

MÉMOIRES
DE
L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES DE ST.-PÉTERSBOURG, VII^E SÉRIE.
TOME XXXIV, N^o 5.

ÜBER
DIE ALLGEMEINE BEUGUNGSFIGUR
IN FERNRÖHREN.

VON
Hermann Struve.

(Lu le 13 mai 1886)

ST.-PÉTERSBOURG, 1886.

Commissionnaires de l'Académie Impériale des sciences:

à St.-Pétersbourg:
MM. Eggers & C^{ie} et J. Glasounoi

à Riga:
M. N. Kymmel;

à Leipzig:
Voss' Sortiment (G. Haessel.)

Prix: 20 K. = 70 Pf.

3476

S. 284.

MÉMOIRES
DE
L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES DE ST.-PÉTERSBOURG, VII^E SÉRIE.
TOME XXXIV, N° 5.

ÜBER
DIE ALLGEMEINE BEUGUNGSFIGUR
IN FERNRÖHREN.

VON
Hermann Struve.

(Lu le 13 mai 1886.)

—○○○○—
ST.-PÉTERSBOURG, 1886.

Commissionnaires de l'Académie Impériale des sciences:

à St.-Petersbourg:
MM. Eggers & C^{ie} et J. Glasounof;

à Riga:
M. N. Kymmel;

à Leipzig:
Voss' Sortiment (G. Haessel.)

Prix: 20 K. = 70 Pf.

Septembre 1886.

Imprimé par ordre de l'Académie Impériale des sciences.

C. Vessélofsky, Secrétaire perpétuel.

Imprimerie de l'Académie Impériale des sciences.
(Vass.-Ostr., 9 ligne, № 12.)

Die Aufgabe, um die es sich hier handelt, nämlich die Ableitung der Intensitäten für die allgemeine Beugungserscheinung an einer kreisrunden Oeffnung, ist fast ebenso alt wie die Fresnel'sche Diffractionstheorie und bot sich naturgemäss schon den Begründern dieser Theorie dar. Poisson folgerte bekanntlich aus den Fresnel'schen Principien die merkwürdigen Sätze über die Lichtvertheilung in der durch den Lichtpunkt und den Mittelpunkt der Oeffnung gehenden Axe, welche später von Fresnel und Arago durch das Experiment bewahrheitet wurden und damit eine neue kräftige Stütze für die Theorie von Fresnel abgaben. Die Untersuchungen von Airy und Schwerd betrafen gleichfalls nur einen speciellen Fall der allgemeinen Aufgabe, nämlich die Lichtvertheilung in der Focalebene der Fernröhre. Die Erweiterung dieser Untersuchung auf die Lichtvertheilung ausserhalb der Focalebene wurde bald darauf von Knochenhauer¹⁾ versucht; da jedoch die Mittel zu einer befriedigenden Darstellung damals noch nicht zu Gebote standen, so stiess Knochenhauer auf bedeutende Schwierigkeiten, die er nur zum Theil durch überaus weitläufige Entwicklungen zu beseitigen vermochte.

Erst durch die Ausbildung der Theorie der Bessel'schen Functionen in den letzten Jahrzehnten, ist man gegenwärtig in den Stand gesetzt die Aufgabe in ihrer allgemeinen Form zu behandeln und ihr eine einfache und vollständige Lösung zu geben, welche die Poisson'schen Sätze sowie die Fraunhofer'sche Beugungserscheinung als Specialfälle umfasst. Indem ich dies im Folgenden zu zeigen beabsichtige, setze ich einige einfache Sätze aus der Theorie der Bessel'schen Functionen als bekannt voraus.

Es mögen r_1 und r_0 die Entfernungen des Lichtpunkts und des Punkts P , dessen Intensität bestimmt werden soll, von einem Oberflächenelemente $d\sigma$ der beugenden Oeffnung bedeuten. Dann lässt sich bekanntlich die Intensität von P als Norm des complexen Doppelintegrals:

$$V = \iint e^{-\frac{2\pi}{\lambda}(r_0 + r_1 - \delta)i} d\sigma$$

1) Knochenhauer. Die Undulationstheorie des Lichts. pag. 43. Berlin 1839.
Mémoires de l'Acad. Imp. des sciences. VII^{me} Série.

ausdrücken, in welchem die Integration über alle Elemente der Oeffnung zu erstrecken ist und wo δ vorderhand eine ganz willkürliche Constante bedeutet, über die wir frei verfügen können, da sie in dem Ausdruck für die Norm schliesslich fortfällt. Der Einfachheit halber wollen wir annehmen, dass der Lichtpunkt in der Axe, d. h. in der durch den Mittelpunkt gehenden Normale der Oeffnung liegt. Bei Fernröhren würde diese Bedingung gleichbedeutend damit sein, dass der Vereinigungspunkt der Strahlen in der optischen Axe liegt und es versteht sich von selbst, dass diese Bedingung in Wirklichkeit nur angenähert erfüllt zu sein braucht. Ferner bezeichnen wir unter Zugrundelegung von Polarcoordinaten:

- mit ρ_1 die Entfernung des Lichtpunkts vom Mittelpunkt der Oeffnung,
- » ρ_0 » » des Punkts P » » »
- » ζ den Winkel zwischen ρ_0 und der Axe,
- » s den Radiusvector des Elements $d\sigma$ aus dem Mittelpunkte,
- » w den Winkel zwischen s und der durch ρ_0 und die Axe bestimmten Ebene,
- » R den Oeffnungsradius.

