Ueber bedingt periodische Bewegungen.

Von

Prof. Dr. **Otto Staude.**

(Sonderabdruck aus den Sitzungsber. der Dorp. Nat.-Ges. VIII. II. 1887.)

Dorpat.

Druck von C. Mattiesen.

1887.

Дозволено цензурою. — Дерптъ, 21. Мая 1887 г.

§ 1. Ueber eine Gattung bedingt periodischer Functionen.

Bereits in einer früheren Mittheilung *) habe ich auf eine Gattung bedingt periodischer Functionen einer reellen Veränderlichen hingewiesen, welche durch Umkehrung des Systems von Integralsummen:

$$\int_{a_1}^{x_1} \frac{r_1(x_1)\,dx_1}{2\sqrt{R(x_1)}} + \int_{a_2}^{x_2} \frac{r_1(x_2)\,dx_2}{2\sqrt{R(x_2)}} = 0$$

$$\int_{a_1}^{x_1} \frac{r_2(x_1)\,dx_1}{2\sqrt{R(x_1)}} + \int_{a_2}^{x_2} \frac{r_2(x_2)\,dx_2}{2\sqrt{R(x_2)}} = t$$

entstanden, wo $R(x)$ eine ganze Function von x, $r_1(x)$ und $r_2(x)$ rationale Functionen von x, a_1 und a_2 aber Nullpuncte von $R(x)$ sind. Ich gebe im Folgenden ein wesentlich verallgemeinertes Resultat an, welches sich auf die Gleichungen bezieht:

$$\text{I.}\quad \left\{ \begin{aligned} &\int_{a_1}^{x_1} \frac{g_{11}(x_1)\,dx_1}{\sqrt{F_{11}(x_1)}} + \int_{a_2}^{x_2} \frac{g_{12}(x_2)\,dx_2}{\sqrt{F_{12}(x_2)}} = 0 \\ &\int_{a_1}^{x_1} \frac{g_{21}(x_1)\,dx_1}{\sqrt{F_{21}(x_1)}} + \int_{a_2}^{x_2} \frac{g_{22}(x_2)\,dx_2}{\sqrt{F_{22}(x_2)}} = t, \end{aligned} \right.$$

*) Bd. 8 dieser Berichte, S. 155.

wo jetzt die frühere Symmetrie der beiden Glieder einer jeden Integralsumme in Bezug auf x_1 und x_2 verloren gegangen ist.

Man setze nämlich voraus, dass die Functionen $F_{\alpha 1}(x_1)$ und $F_{\alpha 2}(x_2)$ $(\alpha = 1,2)$ für je zwei reelle Werthe $x_1 = a_1$, b_1 und $x_2 = a_2$, b_2 ihres Argumentes verschwinden, also etwa die Form haben:

$$F_{\alpha 1}(x_1) = (x_1 - a_1)(b_1 - x_1) f_{\alpha 1}(x_1)$$
$$F_{\alpha 2}(x_2) = (x_2 - a_2)(b_2 - x_2) f_{\alpha 2}(x_2),$$

dass aber $f_{\alpha 1}(x_1)$ und $f_{\alpha 2}(x_2)$ in den Intervallen:

$$\text{II.} \qquad a_1 < x_1 < b_1 \qquad\qquad a_2 < x_2 < b_2$$

eindeutig und stetig sind, positiv bleiben und nicht o oder ∞ werden. Man setze ferner voraus, dass die Functionen $g_{\alpha 1}(x_1)$ und $g_{\alpha 2}(x_2)$ in den genannten Intervallen eindeutig, endlich und stetig, sowie von unveränderlichem Vorzeichen sind; schliesslich dass die Determinante:

$$D(x_1, x_2) = \frac{g_{11}(x_1)}{\sqrt{f_{11}(x_1)}} \frac{g_{22}(x_2)}{\sqrt{f_{22}(x_2)}} - \frac{g_{21}(x_1)}{\sqrt{f_{21}(x_1)}} \frac{g_{12}(x_2)}{\sqrt{f_{12}(x_2)}},$$

unter $\sqrt{f}$ den positiven Werth der betreffenden Quadratwurzel verstanden, bei Beschränkung von x_1, x_2 auf die genannten Intervalle beständig positiv oder beständig negativ und niemals gleich O ist.

