac{n}{12a^2b}$ $\frac{3p^2}{2mn^3}$

$\frac{4c}{z}$ $\frac{5y}{4ab}$ $\frac{5n}{18ab^2}$ $\frac{5}{14m^3n^2}$

28. a) $\frac{x}{a}$ b) $2b$ c) $\frac{2p}{3m^2}$ d) $\frac{5b}{24a^2c^3}$

a^2 $\frac{a}{3x^2}$ $\frac{5p^2}{6m^2n^2}$ $\frac{5d}{18a^2b^2}$

$\frac{y}{3a^3b}$ $\frac{3ab}{5xy}$ $3mn$ $\frac{7a}{36cd^3}$

e) $-\frac{5x^2}{-48a^2b^3}$ f) $\frac{m}{96a^3b^2}$ g) $\frac{a}{a+b}$ h) $\frac{x}{2a}$

$\frac{3x}{8a^3b}$ $-\frac{n}{-16a^2c^3}$ $\frac{b}{a-b}$ $\frac{a}{a-3}$

$\frac{2x^3}{-3ab^2}$ $\frac{-p}{24b^2c}$ $\frac{c}{ab}$ $\frac{2}{a+3}$

27. a) $\frac{a}{a-b}$ b) $\frac{3x}{2x-2y}$ c) $\frac{m}{km-kn}$ d) $\frac{3a}{2a^2b-3ab^2}$

$\frac{b}{b-a}$ $\frac{5y}{6y-6x}$ $\frac{n}{lm-ln}$ $\frac{5b}{4a^3b^2-6a^2b^3}$

$\frac{a}{3a-3b}$ $\frac{7}{3xy}$ $\frac{2mn}{5m-5n}$ $\frac{2ab}{6a^3b^3-9a^2b^4}$

4. Murdude liitmine ja lahutamine.

Et jagada kahe arvu summat kolmanda arvuga, selleks jagame iga liidetavat selle arvuga ja liidame tulemused.

$$\frac{a+b}{n}=\frac{a}{n}+\frac{b}{n}.$$

Selle asemel et jagada kahe arvu vahet kolmanda arvuga, võime jagada eraldi vähendatavat ja vähendajat selle arvuga ja lahutame esimesest tulemusest teise.

$$\frac{a-b}{n}=\frac{a}{n}-\frac{b}{n}.$$

Lugedes kaht viimast võrdust paremalt vasakule saame:

$$\frac{a}{n}+\frac{b}{n}=\frac{a+b}{n}$$

$$\frac{a}{n}-\frac{b}{n}=\frac{a-b}{n}.$$

Et liita samanimelisi murde, selleks liidame nende lugejad ja jagame tulemuse nimetajaga.

Et lahutada samanimelisi murde, selleks lahutame vähendatava lugejast vähendaja lugeja ning jagame tulemuse nimetajaga.

M ä r k u s. Kui liidetavad ja lahutatavad murrud on isenimelised, siis tuleb neid enne muuta samanimelisteks ja selle järel teostada liitmine ja lahutamine.

Pärast liitmist ja lahutamist tuleb sarnased liikmed tingimata koondada ja murdu taandada, kui see osutub võimalikuks.

Täisarvu või täisavaldisega võime toimida nagu murruga, mille nimetaja on 1.

N ä i d i s e i d:

1) $$\frac{\overbrace{3b}^{6b^2}}{5a^2}+\frac{\overbrace{5a}^{5a^2}}{6b^2}-\frac{\overbrace{4}^{2ab}}{15ab}=\frac{18b^3}{30a^2b^2}+\frac{25a^3}{30a^2b^2}-\frac{8ab}{30a^2b^2}=$$
$$=\frac{18b^3+25a^3-8ab}{30a^2b^2}.$$

2) $$\frac{15m+\overbrace{4n}^{3}}{12}-\frac{3n-\overbrace{8m}^{4}}{9}=\frac{3(15m+4n)}{36}-\frac{4(3n-8m)}{36}$$
$$=\frac{45m+12n-12n+32m}{36}=\frac{77m}{36}.$$

T u l e b h o i d u d a v e a e e s t, m i s p a h a t i h t i e s i n e b m u r d u d e l a h u t a m i s e l. Näiteks, lahendus $\frac{a}{n}-\frac{b-c}{n}=\frac{a-b-c}{n}$ on vale, sest peame lahutama esimese murru lugejast a teise murru lugeja $b-c$.

õige lahendus on:

$$\frac{a}{n}-\frac{b-c}{n}=\frac{a-(b-c)}{n}=\frac{a-b+c}{n}.$$

29. Järgnevad segaarvud muuta liigmurdudeks:

a) $3\frac{3}{4}$ c) $12\frac{2}{5}$ e) $20\frac{7}{9}$ g) $31\frac{11}{15}$
b) $8\frac{2}{7}$ d) $18\frac{5}{7}$ f) $24\frac{2}{3}$ h) $42\frac{12}{17}$

30. Järgnevad segaavaldised kujutada murdavaldistena:

a) $1+\frac{a}{3}$ f) $-5+\frac{b}{5}$ k) $1-\frac{2}{x}$ p) $-4-\frac{3}{x}$
b) $5+\frac{b}{5}$ g) $-1-\frac{a}{3}$ l) $4-\frac{3}{x}$ q) $a+\frac{b}{c}$
c) $1-\frac{a}{3}$ h) $-5-\frac{b}{5}$ m) $-1+\frac{2}{x}$ r) $a-\frac{b}{c}$
d) $5-\frac{b}{5}$ i) $1+\frac{2}{x}$ n) $-4+\frac{3}{x}$ s) $-a+\frac{b}{c}$
e) $-1+\frac{a}{3}$ j) $4+\frac{3}{x}$ o) $-1-\frac{2}{x}$ t) $-a-\frac{b}{c}$.

31. a) $1+\frac{-a}{3}$ e) $a-\frac{-b}{c}$ i) $4+\frac{a+x}{2}$
b) $1-\frac{a}{-3}$ f) $-a-\frac{-b}{-c}$ j) $5-\frac{a+x}{3}$
c) $1-\frac{-a}{-3}$ g) $3+2\cdot\frac{a}{5}$ k) $8+\frac{a-x}{4}$
d) $a+\frac{b}{-c}$ h) $4-\frac{2}{3}a$ l) $7-\frac{a-x}{6}$

32. a) $-m+\frac{2m+3n}{2}$ e) $x^2+\frac{2a^2-x^3}{x}$
b) $3m-\frac{4m+5n}{3}$ f) $x^2-\frac{3a^2+x^3}{x}$
c) $-2m+\frac{3m-2n}{5}$ g) $-2a+\frac{2ab+3b^2}{b}$
d) $-6m-\frac{-15m-4n}{2}$ h) $-3a-\frac{-8ab+3c^2}{2b}$

33. a) $2rs - \frac{4r^2s^2 - 5t^2}{3rs}$ d) $6 - \frac{8\,(m + 4n)}{3m}$

b) $2p - p + \frac{p - q}{2}$ e) $5 - \frac{4\,(2m - n)}{2n}$

c) $2p + q - \frac{p - q}{2}$ f) $3x - \frac{2x^2 - 5xy + 2xz}{-3x}$

34. a) $1 + \frac{a}{1 - a}$ e) $3x + 4 - \frac{2x^2 - 5}{x + 2}$

b) $2x + \frac{3x^2}{2x - 3y}$ f) $\frac{m + x + y}{x - y} - 1$

c) $a + b + \frac{a^2 + b^2}{a - b}$ g) $x^2 - xy + y^2 - \frac{2y^3}{x + y}$

d) $\frac{a^2 + b^2}{a + b} + 3\,(a - b)$ h) $x^2 + xy + y^2 + \frac{2y^3}{x - y}$

35. Kujuta järgnevad liigmurrud segaarvudena!

a) $\frac{45}{7}$ c) $\frac{97}{12}$ e) $\frac{144}{29}$ g) $\frac{1351}{216}$

b) $\frac{68}{9}$ d) $\frac{132}{25}$ f) $\frac{253}{35}$ h) $\frac{3649}{529}$

36. Järgnevad murdavaldised muuda segaavaldisteks, eraldades jagamise teel täisosa!

a) $\frac{27a}{8}$ d) $\frac{12x^2 - 5x}{12x}$ g) $\frac{x - a + 3}{x - a}$

b) $\frac{36b}{13}$ e) $\frac{3a - 25b^2}{5b}$ h) $\frac{3x - 3y + 4x^2}{x - y}$

c) $\frac{36m^2 - 5n}{9}$ f) $\frac{a^2 - c^2}{a}$ i) $\frac{(x + y)^2 - 5xy}{x + y}$

37. Muuda veel segaavaldisteks!

a) $\frac{6x + 5}{2x + 3}$ d) $\frac{x^3 + m^3}{x - m}$

b) $\frac{x^2 + 2xy + 5y^2}{x + 2y}$ e) $\frac{x^3 + 7x^2 - 13x - 21}{x^2 + 2x - 3}$

c) $\frac{x^3 - 5x^2 + 3x - 8}{x - 5}$ f) $\frac{-3x^3 + 11x^2 - 5x + 11}{x^2 - 3x + 1}$

Liida ja lahuta järgnevad murrud!

38. a) $\frac{5}{9}+\frac{7}{9}$ g) $-\frac{a}{4}+\frac{b}{4}$ m) $\frac{ab}{c}-\frac{ad}{-c}$

b) $\frac{11}{15}-\frac{8}{15}$ h) $-\frac{a}{-6}-\frac{b}{6}$ n) $\frac{4z}{n}-\frac{3z}{n}+\frac{z}{n}$

c) $\frac{a}{5}+\frac{b}{5}$ i) $\frac{x}{n}+\frac{y}{n}$ o) $\frac{z}{n}+\frac{4z}{n}-\frac{5z}{n}$

d) $\frac{a}{7}-\frac{b}{7}$ j) $\frac{x}{n}-\frac{y}{n}$ p) $-\frac{3x}{n}+\frac{-5x}{n}-\frac{7x}{-n}$

e) $\frac{a}{3}+\frac{b}{-3}$ k) $\frac{5m}{6}+\frac{m}{6}$ q) $\frac{m+3n}{3n}-1$

f) $\frac{a}{9}-\frac{-b}{9}$ l) $\frac{7m}{3}-\frac{2m}{3}$ r) $\frac{4a}{5x}-\frac{3a}{5x}$

39. a) $\frac{3a+5b}{8}-\frac{2a+7b}{8}+\frac{5a-2b}{8}$

b) $\frac{2x-7y}{15}-\frac{3x-4y}{15}+\frac{5x+6y}{15}$

c) $\frac{6m-5n}{9m^2}-\frac{7m-12n}{9m^2}+\frac{10m-7n}{9m^2}$

d) $\frac{4u+9v}{10uv}-\frac{11u-12v}{-10uv}-\frac{15u-8v}{10uv}$

e) $\frac{4a}{a+b}-\frac{5b}{a+b}-\frac{3a}{a+b}+\frac{6b}{a+b}$

f) $\frac{3m}{2m+n}-\frac{4m-7n}{2m+n}+\frac{-11m-5n}{2m+n}$

g) $\frac{5x-8y}{8x+8y}+\frac{3x+13y}{8x+8y}-\frac{4x+y}{8x+8y}$

40. a) $\frac{5(2a-b)}{8a}-\frac{3(5a-3b)}{8a}+\frac{7(3a-4b)}{8a}$

b) $\frac{2s(s-3t)}{3t^2}-\frac{5s(2s+3t)}{3t^2}-\frac{4s(6s-7t)}{3t^2}+\frac{s(3s-2t)}{3t^2}$

c) $\frac{3a(4a-5b)}{11ab}+\frac{(a+b)^2}{11ab}-\frac{(a+b)(a-b)}{11ab}-\frac{4a(3a-4b)}{11ab}$

d) $\frac{(2x+y)^3}{x-y}-\frac{(2x-y)^3}{x-y}+\frac{(2x+y)(4x^2-2xy+y^2)}{x-y}$

41. a) $\frac{1}{5}+\frac{1}{8}$ d) $\frac{3}{4}-\frac{5}{9}$ g) $\frac{5}{6}+\frac{4}{9}$ j) $4\frac{3}{35}-2\frac{4}{15}$

b) $\frac{1}{3}-\frac{1}{7}$ e) $\frac{9}{16}+\frac{1}{4}$ h) $\frac{13}{36}-\frac{7}{54}$ k) $5\frac{2}{9}-7\frac{1}{12}$

c) $\frac{2}{7}+\frac{3}{11}$ f) $\frac{8}{15}-\frac{2}{5}$ i) $\frac{19}{28}-\frac{5}{42}$ l) $9\frac{11}{60}-12\frac{13}{36}$

42. a) $\frac{2}{5}-\frac{4}{15}+\frac{7}{30}-\frac{11}{60}+\frac{23}{90}$

b) $\frac{1}{3}+\frac{4}{9}-\frac{5}{36}-\frac{7}{18}-\frac{13}{72}$

c) $3\frac{2}{7}+4\frac{5}{21}-1\frac{8}{35}-9\frac{43}{210}+6\frac{17}{42}$

d) $\frac{2}{3}-\frac{5}{8}+\frac{4}{5}-\frac{3}{7}+\frac{1}{9}$

e) $\frac{7}{12}-\frac{5}{36}-\frac{3}{8}+\frac{11}{20}-\frac{17}{30}$

f) $\frac{8}{21}-\frac{1}{7}+\frac{2}{49}-\frac{3}{14}+\frac{25}{196}$

43. a) $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$ e) $\frac{3}{a}+\frac{1}{2a}$ i) $\frac{2}{a}-\frac{1}{b}+\frac{3}{c}$

b) $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$ f) $\frac{5}{a}-\frac{2}{3a}$ j) $\frac{1}{a}-\frac{2}{b}+\frac{3}{ab}$

c) $\frac{2}{3x}+\frac{3}{2y}$ g) $\frac{y}{x}-\frac{z}{mx}$ k) $\frac{m+n}{m}+\frac{m-n}{n}$

d) $\frac{4}{5a}-\frac{6}{7b}$ h) $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$ l) $\frac{2x+3y}{x}-\frac{2x-3y}{y}$

44. a) $\frac{2}{a^2}+\frac{3}{ab}$ f) $\frac{11u}{-18v^3t^2}+\frac{5v}{24u^2t^2}$

b) $\frac{m}{x^2y^2}-\frac{n}{x^3y^3}$ g) $\frac{3n}{xy}-\frac{5n}{yz}+\frac{6n}{xz}$

c) $\frac{3x}{4a^3b}+\frac{5y}{6ab^4}$ h) $\frac{4a}{9b^3}-\frac{b}{6a^3}+\frac{7}{10a^2b^2}$

d) $\frac{5n}{9m^4}-\frac{7p}{6mn^3}$ i) $\frac{7x}{12y^3z^2}+\frac{x}{-15yz^4}+\frac{3x}{10y^4}$

e) $\frac{3ab}{10c^2d}-\frac{2c}{15d^2}$ j) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-\frac{2}{ab}-5$

