

Auhlnnatöc

Kipper, Arsel

1. detõ. 1928. a. tunnustatud
esimesi austria kirjanduse
Autori stud. Arvid Hippel
Aige: pharmeer
Tartu ülikooli Sekretär

Päikeselükkumine
maailma - muumis.

Mõrgusõna: Kuntus.

31. okt. 1928.

Pärrens Lärkummin
marimo - vumms.



8201.10.18 D 321910

Lisuu.

- I Pissejuhatusesks leht 1-5
- II Radiaalkiirused leht 5-6
- III Päikese liikumine tähtede keskel.. leht 6-9
- IV Herscheli apeksi määramine leht 9-16
- V Besseli uurimused päikese
liikumise kohta... leht 16-18
- VI Argelanderi meetod apeksi.
määramiseks.. leht 18-25
- VII Airy apeksi määramise meetod
ja selle rakendamise tulemus. leht 25-34
- VIII Bessel-Koboldi apeksi määramise
meetod leht 34-40
- IX Päikese liikumise elementide arvu-
tamine radiaalkiirustest leht 40-47
- X Üldiseid märkeid eelpool esitatud
meetodite kohta
- .. §1. Liikumise sagedusfunktsioon. leht 47-50
- §2. Sagedusfunktsioon koordinaat-
distants, kus geomeetiline keskkohk
paigal seisab... leht 50-62.
- §3. Kahesugused eripõhimõttelised
meetodid leht 62-63.

- §4. Tähtide liikumise juhuslisest paigutusest leh 63-74.
- §5. Ruumilised meetodid leh 74-78.
- XI Tähtede liikumise juhuslisest paigutusest leh 78-85
- XII Eddingtoni teooria tähtede liikumiste paigutuse kohta leh 85-90.
- XIII Schwarzschildi ellipsoidhüüpotees.. leh 90-98.
- XIV Võrdlevaid märkeid Eddingtoni ja Schwarzschildi hüüpoteeside kohta leh 98-104.
- XV Bravais'i meetod leh 104-113
- XVI Üldiseid märkeid päikese liikumise ja selle arvutuse kohta. leh 113-123
- XVII Kokkuvõte leh 123-125.
- Märkusi leh 125-

I

Lissejuhatuseks.

Taevarõlvi õõ-päevane lükumine tekitas juba pümitüvsete rahvaste juures veende, et tähed on taevarõlvi külge kinnitatud. See vaade sai põhipanevamaks ideeks Ptolemäuse õpetuses, mille järele planeedid, neid on tema arvamise järele seitse, kuu ja päike kaasaarvatud, asusid ühenduses kindlalt liikuvate sfääridega, kuna kinnistähed pidid kinnitatud olema kõige kaugema n. n. sfäära obliqua ehk ka primum mobile külge.

Sphaera obliqua

Aastasadasid kestnud Ptolemäuse õpetusele rajatud ^{maa}ilmavaade pidi kaduma, kui ilmus Kopernik oma õpetusega, mille järele „maailma keskkohas“ pidi asetsema päike, mitte maa, nagu seda Ptolemäus õpetas. Luid ka Koperniku ^{maa}ilmasüsteemis jäid püsima nix planeetide, kui ka kinnistähedede lükumise sfäärid.

Ent sfääride hüpotees kadus ruttu. Juba Kepler pidas seda oma vümastel eluaastatel võimatuks, ja kui tuli Giordano Bruno, kartmatu uute ideede eest võitleja, pidi vanaaja ^{maa}ilmavaate viima-

ne jäänus kaduma uuema ja parema ees. Selle õpetuse järel, mille eest Giordano Bruno pidi oma elu tule-riidel lõpetama, puuduvad igasugused kinnistäh-
tede kui ka planeetide sfäärid. Planeedid liige-
vad kindlate seaduste järel oma teid mööda, il-
ma et neid juhiks mingisugune sfäär. Võim, mis
neid sunnib kinnipidama liikumise seadustest,
on üles^{maa}ilmne gravitatsiooni tung. Kinnistähed
ei asu mitte ühekaugusel päikesest, nagu see sfää-
ride õpetusest tingimata järgneks, vaid nad on
laialipaisatuna asetsemas r^{maa}uumis (kui vae-
delda sellaks küllalt väikest ruumiosa). Nad on sa-
masugused r^{maa}akehad, nagu meigi päike ja
nende vahel peab valitsema sama tung, mis kor-
raldab planeetide teid - raskustung.

Aegapidi, kuid järjekindlalt leidis uus^{maa} r^{maa}-
maraade tunnustamist. Ja mida enam jõuti
arusaamisele, et õõsiti säraavad tähed on sama-
sugused tulekerad, nagu päikeneegi, seda enam
veenduti arvamisest, et "kinnistähed" pole mitte
kinnistähed, vaid nad on omavahelises liikumi-
ses nagu kihulased parves. On ju loomulik,
kui oletada gravitatsiooni seaduse emiversaal-
set maksimust, et taevakehad üksteise suhtes
teatavalt teid mööda rändavad. See tähte-
de liikumine peaks avalduma nende sfääri-
liste koordinaatide muutumises, mida me vaatl-
luste abil peaks kindlaks tegema. Et aga mõot-
misriistade täpsus 16. aastaja lõpul veel niikau-

gele arenenud ei olnud, nagu seda tähtede liikumise kindlaksmääramiseks tarvilik, siis oli see suureks takistuseks uue ^{ma}ilmavaate võrdlejäseamiseks.

Kuid 1718 aastal otsustati tähtede liikumise küsimus uue ^{ma}ilmavaate kasuks. Halley leidis nimelt võrreldes tähtede koordinaate, mida ta vaatluste abil leidis, nende koordinaatidega, mis olid antud Kreeka astronoom Hipparchi poolt kokku seatud tähtede kataloogis, nelja heledama tähe juures asukoha muutumist. Olgugi, et Hipparchi kataloogi vead väga suured võisid olla, oli asukoha muutumine siiski suurem arvutatavast veast. Igatahes oli Halley kinnistähete liikumist tõestanud ja aluse pannud edaspidistele selle sihilistele uurimistele.

1760 aastal määras Tobias Mayer võrreldes oma vaatlusi pool aastasada varem tehtud Römeri vaatlustega, suure hulga tähtede omaliikumiskomponentideid. T. Mayeri andmeid võis juba võtta kui tõelisi tähtede liikumisi iseloomustavaid arve. Bieti oli T. Mayer esimene, kes tähtede liikumised määras, kuna Halley ainult liikumise olemasolu tõestas.

Et tähtede liikumises kindlaid seadusi leida, ei jätkunud T. Mayeri omaliikumise kataloogist, kuna tähtede arv selleks väike ja määramisvõime suur. See asjaolu andis Besselile põhjust täpsema omaliikumise kataloogi kokku seadmiseks. Võrreldes Bradley ja Piazzi poolt

antud tähtede koordinaate, säeti kokku omalü-
 kumiste tabel, oma täpsuse poolest küll mitte täies-
 ti ühtlane, kuid siiski usutavam, kui Mayeri
 oma. Besseli õpilane Argelander, jätkates oma õpe-
 taja tööd, esitas 1835 aastal Catalogus Abcensis,
 kus olid antud 350 tähe koordinaatide muu-
 tumised.

Uuemal ajal on hulk uurijaid tähtede oma-
 lükkumise alal tegutsenud ja selle töö tagajär-
 jena arvurikkad kataloogid teadusele kasuta-
 da antud. Nii esimene 1856 Mädleri poolt veel kind
Bradley koordinaatidest tuletatud tähtede oma-
 lükkumiste nimekirii. Tähtsamas tähtis on aga
Auveri töö, Neue Redaction der Bradleischen
Beobachtungen, kus tähtede omalükkumisekou-
 ponendid olid saavutatud võrdluse teel Brad-
 ley ja Greenwichi observatooriumi vaatlustest
 sellel epokil. Kahe kataloogi kokkuseadmise va-
 he on umbes 110 aastat, ja seega on Auveri
 poolt antud omalükkumise kataloogi andmed
 kõrge suure kaaluga.

Kõrge täielikkumaks tähtede omalükkumise
 kataloogiks tuleb aga L. Bossi, Preliminary Gene-
 ral Catalogue peida, mis oma suure tähtede
 arvu (küünib kuni 6188 täheni) kõrval ka äärmiselt
 täpsaid andmeid annab. Bossi kataloog on praegusel ajal kõrge täielikkum. Kuid tähtede oma-
 lükkumise uurimisala ei ole veel sellega piiratud.
 Mida täpsemalt tähtede koordinaadid teada, ja

mida rohkem aega kahe tähtede koordinaatide määramise vahel, seda täpsemaid andmeid saadakse. Uuemal ajal on tähtede koordinaatide kindlakamdamiseks päevapildistus palju aidanud. On alustatud töö suure tähtede kataloogi kokkuseadmiseks, millest võtavad osa kogu maailma tähtsamat tähetornid. Kui see töö kind lõpule viiakse, ja siis sedasama mõnekümne aasta pärast korratakse, võib määrata tähtede omaliikumisi veel palju täpsemalt, kui seda seni suudeti teha. Kuid ka see ei ole veel viimane saavutus. Mida enam aega edasi, seda täpsemaid andmeid saadakse.

II

Radiaalkiirused.

Esimesed katsed kinnistähete radiaalkiiruse, see on tähe liikumise kiirust vaatejoone suunas, milline tähtede liikumise hüpoteesist otsekohes järgnes, ulatuvad juba 1867 aastasse, kui Fluggron's ja Lecchi rakendasid tuntud Doppler-Fizeau printsiipi, püüdsid selgitada nimetatud kiirsumust. Kuid nende katsed lõppesid tagajärjeta, kuna riistade täpsus ja meetodite otstarbekohasus ei küümninud sel ajal veel nõutava kõrguseeni. Järgnevat 20 aastat ei toonud paljude tunnustatud autoriteetide püüetest hoolimata midagi uut

juurde, kuna vaatluste vrga oli vähemalt $\pm 20 \frac{\text{km}}{\text{sec}}$ ja ületas seega suuremal hulgal juhusel resultaadi. Alles 1890 aastal läks Keeleri korda Lick-observatooriumi 30" refraktoriga saavutada enam-vähem usutavaid resultate. Kuid Keeleri visuaalne meetod jäi tagaplaanile, kui H. C. Vogel ja F. Scheiner oma konstrueeritud spektrograafiga, kasutades palju objektiversemat fotograafilist meetodit, saavutasid resultate, mis seni kõrvaldatud mõõtmised oma täpsusega kaugelt ületas. Tänu fotograafilise meetodi täpsusele on praegusel ajal radiaal kiiruste määramine kuni $1 \frac{\text{km}}{\text{sec}}$ ja rogi veel enam täpsemalt võimalik. On võrreldud uus ala, mille kaudu tekivad need võimalused tungida suurte tähtede ^{meie} saladustesse.

III

Päikese liikumine tähtede keskel.

Kui 18. aastasaja algul vaade, et liikumine rga tähe lahutamatu omadus on, üldiselt astronoomide seas tunnustamist leidis, algas ka püüde liikumist valitsevaid seadusi avastada. Kuna kinnistähete liikumise kohta mingit kahtlust ei olnud, järeldati, et ka meie kõige lähem kinnistäht — päike, maailma ruumis liikuma peab. Päikese liikumise olemasolu tarvilikkust järel-

das F. de Lalande päikese rotatsioonist ja P. Prevost, kes ka esimesena püüdis päikese liikumise elemente leida, näitas et masside omarahelise külgetõmbe seadusest otseselt nii tähtede, kui ka päikese liikumine järgnema peab.

Et aga liikumine täiesti relatiivne nähtus on, siis oleneb tema suurus, siht ja üldse kõik tema elemendid ära koordinaadistruktst, milles me liikumist vaatleme. 18^{ja 19.} aastasajal tehtud töodes päikese liikumise üle ei ole antud mingit definitsiooni koordinaadistruktu kohta, milles liikumist vaadeldi. Sel ajal oli veel metafüüsiline hüpotees absoluutselt ruumist niivõrd rjal mimesel sisse kasvanud, et niisugusele koordinaatide definitsioonile üldse ei tulnud. Uuemal aja vaate järel on aga koordinaadistruktu definitsioon olulise tähtsusega ja seega võib päikese liikumisest rääkida ainult siis, kui meil on fikseeritud objekt, mille suhtes ta liigub.

Freenerest on koordinaadistruktu valik täiesti vaba, kuid sellest olenevad ära liikumise elemendid. Võib näiteks valida koordinaadistrukt, milles me tähtede liikumist vaatleme, nii et tema algus oleks päikeses, või asuks päikese suhtes paigal ning mille teljed oleks sihitud teatavate kindlate taevavõlvi täppide poole, millised on määratud kas kaugel olevate taevaobjektide kaudu (näit: spiraalalundid) või jälle mõnda muud viisi

defineeritud punktide kaudu (näit: maa ²türlemise kaudu ümber telje ja pöörlemise ümber pöörise). Selles koordinaadistikus seisaks pöörise paigal ja tähtede liikumine oleks täpselt see, mida me vaatleme. Dünnaamiliselt on aga tähtis koordinaadistik, mille algus asub kas kogu süsteemi masskeskkoahas või on selle suhtes paigal. Nüüsguguse koordinaadistikut valikul on hulka paremusi üldisel liikumise seaduse leidmisel, sest selles on 1.) Maxwell Newtoni gravitatsiooni seadus, 2.) Võiloota, et liikumine on kõige lihtsam, 3.) Seaduste avastamine kõige enam võimalik.

Kas Teie
süsteem?

Et aga tähtede kui ka pöörise liikumist selles praegu defineeritud koordinaadistikus leida, peame teadma tähtede massi. Et aga, välja arvatud mõned erijuhused, ^{need on} üldiselt tundmata, siis ollakse sunnitud tegema hüpoteesi tähtede masside kohta. Kõige lihtsam on, kui me oletame et tähtede massid on võrdsed. Nüüsgugusel korral muutub massikeskkoht lihtsalt identseks kõigide tähtede geomeetrilise keskkoahaga, mille koordinaadid on defineeritud valemitega:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum y \quad \bar{z} = \frac{1}{n} \sum z$$

Kui palju nüüsgugune hüpotees tõele vastab, tuleb selgal juhusel eriti otsustada.

Pöörise liikumine mistahes koordinaadistikus on määratud, kui teada on: 1.) Täpp sfää-

mil melle poole pöikse liigub, kusjuures sfäärilise tse-
nter on asetatud koordinaatide algusesse, e.) Kui
on antud liikumise kiirus. Nagu me eelpool sel-
gitasime, vaadeldakse pöikse liikumist kor-
dinaadistikus, milles tähtede masskeskkoht praigal
seisab. Nüüsguses koordinaadistikus nimetatakse
pöikse liikumise suuna äärmääraval täp-
pi apexiks ja teda antakse harilikult sfäärilise-
tes koordinaatides, mis on määratud maaker-
a tüklemisega ümber telje ja pöörlemisega ümber
pöikse. Pöikse liikumise kiirust antakse ha-
rilikult kilomeetrites, kuid tihti on tarvitusel
ka teised ühikud.

IV

Herscheli apexi määramine.

Tegelikele pöikse liikumise elementide ar-
vutamisele asus, nagu juba eelpool tähendatud,
P. Prevost, kes J. Mayeri omalüikumistest peüdis
tuletada pöikse apexi koordinaate. Samal
ajal P. Prevostiga tegutses selle küsimusega H. Her-
Schel, kelle uurimuse tagajärjed seda väärivad,
et nende juures lähemalt peatuda. 2)

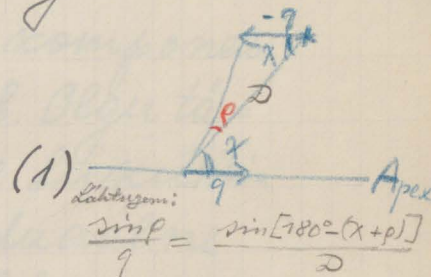
Et Herscheli mõttest arusaada, kujutame al-
guses ette, et tähed, väljaraamatud ainult pöikse,
üksteis suhtes praigal seisavad. Nüüsgusel kor-

ral peaksid tähed päikeselt, kui aiuukeselt liikuvalt kehalt vaadatuna, liikuma sfääri suurringemööda, mis kõik kahes vastasseisvas täpis- apexis ja antapexis löikuvad. Nimetame nii tekkinud näival tähtede liikumist parallaktiliseks liikumiseks — „motus parallacticus” — Siis on selge et viimane on funktsioon:

- 1.) Päikese liikumise kiirusest
- 2.) Tähtede kauguse^t päikesest
- 3.) Tähtede nurkkaugusest apexist või antapexist.

Kui tähistada q -ga päikese liikumise kiirust, p — parallaktilist liikumist, X -ga nurkkaugust antapexist, ja D -ga päikese kaugust tähest, siis on kergelt tuletatav seos:

$$p \cdot \sin 1'' = \frac{q}{D} \sin X$$

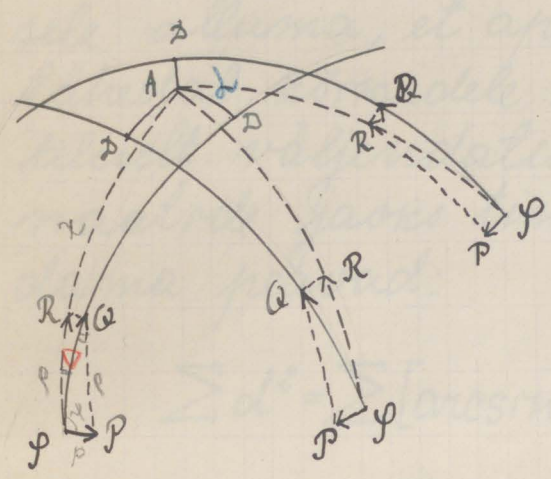


kuna p harilikult väga väike.

Selle valemi abil võib, kui meil on antud vähemalt kahe tähe kaugused D ja liikumised p , arvutada q ja X , see on päikese liikumise elemendid. Aluseks on siin arusaadavalt eeldus, et kõikidest tähtedest liikumas on ainult päike.

Tegelikult on aga asi hoopis teistsugune. Igal tähel on peale parallaktilise liikumise, mille põhjustajaks on päikese liikumine, veel oma individuaalne n. n. motus peculiaris. Selle tõttu ei

lõiku suurringid, mida nga tähe omaliikumine
 - motus proprius (see on motus parallacticus +
 motus peculiares) äramäärab, mitte ühes täpis,
 vaid nendel lõiketäppidel on ainult omaosus, kui
 oletada, et päike üldse liigub ja kui motus pecu-
 liaares on suuna kui suurususe poolest juhus-
 likult paigutatud, kuhjuda teatavas taevavöl-
 vi osas, kus asub apex ehk antapex.



Kujutagu kõrval toodud
 joonistus taevavölvi osa,
 kus asub antapex. Tähte-
 de poolt määratud suur-
 ringid ei lõrku ühes täpis,
 kuna tähtede individuaal-
 ne liikumine ka komponen-
 dina kaasa mõjub. Olgu tä-
 he P parallaktiline liikumi-
 ne PR ja individuaalne
 IP, siis on parallelogram-

mi seaduse põhjal PQ mõlema liikumise resul-
 tant, mida me vaatluste abil kindlaks võrme te-
 ha. Olgu antapexi asukohaks A (ta peab asu-
 ma PR, see on parallaktilise liikumise poolt mää-
 ratud suurringil). Kui d = AD kujutab PD-
 le risti olevat teist suurringi, siis võrme sfäärilis-
 est kolmnurgast PAD siinuslause põhjal kirjuta-
 da:

$$-\sin d = -\sin \chi \sin \Delta$$

kus χ tähendab nagu ennegi tähe nurkkaugust antapexsist ja σ nurka antapexssihhi ja omalükkumise vahel.

Vaatlustest on meil teada ainult tähtede omalükkumiste suurringid ja nende lõiketäpp, kuna apexi koordinaadid meile tundmatud on. Herschel määras nüüd, ja see paistab intuitiivselt täiesti õigustatud olevat, kui oletada tähtede omalükkumiste juhustloku rseloomu mille tõttu nad üldiselt peaksid vigade seadusele alluma, et apex peab asuma võimalikult lähedal kõrkidele suurringidele, ehk matemaatiliselt väljendatuna esitaks see apexi koordinaatide jaoks tingimuse, mida nad rahuldama peavad:

$$\sum d^2 = \sum [\arcsin(\sin \chi \sin \sigma)]^2 = \min.$$

Esitatud mõttekäik oleks üldjoontes see, mida Herschel põikese liikumise elementide arvutamiseks tarvitas.

Oma arvutustes 1783 aastal Herschel kasutas J. Mayeri poolt leitud 12 heledama tähe omalükkumist. Ülesande lahendas Herschel graafiliselt. Joonistades rga tähe omalükkumisele tema vastu suurt suurt ringi taeva gloobusele, määras ti apexi asukohaks täpp, mis kõrge enam ringide lõrkeläppidele vastaks. Arusaadavalt on resultaat väga ligikaudne ning kahtlane ja

sellepärast võeti Herscheli poolt määratud tõenäo-
sed apeksi koordinaadid:

$$\alpha = 260^{\circ}6 \quad \delta = 26^{\circ}3$$

vastu teatava umbusaldusega.

Palju enam tunnustamist leidis Herscheli
teine arvutuse resultaat:

$$\alpha = 245^{\circ}52'5 \quad \delta = 49^{\circ}38'$$

mida ta avaldas aastal 1806. Sealjuures olid
tal kasutada Maskelyne poolt määratud 36
tähe omaliikumised. Ei ole ülearune, kui ni-
metatud arvutuse juures lähemalt peatuda.

Olles tähtede omaliikumiste poolt määra-
tud suurringid kaardile ülesjoonistanud,
määras Herschel apeksi asukohtaks täpi, mis
kõige enam lõiketäppidele vastas. Sellele, nii lei-
tud apeksi väärtust kui esimest lähendust
tarvitades, määras ta paranduse järgmise võt-
te abil. Herschel valis välja kuus heledamat tüh-
te, milledele omaliikumised teada: Sirius,
Arktur, Kapella, Vega, Aldebaran ja Procyon,
ning arvutas iga tähe jaoks välja nurga δ' alu-
seks võttes leitud apeksi lähistäppi. Teades δ ava-
nes võimalus arvutada tähe individuaalsed liiku-
mist. Viimase väärtus on, nagu kergesti tuletada
võib:

$$p(\approx) p \sin \delta$$

$$\frac{p}{\sin(\delta - \delta')} = \frac{p}{\sin \delta}$$

Herschel määras nüüd uue apeksi koordinaadid
niisugustena, et nad avalduse

$$\sum \rho^2 \sin^2 \delta$$

muudaks minimaalseks. Nüü leidis ta eelpool
mainitud apeksi koordinaadid.

Olles arvutanud apeksi koordinaadid,
avanes võimalus ka valemi (2) põhjal päikese lii-
kumise kiirust välja arvata. Kuid selleks oli tar-
vis teada tähtede kaugusi D. Kuna Herscheli ae-
gu mõõtmisriistade täpsus selleks väike oli, et
tähtede parallakse mõõta, tuli teha hüpoteesi täh-
tede absoluutse heleduse kohta. Oletades kõrge
lihtsamat, see on tähtede võrdset absoluutset he-
ledust, Herschel määras, aluseks võttes Siiruse, kui
kõrge heledama kinnistähe kaugust Kapella,
Wega, Aldebaran ja Procyoni kaugust järjekor-
ras järgmistena:

1,20 1,25 1,40 1,40

Et apeksi asukoht määratud, siis võis leida
omalükkumise komponendina tähe rudividuaal-
set liikumist:

$$\rho \sin \delta$$

Kuna aga valemi (1) põhjal on maksed seos:

$$\rho = \frac{a}{D} \sin \chi$$

siis on nimetatud komponendi väärtus:

$$\frac{q}{D} \sin \chi \sin \Delta$$

Herschel nõudis nüüd et:

$$\sum \left\{ \frac{q}{D} \sin \chi \sin \Delta \right\}^2 = \min$$

ja leidis et:

$$\alpha = 245,5 \quad \delta = 40,6$$

$$q = 0,83$$

q on antud nurga mõõduks ja tähendab päikese motus propriust vaadatuduna Liiviuselt. Arusaadavalt ei või see arv kuigi täpne olla. Arvutades nimetatud suurust praegu teada olevate parallakside abil ümber kilomeetritesse, osutus et see on $q = 43 \frac{\text{km}}{\text{sec}}$, seega võrreldes uuemate määrämistega, millele järel võib lugeda keskmiselt $q = 20 \frac{\text{km}}{\text{sec}}$, üle poole suurem.

Mis peitub ültse Herscheli arvutuste täpsusesse, siis ei saa seda kuigi suureks pidada. Resultaati võib aga võtta siiski teatava lähendusena. Herscheli töö peatähtsuseks tuleb aga tema probleemi käsitlemise rõhustid pidada. Olles aluse pannud päikese liikumise määrämise probleemile, esitas ta oma arvutuste juures võtteid, mis-sugused hiljem palju põhjalikumad ja üldisemat

käsitlemist paljude tähtsate uurijate poolt, kes probleemi täpselt matemaatiliselt käsitledes tingimusvõrandid ülesseadsid, milledele peavad vastama pöikese liikumise elementid. See viimane asjaolu on eriti tähtis, kuna Herscheli graafiline meetod ainult piiratud tähtede hulga juures ligikaudseid väärtusi apeksi koordinaatidele leida võimaldab, ei sünnita analüütilisel teel lahendamise juures tähtede arv mingit kasu. Sealjuures on aga resultaat täpsem, sest suurem statistiline tagapõhi teeb resultaadi veod palju väiksemaks.