Unter diesen Voraussetzungen ist jede gegebene, innerhalb der Intervalle (II) eindeutige, endliche und stetige Function

III.

$$E(x_1, x_2, \sqrt{x_1 - a_1}, \sqrt{b_1 - x_1}, \sqrt{x_2 - a_2}, \sqrt{b_2 - x_2}) = G(t)$$

der oberen Grenzen x_1, x_2 der Integrale in (I) und der Wurzelfunctionen $\sqrt{x_1 - a_1}$, $\sqrt{b_1 - x_1}$, $\sqrt{x_2 - a_2}$, $\sqrt{b_2 - x_2}$ eine für alle reellen Werthe von t eindeutige, endliche und stetige Function G(t) der Variablen t; dieselbe kann durch eine für alle reellen Werthe von t gleichmässig convergente, doppelt unendliche trigonometrische Reihe dargestellt werden und ist bedingt periodisch. Wenn nämlich mit irgend zwei positiven oder negativen ganzen Zahlen m_1, m_2 die Bedingung erfüllt ist:

$$\text{IV.} \quad 0 = m_1 \int_{a_1}^{b_1} \frac{g_{11}(x_1)\,dx_1}{\sqrt{F_{11}(x_1)}} + m_2 \int_{a_2}^{b_2} \frac{g_{12}(x_2)\,dx_2}{\sqrt{F_{12}(x_2)}},$$

so wird die Function $G(t)$ periodisch mit der Periode:

$$4T = 4m_1 \int_{a_1}^{b_1} \frac{g_{21}(x_1)\,dx_1}{\sqrt{F_{21}(x_1)}} + 4m_2 \int_{a_2}^{b_2} \frac{g_{22}(x_2)\,dx_2}{\sqrt{F_{22}(x_2)}},$$

während sie im Allgemeinen nicht periodisch ist.

Der Beweis dieses Satzes wird demnächst in den mathematischen Annalen, Bd. 29, veröffentlicht werden.

§ 2. Ueber die Beziehung der betrachteten Functionen zu den hyperelliptischen Functionen und die Anwendung beider in der Mechanik.

Zu den bedingt periodischen Functionen des § 1 gehören im Besonderen gewisse hyperelliptischen Functionen 1. Ordnung, wenn man eines ihrer beiden Argumente constant nimmt und das andere, sowie ihre Parameter als reell voraussetzt. Aber während die hyperelliptischen Functionen, soweit bisher bekannt, nur in wenigen Problemen der Mechanik zur Anwendung gelangen, werden durch die hier eingeführten bedingt periodischen Functionen, welche gerade die charakteristische Eigenschaft der bedingten Periodicität mit den hyperelliptischen Functionen der genannten Art theilen, ganze Gruppen mechanischer Probleme gelöst. Ich gebe einige derartige Probleme an, die sich in ihrer Gesammtheit als eine Gattung einfach bedingt periodischer Bewegungen an die Gattung der unbedingt periodischen Bewegungen anreihen.

§ 3. Die Bewegung eines schweren Punctes auf einer Rotationsfläche mit verticaler Rotationsaxe.

Das Problem der Bewegung eines schweren Punctes auf einer Kugel führt bekanntlich auf elliptische Integrale; das der Bewegung auf einem verlängerten Rotationsellipsoid auf hyperelliptische Integrale 1. Ordnung*), ohne dass aber im letzteren Falle eine explicite Lösung des Problems auf Grund der Theorie der hyperelliptischen Functionen erhalten würde. Durch die in § 1 eingeführten Functionen wird das Problem mit naturgemässen Einschränkungen für jede Rotationsfläche gelöst in dem Sinne, dass die Coordinaten des bewegten Punctes als eindeutige Functionen der Zeit durch zweifach unendliche Reihen sich darstellen.

Ein gewöhnliches räumliches Coordinatensystem habe eine vertical abwärts gerichtete z-Axe und eine horizontale xy-Ebene. Eine Rotationsfläche werde bei Rotation einer um die z-Axe um 4 rechte Winkel sich drehenden Halbmeridianebene von einer in dieser Ebene aufgezeichneten Curve beschrieben. Die Gleichung der Curve sei beim Durchgang der bewegten Ebene durch die yz-Ebene des Coordinatensystems:

$$y = f(z),$$

und sollen aus ersichtlichem Grunde nur positive Werthe von $f(z)$ in Betracht gezogen werden. Die Function $f(z)$, oder doch ihr Quadrat $f^2(z)$, sei eine für alle endlichen Werthe von z, für die sie selbst reell ist, eindeutige, endliche und stetige Function von z. Ihr Differentialquotient $f'(z)$ werde für die bezeichneten Werthe von z nicht ∞, ausser etwa wenn zugleich $f(z) = 0$ wird. Die Gleichung der Rotationsfläche kann alsdann in der Gestalt angenommen werden:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{f^2(z)},$$