45. a) $\frac{4a-13b}{4}-\frac{5a-17b}{6}+\frac{9b-11a}{12}$

b) $\frac{3x-7y}{3}-\frac{4y-17x}{12}-\frac{5x-9y}{15}$

c) $\frac{5m-8n}{13}-\frac{11m}{6}+\frac{7n}{39}-\frac{3m-10n}{26}$

d) $\frac{3x-10y+5z}{20}-\frac{3x-20y}{60}+\frac{29x}{90}-\frac{4x-2y+3z}{12}$

e) $\frac{9a+5b}{20}-\frac{11a-11b}{15}+\frac{7a-9b}{10}-\frac{-2a-5b}{6}$

f) $\frac{3a-5b+6}{21}-\frac{4a-3b+8}{28}-\frac{-4a-2b+9}{14}$

46. a) $\frac{3(3x+5)}{5}-\frac{2(4x+7)}{15}+\frac{5(6x-9)}{4}$

b) $\frac{4(3m-8n)}{9}-\frac{5(4m-9n)}{12}-\frac{7(5m-n)}{18}$

c) $\frac{2(4a-5b)}{11}-\frac{4(6a-7b)}{33}-\frac{5(9a-13b)}{6}$

d) $-\frac{4(6u-v)}{13}+\frac{7(u-4v)}{26}-\frac{8(7u+3v)}{39}$

47. a) $\frac{5n}{6m}-\frac{5n+m}{6m}+\frac{3m+2p}{4n}-\frac{5p-8n}{10n}$

b) $\frac{3c-5b}{15cb}-\frac{c-7a}{12ac}+\frac{6a+5b}{6ab}+\frac{3}{4c}-\frac{4a-5b}{20ab}$

c) $\frac{5a+3x}{9x}-\frac{3b-a}{6a}-\frac{b-4a}{2b}+\frac{bx-a^2}{2ax}-\frac{2a}{b}$

d) $\frac{3}{2m}-\frac{2m+3}{6m^2}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n^2}-\frac{2n-3m}{6mn}$

48. a) $\frac{1}{m+n}+\frac{1}{m-n}$

b) $\frac{1}{2a+3b}-\frac{1}{5a+b}$

c) $\frac{5}{x-y}-\frac{2}{7x}$

d) $\frac{3m-2}{2-3m}-\frac{2m-7}{7}$

e) $\frac{x}{x-y}+\frac{y}{y-x}$

f) $\frac{3}{a-b}-\frac{2}{b-a}$

g) $\frac{5a}{3a-2b}+\frac{2b}{2b-3a}$

h) $\frac{8m}{5m-3n}-\frac{3n}{3n-5m}$

49. a) $\frac{4}{3a+3b}+\frac{5}{4a+4b}-\frac{7}{12a+12b}$

b) $\frac{3x}{5x-5y}-\frac{7y}{15x-15y}-\frac{20x}{20x-20y}$

c) $\frac{9}{4m-4n}-\frac{4}{3n-3m}-\frac{11}{18m-18n}$

d) $\frac{3u-v}{3u-2v}+\frac{2u+5v}{4v-6u}-\frac{7u-6v}{12u-8v}$

5. Murdude korrutamine.

Selgitamiseks.

Et murdu korrutada täisarvuga, selleks korrutame murru lugejat selle arvuga ja tulemuse jagame nimetajaga:

$$m\cdot\frac{a}{b}=\frac{ma}{b}.$$

Kui murru nimetaja on teguriga jaguv, siis on lugeja korrutamise asemel parem nimetajat selle arvuga jagada:

$$m\cdot\frac{a}{b}=\frac{a}{b:m}.$$

Et murdu korrutada murruga, selleks korrutame lugejat lugejaga ja nimetajat nimetajaga ning jagame esimese tulemuse teisega.

$$\boxed{\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}}$$

Segaarvude korrutamisel tuleb neid harilikult muuta liigmurdudeks.

M ä r k u s. Tingimata tuleb enne korrutamise teostamist tegureid taandada, kui see osutub võimalikuks.

Harjutusi.

	1	2	3	4
50. a)	$6\cdot\frac{2}{3}$	$18\cdot\frac{5}{6}$	$32\cdot\frac{7}{16}$	$39\cdot\frac{9}{13}$
b)	$5\cdot\frac{11}{45}$	$20\cdot\frac{27}{60}$	$19\cdot\frac{32}{57}$	$22\cdot\frac{15}{88}$

c) $\frac{9}{16}\cdot 24$ $\frac{11}{27}\cdot 18$ $\frac{8}{15}\cdot 27$ $\frac{7}{16}\cdot 28$

d) $\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3}$ $-\frac{5}{8}\cdot\frac{8}{5}$ $-\frac{7}{8}\cdot -\frac{16}{21}$ $\frac{9}{16}\cdot\frac{28}{33}$

e) $\frac{26}{63}\cdot\frac{28}{39}$ $\frac{15}{17}\cdot\frac{51}{65}$ $\frac{15}{29}\cdot\frac{58}{45}$ $\frac{72}{23}\cdot\frac{92}{27}$

f) $9\cdot 4\frac{2}{3}$ $7\cdot 3\frac{2}{7}$ $8\cdot 2\frac{5}{16}$ $3\frac{2}{9}\cdot 36$

g) $3\frac{3}{7}\cdot\frac{7}{48}$ $\frac{8}{5}\cdot 3\frac{3}{4}$ $\frac{5}{8}\cdot 18\frac{2}{3}$ $4\frac{1}{6}\cdot\frac{4}{5}$

h) $5\frac{1}{7}\cdot 4\frac{3}{8}$ $4\frac{2}{5}\cdot 2\frac{3}{11}$ $3\frac{3}{4}\cdot 6\frac{2}{3}$ $6\frac{2}{9}\cdot 7\frac{1}{14}$

51. a) $\frac{m}{n}\cdot n$ e) $2u\cdot\frac{3v}{2u}$ i) $16\cdot\frac{3c^2}{8}$

b) $x\cdot\frac{y}{x}$ f) $\frac{a}{b^2}\cdot b^2$ j) $\frac{2}{3}\cdot a$

c) $\frac{1}{a}\cdot a$ g) $k^2\cdot\frac{l}{k^2}$ k) $\frac{3}{4}a\cdot\frac{8}{9}b$

d) $b\cdot\frac{1}{b}$ h) $m\cdot\frac{a}{b}$ l) $\frac{4}{7}m\cdot\frac{21n}{16}$

52. a) $12m^2n\cdot\frac{5ab}{6mn}$ f) $\frac{6m^4n^3}{5p^3q^2}\cdot\frac{25pq}{-9m^3n^4}$

b) $45a^2bc^3\cdot\frac{-4a}{9b^2c^2}$ g) $\frac{5xy}{6a^2b\cdot 9ab^2}\cdot 12a^4b^4$

c) $\frac{3m}{14x^3y^2}\cdot -42x^2y^2$ h) $\frac{7ab}{34rs^2\cdot 68rs^2}\cdot 17r^2s^3$

d) $\frac{2x}{3y}\cdot\frac{y}{x}$ i) $2\frac{2}{7}a^2b\cdot\frac{21m}{32a^2b^2}$

e) $\frac{4a^2b^3}{9c^2d}\cdot\frac{15c^3d}{2a^3b^2}$ j) $8\frac{3}{4}a^2x\cdot\frac{8a}{7x^3}$

Murdude astendamine.

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2\cdot 2\cdot 2}{3\cdot 3\cdot 3}=\frac{2^3}{3^3}=\frac{8}{27}.$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^4=\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}=\frac{a\cdot a\cdot a\cdot a}{b\cdot b\cdot b\cdot b}=\frac{a^4}{b^4}$$

Üldiselt: $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdots \frac{a}{b}}_{n} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdots a}^{n}}{\underbrace{b \cdot b \cdots b}_{n}} = \frac{a^n}{b^n}$

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}}$$

Murru aste on võrdne lugeja ja nimetaja astmete jagatisega.

Harjutusi.

53. a) $\left(\frac{3}{4}\right)^3$ d) $\left(-\frac{2}{5}\right)^4$ g) $\left(-1\frac{1}{3}\right)^3$

b) $\left(-\frac{4}{7}\right)^2$ e) $\left(-\frac{1}{6}\right)^5$ h) $\left(-3\frac{1}{4}\right)^2$

c) $\left(-\frac{2}{3}\right)^3$ f) $\left(2\frac{1}{2}\right)^3$ i) $\left(0{,}02\right)^3$

54. a) $\left(\frac{2a}{3b}\right)^3$ f) $\left(-\frac{3xy^n}{4z^{n-1}}\right)^3$

b) $\left(-\frac{3a^2}{4b^3}\right)^2$ g) $\left[\frac{2m\,(m+n)^2}{7\,(m-n)}\right]^3$

c) $\left(-\frac{4m}{5n^2}\right)^5$ h) $\frac{2a}{5b} \cdot \left(\frac{5b^2c}{4a}\right)^2$

d) $\left(\frac{2ab^3}{5c^2d^2}\right)^3$ i) $\left(\frac{4a^2}{9bc^2}\right)^2\left(-\frac{3b^2c}{8a}\right)^2$

e) $\left(-\frac{aq^2}{2c^2d}\right)^5$ j) $-27x^2y^3 \cdot \left(-\frac{2m^2}{3xyn}\right)^3$

55. a) $\frac{3a^2b}{14cd^2} \cdot \frac{35bc^2}{9ad} \cdot \frac{8ad^4}{15b^3c}$

b) $\frac{13m^2}{27n^3} \cdot \frac{35n^2p}{26m} \cdot \frac{36mn^2}{21p^2}$

56. a) $(a+b) \cdot \frac{1}{x}$ e) $\frac{3a-6b}{5c-15d} \cdot \frac{45d-15c}{6a-12b}$

b) $(2n-5m)^2 \cdot \frac{1}{2n-5m}$ f) $\frac{ab}{a+b} \cdot \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)$

c) $\frac{m^2-m}{mn+n} \cdot \frac{pm+p}{mn-n}$ g) $\left(a-b\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$

d) $\frac{a-b}{c-d} \cdot \frac{d-c}{b-a}$ h) $\left(5-\frac{5}{1-x^2}\right)\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$

6. Murdude jagamine.

Selgitamiseks.

Et murdu jagada täisarvuga, selleks korrutame selle arvuga murru nimetajat ja tulemusega jagame lugejat.

$$\frac{a}{b} : m = \frac{a}{mb}.$$

Kui murru lugeja on jagajaga jaguv, siis on nimetaja korrutamise asemel otstarbekohasem lugejat selle arvuga jagada.

$$\frac{a}{b} : m = \frac{a : m}{b}.$$

Et murdu jagada murruga, selleks korrutame jagatava lugejat jagaja nimetajaga ja jagatava nimetajat jagaja lugejaga ja jagame esimese tulemuse teisega.

$$\boxed{\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}}$$

Eelmise reegli võime lühidalt väljendada järgmiselt: **Et murdu jagada murruga, selleks korrutame jagatavat jagaja pöördväärtusega.**

Segaarvude jagamisel tuleb neid harilikult muuta liigmurdudeks. Tingimata tuleb murrud, kus see osutub võimalikuks, aegsasti taandada.

Harjutusi.

	1	2	3	4
57. a)	$\frac{15}{16} : 5$	$\frac{18}{23} : 9$	$\frac{39}{45} : 13$	$\frac{51}{65} : 17$
b)	$\frac{3}{4} : 7$	$\frac{5}{7} : 8$	$\frac{7}{8} : 11$	$\frac{9}{11} : 10$
c)	$\frac{6}{7} : 8$	$\frac{21}{32} : 28$	$\frac{26}{35} : 52$	$\frac{34}{39} : 51$
d)	$21 : \frac{3}{7}$	$24 : \frac{8}{11}$	$49 : \frac{7}{8}$	$65 : \frac{13}{14}$
e)	$63 : \frac{27}{32}$	$95 : \frac{38}{45}$	$111 : \frac{74}{81}$	$215 : \frac{86}{93}$

f) $\frac{5}{8}:\frac{15}{16}$ $\frac{21}{32}:\frac{35}{44}$ $\frac{34}{57}:\frac{51}{76}$ $\frac{92}{93}:\frac{138}{155}$

g) $\frac{3}{16}:0{,}27$ $\frac{13}{15}:2{,}1$ $3{,}6:\frac{24}{35}$ $0{,}09:\frac{33}{40}$

h) $6\frac{1}{4}:\frac{5}{8}$ $8\frac{1}{6}:\frac{7}{12}$ $3\frac{1}{3}:25$ $8\frac{4}{7}:24$

i) $7\frac{1}{3}:4\frac{8}{9}$ $5\frac{5}{8}:1\frac{9}{16}$ $4\frac{2}{7}:3\frac{3}{14}$ $2\frac{1}{24}:3\frac{1}{16}$

58. a) $3x:\frac{3}{4}$ g) $u:\frac{u}{v}$ m) $x^2:\frac{-ax}{y}$

b) $5m:2\frac{1}{2}$ h) $2r:\frac{r}{-s}$ n) $8m:\frac{-16mn}{3p}$

c) $12:\frac{4}{a}$ i) $-a^2:\frac{a}{b}$ o) $-12a:\frac{8a^2}{5b}$

d) $3\frac{2}{3}:\frac{22}{b}$ j) $\frac{1}{b}:-a$ p) $\frac{11a^3b^2}{8cd}:8a^2b$

e) $\frac{a}{b}:a$ k) $c:\frac{1}{d}$ q) $8a^2b:\frac{11a^3b^2}{8cd}$

f) $\frac{m}{n}:-p$ l) $\frac{3a^2}{b}:6a$ r) $9u^2v^3:\frac{18u^3v^3}{7t^2}$

59. a) $\frac{am}{bn}:\frac{m}{n}$ e) $\frac{14a^3b^2}{27c^3d}:\frac{35a^2b^2}{9c^2d}$

b) $\frac{m}{n}:\frac{am}{bn}$ f) $\frac{25x^2y^3}{49z^2}:\frac{30x^3y^3}{77z^3}$

c) $6\frac{x^2}{y^2}:\frac{12x}{5y}$ g) $\frac{9a^2b}{13c^2}:\frac{27a^2c}{52b^2}$

d) $\frac{3m^2n}{5pq^2}:9\frac{mn^2}{p^2q}$ h) $\frac{12u^2v^2s}{25t^2}:\frac{27u^3v^2t}{40s^2}$

60. a) $\frac{a-b}{15ax}:\frac{a-b}{10bx}$ e) $\frac{2m+3n}{2m-3n}:\frac{3n+2m}{3n-2m}$

b) $\frac{18mn}{m-n}:\frac{6mn}{n-m}$ f) $\frac{4a-4b}{5a+5b}:\frac{8b-8a}{15a+15b}$

c) $\frac{(a-b)^2}{7a}:\frac{2(b-a)}{21a^2}$ g) $\frac{2m-2}{3ax-3x}:\frac{4-4m}{9x-9ax}$

d) $\frac{a+b}{a-b}:\frac{b+a}{a-b}$ h) $(m-n):\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)$