V

Besseli uurimused pöikese liikumise kohta.

Oma pöikese liikumise elementide arvutamiseks pani Herschel aluse sellesihilistele uurimustele. 1818. aastal ilmunud „Fundamenta Astronomiae“ esitas Bessel meetodi pöikese liikumise elementide arvutamiseks, mis oma teravmõttelisuse ja täpsuse käsitusega Herscheli oma kaugelt ületab, kuid mis siiski kuni 19 aastasaja lõpuni, mil Kobold uuesti Besseli reed üles võttis, lähelepanemata on jäänud.

Besseli meetodi roole seisab tähtede omaliikumiste pooluste arvutamises. Oletades jällegi, et kõikidest tähtedest on liikumas ainult pöike, peavad tähtede liikumise suvringrol loikuma kõik kahes

vastasolevas täpis, ehk nende poolused asuma ühel suurringil, mille poolusteks on apex ja antapex. Et aga igal tähel on peale parallaktilise liikumise veel omaliikumine, siis peaksid, kui arvata, et hüpotees tähtede omaliikumise juhuslikusest on õige, poolused moodustama teatava sooni sfääril, kus nad tihedalt paigutatud. Määrates need suurringi nii, et kaugus igast täpist oleks võimalikult väike, saaksime apeksi ja antapeksi kui selle ringi poolused.

Bessel, kasutades 41 tema enese poolt määratud tähe omaliikumist, leidis et poolused on pea ühtlaselt üle taeva laiali paisatud, nii et võimalik pole määrata parallaktilist ekvaatorit - nii kutsutakse suurringi, mille poolusteks on apex ja antapex. Sellepärast vaatas Bessel väga skeptiliselt päikese liikumise määramise peale ja arvas et päikese ehkki küll olemas, tema määramine aga peaaegu võimata. Besseli, kui suure autoriteedi vande jäi kaua püsima, nii et päikese liikumise uurimises väike seisak tuli.

Besseli apeksi määramise meetod jäi aga tükiks ajaks unustusesse, kuni Koboldalle täpse analüütilise väljenduse andis. Nüüd tuntakse seda meetodi Bessel-Koboldi meetodi nime all. Viimasest räägime edaspidi.

VI

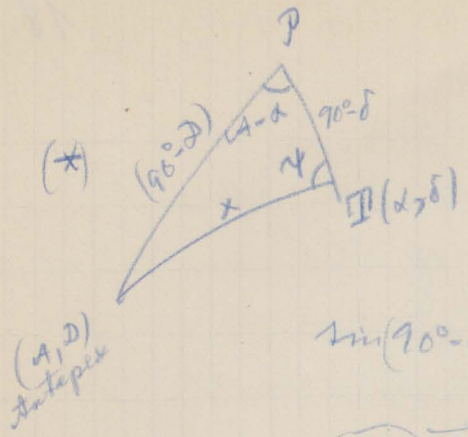
Argelanderi meetod apeksi määramiseks.

Peale Besseli negatiivseid tulemusi 1818 aastal jäi päikese liikumise uurimine soixu. Alles 1837 aastal, kui Imus Argelanderi töö: „Über die eigene Bewegung der Sonne“, pöördus astronoomide huvi jälle apeksi määramise probleemi poole. Argelanderi resultaat oli esimene, mida juba enamvähem tõenäosena võis võtta, kuna tema arvutused põhjenerad 380 Argelanderi enese poolt kokkuseatud Catalogus Boiensise tähe omaliikumisele. On huvitav äramärkida, et Argelanderi ja Herscheli resultaadid väga hästi ühte langevad.

Arvutuste juures tarvitas Argelander järkjärgulist lähenemise meetodit.³⁾

Olgu meil antud kaks tähte koordinaatidega α, δ ja α_1, δ_1 ning vastavad omaliikumise komponendid $\Delta\alpha, \Delta\delta, \Delta\alpha_1, \Delta\delta_1$, vastavad omaliikumispositsioonnurkad ψ ja ψ_1 . Tähenolagu veel Δs ja Δs_1 , omaliikumise suvust ning A ja D antapeksi otsetõusu ja käänet.

Moodustame kolmnurga: Poolus, antapeks, täht, mõlemate tähtede jaoks. Nendest sfäärilistest kolm-



$$\sin(90^\circ - D) \cos(A - \alpha) = \sin(90^\circ - \delta) \cos x - \sin x \cos(90^\circ - \delta) \cos \psi$$

$$\cos x = \cos(90^\circ - D) \cos(90^\circ - \delta) + \sin(90^\circ - D) \sin(90^\circ - \delta) \cos(A - \alpha)$$

$$\sin x = \frac{\sin(90^\circ - D) \sin(A - \alpha)}{\sin \psi}$$

$$\cos D \cos(A - \alpha) = \cos D [\sin D \sin \delta + \cos D \cos \delta \cos(A - \alpha)] - \frac{\cos D \sin(A - \alpha)}{\sin \psi} \sin \delta \cos \psi$$

$$\cos D \cos(A - \alpha) = \cos D \sin D \sin \delta + \cos^2 D \cos \delta \cos(A - \alpha) - \cos D \sin(A - \alpha) \sin \delta \cot \psi$$

(: cos D)

$$\cos(A - \alpha) = \cos \delta \tan D \sin \delta + \cos^2 \delta \cos(A - \alpha) - \sin(A - \alpha) \sin \delta \cot \psi$$

$$\sin^2 \delta \cos(A - \alpha) = \cos \delta \tan D \sin \delta - \sin(A - \alpha) \sin \delta \cot \psi$$

$$\sin \delta \cos(A - \alpha) = \cos \delta \tan D - \sin(A - \alpha) \cot \psi$$

g. e. d.

nurkadest võime kirjutada:

$$\begin{aligned} -\sin D \cos(A - \alpha) &= \cos D \tan D - \sin(A - \alpha) \cot \psi \\ -\sin D_1 \cos(A - \alpha_1) &= \cos D_1 \tan D - \sin(A - \alpha_1) \cot \psi_1 \end{aligned} \quad (2)$$

vt (*)

Kui me A ja D defineerime kui mõlema omalükkumissuurringi lõiketäpi koordinaate, siis võime neid võrrandisi lahendades leida A ja D kui otsitavad.

Et aga, nagu me eelpool nägime, tähtede omalükkumissuuringrad ei tarvitse ühes tükis lõikuda, siis, kuna üldiselt võib olla $\frac{1}{2}(n-1)n$ lõiketäppi, (kus n tähtede arv), peab apeksit või antapeksit defineerima kui täppi, mis lõiketäppidele mõige enam vastaks.

Olgu A_0 ja D_0 niisuguse täpi koordinaadid, mida esimesel lähendusel võiks ^{ant}apeksiks lugeda. (näit: leitud Herscheli meetodi abil). Tõelise ant-
apeksi koordinaadid olgu antud valemiga:

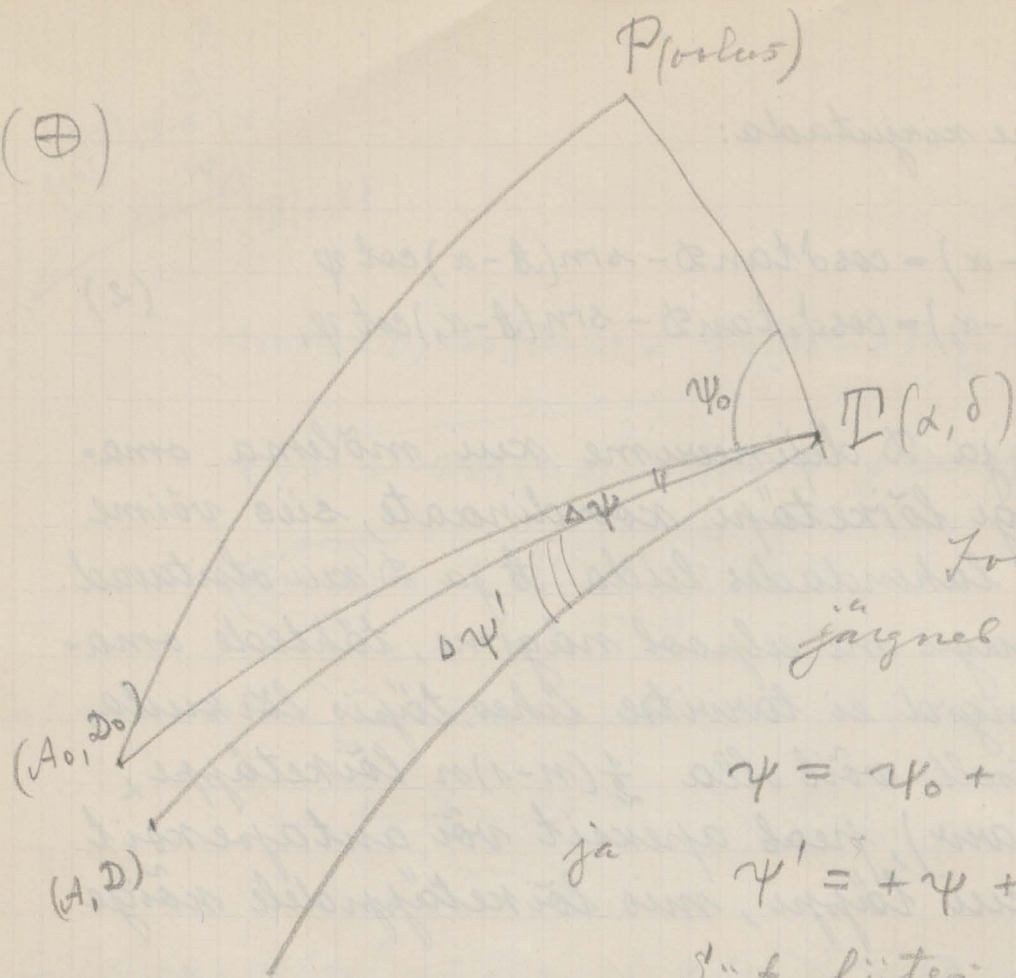
$$A = A_0 + \Delta A \quad D = D_0 + \Delta D$$

kus ΔA ja ΔD on parandused, millede leidmises õieti Argelanderi meetodi mõte seisabki.

Tähendagu ψ_0 tõe omalükkumise lähendus-
antapeksi ja $\psi = \psi_0 + \Delta \psi$ tõelise antapeksi poole si-
hitud komponentide positsioonnurki, ning vaa-
delatud omalükkumise pos. nurk olgu antud va-
lemiga $\psi' = \psi + \Delta \psi'$

verte!
(⊕)

(⊕)



Fronisist-
järgnel:

$$\psi = \psi_0 + \Delta\psi$$

ja

$$\psi' = \psi + \Delta\psi'$$

Süt lütes saame

$$\psi' + \psi = \psi + \psi_0 + \Delta\psi + \Delta\psi'$$

ehk

$$\psi' = \psi_0 + \Delta\psi + \Delta\psi'$$

ehk

$$\boxed{\psi' - \psi_0 = \Delta\psi + \Delta\psi'}$$

Rakendame nüüd valemit (2) juhistele:

$$\text{I } A = A_0 \quad D = D_0 \quad \psi = \psi_0$$

$$\text{II } A_1 = A_0 + \Delta A \quad D_1 = D_0 + \Delta D \quad \psi_1 = \psi_0 + \Delta \psi$$

- siis saame:

$$\sin d \cos(A_0 - \alpha) = \cos d \tan D_0 - \sin(A_0 - \alpha) \cot \psi_0$$

$$\sin d \cos(A_0 + \Delta A - \alpha) = \cos d \tan(D_0 + \Delta D) - \sin(A_0 + \Delta A - \alpha) \cot(\psi_0 + \Delta \psi)$$

Lahutades mõlemad võrrandid üksteisest:

$$\begin{aligned} -\sin d [\cos(A_0 + \Delta A - \alpha) - \cos(A_0 - \alpha)] &= \cos d [\tan(D_0 + \Delta D) - \tan D_0] - \\ & - [\sin(A_0 + \Delta A - \alpha) \cot(\psi_0 + \Delta \psi) - \sin(A_0 - \alpha) \cot \psi_0] \end{aligned} \quad (4)$$

Tähepannes differentiaalarvutuse lauseid, võrme kirjutada, kui ΔA ning ΔD väikesed on:

$$\cos(A_0 + \Delta A - \alpha) - \cos(A_0 - \alpha) = -\sin(A_0 - \alpha) \Delta A$$

$$\tan(D_0 + \Delta D) - \tan D_0 = \left[-\frac{\Delta D}{\cos^2 D_0} \right. \quad \left. \right]$$

$$-\sin(A_0 + \Delta A - \alpha) \cot(\psi_0 + \Delta \psi) - \sin(A_0 - \alpha) \cot \psi_0 =$$

$$= -\frac{\sin(A_0 - \alpha)}{\sin^2 \psi_0} \Delta \psi + \cos(A_0 - \alpha) \cot \psi_0 \Delta A$$

Rakendades viimast valemühikku, võrme võrrandi (4) kirjutada kujus:

$$\begin{aligned} \frac{-\sin(A_0 - \alpha)}{\sin^2 \psi_0} \Delta \psi &= -\frac{\cos d}{\cos^2 D_0} \Delta D + \frac{1}{\sin \psi_0} \left\{ \cos(A_0 - \alpha) \cos \psi_0 - \right. \\ & \left. - \sin(A_0 - \alpha) \sin \psi_0 \sin d \right\} \Delta A. \end{aligned}$$

Kui kolmnurgas: antapers, poolus, täht tähistada mur-
ka antapersi juures ω_0 -ga ja tähe kaugust antapersi-
sist χ_0 -ga, siis on maksavad seosed:

vt. (*)!

$$\begin{aligned} \cos \omega_0 &= \cos(A_0 - \alpha) \cos \psi_0 - \sin(A_0 - \alpha) \sin \psi_0 \sin D \\ -\sin \omega_0 &= \frac{\sin \psi_0 \cos D}{\cos D_0} \end{aligned}$$

V
mängid?

$$\sin \chi_0 = \left[- \frac{\sin(A_0 - \alpha) \cos D_0}{\sin \psi_0} \right]$$

(6)

[+

Korrutades võrrandi (5) mõlemad pooli $\sin \psi_0 \sin D_0$
-ga ja kasutades valemvõtma (6), saame seose:

$$-\sin \chi_0 \Delta \psi = \sin^2 \psi_0 \Delta D - \cos^2 \psi_0 \cos D_0 \Delta A$$

ja kui sellesse võrrandisse asetada identsus:

$$(\Delta \psi + \Delta \psi') \sin \chi_0 = (\psi' - \psi_0) \sin \chi_0$$

siis saame lõpuks valemi:

$$-\sin \chi_0 \Delta \psi' = (\psi' - \psi_0) \sin \chi_0 + \cos \omega_0 \cos D_0 \Delta A - \sin \omega_0 \sin D \quad (7)$$

Oletusel, kui kõikidest tähtedest on liigemas
ainult päike, siis määrates valemiga (3) saaksime-
gi apersi koordinaadid. Pealjuures osutub arusa-
davalt ΔA ning ΔD nullina ja selletõttu, nagu (7)
järgneb:

$$-\sin \chi_0 \Delta \psi' = 0$$

Et aga tegelikult tähtede omalükumisseuvingrol ei lõrku ühes täpis, siis on mõeldavad ΔA ja ΔD ka nullist erinevate suurustena. Et kõrge tõenäolisemat apeksi saada, peab aga $\sin \chi_0 \Delta \psi'$ vga tõehe juures võimalikult nullile lähedalseisvaks tehtud olema, ehk täpsemalt väljendatuna: Me peame ΔA ja ΔD valima niisugustena, et nad avalduse:

$$\Sigma [\sin \chi_0 \Delta \psi']^2$$

muudaks minimaalseks.

Seda tingimust täidavad niisugused ΔA ja ΔD , mis on võrrandsüsteemi

$$\frac{\partial \Sigma[\]}{\partial \Delta A} = 0 \quad \frac{\partial \Sigma[\]}{\partial \Delta D} = 0$$

lahendused.

ehk rakendades valemit (7)

#

$$-\Delta A \Sigma \cos^2 \omega_0 \cos^2 D_0 + \Delta D \Sigma \cos \omega_0 \sin \omega_0 = \Sigma (\psi' - \psi_0) \cos \omega_0 \cos D_0 \sin \chi_0$$

$$-\Delta A \Sigma \cos \omega_0 \sin \omega_0 \cos D_0 + \Delta D \Sigma \sin^2 \omega_0 = \Sigma (\psi' - \psi_0) \sin \omega_0 \sin \chi_0$$

Need on n. n. Argelanderi tingimusvõrrandid, millede abil võib parandada apeksi lähisväärtust.

Argelander rakendades neid võrrandeid oma arvutustes leidis 380 Catalogue Aboensis tähe omalükumise põhjal päikese apeksi koordinaatide jaoks väärtused:

$$\alpha = 259^{\circ},5 \quad \delta = 32^{\circ},5$$

Et tulemustes kindel olla, jagas Argelander tähed veel nende omaliikumise suuruse järele rühmadesse ja arvutas iga rühma jaoks eraldi apeksi koordinaadid. Sealjuures selgus et resultaadid on väga heas kooskõlas üksteisega. Probleemi täpne matemaatiline käsitlemine ja suur tähtede arv, millede omaliikumised arvutuste juures tarvitatud, tõendasid et vastandaks Besseli võidetele, päikese liikumise arvutamise ^{on} süüski võimalik.

Argelanderi meetod leidis veel hulga teiste uurijate poolt rakendamist. Nii leidsid:

G. Struve*) tarvitas oma arvutuste juures 400 Tartus määratud tähe omaliikumised ^{teot}:

$$\alpha = 261^{\circ},4 \quad \delta = 37^{\circ},6$$

Galloway*) 81 lõuna taeva tähe omaliikumise põhjal:

$$\alpha = 260^{\circ},0 \quad \delta = 34^{\circ},4.$$

Mädler*) 2163 Bradley tähe põhjal:

$$\alpha = 261^{\circ},6 \quad \delta = 39^{\circ},9.$$

Võimast resultaati tuleb kahet elmisest kõige paremaks pidada, kuna tema statistiline tugi hästi suur.

Olguigi et mainimata ei saa jätta üksikute arvutuste väga head kooskõla, tekisid siiski kahtlused, ja seda just meetoodilisest küljest, kuna peamiseks liikumise arvamamise võimalusse enam-vähem kõik astronoomid veendunud olid.

Need vastuväited on kokkuvõtlikult esitatud Arny poolt töös: "On the Movement of the Solar System in Space". Ta ütles:

1.) Argelanderi meetod nõuab et ΔA ja ΔD , see on ^{ant}apeksi koordinaatide parandused, peavad väikesed olema. Et aga Herscheli aeg apeksi koordinaadid väga ligikaudu teada olid, siis ei või me öelda, et koordinaatide parandused tõesti väikesed on ja seega ei tea me ka, kas Argelanderi protsess üldse koonduv on, ehk teisiti, kas parandused, mida me saame, resultaati veel halvemaks ei tee.

2.) Argelanderi meetod nõuab ka et $\Delta \psi$, see on nurk tõelise antapeksi ja tähe omaliikumise suunade vahel, peab väike olema. Samuti nõuab Argelander et $\Delta \psi$, see on nurk tõelise ja lähendus-antapeksi suunade vahel, väike oleks. Need tingimused ei ole aga tegelikult täidatud. Asi on isäranis viimasega halb, kui täht asub apeksi või antapeksi lähedal.

3.) Võib olla tähti, mille omaliikumise suund väga lähedane vastasliikumisele sellele suunale on, mis lähendusapexist või antapexist järgneks. Sellest

aga selgub, et väike lähendusapexi muutus tähe
 individuaalse liikumise nurka võib muuta $+179^\circ$
 kuni -179° -ni.

VII

Airy apexi määramise meetod
 ja selle rakendamise tulemused.

Selpool käsitletud vastuväited Argelanderi mee-
 todile olid küllaldaseks põhjuseks selleks et sun-
 dida Airyt väljatöötama meetodi, milles esitatud
 raskused kõrvaldatud. Sealjuures lähtus Airy hoo-
 pis teistest põhimõtetest, kui seda Herschel, Bessel
 ja Argelander tegid.

Olgu meil antud mõni täht, siis loeme teda
 järjekorras harutuses paigalseisvaks ja liikuvaks loe-
 me päikest. ^{4.)}

Olgu peale selle veel x, y, z ortogonaalsete
 koordinaatide teljed, kusjuures x telg on sihitud
 Υ täpi poole, y telg täpi suunas, mille koordi-
 naadid on $\alpha = 90^\circ$ $\delta = 0^\circ$ ja z telje suht ühtu-
 maailma telje suunaga. Tähistades päikese
 kaugust tähest r -ga, võime kirjutada seosed:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \delta \cos \alpha \\ y &= r \cos \delta \sin \alpha \\ z &= r \sin \delta \end{aligned} \quad (9)$$

kus α, δ, r on siis tähe polaarkoordinaadid.
 Küllalt väikese aja jooksul võime päikese liikumise
 komponente vaadelda kui differentiaale ja sellel-
 tu kirjutada:

$$\Delta X = \frac{\partial x}{\partial r} \Delta r + \frac{\partial x}{r \cos \delta \cdot \partial \alpha} \cdot r \cos \delta \Delta \alpha + \frac{\partial x}{r \sin \delta} r \Delta \delta \quad (\text{etc.})$$

$$\Delta Y = \frac{\partial y}{\partial r} \Delta r + \frac{\partial y}{r \cos \delta \cdot \partial \alpha} r \cos \delta \Delta \alpha + \frac{\partial y}{r \sin \delta} r \Delta \delta \quad (10)$$

$$\Delta Z = \frac{\partial z}{\partial r} \Delta r + \frac{\partial z}{r \cos \delta \cdot \partial \alpha} r \cos \delta \Delta \alpha + \frac{\partial z}{r \sin \delta} r \Delta \delta$$

Valime nüüd uue koordinaadistiku, kuid
 jättes alguse endiseks. Telgede ξ, ζ, η siht olgu mää-
 ratud tähe raadiusvektori, deklinatsiooniringi ja
 paralleli puutujate kaudu. Tähistades liikumise
 komponente üksikute telgedel $\Delta \xi, \Delta \zeta, \Delta \eta$, võime kir-
 jutada seosed:

$$\begin{aligned} \Delta \xi &= \Delta r \\ \Delta \zeta &= \Delta \delta \\ \Delta \eta &= \cos \delta \cdot \Delta \alpha. \end{aligned} \quad (11)$$

Asetades valemisse (10) väärtused (11) ning rakenda-
 des osatuletiste arvutamiseks (9), leiame:

$$\begin{aligned} \Delta X &= \cos \delta \cos \alpha \Delta \xi - r \sin \alpha \Delta \eta - r \sin \delta \cos \alpha \Delta \zeta \\ \Delta Y &= \cos \delta \sin \alpha \Delta \xi + r \cos \alpha \Delta \eta - r \sin \delta \sin \alpha \Delta \zeta \\ \Delta Z &= r \sin \delta \Delta \xi + r \cos \delta \Delta \zeta \end{aligned} \quad (12)$$

Võrrandsüsteemist (12) võrme tuletada süsteemi:

$$\begin{aligned}\Delta\xi &= \cos\delta\cos\alpha\Delta X + \cos\delta\sin\alpha\Delta Y + \sin\delta\Delta Z \\ \eta\Delta\xi &= -\sin\delta\cos\alpha\Delta X - \sin\delta\sin\alpha\Delta Y + \cos\delta\Delta Z \\ \eta\Delta\eta &= -\sin\alpha\Delta X + \cos\alpha\Delta Y.\end{aligned}\quad (13)$$

Üldiselt on maksim transformatsioon skeem:

	$\Delta\xi$	$\eta\Delta\eta$	$\eta\Delta\xi$	(Sic!)
ΔX	$\cos\delta\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\sin\delta\cos\alpha$	(14)
ΔY	$\cos\delta\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-\sin\delta\sin\alpha$	
ΔZ	$\sin\delta$	0	$\cos\delta$	

Liinamaani oletasime, et täht paigal seisab. Seda võrme ainult ühe tähe juures teha, ehk ka kõi-
kide tähtede juures, kui nad üksteise suhtes ei lii-
gu. Et aga tõeliselt tähed väga mitmesugustes suu-
nades oma koordinaate muudavad, siis peame
pääkese liikumist natukene teistmoodi definee-
rma.

Oletades et tähtede individuaalsed liikumi-
sed kannavad tõiesti juhusliku laadi, määras
siny kõrge tõenäolisemaks pääkese liikumise kompo-
nentideks niisugused $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$, mis avaldused:

$$F_1 = \sum \{ \sin \alpha \Delta X - \cos \alpha \Delta Y - r \Delta \eta \}^2$$

$$F_2 = \sum \{ \overset{\sin \delta}{\cos \delta} \cos \alpha \Delta X + \sin \delta \sin \alpha \Delta Y - \overset{\cos \delta}{\sin \delta} \Delta Z - r \Delta \zeta \}^2 \quad (15)$$

muudaks minimaalseks.

Leda tingimust täidavad F_1 juures misu-
gused $\Delta X, \Delta Y$, mis on süsteemi:

$$\Delta X \sum \sin^2 \alpha - \Delta Y \sum \sin \alpha \cos \alpha - \sum r \sin \alpha \Delta \eta \quad (16^a)$$

$$- \Delta X \sum \sin \alpha \cos \alpha + \Delta Y \sum \cos^2 \alpha = - \sum r \cos \alpha \Delta \eta$$

lahendusteks.