*) Vgl. Schleiermacher, Ueber die Bewegung eines schweren Punctes auf dem verlängerten Rotationsellipsoid, Dissertation, Erlangen, ohne Jahreszahl.

wo $\sqrt{f}$ allgemein den positiven Werth der Quadratwurzel aus f bedeutet. Für die Kugel ist z. B. $f(z) = \sqrt{a^2 - z^2}$, für das Rotationsellipsoid $f(z) = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - z^2}$, unter a und b Constanten gedacht.

Ein schwerer Punct sei gezwungen, sich auf der Rotationsfläche zu bewegen, so zwar, dass sein Anfangsort für die Zeit $t = 0$ in der zx-Ebene liegt und seine anfängliche Geschwindigkeit nicht in eine Meridianebene fällt; es wird dann im Allgemeinen $f(z)$ niemals gleich 0, d. h. der schwere Punct gelangt niemals in einen Durchschnitt der Fläche mit der Rotationsaxe; es wird daher während der Bewegung auch niemals $f'(z) = \infty$.

Es können nun zuerst die Coordinaten x, y, z eines beliebigen Punctes der Fläche von z und von einem Parameter v, welcher gleich dem Quadrat des Cosinus des Winkels zwischen der zx-Ebene und der Meridianebene des Punctes ist, also dargestellt werden:

$$(1) \quad x = \sqrt{f^2(z)} \,.\, \sqrt{v}, \quad y = \sqrt{f^2(z)} \,.\, \sqrt{1 - v}, \quad z = z.$$

Für den betrachteten schweren Punct bestehen ferner zwischen z, v und der Zeit t die Relationen:

$$(2) \left\{ \begin{aligned} 0 &= \int_a^z \frac{k \sqrt{1 + f'^2(z)} \,.\, dz}{\sqrt{f^2(z)} \sqrt{2(gz+h)f^2(z) - k^2}} + \int_1^v \frac{dv}{2\sqrt{v(1-v)}} \\ t &= \int_a^z \frac{\sqrt{f^2(z)} \sqrt{1 + f'^2(z)} \,.\, dz}{\sqrt{2(gz+h)f^2(z) - k^2}} + \int_1^v \frac{0 \,.\, dv}{\sqrt{v(1-v)}}. \end{aligned} \right.$$

Hier bedeutet g die Beschleunigung der Schwere, h die Constante der lebendigen Kraft, k die doppelte Flächengeschwindigkeit in der Horizontalebene, endlich a einen, wie sich zeigen lässt, stets vorhandenen Nullpunct der Function $2(gz + h) f^2(z) - k^2$, der zugleich als Anfangswerth von z für $t = 0$ gewählt worden ist.

Man erkennt sofort, dass die Gleichungen (2) die Form von § 1, I aufweisen und die Coordinaten (1) vom Charakter der zugehörigen Functionen § 1, III sind. Es lässt sich nun ohne Schwierigkeit nachweisen, dass die Bedingungen des § 1 für den vorliegenden Fall im Allgemeinen erfüllt sind, wenn die Rotationsfläche, auf welcher der schwere Punct sich bewegt, von keiner Horizontalebene in mehr als einem Parallelkreise geschnitten wird und entweder eine nur nach oben offene, glockenartige Gestalt hat oder aber eine völlig geschlossene, einfach zusammenhängende Fläche ist. Dann sind also die Coordinaten x, y, z des bewegten Punctes im Allgemeinen eindeutige, endliche und stetige, bedingt periodische Functionen von t.

Der specielle Umstand, dass in der 2. Gleichung (2) der Coefficient von dv verschwindet, hat im vorliegenden Falle zur Folge, dass z und damit $\sqrt{f^2(z)}$ für sich allein unbedingt periodische Functionen von t sind, während auf x, y die allgemeine Theorie Anwendung findet.

