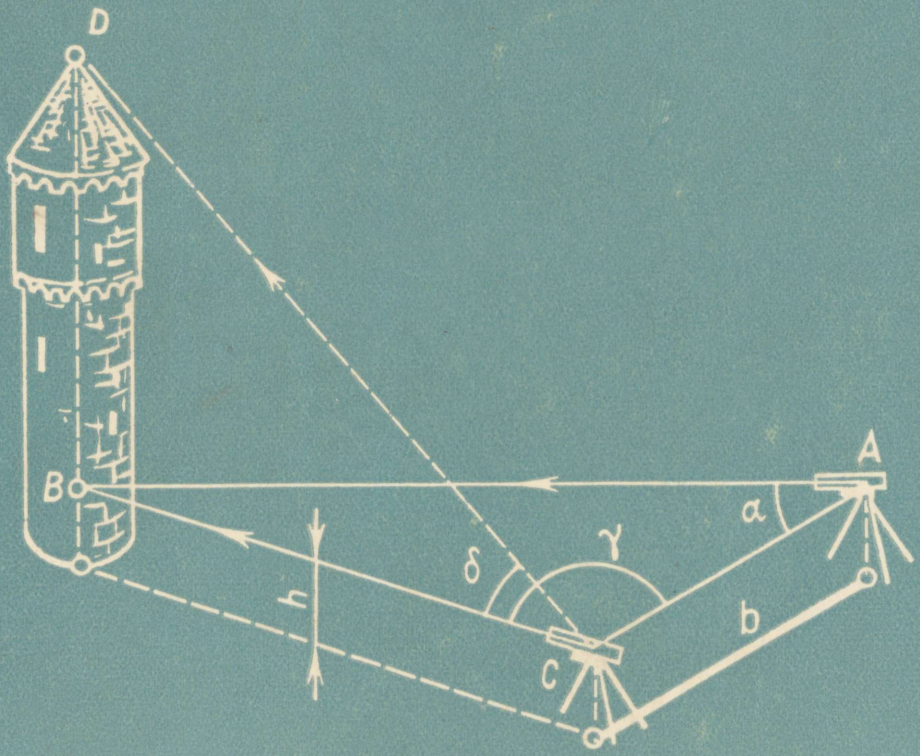
O. PRINITS
G. ROSENBERG
A. VIHMAN

MATEMAATIKA

X KLASSILE



A-28639
Õ-100

O. PRINITS, G. ROSENBERG, A. VIHMAN

MATEMAATIKA

X KLASSILE

3. TRÜKK

TRÜ Matemaatikateaduskond
Matemaatika õpetamise
metoodika kateeder

TÜ MATEMAATIKA-
INFORMAATIKATEADUSKOND

KIRJASTUS «VALGUS» * TALLINN 1967

51
E95

Kunstiliselt kujundanud *L. Kruusmaa* ja *T. Aru*

Kinnitatud Eesti NSV Haridusministeeriumi poolt

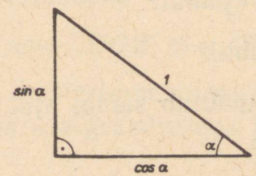
TARTU ÜLIKOOLI
RAAMATUKOGU

6—6

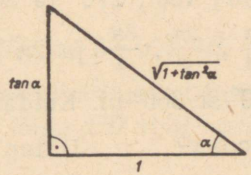
1. TRIGONOMEETRILISTE AVALDISTE TEISENDAMINE.

1.1. TRIGONOMEETRIA EELMISE OSA KORDAMISEKS.

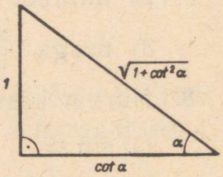
1. a) Kui täisnurkses kolmnurgas hüpotenuus võrdub pikkusühikuga ja ühe teravnurga suurus on α (joon. 1), siis selle teravnurga vastaskaateti pikkus on $\sin\alpha$ ja lähiskaateti pikkus $\cos\alpha$ (joon. 1). Põhjenda seda!