Analoogiliselt F_2 juures:

$$\Delta X \sum \sin^2 \delta \cos^2 \alpha + \Delta Y \sum \sin^2 \delta \sin \alpha \cos \alpha - \Delta Z \sum \sin \delta \cos \delta \cos \alpha =$$

$$= \sum r \sin \delta \cos \alpha \Delta \zeta \quad (16^b)$$

$$\Delta X \sum \sin^2 \delta \sin \alpha \cos \alpha + \Delta Y \sum \sin^2 \delta \sin^2 \alpha - \Delta Z \sum \sin \delta \cos \delta \sin \alpha =$$

$$= \sum r \sin \delta \sin \alpha \Delta \zeta$$

$$- \Delta X \sum \sin \delta \cos \delta \cos \alpha - \Delta Y \sum \sin \delta \cos \delta \sin \alpha + \Delta Z \sum \cos^2 \delta =$$

$$= \sum r \cos \delta \Delta \zeta$$

Nendest süsteemidest võib arvutada pöikese liikumise komponendid, millede abil siis, tarvitades lihtsaid valemeid:

$$\tan \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \tan \delta = \frac{\Delta z}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \tag{17}$$

$$q^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$$

arvutada pöikese liikumise elemendid. Harilikult aga tarvitatakse võrrandsüsteemi, mis saadakse (16^a) ja (16^b) liitmisest:

$$\begin{aligned} \Delta x \sum \{ \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \sin^2 \delta \} - \Delta y \sum \sin \alpha \cos \alpha \cos^2 \delta - \Delta z \sum \cos \alpha \cos \delta \sin \delta = \\ = - \sum r \sin \alpha \Delta \eta + \sum r \cos \alpha \sin \delta \Delta \zeta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} - \Delta x \sum \sin \alpha \cos \alpha \cos^2 \delta + \Delta y \sum \{ \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \delta \} - \Delta z \sum \sin \alpha \sin \delta \cos \delta = \\ = - \sum r \cos \alpha \Delta \eta + \sum r \sin \alpha \cos \delta \Delta \zeta \end{aligned} \tag{16^c}$$

$$\begin{aligned} - \Delta x \sum \cos \alpha \sin \delta \cos \delta - \Delta y \sum \sin \alpha \cos \delta \sin \delta + \Delta z \sum \cos^2 \delta = \\ = - \sum r \cos \delta \Delta \zeta \end{aligned}$$

Tegelikult arvutamiseks tarvitaminevatele võrranditele lisas siin veel teatavad parandusliikmed junde, mis peavad kompenseerima vaatlusvigu. Siin oletas nimelt, et omaliikumiseviga võib tingitud olla:

- 1.) Süstemaatilistest vaatlusvigadest
- 2.) Juhuslistest vigadest.

Süstemaatiliste vigade kohta arvas Airy, et siin esijoonel võiks kõne alla tulla viga prätssiooni-konstandi ebatäpsusest tundmisest. Ja kuna prätssiooni mõju otsetõususele on antud valemiga:

$$m + n \sin \alpha \tan \delta$$

siis võib tekkida viga tähe liikumisel otsetõusus: ⁵⁾

$$m' + n' \sin \alpha \tan \delta$$

ja sellest järgneb et võimalik $\Delta \eta$ viga on:

$$\Delta \eta' = m' \cos \delta + n' \sin \alpha \sec \delta$$

Prätssiooni mõju käändesse on antud valemiga:

$$- n \cos \alpha$$

ja seega $\Delta \zeta$ viga:

$$\Delta \zeta' = - n' \cos \alpha$$

Tehes merediaanvaatlusi võib tähe seenitkõrguse mõõtmises teha viga, mis on põhjustatud täiesti riistavigadest. Airy toob näitena Greenwichi merediaanvaatagi, millega Bradley oma mõõtmisi tegi, ja mis natuke aega peale Bradley surma vngasena osutus. Ja

kuna tähtede omalüikumisi just Bradley tähtede võrdlemise teel saadakse, siis on viga deklinatsioonis mõõdapääsemata. Oletades, et vaatluse süstemaatiline viga on konstant, asetatakse siin:

$$\Delta \zeta' = q - n' \cos \alpha$$

Peale selle võib süstemaatilise viga põhjuseks olla omalüikumiskomponentide ruumilised kõrvalekaldumised. Eeldades et nende võimalus rgas suunas võrdne, asetatakse siin:

$$\Delta \zeta' = m \Delta \zeta \quad \text{ja} \quad \Delta \eta' = m \Delta \eta$$

Peale süstemaatiliste ruumiliste vigade võib rga tähe juures veel individuaalne viga ette tulla, mida aga arvestada ei saa, kuna selle viga seadus tundmata.

Arvutustes siin rakendatakse kahte erijuhtumit, ja nimelt

1.) Et ruumilisi vigu ei ole. Ühtsugusel korral asetati tingimusvõrranditesse:

$$\Delta \eta = \Delta_1 \eta + \Delta \eta' = \Delta_1 \eta + m' \cos \delta + n' \sin \alpha \sin \delta$$

$$\Delta \zeta = \Delta_1 \zeta + \Delta \zeta' = \Delta_1 \zeta + q - n' \cos \alpha$$

ja arvutati siis päikese liikumise komponendid.

2.) Oletati et sfäärilised kõrvalekaldumised ei eksisteeru ja arvestati ainult ruumiliste vigade

dega. Tingimusvõrranditesse asetati siis:

$$\Delta\eta = \Delta_1\eta + \Delta\eta' = \Delta_1\eta + m\Delta_1\eta$$

$$\Delta\zeta = \Delta_1\zeta + \Delta\zeta' = \Delta_1\zeta + m\Delta_1\zeta$$

Arvutades mõlematel juhustel apeksi koordi-
naadid ja võrreldes resultate, on võimalus
hinnata vaatlusvigade mõju.

Kagu tingimusvõrranditest näha, on tar-
vis sellers, et arvutada $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$ teada ka rga
tähe kaugust päikesest. Et aga tähtede kaugus-
te mõõtmise iseäranis tänu aeg ülepaasema-
teid raskusi sünnitas, siis oldi summitud
tegeme hüpoteese tähtede absoluutse heleduse ja
omalükkumise suuruse kohta.

Oletades, et võrdsete heledustega tähed asu-
vad enamvähem ühel kaugusel, jagas tänu kõik
tähed, mida ta arvutuste juures tarvitas, nende
heleduse järel rühmadesse, ning moodustas rga
rühma jaoks võrrandi (18). Nüüsi sai ta nü
mitu võrrandiüsteemi, mitu rühma tal oli. Li-
tas kõik võrrandid peale selle, kui rgaüks oli
korrutatud vastava rühma ühise kaugusega, sai
tänu uue süsteemi, millist lahendades määrati
tänu apeksi koordinaadid.

Jagades tähed nende omalükkumiste suur-
se järel rühmadesse ja oletades et võrdsete he-
lükumistega tähed asuvad päikesest ühe kaugusel,
tormetati eelmisele juhusele analoogiliselt.

Võrreldes nii saavutatud resultate, võis otsusta-
da tõendolise apeksi koordinaatide üle.

Airy arvutuste resultaat oli:

$$\alpha = 261^{\circ},5 \quad \delta = 24^{\circ},4$$

$$q = 1,91.$$

Airy meetod on eriti kohane päikese liikumise elementide arvutamiseks, sellepärast on ta hiljem palju rakendamist leidnud. Nii määrasid Airy meetodi alusel:

Kapteen: $\alpha = 245^{\circ},0 \quad \delta = 28^{\circ},5$

L. Boss 5413 tähe põhjal, millede omalükkumise suurus oli vähem või võrdne 0,2 aastat:

$$\alpha = 270^{\circ},52 \quad \delta = 34^{\circ},28$$

ja 559 tähe põhjal, millede omalükkumise oli suurem kui eelpool mainitud:

$$\alpha = 272^{\circ},03 \quad \delta = 34^{\circ},53$$

VIII

Bessel-Koboldi apeksi määramise meetod.

Seni unustusesse jäänud Besseli meetod leidis 1890 aastal Koboldi poolt rakendamist, kes talle ka matemaatiliselt kenoma kujutadis. ⁶⁾

Besseli rööpe seisib niisuguse suurvringi määramises, mille kauguste ruutude summa rga tähe omalükkumise poolusest oleks minimaalne. Me vaatame, kuidas on antud tähe omalükkumise pooluse kaugus parallaktilisest ekvaatorist.



Olgu kõrvaloleval joonistusel TRP tähe omalükkumise suurvring. Täht ise asugu täpis T ning poolus täpis P. Peale selle olgu veel ϵQ parallaktiline ekvaator, mille pooluseks ant-
apex A. Tähistame, nagu ennegi kau-
gust tähest kuni

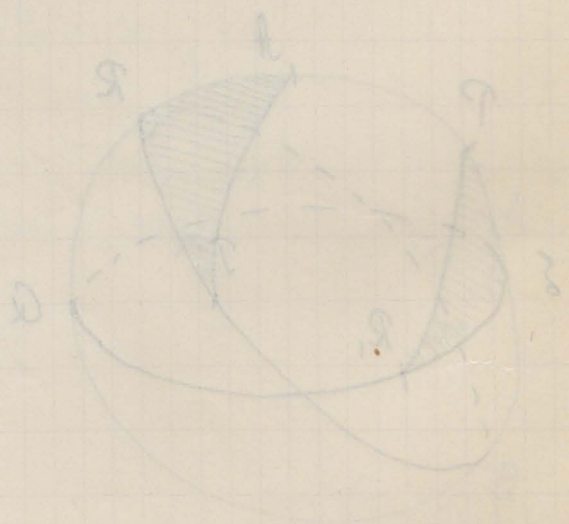
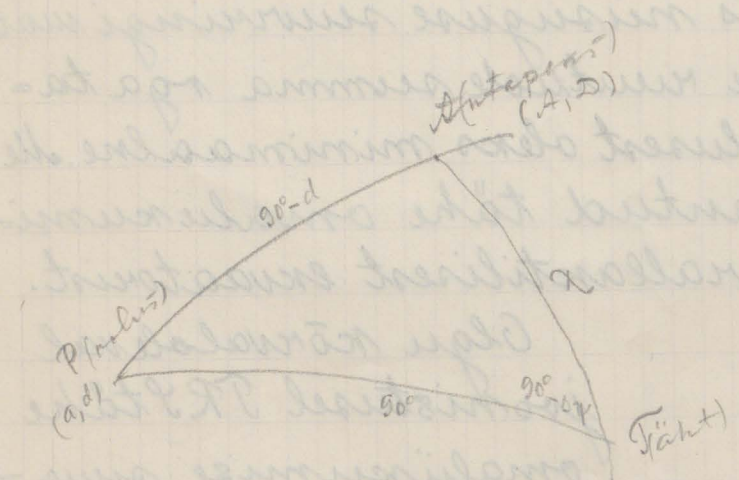
VIII

Bessel-Tabellen opus määrittäminen
metod.

Joni muutuksen jännitys Besselin menetelmästä
1880 arkal tabellin avulla lasketaan
kustannus ja matemaattisesti lasketaan
osa 9)

Besselin menetelmä on erittäin tarkka
laskemalla kunkin kappaleen
kokoalueen pinta-ala ja
nostane, kunkin on arvioitava
se kappaleen pinta-ala

(*)



omaleikkiminen on
ringiä tähtä on arvioitava
tähtä 2 on arvioitava
tähtä 3 on arvioitava
- on arvioitava 3 on arvioitava
laskemalla kunkin kappaleen
mille pinta-ala on
opetus A. laskemalla
kappaleen pinta-ala
yhtä tähtä kumi

antapexsini χ -ga ja nurka $RTA \Delta\psi$ -ga. Olgu PE risti εQ -ga, siis on $PE = d$ otsitav suurus. Me möö-
dame täpist ε εQ -d mööda kaare $\varepsilon R_1 = RT$ ning
saame punkti R_1 mida ühendame P -ga. Saame χ
ning nurga $PR_1\varepsilon = \Delta\psi$. Tarvitades kolmnurga
 $PE R_1$ kohta siinuslauset, leiamegi otsitava seose:

$$\sin d = \sin \chi \sin \Delta\psi$$

Bessel nõudis, et A ja D , see on antapexi koor-
dinaadid oleks misugused, et nad avalduse:

$$\sum \sin^2 d = \sum \sin^2 \chi \sin^2 \Delta\psi \quad (18)$$

muudaks minimaalseks.

Kolmnurgast APT^* võrme kirjutada:

$$-\sin \chi \sin \Delta\psi = \cos D \cos A \cos d \cos a + \cos D \sin A \cos d \sin a + \sin D \sin d \quad (19)$$

kus a ja d tähendavad omalükkumise suur-
ringi pooluse koordinaate.

Tähistades:

$$\begin{aligned} X &= \cos D \cos A & Y &= \cos D \sin A & Z &= \sin D \\ x &= \cos d \cos a & y &= \cos d \sin a & z &= \sin d \end{aligned} \quad (20)$$

võrme valemite (18) ja (19) põhjal kirjutada:

(1) Aga d tähendus ka: $PE = d$?

$$F = X^2 \sum x^2 + 2XY \sum xy + Y^2 \sum y^2 + 2YZ \sum yz + 2XZ \sum xz + Z^2 \sum z^2 = \min \quad (21)$$

Minimumi tingimus aga nõuab et:

$$\frac{\partial F}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial A} + \frac{\partial F}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial A} + \frac{\partial F}{\partial Z} \frac{\partial Z}{\partial A} = 0 \quad (21)$$

$$\frac{\partial F}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial \Phi} + \frac{\partial F}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial \Phi} + \frac{\partial F}{\partial Z} \frac{\partial Z}{\partial \Phi} = 0$$

sest X, Y ja Z on A ja Φ funktsioonid.

Et $\frac{\partial F}{\partial X}$ eelduse järel ei ole null, siis võrre te-
maga jagades saavutada võrrandid:

$$\frac{\partial X}{\partial A} + \left(\frac{\frac{\partial F}{\partial Y}}{\frac{\partial F}{\partial X}} \right) \frac{\partial Y}{\partial A} + \left(\frac{\frac{\partial F}{\partial Z}}{\frac{\partial F}{\partial X}} \right) \frac{\partial Z}{\partial A} = 0$$

$$\frac{\partial X}{\partial \Phi} + \left(\frac{\frac{\partial F}{\partial Y}}{\frac{\partial F}{\partial X}} \right) \frac{\partial Y}{\partial \Phi} + \left(\frac{\frac{\partial F}{\partial Z}}{\frac{\partial F}{\partial X}} \right) \frac{\partial Z}{\partial \Phi} = 0$$

Vaadeldes selles süsteemis suuruste:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial Y} \\ \frac{\partial F}{\partial X} \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial Z} \\ \frac{\partial F}{\partial X} \end{pmatrix}$$

kuu tundmatute peale, võime leida mõlemad. Me saame:

$$\frac{\partial F}{\partial y} : \frac{\partial F}{\partial x} =$$

$$= \left\{ \frac{\partial z}{\partial A} \cdot \frac{\partial x}{\partial \phi} - \frac{\partial z}{\partial \phi} \frac{\partial x}{\partial A} \right\} : \left\{ \frac{\partial y}{\partial A} \frac{\partial z}{\partial \phi} - \frac{\partial z}{\partial A} \frac{\partial y}{\partial \phi} \right\}$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} : \frac{\partial F}{\partial x} =$$

$$= \left\{ \frac{\partial x}{\partial A} \frac{\partial y}{\partial \phi} - \frac{\partial y}{\partial A} \frac{\partial x}{\partial \phi} \right\} : \left\{ \frac{\partial y}{\partial A} \frac{\partial z}{\partial \phi} - \frac{\partial z}{\partial A} \frac{\partial y}{\partial \phi} \right\}$$

ehk siit järgneb:

$$\frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial y} : \frac{\partial F}{\partial z} =$$

$$= \left\{ \frac{\partial y}{\partial A} \frac{\partial z}{\partial \phi} - \frac{\partial z}{\partial A} \frac{\partial y}{\partial \phi} \right\} : \left\{ \frac{\partial y}{\partial A} \frac{\partial x}{\partial \phi} - \frac{\partial x}{\partial A} \frac{\partial y}{\partial \phi} \right\} : \left\{ \frac{\partial x}{\partial A} \frac{\partial y}{\partial \phi} - \frac{\partial y}{\partial A} \frac{\partial x}{\partial \phi} \right\}$$

Tarvitades nüüd valemisi (21) (22) ^{eid}, saame:

$$x : y : z =$$

$$= \left\{ x \sum x^2 + y \sum xy + z \sum xz \right\} : \left\{ x \sum xy + y \sum y^2 + z \sum yz \right\} : \left\{ x \sum xz + y \sum yz + z \sum z^2 \right\}$$

Tärvitades nüüd valemisi (21) ja (22) saame:

$$X:Y:Z =$$

$$= \left\{ X \sum x^2 + Y \sum yx + Z \sum xz \right\} : \left\{ X \sum xy + Y \sum y^2 + Z \sum yz \right\} :$$

$$: \left\{ X \sum xz + Y \sum yz + Z \sum z^2 \right\}$$

Tähistades võrde tegurit λ -ga, võime kirjutada:

$$X \sum x^2 + Y \sum xy + Z \sum xz = X\lambda$$

$$X \sum xy + Y \sum y^2 + Z \sum yz = Y\lambda$$

$$X \sum xz + Y \sum yz + Z \sum z^2 = Z\lambda$$

Et sellel homogeesel võrrandsüsteemil, vaadates X, Y, Z kui tundmatute peale, nullist erinevaid lahendusi ole-
mas oleks, peab võrrandsüsteemi determinant null ole-
ma:

$$\begin{vmatrix} \sum x^2 - \lambda & \sum xy & \sum xz \\ \sum xy & \sum y^2 - \lambda & \sum yz \\ \sum xz & \sum yz & \sum z^2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (25)$$

Vümasest tingimusest võime aga λ leida. Kuna võr-
rand kolmandama astmeline, saame kolm juurit, kõik
reaalsed, nagu seda algebras tõendatakse.

Olles λ arvutanud, võime kirjutada:

$$\begin{aligned} X \sum x^2 + Y \sum xy + Z \sum xz &= \lambda_1 X \\ X \sum xy + Y \sum y^2 + Z \sum yz &= \lambda_1 Y \end{aligned}$$

elne jagades X -ga ja tähistades:

$$\frac{Y}{X} = P \quad \frac{Z}{X} = Q,$$

saame süsteemi:

$$\begin{aligned} (\sum x^2 - \lambda_1) + P \sum xy + Q \sum xz &= 0 \\ \sum xy + P(\sum y^2 - \lambda_1) + Q \sum yz &= 0, \end{aligned} \tag{24}$$

kust võime leida otsitavad P ja Q .

Et aga valem (20) põhjal on:

$$P = \cot A; \quad Q = \frac{\tan D}{\cos A}$$

siis võime nende abil leida otsitavad ^{ant}aperse koordinaadid A ja D .

Nagu eelpool tähendasime, saame võrrandit (23) lahendades kolm λ väärtust. Nagu tõestada võib, asuvad isesuguse λ juures arvutatud apersid 90° üksteisest eemal. Arusaadavalt on neist õige ainult üks.

Esitatud probleemi käsitlemist võiks lugeola täiesti korrektseks matemaatilises mõttes. Kui eeldused õiged on, peab resultaat tulema õige. Yobold.

rakendades käsitletud meetodi, leidis apersi koordi-
naadid:

$\alpha = 275^{\circ},0$	$\delta = 0^{\circ},4$	213 lõuna taeva tähte.
$\alpha = 269^{\circ},0$	$\delta = -2^{\circ},9$	1579 tähte.
$\alpha = 270^{\circ},2$	$\delta = -2^{\circ},3$	2262 tähte.
$\alpha = 271^{\circ},0$	$\delta = -0^{\circ},2$	2262 tähte.

On tähelpanu väärt Koboldi tulemustes apersi dek-
linatsioon, mis võrreldes nende resultaatidega, mis olid
saadud Argelanderi või jälle Airy meetoditega, ligi 30°
lõuna poole asetatud. Ei saa öelda, et Koboldi poolt
väljatöötatud meetod vigane oleks. See on ka maksim
Airy meetodi kohta. Täab ainult üle oletus, et sel-
dus, see on hüpotees tähtede juhuslikust omaliikumise
se paigutusest, vale on. Nagu me edaspidi näeme, ei
ole tähtede individuaallikumiste paigutus sugugi
juhuslik.

IX

Päikese liikumise elementide
arvutamine radiaalkiirustest.

Samuti nagu tähtede omaliikumistest, võib ka
nende radiaalkiirustest arvutada päikese liikumise
elemente. Viimasel meetodil - nimetame teda edaspidi
radiaalkiiruste meetodiks, on võrreldes sel pool käsit-
letud meetoditega hulka paremusi:

Omalüikumised on antud nurga mõõdus, ja et teada saada liikumist kilomeetrites, peame teadma tähe kaugust. Selle vastu arvutatakse päikese liikumist radiaalkiirustest, ei ole meil tarvis teada kaugusi, kuna meil andmed on antud lineaarmõõdus. See asjaolu on väga mõjuvaks põhjuseks, mis meid sunnib eelistama ~~sp~~ radiaalkiiruste meetodit. Ei ole tarvis teha hüpoteesi tähtede kauguste kohta.

Tähtede omalüikumise määramine on seotud raskustega, kuna selleks et määrata mõne tähe nihkumist, läheb tarvis hulka aastaid, et märgata vahet tähtede kataloogis. Radiaalkiiruste määramine on aga otsekohe võimalik ja resultaat on palju kindlam.

Radiaalkiiruste määramisel võib ka umbes hinnata vaatluste süstemaatilisi vigu. Võrreldes aga kahte kataloogi, millest üks peab tingimata olema vanem, ei ole meil nii kerge määrata vaatluste süstemaatilist viga.

Radiaalkiiruste määramise kaugus ei olene põhimõtteliselt tähe kaugusest, mis aga omalüikumiste juures ^{on} vastupididi. Sellepärast võime radiaalkiiruste meetodi juures lähemate kui ka kaugemate tähtede kaugusi tarvitada ühesuguse kaaduga. Ette vastupididi on aga omalüikumistega. Mida kaugem täht, seda väiksem on tema näiv liikumine ja seda suurem on arusaadavalt liikumise määramisel tehtud ^{suhteline} viga.

Radiaalkiiruste põhjal päikese liikumise elementide arvutamisel võime arvestada ka uolukoguste

liikumisega vaatejoone suunas, kuna uudele omalü-
kumise määramine on väga raske

Idee, mille põhjal tähtede radiaalkiirustest ar-
vutatakse päikese liikumise elemente, oli antud ju-
ba Airy poolt. Nagu me selpool leidsime, on ühe
tähe kohta maksim, kui täht paigal seisab:

$$\Delta \xi = \cos \alpha \cos \delta \Delta X + \sin \alpha \cos \delta \Delta Y + \sin \delta \Delta Z$$

kus $\Delta \xi$ on arusaadavalt radiaalkiirus.

Nagu ennegi, määrame nüüd päikese liiku-
mise komponendid $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$, misruugustena, mis
avalduse:

$$\sum (\cos \alpha \cos \delta \Delta X + \sin \alpha \cos \delta \Delta Y + \sin \delta \Delta Z - \Delta \xi)^2$$

muudaks minimaalseks.

Sellest tingimusest järgnevad $\Delta X, \Delta Y$ ja ΔZ jaoks
võrrandid:

$$\Delta X \sum \cos^2 \alpha \cos^2 \delta + \Delta Y \sum \sin \alpha \cos \alpha \cos^2 \delta + \Delta Z \sum \cos \alpha \sin \delta \cos \delta =$$
$$= \sum \Delta \xi \cos \alpha \cos \delta$$

$$\Delta X \sum \sin \alpha \cos \alpha \cos^2 \delta + \Delta Y \sum \sin^2 \alpha \cos^2 \delta + \Delta Z \sum \sin \alpha \sin \delta \cos \delta = (16 \text{ d})$$
$$= \sum \Delta \xi \sin \alpha \cos \delta$$

$$\Delta X \sum \cos \alpha \sin \delta \cos \delta + \Delta Y \sum \sin \alpha \sin \delta \cos \delta + \Delta Z \sum \sin^2 \delta =$$
$$= \sum \Delta \xi \sin \delta$$

Nagu näha, ei esine nendes võrrandites suurus α , seega ei oleme radiaalkiirustega arvutades, nagu me seda juba ennegi nägime, tarvis teada tähtede koordinaate.

Radiaalkiiruste meetod leidis juba varaselt rakendamist mitmete suurijate poolt, ka juba siis, kui radiaalkiiruste määramine alles algastmel oli. Nii leidsid:

Lövestigethy	$\alpha = 261^\circ$	$\delta = 35^\circ$	$q = 64 \frac{\text{km}}{\text{sec.}}$
Homann	$\alpha = 320^\circ$	$\delta = 41^\circ$	$q = 39 \frac{\text{km}}{\text{sec}} \pm 4,2 \frac{\text{km}}{\text{sec}}$
	$\alpha = 310^\circ$	$\delta = 70^\circ$	$q = 48 \frac{\text{km}}{\text{sec}} \pm 25,1 \frac{\text{km}}{\text{sec.}}$
	$\alpha = 279^\circ$	$\delta = 14^\circ$	$q = 24,5 \frac{\text{km}}{\text{sec}} \pm 15,8 \frac{\text{km}}{\text{sec.}}$
Kempff	$\alpha = 206^\circ$	$\delta = 46^\circ$	$q = 18,6 \frac{\text{km}}{\text{sec}} \pm 3,0 \frac{\text{km}}{\text{sec}}$
	$\alpha = 106^\circ$	$\delta = 50^\circ$	$q = 13,0 \frac{\text{km}}{\text{sec}} \pm 3,3 \frac{\text{km}}{\text{sec}}$
	$\alpha = 267^\circ$	$\delta = 31^\circ$	$q = 12,3 \frac{\text{km}}{\text{sec}} \pm 3,0 \frac{\text{km}}{\text{sec}}$
Rirsteen	$\alpha = 218^\circ$	$\delta = 45^\circ$	$q = 17,5 \frac{\text{km}}{\text{sec}} \pm$

Nagu esimesest pilgust näha, on vahe üksikute arvutuste vahel väga suur, eriti just kiirustest. See aga on praegusel juhusel seletatav andmete suure ebatäpsusega, millega esimesed suurijad sellel alal pidid kokku puutuma.