Die Bedingung, dass die Function f(z) oder ihr Quadrat für alle reellen Werthe von z, für welche sie selbst reell ist, eindeutig und der Differentialquotient f'(z) ausserhalb der Rotationsaxe der Fläche endlich bleibt, hat für die Rotationsfläche zur Folge, dass sie von keiner Horizontalebene in mehr als einem Parallelkreise geschnitten wird. Diese Bedingung ist jedenfalls nicht mehr erfüllt für ringförmige Rotationsflächen mit verticaler Rotationsaxe. So wird der gewöhnliche Kreisring:

$$(x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - b^2)^2 = 4a^2 (x^2 + y^2), \quad a > b,$$

für den die Function f(z) die Form:

$$f(z) = a + \sqrt{b^2 - z^2}$$

erhält, von einer Horizontalebene in zwei concentrischen, getrennten oder zusammenfallenden Kreisen geschnitten. Statt des Parameters z in den Gleichungen (1) wird man daher bei dem Kreisring einen Parameter einführen, dessen jedem

Werthe nur ein Parallelkreis auf der Ringfläche entspricht. Man erreicht dies unter Anwendung der dipolaren Coordinaten*). Man erhält dann für einen beliebigen Punct x, y, z der Ringfläche die Parameterdarstellung:

$$x = \frac{a^2 - b^2}{a - b\,\frac{1-u^2}{1+u^2}} \sqrt{v}, \quad y = \frac{a^2 - b^2}{a - b\,\frac{1-u^2}{1+u^2}} \sqrt{1-v},$$

(1′)

$$z = \sqrt{a^2 - b^2}\;\frac{\frac{2bu}{1+u^2}}{a - b\,\frac{1-u^2}{1+u^2}}.$$

Für den unter Einfluss der Schwerkraft auf der Ringfläche sich bewegenden Punct bestehen dann zwischen den Parametern u, v und der Zeit t die Relationen:

$$o = \int_{u_0}^{u} \frac{2bk\left((a-b)+(a+b)u^2\right)^2 du}{\sqrt{a^2-b^2}\,(1+u^2)\sqrt{R(u)}} + \int_{1}^{v} \frac{dv}{2\sqrt{v(1-v)}},$$

(2′)

$$t = \int_{u_0}^{u} \frac{2b(a^2-b^2)\sqrt{a^2-b^2}\,(1+u^2)\,du}{\sqrt{R(u)}} + \int_{1}^{v} \frac{o\,.\,dv}{\sqrt{v(1-v)}}$$

wo R(u) eine ganze Function 8. Grades, also die beiden Integrale mit der oberen Grenze u hyperelliptische Integrale vom Geschlecht $p = 3$ und zwar von der 1. und 3. Gattuug sind. Auch die Gleichungen (1′) und (2′) haben den Charakter der allgemeinen Formeln I und III der § 1, wenn man von einigen Besonderheiten des vorliegenden Problems absieht, auf die ich an dieser Stelle nicht näher eingehe.

*) Vgl. C. Neumann, Allgemeine Lösung des Problems über den stationären Temperaturzustand eines homogenen Körpers etc., Halle, 1862, S. 25 ff.

§ 4. Die Bewegung eines Kreisels auf einer horizontalen Ebene.

Von Bewegungen eines starren Körpers, welche auf ähnliche Umkehrprobleme, wie die in § 3 angezogenen, führen, soll hier nur der Bewegung eines Kreisels auf einer horizontalen Ebene gedacht werden, im Besonderen der Bewegung eines Punctes der Kreiselaxe.

Man nehme die horizontale Ebene, auf welcher der Kreisel sich bewegt, als xy-Ebene und vertical aufwärts die z-Axe. Man bezeichne mit x, y, z die Coordinaten des Ortes eines Punctes der Figuraxe des Kreisels, der die nach der Kreiselspitze zu negativ, nach der entgegengesetzten Richtung positiv gerechnete Entfernung k vom Schwerpunkt des Kreisels hat. Man verstehe ferner unter χ die Neigung der Kreiselaxe gegen die Verticale (den Nutationswinkel) und unter φ den Winkel, welchen die Durchschnittslinie zwischen der durch den Schwerpunct des Kreisels senkrecht zu seiner Figuraxe gelegten Ebene einerseits und der durch den Schwerpunct gelegten Horizontalebene andererseits in der letzteren mit einer durch den Schwerpunct zur x-Axe parallel gezogenen Axe bildet (den Praecessionswinkel). Der Schwerpunct befinde sich zur Zeit $t = o$ in der z-Axe und besitze keine translatorische Geschwindigkeit; er bleibt dann immer in der z-Axe*).