61. Leia, mitu protsenti moodustab!

a) arv $\frac{2}{3}$ arvust 6

b) „ $\frac{5}{7}$ „ $\frac{3}{14}$

c) „ $2\frac{3}{4}$ „ $3\frac{1}{5}$

d) „ $4a$ „ $6\frac{1}{4}a$

e) „ $5a^2b$ „ $\frac{15}{16}ab^2$

f) „ $2\cdot\frac{3a^2}{5c}$ „ $\frac{9a}{20c}$

62. Lihtsusta järgnevad murrud!

a) $\dfrac{\frac{9}{8}-1}{2-\frac{3}{4}}$ c) $\dfrac{\frac{7}{9}+\frac{7}{18}}{\frac{5}{6}+\frac{1}{3}}$ e) $\dfrac{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}+\frac{5}{6}}{\frac{1}{6}-\frac{4}{9}+\frac{7}{18}}$

b) $\dfrac{\frac{5}{7}+\frac{2}{3}}{3\frac{2}{7}-1\frac{1}{3}}$ d) $\dfrac{\frac{4}{5}-\frac{3}{10}}{2\frac{1}{4}+\frac{8}{5}}$ f) $\dfrac{2-\frac{2}{5}-\frac{4}{15}}{\frac{5}{6}-\frac{3}{10}+\frac{7}{30}}$

63. a) $\dfrac{a+\frac{1}{b}}{b+\frac{1}{a}}$ e) $\dfrac{\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x-y}}{\frac{1}{x-y}-\frac{1}{x+y}}$

b) $\dfrac{1-\frac{m}{n}}{m-n}$ f) $\dfrac{\frac{4}{x}+\frac{4}{y}+\frac{4}{z}}{\frac{2}{xyz}}$

c) $\dfrac{1+x}{1+\frac{1}{x}}$ g) $\dfrac{1+\frac{2}{x-2}}{1-\frac{2}{x+2}}$

d) $\dfrac{1-\frac{1}{a+1}}{1+\frac{1}{a-1}}$ h) $\dfrac{m+2-\frac{1}{m+2}}{m-2+\frac{1}{m-2}}$

64. Leia järgnevate murdude arvsuurused!

a) $y = \frac{3}{x}$, kui $x = 10; 1; 0{,}1; 0{,}01; 0{,}001; 0$

b) $y = \frac{5x}{x-2}$, kui $x = 2\frac{1}{3}; 2{,}01; 2; 1{,}99; 0$

c) $y = \frac{2x+5}{3x-4}$, kui $x = 0; -2\frac{1}{2}; \frac{4}{3}$

d) $y = \frac{x^2+x-12}{x^2-8x+15}$, kui $x = 0; -4; 5; 3; -\frac{3}{2}; \frac{2}{3}$

e) $y = \frac{-2x^2+1}{9x^2-1}$, kui $x = -\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; 0; -1; 1$

65. Kordamiseks.

1) Mis vahe on samasuse ja võrrandi vahel?

2) Kuidas korrutame hulkliiget hulkliikmega?

3) Millega on võrdne a) kahe arvu summa ruut? b) kahe arvu vahe ruut? c) kahe arvu summa ja vahe korrutis? d) kahe arvu summa kuup? e) kahe arvu vahe kuup?

4) Missugused järgnevatest võrdustest on õiged ja missugused valed?

a) $a + b = b + a$; b) $a - b = b - a$;

c) $-(b - a) = a - b$;

d) $(a + b)^2 = (b + a)^2$;

e) $(a - b)^2 = (b - a)^2$;

f) $(a + b)^3 = (b + a)^3$;

g) $(a - b)^3 = (b - a)^3$;

h) $(a - b)^3 = -(b - a)^3$;

i) $(a - b)^2 = -(b - a)^2$;

j) $(a + b)(a - b) = (b + a)(b - a)$;

k) $(a + b)(a - b) = -(a + b)(b - a)$.

5) Leia a) $(2m^2 + 3n)^2$; b) $(4m - 0{,}5n^2)^2$;

c) $(1 + 0{,}01p)^3$; d) $(2a^2 - b^2)^3$;

e) $(\frac{2}{3}a^2 - \frac{1}{7}b)(\frac{2}{3}a^2 + \frac{1}{7}b)$;

f) $(-2a + b)(-2a - b)$;

g) $(3a+2b)(9a^2-6ab+4b^2)$;
h) $(4a-5b^2)(16a^2+20ab^2+25b^4)$;
i) $(x+7)(x+3)$; j) $(x-5)(x+2)$;
k) $(x-4)(x-6)$.

6) Mis sünnib murru väärtusega,

a) kui lugejat suurendame 3 korda?
b) kui nimetajat suurendame 3 korda?
c) kui mõlemaid suurendame 3 korda?
d) kui nimetajat vähendame 3 korda?
e) kui lugejat suurendame 5 korda ja nimetajat vähendame 5 korda?
f) kui lugejat suurendame 2 korda ja nimetajat vähendame 5 korda?

7) Millel põhineb murru taandamine?

8) Millel põhineb murdude samanimelisteks muutmine?

9) Mis sünnib murru väärtusega, a) kui lugeja ja nimetaja ees vahetada märgid vastupidisteks? b) kui murru ees ja nimetaja ees märgid vahetada vastupidisteks?

10) Missugused järgnevatest võrdustest on õiged, missugused valed?

a) $\frac{2a-b}{b-2a}=-1$; b) $\frac{3a}{2a-b}=-\frac{3a}{2a+b}$;

c) $\frac{m}{(2r-3s)^2}=\frac{-m}{(3s-2r)^2}$; d) $-\frac{a-b}{(c-d)^2}=\frac{b-a}{(d-c)^2}$

e) $\frac{2m-n}{(m-2n)(2n-3m)}=\frac{n-2m}{(2n-m)(3m-2n)}$;

f) $\frac{a}{(2a-b)(2b-a)}=-\frac{a}{(b-2a)(2b-a)}$

11) Järgnevad murrud on taandatud valesti. Selgita viga!

a) $\frac{am+b}{cm+d}=\frac{a+b}{c+d}$; b) $\frac{ax^2}{bx^2+c}=\frac{a}{b+c}$

c) $\frac{4x^2+y}{4x^2}=1+y$; d) $\frac{am+bn}{cm+dn}=\frac{a+b}{c+d}$

e) $\frac{2aa}{3a^2}=\frac{2}{3a}$; f) $\frac{a-b}{2(b-a)}=\frac{1}{2}$.

12) Leia a) 28% arvust $2\frac{1}{7}$!
b) $33\frac{1}{3}$ % arvust $4\frac{1}{2}$!
c) p% arvust $\frac{b}{2c}$!

13) Mitu protsenti moodustab
a) arv $2\frac{2}{3}$ arvust 4?
b) arv 5 arvust $12\frac{1}{2}$?
c) arv $32\frac{2}{3}$ arvust $4\frac{1}{8}$?
d) arv a arvust $\frac{2a^2}{b}$?
e) arv $\frac{3a}{a+b}$ arvust $\frac{2a}{(a+b)^2}$?

14) Avalda arv, milles on m kümnelist ja 0 ühelist, 0 kümnendikku ja b sajandikku!

VII. Lineaarsed võrrandid.

1. Lineaarne funktsioon ja tema muutumise käigu graafiline kujutamine.

Liikugu mingi keha jääva kiirusega 2 meetrit sekundis. Katsume leida, kuidas käidud tee pikkus oleneb sekundite arvust t. Märgime käidud tee pikkuse tähega s.

Täida alljärgnev tabel:

t	0	1	1,5	2	2,5	2,8	3	3,2	3,5	4
s										

Kui keha jõuab 1 sekundiga 2 meetrit edasi, siis 2 sekundiga jõuab ta edasi 2 korda rohkem, see on 4 meetrit, 3 sekundiga 6 meetrit, t sekundiga $2t$ meetrit.

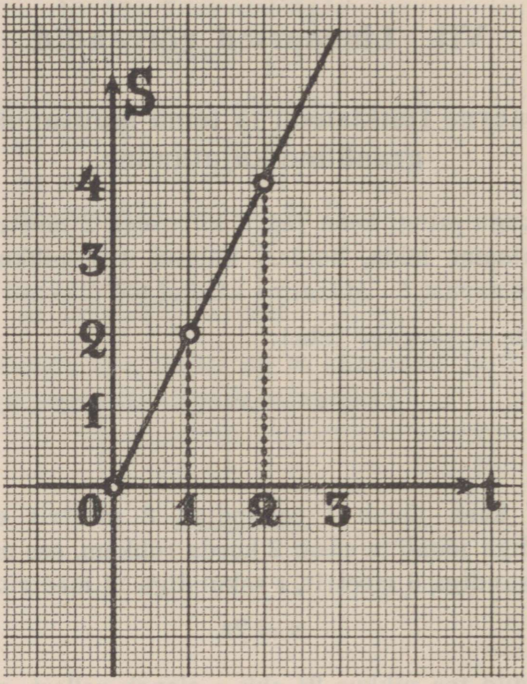
$$s = 2t.$$

Käidud tee pikkus $2t$ ehk s oleneb sellest, missugust väärtust omab sekundite arv t. Sel puhul räägitakse ka: Käidud tee pikkus s on aja t **funktsioon.**

Eespool-toodud tabel annab meile ülevaate sellest, kuidas muutub tee pikkus, kui muutub liikumisaeg.

Veel piltlikuma ülevaate saamiseks käidud tee pikkuse muutumisest joonestame vastava graafiku. Iga arvupaar meie tabelis määrab tasapinnal ühe punkti. Mida tihedamalt võtame arvupaarid, seda tihedamalt saame punktid (20. joonis).

Kui ühendame punktid omavahel, siis tekib sirge joon. Joonisel on aja väärtused kujutatud lõikudena t-teljel, kuna teepikkuse väärtused on kujutatud püstlõikudena. Sirge joon näitab piltlikult, kuidas muutub tee pikkus aja muutumise tagajärjel.



20. joonis.

Et funktsioonile $s = 2t$ vastab sirge joon, siis nimetatakse teda **lineaarseks funktsiooniks.**

Meie graafikul on veel teine tähtis omadus. Ta võimaldab määrata ka neid teepikkuse väärtusi, mis tabelis puuduvad. Näiteks, kui tahame leida, kui palju keha edasi jõudis $\frac{1}{2}$ sekundiga, siis võtame t-teljel lõigu $\frac{1}{2}$, tõmbame lõigu otsapunktist püstjoone kuni sirgeni; mõõtes viimase saame nõutud teepikkuse 1.

1) Leia joonisest käidud tee pikkused, kui aeg on sekundites 0,8; 1,3; 2,2; 0,3!

2) Leia joonise põhjal aeg, mille jooksul keha on edasi liikunud 0,4 m; 0,8 m; 1,4 m; 0 m; 2,7 m!

Lineaarse funktsiooni üldkuju.

Kui võtame avaldise $2x+1$, kus x on muutuv suurus, siis oleneb selle avaldise väärtus x-i väärtusest; teiste sõnadega: $2x+1$ on x-i funktsioon. Tähistades avaldise $2x+1$ mistahes väärtuse y-ga, saame

$$\boldsymbol{y = 2x + 1.}$$

Kujutame selle funktsiooni muutumise käigu graafiliselt. Selleks täidame tabeli:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y			-1	1	3	5		

x ja y väärtustepaarid määravad tasapinnal rea punkte. Ühendades need punktid omavahel saame funktsiooni

$$y = 2x + 1$$

käigu joone (21. joonis).

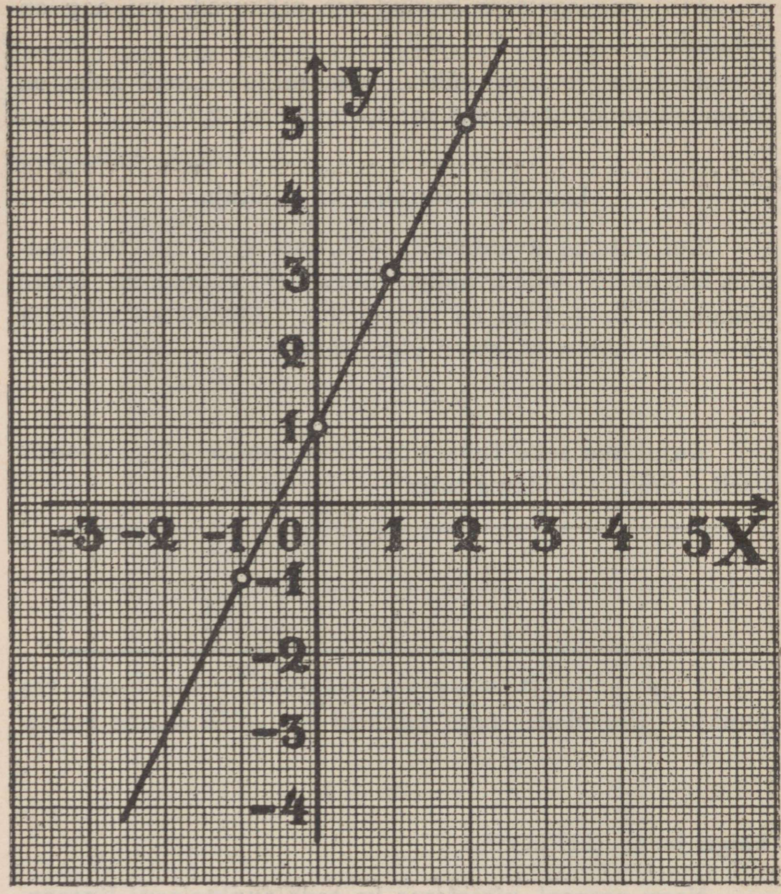
Nagu eespool, nimetame ka seda funktsiooni lineaarseks funktsiooniks, sest ka tema muutumise käiku kujutab sirge joon.

3) Leia joonise põhjal y väärtus, kui x on 0,5; 1,4; $-0,6$; $-1,5$!

4) Leia joonise põhjal x väärtus, kui y on $-1,4$; $-0,5$; 0; 0,6; 1,5!

Lineaarse funktsiooni üldkuju on

$$\boldsymbol{y = ax + b.}$$



21. joonis.

5. Kujuta ühes ja samas teljestikus järgnevate funktsioonide muutumise käik!

$$y = x;\ y = 2x;\ y = 3x;$$
$$y = -x;\ y = -2x;\ y = -3x.$$

Kuidas mõjustab funktsiooni käiku x-i kordaja?

6. Kujuta ühes ja samas teljestikus järgnevate funktsioonide muutumise käik!

a) $y = 2x$; b) $y = 2x + 1$; c) $y = 2x + 2$; d) $y = 2x - 1$.

Mida võid öelda nende sirgete kohta?

7. Kujuta graafiliselt järgnevate funktsioonide muutumise käik!

a) $y = \frac{1}{2}x$	d) $y = \frac{x}{2} - 3$	g) $y = -4x - 2$
b) $y = -\frac{x}{3}$	e) $y = -x + 4$	h) $y = \frac{1}{4}x + 2\frac{1}{2}$
c) $y = 4x - 2$	f) $y = -\frac{3}{4}x + 3$	i) $y = -4x + 1\frac{1}{2}$

Katsu, kas saad nende võrrandite põhjal kindlaks määrata:

a) Missuguste võrrandite poolt määratavad sirged läbivad nullpunkti?

b) Kui kaugel nullpunktist asetseb iga sirge lõikepunkt teljega?

Märkus: Et sirge asend määratakse kahe punkti abil, siis lineaarse funktsiooni käigu joone joonestamiseks on küllalt kahest väärtustepaarist.

2. Ühe tundmatuga esimese astme võrrandi graafiline lahendamine.

Lahendame graafiliselt võrrandi $-\frac{3}{2}x + 6 = 0$.