Alsdann ist

$$d\sigma = s \, ds \, dw$$

$$r_1^2 = \rho_1^2 + s^2$$

$$r_0^2 = \rho_0^2 + s^2 - 2\rho_0 s \sin \zeta \cos w$$

und demnach bis auf kleine Grössen dritter Ordnung:

$$r_0 + r_1 = (\rho_0 + \rho_1) - s \sin \zeta \cos w + \frac{s^2}{2} \left(\frac{1}{\rho_0} + \frac{1}{\rho_1} \right)$$

Mit Rücksicht darauf, dass δ eine willkürliche Constante bedeutet, hat man folglich:

$$V = \int_0^R \int_0^{2\pi} e^{\frac{2\pi}{\lambda} \left\{ s \sin \zeta \cos w - \frac{s^2}{2} \left(\frac{1}{\rho_0} + \frac{1}{\rho_1} \right) + \delta \right\} i} s \, ds \, dw$$

Substituiren wir an Stelle von s die neue Variable

$$r = \frac{s}{R}$$

und setzen zur Abkürzung

$$z = \frac{2\pi}{\lambda} R \sin \zeta$$

$$m = \frac{2\pi}{\lambda} R \left(\frac{R}{\rho_0} + \frac{R}{\rho_1} \right)$$

so wird:

$$V = R^2 \int_0^1 \int_0^{2\pi} e^{\left(zr \cos w - \frac{m}{2} r^2 + \delta \right) i} r dr dw$$

Nun ist nach der üblichen Bezeichnungsweise für Bessel'sche Functionen

$$\int_0^{2\pi} e^{zr \cos w \cdot i} dw = 2\pi J_0(zr)$$

mithin, wenn man jetzt δ den Werth $\frac{m}{2}$ beilegt und den constanten Factor $2\pi R^2$, der hier von keinem Belang ist, fortlässt:

$$V = \int_0^1 e^{\frac{m}{2}(1-r^2)i} J_0(zr) r dr$$

Setzt man endlich $V = C + S i$ so wird die Intensität durch den Ausdruck:

$$(1) \quad I = C^2 + S^2$$

bestimmt und die Aufgabe ist somit auf die Bestimmung des Integrals V zurückgeführt.

Den Lichtpunkt und die beugende Oeffnung können wir uns auch durch ein aplanatisches Objectiv ersetzt denken, welches die von einem Punkte in beliebiger Entfernung herkommenden Lichtstrahlen in einem Punkte wieder vereinigt. Der geometrische Vereinigungspunkt der Strahlen ist alsdenn als «Lichtpunkt», das Objectiv als «beugende Oeffnung» aufzufassen, und da in diesem Fall der Punkt P auf derselben Seite der beugenden Oeffnung liegt, wie der Lichtpunkt, so hat man unter φ_1 die negative Vereinigungsweite der Strahlen zu verstehn. In diesem Sinne stellt der Ausdruck (1) auch die allgemeine Beugungsfigur in Fernröhren dar. Die Lichtvertheilung in einem beliebigen Querschnitt des durch das Objectiv tretenden Strahlbündels ergibt sich daraus, wenn man φ_0 einen constanten Werth beilegt; für $\varphi_0 + \varphi_1 = 0$ oder $m = 0$ hat man die Lichtvertheilung in der Vereinigungsebene, d. h. die Fraunhofer'sche Beugungserscheinung; für gleich grosse positive und negative m ist die Lichtvertheilung dieselbe, sie ist also in gleichen Abständen vor und hinter dem Focus nahezu symmetrisch.

Die Entwicklung des Integrals V lässt sich nach Bessel'schen Functionen ausführen und zwar in doppelter Weise, je nachdem der Quotient $p = \frac{z}{m}$ kleiner oder grösser als 1 ist. Im ersteren Fall liegt P innerhalb des durch den Lichtpunkt und die Oeffnung bestimmten Strahlenkegels, im zweiten Fall ausserhalb desselben, d. h. im Schattenraume. Dies

folgt unmittelbar aus der Bedeutung von m . Denkt man sich nämlich den Strahlenkegel in der Entfernung ρ_0 senkrecht zur Axe durch eine Ebene geschnitten, so projecirt sich die Oeffnung auf dieselbe in einem Kreise, dessen Radius gleich $R \cdot \frac{\rho_0 + \rho_1}{\rho_1}$ ist. Nennt man ferner μ den Winkelwerth dieses Radius aus dem Mittelpunkt der Oeffnung, so kann man $\sin \mu = R \cdot \frac{\rho_0 + \rho_1}{\rho_0 \rho_1}$, und daher $m = \frac{2\pi}{\lambda} R \cdot \sin \mu$ setzen; man hat folglich $p = \frac{z}{m} = \frac{\sin \xi}{\sin \mu}$, woraus das Behauptete folgt. Insbesondere hat man für die geometrische Schattengrenze den Werth $p = 1$.