Nach Poisson**) gelten für die Abhängigkeit der Coordinaten x, y, z von der Zeit z die Relationen:

$$x = k \sin\varphi \sin\chi \qquad y = -k \cos\varphi \sin\chi \qquad z = (h + k)\cos\chi,$$

$$A \sin^2\chi \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + (A + Mh^2 \sin^2\chi)\left(\frac{d\chi}{dt}\right)^2 = 2\,Mgh\,(\cos\chi_0 - \cos\chi),$$

$$A \sin^2\chi \,.\, \frac{d\varphi}{dt} = Cr_0\,(\cos\chi_0 - \cos\chi),$$

---

*) Vgl. Greenhill, On the motion of a top and allied problems in dynamics, Quarterly Journal of mathematics, vol 15, S. 176.

**) Poisson, Traité de mécanique, 2. éd., tome II, S. 216; vgl. auch Schell, Theorie der Bewegung und der Kräfte, 2. Aufl., Bd. II, S. 491.

worin h die Entfernung der Spitze des Kreisels von seinem Schwerpunct, A, C, M die Constanten der Massenvertheilung, g die Beschleunigung der Schwere, r_0 die anfängliche Winkelgeschwindigkeit um die Figuraxe und χ den anfänglichen Werth von χ bedeutet.

Setzt man jetzt: $-\cos\chi = u$, $\cos^2\varphi = v$, so kann man diese Gleichungen in folgende Gestalt bringen, wo a, b, c von M, A, C, h, g, r_0 abhängige Constanten sind und zwischen $u_0 = -\cos\chi_0$, u_1, u_2 die Ungleichung: $u_2 < -1 < u_0 < u_1 < 1$ besteht:

$$(1) \quad x = k\sqrt{1-u^2}\sqrt{1-v}, \qquad y = -k\sqrt{1-u^2}\sqrt{v}, \qquad z = -(h+k)u,$$

$$(2) \left\{ \begin{aligned} o &= \int_{u_0}^{u} \frac{\sqrt{c}\sqrt{(1+a)-au^2}\,(u-u_0)\,du}{(1-u^2)\sqrt{(u-u_0)(u_1-u)(u-u_2)}} + \int_1^v \frac{dv}{2\sqrt{v(1-v)}} \\ t &= \int_{u_0}^{u} \frac{\sqrt{(1+a)-au^2}\,.\,du}{\sqrt{b\,(u-u_0)(u_1-u)(u-u_2)}} + \int_1^v \frac{o\,.\,dv}{\sqrt{v(1-v)}}. \end{aligned} \right.$$

Die Gleichungen haben die Form von § 1, I. III und sind alle Bedingungen des § 1 erfüllt. Demnach giebt die Theorie des § 1 die Coordinaten des Ortes x, y, z eines beliebigen Punctes der Kreiselaxe (mit $k = -h$ und $k = o$ auch der Spitze und des Schwerpunctes) dargestellt als eindeutige, bedingt periodische Functionen der Zeit durch zweifach unendliche immer convergente Reihen.

§ 5. Bewegungen eines materiellen Punctes auf dem Ellipsoid.

Zwei Bewegungen eines materiellen Punctes auf dem Ellipsoid:

$$\frac{x^2}{\alpha-\lambda_0} + \frac{y^2}{\beta-\lambda_0} + \frac{z^2}{\gamma-\lambda_0} = 1$$

mögen noch als Beispiele für die Anwendung der Resultate des § 1 erwähnt werden.

Die Gleichungen der Trägheitsbewegung eines Punctes auf der genannten Fläche lauten in elliptischen Coordinaten λ, μ, ν $(-\infty < \lambda < \gamma < \mu < \beta < \nu < \alpha)$:

$$\left.\begin{aligned} o &= \int_\gamma^\mu \frac{(\mu - \lambda_0)\, d\mu}{2\sqrt{r(\mu)}} + \int_\beta^\nu \frac{(\nu - \lambda_0)\, d\nu}{2\sqrt{r(\nu)}} \\ ct &= \int_\gamma^\mu \frac{(\mu - \lambda_0)(\mu - \mu_0)\, d\mu}{2\sqrt{r(\mu)}} + \int_\beta^\nu \frac{(\nu - \lambda_0)(\nu - \mu_0)\, d\nu}{2\sqrt{r(\nu)}} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

worin für $\rho = \mu, \nu$:

$$r(\rho) = (\alpha - \rho)(\beta - \rho)(\gamma - \rho)(\mu_0 - \rho)(\lambda - \rho).$$

Es ist dabei $\lambda = \lambda_0$, $\mu = \gamma$, $\nu = \beta$ der Anfangsort, c die constante Geschwindigkeit des Punctes und μ_0 der Parameter der von der Bahncurve des Punctes berührten Krümmungscurve.