Joon. 1



Joon. 2



Joon. 3

b) Tuleta joonise 1 abil trigonomeetriliste funktsioonide vahelised järgmised seosed (nn. põhiseosed):

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1;\quad \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha;\quad \tan\alpha\cdot\cot\alpha=1.$$

2. a) Täisnurkse kolmnurga teravnurga α lähiskaatet on valitud pikkusühikuks. Näita, et teise kaateti pikkus on siis $\tan\alpha$ ja hüpotenuusi pikkus $\sqrt{1+\tan^2\alpha}$ (joon. 2).

b) Tuleta joonise 2 abil järgmised valemid:

$$\sin\alpha=\frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}};\quad \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}.$$

3. a) Näita, et kui täisnurkse kolmnurga üks teravnurk on α ja selle nurga vastaskaateti pikkus on 1, siis lähiskaateti pikkus on $\cot\alpha$ ja hüpotenuusi pikkus $\sqrt{1+\cot^2\alpha}$ (joon. 3).

b) Tuleta joonise 3 abil järgmised valemid:

$$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}};\quad \cos\alpha=\frac{\cot\alpha}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}.$$

4. Avalda:
   a) nurga siinus selle nurga koosinuse kaudu;
   b) nurga koosinus selle nurga siinuse kaudu;
   c) nurga tangens selle nurga siinuse kaudu;
   d) nurga tangens selle nurga koosinuse kaudu;
   e) nurga kootangens selle nurga siinuse kaudu;
   f) nurga kootangens selle nurga koosinuse kaudu.

5. Teades, et $\tan\alpha=\frac{4}{3}$, arvuta $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ ja $\cot\alpha$ väärtus.

6. Teades, et $\cos\alpha=\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}$ ja $a>b>0$, avalda nurga α ülejäänud trigonomeetriliste funktsioonide väärtused.

7. Kui suured on trigonomeetriliste funktsioonide väärtused
   1) nurkade 30°, 45° ja 60° puhul?
   2) nurkade 0°, 90°, 180°, 270° ja 360° puhul?
   3) nurga $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{3\pi}{4}$ ja 2π puhul?

8. Nurk x kasvab 0°-st 360°-ni. Kuidas muutub samal ajal
   1) $\sin x$? 2) $\cos x$? 3) $\tan x$?

9. Näita, et pole olemas niisugust nurka, mille siinuse ja koosinuse summa on $\sqrt{3}$.

10. 1) Arvuta $\cos 150°$.
    2) Lihtsusta antud avaldis:

$$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2.$$

1.2. KAHE NURGA SUMMA JA VAHE SIINUS, KOOSINUS JA TANGENS.

1. Kahe nurga summa siinuse võrdlemine nende nurkade siinuste summaga.

Kui tahame näiteks 30°-se ja 45°-se nurga siinuste järgi arvutada 75°-se nurga siinust, siis peame oskama avaldada $\sin(30°+45°)$ liidetavate nurkade (siinuse ja koosinuse) kaudu.

Et kahe nurga summa siinus ei võrdu liidetavate nurkade siinuste summaga, seda näitab järgmine näide:

$$\sin(30°+60°)=\sin 90°=1,$$

kuid

$$\sin 30°+\sin 60°=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\neq 1.$$

Seega,

$$\sin(\alpha+\beta)\neq \sin\alpha+\sin\beta.$$

Samal viisil veendume, et näiteks

$$\cos(\alpha-\beta)\neq \cos\alpha-\cos\beta.$$

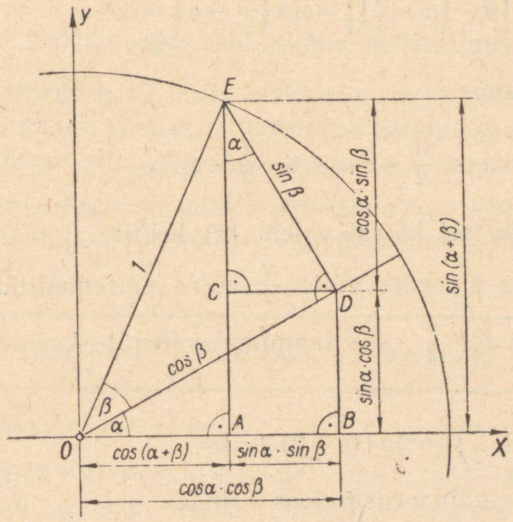
2. Kahe nurga summa siinus.