Radiaalkiiruste meetod aga leidis põhjaliku rakendamist Campbelli poolt. Oma esimeses arvutuses⁷⁾ 1900 aastal, Campbell kasutas Mount-Hamiltonis määratud tähe radiaalkiirusi. Jättes arvutustest välja need tähed, millede kohta kindlasti oli teada, et need kuuluvad mõnda tähtede

parve ja seega ei allu hüpotesile tähtede juhuslisest omaliskumised, ja asetas kogu tähtparve asemele ühe tähe, mille koordinaadid ja radiaalkiirus olid arvatatud keskmisena kogu tähtparve radiaalkiirustest, jagati kogu taevafäär 80 ossa, ning arvutati iga osa jaoks keskmine radiaalkiirus. Nii saavutatud 80 fiktiivse tähe radiaalkiiruste-ga moodustati võrrandid () ning arvutati päikese liikumise komponendid, mis saadi nüüd miidugi kilomeetrites. Arvutuse tulemusena saadi päikese liikumise elemendid:

$$\alpha = 277^{\circ},5 \quad \delta = -20^{\circ} \quad q = 19,9 \frac{\text{km}}{\text{sec}} \pm 1,5 \frac{\text{km}}{\text{sec}}$$

Kui 1910 aastal 1020 põhjataeva tähe radiaalkiirused Mount-Hamiltoni ja L.O. Millie Observatooriumites määrati, võttis Campbell päikese liikumise määramise suesti ette. Siia lisaks võis võtta veel teiste observatooriumite mõõtmisi, arvult 40 ja Kepleri poolt määratud 13 udurkogu radiaalkiirused, nii et kogusummas Campbellil oli kasutada 1073 liikumist vaatejoone suunas.

Enne aga, kui võrrandi () rakendamisele asuti, moodustati seos:

$$V_{\alpha\delta} = V + 19,9 \cos X$$

kus $V_{\alpha\delta}$ tähendab tähe radiaalkiirust. Arvesse võttes 1900 aasta arvutusi, leiti et:

151 tähe keskmine rad. kiirus on $+17,01$
 ja 129 " " " " " " $-17,10$
 seega keskmiselt $\pm 17,06$. Tähed, millede rad. kiirus üle-
 tas seda arvu enam kui nelja kordselt, jäeti arvutu-
 sest välja, kuna näib kindel olevat, et nad ei kuulu
 sellise süsteemi, kus on päike. Olgu tähendatud et
 väga suurte kiirustega tähed harilikult väikese mas-
 siga on ja seega nende kõrvaldamine arvutustest ei
 peaks suurt viga sünnitama. Samuti ühendati
 ka kõik ühte parve kuuluvad tähed üheks parve esi-
 tavaks täheks.

Eiga sin
 nist
 aritmet
 si rätud
 arvune

Nii tähti välja jättes jäi järele veel 1047 rad. =
 kiirust, mis siis samuti kui 1900 aastal 172 rühma
 jagati ja iga rühmas keskmine radiaalkiirus ar-
 vutati. Rakendades üldist võrrandit, leiti:

$$\alpha = 272^{\circ} 0' (\pm 2^{\circ} 50) \quad \delta = 27^{\circ} 26' (\pm 3^{\circ} 00) \quad q = 17,77 \frac{\text{km}}{\text{sec}} (\pm 0,62)$$

Arvutates aga päikese liikumise elemente rüha
 rühmitusest, saadi:

$$\alpha = 273,5^{\circ} \quad \delta = 28,0^{\circ} \quad q = 17,73 \frac{\text{km}}{\text{sec}}$$

mis on heas kooskõlas eelmisega.

Täpsemad arvutused ei suutnud esitatud
 resultaatist suurt muutust erinevust saavutada. Nii
 leidis G. Forbes 1922 radiaalkiirustest:

$$\alpha = 270^{\circ} \quad \delta = 27^{\circ} \quad q = 22,00 \frac{\text{km}}{\text{sec}}$$

F. P. Peraskevopulos rakendades 537 lõuna ja 743 põhja taeva tähe liikumist raatejoone suunas, jõudis tulemusteni:

$$\alpha = 271,6 \quad \delta = 30,3 \quad q = 23,53 \frac{\text{km}}{\text{sec.}}$$

Et päikese liikumist tähtede raskuskeskkohta suhtes leida, peab arvutuste juures kasutama tähtede masse. B. Fessenkoff ja C. Ogorodnikoff tehes hüpoteesi, et

$$mv^2 = \text{const}$$

leidsid päikese liikumise elemendid B tüüpi tähtede suhtes:

$$\alpha = 267,2 \quad \delta = 35,4 \quad q = 20,95 \frac{\text{km}}{\text{sec.}}$$

Kõrge uuemal ajal on päikese liikumist tuletanud radiaalküürustest Campbell, kes rakendades 2034 tähte leidis päikese liikumise elemendid: 9.)

$$\alpha = 268,8 \quad \delta = 27,8 \quad q = 19,2.$$

Ültre võib Campbelli resultate lugeda parimateks sellel alal.

X

Üldiseid märkeid eelpool esitatud meetodite kohta.

§1. Liikumise sagedusfunktsioon.

Olgu meil antud mingi koordinaadistik, milles me tähtede liikumisi vaatleme. Prodades silmas mingit liikumist kujutavat vektorit, loeme ära kõik tähed, millede liikumised ühtuvad selle vektoriga. On selge, et see loetletud arv on vektori funktsioon. Me nimetame seda funktsiooni liikumise tegelikus sagedusfunktsiooniks.

Kui me aga äramäärame teoreetilise sageduse, siis on arusaadavalt ka teoreetiline sagedus vektori funktsioon. Me nimetame seda funktsiooni teoreetiliseks sagedusfunktsiooniks ehk lihtsalt sagedusfunktsiooniks ja tähistame edaspidi sümboliga:

$$\Phi(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$$

Kui tähistada kogu tähtede arvu, mis meie vaatluste all on, N -ga, siis on, nagu tõend'osusteoorias tõendatakse, suhe:

$$\frac{1}{N} \cdot \Phi(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$$

lihtsalt vektoril Δp , mille komponendid on $\Delta x, \Delta y, \Delta z$, tõenäosus, mida me edaspidi tähistame:

$$P(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$$

ja kutsume tõenäosusfunktsiooniks.

Kui on antud mõnes koordinaadistruktuuris liikumise tõenäosusfunktsioon, siis võime ~~arvuta~~ tuletada võrrandid, millele rajal võib arvutada mõne objekti liikumist selles koordinaadistruktuuris, kui on teada tähtede liikumine kõne all oleva objekti suhtes.

Arvutame koordinaadistruktuuris, milles meil sagedusfunktsioon antud, koordinaadistruktuuris A , ja analoogiliselt teist, milles vaadeldav objekt, näit. päike paigal seisab, koordinaadistruktuuris B . Tähistades päikese liikumise komponenti, nagu ennegi, koordinaadistruktuuris A :

$$\Delta X; \Delta Y; \Delta Z;$$

ning tähe liikumiskomponente B -s

$$\Delta x_i; \Delta y_i; \Delta z_i$$

siis on tähe liikumiskomponendid A -s

$$\begin{aligned} \Delta x'_i &= \Delta x_i - \Delta X & \Delta y'_i &= \Delta y_i - \Delta Y \\ \Delta z'_i &= \Delta z_i - \Delta Z \end{aligned}$$

(25)

ja seega selle tähe liikumise tõenäosus:

$$P(\Delta x_i - \Delta X, \Delta y_i - \Delta Y, \Delta z_i - \Delta Z) \quad (26)$$

Kui i kulgeb järjekmööda väärtusi 1 kuni n , siis esitavad avaldused (26) ka vastavalt nende liikumiste tõenäosusi. Tõenäosus selleks aga, et nendel tähtedel n gal just oleks nii avaldatud tõenäosus, on tõenäosuskorrutamislause põljal:

$$\prod P(\Delta x_i - \Delta X, \Delta y_i - \Delta Y, \Delta z_i - \Delta Z) \quad (27)$$

See avaldus peab olema kõige suurem koordinaadistikus A , sest seal on meie tõenäosusfunktsioon maks. Seega peaksime $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$ valima niusugustena, et nad avalduse (27) muudaks maksimaalseks. Nimetatud tingimus on aga sama tingimusega:

$$\sum \ln P = \max.$$

ehk siit võrrandid $\Delta X, \Delta Y$ ja ΔZ jaoks:

$$\frac{\partial}{\partial \Delta X} \sum \ln P = 0 \quad \frac{\partial}{\partial \Delta Y} \sum \ln P = 0 \quad \frac{\partial}{\partial \Delta Z} \sum \ln P = 0$$

ehk teisendades:

$$\sum \frac{\partial P}{\partial \Delta x'_i} = 0 \quad \sum \frac{\partial P}{\partial \Delta y'_i} = 0 \quad \sum \frac{\partial P}{\partial \Delta z'_i} = 0 \quad (28)$$

kusjuures on asetatud $\Delta x_i - \Delta X = \Delta x'_i$ j. n. e.

Nagu võrranditest (28) järeneb, oleme üldiselt peamiseks liikumise arvutamise meetod ana funktsioonist P. Teega on selle funktsiooni tundmine olulise tähtsusega.

§.2. Sagedusfunktsiooni koordinaatidistriktsioon, kus geomeetiline keskpunkt paigal seisab.

Et sagedusfunktsiooni leida, on küllaldane otsida tõenäosusfunktsiooni samas koordinaatidistriktsioon, kuna nende funktsioonide vahel on väga lihtne, meil juba eelpool näidatud seos.

Geomeetiline keskpunkt on teatavasti defineeritud valemitega:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum x_i \quad \bar{Y} = \frac{1}{n} \sum y_i \quad \bar{Z} = \frac{1}{n} \sum z_i$$

Differentseerides neid võrrandite saame:

$$\sum \Delta x'_i = 0 \quad \sum \Delta y'_i = 0 \quad \sum \Delta z'_i = 0$$

Ette tähepannes eelmises paragrahvis näidatud seoseid:

$$\begin{aligned} \Delta x'_i &= \Delta x_i - \Delta X & \Delta y'_i &= \Delta y_i - \Delta Y \\ \Delta z'_i &= \Delta z_i - \Delta Z \end{aligned} \quad (25)$$

saame:

$$\Delta X = \frac{1}{n} \sum \Delta x_i \quad \Delta Y = \frac{1}{n} \sum \Delta y_i \quad \Delta Z = \frac{1}{n} \sum \Delta z_i \quad (29)$$

mis on maksivad koordinaadistikus, kus geomeet-
riline keskpunkt paigal seisab.

Teisest küljest on aga ΔX , ΔY ja ΔZ arvuta-
tavat valemiühmast (28). Meie ülesanne on seega järg-
mine:

Aluseks võttes valemisi (28) tuleb P nii määrata,
et tundmatud ΔX , ΔY ja ΔZ oleks antud valemii-
tega (29)

Tähistades:

$$\frac{\partial P}{\partial \Delta X} : P = \psi_1 \quad \frac{\partial P}{\partial \Delta Y} : P = \psi_2 \quad \frac{\partial P}{\partial \Delta Z} : P = \psi_3 \quad (30)$$

võime valemi (28) kirjutada kujus:

$$\begin{aligned} \sum \psi_1 (\Delta x_i', \Delta y_i', \Delta z_i') &= 0 \\ \sum \psi_2 (\Delta x_i', \Delta y_i', \Delta z_i') &= 0 \\ \sum \psi_3 (\Delta x_i', \Delta y_i', \Delta z_i') &= 0 \end{aligned} \quad (31)$$

Nagu kergesti näha, on (29) ja (31) põljal
maksivad kergesti tulutatavad seosed.



$$I \quad \psi_1(0, 0, 0) = \psi_2(0, 0, 0) = \psi_3(0, 0, 0) = 0 \quad \checkmark$$

$$II \quad \sum \psi_1(\Delta x_i', \Delta y_i', \Delta z_i') = -\psi_1(-\sum \Delta x_i', -\sum \Delta y_i', -\sum \Delta z_i') \quad \checkmark$$

$$\sum \psi_2(\Delta x_i', \Delta y_i', \Delta z_i') = -\psi_2(-\sum \Delta x_i', -\sum \Delta y_i', -\sum \Delta z_i')$$

$$\sum \psi_3(\Delta x_i', \Delta y_i', \Delta z_i') = -\psi_3(-\sum \Delta x_i', -\sum \Delta y_i', -\sum \Delta z_i')$$

Tähelepannes neid tõsiasju, võrme öelda, et ψ_1 , ψ_2 ja ψ_3 võivad esineda ainult kujus:

$$\psi_1 = a_1 \Delta x' + b_1 \Delta y' + c_1 \Delta z'$$

$$\psi_2 = a_2 \Delta x' + b_2 \Delta y' + c_2 \Delta z'$$

$$\psi_3 = a_3 \Delta x' + b_3 \Delta y' + c_3 \Delta z'$$

etne siit arutuse (') põhjal:

$$\frac{\partial R}{\partial \Delta x'} = a_1 \Delta x' + b_1 \Delta y' + c_1 \Delta z'$$

$$\frac{\partial R}{\partial \Delta y'} = a_2 \Delta x' + b_2 \Delta y' + c_2 \Delta z'$$

$$\frac{\partial R}{\partial \Delta z'} = a_3 \Delta x' + b_3 \Delta y' + c_3 \Delta z'$$

(32.)

kusjuures asetatud $\ln P = R$

Teeme nüüd vahet juhusete vahel:

1.) $\Delta x'$, $\Delta y'$, $\Delta z'$ on teineteisest rippumatud, see

tähendab, nende vahel ei ole mingit funktsionaalset seost kujus:

$$K(\Delta x, \Delta y, \Delta z) = 0$$

2.) $\Delta x, \Delta y$ ja Δz on üksteisega funktsionaalses seoses.
Käsitleme mõlemaid juhuseid eraldi.

Esimesel juhusel peab, selleks et üldse süsteemi (33) lahendada võimalik oleks, täidetud olema n. n. täielik integreeruvuse tingimus:

$$\frac{\partial P}{\partial \Delta y'} = \frac{\partial Q}{\partial \Delta x'} \quad \frac{\partial P}{\partial \Delta z'} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \Delta x'} \quad \frac{\partial Q}{\partial \Delta z'} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \Delta y'} \quad (33)$$

kus praegusel korral:

$$\begin{aligned} P &= a_1 \Delta x' + b_1 \Delta y' + c_1 \Delta z' \\ Q &= a_2 \Delta x' + b_2 \Delta y' + c_2 \Delta z' \\ \mathcal{F} &= a_3 \Delta x' + b_3 \Delta y' + c_3 \Delta z' \end{aligned}$$

Jõentruused (33) on aga ainult võimalikud siis, kui:

$$a_2 = b_1 \quad a_3 = c_1 \quad b_3 = c_2$$

Ja seega on R mõeldav ainult järjekoise süsteemi lahendusena, kui $\Delta x, \Delta y$ ja Δz on üksteisest rippumatud:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial \Delta x} &= a_1 \Delta x + b_1 \Delta y + c_1 \Delta z \\ \frac{\partial R}{\partial \Delta y} &= b_1 \Delta x + b_2 \Delta y + c_2 \Delta z \\ \frac{\partial R}{\partial \Delta z} &= c_1 \Delta x + c_2 \Delta y + c_3 \Delta z \end{aligned} \quad (34.)$$

Nagu differentiaalvõrrandite teooria põhjal ar-
vutatés selgub, on süsteemi (32) lahendus kõrge ül-
disemal kujul järgmine:

$$R = \frac{1}{2}a_1 \Delta x^2 + \frac{1}{2}b_1 \Delta y^2 + \frac{1}{2}c_3 \Delta z^2 + b_1 \Delta x \Delta y + c_1 \Delta x \Delta z + c_2 \Delta y \Delta z + H_1$$

kus H_1 integrimiskonstant.

Et $R = \ln P$, siis on:

$$P = H_1 e^{\frac{1}{2}a_1 \Delta x^2 + \frac{1}{2}b_1 \Delta y^2 + \frac{1}{2}c_3 \Delta z^2 + b_1 \Delta x \Delta y + c_1 \Delta x \Delta z + c_2 \Delta y \Delta z}$$

otsitav tõenäosusfunktsioon.

Küsimus seisab nüüd selles, missugustele tin-
gimustele peavad vastama tõenäosusfunktsioonis
esinevad konstandid. On ju selge, et nad peavad
vastama mingisugustele tingimustele, sest kui oletada,
et nad võivad olla mistahesugused, võime nad
valida kõik positiivsetena. Sellest aga järgneks et suur-
te Δx , Δy ja Δz üle korral meie P ka suureks saaks
ja kasvaks alaliselt muutujate kasvuga. Et aga meil:

1) tõenäosus nii defineeritud, et ta peab asuma
nulli ja ühe vahel;

2) on hüpotees, et väikeste liikumiste tõenäosus on
võrreldes väga suurte liikumiste tõenäosusega suurem ning
et ta liikumise kasvuga nullile peab lähinema,
siis on selge, et P esinevad konst. peavad
teatavaid tingimusi täitma.

Me uurime neid tingimusi lähemalt.

Selleks tuleb koordinaatide telgedes pöörde, mis on

55.
määratud nurkade φ ja Θ -ga. Nagu analüütilises geometrias tõendatakse, võime transformatsiooni määravad nurkad nii valida, et avaldus

$$\frac{1}{2}a_1 \Delta x^2 + \frac{1}{2}a_2 \Delta y^2 + \frac{1}{2}a_3 \Delta z^2 + b_1 \Delta x \Delta y + b_2 \Delta x \Delta z + c_2 \Delta y \Delta z$$

muutuks kujusse:

$$A \Delta x^2 + B \Delta y^2 + C \Delta z^2$$

(kusjuures sees mite ja vanade koordinaatide vahel on määratud tuntud transformatsiooni vale mite kaudu. Korraldajad vanades ja mites koordinaatides on antud n.n. sekulaarvõrrandiga)
ja seega P :

$$P = H. e. A \Delta x^2 + B \Delta y^2 + C \Delta z^2$$

Et aga eelduse põhjal tõenäosus Δx , Δy ja Δz lõpmatult kasvamisel lõpmatult nullile läheneb, siis on see võimalik ainult, kui:

$$A < 0 \quad B < 0 \quad C < 0$$

Me tähistame neid

$$A = -h_1^2 \quad B = -h_2^2 \quad C = -h_3^2$$

ja saame P kujus:

$$P = \frac{h_1 h_2 h_3}{\pi \sqrt{\pi}} e^{-h_1^2 \Delta x^2 - h_2^2 \Delta y^2 - h_3^2 \Delta z^2} \quad (35.) \quad (11.) \quad (N)$$

Nagu tõenäosusteooria võtete abil tõendada võib, on pind, millel mõne liikumise sagedust kujitavad vektori otsad asuvad, ellipsoidid, ehk nagu harilikult öeldakse: liikumise jaotus on ellipsoidaalne.

Teisel juhusel, see on kui Δx , Δy ja Δz on üksteisega funktsionaalselt seotud, on asi keerulisem. Nii sugusel korral ei ole, nagu differentsiaalvõrrandite teoorias tõendatakse, maksim täielik integruuvuse tingimus.

Kuna lahenduse juures mitmed tähtsad erijuhtused esinevad, siis on kohane siinkohal kogu lahendamise käiku esitada. ^(10.)

Nagu tõendatakse, taandub süsteemi ^{lrx. 52} (32) lahendamine järjgmise võrrandi lahendamiseks:

$$dR = P dx + Q dy + L dz \quad (36)$$

Valime mingi meelevaldse funktsiooni:

$$R = F(x, y, z)$$

ja differentseme teada:

$$dR = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz \quad (36,1)$$

(1) Esite kirjutame (36) ja (36,1) põhjal:

$$P dx + Q dy + Y dz = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz,$$

millest saame

$$\left(P - \frac{\partial F}{\partial x}\right) dx + \left(Q - \frac{\partial F}{\partial y}\right) dy + \left(Y - \frac{\partial F}{\partial z}\right) dz = 0.$$

Kui selle võrandi lahendamiseks

dz suhtes, siis saame (36, 2).

ning lahendades koos (36) elimiineerime nendest dR:

$$dsz = \frac{\frac{\partial F}{\partial \Delta x} - P}{\varphi - \frac{\partial F}{\partial \Delta z}} dx - \frac{\frac{\partial F}{\partial \Delta y} - Q}{\varphi - \frac{\partial F}{\partial \Delta z}} dy \quad (1) \quad (36, 2)$$

ehk, kui vastavalt tähistada:

$$dsz = A(\Delta x, \Delta y, \Delta z) dx + B(\Delta x, \Delta y, \Delta z) dy \quad (37)$$

Niüd võib aga juhtuda:

I Võrrandi (37) juures ei ole täidetud täielik integratsiooni tingimus.

II Täielik integratsiooni tingimus on täidetud.

Kasitledes alguses esimest juhtust, valime järelgi mingi meelevaldse funktsiooni:

$$\Phi(\Delta x, \Delta y, \Delta z) = 0$$

mida differentiaalides saame:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \Delta x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial \Delta y} dy + \frac{\partial \Phi}{\partial \Delta z} dsz = 0$$

lahendades viimast koos (37) võime:

I avaldada dsz kui lineaarset funktsiooni dx ja dy kui argumentide suhtes

II elimiineerida dsz avaldusest z

III Leida z x ja y funktsioonina

Olles need toiminguol läbi viinud, võrme võrrandi (37) esitada kujus:

$$M(\Delta x, \Delta y) d\Delta x + N(\Delta x, \Delta y) d\Delta y = 0$$

millel alati lahendus olemas on.

Olgu viimane leitud kujus:

$$\Psi(\Delta x, \Delta y, C) = 0$$

kus C integrimiskonstant.

Võrrandid:

$$R = F(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$$

$$0 = \Phi(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$$

$$0 = \Psi(\Delta x, \Delta y, C)$$

ehk ka, kuna one üldiselt viimast võrme avaldada kujus:

$$R = F(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$$

$$\Delta y = U_1(\Delta x, C)$$

$$\Delta z = U_2(\Delta x, C)$$

lhx.52

annavadgi võrrandi (32) lahenduse.

Täiel juhusel, kui integruuse tingimus täidetud, saame (37) lahenduse kujus

$$f(\Delta x, \Delta y, \Delta z, C) = 0$$

ja seega stritar lahendus:

$$R = F(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$$

$$0 = f(\Delta x, \Delta y, \Delta z, C)$$

ehk ka:

$$R = F(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$$

$$\Delta z = V(\Delta x, \Delta y, C)$$

Nagu juhusel, kui võime öelda, et juhusel, kui liikumiskomponentide vahel on funktsionaalne seos, on lõendosusfunktsioon koordinaadistikus A :

$$P = e^{F(\Delta x, \Delta y, \Delta z)}$$

kusjuures:

$$\Delta y = U_1(\Delta x, C)$$

$$\Delta z = U_2(\Delta x, C)$$

(38)

ehk:

$$P = e^{F(\Delta x, \Delta y, \Delta z)}$$

kusjuures

$$\Delta z = V(\Delta x, \Delta y, C)$$

(39)

Nagu juhusel, kui liikumiskomponendid üksteise suhtes rippumatud on, valemis esinevad konstandid teatavaid tingimusi täitma peavad, peavad ka valemis (38) esinevad funktsioonid kindlatele tingimustele alluma. Me uurime neid tingimusi lähemalt.

Esimesel juhul, kui meil tõenäosusfunktsioon on esitatav kujus (38), võrme teda ka kirjutada:

$$P = e^{-F[\Delta x, U_1(\Delta x, C), U_2(\Delta x, C)]} = e^{-W_1(\Delta x, C)}$$

Et aga selle põhjal arvutates peab tulema:

$$\Delta X = \frac{1}{h} \sum \Delta x$$

siis järgneb, et P peab esinema ka kujus:

$$P = e^{-h^2 \Delta x^2 - C}$$

ning sellest järgneb et:

$$W_1(\Delta x, C) = F[\Delta x, U_1(\Delta x, C), U_2(\Delta x, C)] = -h^2 \Delta x^2 - C \quad (40)$$

See ongi tingimus millele peavad alluma funktsioonid U_1 ja U_2 ning F .

Küsimine nüüd, kuidas konkreetselt tõlgitada funktsioonide U_1 ja U_2 tähendust. On selge, et kõrvadel tähtedel, millel on võrdsed s_x , on võrdsed s_y ning s_z . Muutes s_x , muutuvad ka s_y ja s_z , ning seega omaliikumise suund ja suurus. Tähendab üldiselt on niisugusel korral ~~suur~~ omaliikumise suund tema suuruse funktsioon. Funktsionaalset seost määravad U_1 ja U_2 .

Kui arvestada raatlusandmetega, siis võib

õelda, et misugust suuna paigutust arvatakse olemas
ei ole.