Meil on tarvis leida niisugune x väärtus, mille puhul on funktsioon $y = -\frac{3}{2}x + 6$ väärtus 0. Et funktsiooni väärtusi kujutatakse graafiliselt püstlõikudena, siis peame funktsioonile $y = -\frac{3}{2}x + 6$ vastaval sirgel leidma punkti, mille püstlõik on 0. See punkt on sirge ja x-telje lõikepunkt. Viimase punkti kaugus nullpunktist annab võrrandi $-\frac{3}{2}x + 6 = 0$ lahendi.

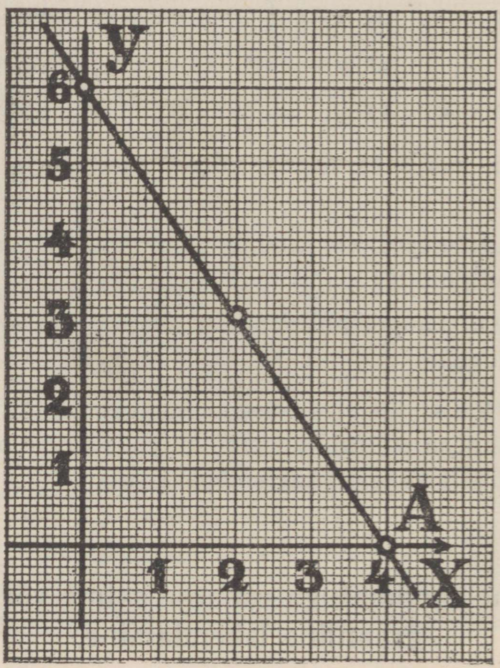
Joonestame sirge $y = -\frac{3}{2}x + 6$ (22. joonis):

$$x = 4.$$

Asetame saadud lahendi võrrandisse:

$$-\tfrac{3}{2} \cdot 4 + 6 = 0$$
$$-6 + 6 = 0$$

Et arv 4 rahuldab võrrandit, siis on lahend õige.



22. joonis.

Et lahendada esimese astme võrrandit ühe tundmatuga, selleks kanname võrrandi kõik liikmed ühele poole võrdusemärki ja saadud avaldise võrdsustame y-ga. Niiviisi saadud lineaarsele funktsioonile joonestame vastava sirge. Sirge ja x-telje lõikepunkti kaugus nullpunktist annab antud võrrandi lahendi.

8. Lahenda graafiliselt järgnevad võrrandid!

a) $4x - 18 = 0$

b) $3 - \frac{3}{4}x = 0$

c) $1 + \frac{7x-2}{9} = 10$

d) $5x + 3(x - 8) = 0$

e) $9x + (4 - 3x) = 16$

f) $5x - 3x = x - 3$

g) $13x + (x + 25) = 37 + 8x$

h) $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} = 1$

i) $\frac{x}{4} + 3 + \frac{x}{3} = 6\frac{1}{2}$

j) $\frac{3}{4}x - \left(\frac{x}{2} - 5\right) = 3$

3. Lineaarse võrrandi numbriline lahendamine.

Võrrandi teisendamine.

Samaväärseteks nimetame võrrandeid, millel on ühesugused lahendid. Näiteks on võrrandid

$$2x - 3 = 5$$
$$3x - 7 = x + 1$$

samaväärsed, sest mõlema lahendiks on $x = 4$.

Olgu antud võrrand:

$$5x - 7 = 2x + 8.$$

Selle võrrandi lahend $x = 5$; see tähendab, kui võrrandisse x asemele asetada 5, siis saavad võrrandi mõlemad pooled ühesuurusteks arvudeks:

$$5 \cdot 5 - 7 = 2 \cdot 5 + 8$$
$$18 = 18$$

Kui võrrandi mõlemale poolele ühepalju juurde lisada, näiteks 7, siis saame võrrandi:

$$5x - 7 + 7 = 2x + 8 + 7$$

Näitame, et sel uuel võrrandil on sama lahend, mis antud võrrandil. Kui $x = 5$, siis $5x - 7$ ja $2x + 8$ said ühesuurusteks arvudeks; sel puhul aga saavad $5x - 7 + + 7$ ja $2x + 8 + 7$ samuti ühesuurusteks arvudeks, sest lisades võrdsetele suurustele võrdsed suurused saame võrdsed suurused. Järelikult on 5 ka uue võrrandi lahendiks.

Lahuta antud võrrandi mõlemast poolest kaheksa ja näita, et uuel võrrandil on sama lahend, mis antud võrrandil!

Teeme kokkuvõtte:

Kui võrrandi mõlema poolega liita või mõlemast poolest lahutada ühepalju, siis saame uue võrrandi, millel on samad lahendid kui esimesel võrrandil.

Järeldused:

1. Võrrandi mistahes liikme võime võrrandi ühest osast üle viia teise ossa, vahetades üleviidava liikme ees märgi vastupidiseks.

Näiteks võrrandi

$$x^2 + 2 = 6x - 6$$

mõlemale poolele juurde lisades 6 saame

$$\begin{array}{r} x^2 + 2 = 6x - 6 \\ + 6 = + 6 \\ \hline x^2 + 2 + 6 = 6x \end{array}$$

Tagajärg on samasugune, kui oleksime -6 paremalt vastupidise märgiga viinud vasakule poole.

2. Kui võrrandi mõlemates osades esinevad ühesugused liikmed ühesuguste märkidega, siis kustutame need liikmed võrrandist.

Näiteks lahutades võrrandi

$$3x^2 + 5 = 2x + 5$$

mõlematest osadest 5 saame antud võrrandiga samaväärse võrrandi

$$3x^2 = 2x,$$

milles on ühesugused liikmed $+5$ ja $+5$ kadunud.

Olgu antud võrrand

$$\tfrac{2}{3}x + 5 = 2x + 1.$$

Selle võrrandi lahend $x = 3$, sest

$$\tfrac{2}{3} \cdot 3 + 5 = 2 \cdot 3 + 1$$
$$7 = 7$$

Korrutades võrrandi mõlemaid pooli ühe ja sama arvuga, näiteks 3-ga, saame uue võrrandi:

$$(\tfrac{2}{3}x + 5)3 = (2x + 1)3$$

Viimasel võrrandil on sama lahend, mis antud võrrandil. Nimelt, kui $x = 3$, siis $\frac{2}{3}x + 5$ ja $2x + 1$ said ühesuurusteks arvudeks. Sel puhul aga saavad $(\frac{2}{3}x + 5)3$ ja $(2x + 1)3$ samuti ühesuurusteks arvudeks, kui $x = 3$, sest korrutades võrdseid suurusi võrdsetega saame võrdsed suurused. Järelikult on uuel võrrandil sama lahend, mis esimesel võrrandil.

Jaga võrrandi mõlemaid pooli 5-ga ja näita, et uuel võrrandil on sama lahend, mis antud võrrandil!

Kokkuvõte:

Kui võrrandi mõlemaid pooli korrutada või jagada ühe ja sama arvuga, välja arvatud 0, siis saame uue võrrandi, millel on samad lahendid, mis esimesel võrrandil.

Järeldused:

1. Kui võrrandi kõikidel liikmetel on ühistegur, mis ei ole võrdne 0-ga, siis võime võrrandi liikmeid temaga jagada.

Näiteks taandades võrrandi

$$45x - \frac{15(x-3)}{8} = 60$$

kõiki liikmeid 15-ga saame lihtsama samaväärse võrrandi

$$3x - \frac{x-3}{8} = 4.$$

2. Võrrandi kõikide liikmete ees võime märgid vahetada vastupidisteks, sellepärast et võime kõiki liikmeid korrutada —1-ga.

3. Võrrandi liikmeid võime vabastada nimetajaist.

Näidis: Olgu antud võrrand

$$\frac{2x}{3} + \frac{3x}{4} = 5x - 5\tfrac{3}{8}.$$

Muudame kõik liikmed samanimelisteks:

$$\frac{16x}{24}+\frac{18x}{24}=\frac{120x}{24}-\frac{129}{24}$$

Korrutades kõiki liikmeid 24-ga saame antud võrrandiga samaväärse võrrandi

$$16x+18x=120x-129,$$

mille liikmed on nimetajatest vabastatud.

Ühe tundmatuga esimese astme võrrandi numbriline lahendamine.

Et lahendada võrrandit, selleks tuleb talle võimalikult lihtne kuju anda, kasustades eespool-toodud lauseid:

1) vabastame võrrandi liikmed nimetajatest;

2) avame sulud;

3) jätame võrrandist välja ühesuguste märkidega ühesugused liikmed, kui nad asuvad võrrandi isepooltel;

4) koondame sarnased liikmed;

5) jagame võrrandi kõiki liikmeid nende ühise teguriga, kui see on olemas;

6) kogume tundmatuga liikmed ühele poole ja tuntud liikmed teisele poole võrdusemärki, vahetades üleviidud liikmete ees märgid vastupidisteks;

7) koondame uuesti sarnased liikmed;

8) määrame tundmatu, jagades võrrandi mõlemaid pooli tundmatu kordajaga;

9) kontrollime tulemuse.

N ä i d i s:

$$\frac{9+7x}{2}-\left(1-\frac{1-2x}{7}\right)=36x$$

$$\frac{9+7x}{2}-1+\frac{1-2x}{7}=36x$$

$$\frac{7(9+7x)}{14}-\frac{14}{14}+\frac{2(1-2x)}{14}=\frac{14\cdot 36x}{14}$$

$$63 + 49x - 14 + 2 - 4x = 504x$$
$$45x + 51 = 504x$$
$$15x + 17 = 168x$$
$$15x - 168x = -17$$
$$-153x = -17$$
$$x = \frac{-17}{-153} = \frac{1}{9}.$$

Kontrolli tulemust!

M ä r k u s. Ei ole alati sugugi tarvilik võrrandit lihtsustada just eespool-toodud järjekorras. Missuguseid lihtsustamisvõtteid kasustada ja mis järjekorras, oleneb võrrandi iseloomust. Näiteks võrrandi $\frac{5}{x} = 6$ lahendamisel ei ole meil sugugi tarvidust tema liikmete nimetajast vabastamiseks, vaid määrame x kohe, kui jagaja

$$x = \frac{5}{6}.$$

Harjutusi.

8. a) $13x + 2(x - 16) = 208$
b) $9 - (8 - x) = 7 - (x - 6)$
c) $16(x + 5) = 8(5x - 3)$
d) $11x - 2(x - 1) = 5(x + 6)$
e) $9(13 - x) - 5(21 - 2x) - 4x = 9x$
f) $14 - 3(x + 4) + 7(x - 5) - 5(6 - x) = 0$
g) $7(3x - 6) = 11 - 5(x - 3) - 4(17 - x)$
h) $28 - 2(3x - 21) = 7(x - 6) - (x + 8)$
i) $12(5x - 3) = 75 + 2(7x - 5) - 3(2 - 4x)$
j) $4(3 - 0{,}02x) - 9(0{,}06x - 0{,}5) +$
$+ 3(0{,}04x - 3) = 1$

9. a) $(x + 5)(x - 4) = (x + 6)(x - 6)$
b) $(x - 5)^2 = 2x^2 - (x + 1)(x - 1) - 6$
c) $x - 1 = (x + 1)(x + 2) - (x - 3)(x - 4)$
d) $4(x + 7)(x - 7) - (2x - 5)^2 + 61 = 0$
e) $(1 + 10x)^2 - 4(1 + 4x)^2 = (1 + 6x)^2$

10. a) $\frac{3x}{4}=8$

b) $\frac{2x}{5}-3=5$

c) $\frac{x}{3\frac{1}{3}}=20$

d) $13-\frac{2y}{5}=9$

e) $6\cdot\frac{x}{4}-1\frac{1}{2}=3$

f) $\frac{x}{2}+\frac{x}{7}=18$

g) $\frac{3}{4}x+\frac{5}{6}x=57$

h) $\frac{7}{8}u-\frac{5}{12}u=33$

i) $\frac{y}{5}+\frac{3y}{7}-\frac{y}{2}=18$

j) $\frac{x}{5}-2=\frac{4x}{15}-2\frac{2}{5}$

k) $50-3\left(18-\frac{4x}{7}\right)=2(x-6)$

l) $13z-\frac{8z}{9}=15z+22-\frac{7z}{2}$

m) $\frac{2}{3}u-\frac{5}{6}u-\frac{11}{12}u=\frac{4}{5}u-\frac{1}{2}u-\frac{9}{10}u-29$

n) $5\cdot\frac{x}{6}-3\cdot\frac{x}{4}-2\frac{3}{8}=\frac{7}{9}x-1\frac{1}{12}x+15\frac{1}{8}$

11. a) $4-5x=\frac{x-16}{3}$

b) $\frac{5x+4}{7}=3x-4$

c) $\frac{5x-1}{4}=\frac{11x-4}{7}$

d) $2-x-\frac{5x-1}{3}=\frac{4x+2}{15}$

e) $2x-\frac{8x+7}{3}=-\frac{6x-5}{7}$

f) $\frac{6x+5}{7}=x-1-\frac{3x-4}{5}$

12. a) $1\frac{1}{2}x-3\frac{4}{5}=2x+\left(5\frac{1}{4}x-\frac{x}{2}\right)-\left(183-11\frac{1}{5}\right)$

b) $4\left(\frac{x}{2}-\frac{x}{3}\right)-2\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)=-5\left(3\frac{1}{3}+\frac{x}{5}\right)$

c) $\frac{6}{7}(9-2x)-\frac{2}{3}(3x-4)=3-1\frac{1}{2}x$

d) $\frac{1}{3}(4-z)-\frac{1}{8}(3z-16)=1\frac{1}{2}\left(5+\frac{3}{4}z\right)-z$

e) $\frac{1}{2}(z+3)-\frac{1}{12}(3z-5)=\frac{1}{3}(z-2)+\frac{1}{4}$

13. a) $\frac{4x+3}{4}-\frac{2x+5}{2}=\frac{2-3x}{4}$

b) $\frac{x+7}{4}-\frac{x-3}{6}=\frac{x-5}{2}+\frac{x-1}{8}$

c) $\frac{3x-10}{12}-\frac{x-8}{4}=\frac{5x-3}{6}$

d) $\frac{3x-2}{7}-\frac{x+3}{5}+\frac{x-1}{8}=5$

e) $\frac{4x-7}{9}-\frac{15-3x}{4}=\frac{3x-7}{12}-\frac{x-3}{6}$

f) $\frac{4x+9}{10}-\frac{7x-1}{25}=\frac{x+5}{5}-\frac{x+3}{20}$

g) $\frac{3y+5}{2}-\frac{6y+5}{7}=-\frac{y-1}{2}+\frac{3-2y}{14}$

14. a) $\frac{7x+18}{3}-\frac{4}{5}(x+3)=\frac{3}{2}(x+2)+\frac{2}{3}$

b) $\frac{7-2x}{2}-\left(1\frac{1}{2}x-\frac{x-2}{7}\right)=36-6x$

c) $\frac{9-72x}{2}-\left(1-\frac{1-2x}{7}\right)=-3\frac{1}{2}x$

d) $\frac{2y-10}{5}-\frac{3(y-15)}{2}=\frac{1-y}{4}+2{,}4$

e) $\frac{5x-1}{3}+\frac{4(x-1)}{5}-2x-4=0$

f) $\frac{10x+13}{6}-\frac{14(x+1)}{3}=\frac{7+6x}{4}-\frac{2(4x+9)}{7}$

15. a) $\frac{2(2x-7)}{7}+6\frac{5}{6}+\frac{7(x-4)}{3}=x+4-\frac{9-7x}{8}-\frac{1}{6}$

b) $\frac{10(y+1)}{3}-\frac{3(y-3)}{10}-\frac{3(y-1)}{2}=\frac{7y-3}{2}-\frac{11y-3}{20}$

c) $\frac{5(3x-2)}{4}+\frac{3x}{2}-23\frac{5}{6}=\frac{x-\frac{4x-9}{3}}{6}+5$

d) $\frac{26x-51}{52}-\frac{2(1-3x)}{13}=x-\frac{5x-\frac{11-3x}{4}}{39}$

e) $\frac{3x-\frac{5(4-x)}{3}}{3}-\frac{x-\frac{24-5x}{4}}{9}=x-\frac{7(x-5)}{6}$