Je nachdem nun p kleiner oder grösser als 1 ist, kann man V durch partielle Integration nach steigenden oder fallenden Potenzen von p entwickeln.

Ist erstlich $p < 1$, so lassen sich die Beziehungen

$$d\left(\frac{J_n(zr)}{r^n}\right) = -z \frac{J_{n+1}(zr)}{r^n} dr$$

$$\int e^{\frac{m}{2}(1-r^2)i} r dr = \frac{i}{m} e^{\frac{m}{2}(1-r^2)i}$$

zur Entwicklung von V anwenden. Durch successive partielle Integration ergibt sich nämlich, wenn man zunächst die Grenzen unberücksichtigt lässt:

$$mV = e^{\frac{m}{2}(1-r^2)i} \cdot \sum_0^\infty i^{n+1} p^n \frac{J_n(zr)}{r^n}$$

folglich durch Einführung der Grenzen $r=0$ und $r=1$, indem für $r=0$

$$\frac{J_n(zr)}{r^n} = \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^n}{n!}$$

wird,

$$mV = \sum_0^\infty i^{n+1} p^n J_n(z) - e^{\frac{m}{2}i} \sum_0^\infty i^{n+1} p^n \cdot \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^n}{n!}$$

und diesen Ausdruck kann man wegen

$$\sum_0^\infty i^n p^n \cdot \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^n}{n!} = e^{\frac{pz}{2}i} = e^{\frac{z^2}{2m}i}$$

auch in der folgenden Form schreiben:

$$(2) \quad mV = \sum_0^\infty i^{n+1} p^n J_n(z) - i e^{\frac{m^2 + z^2}{2m}i}$$

Ist andererseits $p > 1$, so erhält man in derselben Weise mit Rücksicht auf die Beziehungen

$$\int r^n J_{n-1}(rz) dr = \frac{r^n J_n(rz)}{z}$$

$$d\left(e^{\frac{m}{2}(1-r^2)i}\right) = -m i e^{\frac{m}{2}(1-r^2)i} r dr$$

durch successive partielle Integration:

$$m V = e^{\frac{m}{2}(1-r^2)i} \sum_0^{\infty} i^n \frac{r^{n+1}}{p^{n+1}} J_{n+1}(rz)$$

und mithin zwischen den Grenzen $r=0$ und $r=1$:

$$(3) \quad m V = \sum_0^{\infty} i^n \frac{J_{n+1}(z)}{p^{n+1}}$$

Indem nun $V = C + Si$ ist, so erhält man schliesslich aus (2) und (3) durch Trennung des Reellen vom Imaginären:

$$(4) \quad \text{für } p < 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} m C = \sin\left(\frac{m^2+z^2}{2m}\right) - \sum_0^{\infty} (-1)^n p^{2n+1} J_{2n+1}(z) \\ m S = -\cos\left(\frac{m^2+z^2}{2m}\right) + \sum_0^{\infty} (-1)^n p^{2n} J_{2n}(z) \end{array} \right.$$

$$(5) \quad \text{für } p > 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} m C = \sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{J_{2n+1}(z)}{p^{2n+1}} \\ m S = \sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{J_{2n+2}(z)}{p^{2n+2}} \end{array} \right.$$

Dass diese Entwicklungen unter den angegebenen Bedingungen convergent sind, folgt aus der Eigenschaft $\lim \frac{J_{n+2}(z)}{J_n(z)} = \frac{z^2}{4(n+1)(n+2)}$, wonach die Glieder obiger Reihen von einer bestimmten Stelle an fortdauernd mit alternirenden Vorzeichen in's Unendliche abnehmen. Aus demselben Grunde behalten die Reihen (4) und (5) ihre Convergenz auch noch für $p=1$ bei und müssen in diesem Fall dieselben Werthe für C und S liefern. Es lässt sich nun zeigen, dass in diesem Fall die Reihen in geschlossener Form summirt werden können. Entwickelt man nämlich die Functionen $\cos(z \cos \psi)$ und $\sin(z \cos \psi)$ in Fourier'sche Reihen nach den Vielfachen von ψ , so ergibt sich:

$$\cos(z \cos \psi) = J_0(z) - 2J_2(z) \cos 2\psi + 2J_4(z) \cos 4\psi - \dots$$

$$\sin(z \cos \psi) = 2J_1(z) \cos \psi - 2J_3(z) \cos 3\psi + 2J_5(z) \cos 5\psi - \dots$$