Teisel juhusel, see on valem (39) korral, võime
P esitada kujus:

$$P = e^{F(\Delta x, \Delta y, V(\Delta x, \Delta y, C))} = e^{W_2(\Delta x, \Delta y, C)}$$

Et aga selle valemil põhjal arvutatakse peab tu-
lema:

$$\Delta X = \frac{1}{n} \sum \Delta x \quad \Delta Y = \frac{1}{n} \sum \Delta y$$

siis peab eelmise põhjal olema

$$P = e^{-h_1^2 \Delta x^2 - h_2^2 \Delta y^2} - C,$$

kuna Δx ja Δy eelduse põhjal üksteisest olenema-
tud. (Ühtlasi on ka tehtud kohane koordinaatide
transformatsioon.)

Sellest aga järgneb, et:

$$W_2(\Delta x, \Delta y, C) = F[\Delta x, \Delta y, V(\Delta x, \Delta y, C)] = -h_1^2 \Delta x^2 - h_2^2 \Delta y^2 - C \quad (41)$$

mis ongi otsitav seos.

Viimane juhus on looduses arvatakse tege-
likult olemas. Lähemalt käsitleme aga teda edas-
pidi.

Üldiselt võime käesoleva § harutusi kokku-
võtta lauseis:

1.) Kui Δx , Δy ja Δz on üksteisest olenematud

siis on kõige üldisem sageduste jaotus koordinaat-
distriktus A ellipsoidaalne.

2.) Kui Δx , Δy ja Δz olenevad üksteisest, siis on
sagedusfunktsioon

$$P = e^{-h^2 \Delta x^2 + C}$$

3.) Kui Δx , Δy ja Δz olenevad üksteisest nii, et
 Δy ja Δz on terneteisest sõltumatud, siis on sagedus-
funktsioon:

$$P = e^{-h_1^2 \Delta x^2 - h_2^2 \Delta y^2 + C}$$

§5 Kahesugused eiipõhimõttelised meetodid.

Õelpool peatükis $\overline{r} - \overline{x}$ eitasime apeksi määra-
mise meetodid, rohkem enamäähem isesuguse prob-
leemi käsitlemisse. Lähemalt nende sisse tungi-
des selgub aga, et neid meetodeid võib jagada kahte
rühma ja nimelt:

1.) Geomeetrised meetodid - need on nüsugused,
mis võimaldavad tähtede omalükkumistest otseko-
he arvutada apeksi koordinaadid. Siia lüki kuu-
luvad Herscheli, Besseli, Argelanderi j.t. meetodid.

2.) Ruumilised meetodid, millede abil ar-
vutatakse esiteks päikese liikumise komponendid,
ja alles siis apeksi koordinaadid. Siia lüki
kuulub Airy meetod, samuti ka meetod, mille
abil leitakse päikese liikumist radiaalkiirustest.

Lühike rühma, kuivõrd hästi võimaldavad

$$x = r \cos \delta \cos \alpha \quad y = r \cos \delta \sin \alpha \quad z = r \sin \delta$$

Et me küllalt väikese aja jooksul tähtede kui ka päikese liikumist võime vaadelda diferentsiaalidena, siis järgneb et:

$$\begin{aligned} \Delta x &= \cos \delta \cos \alpha \Delta \xi - r \sin \delta \cos \alpha \Delta \delta - r \sin \alpha \Delta \eta \\ \Delta y &= \cos \delta \sin \alpha \Delta \xi - r \sin \delta \sin \alpha \Delta \delta + r \cos \alpha \Delta \eta \\ \Delta z &= \sin \delta \Delta \xi + r \cos \delta \Delta \delta \end{aligned} \quad (43)$$

kusjuures:

$$\Delta r = \Delta \xi \quad \Delta \delta = \Delta \delta \quad \Delta \alpha \cos \delta = \Delta \eta$$

Valemist (37) järgneb et:

$$\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 = \Delta \xi^2 + r^2 \Delta \delta^2 + r^2 \Delta \eta^2$$

ja Jakobiaan ehk funktsionaal-determinant:

$$\frac{D(\Delta x, \Delta y, \Delta z)}{D(\Delta \xi, \Delta \delta, \Delta \eta)} = r^2$$

ning tõenäosusfunktsiooni polaarkoordinaatides oleks seega:

$$PdP = \frac{h^3}{iV\pi} r^2 e^{-h^2(\Delta \xi^2 + r^2 \Delta \delta^2 + r^2 \Delta \eta^2)} d\Delta \xi d\Delta \eta d\Delta \delta \quad (44.)$$

Valemist (44) järgneb otsekohene tõenäosus sellens, et mõne tähe liikumise komponendid asuks $\Delta\xi$ ja $\Delta\xi + d\Delta\xi$, $\Delta\eta$ ja $\Delta\eta + d\Delta\eta$ vahel:

$$dP. P_{\Delta\xi, \Delta\eta} = \left\{ \int_0^{\infty} \frac{h^3}{\pi^3} r^2 e^{-h^2(\Delta\xi^2 + r^2\Delta\xi^2 + r^2\Delta\eta^2)} d\Delta\xi \right\} d\Delta\xi d\Delta\eta =$$

$$= \frac{h^2}{\pi} r^2 e^{-h^2 r^2 (\Delta\xi^2 + \Delta\eta^2)} d\Delta\xi d\Delta\eta \quad (45.)$$

Valem (45) on maksvev koordinaadistokkus A. Me püüame leida analoogilist valemit koordinaadistokkus B.

Kui tähistada pöikesse liikumise komponente koordinaadistokkus A ξ telje suunas ΔU , ζ telje suunas ΔV ja η suunas ΔW , siis on, nagu kergesti arusaadav, A ja B vahel maksivad transformatsioonivalemid:

$$\Delta\xi' = \Delta U + \Delta\xi \quad \Delta\xi' = \Delta V + \Delta\xi$$

$$\Delta\eta' = \Delta W + \Delta\eta$$

Ja seega valem (45) koordinaadistokku B jaoks:

$$P_{\Delta\xi', \Delta\eta'} dP = \frac{h^2}{\pi} r^2 e^{-h^2[(\Delta\xi' - \Delta V)^2 + (\Delta\eta' - \Delta W)^2]} d\Delta\eta' d\Delta\xi' \quad (46.)$$

Olgu nüüd tähistatud ΔV ja ΔW resultant p -ga ning $\Delta\xi'$ ja $\Delta\eta'$ oma p' , kusjuures p -de vastavad positsiooninurgad olgu ψ ja ψ' . Me kirjutame seosed:

$$\begin{aligned} \Delta V &= \mu \cos \psi & \Delta W &= \mu \sin \psi \\ \Delta \zeta' &= \mu' \cos \psi' & \Delta \eta' &= \mu' \sin \psi' \end{aligned} \quad (47.)$$

kust järgneb et:

$$(\Delta V - \Delta \zeta')^2 + (\Delta W - \Delta \eta')^2 = \mu'^2 + 2\mu\mu' \cos(\psi' - \psi) + \mu^2$$

$$\frac{d(\Delta \eta' \Delta \zeta')}{d(\mu' \psi')} = \mu' \quad (47')$$

Tehes nüüd valemisse (46) asetused (47) saame (47') põhjal:

$$P_{\mu' \Delta \psi} dP = \frac{h^2}{\pi} r^2 e^{-h^2 r^2 (\mu'^2 - 2\mu\mu' \cos \Delta \psi + \mu^2)} \mu' d\mu' d\Delta \psi \quad (48)$$

(kusjuures $\psi' - \psi$ asemel asetatud $\Delta \psi$)

Integreerides valemist (48) μ' suhtes 0 kuni ∞ , saame tõenäosuse sellena, et mõne tähe omal liikumise positsiooninurk apexiga asuks $\Delta \psi$ ja $\Delta \psi + d\Delta \psi$ vahel

$$P_{\Delta \psi} dP = \left\{ \frac{h^2}{\pi} r^2 \int_0^{\infty} e^{-h^2 r^2 (\mu'^2 - 2\mu\mu' \cos \Delta \psi + \mu^2)} \mu' d\mu' \right\} d\Delta \psi$$

Selles avalduses esinevat integraali võime muuta kujusse:

$$\int_0^{\infty} e^{-h^2 r^2 (r'^2 - 2r'r \cos \Delta \psi + r^2)} r' dr' =$$

$$= e^{-h^2 r^2 r^2 \sin^2 \Delta \psi} \int_0^{\infty} e^{-h^2 r^2 (r' - r \cos \Delta \psi)^2} r' dr'$$

Asutades: $r' - r \cos \Delta \psi = x$, võime kirjutada:

$$\int_0^{\infty} e^{-h^2 r^2 (r' - r \cos \Delta \psi)^2} r' dr' =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-h^2 r^2 x^2} x dx + r \cos \Delta \psi \int_0^{\infty} e^{-h^2 r^2 x^2} dx -$$

$$- r \cos \Delta \psi$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-r^2 h^2 x^2} x dx + \frac{r \cos \Delta \psi}{2} \int_0^{\infty} e^{-r^2 h^2 x^2} dx + r \cos \Delta \psi \int_0^{\infty} e^{-h^2 r^2 x^2} dx -$$

$$- r \cos \Delta \psi$$

Teatavasti on aga:

$$\int_0^{\infty} e^{-r^2 h^2 x^2} x dx = 0 \quad \int_0^{\infty} e^{-r^2 h^2 x^2} dx = \frac{1}{2h^2 r^2} e^{-r^2 h^2 r^2 \cos^2 \Delta \psi}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-h^2 r^2 x^2} dx = \frac{1}{hr} \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$$

$$- r \cos \Delta \psi \quad - r h \cos \Delta \psi$$

ja sellepärast:

$$\int_0^{\infty} e^{-h^2 r^2 (r'^2 - 2r'r \cos \Delta \psi + r^2)} r' dr' =$$

$$= \frac{1}{2h^2 z^2} e^{-z^2 h^2 p^2 \cos^2 \Delta \psi} + \frac{1}{hz} p \cos \Delta \psi \int_{-p h \cos \Delta \psi}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

Ja otsitav sagedusfunktsioon:

$$P_{\Delta \psi} dP = \left\{ \frac{1}{2h^2 z^2} e^{-z^2 h^2 p^2 \cos^2 \Delta \psi} + p \cos \Delta \psi \int_{-p h \cos \Delta \psi}^{\infty} e^{-x^2} dx \right\} \cdot \frac{h^2 z^2 e^{-h^2 z^2 p^2 \sin^2 \Delta \psi}}{\pi} d\Delta \psi \quad (48)$$

$$= \left\{ \frac{1}{2\pi} e^{-h^2 z^2 p^2} + \frac{hz}{\pi} p \cos \Delta \psi \cdot e^{-h^2 z^2 p^2 \sin^2 \Delta \psi} \int_{-p h \cos \Delta \psi}^{\infty} e^{-x^2} dx \right\} d\Delta \psi$$

Kui tähistada p-ks lükkumise kiiruse ^(maks) arvumiss q-ga, siis on p ja q vahel kergesti tulitav seos:

$$p = q \sin \chi$$

(kus χ nagu ennegi tähendab mõne tähe apexkõnnu) Aetades selle seose valemisse (48) saame ta kujus:

$$P_{\Delta \psi} dP = \left\{ \frac{1}{2\pi} e^{-h^2 z^2 q^2 \sin^2 \chi} + \frac{hz}{\pi} q \sin \chi \cos \Delta \psi \cdot e^{-h^2 z^2 q^2 \sin^2 \chi \sin^2 \Delta \psi} \int_{-q h \cos \chi \cos \Delta \psi}^{\infty} e^{-x^2} dx \right\} d\Delta \psi \quad (49)$$

Nagu viimastest valemist selgub, oleme sagedus-



functioon sfääril ära aperskaugusest χ . Mida väiksem χ , seda enam läheneb kogu avaldus $\frac{1}{2\pi}$ -le. See on ka arusaadav, sest apers või antapersi tähed tal olevate tähtede parallaxilone liikumine on õige väike ja seega peavad seal tähed täiesti juhuslikult liikuma.

Valemist (49) selgub ka, et tähtede omaliikumiste sihtide praigutus sfääril ei allu üldisele riigade seadusele, mis oleks tekkinud vaatluste ebataip-susest, kuna functiooni kujul χ gal taeva osalisesugune olenedes χ -st. Et aga vaatlusi toimetatakse harilikult meridiaaninstrumentidega, siis ei ole siin mingit põhjust oletuseks reafunctiooni muutuvuse kohta ise taevaskera punctis. Põhjendused, mida Herschel, Bessel, Argelander oma meetodite tööid on seega ilma aluseta ja valel. (Nad oletasid nimelt et tähtede omaliikumiste kõrvalekal-dumisi parallaxilisest liikumisest võib vaadelda kui vaatlusvigu.)

Valemile (49) võib teatavatel erijuhustel anda lihtsama kuju:

1.) Olgu $\Delta\psi$ õige väike (Argelanderi eeldus!) ja arvu χ olgu null ehk π . Et χ võrreldes kõiki-de teiste valemis esinevate suurustega võrreldes vä-ga suur on, siis võime kirjutada:

$$P_{\Delta\psi} dP = \left\{ \frac{hr}{2\pi} q \sin \chi \cos \Delta\psi e^{-h^2 r^2 q^2 \sin^2 \chi \cos^2 \Delta\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right\} d\Delta\psi$$

$$= \left\{ \frac{hr}{\sqrt{\pi}} q \sin \chi \cos \Delta\psi e^{-h^2 r^2 q^2 \sin^2 \chi \cos^2 \Delta\psi} \right\} d\Delta\psi$$

Et $\Delta\psi$ õige väärte, siis muutub $\cos\Delta\psi$ väga vähe, kui $\Delta\psi$ peaks muutuma, nii et õigusega teda võime lugeda konstantseks ja kirjutada:

$$P_{\Delta\psi} dP = A \cdot r \cdot \sin \chi e^{-h^2 r^2 q^2 \sin^2 \chi \sin^2 \Delta\psi} d\Delta\psi \quad (50)$$

kus $A = \frac{h^2 q^2 \cos \Delta\psi}{\sqrt{\pi}} = \text{const.}$

2.) Olgu $|\Delta\psi| < \frac{\pi}{2}$ ja ärgu $\chi = 0$, siis on, kuna r väga suur:

$$P_{\Delta\psi} dP = \frac{h^2}{\sqrt{\pi}} q^2 \sin \chi \cos \Delta\psi e^{-h^2 r^2 q^2 \sin^2 \chi \sin^2 \Delta\psi} d\Delta\psi \quad (51)$$

Valemid (50) ja (51) on viijuhused üldisest valemist (49)

Olgu meil nüüd antud rida tähti, millede omaliskumispositsioonmurrad apeksiga on:

$$\Delta\psi_1 \quad \Delta\psi_2 \quad \Delta\psi_3 \quad \dots \quad \Delta\psi_i \quad \dots \quad \Delta\psi_n$$

niiskaugused apeksist:

$$\chi_1 \quad \chi_2 \quad \chi_3 \quad \dots \quad \chi_i \quad \dots \quad \chi_n$$

ning kaugused päikesest:

$$r_1 \quad r_2 \quad r_3 \quad \dots \quad r_i \quad \dots \quad r_n$$

ja olgu kõik positsioonmurrad väärtesed.

Rakendades valemit (1) mõne tähe kohta, saame:

$$P_{\psi} dP = A \cdot r_i \sin \chi_i \cdot e^{-k^2 r_i^2 \sin^2 \chi_i \sin^2(\psi_i' - \psi)} d\psi_i$$

Apersi positsioonnurk ψ peab tegema avalduse:

$$A^n \prod r_i \sin \chi_i \cdot e^{-k^2 r_i^2 \sin^2 \chi_i \sin^2(\psi_i' - \psi)} \quad (52)$$

tegema maksimaalseks.

Kui nüüd oletada, et vaatlusi on tehtud väga suurel hulgal ja et vaadeldud tähed võimalikult ühtlaselt üle taeva ärajaotatud on, nii et kahe vaadeldud tähe vaheline nurkkonngus on küllalt väike, siis võime avaldust

$$\prod r_i \sin \chi_i$$

lugeeda ψ muutumisel konstantseks. Sellest aga järgneb et tingimus (52) on rahuldatud siis, kui

$$\sum r_i^2 \sin^2 \chi_i \sin^2(\psi_i' - \psi) = \min. \quad (53)$$

Võrreldes viimast sfääriliste meetodite lähete tingimustega, näeme et nad ühtuvad, kui r -id, see on tähtede konngused lugeda võrdseteks.

Kui aga oletada, et positsioonnurjad apexsiga ei ole väikesed, kuid süski on vähemad kui $\frac{\pi}{2}$, siis ei ole enam maksimaalne selmine harutus. Nüüdseks korral peame rakendama valemit (51).

$$P_{\Delta\psi} dP = \frac{h r_i}{\sqrt{\pi}} q \sin \chi_i \cos \Delta\psi_i \cdot e^{-h^2 q^2 \sin^2 \chi_i \sin^2 \Delta\psi_i} d\Delta\psi_i$$

Parallaktilise liikumise positsioonnurja saame tingimusest:

$$\left(\frac{hq}{\sqrt{\pi}}\right)^n \prod r_i \sin^2 \chi_i \cos \Delta\psi_i \cdot e^{-h^2 q^2 \sum \alpha_i^2 \sin^2 \chi_i \sin^2 \Delta\psi_i} = \max.$$

ehk mis samaväärne:

$$\sum \left\{ \log \frac{hq}{\sqrt{\pi}} + \log r_i \sin \chi_i \right\} + \sum \log \cos \Delta\psi - h^2 q^2 \sum \alpha_i^2 \sin^2 \chi_i \sin^2 \Delta\psi = \max.$$

Nendel samadel eeldustel, mis me ennegi oletasime, võime avaldust

$$\sum \left\{ \log \frac{hq}{\sqrt{\pi}} + \log r_i \sin \chi_i \right\}$$

lugeda ψ suhtes konstantseks ja seega jääb meil tingimus:

$$h^2 q^2 \sum \alpha_i^2 \sin^2 \chi_i \sin^2 \Delta\psi - \sum \log \cos \Delta\psi = \min. \quad (54)$$

ja kui kõik α -rd lugeda võrdseteks:

$$\sum \sin^2 \chi_i \sin^2 \Delta \psi_i - \frac{1}{h^2 g^2 c^2} \sum \log \cos \Delta \psi_i = \min.$$

Et aga α harilikult väga suur, siis võrme liiget

$$\frac{1}{h^2 g^2 c^2} \sum \log \cos \Delta \psi_i$$

lugeda nulliks siis, kui $\Delta \psi$ ei ole väga lähedal $\frac{\pi}{2}$ le ja saame seega endise tingimuse:

$$\sum \sin^2 \chi \sin^2 \Delta \psi = \min.$$

Kui aga $\Delta \psi$ omab väärtusi, mis $\frac{\pi}{2}$ lähedal, siis jääb maksimaalset tingimust (34), mis ei ühtu selle tingimusega, mis on aluseks sfäärilistele meetoditele.

Juhusel, kui $\Delta \psi$ võib omada rgasugusi väärtusi, on üldise valemi rakendamise keerulisem. Võib aga kindlasti öelda, et me kasin ei jõua tingimuseni (53)

Võttes esitatud harutust lühidalt kokku võrme õigeks tunnustada laused:

1.) Oletusel et koordinaadistikus A. tähtede liikumine on paigutatud Maevelli seaduse järel, võimaldavad sfäärilised meetodid arvutada apeksi koordinaate ainult siis, kui päikesel liikumine võrreldes tähtede liikumisega on suurem.

2.) Et aga tegelikult päikesel liikumine

samat suurusjärku on, mis tähtedelgi, siis ei võimalda sfäärilised meetodid arvutada päikese liikumist geomeetbilise keskkoha suhtes.

3.) Nüüsegusel korral oleme summitud trigonusi

$\sum \sin^2 \chi \cdot \Delta \psi^2$ ja $\sum \sin^2 \chi \cos^2 \Delta \psi = \min$ lugema meelevaldseteks apeksi definitsioonideks, mis ei tarvitse ühtuda selle definitsiooniga, mida me andsime töö algul.

4.) Ei ole õigustatud Herscheli, Besseli, j.n.e oletused, nagu oleks tähtede omalükkumiste korral kaldumine parallaktilise liikumise sihiist tulnud vaatlusvõrgadest, või on vähemalt sarnased vaatlusvõrgadega.

§5. Ruumilised meetodid.

Ülpool, sfääriliste meetodite juures esinemataskustest on vabad ruumilised meetodid, millele esitajana harutame läbi Airy oma. Võib tõestada, ja seda me ka kohe teeme, et Airy meetod võimaldab leida päikese liikumist nende tähtede geomeetbilise keskkoha suhtes, missugused arvutuste juures tarvitatud.¹²⁾

Airy trigonussvõrrandid, millede abil arvutatakse päikese liikumise komponente, on nagu ülpool näidatud:

$$\left. \begin{aligned} \Delta X \sum \sin^2 \alpha - \Delta Y \sum \sin \alpha \cos \alpha &= \sum r \sin \alpha \Delta \eta \\ -\Delta X \sum \sin \alpha \cos \alpha + \Delta Y \sum \cos^2 \alpha &= -\sum r \cos \alpha \Delta \eta \end{aligned} \right\}$$

Nendele võrranditele võrme anda ka kuju:

$$\left. \begin{aligned} \Delta X \sum 1 \sum \sin^2 \alpha - \Delta Y \sum 1 \sum \sin \alpha \cos \alpha &= \sum r \Delta \eta \sum \sin \alpha \\ -\Delta X \sum 1 \sum \sin \alpha \cos \alpha + \Delta Y \sum 1 \sum \cos^2 \alpha &= \sum r \Delta \eta \sum \cos \alpha \end{aligned} \right\} (55)$$

Tähistades tähe liikumiskomponente pöikesel suhtes, kui viimane paigal seisab:

$$\Delta x', \Delta y', \Delta z'$$

sis on, kuna need ^{on} vastasmärgidega ΔX , ΔY ja ΔZ -le, makses seos:

$$r \Delta \eta = -\sin \alpha \Delta x' + \cos \alpha \Delta y'$$

Asetades viimast süsteemi (55) saame võrrandid:

$$\begin{aligned} (\Delta X \sum 1 + \sum \Delta x') \sum \sin^2 \alpha - (\Delta Y \sum 1 + \sum \Delta y') \sum \sin \alpha \cos \alpha &= 0 \\ -(\Delta X \sum 1 + \sum \Delta x') \sum \sin \alpha \cos \alpha + (\Delta Y \sum 1 + \sum \Delta y') \sum \cos^2 \alpha &= 0 \end{aligned}$$

Me vaatame viimases süsteemis avalduste:

$$(\Delta X \sum 1 + \sum \Delta x') \quad \text{ja} \quad (\Delta Y \sum 1 + \sum \Delta y')$$

kui tundmatute peale.

Et selle võrrandsüsteemi determinant:

$$\Delta = \sum \sin^2 \alpha \sum \cos^2 \alpha - \sum \sin \alpha \cos \alpha \sum \sin \alpha \cos \alpha =$$

$$= \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \{ \sin^2 \alpha \cos^2 \beta - \sin \alpha \cos \alpha \sin \beta \cos \beta \} \neq 0$$

siis on ainult võimalikud lahendused:

$$\Delta X \sum 1 + \sum \Delta x' = 0 \quad \Delta Y \sum 1 + \sum \Delta y' = 0$$

ehk

$$\Delta X = -\frac{1}{n} \sum \Delta x' \quad \Delta Y = -\frac{1}{n} \sum \Delta y'$$

(NB)

Viimased aga tähendavad, et ΔX , ja ΔY on mõeldud liikumise komponentidena geomeetrilise keskkoha suhtes.

Analoogilise mõttekõiguga saab jõuda samadele resultaatidele, kasutades võrrandisi (16) või (16').

Teisest küljest on aga valemid (17), mis määravad ära pöikese liikumise ortogonaalseid komponente, tuletatavad tingimusest:

$$\sum (\Delta x'_i - \Delta X)^2 = \min \quad \sum (\Delta y'_i - \Delta Y)^2 = \min$$

$$\sum (\Delta z'_i - \Delta Z)^2 = \min.$$

kuna Δ ing omad:

$$\sum (\Delta \xi'_i - \Delta \xi)^2 = \min \quad \sum (r \Delta \xi'_i - r \Delta \xi)^2 = \min \quad (56)$$

$$\sum (r \Delta \eta'_i - \Delta \eta)^2 = \min$$

(kus $\Delta \xi$, $\Delta \xi$ ja $\Delta \eta$ on antud valemitega (1)).

On aga kerge näidata valemi (35) põhjal, et mõlemad tingimused ühtuvad siis kui

$$h_1 = h_2 = h_3$$

Seega oleme õigustatud ütlema:

Tänu meetod võimaldab arvutada päikese liikumist geomeetrilise keskkoha suhtes ainult siis, kui tähtede liikumine allub selles koordinaadistikus Maxwelli seadusele.

WR5

XI

Tähtede liikumise juhustisest
paigutusest.

Kui võrrelda üksikute tähtsamate arvutuste
te resultate:

Herschel	$\alpha = 245^\circ$	$\delta = 40^\circ,4$	Herscheli meetod
Argelander	$\alpha = 259^\circ,8$	$\delta = 32^\circ,5$	Argelanderi "
Mäddler	$\alpha = 261^\circ,6$	$\delta = 39^\circ,9$	" "
Kobold	$\alpha = 266^\circ,5$	$\delta = -3^\circ,1$	Besseli "
Airy	$\alpha = 264^\circ,5$	$\delta = 24^\circ,7$	Airy "
Boss	$\alpha = 270^\circ,5$	$\delta = 34^\circ,3$	" "
Campbell	$\alpha = 268^\circ,5$	$\delta = 25^\circ,3$	" "

sis on otsukohe märgatav hea ühtumine otse-
tõususe, kuid suur lahku minek käändes. Kuna
lahku minek otsetõususe end harilikku vaates ja ka
loodusvõrdlega seletada laseb, on selles suhtes ~~pää~~
käändes võimata misugust otsust teha.