Olgu antud teravnurgad α ja β nii, et ka nende summa on teravnurk. Niisiis $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$ ja $0<\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$.

Joonestame nurgad α ja β xy-teljestikus võetud ühikringi kesknurkadena (joon. 4):

$$\alpha=\angle DOB,\ \beta=\angle EOD,\ \alpha+\beta=\angle EOB.$$

Joonestame nurga β lõppraadiuse otspunktist E lõigu EA risti nurga α algraadiusega ja lõigu ED risti nurga α lõppraadiusega.



Joon. 4.

Seega

$EA \perp OB$; $ED \perp OD$ ja $DC \perp EA$.

Siis kolmnurgas DCE nurk $CED = \alpha$.

Et ühikringi raadius $r = OE = 1$, siis saame:
kolmnurgas OAE lõik $AE = \sin(\alpha+\beta)$,
kolmnurgas ODE lõik $ED = \sin\beta$ ja lõik $OD = \cos\beta$,
kolmnurgas ECD lõik $EC = \cos\alpha \cdot \sin\beta$,
kolmnurgas OBD lõik $DB = \sin\alpha \cdot \cos\beta$.

Et $DB = AC$ ja $AE = AC + CE$, siis

$$\boxed{\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta} \qquad (1)$$

Seega oleme saanud valemi (1) kahe teravnurga summa siinuse avaldamiseks antud nurkade siinuse ja koosinuse kaudu, kusjuures see summa ise on ka teravnurk.

Valemi (1) kehtivust sel korral, kui antud nurgad ei ole teravad, selgitame järgmisel viisil.

Kui üks nurkadest on terav- ja teine täisnurk, näiteks kui $\beta = \frac{\pi}{2}$, siis taandamisvalemite rakendamisel saame:

$$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left[\pi - \left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\right] = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha.$$

Valem (1) annab:

$$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) = \sin\alpha\cos\frac{\pi}{2} + \cos\alpha\sin\frac{\pi}{2} = \cos\alpha.$$

Siit näeme, et ka sel korral valem (1) kehtib.

Kui nurkade α ja β asemel võtta $\frac{\pi}{2}$ võrra suuremad nurgad, s. o. nurgad $\alpha+\frac{\pi}{2}$ ja $\beta+\frac{\pi}{2}$, siis taandamisvalemite kasutamisel saame:

$$\sin\left[\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)+\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right)\right] = \sin\left[(\alpha+\beta)+\pi\right] =$$

$$= -\sin(\alpha+\beta) = -\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.$$

Valem (1) annab sel korral:

$$\sin\left[\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)+\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right)\right]=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right)+$$

$$+\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right)=-\cos\alpha\sin\beta-$$

$$-\sin\alpha\cos\beta=-\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.$$

Siit nähtub, et valem (1) kehtib selgi korral.

Nurkasid α ja β niiviisi samm-sammult suurendades veendume, et valem (1) kehtib igasuguste nurkade korral.

3. Kahe nurga summa koosinus.

Valemi kahe nurga summa koosinuse avaldamiseks antud nurkade siinuse ja koosinuse kaudu saame analoogiliselt eelnevaga joonise 4 abil:

$$\cos(\alpha+\beta)=OA=OB-AB=OB-CD=$$
$$=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.$$

Seega

$$\boxed{\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta} \qquad (2)$$

Ka valemi (2) kehtivuses igasuguste nurkade korral saame veenduda nurkasid α ja β samm-sammult $\frac{\pi}{2}$ võrra suurendades.