Diese Reihen behalten ihre Gültigkeit auch für $\psi = 0$ und $\psi = \pi$ und sind deshalb keiner Einschränkung unterworfen. Setzt man aber in denselben $\psi = 0$, so erhält man die Summationsformeln:

$$\sum_0^{\infty} (-1)^n J_{2n}(z) = \frac{J_0(z) + \cos z}{2}$$

$$\sum_0^{\infty} (-1)^n J_{2n+1}(z) = \frac{\sin z}{2}$$

und damit aus (4) und (5) in Uebereinstimmung:

$$\text{für } p = 1 \text{ oder } z = m \quad \left\{ \begin{array}{l} m C = \frac{\sin m}{2} \\ m S = \frac{J_0(m) - \cos m}{2} \end{array} \right.$$

Für die Intensität in der geometrischen Schattengrenze folgt daraus der bemerkenswerthe Ausdruck:

$$(6) \quad I = \frac{1}{4m^2} \{ (\sin m)^2 + (J_0(m) - \cos m)^2 \}$$

der sich mit wachsendem m langsam dem Werthe $\frac{1}{4m^2}$ annähert, durchschnittlich aber kleiner als der letztere bleibt.

Aus (4) ergibt sich ferner für $p = 0$ oder $z = 0$:

$$m C = \sin \frac{m}{2}$$

$$m S = 1 - \cos \frac{m}{2}$$

$$(7) \quad I = \frac{4}{m^2} \sin^2 \frac{m}{4}$$

Die Intensität in der Axe variirt mithin zwischen den Grenzen $I = 0$ für $\frac{m}{4} = n\pi$ und $I = \frac{4}{m^2}$ für $\frac{m}{4} = \frac{2n+1}{2} \pi$.

Setzt man umgekehrt $p = \infty$ oder $m = 0$, so folgt aus (5):

$$C = \frac{J_1(z)}{z}$$

$$S = 0$$

folglich für die Fraunhofer'sche Beugungserscheinung:

$$(8) \quad I = \left(\frac{J_1(z)}{z} \right)^2$$

Um endlich die Ausdrücke (6) und (7) mit derjenigen Intensität zu vergleichen, welche man bei ungehinderter Fortpflanzung des Lichts erhalten würde, braucht man nur den Radius der Oeffnung R sich in die Unendlichkeit wachsend zu denken. Alsdann wird für beliebig kleine Winkel ζ der Werth von z so gross, dass man $J_n(z) = 0$ setzen kann und man erhält in diesem Fall aus (4):

$$\begin{aligned} m C &= \sin\left(\frac{m^2 + z^2}{2m}\right) \\ m S &= -\cos\left(\frac{m^2 + z^2}{2m}\right) \\ (9) \quad I &= \frac{1}{m^2} \end{aligned}$$

Die Intensität in der geometrischen Schattengrenze ist also durchschnittlich mehr als 4 mal kleiner als die Intensität in derselben Entfernung bei freier Beleuchtung; umgekehrt ist die grösste Intensität in der Axe 4 mal grösser als die letztere.

Zur Bestimmung der Lage der Intensitäts-Maxima und Minima hat man die Bedingung:

$$\frac{1}{2} \frac{dI}{dz} = C \frac{dC}{dz} + S \frac{dS}{dz} = 0$$

Differentiirt man demgemäss V nach z und berücksichtigt, dass

$$\frac{dJ_0(zr)}{dz} = -r J_1(zr)$$

so erhält man erstlich:

$$\frac{dV}{dz} = - \int_0^1 e^{\frac{m}{2}(1-r^2)i} J_1(zr) \cdot r^3 dr$$

und dieses Integral lässt sich wiederum durch partielle Integration, mittelst der Formel

$$\frac{d(r J_1(zr))}{dr} = rz \cdot J_0(zr)$$

auf V zurückführen; man erhält damit:

$$m i \frac{dV}{dz} = J_1(z) - z V$$

und durch Trennen des Reellen vom Imaginären:

$$\begin{aligned} \frac{dC}{dz} &= -\frac{z}{m} S & \frac{dS}{dz} &= \frac{z}{m} C - \frac{J_1(z)}{m} \\ \frac{m}{2} \frac{dI}{dz} &= -S \cdot J_1(z) \end{aligned}$$

Die Oerter der Maxima und Minima sind folglich durch die Wurzeln der Gleichungen:

$$J_1(z) = 0 \text{ und } S = 0$$

gegeben, welche demgemäss zwei Systeme solcher Punkte bestimmen. Jedes dieser Systeme kann aber im Allgemeinen sowohl Maxima wie auch Minima enthalten, indem die Wurzeln der einen Gleichung durch diejenigen der andern nicht getrennt zu sein brauchen. Nur für den Schattenraum und zwar für die entfernteren Partien, wo p hinreichend gross ist, fallen die Wurzeln von $S = 0$, wie man aus (5) ersieht, sehr nahe mit denen von $J_2(z) = 0$ zusammen und es bestimmt dann $J_1(z) = 0$ die Lage der Minima, $S = 0$ die Lage der Maxima. Dieselbe Ausnahme gilt natürlich auch bezüglich der Fraunhofer'schen Beugungserscheinung.