Nagu eelmises peatükis selgitatud, ei või=
molda sfäärilised meetodid leida päikeselii-
kumist geomeetrilise keskkoha suhtes. Iga sfääri-
lone meetod on omaette apersi definitsioon. Nii
on Argelanderi meetodi tingimus:

$$\sum s \sin^2 \chi \cos^2 \Delta \psi^2 = \min$$

ja Besseli:

$$\sum \sin^2 \chi \sin^2 \Delta \psi = \min$$

Mõlemad tingimused ühtuvad, kui $\Delta \psi$ hästi väike, ja võimaldavad siis ka arvutada pöörise liikumist tähtede geomeetriselise keskpöörise suhtes. Et aga tegelikult $\Delta \psi$ võib muutuda 0 kuni 2π -ni, siis on mõlemad definitiivomid väga lahkuminevad. On ka arusaadav, et resultaadid ei pea kokku langema, nagu see ka tegelikult on:

Mädler $\alpha = 261,6$ $\delta = 39,9$ ja Lobold $\alpha = 266,5$ $\delta = -3,1$

Kuid meetodite põhimõtteline lahkumine ei suuda seletada resultaatide lahkuminekut arvutajate vahel:

Ainy $\alpha = 261,5$ $\delta = 24,7$ ja Boss $\alpha = 270,5$ $\delta = 34,3$

kuna siin on rakendatud ühte ja sama meetodit. Ehkgi vahe siin ainult 10° piirides, äletab ta siiski võimaliku vea, mis oleks võinud tekkida vaatluste ebatäpsusest ja loodushäkkudest korratusest. Põhjus peab peituma mujal. ^(13.)

Kõik siinamoodi käsitletud meetodid toetusid hüpoteesile tähtede liikumise juhuslikkusest. Üksikute arvutuste tulemuste lahkumine on aga küllaldaselt põlijuseks eelduste arvustuse alla võtmiseks.

Esimene valus hoop klassilistele meetoditele

anti n. n. star drift' role, see on paralleelselt liikuvate tähtede parve, leidmistega. Klinkerfues pami juba enne radiaalkünnuste täpse mõõtmise võimalust tähele, et Ursae Majoris'e tähed β , γ , ϵ , δ omal liikumiste poolt väga iiksteistele sarnanevad, see on nende liikumine näis koonduvad ühte täppi. Nähtust püüti seletada perspektiivilise koondumisega, oletades et tähed kaugenevad meist paralleelseid teid mööda. Höfler jätkates Klinkerfuesi tööd, raskendas oma uurimustes Vogel ja Scheineri poolt leitud nimetatud tähtede radiaalkünnusi ja leidis Klinkerfuesi resultaatile kinnitust. Ta määras ära, et kogu süsteemi liikumine on suunatud täppi $\alpha = 428,7$ $\delta = 34,9$ ja et süsteemi parallaks on $\pi = 0,0165$. Parallaxi arvutamise võimalus oli antud radiaalkünnuste, süsteemi näilise koondumispunkti ja omal liikumiste teadmiseega.

Edaspidised tööd Ludendorfi poolt kinnitasid Höfleri resultaati, kuid lahkkumiseks tuli nimelt parallaksis, mida Ludendorf leidis olevat $\pi = 0,0352$, seega pea 3rd korda suurem kui Höfleri oma. Asi läheb end ehk seletada Höfleri radiaalkünnuste väikese täpsusega. Ludendorf tegi kindlaks, et α ja η Ursae Majoris ei kuulu sellesse parve, millest praegu jutt.

Varsti peale Ludendorfi tööde ohumist näitas Hertzsprung, et α Can. maj., β Aurigae ja β . Erid. peavad kuuluma samasse Ursae Majoris'e parve, kuna kõrkide, nii Ursae Majoris'e kui ka ni-

metatud kolme tähe omalükkumised näitavad õige suurt tendentsi koonduda ühte täppi, mille koordinaadid Hezspuungi järel on:

$$\alpha = 127^{\circ}, 8 \quad \delta = 40^{\circ}, 3.$$

Uraae ilajonise parv näitab meile, kui suure kahtlusega tuleb võtta hüpoteesi tähtede juhuslisest lükkumisest.

Kui Bessel 1829 - 1841 aastatel Plejādidele vihma omalükkumised mõõnas, siis leidis ta, et kogu rühm, mis taevaski on tihedasti koondunud, moodustab süsteemi, millel on termikuline liikumine ruumis. Järgnevad, mitmete hoolivate uurijate nagu Gould, Jacobi ja iseloomiliselt Elcini tööd tegid kindlaks, et Plejādide rühm liigub 5"3 aastasajaks. Plejādide radiaalkiiruste mõõtmise osutus aga raskena, kuna spektris vähe ja väga segaselt jooni leidub. Sellist hoolimata võib Tolanski tööde põhjal Yerki Observatooriumis lugeda nende liikumise kiirust vastajoone suunas 10 kilomeetrit sekundis. Tuleb aga tähele panna, et see arv on ainult ligikaudne. Võrreldes seda arvu kiirusega, mida peame Plejādidele saama päikese liikumisest, selgus et nad peaaegu täiesti vastassuunas liiguvad. Sellest järeneb, et Plejādid seisavad lokaalsüsteemi raskuskeskkoha suhtes paigal. Viimasel oletusel on arvatud ka Plejādide parallaks ja leitud $\bar{\pi} = 0,02$.

7seäransis täpserd mõõtmisi on tehtud n. n. Tauruse parve liikumise elementide määramiseks. Kuid ehk Ursae klajonise või Plejadide parve reaalsuses kahelda võiks, on see täiesti lubamata Tauruse rühma juures, mille uurimist on toimetanud L. Boss, kelle nimi juba tähendab, et siin kahtlust ei või olla. Ühtlasi on selle parve olemasolu kindlaks tõenduseks juhuslise omaliikumise hüpoteesile toodud vastuväidetele.

L. Boss oma uurimistes leidis et terve rühma omaliikumised näivad täpselt koonduvat punktis, mille koordinaadid on:

$$\alpha = 92^{\circ} \quad \delta = 7^{\circ}$$

Ei tule aga arvata, nagu ka juba eelpool tähendatud, et kõik tähed üksteisele lähenevad, vaid koondumist tuleb võtta kui puht perspektiivset nähtust. Viimast väidet tõendavad ka radiaal-kiiruste mõõtmised, mille järel kogu süsteem kaugeneb kiirusega $46,6 \frac{\text{km}}{\text{see}}$. Teades tähtede omaliikumist, radiaalkiirust, koondumispunkti, aranes võimalus arvutada tähtparve parallaksi. Selgus et see on $\pi = 0,025$.

Kapteeni uurides Glyadide rühma, mis teatavasti kuulub Tauruse tähekoosse, leidis et see moodustab parve, mille parallaks $\pi = 0,023$ on väga heas kooskõlas Bossi tulemustega.

Need on tähtsamad tähtede parved, mis praegu teada. (on ka vähemaid olemas). On toodud

põhjendus väitele, et tähtede liikumine ei allu ühes-
 kse koordinaadistikus juhuse seadusele.

Järgmine hüpotees, mis ehk võiks vastuvõetavam
 olla, on oletus, mille järelle tähtede paarved küll või-
 malikud, kuid millede liikumine üksteise suhtes
 on juhuse seaduse järelle paigutatud. Peale selle
 on paari ja parvedesse koondunud tähti võrreldes
 kogu kohaliku süsteemi kuuluvate tähtede ar-
 vuga väga vähe, nii et nende olemasolu suurt muu-
 datust juhuse seadusesse ei tooks.

Kui selle hüpoteesi alusel päikese liikumist
 arvutada, siis võib tarvitada endiselt valemid, mis
 olid tuletatud juhusolise liikumise alusel, kui enne
 meetodite rakendamist materjaal nii korralda-
 da, et tähed, mis kuuluvad ühte parve ühendat-
 akse ja loetakse üheks parve esitavaks täheks.
 Selle põhimõtte järelle on tegelikult ka arvutusi lä-
 bi viidud, nagu me seda elpool Campbelli ar-
 vutuse juures nägime.

Ehk praegu esitatud hüpotees küll parem
 on, kui eeldus tähtede juhuslikust liikumisest, ei
 vasta ta siiski tõele, nagu edaspidised uurimi-
 sed näitavad.) Sellel alal on suured teened Kap-
 teynil, kes näitas et tähtedel on tung liikuda
 kahes, üksteisele vastasseisva täpi suunas. Kou-
 des tähtede omalükkumisvektorid mõnel püvratud
 taevavõlvi osal mõnda täppi, allesjättes vektorid sum-
 na ja liites ühesuunalised vektorid, leidis Kapteyn,
 et saadud kõver, mis ühendab tähtede oma-

liikumisvektorid mõnel piiratud taevavälvi osal mõnda
 täppi selles piirkonnas, allesjättes sealjuures vektori suuna ja
 lüües ühesuunalised vektorid, leidis Kapteyn, et saadud kõver,
 mis tähendab tähtede omaliikumisvektorite lõppe, ei luba kuidagi
 aproximeerimist kõveraaga, mis oleks järgnenud tähtede ju-
 huslikust liikumisest. Küll oli aga võimalik saada vast-
 lusandmetele vastavat kõvera kuju, kui oletada, et tähed
 on koondunud kahte üksteisest läbitungvasse parve
 vastassuunaliste liikumistega. Tähtparvede koondustä-
 pid, mida Kapteyn nimetas näilisteks verteksitaks, osu-
 tused esimene 4° lõuna pool α Brionist ja teine 2° lõu-
 na pool η Sagitariü'd. Näilisteks verteksitaks nimetas
 Kapteyn neid sellepärast, et vaadeldes tähtparve-
 de liikumisel peab komponendina ka esinema püü-
 kesse liikumine ja seega tooma verteksiti nihkumist
 tõelisest asukohast. Tõelisi verteksisi on võimalik lei-
 da, nagu me seda edaspidi näeme, kui teada on:

1.) kas mõlemate parvede liikumine raskuskeskkohta
 suhtes 2.) või tähtede arv ehk arvu suhe, mis kuulu-
 vad mõlematesse parvedesse.

Kapteyn leidis tõelise verteksina:

$$\alpha = 92^\circ \quad \delta = 13,5^\circ$$

ja teine otse vastas taevaskera punktis.

Kapteyni uurimused näitasid, et senine hü-
 potees tähtede liikumise kohta on vale. Et päikesse
 liikumist leida, tuleb teha teised, tõsiarvadele pae-
 mini vastavad hüpoteesid.

XII

Eddingtoni teooria tähtede liikumise paigutuse kohta.

Kapteyni uurimiste tagajärjena asuti seaduste otsimisele, mis valitsevad tähtede liikumissuunade paigutusel. Kapteyn ise oli annud roole kahest liigestisest läbitungivast tähtede parvest. Oli tarvis anda ainult hüpoteesile matemaatiline väljendus ja teha kohaseks armutuste rakendamisele.

Selle sihiga asusgi Eddington Kapteyni hüpoteesi uurimisele, mille tagajärjena ilmus teooria, mis oma täpse matemaatilise käsitluse kõrval ka väga hästi vaatlustest saadud andmetega ühtas.¹⁵⁾

Eddington oletas, et liikumine parves, kui ma-
haarvata kogu parve liikumine, on paigutatust
juhuse seaduse järel. Küllalt väikeses taevas osas,
mida me võime lugeda tasapinnaks, peab Max-
velli seaduse järel olema tõenäosus selline, et liiku-
mise komponendid asuks u ja $u+du$, v ja $v+dv$
vahel, antud valemiga:

$$PdP = \frac{h^2}{\pi} e^{-h^2(u^2+v^2)} du dv \quad (59.)$$

Olgu nüüd tähistatud:

\mathcal{V} — parve liikumise kiirus projektituna raa-
deldava taeva osale.

p — tähe omaliikumine

ψ — omaliikumise positsiooninurk.

Nüügsuguse tähistuse juures on:

$$u^2 + v^2 = p^2 + \mathcal{V}^2 - 2p\mathcal{V}\cos\psi$$

$$du dv = p dp d\psi$$

Ning tõenäosus selleks, et mõne tähe omaliikumise suund asuks ψ ja $\psi + d\psi$ vahel:

$$PdP = \left\{ \frac{h^2}{\pi} \int_0^\infty e^{-h^2(p^2 + \mathcal{V}^2 - 2\mathcal{V}p\cos\psi)} p dp \right\} d\psi \quad (58)$$

Asetades:

$$x = h(p - \mathcal{V}\cos\psi) \quad \bar{z} = h\mathcal{V}\cos\psi \quad (59)$$

saame:

$$PdP = \frac{1}{\pi} e^{-h^2\mathcal{V}^2} d\psi e^{\bar{z}^2} \int_{-\bar{z}}^{\infty} e^{-x^2} (x + \bar{z}) dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} e^{-h^2\mathcal{V}^2} d\psi \left\{ \frac{1}{2} + \bar{z} e^{\bar{z}^2} \int_{-\bar{z}}^{\infty} e^{-x^2} dx \right\}$$

Tähistades:

$$\frac{1}{\pi} \left\{ \frac{1}{2} + \bar{z} e^{\bar{z}^2} \int_{-\bar{z}}^{\infty} e^{-x^2} dx \right\} = f(\bar{z}) \quad (60)$$

ja kogu parve kuuluvate tähtede arv n -ga, siis on tähtede arv, millele omalükkumise suund on ψ ja $\psi + d\psi$ vahel:

$$N dN = \frac{n}{N} e^{-h^2 \psi^2} \cdot f(\bar{r}) d\psi \quad (61.)$$

Kui me tähtede arv nende omalükkumise suuna järel loetleme ja siis vastava suuna vektorid mõnest kindlast täpist, näit: teatava taevaosa keskkohest, kus me tähti loeme, alates proportsionaalselt tähtede arvule, millele omalükkumise suund ühtlasi vastava vektoriga, proportsionaalselt tähtede arvule, kanname ja siis vektorite otsapunktid kõrvaga ühendame, peame saama, kui hüpotees tähtede omalükkumise juhuslisest paigutusest on õige, kõvera, mille polaarvõrrand on antud valemiga (61). Loetledes aga tegelikult tähtede omalükkumisi ja moodustades vastava kõvera, selgus et teoreetiline kõver (61) ei võimalda mingil tingimisel läheneda end tegelikule. Selle vastu oli aga kooskõla hea, kui esimene oli teoreetiline ja tegeliku sagedusjaotuse vahel hea, kui esimene oli antud valemiga:

$$P = n_1 e^{-h^2 \psi_1^2} f(\bar{r}_1) + n_2 e^{-h^2 \psi_2^2} f(\bar{r}_2) \quad (62.)$$

Vii mane valem on aga sagedusfunktsioon juhusel, kui kaks tähtede parve üksteisele vastassuunas liiguvad, kusjuures tähtede liikumine ük-

sikus parves allub Maxwelli seadusele.

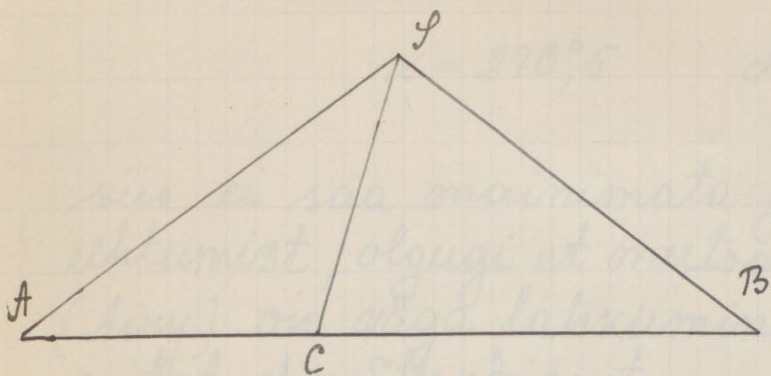
Oma uurimistes Eddington kasutades Bossi ka-
talooigi 5322 tähte jagas taeva 17 ossa, joonistas iga
osa jaoks vastava sagedusjaotuse kõvera ning aprok-
simeeris saadud kõvera teoreetilisega. Sealjuures lei-
ti siis otsekohse ψ_1 ja ψ_2 ning ψ_1 ja ψ_2 , kusjuures esi-
mesed olid arvestatud ühikutes $\frac{1}{h}$. Tärvitades ha-
vilikku ~~võtet~~ võtet - vähimväärtuste meetodi,
leiti kõikide tähtede kohta üle taeva verteksid:

10 ekvaatori pütkonda	$\bar{I} \alpha = 92,4$	$\bar{d} = -14,1$	$q = 1,507$
	$\bar{II} \alpha = 286,5$	$\bar{d} = -63,6$	$q = 0,869$
7 polaar pütkonda	$\bar{I} \alpha = 89,3$	$\bar{d} = -16,7$	$q = 1,536$
	$\bar{II} \alpha = 289,1$	$\bar{d} = -63,6$	$q = 0,816$
Kogu taeva sfäär	$\bar{I} \alpha = 90,8$	$\bar{d} = -14,6$	$q = 1,516$
	$\bar{II} \alpha = 287,9$	$\bar{d} = -64,1$	$q = 0,885$

Et need andmed on maksivad koordinaadis-
trüksis B , siis on arvestamata põikese liikumine. Ei-
tatud arvud käivad seega nästiste verteksite kohta.

Tehes uurimisi tähtede arvu kohta, missuguse-
sed kuuluvad ühte või teisse parve, selgus Valenii
(62) põhjal, et nende hulk on vahetultas 3:2.

Nagu eelpool juba tähendasime, aranes seega või-
malus arvutada põikese liikumist ja tõelisi
verteksi. Olgu PA ühe ja PB teise tähtparve
liikumise suun, millede vahel, nagu raatlus=
test selgus on nurk suurusega umbes 100°



ja gades BA kahte osa, suhtes 3:2 ja ühendates täpi C P-iga, saame joone, millel liiguks raskuskeskkoht, siis kui pöörde, mis asub täpis P paigal seisaks, ehk teiste sõnadega: Joon PC näitab pöörde liikumist raskuskeskkohta suhtes.

Vaatlustest on meil teada PB ja PA suhe, kuna on teada tähtparvede relatiivne kükus. Samuti võime vaatlusandmetest saada BC ja CA suhte, mis ühtub konstruktsiooni põhjal tähtede arvu vahetavara mõlemates parvedes. Et verteksiite koordinaadid teada, on arvutatav ka nurk BPA .

Nende andmete põhjal võime arvutada nurga BPC ja joone PC suhte PA või PB -ga. Kui nurk BPC teada on, ei tee apeksi koordinaatide arvutamine enam mingit raskust.

Eddingtoni arvutuste juures selgus, et koordinaatidest A on verteksiid:

$$\text{I RA} = 94^{\circ},2$$

$$\text{Dec} = 11^{\circ},9$$

$$\text{II RA} = 274^{\circ},2$$

$$\text{Dec} = -11^{\circ},9$$

ja apeksi koordinaadid:

$$\alpha = 267^{\circ},8$$

$$\delta = 36^{\circ},4$$

$$q = 0,91 \frac{1}{2}$$

Kui võrrelda Eddingtoni resultaati Bossi arvust leitud apeksi koordinaatidega samast materjalist:

$$\alpha = 270,5$$

$$\delta = 34,5$$

siis ei saa mainimata jätta arvuole väga head
 ühtumist, olgugi et meetod, mida Boss tarvitas
 (Airy) on väga lahkumisev Eddingtoni poolt
 esitatud mõttekäigust.

XIII

Schwarzschildi ellipsoidhüpotees.

Eddington - Kapteyni kahe tähtparve hüpoteesist
 järgnev sagedusfunktsioon on küll kooskõlas täh-
 tede tegelike omalükkumiste jaotustega, kuid oletus
 kahest tegelikust tähtede parvest näis olevat kau-
 nis kahtlane. Sellest seisukohast lähtudes esitas Sch-
warzschild 1907 aastal hüpoteesi, mille järel tähed on
 koondatud küll ühte parve, kuid milles liikumis-
 vektorite suuna ja suuruse jaotus on määratud tõe-
 näosusfunktsiooniga.¹⁶⁾

$$P dP = \frac{h_1^2 h_2}{\pi V \pi} e^{-h_1^2 \Delta x^2 - h_2^2 (\Delta y^2 + \Delta z^2)} dx dy dz \quad (63)$$

(kus h_1 ja h_2 konstandid)

Nagu näha on Schwarzschildi hüpotees erijuhus
 valemist (35)^{Ch. 56}

Hüpoteesi tõestamine Schwarzschildi poolt sündis
 Crombridge katalogi omalükumiste põhjal. Et
 späärilisi omalükumisi selle teooria alusel läbitöö-
 tada, on tarvilik leida späärilist sagedusfunktsioo-
 ni. Järgnevas asume selle tuletamisele ning esita-
 me ühtlasi ka Schwarzschildi poolt antud apex-
 si kui ka verteksite (verteksites nimetame siin
 ellipsoidi suure telje suuna poolt määratud
 täppe taevaväljal, kuna need täpid mõtteliselt
 Kapteyni verteksitega ühtuvad.) arvutamise me-
 todit, mis oma slusa käsitlese tõttu tõsisest tähel-
 panu väärib.

§1. Spääriline tähenäosusfunktsioon
 koordinaadistikus A .

Me nimetame:

komponenti, mis on suunatud raatejoone sihis
 w -ks, risti temale, kuid asuvana tasapinnas,
 mis läbib raatejoont ja ellipsoidi pööraltelge
 u -ks, ning u ja w le risti olevat komponen-
 ti v -ks.

Niisuguse tähistuse juures on maksivad
 valemid:

$$\Delta x = u \sin X + w \cos X$$

$$\Delta y = v$$

$$\Delta z = u \cos X + w \sin X$$

(64.)

kusjuures X on nurk raatejoone ja pööraltelje vahel.

Tehes need asetused valemisse (63) saame tõenäosusfunktsiooni uutes koordinaatides:

$$P = K e^{-(h_1 \sin^2 \chi + h_2 \cos^2 \chi) u^2 - h_2 v^2 - h_1 (\cos^2 \chi + h_2 \sin^2 \chi) w^2}$$

$$- h \sin \chi \cos \chi (h_1 - h_2) uv$$

Et sellest valemist tõenäosusfunktsiooni sfääril leida, tuleb teha integreerida w järel -∞ kuni +∞. Viies läbi integreerimist saame avalduse

$$PdP = K e^{-au^2 - bv^2} du dv \tag{65}$$

kusjuures:

$$K = \frac{K \sqrt{\pi}}{\sqrt{h_1 \cos^2 \chi + h_2 \sin^2 \chi}} \quad a = \frac{h_1 h_2}{h_1 \cos^2 \chi + h_2 \sin^2 \chi} \tag{65a}$$

$$b = h_2$$

Nagu näha on omaliikumiste jaotus sfääril elliptiline.

WR

§2. Sfääriline sagedusfunktsioon koordinaadistruktus B.

Olgu päikese liikumise projektsioon sfääri mingil osal esitatud komponentide u ja

v kaudu, ning olgu u ja θ tähe liikumise suuna ja positsiooninurk.
Siis on:

$$au^2 + bv^2 = a(\alpha \cos \theta - u)^2 + b(\alpha \sin \theta - v)^2 \tag{66}$$

$$du dv = \alpha d\alpha d\theta$$

Ja järjekult tõenäosus sellers et tähtede pos. nurk asuks θ ja $\theta + d\theta$ vahel:

$$P(d\theta) = d\theta \frac{ab}{\pi} d\alpha e^{-(a^2 u^2 + b^2 v^2)} \frac{e^{-\xi^2}}{\mu} \int_{-\xi}^{\xi} e^{-x^2} (x + \xi) dx \tag{67}$$

Kusjuures asetatud: $\mu = k^2 \cos^2 \theta + h^2 \sin^2 \theta$; $\xi = \frac{k^2 u \cos \theta + h^2 v \sin \theta}{\sqrt{\mu}}$
Me tähistame edaspidi: $x = \sqrt{\mu} \xi$

$$e^{-\xi^2} \int_{-\xi}^{\xi} e^{-x^2} (x + \xi) dx = f(\xi) \tag{68}$$

On näha, kuna kindlas koordinaadistikus

$$\frac{ab}{\pi} e^{-a^2 u^2 - b^2 v^2} d\theta$$

on konstant, et tõenäosus on proportsionaalne $\frac{1}{\mu} f(\xi)$ -ga. Et aga oodatar tähtede arv, millel on kindel ette määratud omal liikumine, on proportsionaalne tõenäosusega, siis on ta ka proportsionaalne

$$\frac{1}{r} f(\bar{r})$$

-ga.

Kui me teatava kindla suunaga vektorite arvutame ja uue sama suunalise vektori moodustame, kuid mille pikkus on proportsionaalne tähtede arvuga, siis võime öelda, et vektori pikkus on suuna funktsioon. Ühendades kõik võimalike suunadega vektorite otsad, kui nad algavad ühest täpist, saame kõvera, mis peab olema väga sarnane kõverale:

$$r = \frac{1}{r} f(\bar{r}) \quad (69)$$

kui hüpotees tähtede ellipsoidaalsest liikumisjaoitusest on õige.

§3. Vaadeldud omalükkumiste ja ellipsoidhüpoteesist järgneva sageduste võrdlusmeetod.

Valemiga (69) oleks antud võimalus võrrelda teoreetilisi ja tegelikke sagedusi. Meil oleks ainult tarvis võrrelda (69) järgnevad r -d ja tähtede arvud teatavate kindlate θ -de juures. Et aga tegelikult valem (69) oleneb konstantidest, u, v, a, b , siis peame, et võrdlus võimalik oleks, neid

muutma ja nga nne kombinatsiooni juures ar-
vutama vastavalt θ -dele ridade tabeli. Niiisugune
arvutus on aga väga suurte raskustega seotud,
sellepärast on püütud leida mõnusamat teed.