Die Gleichungen der Bewegung eines Punctes auf derselben Fläche unter Einfluss einer vom Mittelpunct des Ellipsoides ausgehenden Anziehungskraft, welche der Entfernung r direct proportional $(= g^2 r)$ ist, lauten, wieder unter λ_0, γ, β den Anfangsort verstanden, in elliptischen Coordinaten:

$$\left.\begin{aligned} o &= \int_\gamma^\mu \frac{(\mu - \lambda_0)\, d\mu}{2\sqrt{s(\mu)}} + \int_\beta^\nu \frac{(\nu - \lambda_0)\, d\nu}{2\sqrt{s(\nu)}} \\ gt &= \int_\gamma^\mu \frac{(\mu - \lambda_0)(\mu - \mu_0)\, d\mu}{2\sqrt{s(\mu)}} + \int_\beta^\nu \frac{(\nu - \lambda_0)(\nu - \mu_0)\, d\nu}{2\sqrt{s(\nu)}} \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

worin für $\rho = \mu, \nu$:

$$s(\rho) = -(\alpha - \rho)(\beta - \rho)(\gamma - \rho)(\mu_0 - \rho)(\lambda_0 - \rho)(\lambda_1 - \rho)$$

und λ_1 ein constanter Werth von λ ist.

Die Integrale sind in beiden Fällen hyperelliptisch vom Geschlecht $p = 2$, in (1) von der 1. und 2. Gattung, in (2) von der 1. und 3. Gattung. Beide Umkehrprobleme (1) und (2) fallen unter den Typus § 1, I. Die gewöhnlichen Coordinaten

$$x = \frac{\sqrt{\alpha - \lambda_0}\,\sqrt{\alpha - \mu}\,\sqrt{\alpha - \nu}}{\sqrt{\alpha - \beta}\,\sqrt{\alpha - \gamma}},$$

$$y = \frac{\sqrt{\beta - \lambda_0}\,\sqrt{\beta - \mu}\,\sqrt{\nu - \beta}}{\sqrt{\alpha - \beta}\,\sqrt{\beta - \gamma}},$$

$$z = \frac{\sqrt{\gamma - \lambda_0}\,\sqrt{\mu - \gamma}\,\sqrt{\nu - \gamma}}{\sqrt{\alpha - \gamma}\,\sqrt{\beta - \gamma}}$$

des bewegten Punctes sind in beiden Fällen nach § 1 als eindeutige, bedingt periodische Functionen von t darstellbar.

§ 6. Die Bewegung eines von 2 festen Centren nach dem Newton'schen Gesetz angezogenen Punctes.

Die Bewegung eines von 2 festen Centren angezogenen Punctes in der Ebene stellt sich nach Jacobi *) in folgender Weise dar. Es werden zunächst die gewöhnlichen Coordinaten x, y des Punctes mittels der Gleichungen:

$$(1) \qquad x = \frac{uv}{e}, \qquad y = \frac{\sqrt{u^2 - e^2}\,\sqrt{e^2 - v^2}}{e}$$

durch zwei Parameter u, v dargestellt, welche ihrerseits von der Zeit t abhängig gemacht sind durch die Formeln:

*) Vorlesungen über Dynamik, hrsg. von Clebsch, S. 222.

$$
(2)\begin{cases}
o = \displaystyle\int_{u_0}^{u} \frac{du}{\sqrt{2(u^2-e^2)\left(a-h(\alpha-u^2)+(m+m^1)u\right)}} \\
\quad + \displaystyle\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{\sqrt{2(v^2-e^2)\left(a-h(\alpha-v^2)+(m-m^1)v\right)}} \\
t = \displaystyle\int_{u_0}^{u} \frac{(\alpha-u^2)\,du}{\sqrt{2(u^2-e^2)\left(a-h(\alpha-u^2)+(m+m^1)u\right)}} \\
\quad + \displaystyle\int_{v_0}^{v} \frac{(\alpha-v^2)\,dv}{\sqrt{2(v^2-e^2)\left(a-h(\alpha-v^2)+(m-m^1)v\right)}}.
\end{cases}
$$

Hier sind m und m^1 Constanten, proportional den Massen der anziehenden Centren, bedeutet alsdann $2e = 2\sqrt{\alpha - \beta}$ die Entfernung der letzteren, ist α eine Constante des angewendeten Coordinatensystems, endlich h die Constante der lebendigen Kraft und a, u_0, v_0 andere Integrationsconstanten.