Zwischen den beiden Systemen ausgezeichneter Punkte findet jedoch in einer Beziehung ein wesentlicher Unterschied statt, indem das eine System, welches durch die Gleichung $S = 0$ characterisirt ist, von der Grösse m , d. h. von den Entfernungen ϱ_0 und ϱ_1 , abhängt, das andere System hingegen von diesen Entfernungen gänzlich unabhängig ist. Man kann dies auch so aussprechen, dass die Wurzeln von $J_1(z) = 0$ ein ausgezeichnetes Strahlbündel, aus dem Mittelpunkt der Oeffnung, bestimmen, von der Eigenschaft, dass auf demselben überall $\frac{dI}{dz} = 0$ ist, welche Lage auch der Lichtpunkt gegen die Oeffnung haben mag. Hierbei bestimmen die grösseren Wurzeln von $J_1(z) = 0$ Strahlen, die im Allgemeinen nur Minima enthalten; die der Axe näheren Strahlen können abwechselnd Maxima und Minima besitzen und auf den letzteren sind die Maxima von den Minimis durch Wendepunkte getrennt, die an denjenigen Stellen auftreten, wo gleichzeitig $S = 0$ ist; auf der Axe selbst endlich sind hinsichtlich der nebenliegenden Punkte nur Maxima der Intensität vorhanden, die sich jedoch auch bis zum völligen Verschwinden abschwächen können.

Die Ausdrücke (4) und (5) enthalten in Verbindung mit (6) die vollständige Lösung des vorgelegten Problems. Im Fall aber p sehr nahe gleich 1 ist, d. h. der Punkt P in der Nähe der geometrischen Schattengrenze liegt, so kann die Rechnung mittelst der Reihen:

$$A = \sum_0^{\infty} (-1)^n p^{2n} J_{2n}(z)$$

$$B = \sum_0^{\infty} (-1)^n p^{2n+1} J_{2n+1}(z)$$

eine recht umständliche werden. Es ist daher geboten die Reihen für diesen Fall zu transformiren, was sich in folgender Weise ausführen lässt.

Setzt man $p^2 = 1 - q^2$, wo der Annahme zufolge q^2 einen kleinen Bruch bedeute, und ordnet nach Potenzen von q^2 , so wird:

$$A = A_0 + q^2 A_1 + q^4 A_2 + \dots + q^{2n} A_n + \dots$$

$$\frac{B}{p} = B_0 + q^2 B_1 + q^4 B_2 + \dots + q^{2n} B_n + \dots$$

$$A_n = \sum_{m=0}^{m=\infty} (-1)^m (m+n)_n J_{2(m+n)} \quad B_n = \sum_{m=0}^{m=\infty} (-1)^m (m+n)_n J_{2(m+n)+1}$$

Die Coefficienten A_n und B_n erscheinen hier in Form unendlicher Reihen, deren Convergenz aus dem Umstande folgt, dass die Glieder von einem bestimmten Term anfangend fortdauernd mit alternirenden Vorzeichen ins Unendliche abnehmen. Desgleichen ist leicht einzusehn, dass auch die transformirten Reihen A und B für $q < 1$ convergiren, weil mit wachsendem n

$$\lim \frac{A_{n+1}}{A_n} = \lim \frac{J_{2n+2}}{J_{2n}} = \lim \frac{z^2}{4(2n+1)(2n+2)} = 0$$

wird. Es kommt nunmehr darauf an die Coefficienten A_n und B_n , deren Werthe wir zunächst nur für $n = 0$ kennen, auf endliche Ausdrücke zurückzuführen. Man kann dazu auf folgendem Wege gelangen.

Differentiirt man die schon oben benutzte Reihe

$$\cos(z \cos \psi) = J_0 - 2J_2 \cos 2\psi + 2J_4 \cos 4\psi - 2J_6 \cos 6\psi + \dots$$

nach ψ , was hier offenbar gestattet ist, so erhält man:

$$\frac{z \sin(z \cos \psi)}{2^2} = J_2 \frac{\sin 2\psi}{\sin \psi} - 2J_4 \frac{\sin 4\psi}{\sin \psi} + 3J_6 \frac{\sin 6\psi}{\sin \psi} - \dots$$

und wenn man beiderseits mit $\cos \psi d\psi$ multiplicirt und zwischen den Grenzen 0 und π integrirt:

$$\frac{z J_1}{2^2} = \sum_0^{\infty} (-1)^m (m+1) J_{2m+2}$$

Differentiirt man zweimal nach ψ und setzt darauf $\psi = 0$, so ergibt sich:

$$\frac{z \sin z}{2^3} = \sum_0^{\infty} (-1)^m (m+1)^2 J_{2m+2}$$

Durch dreimalige Differentiation der obigen Reihe und darauf folgende Integration gelangt man in derselben Weise zu dem Ausdruck für $\sum_0^{\infty} (-1)^m (m+1)^3 J_{2m+2}$, durch

viermalige Differentiation erhält man für $\psi = 0$ $\sum_0^{\infty} (-1)^m (m+1)^4 J_{2m+2}$ u. s. f. Wird allgemein $\sum_0^{\infty} (-1)^m (m+1)^n J_{2m+2}$ mit S_n bezeichnet, so hat man für $n > 0$:

$$(-1)^{n-1} 2^{2n} S_{2n-1} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\partial^{2n-1} \cos(z \cos \psi)}{\partial \psi^{2n-1}} \cdot \operatorname{ctg} \psi d\psi$$

$$(-1)^{n-1} 2^{2n+1} S_{2n} = \left(\frac{\partial^{2n} \cos(z \cos \psi)}{\partial \psi^{2n}} \right)_{\psi=0}$$

insbesondere findet man:

$$S_0 = \frac{J_0 - \cos z}{2}$$

$$S_1 = \frac{z J_1}{2^2}$$

$$S_2 = \frac{z \sin z}{2^3}$$

$$S_3 = \frac{2z^2 J_0}{2^4}$$

$$S_4 = \frac{z \sin z + 3z^2 \cos z}{2^5}$$

$$S_5 = \frac{z^2}{8} (J_0 - z J_1)$$

Indem nun $(m+n)_n$ in eine Summe von der Form

$$(m+n)_n = a(m+1)^n + b(m+1)^{n-1} + c(m+1)^{n-2} + \dots + t(m+1)$$

zerlegt werden kann, so hat man ferner auch:

$$\sum_0^{\infty} (-1)^m (m+n)_n J_{2m+2} = a S_n + b S_{n-1} + c S_{n-2} + \dots + t S_1$$

und weiter ist ersichtlich, wie aus den letzteren Reihen die Coefficienten $A_1 A_2 A_3 \dots$ gebildet werden können. Man erhält schliesslich:

$$A_0 = \sum_0^{\infty} (-1)^m J_{2m} = \frac{J_0 + \cos z}{2}$$

$$A_1 = \sum_0^{\infty} (-1)^m (m+1)_1 J_{2m+2} = \frac{z J_1}{4}$$

$$A_2 = \sum_0^{\infty} (-1)^m (m+2)_2 J_{2m+4} = \frac{z}{16} (2 J_1 - \sin z)$$

$$A_3 = \sum_0^{\infty} (-1)^m (m+3)_3 J_{2m+6} = \frac{z}{48} (4J_1 + zJ_0 - 3 \sin z)$$

$$A_4 = \sum_0^{\infty} (-1)^m (m+4)_4 J_{2m+8} = \frac{z}{256} (16J_1 + 8zJ_0 - 15 \sin z - z \cos z)$$

$$A_5 = \sum_0^{\infty} (-1)^m (m+5)_5 J_{2m+10} = \frac{z}{640} \left(32J_1 \left(1 - \frac{z^2}{48} \right) + 24zJ_0 - 35 \sin z - 5z \cos z \right)$$

Ebenso liessen sich nun auch die B Coefficienten mit Hülfe der Reihe:

$$\sin (z \cos \psi) = 2J_1 \cos \psi - 2J_3 \cos 3\psi + 2J_5 \cos 5\psi - \dots$$

ableiten. Einfacher aber gelangt man zu denselben, wenn man die Fundamentalformel

$$\frac{2}{z} J_{2n} = \frac{1}{2n} (J_{2n-1} + J_{2n+1})$$

in Anwendung bringt. Man findet alsdann leicht die folgende Relation:

$$B_n = \frac{4}{z} \left((n+1)A_{n+1} - (n+2)A_{n+2} \right),$$

durch welche die B Coefficienten auf die A Coefficienten zurückgeführt sind. Mittelst der obigen Werthe erhält man:

$$B_0 = \sum_0^{\infty} (-1)^m J_{2m+1} = \frac{\sin z}{2}$$

$$B_1 = \sum_0^{\infty} (-1)^m (m+1)_1 J_{2m+3} = \frac{\sin z - zJ_0}{4}$$

$$B_2 = \sum_0^{\infty} (-1)^m (m+2)_2 J_{2m+5} = \frac{3 \sin z + z \cos z - 4zJ_0}{16}$$

$$B_3 = \sum_0^{\infty} (-1)^m (m+3)_3 J_{2m+7} = \frac{5 \sin z + 3z \cos z}{32} + \frac{z^2 J_1 - 12zJ_0}{48}$$

Je weiter man diese Operationen fortsetzt, um so complicirter wird natürlich die Form der Coefficienten. Man wird sich deshalb dieser Transformation nur dann mit Vortheil be-

dienen, sobald p nahe gleich 1 oder q klein ist und wenige Glieder der transformirten Reihe für die Rechnung ausreichen¹⁾.