16. a) $\frac{3}{x}=7$ b) $\frac{15}{4x}=2$

c) $\frac{5}{x}=2\frac{1}{2}$ d) $\frac{14}{x}+11=25$

e) $\frac{5}{6}=\frac{2}{3}:x$ f) $21:(-x)=14$

g) $7-\frac{40}{x}=\frac{16}{x}$ h) $\frac{8}{x}+\frac{3}{4}=\frac{9}{x}-\frac{5}{6}$

i) $\frac{15}{4x}+\frac{6}{x}-1=\frac{21}{2x}-2$ j) $\frac{1}{5}\left(27-\frac{24}{x}\right)=\frac{40}{x}$

k) $\frac{35}{x}+\frac{2}{3}=\frac{55}{3x}+\frac{9x-5}{2x}$

17. a) $\frac{3}{x+4}=\frac{1}{7}$ b) $\frac{18}{x-2}=9$

c) $\frac{3}{x-1}=\frac{4}{x+1}$ d) $\frac{5}{x-3}=\frac{8}{x-6}$

e) $\frac{3}{2x+4}=\frac{5}{3x+8}$ f) $\frac{1}{x+2}-\frac{1}{(7x+2)}=\frac{5}{x+3}$

18. a) $\frac{24}{x}-\frac{17-x}{x-1}=1$ b) $\frac{x-1}{x+1}=\frac{x-3}{x-5}$

c) $\frac{10-7x}{5x-4}=\frac{6-7x}{5x}$ d) $\frac{x-5}{x}=\frac{x-2}{x+8}$

e) $\frac{x}{x-3}-\left(1-\frac{6}{x}\right)=0$ f) $\frac{x}{x-1}=\frac{4x}{x+5}-3$

19. a) $\frac{6y+5}{8y-15}-\frac{3-x}{5}=\frac{1+8x}{15}+\frac{1-x}{3}$

b) $\frac{1}{2(2y-5)}+\frac{1}{6(2y-5)}=3-\frac{7}{3(2y-5)}$

c) $\frac{9x+4}{5x-10}-\frac{11x-2}{7x-14}=1$

d) $\frac{2z-3}{2z-4}-4=\frac{z+5}{3z-6}-\frac{7}{2}$

e) $\frac{7u+5}{2u-6}-\frac{2(4u-5)}{3u-9}-\frac{u-1}{u-3}=3$

f) $\frac{2y-13}{2y-16}+\frac{2(y-6)}{y-8}-\frac{7}{8}-\frac{2(5x-39)}{3x-24}=0$

g) $\frac{7}{x+5} - \frac{3}{x-1} = \frac{4}{x-3}$

h) $\frac{2x-3}{x+2} + \frac{8}{x+2} = \frac{5}{x} + 2$

i) $\frac{4x+3}{6x-5} - \frac{5x+4}{8x-5} = \frac{1}{24}$

j) $\frac{2(3x+5)}{2x-1} = \frac{3(x-1)}{x-3}$

20. Kordamiseks.

1) Kuidas jagada ühe ja sama arvu astmeid?

2) Kuidas astendada murdu?

3) Kuidas astendada astet?

4) Korruta: $\left(\frac{1}{2a} \cdot \frac{5b}{a+b}\right) 2a$!

5) Liida: $\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-a}$!

6) Korruta peast!

a) $(x+7)(x+2)$; b) $(x-9)(x+4)$.

7) Taanda murrud!

a) $\frac{2b-5}{5-2b}$; b) $\frac{(x-2y)^2}{(2y-x)^2}$; c) $\frac{(a-b)^3}{(b-a)^3}$

8) Lähtudes jagamise definitsioonist, määra!

$\frac{0}{a}$; $\frac{a}{0}$; $\frac{0}{0}$

9) Lahuta teguriteks!

a) $a^2 - a$ b) $15m^3 - 25m^2n$

c) $18a^3 - 9a^2 - 3a$ d) $4(a-b)^2 + a - b$

10) Valemist $i = \frac{kpt}{100}$ määra!

a) k; b) p; c) t.

4. Lineaarsete võrrandite koostamine.

Igas ülesandes esinevad tuntud suurused ja vähemalt üks tundmatu suurus. Et leida tundmatut suurust, selleks peame suurustevahelise seose, mis ülesandes on väljendatud harilikus keeles, tõlkima matemaatilisse keelde, see tähendab, peame selle seose väljendama matemaatiliste sümbolite abil. Seesugune sümbolite abil väljendatud seos on võrrand, mille lahend annab otsitud suuruse.

Ülesannete mitmekesisuse tõttu on võimatu anda kindlaid juhiseid võrrandite koostamiseks. On võimalik siiski anda üksikuid juhtnööre, mis on rakendatavad igasuguste võrrandite koostamisel.

Kõigepealt valime võimalikult otstarbekohaselt tundmatute suuruste hulgast ühe ja tähistame ta harilikult tähega x. Selle järel katsume ühte ja sama ülesandes esinevat suurust väljendada kahel viisil: tuntud ja tundmata suuruste kaudu. Ühendades saadud avaldised võrdusemärgiga saame nõutud võrrandi.

Näidis: Osteti kahte liiki riiet, kokku 27 m. Parema riide eest maksti 12 kr. meetrist, halvema riide eest 9 kr. meetrist. Mitu meetrit osteti kumbagi liiki, kui kogu riide eest maksti 288 kr.?

Suurused, mis peavad olema võrdsed, on mõlemate riidetükkide eest makstud summa ühelt poolt ja riide kogu hind teiselt poolt.

Olgu esimest liiki riidetüki meetrite arv x.

	I liik	II liik
meetrite arv	x	$27 - x$
meetri hind	12	9
riidetüki hind	$12x$	$9(27 - x)$

Et riidetüki hind on ühelt poolt $12x + 9(27 - x)$, teiselt poolt 288, siis kirjutame:

$$12x + 9(27 - x) = 288.$$

Lahenda saadud võrrand!

Näidis: A alevist R raudteejaama on 16 km. Jalakäija tarvitab selle maa käimiseks 3 tundi 20 minutit. Pool tundi pärast jalakäija lahkumist A alevist sõitis samas sihis välja rattasõitja ja jõudis jalakäijale 24 minutiga järele. Missugune oli rattasõitja kiirus?

Olgu rattasõitja poolt sõidetud kilomeetrite arv tunnis x. Et jalakäija kui ka rattasõitja poolt kuni kohtumiseni käidud kilomeetrite arv on ühesugune, asume selle suuruse väljendamisele kahel viisil.

	rattasõitja	jalakäija
kiirus km-tund	x	$\frac{16}{3\frac{1}{3}} = \frac{16 \cdot 3}{10} = 4{,}8$
aeg tundides	$\frac{24}{60} = \frac{2}{5} = 0{,}4$	$\frac{54}{60} = \frac{9}{10} = 0{,}9$
käidud tee pikkus	$0{,}4x$	$0{,}9 \cdot 4{,}8$

Seega saame võrrandi:

$$0{,}4x = 0{,}9 \cdot 4{,}8$$

Lahenda saadud võrrand!

Ülesanded.

21. Kui arvu korrutada $4\frac{1}{5}$-ga ja tulemusest lahutada $10\frac{2}{3}$, siis saame sama arvu. Mis arv see on?

22. Ühe arvu 7-kordse ja 8-kordse summa on 100 võrra väiksem kui tema 25-kordne. Leia see arv!

23. $15\frac{1}{2}\%$ arvust on niisama palju kui $10\frac{1}{4}\%$ selle arvu ja 63-e summast. Leia see arv!

24. Missugune arv on 25% võrra väiksem kui 65?

25. Kui arvule juurde lisada 16 ja tulemust jagada 7-ga, siis saame 4. Leia see arv!

26. Kui arvu korrutada 8-ga, tulemusest lahutada 16 ja selle järel jagada 4-ga, siis saame 26. Mis arv see on?

27. Lahutame tundmatust arvust 2,4, jagame tulemuse 3-ga, suurendame jagatist 0,5 võrra ja suurendame uut tulemust 5 korda. Nii saime lõpuks 21. Leia see arv!

28. Leia kaks arvu, mille summa on 83 ja vahe on 5!

29. Mille võrra peame korrutise $7 \cdot 11$ tegureid suurendama ja korrutise $13 \cdot 24$ tegureid vähendama, et need korrutised saaksid võrdseiks?

30. Kahest arvust on teine $\frac{2}{3}$ võrra suurem kui esimene. Kui suurendada esimest arvu 6 korda ja poolt teisest arvust suurendada 7 korda, siis on esimene tulemus 6 võrra teisest suurem. Leia arvud!

31. Murru nimetaja on lugejast 5 võrra suurem. Kui lugejat suurendada ja nimetajat vähendada 4 võrra, siis saame $1\frac{1}{3}$. Leia murd!

32. Murru lugeja on 7 võrra väiksem nimetajast. Kui lugejat suurendada 10 võrra ja nimetajat 4 korda, siis saame $\frac{1}{3}$. Leia murd!

33. Murru nimetaja on lugejast suurem 11 võrra. Kui lugejat vähendada 5 korda ja nimetajat suurendada 4 võrra, siis saame 0,1. Leia murd!

34. Missugune arv tuleb juurde lisada murru $\frac{12}{17}$ lugejale ja nimetajale, et saada $\frac{4}{5}$?

35. Missuguse arvu peame juurde lisama murru $\frac{14}{17}$ lugejale ja nimetajale, et saada ümberpöördud murd?

36. Murru lugeja on 15-st nii mitme võrra väiksem, kui mitme võrra on nimetaja 15-st suurem. Kui lugejast lahutada 2 ja nimetajale juurde lisada 2, siis saame $\frac{1}{5}$. Leia murd!

37. Missuguse arvu peame murdude $\frac{5}{13}$ ja $\frac{7}{20}$ lugejatega liitma ja nimetajatest lahutama, et need murrud saaksid võrdseteks?

38. Leia kaks arvu, mille vahe on 5 ja millede ruutude vahe on 65!

39. Üks arvudest on 6 võrra suurem kui teine. Kui väiksemat arvu suurendada 8 võrra ja suuremat vähendada 7 võrra, siis jääb nende korrutis muutumatuks. Leia arvud!

40. Murru nimetaja ja lugeja vahe on 9. Kui liita murru lugejale 23 ja lahutada murru nimetajast 4, siis saame ümberpöördud murru. Leia murd!

41. Kahekohase arvu kümneliste arv on 3 võrra väiksem üheliste arvust. Kui liita sellele arvule 27, siis saame arvu, milles kümnelised ja ühelised on ümber asetatud. Leia arv!

42. Kahekohase arvu ristsumma on 12. Kui sellest arvust lahutada $\frac{3}{7}$ temast, siis saame arvu, mille numbrid on ümber vahetatud. Leia arv!

43. Kolmekohase arvu sajaliste arv on 3 korda väiksem kümneliste arvust ja üheliste arv on 3 võrra väiksem kümneliste arvust. Kui jagada see arv tema ristsummaga, siis saame 22. Leia arv!

44. Kahe arvu summa on 47. Jagades suuremat arvu väiksemaga saame jagatises 2 ja jäägis 8. Leia arvud!

45. Kahekohase arvu ristsumma on 12. Jagades seda arvu üheliste arvuga saame jagatises 8 ja jäägis 1. Leia arv!

46. Kui tundmatu arv jagada 7-ga, siis saame jäägis 4; jagades teda 12-ga saame jäägis 10, kusjuures esimene jagatis on 2 korda suurem kui teine. Leia arv!

47. Kui mõeldud arvust lahutada 3, tulemust jagada 10-ga, jagatist suurendada 15 võrra, uuele arvule 6 juurde kirjutada ja selle järel jagada 2-ga, siis saame mõeldud arvu. Mis arv see on?

48. Kui mõeldud arvule juurde lisada 8, tulemust korrutada 5-ga ja korrutise viimane number 5 maha kustutada, siis saame 24. Missugune oli mõeldud arv?

49. Mõeldud neljakohase arvu viimane number on 7. Kustutame lõpust viimase numbri ja kirjutame ta arvu ette. Saadud arvu vähendame 5 võrra ja jagame selle

järel 10-ga. Jagatisele liidame 17 ja uue tulemuse korrutame 2-ga. Niiviisi saadud arv on 103 võrra suurem mõeldud arvust. Leia mõeldud arv!

50. Huvireisija ostis Läti Valgas paari kingi. 20-kroonisest sai ta tagasi 6,50 latti. Mitu latti maksid kingad, kui 1 kr. = 0,90 latti.

51. Reisija, kelle võõrastemaja-arve Tallinnas oli 14,25 kr., andis selle tasuks 20 Saksa marka ja sai 13,75 kr. tagasi. Mitme krooni ette arvestati 1 Saksa mark?

52. Ema saatis lapse poodi, et see tooks $1\frac{3}{4}$ kilo liha, andes kaasa paraja raha 1,12 krooni. Et liha hind oli tõusnud, sai laps $1\frac{1}{2}$ kilo liha ja 11 senti jäi järele. Kui palju oli liha kilo hind tõusnud?

53. Teine kord saatis ema lapse poodi, käskides tal tuua 400 g võid. Ta andis lapsele kaasa 65 senti, öeldes, et laps saab 1 sendi tagasi. Et või hind oli tõusnud, siis jäi laps poodi veel 3 senti võlgu. Kui palju oli või kilo hind tõusnud?

54. Kodanik maksis 36 krooni tulumaksu. Missugune oli maksualune tulu, kui tulumaksuks arvati 5%?

55. Kui maja aasta-üüriks arvata 8% maja väärtusest, siis mitme krooni võrra on kahest majast see kallim, mis annab aastas 480 kr. üüri rohkem?

56. Vaheltkaupleja teenis maja müümisel 720 kr. Kui kallilt müüdi maja, kui vaheltkaupleja sai 3% müügihinnast?

57. Leia arve suurus, kui peale 5% hinnaalanduse arvestust tuli maksta 76 kr.?

58. Majaomanikul kulus 12% üürist maksudeks ja 28% muudeks majaga seotud kuludeks. Kui suur oli aastaüür, kui peale kulude katmist jäi järele 1440 kr.?

59. Mitme %-ga annab 1200-kroonine kapital 1 aasta 3 kuuga 75 kr. kasu?

60. Mitme %-ga diskonteeriti 270-kroonine veksel 3 kuud 10 päeva enne tähtaega, kui veksli eest maksti 264 kr.?

61. Kui suur kapital toob 4%-ga 7 kuu ja 15 päevaga 15 krooni intressi?

62. Veksel diskonteeriti 6%-ga 126 päeva enne tähtaega. Missuguse summa peale oli veksel välja antud, kui diskonto oli 15,75 krooni?