Meetod, mille abil on võimalik suurtest täh-
tede omalükkumise hulgast tuletada valemi kons-
tandid ja seega ka ühtlasi võimalust leida vastust
küsimusele, kas ellipsoidaal-hüpotees on tegelikult
maksim, olgu järgnevas lühidalt esitatud.

Me nimetame tähtede arvu, millele oma-
lükumispõs. nurk on θ_1 \mathcal{F} -ks ja arvu mille-
de põs. nurk on $\theta_1 + 180^\circ$ \mathcal{F}' -ks. lhn. 93

Kui valemities (67) ja (68) asetada
 θ asemele $\theta + 180^\circ$, siis on näha, et niisuguse
asetuse juures μ väärtus endiseks jääb, kuna \bar{t}
oma mäkki muudab.

Selletõttu on:

$$\mathcal{F} = \alpha \frac{1}{\mu} f(\bar{t}) \quad (70)$$

$$\mathcal{F}' = \alpha \frac{1}{\mu} f(-\bar{t})$$

(kus α võrde tegur)

Valemi (70) ja (71) põhjal on:

$$\mathcal{F}' + \mathcal{F} = \alpha \frac{1}{\mu} (1 + 2\bar{t} e^{\bar{t}^2} \int_0^{\bar{t}^2} e^{-x^2} dx)$$

$$\mathcal{F}' - \mathcal{F} = \alpha \frac{\sqrt{\pi}}{\mu} \bar{t} e^{\bar{t}^2}$$

(71)

moodustame nüüd kaks funktsiooni:

$$M(\bar{z}) = 1 + 2\bar{z}e^{\bar{z}^2} \int_0^{\bar{z}} e^{-x^2} dx$$

$$N(\bar{z}) = \frac{\sqrt{\pi} \bar{z}^2 e^{\bar{z}^2}}{M(\bar{z})} \quad (72)$$

Siis on:

$$\frac{f' - f}{f' + f} = N(\bar{z}) \quad \mu = \frac{M(\bar{z})}{f' + f} \quad (73)$$

Koostades tabelid $N(\bar{z})$ ja $M(\bar{z})$ jaoks, ning teades f' ja f (mida me tähtede suuna loetlemisel saame) võime leida \bar{z} ja selle järel μ .

Kui nüüd astada:

$$r_1^2 = \frac{1}{\mu} \quad r_2^2 = \bar{z}^2 \mu$$

siis on r_1 ja r_2 kohta maksavad valemite () põhjal seosed:

$$r_1^2 a^2 \cos^2 \theta + r_2^2 b^2 \sin^2 \theta = 1$$

$$r_2^2 = a^2 \mu \cos \theta + b^2 \nu \sin \theta. \quad (74)$$

milledest esimene muutuja θ ja tema funktsiooni μ -i korral pole muud kui ellipsi võrkand polaarkoordinaadistikus, kuna teise graafiline kuju on sirge.

Arvutades eelpool esitatud viisil rga θ väärtuse jaoks r_1 ja r_2 saame mida täppe, kui

α ja δ lugeda nende polaarkoordinaatideks. Ellipsoidhüpoteesi maksimuse korral peavad need nii arvutatud täpid asuma - ühed ellipsil ja teised sirgel. Et muudugi tegelikult vaevalt loota on, et need täpid just kindla ellipsi ja sirge moodustavad, kuna juba vaatlusread seda ei võimalda, siis peaks olema võimalik nendest täppidest läbi panna sirge ja ellipsi, mis võimalikult hästi nende käiku jälgiks. Ellipsi ja sirge läbipaneku võimalus on ühtlasi ka kriteeriumiks hüpoteesi maksimusele.

Oles nü ellipsi kui ka sirge joonistamisel, avaneb võimalus leida apeksi kui ka verteksite koordinaate ning ellipsiidi elemente.

Schwarzschild, käsitledes Cambridge kataloogis antud omalükumisi selle, tema poolt esitatud meetodiga, leidis et tegelikult misuguse ellipsi läbipanemine on võimalik ja rabe, mis sealjuures tekib, lasub end lihtsalt andmete ebatäpsusega seletada. Leides nga taeva osa kohta vastavad konstandid ja ühendades siis saadud resultaate, leidis Schwarzschild:

Verteks I	$\alpha = 273^\circ$	$\delta = -6^\circ$
II	$\alpha = 93^\circ$	$\delta = +6^\circ$
Apex	$\alpha = \overset{266^\circ}{\cancel{259^\circ}}$	$\delta = \overset{33^\circ}{\cancel{41^\circ}}$

XIV

Võrdlevaid märkeid Eddingtoni ja Schwarzschildi hüpoteeside kohta.

Kui võrrelda klassilisi päikese liikumisi ja kahes viimases peatükis esitatud arvutuste meetodeid, siis võib änamärgida nende vahel suurt vahet. Kuna klassilised meetodite juures arvutuste juures tarvitati otsekohe omalikkumisi nüüsi suunalt kui suuruselt, leiab viimastes rakendamist ainult suuna, see tähendab ainult kindla omalikkumissuunaga tähtede arv. Võiks ju ka viimaste juures tarvitada sama võtet, mis klassiliste meetodite juures, kuid siin on tarkustuseks peamiselt kaks asjaolu:

1.) Hüpoteesi konstandid on tundmatud, kuna klassiliste meetodite juures konstantide väärtus või kõige vähemalt nende suhe hüpoteesiga antud.

2.) Võrrandid, mis tekivad, on nüüsi keerulised, et nende tuleamine ja rakendamine puht tehnilistel põhjustel raskesti.

Peatükis X esitasime me mõttekäigu, kuidas võib leida tähtede liikumise jaotust geomeetrilise keskkoha suhtes. Ei ole huvituseks viimastes peatükkides esitatud meetode

nende põhimõtetelega võrrelda ja võrdlusest teatavad järeldused teha. Järenevas on see esiteks Eddingtoni hüpoteesiga läbi viidud.

Et aga võrdlemine võimalik oleks, peame leidma hüpoteesile vastavat tõenäosusfunktsiooni koordinaadistikus A , kuna Eddingtoni poolt on ainult käsitletud sfäärilise jaotusfunktsioon. Viimasest aga üldisema rööpmuga valemit tuletada on võimata. Sellepärast peame aluseks võttes hüpoteesi ennast tuletama nõuetar avaldus.

Viimase leidmiseks peame aga lähendama abiüllesande:

Antud on kaks urni A ja B , mis sisaldavad valgeid ning musti kuuli. Mõlemate urnide sisu segatakse. Küsitakse: kui suur on tõenäosus segest välgavõtta musta kuuli, kui teada on, et eraldi A juures see α ja B juures see β -ga võrdub.

Üllesande lähendamiseks tähistame:

- A urni valgete kuulide arvu v_1
- " " mustade " " m_1
- B " valgete " " v_2
- " " mustade " " m_2

Näisuguse tähistuse juures on tõenäosuse definitatsioonil põhjal:

$$\alpha = \frac{m_1}{m_1 + v_1} \quad \beta = \frac{m_2}{m_2 + v_2}$$

Stritar töenäosus μ on aga:

$$\mu = \frac{m_1 + m_2}{m_1 + v_1 + m_2 + v_2}$$

Vüümast avaldust võib teisendada kujusse:

$$\mu = \frac{\frac{m_1}{m_1 + v_1} + \frac{m_2}{m_1 + v_1} \cdot \frac{m_2 + v_2}{m_1 + v_1}}{1 + \frac{m_2 + v_2}{m_1 + v_1}}$$

Tähistades: $\frac{m_2 + v_2}{m_1 + v_1} = w$

(mis pole muud kui mõlemate vinni kuulise arvu suhe) ja arvestades α ja β kui töenäosuste = ga, võime μ ka kirjutada kujus:

$$\mu = \frac{\alpha + \beta w}{1 + w}$$

Meie tähtparvede probleemi juures on tegemist analoogilise ülesandega. Et hüpoteesi järel üksikutes tähtparvedes tähtede liikumine on korraldatud juhusse seaduse järel, siis peab olema:

$$\alpha = \frac{h^3}{\sqrt{V\pi}} \int e^{-h^2[(\Delta x - \Delta x')^2 + (\Delta y - \Delta y')^2 + (\Delta z - \Delta z')^2]} d\Delta x d\Delta y d\Delta z$$

$$\beta = \frac{h^3}{\sqrt{V\pi}} \int e^{-h^2[(\Delta x - \Delta x'')^2 + (\Delta y - \Delta y'')^2 + (\Delta z - \Delta z'')^2]} d\Delta x d\Delta y d\Delta z$$

kusjuures:

$$\begin{array}{ccc} \Delta x' & \Delta y' & \Delta z' \\ \Delta x'' & \Delta y'' & \Delta z'' \end{array}$$

on tähtpaaride liikumiskomponendid vaadeldavas koordinaadistruktuuris.

Tähistades tähtede arvum esimeses paaris n_1 -ga, teises n_2 -ga, võime öelda et:

$$w = n_1 : n_2$$

ja seega tõenäosusfunktsioon:

$$PdP = \frac{h^3}{\sqrt{V}\sqrt{(1+w)}} \left\{ e^{-h^2[\dots]} + w e^{-h^2[\dots]} \right\} dx dx' dy dy' dz dz'$$

Kui me vaadeldavaks koordinaadistruktuuriks nüüsgust loeme, milles geomeetiline keskkoht paigal seisab, siis peab olema

$$-\Delta x' = w \Delta x'' \quad -\Delta y' = w \Delta y'' \quad -\Delta z' = w \Delta z''$$

ja sellepärast on tõenäosusfunktsioon koordinaadistruktuuris A:

$$PdP = \frac{h^3}{\sqrt{V}\sqrt{(1+w)}} \left\{ e^{-h^2[(\Delta x + w \Delta x'')^2 + \dots]} + w e^{-h^2[(\Delta x - \Delta x'')^2 + \dots]} \right\} dx dx' dy dy' dz dz' \quad (75)$$

Olgu tähendatud, et sellest valemist võib sa-
nuti, nagu me Schwarzschildi hüpoteesi käsit-
lemisel näitasime, tuletada valem (57).

Kui saadud valem (75) võrrelda va-
lemiga (35), siis on selge, et nad võivad olla
ei saa mingisugusti konstantide väärtuste kor-

real, väljaraamatud null. Sellest aga järeneb, nagu
 \bar{X} 32 selgitasime, et komponentide

$$\Delta x, \Delta y, \Delta z$$

vahel peab makses olema funktsionaalne seos.

Seda seost on järjekindlalt kerge tulitada:

Valemi (41) põhjal peab:

$$F(\Delta x, \Delta y, \Delta z) = \ln Q(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$$

$$\text{kus } Q = \frac{h^3}{(1+w)\sqrt{\pi}} \left\{ e^{-h^2[(\Delta x + w\Delta x')^2 + \dots]} + w e^{-h^2[\dots]} \right\}$$

ja (41) põhjal peab makses olema:

$$\ln Q(\Delta x, \Delta y, \Delta z) = -h_1 \Delta x^2 - h_2 \Delta y^2 - C \quad (46)$$

(kui koordinaadistik on kohaselt valitud)

Vümasest võrrandist aga võime leida Δx ja Δy funktsioonina.

Sama hästi kui kahe tähtparve hüpooteesi, vastab vaatlusandmetele ka ellipsoidilise liikumisjaotuse. Vümasel on aga eelmisega võrreldes paremusi ja nimelt:

1.) Laseb endl paremini matemaatiliselt käsitleda

2.) Ei nõua mingit funktsionaalset seost üksikute komponentide vahel.

Kuid teisest küljest vaadates on vahe kahe tähtparve ja ellipsoid-hüpooteesi vahel ainult teoreetiline. Tegelikult on nende hüpootee-

side poolt määratud mingi sikhilised sagedused pea täiesti võrdsed.

Järjekorras olen võrdluseks arutanud teoreetilised sagedused Edingtoni ja Schwarzschildi hüpoteeside alusel ja kergemaks ülevaateks arvan esitanud graafiliselt.

Arvutused on lihtsuse mõttes viidud läbi sfääriliste sageduste korral. Sealjuures on koordinaadistik, kus nad maksivad on valitud niisuguseks, et temas tähtede geomeetiline keskkoht paigal seisab. Kaks tähtparve hüpoteesi juures on kiirusi mõõdetud ühikutes $\frac{1}{h}$ ja on võetud $V=h$. Samuti on asetatud $h^2 = 1$, mis tegelikult ka enamvähem nii on. Niisuguste konstantide valikupuhul on sageduskõverate polaarrõvranolid lihtsalt:

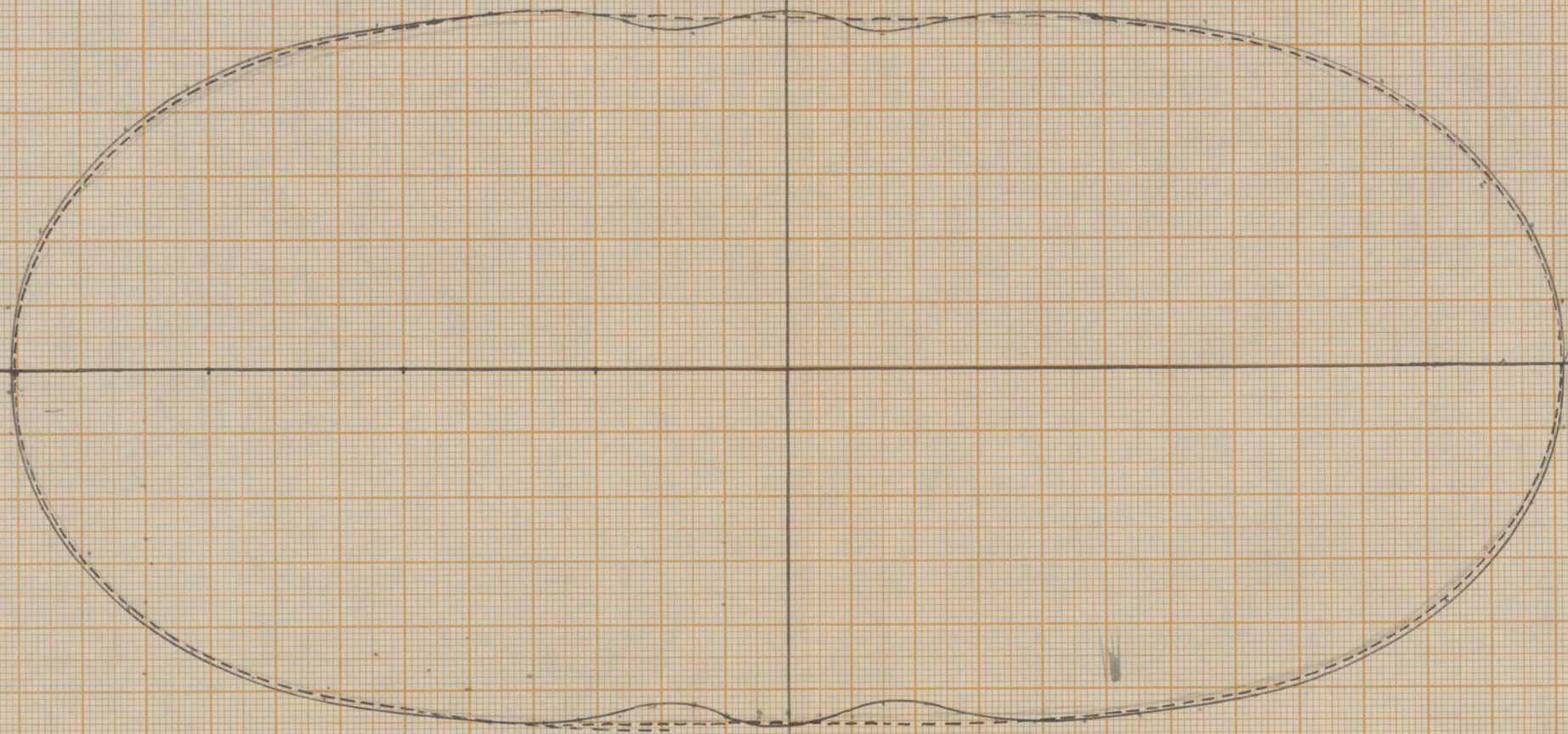
Kaks tähtparve hüpoteesi juures:

$$r = 1 + 2 \cos \theta \int_0^{\cos \theta} e^{-x^2} dx$$

ja ellipsoidhüpoteesi juures:

$$r^2 = \frac{1}{k^2 \cos^2 \theta + h^2 \sin^2 \theta}$$

Nagu järjekorras lehemiljel esitatud joonistusest näha, on vahe mõlemate kõverate vahel nii väike, et tegelikust lahucuminekust jütugi ei või olla.



----- Ellipsoid hüpotees
----- Kaks tähtpaare hüpotees.

keskmise ruuduline hälve $\delta = 0,75$ 1,5%

XV

Bravais'i meetod.

Enne hüpoteesi tähtede liikumiste jaotuse kohta määrab ära meetodi päikese liikumise arvutamiseks. Sealjuures ei ole arvutuste juures tarvis teada muud kui ainult mõne tähtede mõneda liikumiskomponenti, näit radiaal-kiirust. Tegelikult on aga niisugusel arvutusel, nagu me juba selpool nägime, väga tuntuvad raskused. Esiteks, võttes aluseks teatavat hüpoteesi, tuleb määrata vastavad konstandid, mida aga võimalik teha, kui mitte jälle nende suuruste üle hüpoteesi teha, ainult statistilise ülealugemise meetodil. Nii-viisi saadud konstante ei saa me aga lugeta täpselt, kuna nende väärtus on me määramise juures, kui sealjuures teistsugust materjali tarvitatud, isesugune on. Et aga päikese liikumise määramine jüst hüpoteesi konstantide teadmist eeldab, siis on sünnitegemist kahekorolse raskusega.

On seega arusaadav küübe vabaneda päikese liikumise arvutamise juures on niisugustest hüpoteesidest ja tarvitada arvutamisel otseselt võimalikke, mis seavad tähtede liikumiskomponente

Aastal 1843 esitas Bravais meetodi, mis nimetatud ajal küll vähe tähelepanu äratas, kuid mis uuemal ajal põikese liikumise arvutamisel ainuõrguse on omandanud.

Bravaisi meetodi põhiole selgitamiseks me äieti juba \bar{X} peatükis. Kui tähistada tähe massi m_i -ga tema liikumiskomponente koordinaadistikus B :

ja põikese, koordinaadistikus A :

sis on maksivad, nagu tõestatud, valemid:

$$\Delta X = \frac{\sum m_i \Delta x_i}{\sum m_i} \quad \Delta Y = \frac{\sum m_i \Delta y_i}{\sum m_i}$$

$$\Delta Z = \frac{\sum m_i \Delta z_i}{\sum m_i}$$

(77)

Et aga eelpool oli tõestatud seosed:

$$\begin{aligned} \Delta x &= \cos \delta \cos \alpha \Delta \xi - r \sin \delta \cos \alpha \Delta \zeta - r \sin \alpha \Delta \eta \\ \Delta y &= \cos \delta \sin \alpha \Delta \xi - r \sin \delta \sin \alpha \Delta \zeta + r \cos \alpha \Delta \eta \\ \Delta z &= r \sin \delta \Delta \xi + r \cos \delta \Delta \zeta \end{aligned}$$

süs järgneb siit:

$$\Delta X = \frac{1}{\sum m_i} \sum m_i \left\{ \cos \delta \cos \alpha \Delta \xi - r \sin \delta \cos \alpha \Delta \zeta - r \sin \alpha \Delta \eta \right\} \quad (78)$$

$$\Delta Y = \frac{1}{\sum m_i} \sum m_i \left\{ \cos \delta \sin \alpha \Delta \xi - r \sin \delta \sin \alpha \Delta \xi + r \cos \alpha \Delta \eta \right\}$$

$$\Delta Z = \frac{1}{\sum m_i} \sum m_i \left\{ \sin \delta \Delta \xi + r \cos \delta \Delta \xi \right\}$$

Nagu valemitest (78) näha, on tarvis selleks et neid rakendada, teada:

- 1.) Tähtede massid
- 2.) Omalükumised
- 3.) Radiaalkiirused
- 4.) Parallaksid.

Et võrrandite rakendamiseks niipalju andmeid tarvis läheb, siis ei saadud endisel ajal, kui veel tähtede parallaksid, radiaalkiirused ja massid tundmatud olid, neid tarvitada. Sellega on ka seletatav, miks Bravaisi võrrandid alles muemal ajal, kui juba enam andmeid tähtede kohta teada on, tarvitusele tulid.

Esimesena rakendas neid võrrandeid Bravais. Et tal aga kõik teised andmed, peale omalükumiste puudusid, oli ta sunnitud tegema hüpoteesi nende suuruse kohta. Mõõdapääsemata oli oletus võrdsetest massidest ja kaugustest. Radiaalkiiruste kohta arvas ta, et:

$$\sum \cos \delta \cos \alpha \Delta \xi = 0$$

$$\sum \cos d \overset{\sin}{\cancel{\cos}} \Delta \xi' = 0$$

(79)

$$\sum \sin d \Delta \xi' = 0$$

(kusjuures $\Delta \xi'$ on mõeldud koordinaadidistants A.)

Uurime Bravaisi oletusi lähemalt.

1.) Massid.

Masside võrdsuse oletus ei ole tegelikult hüpoteesi iseloomuga. Nagu kergesti arusaadav, sünnib päikese liikumise arvutamise nüsegusel alusel lihtsalt geomeetrilise keskkoha suhtes. Et aga dünaamiliselt tähtis on just masskeskkoh, siis on õieti hüpoteesi iseloomuga oletus, et geomeetiline ja masskeskkoh kokku langevad. Viimane hüpotees ei nõua aga, et tähtede massid võrdsed on, vaid ta eeldab ainult teatud masside paigutusseadust. Nii on siis Bravaisi esimene oletus palju laialdasema iseloomuga, kui seda esimesel pilgul arvata võis.

2.) Kaugused.

Hüpotees tähtede võrdsetest kaugustest ei ole arusaadavalt tegelikult maksim. Sellest hoolimata võib aga võrandeid (78) rakendada ka siis, kui meil tundmata on tähtede kaugused, kuid kui teada on nende suurusjärk. Viimast võib aga leida:

1.) Heleduse

või 2.) Omalükkumise suuruse
 või 3.) Statistilise parallaksi
 kaudu. Moodustades võrdsete kaugusjär-
 rudega tähtede jaoks (78), korrutades need
 süsteemi vastava kaaluga ja liites, saame
 võrrandid, kus on arvestatud tähtede kau-
 gused.

3.) Radiaalkiirused.

Võib näidata, et (79) on ^{lhx. 107} relatseeritud
 Airy võrranditega. Tõestuse lihtne mõttekäik
 on järgmine:

Tähistades peäikese liikumiskomponen-
 te radiaalses suunas ΔU -ga ja tähe radiaal-
 kiirust koordinaadistikus β $\Delta \xi$ -ga, siis on
 maxwell seos:

$$\Delta \xi' = \Delta \xi^* - \Delta U.$$

ja seega võrrandid (79)

$$\sum \cos \delta' \cos \alpha \Delta \xi = \sum \cos \delta' \cos \alpha \Delta U$$

$$\sum \cos \delta' \sin \alpha \Delta \xi = \sum \cos \delta' \sin \alpha \Delta U$$

$$\sum \sin \delta' \Delta \xi = \sum \sin \delta' \Delta U$$

Et aga skeemi (14) põhjal on:

$$\Delta U = \Delta X \cos \delta' \cos \alpha + \Delta Y \cos \delta' \sin \alpha + \Delta Z \sin \delta'$$

siis on valemid (79):

$$\Delta X \sum \cos^2 \delta \cos^2 \alpha + \Delta Y \sum \cos^2 \delta \sin \alpha \cos \alpha + \Delta Z \sum \sin^2 \delta =$$

$$= \sum \cos \delta \cos \alpha \Delta \xi$$

(80)

$$\Delta X \sum \cos^2 \delta \cos \alpha \sin \alpha + \Delta Y \sum \cos^2 \delta \sin^2 \delta + \Delta Z \sum \cos \delta \sin \delta \cos \alpha =$$

$$= \sum \cos \delta \sin \alpha \Delta \xi$$

$$\Delta X \sum \cos \delta \sin \delta \cos \alpha + \Delta Y \sum \cos \delta \sin \delta \sin \alpha + \Delta Z \sum \sin^2 \delta =$$

$$= \sum \sin \delta \Delta \xi$$

Kui aga viimaseid võrrelda peatükis IX esitatud Airy tingimusvõrranditega (16^{cl}), siis võib öelda, et nad on täiesti identsed. Oleme seega Bravaisi hüpoteesi alusel tuletanud Airy võrrandid. Ei ole raske seda teha ka ümberpöörduvalt. Et aga Airy võrrandid on tuletatavad valemist (74) ainult siis, kui $h_1 = h_2 = h_3$, siis järgneb et Bravaisi hüpotees on maksim juhusel, kui tähtede liikumiste jaotus allub Maxwelli seadusele.