Zum Schluss mögen die obigen Formeln noch an zwei Beispielen erläutert werden. Wenn in einem Fernrohr das Ocular auf einen Lichtpunkt focussirt ist, so erhält man durch Verrücken des Oculars nach der einen oder andern Seite zunächst ein Maximum in der Axe für $m = 2\pi$, durch weiteres Verrücken ein Minimum für $m = 4\pi$. Für diese beiden Lagen wollen wir die Intensitätsvertheilung berechnen. Nehmen wir als Einheit diejenige Intensität an, welche bei ungehinderter Fortpflanzung des Lichts in den betreffenden Querschnitten stattfinden würde, so erhalten wir folgende Zusammenstellung:

$m = 2\pi$				$m = 4\pi$			
z	C	S	I	z	C	S	I
0	0,0000	+2,0000	4,000	0	0,0000	0,0000	0,000
1	−0,1495	+1,7591	3,117	1	+0,0048	−0,2347	0,055
2	−0,4923	+1,1383	1,538	2	+0,0671	−0,7721	0,601
3	−0,7858	+0,3903	0,770	3	+0,2738	−1,2239	1,573
4	−0,8163	−0,2085	0,710	4	+0,6291	−1,2351	1,922
5	−0,5422	−0,4874	0,532	5	+0,9895	−0,7203	1,498
6	−0,1156	−0,4438	0,210	6	+1,1267	+0,0840	1,277
2π	0,0000	−0,3898	0,152	7	+0,8885	+0,7697	1,382
7	+0,2300	−0,2144	0,099	8	+0,3282	+1,0111	1,130
8	+0,3343	+0,0221	0,112	9	−0,2866	+0,7519	0,647
9	+0,2014	+0,1433	0,061	10	−0,6583	+0,2116	0,478
10	−0,0148	+0,1279	0,017	11	−0,6144	−0,2737	0,453
11	−0,1567	+0,0383	0,026	12	−0,2494	−0,4630	0,277
12	−0,1458	−0,0419	0,023	4π	0,0000	−0,4212	0,177
13	−0,0294	−0,0638	0,005	13	+0,1679	−0,3332	0,139
14	+0,0804	−0,0326	0,008	14	+0,3754	−0,0497	0,143

1) Die Coefficienten $A_0 A_1 A_2 \dots B_0 B_1 B_2 \dots$ lassen sich auch durch bestimmte Integrale darstellen, zu denen man durch Substitution von $m = z\sqrt{1-q^2}$ in $V = \int_0^1 e^{\frac{m}{2}(1-r^2)i} J_0(zr) \cdot r dr$ und Entwicklung nach Potenzen von q^2 gelangt. Es ergibt sich damit zugleich die Reduction für einige bestimmte Integrale, die durch ihre Form bemerkenswerth sind. So findet man beispielsweise:

$$\int_0^1 e^{\frac{z}{2}(1-r^2)i} J_0(zr) \cdot r dr = \frac{\sin z + i(J_0(z) - \cos z)}{2z}$$

Diese Zahlen sind sämtlich nach den Formeln (4) und (5) berechnet und für einzelne Werthe in der Nähe der Schattengrenze durch die transformirte Reihe controllirt. Zur Bestimmung der Maxima und Minima hat man die Wurzeln von $J_1(z) = 0$ und $S = 0$ nöthig. Diejenigen von $J_1(z) = 0$ kann man als bekannt ansehen, und die andern ergeben sich näherungsweise aus den obigen Tabellen durch Interpolation. Man erhält hiermit für $m = 2\pi$ folgende Uebersicht:

$z = 0$	$J_1(z) = 0$	1. Max.	$I = 4,00$
$= 3,7$	$S = 0$	1. Min.	$= 0,72$
$= 3,83$	$J_1(z) = 0$	2. Max.	$= 0,73$
$= 7,01$	$J_1(z) = 0$	2. Min.	$= 0,10$
$= 7,9$	$S = 0$	3. Max.	$= 0,12$
$= 10,17$	$J_1(z) = 0$	3. Min.	$= 0,01$
$= 11,4$	$S = 0$	4. Max.	$= 0,03$
$= 13,33$	$J_1(z) = 0$	4. Min.	$= 0,002$
$= 14,5$	$S = 0$	5. Max.	$= 0,01$
—	—	—	—

Es findet somit hier nur ein einziges hervortretendes Maximum für $z = 0$ statt, während im Uebrigen die Intensität vom Centrum nach dem Rande hin rasch abnimmt und nur an einzelnen Stellen gewissermassen ein Stillstand in dieser Abnahme eintritt. Ein solcher Stillstand ist z. B. in der Nähe von $z = 3.8$ zu bemerken, wo ein schwaches Minimum neben einem schwachen Maximum liegt. Durch eine kleine Veränderung von m würde man an dieser Stelle einen Inflexionspunkt erhalten. Hinter der geometrischen Schattengrenze werden die Oscillationen zwar grösser, die Intensität bleibt aber daselbst sehr klein.