63. Missugune kapital kasvab 5,5%-ga 9 kuu jooksul 1622 krooni suuruseks?

64. Veksel diskonteeriti 7,5%-ga 2 kuud 20 päeva enne tähtaega ja saadi tema eest 236 krooni. Kui suur on veksli valuut?

65. Missuguse aja jooksul kasvab 3600-kroonine kapital 6%-ga 3924 krooni suuruseks?

66. Mitu päeva enne tähtaega diskonteeriti 7%-ga 810-kroonine veksel, kui tema eest maksti 797,4 krooni?

67. Ametnikul oli pangas 6%-ga hoiul 2400 kr. Et pank alandas protsenti 4,5 peale, mille võrra tuleks siis hoiusummat suurendada, et saada endist intressi aastas?

68. Börsil osteti kursiga 126 aktsiaid nominaalväärtusega 2000 krooni. Kui aktsiad langesid 97 peale, siis osteti selle kursiga aktsiaid veel juurde nominaalväärtuses 1600 krooni. Mis kursiga tuleks aktsiaid realiseerida, et mitte kahju ega kasu saada?

69. Kaupmees müüs oakohvi, võttes 1 kg eest 4,20 krooni, ja teenis seejuures 5%. Et kohvi hind langes, siis müüs ta edaspidi sama kohvi hinnaga 3,87 krooni kilo ja teenis seejuures siiski $7\frac{1}{2}$%. Kui palju langes kohvi hind?

70. Kaupmees müüs riiet, mille meetri hinnaks oli märgitud 8 kr., 10%-se hinnaalandusega. Et tööstus tõstis sama riide hinda 32 senti meetrilt, siis jättis kaupmees märgitud hinna küll endiseks, andis aga vähem hinnaalandust. Mitu % hinnaalandust võis ta nüüd anda, et teenistus meetrilt jääks endiseks?

71. Tööstussaaduse omahind oli 700 kr. Et töötasu tõusis 8% ja materjali hind 5%, siis tõusis omahind 47 kr. võrra. Mitu krooni omahinnast läks töötasuks ja mitu krooni materjali eest?

72. Kahest arvest oli üks teisest 80 kr. võrra suurem. Kui ühe arve pealt anti 10% ja teise pealt 6% hinnaalandust, siis maksti kummagi arve järgi ühevõrra. Kui suur oli kumbki arve?

73. Talumees viis poole oma rahast panka hoiule $4\frac{1}{2}$%-ga, ühe kolmandiku — 4%-ga ja ülejäänud osa — $3\frac{1}{2}$%-ga. Missuguse summa andis ta üldse hoiule, kui tal aasta pärast oli hoiul 6250 krooni?

74. Kaupmees tellis 500 apelsini hinnaga 15 senti tükk. Mis hinnaga müüs ta apelsini, et teenida 20%, kui 50 apelsini läksid rikki?

75. Osteti 112 kr. eest kodumaa ja 145 kr. eest välismaa riiet. Et arve kohe tasuti, siis anti hinna-alandust, seejuures kodumaa riide pealt 3% rohkem kui välismaa riide pealt. Mitu % anti hinna-alandust kodumaa riidelt, kui kogu hinna-alandus oli 34,2 krooni?

76. Võlgnikul on 3 kuu pärast tasuda 800 krooni ja järgnevate 5 kuu pärast 1200 kr. Mitme kuu pärast võiks ta tasuda kõik võla korraga?

77. Ärimees ostis kaupa tingimusega tasuda ostusumma 8 kuu järel. Ta leidis aga kohasema tasuda 300 kr. 2 kuu järel, siis 400 kr. järgnevate 5 kuu järel ja ülejäänud summa veel järgnevate 6 kuu järel. Kui kallis oli kaup?

78. Ühiseks ettevõtteks andis A 4200 kr. ja B 5800 krooni. Ettevõte andis 800 kr. tulu. Kuidas jaotasid nad tulu?

79. Kolm perekonda pärisid 12 000 krooni tingimusega jaotada pärand perekondade vahel võrdeliselt perekonnaliikmete arvule. Esimeses perekonnas oli 2 last, teises 3 ja kolmandas 4. Kui palju päris iga perekond, kui kõik vanemad olid elus?

80. Isa pärandas oma neljale pojale 17 500 krooni tingimusega jaotada pärand nii, et alates vanemast pojast iga järgmine poeg sai $\frac{1}{3}$ võrra rohkem kui eelmine. Kui palju päris iga poeg?

81. Kolm isikut jaotasid omavahel päranduse nii, et esimene sai 200 kr. rohkem kui $\frac{1}{3}$ summast, teine 450 kr. vähem kui $\frac{2}{5}$ summast ja kolmas 500 kr. rohkem kui $\frac{1}{4}$ summast. Kui palju sai igaüks?

82. A, B ja C jaotasid oma ühisest ettevõttest saadud kasu 4810 kr. A-l oli ettevõttes 7500 kr., B-l 6500 kr. ja C-l 9000 kr. Mõnesugustel põhjustel sai A 15% ja B 20% enam, kui tal oma osamaksu tõttu õigus oli saada. Kui palju sai igaüks?

83. A, B ja C jagasid omavahel 1400 kr. nii, et A sai 400 kr. vähem kui B kolmekordne osa ja C 200 kr. vähem kui A ja B kokku. Kui palju sai igaüks?

v **84.** Kaupmees müüs 4-le ostjale 130 m riiet. Esimesele müüs ta 3 korda rohkem kui teisele; teisele 2 m vähem kahekordsest kolmandale müüdud meetrite arvust ja neljandale niipalju kui esimesele ja kolmandale kokku. Kui palju ostis iga ostja?

85. Kaupmees segas 12 kilo kohvi, hinnaga 4,90 krooni kilo, teise sordi kohviga, hinnaga 3 krooni kilo. Segu kõrvetamisel oli kadu 15%. Mitu kilo võeti teist sorti kohvi, kui kõrvetatud kohvi kilo hind oli 4,20 krooni?

86. Segati esimest sorti kohvi, mille hind 4 kr. kilo, teist sorti kohviga, mille hind 3,20 kr. kilo. Kõrvetamisel oli kadu 16%. Kõrvetatud kohvi müüdi hinnaga 5 kr. kilo, kusjuures saadi kasu 35,60 krooni. Kui palju segati kumbagi sorti kohvi, kui teist sorti oli 14 kilo rohkem?

87. Mitu liitrit vett on tarvis juurde lisada 80% piiritusele, et saada 50% piiritus?

88. Mitu liitrit 95% piiritust tuleb juurde lisada 12 liitrile 70% piiritusele, et saada 85% piiritus?

89. Et saada 20 l 60% piiritust, selleks segati 50% ja 80% piiritust. Kui palju võeti kummastki sordist?

90. Kui 24 kilost 60% väävelhappest eemaldada 8 kilo vett, mitmeprotsendine väävelhape jääb siis järele?

91. Mitmeprooviline on sulatis, kui ühte sulatada 2 kg 840-proovilist hõbedat ja 800 grammi vaske?

92. Kuldsepp sulatas ühte 960-proovilise hõbekandmiku ning 540-proovilised hõbelusikad ja valmistas 820-proovilise vaagna, mis kaalus 1,2 kilo. Kui palju kaalus kandmik?

93. Kui palju vaske tuleb 100 grammile puhtale kullale juurde lisada, et saada 750-prooviline sulatis?

94. Üks tööline sai palgapäeval 20 krooni vähem kui teine. Kui ta oli teise käest 2-kroonise võla kätte saanud, siis oli tal raha 2 korda vähem kui teisel! Kui suur oli kummagi teenistus?

95. Isa on 42 aastat, poeg 15 aastat vana. Mitu aastat tagasi oli isa pojast 4 korda vanem?

96. Isa on praegu pojast 9 korda vanem, aga 12 aasta pärast on ta kõigest 3 korda vanem kui poeg. Kui vana on isa ja kui vana on poeg?

97. Kahe venna vanuse vahe on 6 aastat. Kolm aastat tagasi suhtusid nende aastad nagu 4 : 3. Kui vana on kumbki vend?

98. Ametnik tarvitas oma aastapalgast $\frac{3}{14}$ korteri, kütte ja valgustuse kuludeks, $\frac{17}{35}$ toitlusekuludeks, $\frac{3}{20}$ rõivastuse peale ja ülejäänud 210 krooni muudeks kuludeks. Kui suur oli tema aastane sissetulek?

vb 99. Ametnik tarvitas $\frac{1}{3}$ oma rahast võla tasumiseks, $\frac{1}{2}$ ülejäänud rahast kulus tal ülikonna muretsemiseks. Järele jäi 16 krooni rohkem kui $\frac{1}{5}$ rahast, mis tal alul oli. Kui palju raha tal oli?

100. Talumehel oli hobuseid, lehmi ja lambaid, kokku 54. Hobuste arv oli $\frac{3}{8}$ lehmade arvust ja lammaste arv $1\frac{5}{11}$ hobuste ja lehmade arvust kokku. Kui palju oli talumehel iga seltsi loomi?

101. Doominomängija kaotas kohvikus $\frac{1}{5}$ oma kaasasolevast rahast ja veel 12 senti, selle järel kaotas ta uuesti $\frac{1}{7}$ järelejäänud rahast ja veel 20 senti; lõpuks võitis ta $\frac{7}{11}$ sellest rahast, mis tal pärast teist mängu järele jäi. Üldse kaotas ta 5 senti. Kui palju raha oli tal kaasas?

102. Ema andis nooremale lapsele $\frac{1}{2}$ õunte arvust ja veel poole õuna, keskmisele — $\frac{1}{2}$ ülejäänud õuntest ja veel poole õuna, vanemale — $\frac{1}{2}$ ülejäänud õuntest ja veel poole õuna. Ülejäänud 5 õuna võttis ta enesele. Mitu õuna oli emal?

103. Palitu müüdi kasuga 48 krooni eest. Kui ta oleks müüdud 40 krooni eest, siis oleks esimesel juhul saadud kasu protsent moodustanud $\frac{3}{5}$ teisel juhul saadud kahju protsendist. Missugune oli palitu omahind?

104. Ärimees ostis börsil aktsiaid; talle pakuti nende eest 1400 krooni; lootes veel suuremat kasu jättis ta nad müümata. Mõne aja pärast oli ta sunnitud samad aktsiad müüma kahjuga 1050 krooni eest, kusjuures kahju moodustas 75% kasust, mis ta oleks saanud, müües aktsiad esimesele ostjale. Kui palju maksis ta ise aktsiate eest?

105. Mis on kell praegu, kui $\frac{1}{13}$ tundide arvust, mis on keskpäevast möödunud, võrdub $\frac{1}{23}$ tundide arvuga, mis on keskööni järele jäänud?

106. Palgati ehitustööline 30 päeva peale päevapalgaga 2,50 krooni. Et töö oli kiire iseloomuga, siis pidi tööline iga äraviidetud tööpäeva eest 2 krooni trahvi maksma. Lepingu lõppedes sai tööline 48 krooni. Mitu päeva ta töötas?

107. Et laiska poissi tööle virgutada, andis isa talle lahendada 24 kerget ülesannet. Iga õietilahendatud ülesande eest sai poiss isalt 10 senti, kuna iga lahendamata ülesande eest pidi ta isale 5 senti maksma. Kui poiss töö lõpetas, ilmnes, et ta on isale võlgu 30 senti. Mitu ülesannet lahendas ta õieti?

108. Taluomanik palkas sulase 8 kuu peale, lubades tasuks 200 krooni ja ülikonna. 3 kuu ja 10 päeva pärast lahkus sulane teenistusest, saades 60 krooni ja ülikonna. Kui kalliks hinnati ülikond?

109. Talumees palkas kaks töölist ühesuguse päevapalgaga. Esimene sai 20 tööpäeva eest 27,60 krooni raha ja 16 kilo jahu, teine 24 tööpäeva eest 33 krooni raha ja 20 kilo jahu. Kui kalliks hinnati kilo jahu ja kui suur oli töölise päevapalk?

110. Peremees korraldas kartulivõtmistalgud. Kartulite all oli tal kaks põldu, üks 2 korda nii suur kui teine. Pool päeva töötasid kõik talgulised ühel põllul; teine pool päeva töötas pool osa talgulisi väiksemal põllul, kuna teine pool jäi suuremale põllule edasi töötama. õhtuks oli suuremal põllul töö valmis, kuna väiksemal põllul jäi tööd veel 4 inimesele pooleks päevaks. Mitu talgulist oli kartuleid võtmas?

111. Klass terves koosseisus otsustas allveelaevastiku heaks teatud summa annetada. Kui iga õpilane annab 23 senti, siis tuleb 34 senti puudu; annab iga õpilane 24 senti, siis jääb 8 senti üle. Kui suur summa otsustati annetada?

112. Kui kaupmees müüks kanga riiet 8 krooni meeter, siis saaks ta 28 krooni kasu; võtaks ta aga meetri eest 7 krooni, siis saaks ta 7 krooni kahju. Mitu meetrit riiet oli terves kangas ja kui palju maksis meeter kaupmehel enesel?

113. Muretseti istutamiseks tomatitaimi; neid taheti istutada ühepikkuste ridadena. Kui igasse ritta istutada 17 taime, siis jääb 62 taime üle; kui ritta istutada 23 taime, tuleb 22 taime puudu. Mitu taime muretseti ja mitu rida taimi kavatseti istutada?

114. A alevist B linna tõmmati uus telefoniliin. Kui postid üles seada 50 m kaugusele üksteisest, siis tuleb valmismuretsetud postidest 60 tükki puudu; kui aga postide vahemaad suurendada 10 m võrra, siis jääb 80 posti üle. Kui kaugel asub A alev B linnast?

115. Kui kooliõpilased seada kooli-õuele 16 ritta ja jätta reas iga kahe õpilase vahele 2,5 m, siis jääksid ridadest välja 28 õpilast; kui aga reas õpilaste vahele jätta 2 m, siis jätkuks ruumi veel 36 õpilasele. Kui pikk on kooli õu? Mitu õpilast oli koolis?

116. Osteti kahte liiki toole, kokku 42 tükki. Parema tooli hind oli $1\frac{1}{2}$ korda kallim odavama tooli hinnast. Kui palju maksis kumbagi liiki tool, kui kõikide paremate toolide eest maksti 132 krooni ja odavamate toolide eest 80 krooni?

117. Perenaine ostis sügisel sea, makstes 38,40 kr. Järgmisel aastal oli liha hind $1\frac{3}{4}$ korda tõusnud ja perenaisel tuli 18 kg kergema sea eest maksta 54,60 kr. Kui palju maksis viimasel puhul sealiha kilo?

118. Osteti rukki- ja nisujahu, kokku 37 kg. Nisujahu kilo eest maksti 2,4 korda kallimalt kui rukkijahu kilo eest. Kõik rukkijahu maksis 3,30 krooni ja kõik nisujahu 5,40 kr. Mitu kilo osteti rukkijahu ja mitu kilo nisujahu?