4. Kahe nurga vahe siinus ja koosinus.

Valemid kahe nurga vahe siinuse ja koosinuse avaldamiseks antud nurkade siinuse ja koosinuse kaudu saame, kasutades negatiivse nurga siinust ja koosinust:

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin[\alpha+(-\beta)]=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)=$$
$$=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\cdot(-\sin\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.$$

Seega

$$\boxed{\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta} \qquad (3)$$

Samal viisil saame:

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos[\alpha+(-\beta)]=\cos\alpha\cos(-\beta)-\sin\alpha\sin(-\beta)=$$
$$=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\cdot(-\sin\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \qquad (4)$$

Valemeid (1), (2), (3) ja (4) nimetatakse trigonomeetriliste funktsioonide liitmislauseteks.

Eespool tuletatud valemite abil saame ka valemid $\tan(\alpha+\beta)$ ja $\tan(\alpha-\beta)$ avaldamiseks $\tan\alpha$ ja $\tan\beta$ kaudu.

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}.$$

Jagades viimase murru lugeja ja nimetaja avaldisega $\cos\alpha\cos\beta$, saame avaldise:

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\frac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}.$$

Niisiis,

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

Kasutades seost

$$\tan(-\alpha)=-\tan\alpha,$$

saame

$$\tan(\alpha-\beta)=\tan[\alpha+(-\beta)]=\frac{\tan\alpha+\tan(-\beta)}{1-\tan\alpha\tan(-\beta)}=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}.$$

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

Ülesandeid.

11. Arvuta: 1) $\sin 75°$ 3) $\tan 75°$ 5) $\cos 15°$
2) $\cos 75°$ 4) $\sin 15°$ 6) $\tan 15°$

12. Arvuta $\cos(\alpha-\beta)$ väärtus, teades, et $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ ja $\cos\beta=\frac{5}{13}$ ja et α ja β on teravnurgad.

13. Arvuta $\sin(\alpha+\beta)$ väärtus, teades, et α ja β on teravnurgad ning $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ ja $\sin\beta=\frac{12}{13}$.

14. Arvuta $\cos(\alpha+\beta)$, teades, et $\sin\alpha=\frac{1}{2}$, $\sin\beta=\frac{1}{3}$ ning α ja β on teravnurgad.

15. Arvuta $\tan(\alpha+\beta)$, teades et $\tan\alpha=\frac{1}{2}$ ja $\tan\beta=\frac{1}{3}$ ning α ja β on teravnurgad.

16. Arvuta $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}$, kui α ja β on teravnurgad ning $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ja $\cos\beta=\frac{2}{3}$.

17. 1) Näita, et $\sin(45°+x)+\cos(45°+x)=\sqrt{2}\cdot\cos x$.

2) Näita, et $\sin(45°+x)-\cos(45°-x)=\sqrt{2}\cdot\cos x$.

18. Kolmnurgas on kahe teravnurga koosinused vastavalt $\frac{15}{17}$ ja $\frac{9}{41}$. Arvuta nurkadega mitte kõrvuti asetseva välisnurga siinus.

19. Kolmnurga kahe teravnurga siinused on vastavalt $\frac{7}{25}$ ja $\frac{4}{5}$. Arvuta kolmanda nurga koosinus.

20. Kolmnurga ABC sees olevast punktist O on küljed AB, AC ja BC näha nürinurkade all. Teades, et $\sin\widehat{AOB}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ ja $\cos\widehat{BOC}=-\frac{1}{3}$, arvuta $\sin\widehat{AOC}$.

21. Lihtsusta avaldised:

1) $\sin(\alpha+30°)-\sin(\alpha-30°)$

2) $\cos(\alpha+45°)-\cos(\alpha-45°)$

22. Arvuta:

1) $\sin 20°\cos 40°+\cos 20°\sin 40°$

2) $\cos 47°\cos 17°+\sin 47°\sin 17°$

3) $\frac{\tan 70°-\tan 40°}{1+\tan 70°\tan 40°}$

4) $\frac{\tan 70°+\tan 80°}{1-\tan 70°\tan 80°}$

5) $\frac{\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{5\alpha}{2}}{1-\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{5\alpha}{2}}$, kui $\alpha=15°$

6) $\sin 60°\cos 30°-\cos 60°\sin 30°$

23. Lihtsusta avaldised:

1) $\sin 45° \cos 30° + \cos 45° \sin 30°$

2) $\cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6}$

24. On teada, et α ja β on teravnurgad ja et $\tan \alpha = \frac{3}{4}$ ning $\tan \beta = \frac{1}{7}$. Tõesta, et $\alpha + \beta = 45°$.