Aus der zweiten Tabelle findet man die Maxima und Minima für $m = 4\pi$ folgendermassen:

und durch eine leichte Umformung:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \cos(z(1-2r \cos w + r^2)) \cdot r \, dr \, dw = \frac{J_0(2z) \cdot \sin 2z}{2z}$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \sin(z(1-2r \cos w + r^2)) \cdot r \, dr \, dw = \frac{1 - J_0(2z) \cdot \cos 2z}{2z}$$

Die Reihen für S_0 , S_1 und S_2 finden sich auch bei Lommel «Studien über die Bessel'schen Functionen» in etwas anderer Weise abgeleitet.

$z = 0$	$J_1(z) = 0$	1. Min.	$I = 0,00$
$= 3,83$	$J_1(z) = 0$	1. Max.	$= 2,00$
$= 5,85$	$S = 0$	2. Min.	$= 1,20$
$= 7,01$	$J_1(z) = 0$	2. Max.	$= 1,40$
$= 10,17$	$J_1(z) = 0$	3. Min.	$= 0,45$
$= 10,5$	$S = 0$	3. Max.	$= 0,48$
$= 13,33$	$J_1(z) = 0$	4. Min.	$= 0,12$
$= 14,2$	$S = 0$	4. Max.	$= 0,15$
—	—	—	—

In der Axe ist somit die Intensität $= 0$, bleibt sehr klein bis ungefähr $z = 1$, wächst alsdann rasch und erreicht für $z = 3.83$ ihren Maximalwerth $I = 2$. Von da an nimmt sie stufenweise bis hinter die Schattengrenze ab und die Maxima und Minima treten nicht mehr merklich hervor. Innerhalb der Intervalle $z = 5.9$ und $z = 7.0, 10.2$ und $10.5, 13.3$ und 14.2 kommt die Abnahme zum Stillstand und bleibt die Intensität nahezu unverändert.

Die folgende Tabelle enthält endlich noch eine Vergleichung der Intensitäten in der Focalebene $m = 0$ und dem Querschnitt $m = 2\pi$, wobei die respectiven Intensitäten in der Axe als Einheit angenommen sind:

I		
z	$m = 0$	$m = 2\pi$
0	1,000	1,000
1	0,775	0,779
2	333	384
3	051	192
4	001	178
5	017	133
6	008	053
7	000	025
8	003	028
9	003	015
10	000	004
11	001	007
12	001	006
13	000	001
14	000	002

Sind die Wellenlänge λ und das Verhältniss des Objectivradius zur Focallänge $\frac{R}{f}$ gegeben, so kann die Grösse m auch durch die Verschiebung df des Oculars aus der Focal-

stellung ausgedrückt werden. Man hat nämlich, da $\varrho_1 = -f$ und $\varrho_0 + \varrho_1 = df$ zu setzen ist:

$$m = \frac{2\pi}{\lambda} R^2 \left(\frac{1}{\varrho_0} + \frac{1}{\varrho_1} \right) = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{R^2}{f^2} df$$

oder

$$df = \frac{m\lambda}{2\pi} \left(\frac{f}{R} \right)^2.$$

Für Fernröhre gilt jetzt durchschnittlich bei freier Oeffnung des Objectivs das Verhältniss $\frac{R}{f} = \frac{1}{32}$; demnach ist für Licht mittlerer Wellenlänge und $m = 2\pi$:

$$df = 0^{mm}00058.(32)^2 = 0^{mm}6.$$

Um daher bei freier Oeffnung von der Focalstellung zur Stellung die $m = 2\pi$ entspricht überzugehen, braucht man das Ocular nur um ungefähr 0.6 mm. zu verrücken. Da sich der Focus nur in seltenen Fällen mit einer solchen Genauigkeit berichtigen lässt, so folgt, dass in Fernröhren bei freier Oeffnung nur äusserst selten die Fraunhofer'sche Beugungserscheinung rein zum Vorschein kommt, ganz abgesehen von den anderweitigen störenden Ursachen. Im Allgemeinen wird bei freier Oeffnung die Lichtvertheilung in beliebigen Querschnitten noch mehr durch die sphaerische Aberration und durch die Farbenzerstreuung als durch die Beugung bedingt sein. Bei allmäliger Abblendung des Objectivs wird dagegen der Einfluss der Beugung immer mehr Ueberhand nehmen.