Die Gleichungen (1) und (2) haben den Charakter der Gleichungen § 1, I; III, wenn u_0 und v_0 Nullpuncte der ganzen Functionen von u und v unter den Quadratwurzeln in (2) sind. Es lassen sich danach die Bedingungen discutiren, unter denen x, y eindeutige, endliche und stetige, bedingt periodische Functionen von t sind.

Mit $m^1 = o$ würden die Gleichungen (1) und (2) unter bekannten Voraussetzungen über die Integrationsconstanten die gewöhnliche Newton'sche Centralbewegung in einer Ellipse darstellen, deren unbedingte Periodicität aus der allgemeinen Theorie des § 1 sich ergiebt, indem die Bedingung § 1, IV alsdann nach bekannten Sätzen über die ganzen elliptischen Integrale 1. Gattung erfüllt ist.

Die Bewegung eines Punctes, der von 2 festen Centren angezogen wird, aber nicht in einer Ebene sich bewegt, ist unter gewissen Voraussetzungen eine zweifach bedingt periodische*) Bewegung, die einer durch weitere Verallgemeinerung der Betrachtungen der § 1 sich ergebenden Theorie unterliegt.

§ 7. Verwandtschaft der betrachteten Bewegungsformen.

Bei der Bewegung eines schweren Punctes auf einer Rotationsfläche windet sich die Bahncurve im Allgemeinen zwischen zwei Parallelkreisen der Fläche, die sie abwechselnd berührt, in immer neuen und neuen Windungen hin und her. Ein beliebiger Punct der Figuraxe des Kreisels beschreibt eine Raumcurve, die zwischen zwei horizontalen Kreisen mit senkrecht übereinanderliegenden Mittelpuncten ihre rosettenartigen Windungen in der Weise zieht, dass sie sich abwechselnd mit einer Spitze auf den einen Kreis aufsetzt und den anderen berührt. Ein Punct, der auf dem Ellipsoid ohne Einfluss von Kräften oder unter Einfluss der Centralkraft g^2r sich bewegt, beschreibt eine Curve, die sich zwischen zwei Aesten einer Krümmungscurve hin- und herwindet und beide abwechselnd berührt. Aehnlich verhält sich die Bahncurve eines von 2 festen Centren angezogenen Punctes unter Umständen zu 2 confocalen Ellipsen, deren Brennpuncte die beiden Centra sind.

Alle die betrachteten Bewegungen haben in diesem Sinne einen gemeinsamen geometrischen Charakter, der in der gemeinsamen analytischen Methode ihrer Behandlung sich wiederspiegelt. Der Unterschied, den die Anwendung des Umkehrproblems § 1, I auf die Fälle des § 3 und § 4 an dem Fehlen des einen Gliedes in den Umkehrproblemen § 3, 2; 2′ und § 4, 2 gegenüber den Fällen § 5 und § 6 analytisch zu erkennen giebt, findet seinen anschaulichen Ausdruck darin, dass die eben erwähnten Windungen der Bahncurven bei den

*) Vgl. Ueber eine Gattung transcendenter Raumcoordinaten, Acta mathematica Bd. 10.

ersteren Beispielen isochron sind, bei den letzteren nicht. Wesentlich gemeinsam ist aber allen diesen Bewegungen, dass die Bahncurven sich im Allgemeinen niemals schliessen, sondern dass dies nur unter einer Bedingung von der Form § 1, IV geschieht, die allerdings wegen der bis zu einem gewissen Grade willkürlichen rationalen Zahl $m_1 : m_2$, welche sie enthält, in grossen Zeitintervallen annäherungsweise erfüllt werden kann.

Auf einige weitere Beispiele einfach bedingt periodischer und solche mehrfach bedingt periodischer Bewegungen denke ich bei einer späteren Mittheilung zurückzukommen.

Dorpat, im April 1887.