Kui seeldada esitatud hüpoteese, siis on Bravaisi võrrandid järgmised:

$$\Delta X \sum (\cos^2 \delta \cos^2 \alpha - 1) + \Delta Y \sum \cos^2 \delta \sin \alpha \cos \alpha + \Delta Z \sum \sin^2 \delta =$$

$$= \sum \sin \delta \cos \alpha \Delta \xi + \sum \sin \alpha \Delta \eta. \quad (81)$$

$$\Delta X \sum \cos^2 \delta \cos \alpha \sin \alpha + \Delta Y \sum (\cos^2 \delta \sin^2 \delta - 1) + \Delta Z \sum \cos \delta \sin \delta \sin \alpha =$$

$$= \sum \sin \delta \cos \alpha \Delta \xi - \sum \cos \alpha \Delta \eta$$

$$\Delta X \sum \cos \delta' \sin \delta' \cos \alpha + \Delta Y \sum \cos \delta' \sin \delta' \sin \alpha + \Delta Z \sum (1 - \sin^2 \delta') =$$

$$= - \sum \cos \delta' \Delta \delta.$$

Kuna Bravaisil ainult väga puudulok materjaal kasutada oli ja ta kaugusi olua nende suurusjärgude võrdseteks luges, siis ei saanud ta ka usutavaid resultate. Hiljemini, kui mõõtes astronoomia edusamme tegi, rakendas Bravaisi meetodi tagajärje = rikkamalt Wersma, kes leidis apeksi koordi = naadid: ⁽¹⁷⁾

$$\alpha = 267,7 (\pm 0,8) \quad \delta = 34,4 (\pm 1,1)$$

Esimesena, väljaspool eget hüpoteesi, rakendas Bravaisi võrrandisi ⁽⁷⁸⁾ Kobold, kes oletas ainult, et tähtede geometrilise kesk = koht ühtub masskeskkohtaga. Et tal ainult 11 tähe liikumisega arvestada võis, ei olud resultaatil ~~suur~~ suuremat tähtsust.

Palju arvurikkamale materjaalile toetub aga Strömbergi resultaat ⁽¹⁸⁾, kes leidis 800 hüttähe liikumisest:

$$\alpha = 272,7 \quad \delta = 36,9$$

$$q = 18,8 \frac{\text{km}}{\text{sec.}}$$

ja 415 kaäbustähe liikumisest:

$$\alpha = 280^{\circ},8 \quad \delta = 29^{\circ},5$$

$$q = 31,7 \frac{\text{km}}{\text{sec.}}$$

Ka Dziwulski ja Fraszkevicz käsi-
tasid sama põhimõtte järel (probleemi?) Esime-
mene neist, kes rakendas 394 trigonomeetrisis-
te parallaksidega tähe omalükkumist, leidis:

$$\alpha = 274^{\circ},1 \quad \delta = 30^{\circ},6$$

$$q = 21,2 \frac{\text{km}}{\text{sec.}}$$

Fraszkevicz, lisades Dziwulski tähtedele
veel 461 spektroskoopiliste parallaksidega tähte
de omalükkumised juurde, arvutas apeksi kooor-
dinaadid:

$$\alpha = 274^{\circ},4 \quad \delta = 30^{\circ},2$$

$$q = 16,7 \frac{\text{km}}{\text{sec.}}$$

Uuemal ajal on korda läinud leida
seost tähtede spektrituüpi, absoluutse heleduse
ja massi vahel. Teades kaks esimest võib arvu-
tada nüümsast. Nii tekib võimalus Bravaisi
võrandites ka arvestada massiga. Balanovsky
ja Lamoilova viies selle rööle alusel arvutusi lä-
bi, leidsid 911 tähe omalükkumisest: 20)

$$\alpha = 265^{\circ},7 \quad \delta = 30^{\circ},4$$

$$q = 15,5 \frac{\text{km}}{\text{sec}}$$

On tähelepanu väärt viimases resultaadis
 kiirus, mis tublisti vähem teistest, sel pool esitatud
 resultaatidest. Viimane väheneb veel, kui armutuse
 materjaalist kõrvaldada suurte kiirustega tä-
 hed, millede kohta oldakse arvamisel, et nad
 ei kuulu sellesse süsteemi, milles asub päike,
 vaid et nad on mingi parvena kohaliku
 süsteemi tunginud. Viimast asjaolu tõendab ka
 tõsiasi, et nimetatud tähed vaatlusvrgade pii-
 rides liiguvad paralleelseid teid mööda võrd-
 sete kiirustega. Balanowsky ja Lamoilova re-
 sultaadis esinev väike kiirus laseb end sel-
 tada asjaoluga, et kiiruse ja tähe massi va-
 hel on valitsemas korrelatsioon ja nimelt
 suuremale kiirusele vastab vähem mass ja
 ümberpöörduvalt. On seega arusaadav, et
 Bravaisi võrrandites suured kiirused arves-
 tatakse vähema kaaluga kui väikesed, mil-
 le tagajärjel päikese liikumise kiirus resul-
 taadis väheneb. Sellest põhimõttest lähtudes
 teevad Balanowsky ja Lamoilova ettepaneku
 lugeda päikese liikumise elementaarki.

$$\alpha = 270^\circ \quad \delta = 30^\circ$$

$$q = 15 \frac{\text{km}}{\text{sec}}$$

endise $q = 20 \frac{\text{km}}{\text{sec}}$ asemel.

Lama printsübi põhjal töötas ka Neven-

mann, kes 430 spektroskoopilise parallaksiga tähe põljal leidis: 21)

$$\alpha = 276,2 \quad \delta = 33,9 \quad q = 18,78 \frac{\text{km}}{\text{sec}}$$

Et Bravaisi ~~ku~~ meetod mingit hüpo-
teesi ei nõua, siis on resultaad, mis sel-
le meetodi alusel saadud, väga tõenäo-
sed päikese liikumise elementid.

XVI

Üldiseid märkeid ^m päikese
liikumise ja ~~tema~~ ^{selle} arvutamise
kohta

Möödunud aastasajal oli püüe päikese liikumist
määrata võimalikult täpselt. Et seda saavutada, püü-
ti arvutustel rakendada võimalikult suurt hulka
omaliikumisi, kuna sellejuures, nagu esialgu näib, re-
sultaat tõepoolest peaks täpsem tulema. Viimast
asjaolu näis kinnitavat ka tõsiasi, et tähtede ar-
vu suurendamisel päikese liikumise elementid
ligikaudu endisteks jäid.

Kuid niisuguse sihiga uurimistel on hulk
vajakülgi. Esiteks ei võimalda tähtede arv, kui
arvutuste juures rakendada Ariny võrrandeid, su-

gugi saada täpsemaid andmeid päikese liikumise kohta, kuna me oleme sunnitud enamik juhustel tähtede kaugusi lugema võrdseteks, mille tõtte kaugemad tähed võrrandites arvestatakse liiga väikese kaaluga. Nüüsgugusel korral moodustavad aga kauged - ja enamasti ka nõrgemad - tähed n. n. suurnud ballasti, see tähendab ei muuda suurt apeksi koordineate. Teiseks ei saa, olgugi et meil kasutada rohkearvuline materjal, rakendada kõiki de lokaalsüsteemi kuuluvate tähtede omal liikumisi, kuna nende arv väga suur. Pealegi tarvitame arvutuste juures pea eranditult heledamad tähti, millega aga teeme kindolla välgavaliku ildisest tähtede kollektiivist. Et aga heledate tähtede seas on kas lähedad käätustähed või kauged hiittähed, siis ei ole välgavalitud tähtede hulka sugugi ühtlaselt ruumis jaotud ja seega ei saa me nende liikumiste põhjal arvutades päikese liikumist lokaalsüsteemi raskuskeskkohta suhtes.

Peale nende, ette toodud põhjuste on veel teisi, puht metoodilisi põhjusi, mis ei võimalda arvutada päikese liikumist võimalikult täpselt. Nimelt vajab iga meetod, mis ainult ühekülgsiid andmeid tähtede liikumise kohta rakendab, hüpoteesi liikumise jaotuse kohta. Ja kuna enamik juhusel võimalik ainult rakendada ühte või kahte liikumiskomponenti, siis on selge, et ilma hüpoteesita arvutuste

läbiviimine võmata. Hüpoteesi tegemisega on aga, nagu me eelpool nägime, seotud suur hulk raskusi.

Niisugused raskused ei esine astronoomias mitte ainult päikese liikumise arvutamisel, vaid nad tulevad ette ka mujal. Tüüpiliseks näiteks olgu tähtede temperatuuri arvutamine, mis sünnib teatavasti kiirgumiseaduste põhjal. Kiirgumiseadused on eriti lihtsad ja rakendatavad musta keha korral. Et tähtede kohta ei või öelda, et nad alluks musta keha kiirgumiseadustele, siis ollakse ka sünnisummitud tegema hüpoteesi teatavate konstantide suuruste kohta. Et aga tegelikult niisuguste hüpoteeside tegemine väga umbmäärane, siis oletatakse lihtsalt et täht on musta keha omadustega ja arvutatakse siis vastav temperatuur, mida nimetatakse efektiivseks temperatuuriks. Efektiivsel temperatuuril on suur tähtsus tähtede füüsilise ehituse uurimisel, olgugi et see temperatuur ei tarvitse sugugi tegelikult tähtel valitseda. Nii näiteks võib efektiivse temperatuuri järel väga hästi otsustada, koes üks täht tihesest on kuumem või jahedam.

Päikese liikumise arvutamise juures tuleb käia analoogilist teed. Kui püüdnud mõned andmed, mida Bravaisi võrrandite rakendamiseks tarvilik, arvutame päikese liikumist eeldusel, et tähtede liikumise allub

Maxvelli seadusele. Saadud päikese liikumise elemente kutsume efektiivseteks päikese liikumise elementideks. Viimast mõistet defineerime seega järgmiselt:

Effektiivseteks päikese liikumise elementideks nimetame nüsugusi päikese liikumist äärmäära-
määra-
arve, mis on tuletatud tähtede liikumistest eeldusel et liikumiste paigutusel on maksim Maxvelli seadus.

Nagu me eelpool peatükis \bar{X} näitasime, võimaldab kõikidest meetoditest, mis eeldavad tähtede juhuslist liikumist, ainult Ainy meetod arvutada päikese liikumist tähtede masskesk-
koha suhtes. Sellest järgneb et efektiivseid päikese liikumise elemente on võimalik leida ainult Ainy meetodi rakendamisel. Et tähtede omal liikumistest tuletada efektiivseid elemente, peame teadma tähtede kaugusi ja masse; rakendades aga radiaalkiirusi, ainult masse.

Nagu tähtede efektiivsest temperatuurist võib teha järeldusi nende füüsilise ehituse kohta, nii on võimalik ka efektiivsetest päikese liikumise elemente kasulikult rakendada nii päikese kui ka tähtede liikumise uurimisel.

Kui meil on antud kaks rühma tähti, siis võime, kui teada on tähtede omal liikumised, arvutada päikese liikumise efektiivseid elemente. Sealjuu-

res võib juhtuda, et saadud arvud ühte langevad. Nüüsuugudel korral võrme pea kindlalt öeldada, et mõlemad rühmad üksteise suhtes ei liigu. Osutub aga, et mõlem ühe parve suhtes leitvad efektiivsed elemendid lah- ke lähavad nendest, mis on saadud teise parve täh- tede liikumiste läbitöötamisel, siis näib kindel ole- vat, et need parved üksteise suhtes oma koordi- naate muudavad.

Peatükis XI püüdsime seletada üksiku te arvutuste lahkuminekut valede hüpoteesidega, milledele arvutused rajatud. Kuigi on kerge aru- saada, nagu me ka juba eelpool tähendasi- me, et vale eeldus on resultaatide lahkumi- neku põhjuseks ainult siis, kui tähed, mis ühe arvutuse juures tarvitatud, liikumissea- duste poolst lahku lähavad nendest, mis teise parve tähtede kohta maksev. Et aga arvata- vasti kõrk tähed, rgatahes lähemad, enamvähem ühesugustele liikumisseadustele alluvad, siis ei suuda see oletus seletada arvutuste lah- kuminekut:

Boss:	$\alpha = 270^\circ$	$\delta = 34^\circ$	
Dyson ja Thackeray ^{22.} :	$\alpha = 269^\circ$	$\delta = 28^\circ$	Tüüp B-A
	$\alpha = 273^\circ$	$\delta = 37^\circ$	" F, G, K.

On püütud nähtust seletada omaliskummi- te määramisel tehtud süstemaatiliste vigaolega. Esimeses joones võiks siin kõne alla tulla viga, mis

on tingitud prätssioon-konstandi ebatäpsust tund-
misest. Kuid see oletus, mis ehk küll seletab esita-
tud vahet, ei võimalda põhjendatada lahkumisi-
miskul:

Boss: $\alpha = 270^\circ$	$\delta = 34^\circ$
Campbell: $\alpha = 268^\circ$	$\delta = 25^\circ$

sest prätssioon-konstandi ebatäpsus tundmi-
ne ei avalda resultaadile mingit mõju siis kui
tähed mille omaliskumisi rakendatakse üle
kogu taevalaiualisatud on.

On tulnud arvamisele, et siin võiks lah-
kumiseks põhjuseks olla Bossi kataloogi süs-
temaatiline viga. Viimast oletust võib kin-
nitavat ka tõrjasi, et üksikute arvutuste resul-
taat lähed suuremalt jaolt lahku just kään-
des, kuna otsetõusud hävitsikult ühtuvad.
Võib aga täiesti põhjendamata, kui mitte sel-
dada kataloogi süstemaatilist viga, mis
just vahe tekib ot käändes, kuna loomu-
likum oleks, et mõlemad apessi koordinaa-
did muutuvad.

Nomeetatud küsimust lähemalt suri-
des, selgus et tõepoolest vanade mõõtmiste juu-
res tähtede käänne on hävitsikult antud suu-
remana, kui ta tegelikult on. Peetakse võima-
likuks, et misugune viga võiks sündida kas
refraktsiooni ebatäpsust arvestamisest, või jäl-
le n. n. saali refraktsioonist. Fredarans

tähelpanuväart teeneid nimetatud rea nurini-
sel on teinud Kapteyn, kes tegi ettepaneku Bossi
kataloogi ^{xi-gromoll} otsuse suunas shtitud liikumis-
komponendile lisada positiivne parameetris

$$d \cdot \Delta \delta = 0", 0130 \text{ aastas.}$$

| W

Bossi õpilased, murides õpetaja poolt kokku-
seatud kataloogi, leidsid et omalikkumise kou-
ponent käändle suunas ei ole lineaarne funktsioon
ajast, vaid et tegelikult vastab oluskorrale paremi-
ni ruunduline olenevus. Arvestades selle tõsias-
jaga arvutati apeksi koordinaadid, kesjuures
deklinaatsioon

$$\delta = 25^\circ$$

osutus heas kooskõlas olevat Campbelli resulta-
diga.

Etteoodud süstemaatilistest veadest on ra-
bad radiaalkiiruste määramised. Võiks selle-
pärast oodata, et siin apeksi koordinaatides
lahkuminekud ei esine. Ent tegelikult on asi
hoopis teisugune. Ka siin on suured vahed
üksikute arvutuste juures märgatavad, eriti
siis, kui tähed on rühmitatud nende spektri-
tüübi järel klassidesse ja iga klassi jaoks ar-
vutatud eraldi apeksi koordinaadid ja kiirus.
Illustratsiooniks järgmised Campbelli and-
med:

Tüüp	Tähtede arv	Päikese liikumise kiirus
B	225	6,5
A	177	10,9
F	185	14,4
G	128	15,0
K	382	16,8
M	75	17,1

Või jälle Dyson ja Thackeray arvutuse resultaat

Tüüp	α	β
B, A	269°	25°
F, G, K	273°	37°

Viimasel ajal on nähtust uurinud põdjalikumalt Strömberg³³⁾, kes ühtlasi ka vastavad arvutused läbi viis, mille tulemused järgnevas tabelis esitatud:

Tüüp	Täh. arv.	q	α	β
B	284	22	286°	25°
A	330	14	272	31
F, G, K, M	780	15	262	22
Panrad suure kiirusega	510	32	289	46
M ₂	101 ⁴⁷	30 ⁴¹	289	30
gaas vedud	101	30	289	44

	N	q	α	δ
Cepheiidid	26	109	306°	47°
Juure kiir- sega tähed >100 km see	21	268 ± 27	324	58
Keras parved	16	266 ± 53	320	64
Spiraal udu	43	401 ± 102	304	81

Nagu tabelist näha, kasvab ^{rad} põikese liikumise elemendid (effektivesed) spektrituubi arenemisega ja tähtede kiirusega. Et aga varajasemad tuubid üldiselt meie lähemal asuvad, siis võiks öelda, et liikumise elemendid on olenevad tähtede kaugustest ja nende kiirustest kasvades rüumaste kasvuga.

Külmast vöödest, nimelt olenevust kaugustest tõendab ka Comstocki arvutus:

Heledus	α	δ
$\leq 6^m$	270°	35°
$7^m - 10^m$	280	58
$10^m - 13^m$	288	71.

Küsimusi ja märkmeid.
 Väga oluline selles seoses mõjult on tähtede jaotus kiiruste ja kiirustest. Missuguses protsendilises rahkorus on tähtede arvu suhe rühmades, kui liigitada koostis kiiruste ja "kõikumiste" järgi?

Lest võib ju öelda et näirvalt vägaud tähed meist üldiselt kaugemal asuvad.

Strömberg püüdes seletada esitatud nähtust, oletas, et tähed, mis meie vaatlustele kätte =

saadavad jagunuvad kahte liiki ja nimelt:

I. Lähemad, väikeste kiiustega tähed, mis moodustavad n. n. lokaalsüsteemi. Nende suhtes on peamise liikumise elemendid:

$$\alpha = 262^\circ \quad \delta = 15^\circ \quad q = 14 \frac{\text{km}}{\text{sec}}$$

II. Üldiselt kaugemad, suurte kiiustega taevastijektid mis moodustavad suurema süsteemi ja mille alauksuseks on arvatavasti meie lokaalsüsteem. Peamised liikumise elemendid selle süsteemi suhtes on:

$$\alpha = 323^\circ \quad \delta = 60^\circ \quad q = 300 \frac{\text{km}}{\text{sec}}$$

Viimastest elementidest võib luua huvitavaid järeldusi teha, millede käsitamisest aga siinkohal loobun.

Nagu esitatud harutusest järeldatakse, on selge et uue ajal peamise liikumise probleem võtnud hoopis uue suuna. Ei ole enam tähtis täpne peamise liikumise määratamine tahtede koostumiskoha suhtes, vaid tahtede liikumisküsimust on võimalik lahendada ka efektiivsete peamise liikumise elementide abil.

XVII

Kokkuvõte.

Olen püüdnud selles töös esitada aimult tähtsamad ja iseloomustavamad mõttekõr-
 gud põikese liikumise ja selle arvutamise
 kohta, välgajättes rahest ehk küllalt huvitavad,
 kuid oma tulemuste poolt mitte just väga
 silmapaistvad arvutuse meetodid ja liiku-
 mise hüpoteesid. Olgu nimetatud mõit
 Schoenfeldi²⁵⁾ hüpotees, mille järel tähtede kui-
 ka põikese liikumist seletatakse kogu linnu-
 tee rotatoorse liikumisega, või jälle Oppen-
 heimi hüpotees²⁶⁾ mille järel kinnistähete lii-
 kumine on analoogiline nähtus väikeste pla-
 neetide geotsentrialse liikumise nähtusega.
 Samuti olen loobunud esitamast Gyldenini²⁷⁾
 poolt esitatud n. n. analüütilist meetodi,
 kuna seda väga vähe kirjanduses käsi-
 tatud ja ka tehnikult rakendatud.

Kp
 Lindblad
 raated.

Läesolevas töös on aga käsitletud arne koh-
 ta jõutud otsustele, mida järgnevas lühidalt esi-
 tan:

1.) Herscheli, Besseli, Argelauderi meetodid ei
 võimalda arvutada põikese liikumist täli-
 tede masskeskkohta suhtes.

2.) Siin meilad võimaldab päikese liikumist arvutada tähtede masskeskkohta suhtes ainult siis, kui tähtede liikumisel on maksimaalne seadus.

3.) Tähtede liikumise paigutusel ei ole maksimaalne Maerelli seadus.

4.) Kui oletada, et tähtede liikumiskomponentide vahel pole mingit funktsionaalset seost, siis on kõrge üldise sagedusjaotus ellipsoidaalne.

5.) Näib olevat tõenäoline, et tähtedelgiures ei ole liikumise suundolev liikumise suurus.

6.) Eddington-Kapteyni kahe tähtparve hüpotees nõuab funktsionaalset seost tähtede liikumiskomponentide vahel.

7.) Schwarzschildi hüpotees ei nõua seoda.

8.) Kahe Eddingtoni ja Schwarzschildi hüpoteeside vahel on ainult teoreetiline. Tegelikult vastavad need sama hästi vaatlusandmetele.

9.) Et tähtede omaliikumistest, või jälle radiaalkiirustest päikese liikumise arvutamiseks oleks hüpoteesid, mis suure arvutuste ahelas, siis defineeritakse uus mõiste: efektiivsed päikese liikumise mõrbe elementid. Viimasteks nimetatakse miseguseid päikese liikumise elemente, mis on tulekad tähtede liikumistest, eeldusel et täh-

tede liikumise paigutusel on maksed Maxwelli seadus.

10.) Esitatud meetoditest võimaldab ainult hüü meetod arvutada põikese liikumise efektiivseid elemente.

11.) Kõrge üldisem meetod on Braunsi meetod; tema ei vaja mingit hüpoteesi.

12.) Kui arvutuste juures tarvitada ainult tähtede spaaillisi omaliikumisi, siis on Braunsi meetodi rakendamisel esiletulevad raskused samad, mis hüü meetodi juures, kuid mitte suuremad.

13.) Keskmisteks põikese liikumise elementideks loetakse:

$$\alpha = 18'' \quad \delta = +30^\circ$$

$$q = 20 \frac{\text{km}}{\text{sec}}$$

14.) Kuid kohasem oleks lugeda:

$$\alpha = 18'' \quad \delta = +25^\circ$$

$$q = 15 \frac{\text{km}}{\text{sec}}$$

(misparast?)

Märkusi.

1.) leh. 8.

Nagu taeva mehaanikas tõendatakse, sün-
nib n keha raskuskesksha liikumine sirgjoone-
liselt ja ühtlaselt. Sirgjoonelise ja ühtlase liiku-
mine on mõistetud siin koordinaadiarvutus, kus
on maksrad n keha probleemini differentiaalvõr-
randid. Viimased on aga maksrad ainult siis,
kui on maksed Newtoni gravitatsiooni seadus.
Sellest järeldus, et sirgjoonelise ja ühtlaselt liigub
 n -keha massikeskkoht ainult koordinaadiar-
vutus, kus on maksed grav. seadus.

2.) leh 9.

Herscheli törd vaata:

Phil. Trans. 1783, 1805, 1806

3.) leh 18.

Andring & Kritische Untersuchungen
über die Bewegung der Sonne durch den Welt-
raum

Argelander "Über die eigene Bewegung
der Sonne . e. e. t. (St. Peters. Mem. 3. 1837. p 561)

4.) leh. 25.

King On the Movement of the Solar System in Space (Mem. R. A. S. 1860)

5.) leh. 30.

m' ja n' all on mõistetud ~~pro~~ praeto. koust. parandusi.

6.) leh 34.

Flaryeri töö, mis aluse pani Besseli meetodi matemaatilisele käsitlesele, stmus:

Astr. Nachr. 133. (1893) p. 79

Vaata ka:

Anding: Kritische Untersuchungen. e. t. c.
ja Anding: Beziehung zwischen den Methoden von Bessel und Argelander zur Bestimmung des Sonnenapex.

7.) leh. 43.

Ap. J. 13. 83. 1901

8.) leh 44.

Lick. Obs. Bull. 1911. p 125.

9.) leh 46

Lick. Obs. Bull. 374. p 98-99.

10.) leh 56.

Järgnevat hantust jälgi:

Forsyth. Differentialgleichungen. leh. 292-305.

11.) leh 56.

Konstant $\mathcal{H} = \frac{h_1 h_2 h_3}{\sqrt{V}}$ on määratud tingimus-
sega:

$$\frac{1}{\mathcal{H}} = \iiint_{(-\infty)^3}^{(+\infty)^3} e^{-h_1^2 \Delta x^2 - h_2^2 \Delta y^2 - h_3^2 \Delta z^2} dx dy dz$$

12.) leh 74.

Võrdle: Ändring Britische Untersuchungen. e.c.t.

13.) leh 78.

Muidugi ei selita ka vale seldus seola vahet, sest resultaadid ei lähe lahku siis kui Arny ja Bossi annutuse materjali kohta oleks maxsev iihesuguse seadus. Igatahes annab ta aya tõuke lükkumise juhulokuse oletuse armustamiseks.

14.) leh 83.

Koboldi kviitika tähtede juhulisest lükkumist vaata: Astr. Nachr. 125 (1890)

Kapteyni tööd: Brit. Astr. Ass. Rep. 1905.

15.) leh 85.

Edington: Stellar movements. e.c.t.

Peale selle originaalid:

Monthly Notices of R. A. S. 67 ja 65.

16.) leh 90.

Göt. Nachr. 1907 ja 1908

17.) leh 110.

Publ. of the Astr. Lab. at Gron. №21. (1908)

18.) leh 110.

Astroph. Journ. 56. (1922)

19.) Hilna Obs. Bull. №2 (1922)

20.) Astr. Nachr. 222. (1924.)

21.) Astr. Nachr. 223 (1924.)

22.) Leh. 117.

Month. Not. 79. (1919) p 201.

23.) Leh 120.

Astroph Jour. 56 (1922) p 265.

25.) Leh 123.

Vierteljahrchrift. der Astr. Ges. № 17. Aasta?

26.) Leh 123.

Viertelj. der Astr. Ges. № 9.

Maata ka Ülber die Darstellung der Eigenbewegungen der Fixsterne und die Bewegung des Sonnensystems.

26.) Leh 123.

Astr. Nachr. 223. (1924).

27.) v. Leher. 123.

366 502

Auhinnat

Kipper, Aksel.

Päikese liikumine
maailma-ruumis.



1928