119. Meister valmistas omast materjalist koolipinke 454 krooni eest. Mõne aja pärast valmistas ta samasuguseid pinke 5 tükki rohkem, kuid hindade langemise tõttu sai ta nende eest kogusummas 7 kr. vähem kui eelmine kord, sest pingi hind oli nüüd kõigest $\frac{3}{4}$ endise pingi hinnast. Mitu pinki tegi ta esimene kord?

120. Kui pikal teel teeb vaguni ratas 2000 pööret rohkem kui veduri ratas, kui vaguni ratta ümbermõõt on 3 m ja veduri ratta ümbermõõt 4 m?

121. Vankri tagumise ratta ümbermõõt on $1\frac{1}{3}$ korda suurem esimese ratta ümbermõõdust. 3,2 km ulatuses tegi tagumine ratas 250 pööret vähem kui esimene. Leia rataste ümbermõõdud!

122. Kahest saarlasest suudab üks kraavi valmis kaevata 36 tunniga, teine 45 tunniga. Mitme tunniga jõuavad nad kahekesi koos selle kraavi valmis kaevata?

123. Maaler ja õpipoiss suudavad kahekesi toa põranda ära värvida 2 tunni 40 minutiga. Maaler üksinda tuleks sellega toime 4 tunniga. Mitme tunniga tuleks õpipoiss sellega toime?

124. Teenija suudab tüki heinamaad maha niita 12 tunniga; sulane tuleks selle tööga toime 8 tunniga. Teenija oli juba 2 tundi niitnud, kui sulane, kes vahepeal mujal tööl oli, temale abiks tuli. Mitme tunniga jõuavad nad nüüd tööga lõpule?

125. Ettevõtja arvestas, et kui ta võtab 20 töölist maja ehitama, siis jõuab ta maja katuse alla viia tähtpäevaks, milleni oli 50 tööpäeva aega. 15 tööpäeva hiljemini puhkes ehitustööliste streik, mis kestis 10 tööpäeva. Mitu töölist peab ettevõtja juurde võtma, et tööga õigeks ajaks valmis saada?

126. Supelbassein täitub ühe toru kaudu 2 tunniga ja teise kaudu 3 tunniga. Mitme tunniga täitub ta mõlemate torude lahtiolekul?

127. Kümblusvanni täitmiseks külma- kui ka soojavee-kraani kaudu üksikult kulub 12 minutit aega; põhjas oleva augu kaudu tühjeneb täis vann 9 minutiga. Mitme minutiga on kümblusvannis 24 pange vett, kui avada mõlemad kraanid? Vanni mahub üldse 36 pange ja ärajooksuauk on lahti unustatud.

128. Tõrs täitub ühe kraani kaudu $\frac{1}{3}$ tunniga, kuna teise kraani kaudu täis tõrs tühjeneb $\frac{1}{4}$ tunniga. Kui tõrs täita veega ja selle järel avada mõlemad kraanid, siis mitme minuti pärast on tõrrest täidetud veel $\frac{1}{4}$?

129. Suur tõrs, mille mahutavus on 90 hl, täitus toru kaudu 45 minutiga. Mõne aja pärast tekkis põhja pragu ja nüüd kulus tõrre täitmiseks 50 min. Mitu liitrit jooksis sekundis läbi prao välja?

130. A linnast B linna poole sõitis jalgrattur keskmise kiirusega 12 km tunnis; samal ajal sõitis B linnast A linna poole talumees keskmise kiirusega 8 km tunnis. A ja B linna vahemaa on 50 km. Mitme tunni pärast ja kui kaugel A-st nad kohtuvad?

131. Samal ajal, kui alevist sõitis omnibus linna poole 25-km-se tunnikiirusega, sõitis talust, mis asub sama tee ääres 10 km linna poole, jalgrattur 15-km-se tunnikiirusega. Kui kaugel alevist jõudis omnibus jalgratturile järele?

132. Kaks poissi jooksid võidu, kusjuures üks andis teisele 120 m ette. Üks poistest jooksis 12-km-se tunnikiirusega, teine 10-km-se tunnikiirusega. Mitme minutiga jõudis esimene teisele järele?

133. Kell 14 sõitis A jaamast välja kaubarong kiirusega 28 km tunnis; $\frac{3}{4}$ tunni pärast väljus samast jaamast teine rong samas sihis kiirusega 42 km tunnis. Mis kellaajal ja kui kaugel A jaamast jõuab teine rong esimesele järele?

134. Kell 8 alustas õhulaev lendu A linnast, et jõuda B linna kaudu C linna kiirusega 102 km tunnis. Kell 8.36 väljus B linnast C linna poole kiirrong, mis sõitis tunnis

60 km. Mis kella-ajal ja kui kaugel B-st jõuab õhulaev rongile järele, kui A ja B linna vahe on 92 km?

135. Talumees sõitis omnibusega linna kiirusega 20 km tunnis. Linnas kulus tal asjaajamiseks 3 tundi. Tagasi sõitis ta omapoolse mehega hobusel 8-km-se kiirusega tunnis. Kokku kulus tal linnaskäimiseks aega 8 tundi 15 min. Kui kaugel linnast asus talumehe kodu?

136. Alevist raudteejaama on 35 kilomeetrit. Omnibus tarvitas selle maa ärasõitmiseks harilikult 1 tunni 24 min. Kui 15 km oli ära sõidetud, juhtus mootoririke, mille parandamiseks kulus 12 min. Et aega mitte kaotada, suurendas juht kiirust, mille tõttu omnibus õigel ajal pärale jõudis. Mille võrra suurendas juht kiirust?

137. Õpilane sõitis pühadeks maale. Et talle raudteejaama, kust tema kodu 28 km eemal oli, keegi vastu ei olnud sõitnud, siis hakkas ta jala minema, kiirusega 5 km tunnis; niisuguse kiirusega pidi ta pärale jõudma 5 tunni 36 minuti järel. Mõne aja pärast sõitis talle järele naaberperemees, kes ta koju sõidutas 12-km-se tunnikiirusega; selle tõttu jõudis poiss ettekavatsetud ajast 2 tundi 10 minutit varemini koju. Kui kaugel jaamast jõudis naaberperemees poisile järele?

138. A alevist lahkus L linna suunas omnibus, sõites keskmiselt 2 minuti 24 sekundiga 1 kilomeetri. Veerand tundi hiljemini lähtus samast alevist sama teed mööda auto, sõites keskmiselt $1\frac{1}{2}$ minutiga 1 kilomeetri. Mitme minutiga jõudis auto omnibusele järele?

139. Ants sõitis jalgrattal maale oma sõpra külastama, keskmiselt iga 4 minutiga 1 kilomeetri edasi liikudes. Teel kohtas ta sõpra, kes sõitis isaga linna ning tarvitas 1 kilomeetri sõiduks keskmiselt 5 min. Sõber oli Antsust 15 min. varemini sõitma hakanud ja selle tõttu jõudnud 1 kilomeetri rohkem ära sõita. Mitme minuti järele pärast väljasõitu kohtas sõber Antsu? Mitu km on sõbra kodust linna?

140. Üks jooksja andis teisele, kes minutis kattis 250 m, 400 meetrit ette. Missugune oli esimese kiirus minutis, kui ta jõudis teisele järele 5400. meetril?

141. Kell 14 lähtus A alevist B jaama sihis talumees, kes jõudis tunnis keskmiselt 7 km edasi. Mis kella ajal peab alevist lähtuma auto, et jõuda talumehega samal ajal jaama, kui ta sõidab tunnis keskmiselt 30 km edasi? Alevist jaama on 24,5 km.

142. Kaks lendurit lendavad võidu, leppides kokku 2 ringi peale ümber aerodroomi. Esimene startija tarvitab lennuks 1 min. 35 sek. Teine lendur startis 18 sek. hiljemini ja tema aeg oli 1 min. 16 sek. Mitme sekundi pärast jõudis teine lendur esimesele järele?

143. Kell 11 sõidab Tallinnast välja kiirrong ja jõuab kell 15 Tartu. Samuti kell 11 sõidab Tartust välja kaubarong ja jõuab kell 20^{20} Tallinna. Mis kellaajal nad kohtuvad?

144. Kell 12 seisavad mõlemad kellaosutid teineteise kohal. Millal sünnib see uuesti? Millal moodustavad nad täisnurga?

145. Kell 6 moodustavad kellaosutid sirge nurga. Millal sünnib see uuesti?

146. Kui paju aega kulub suurel osutil, alates kella 1^{30}-st, et väiksemale osutile uuesti järele jõuda?

147. Kahekordsete rööpmetega teel sõidavad kaks rongi samas sihis. Üks rongidest, 60 m pikk, sõidab kiirusega 25 km tunnis; teine rong, 40 m pikk, sõidab kiirusega 45 km tunnis. Mitme sekundiga jõuab teine rong esimesest mööda? Mitu sekundit kuluks möödasõiduks siis, kui nad sõidaksid vastassihis?

148. Rongist, mille kiirus 54 km tunnis, möödus samas sihis teine rong, mille pikkus oli 50 m. Esimese rongi reisijast möödus teine rong 10 sek. jooksul. Missugune oli teise rongi kiirus?

149. Isikule, kes kõndis kiirusega 5,6 km tunnis, tuli vastu lauljate rongkäik kiirusega 4,2 km tunnis. Rongkäik möödus isikust 4 minutiga. Kui pikk oli rongkäik?

150. Rongist, mille kiirus on 72 km tunnis ja pikkus 50 m, sõidab vastassihis mööda teine rong kiirusega 45 km tunnis. Kui pikk on teine rong, kui rongid jõudsid teineteisest 4 sekundiga mööda?

151. Sulatati ühte 2,2 kg vaske ja 3,65 kg tsinki. Leia segu erikaal! (Vase erikaal on 8,8 ja tsingi oma 7,2.)

152. Valmistati käevõru 57,9 g kulla ja 17,6 g vase sulatisest. Missugune on käevõru erikaal? (Kulla erikaal on 19,3.)

153. Valmistati kulla ja vase sulatis, mille erikaal oli 13. Kui palju võeti sulatise tarvis kulda ja kui palju vaske, kui sulatis kaalus 650 g?

Ülesanded vanast ajast.

154. Puuris on kodujänesed ja kanad. Loomadel on kokku 35 pead ja 94 jalga. Mitu kana ja kodujänest on puuris?

155. Küsimusele, mitu õpilast tal on, vastas Pythagoras: „Pool osa minu õpilastest uurib matemaatikat, neljandik looduslugu, seitsmendik õpib vaikimist ja peale nende on veel 3 päris väikest.“ Mitu õpilast tal oli?

156. Laiskleja on alates 18. eluaastast $\frac{3}{8}$ ajast maganud, $\frac{1}{16}$ söönud ja joonud, $\frac{1}{4}$ jalutanud, $\frac{3}{16}$ mänginud, $\frac{1}{16}$ lamades haigutanud ja seejuures siiski 2 aastat töötanud. Kui vanaks ta elas?

157. Lootoslillede hulgast ohverdati Šiva'le $\frac{1}{3}$, Višnu'le $\frac{1}{5}$, Päikesele $\frac{1}{6}$, Bhavani'le $\frac{1}{4}$. Ülejäänud 6 lille sai auväärt õpetaja enesele. Ütle, mitu lille oli!

158. Mesilasteparvest laskus $\frac{1}{5}$ kadamba õitele, $\frac{1}{3}$ silindha õitele. Kolmekordne nende osade vahe lendas kutaja õitele. Ainult üks mesilane jäi õhus sinna ja tänna hõljuma, ligitõmmatuna ühel ajal jasmiini ja pandaani magusast lõhnast. Nüüd ütle, mitu mesilast oli parves!

159. Vanajutu järgi lubas Böömi kuninganna Libussa mehele minna sellele oma kolme kosilase hulgast, kes lahendab järgmise ülesande: Mitu ploomi on korvis, millest on võimalik anda esimesele kosilasele $\frac{1}{2}$ ploomidest ja lisaks veel 1 ploomi, teisele $\frac{1}{2}$ ülejäänuist ja veel 2 ploomi ja kolmandale $\frac{1}{2}$ ülejäänuist ja viimased 3 ploomi?

160. Vana araablane jättis surres kolmele pojale pärandiks 17 kaamelit. Neist pidi noorem poeg saama poole, keskmine — kolmandiku ja vanem — ühe üheksandiku pärandist. Varanduse jagamisel sattusid vennad raskesse seisukorda ja palusid naabri abiks. Naaber laenas neile oma kaameli, nii et kokku oli nüüd 18 kaamelit. Noorem sai nüüd poole, s. o. 9, keskmine kolmandiku, s. o. 6 ja vanem — üheksandiku, s. o. 2. Ülejäänud kaameli sai naaber tagasi. Kas pärand on õigesti jaotatud?

161. Neljast purskkaevust täidaks esimene basseini ühe päevaga, teine kahe, kolmas kolme ja neljas nelja päevaga. Kui kiiresti täitub bassein kõigi nelja purskkaevu töötamisel?

162. Lõvi sööks lamba 1 tunniga, hunt 4 ja koer 6 tunniga. Kui kiiresti sööksid nad lamba ära ühiselt, oletades, et nad teevad seda sõbralikult?

163. Laev sõidab Suurest Väinast Riiga. Tal on 3 purje. Suuremaga üksi jõuab ta 2 nädala vältel pärale, keskmisega 3-me ja väiksemaga 4-ja nädala vältel. Kui pika aja pärast jõuab ta Riiga hea tuulega kõigi 3 purje abil?

164. Koer ajab jänest taga; jänes on koerast 150 jalga ees. Jänese hüpped on 7 jalga pikad, koera omad 9 jalga. Mitme hüppega saab koer jänese kätte?

165. Karjane hässitas koera rebase peale, kes on 60 hüpet koerast ees. Sel ajal, kui rebane teeb 9 hüpet, suudab koer teha ainult 6. Kuid selle eest võrduvad 3 koera hüpet rebase 7 hüppega. Mitme hüppega jõuab koer rebasele järele?

166. Ühiseks eineks annab Sempronius 8 ja Cassius 7 rooga. Einest võtab ka Titus osa ja tasub mõlemale eineandjale võrdeliselt roogade arvule 16 ja 14 seeklit. Sellega pole Sempronius nõus ja nõuab kohtulikku lahendust. Missugune see oleks?

167. „Kui palju on kell?“ — „Kell on kolme ja nelja vahel ja minutinäitaja katab tunninäitaja.“

168. „Tere, tere, sada hane!“ — „Ei, meid pole sada. Oleks meid veel 15 hane ning 5 hane ja oleksid siin ka need 3 haiget hane, kes täna hommikul koju jäid, ning oleksid ka veel sina hani, siis oleks meid niipalju 100-st enam, nagu meid nüüd 100-st vähem on.“ Mitu neid oli?

169. Antud töö jõuab 1 mees 10-ne, aga 1 naine 15-ne päevaga lõpetada. Selle töö juurde pandi 2 meest ja 2 päeva pärast veel 4 naist. Mitu päeva kulub naistel koos meestega töö lõpetamiseks?

170. 10 tüdrukut jõuavad särgid 12 päevaga, aga 8 teist tüdrukut 20 päevaga valmis õmmelda. Ühest rühmast pannakse 6 tüdrukut neid särke õmblema. Mitu tüdrukut tuleb teisest rühmast abiks võtta, et töö valmiks 16 päevaga?

171. Kordamiseks.

1) Missuguse lause põhjal võime võrrandi liikmeid vastupidise märgiga võrrandi ühelt poolelt teisele üle kanda?

2) Missuguse lause põhjal võime võrrandi kõikide liikmete märgid vastupidisteks vahetada?

3) Missuguse lause põhjal võime võrrandi liikmeid vabastada nimetajaist?

4) Arenda!

a) $(2a^2 + 3b)^2$

b) $(-2k + 3l^2)^2$

c) $(-12a^3 + 7b)(-7b - 12a^3)$

d) $(2m + 3n^2)^3$

5) Leia avaldise $-2x^2 - 3x + 5$ väärtus, kui x on a) -2; b) 0 ja c) $+3$!

6) Missuguse x-i väärtuse puhul $2 - 5x$ on 17? $\frac{5}{2x}$ on 15?

7) Arvuta valemite põhjal!

a) $56^2 - 44^2$ c) $198 \cdot 202$

b) 299^2 d) 99^3

5. Lineaarsed tähtvõrrandid.

Harjutusi.

172. a) $x + a = b$ f) $a - x = 9 - b$

b) $x - a = 12$ g) $a + x = b - x$

c) $m - x = n$ h) $m - x = 2n + x$

d) $m - n + x = 0$ i) $3x - a = b + c$

e) $x + a - b = c$ j) $2x + s = 4s - 5x$

173. a) $ax + b = c$ d) $3mx + 2a = 5mx + 2b$

b) $m - nx = p$ e) $-7ay + 12a = ay - 16b$

c) $k - mx + 2l = 3n$ f) $3a - mx = 2a - 4mx + a$

174. a) $a(x + b) = c$

b) $6(x - a) = 5a + 3b + x$

c) $8(a - x) = 9(b - x)$

d) $(a-4)x=b-4x$
e) $mn+(n+1)x=(m+x)n+a$
f) $5(3n-2x)-3(2n-3x)=5(3m-2x)-$
$-3(2m-x)$

175. a) $ax+bx=c$
b) $mx=k+nx$
c) $ax+b=cx+d$
d) $ax+x=m$
e) $ax-bx=m-x$
f) $a+bx=cx-x$
g) $b(c-x)=cx$
h) $a(2x-1)=x-a$
i) $mx+nx=m+n$
j) $3my-3ny=5m-5n$
k) $6a-7ax=6b-7bx$
l) $ax-b=bx-a$

176. a) $(a+b)x=k-ck$
b) $(a-b)x=2a-(a+b)x$
c) $ab-c(d+x)=d(x-c)$
d) $r(s-x)+s(t-x)=s(r-x)+tx$
e) $(m+n)x+(m-n)x=k+mx$
f) $(m+n)x-(m-n)x=nx+a+b$

177. a) $(m-x)(1-x)=x^2-1$
b) $2m^2-(m-x)^2=-(2m+x)^2$
c) $(m-x)(n-x)=x^2$
d) $(x+a)(x-b)=x^2+3ab$
e) $(x-a)(x-b)+a^2=x^2$
f) $(x-m)^2=(n-x)^2$

178. a) $\frac{x}{5}=a$
b) $\frac{x}{3a}=4b$
c) $\frac{ax}{2b^2}=3c$
d) $\frac{x+2a}{4a}=5a$
e) $\frac{a}{x}=b$
f) $\frac{a+2b}{x}=26$
g) $\frac{m-n}{mx}=n$
h) $\frac{b}{ax-b}=2$

179. a) $\frac{3bx}{a}-\frac{4}{a}=1$ f) $m-\frac{x}{n}=\frac{x}{m}-n$

b) $\frac{x}{a}+\frac{x}{b}=1$ g) $\frac{mx-n}{p}=x-\frac{px-m}{p}$

c) $\frac{x}{m}-x=n$ h) $\frac{x-a}{b}+\frac{x-b}{a}=0$

d) $\frac{x}{a}+3=\frac{x}{6}-5$ i) $\frac{x}{a}-a=\frac{x}{b}-b$

e) $\frac{x}{a}+\frac{x}{b}=x+2$ j) $\frac{c-dx}{d}=\frac{cx-d}{c}$

180. a) $\frac{x-m}{m}+a=\frac{x-n}{n}+b$

b) $\frac{kx}{l}-\frac{lx}{k}=k+l$

c) $\frac{n(x+1)}{2m}-\frac{m(1-x)}{2n}-x=0$

d) $\frac{x+f}{e}-\frac{4(f-x)}{e}=\frac{2e}{f}+\frac{5(x-e)}{f}$

e) $\frac{mx}{n}-\frac{n}{m}(x-n)-a=o$

f) $2\frac{a+b}{b}-\frac{x+b}{2a}=\frac{3a+x}{2b}-\frac{b-a}{a}$

g) $\frac{x}{a}+\frac{x}{b}+\frac{x}{c}=d$

h) $\frac{9b-cx}{3b}-\frac{ax-20c}{5c}=10-\frac{6a-bx}{2a}$

i) $\frac{1-hx}{fg}-\frac{fx-1}{gh}=\frac{gx-1}{fh}$

j) $\frac{m^2+x}{n}-\frac{nx-m^2n}{mp}=\frac{x-m^2}{m}+\frac{2x}{n}$

181. a) $\frac{a}{x}-b=c$ d) $\frac{a}{mx}+\frac{b}{nx}=p$

b) $\frac{m}{x}+\frac{n}{x}=p$ e) $\frac{m-x}{m+x}=n$

c) $\frac{a}{x-1}-1=-b$ f) $\frac{a}{x+2}-c=\frac{b}{x+2}$

182. a) $\frac{m}{m-x}=\frac{n}{n-x}$ d) $\frac{a}{y}+\frac{b}{cy}=1$

b) $\frac{a}{x-1}-\frac{b}{x+1}=0$ e) $\frac{m}{x}-\frac{n}{x-m}=0$

c) $\frac{m-x}{n-x}=\frac{m+x}{n+x}$ f) $\frac{y(y+c)}{y-c}=y-c$

183. a) $\frac{nx-m}{nx}=\frac{n^2+m^2}{mn}-\frac{mx+n}{mx}$

b) $\frac{x}{x-a}=3-\frac{x+a}{x}$

c) $\frac{m+x}{m-x}+\frac{n+x}{n-x}=\frac{m-n}{x-m}$

d) $\frac{4a}{x-4a}=8\cdot\frac{a-b}{x}-\frac{8b}{4a-x}$

e) $\frac{a}{x-a}=4-\frac{3b}{a-x}$

f) $\frac{uv+5}{v}=\frac{u}{x-u}-\frac{5}{v(u-x)}$

184. a) $\frac{1}{x}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ d) $\frac{1}{x}=\frac{2u}{v}+3u$

b) $\frac{1}{y}=\frac{2}{m}-\frac{3}{n}$ e) $\frac{2}{y}=\frac{3}{a}-\frac{2}{ab}$

c) $\frac{1}{z}=3-\frac{a}{b}$ f) $\frac{m}{z}=2a-\frac{b}{a}$

185. a) $\frac{1}{x}=ab\left(\frac{3}{a}-\frac{2}{b}\right)$ d) $\frac{1}{y}=\frac{a-b}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}$

b) $\frac{1}{y}=\frac{m}{n}\left(\frac{n^2}{m^2}-1\right)$ e) $\frac{1}{x}=\frac{\frac{b}{n}-\frac{a}{n}}{\frac{c}{n}}$

c) $\frac{1}{z}=\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{a+b}$ f) $\frac{1}{z}=\frac{\frac{m}{n}}{1-\frac{m^2}{n^2}}$

186. Määra järgnevates seostes: 1) a; 2) b; 3) c!

a) $a - b - c + d = o$ d) $a(b - c) = d$

b) $abd - c = o$ e) $\frac{a}{c} + b = d$

c) $abc - 3c = 2d + a$ f) $\frac{a+b}{c} - d = o$

187. Määra järgnevates võrrandites y!

a) $a + y = x$ d) $\frac{2x + 3y}{3 - 5y} = x$

b) $2a - by = cx$ e) $\frac{a + by}{c + dy} = x$

c) $\frac{a + 2by}{3c} = 2x$ f) $\frac{m - ny}{my} = \frac{n}{x}$

188. On antud võrrand ja tema lahend. Puudub üks tundmatu kordajatest. Leia viimane!

a) $\dots x + 28 = 5x$
$x = 14$

b) $9x + 23 = \dots x - 37$
$x = -20$

c) $\dots (x - 2) = 20$
$x = 4$

d) $\frac{2x + 7}{4} = \frac{\dots x + 4}{12}$
$x = -17$

189. Kui m_1 kilo vett, mille temperatuur on t_1, segada m_2 kilo veega, mille temperatuur on t_2, siis segu temperatuur

$$t = \frac{m_1 t_1 + m_2 t_2}{m_1 + m_2}.$$

Määra 1) m_1, 2) t_1, 3) m_2, 4) t_2 teiste suuruste kaudu!

Ülesanded.

190. Kahe arvu summa on s. Missugused on need arvud, kui üks on a võrra teisest suurem?

191. Peremees sai oma põllult n korda rohkem linu kui pops. Mitu tsentnerit linu sai kumbki, kui kogusaak oli a tsentnerit?

192. Jaga arv a kolme ossa, nii et teine osa oleks esimesest m võrra väiksem ja kolmas n korda esimesest suurem!

193. Üks tööline kaevab päevas p meetrit kraavi, teine q meetrit. Mitme päevaga kaevavad nad koos $\frac{1}{2}$ kilomeetrit kraavi?

194. Kaks osanikku paigutavad ärisse kapitalid: esimene a krooni, teine b krooni. Äri annab aastas tulu t krooni. Kui palju sellest tulust saab kumbki?

195. Segati kahte sorti kohvi. Esimesest sordist võeti a kilo hinnaga p krooni kilo, teisest b kilo hinnaga q krooni kilo. Kui kallis oli kilo segu?

196. Tööline sai iga tööpäeva eest a krooni, kuid iga äraviidetud tööpäeva eest pidi ta tööandjale b krooni trahvi maksma. n tööpäeva möödudes sai tööline k krooni. Mitu päeva viitis ta ära ja mitu päeva ta töötas?

197. Kahe arvu vahe on d. Kui jagada vähendatavat vähendajaga, siis saame jagatise q ja jäägis poole antud vahest. Leia arvud!

198. Osteti tükk riiet k krooni eest. Kui riiet oleks ostetud n meetrit rohkem, siis oleks ta maksma läinud a krooni. Mitu meetrit riiet osteti?

199. Kaup müüdi a krooni eest ja saadi seejuures $p\%$ kahju. Kui suur oli kauba omahind?

200. Ülesostja ostis m muna hinnaga k senti paar. Mis hinnaga peab ta paari müüma, et saada $p\%$ kasu, kui n muna oli katki läinud?

201. Missugune kapital kasvab $p\%$ kandes t päevaga A krooni suuruseks?

202. Mitme $\%$-ga kasvab a krooni t kuu jooksul A krooniks?

203. A jaamast ja B jaamast lähtuvad samal ajal teineteisele vastu kaks rongi. Esimene jõuab tunnis edasi

a km, teine b km. Jaamade vahemaa on k km. Mitme tunni järel ja kui kaugel A-st nad kohtuvad?

204. Kahest kohast, mille vahemaa on a km, algavad sama teed mööda, samas sihis ja samal ajal sõitu omnibus ja auto. Millal nad kohtuvad, kui omnibus sõidab ees kiirusega v_1 km tunnis ja auto järel kiirusega v_2 km tunnis? ($v_2 > v_1$.)

205. Kahe peatuskoha kaugus on k km. Päri voolu sõidab laev selle kauguse t tunniga; vastu voolu sõites tarvitab ta u tundi rohkem. Kui suur on voolu kiirus?

206. Veduri ratta ümbermõõt on u_1 meetrit, vaguni ratta ümbermõõt u_2 meetrit. Tartust Tallinnani tegi veduri ratas n pööret vähem vaguni rattast. Mitu km on Tartust Tallinnani?

207. Üks tööline suudab heinamaatüki maha niita p_1 päevaga, teine p_2 päevaga. Mitme päevaga niidavad nad seltsis selle tüki maha?

208. Bassein täitub ühe toru kaudu t_1 tunniga ja tühjeneb teise toru kaudu t_2 tunniga. Mitme tunniga tühjeneb täis bassein, kui avada mõlemad torud? ($t_2 > t_1$.)

209. Kaks töölist võtsid tüki tänavat ühiselt sillutada. Esimene üksinda tuleks sellega toime m_1 päeva jooksul, teine m_2 päeva jooksul. n päeva pärast töö algust haigustus teine tööline ja nii tuli esimesel töö üksinda lõpule viia. Mitu päeva veel kulus tal selleks?

210. Kaks ratturit sõidavad kohtadest A ja B, millede vahemaa on d kilomeetrit, teineteisele vastu; esimene sõidab kiirusega v_1 kilomeetrit tunnis, teine kiirusega v_2 km tunnis. Millal pärast esimese väljasõitu ja kui kaugel A-st kohtuvad nad, kui esimene sõitis A-st h tundi varemini välja kui teine B-st?

211. Kaks autot sõidavad kahest kohast, millede kaugus on d kilomeetrit, teineteisele vastu. Esimese auto kiirus on v km. Missugune peab olema teise auto kiirus, kui ta algab sõitu t tundi hiljemini ja kohtab esimest autot t_1 tundi pärast enese väljasõitu?

212. Kaks jooksjat jooksevad võidu, lähtudes samal ajal samast kohast. Kiirem suudab terve ringi katta v_1 minutiga, aeglasem v_2 minutiga. Mitme minuti pärast kohtuvad nad uuesti?

213. Kaks sõpra leppisid kokku pühapäeval kohtuda. Esimene lähtus kohast A rattal ja sõitis keskmiselt 1 kilomeetri m minutiga; teine lähtus samal ajal kohast B jala ja tarvitas 1 kilomeetri käimiseks keskmiselt n minutit. A ja B kaugus on d km. Millal ja kui kaugel A-st kohtuvad nad?

214. Kui ema annab igale lapsele a pirni, siis jääb m pirni üle; annab ta aga igale lapsele b pirni, siis tuleb n tükki puudu. Mitu last oli ja kui palju oli pirne?

215. Kui kahe linna vahele telefonipostid asetada üksteisest k meetri kaugusele, siis jääb valmistatud postidest m posti üle; kui asetada postid aga l meetri kaugusele, siis tuleb n posti puudu? Mitu posti oli valmistatud ja kui pikk on linnade vahemaa?

216. Missugune summa tuleb panna panka $p\%$-ga, et kolme aasta pärast saada K krooni, kui intress arvatakse iga aasta järel kapitalile juurde?

217. Veinikaupleja ostis a krooni eest veini. Teel oli r pudelit purunenud. Mitu pudelit ta ostis, kui ta, müües pudeli k krooni eest, teenib $p\%$?

218. Kasti pakiti a kg tubakat. Mitu $\%$ moodustab kasti kaal terve saadetise kaalust, kui kasti veokulud olid k krooni ja 1 kilo raskuse veokulu s senti?

219. Segati a kg vett ja b kg $p\%$-st äädikhapet. Mitmeprotsendine on lahus?

220. Segati k kg vett ja l kg soolhapet; saadi $p\%$ kange segu. Mitmeprotsendine oli soolhape?

SISUKORD.

Esimene osa.

Teine osa.

HIND 2 KR. 20 SENTI