25. Tõesta, et

1) $\tan 2° + \tan 12° = \frac{\sin 14°}{\cos 2° \cdot \cos 12°}$

2) $\frac{\sin 5°}{\sin 15°} = \frac{\tan 10° - \tan 5°}{\tan 10° + \tan 5°}$

26. Lihtsusta avaldised:

1) $\sin 10° \cos 50° + \cos 10° \sin 50°$

2) $\cos \frac{3\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8} + \sin \frac{3\pi}{8} \sin \frac{\pi}{8}$

27. Kahe nurga tangensite summa on 2, kuid nende nurkade summa tangens on 4. Leia nende nurkade tangensite korrutis.

28. Kahe nurga summa koosinus on 0,3 ja nende nurkade vahe koosinus on 0,8. Leia nende nurkade siinuste korrutis.

1.3. KAHEKORDSE NURGA JA POOLNURGA SIINUS, KOOSINUS JA TANGENS.

Valemid kahekordse nurga siinuse, koosinuse ja tangensi avaldamiseks ühekordse nurga funktsioonide kaudu saame, kui kahe nurga summa siinuse, koosinuse ja tangensi valemites võtame liidetavad nurgad teineteisega võrdseks.

Võttes $\beta = \alpha$, saame

$$\sin(\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha = \sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \sin \alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha.$$

$$\boxed{\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha}$$

$$\cos(\alpha + \alpha) = \cos 2\alpha = \cos \alpha \cdot \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha.$$

$$\boxed{\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}$$

$$\tan(\alpha+\alpha)=\tan 2\alpha=\frac{\tan\alpha+\tan\alpha}{1-\tan\alpha\cdot\tan\alpha}=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}.$$

$$\boxed{\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}}$$

Valemid poolnurga siinuse ja koosinuse avaldamiseks antud nurga funktsioonide kaudu saame järgmiselt.

Esiteks kasutame põhiseost

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}=1. \tag{1}$$

Teiseks asendame kahekordse nurga koosinuse valemis nurga α nurgaga $\frac{\alpha}{2}$, saame

$$\cos\alpha=\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

ehk

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}=\cos\alpha. \tag{2}$$

Lahutades nüüd võrduse (1) pooltest võrduse (2) vastavad pooled, saame

$$2\sin^2\frac{\alpha}{2}=1-\cos\alpha, \tag{3}$$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}.$$

Sellest saamegi poolnurga siinuse valemi:

$$\boxed{\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}}$$

Liites võrduste (1) ja (2) vastavad pooled, saame

$$2\cos^2\frac{\alpha}{2}=1+\cos\alpha, \tag{4}$$

millest

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}.$$

Siit

$$\boxed{\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}}$$

Et tangens on siinuse ja koosinuse jagatis, siis

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\sin\frac{\alpha}{2}:\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}:\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

ehk

$$\boxed{\tan\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}}$$

Märgi poolnurga valemites oleva radikaali ees määrab muidugi see, mis veerandis nurk $\frac{\alpha}{2}$ lõpeb.

Poolnurga tangensi saab nurga siinuse ja koosinuse kaudu avaldada ka ratsionaalselt (s. o. radikaalivabalt). Selleks korrutame võrduse

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

paremal pool oleva murru lugejat ja nimetajat avaldisega $2\cos\frac{\alpha}{2}$ ning arvestades võrdust (4), saame

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

Korrutades võrduse

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

parema poole lugeja ja nimetaja avaldisega $1-\cos\alpha$, saame pärast taandamist

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Seega

$$\boxed{\begin{aligned}\tan\frac{\alpha}{2}&=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}\\ \tan\frac{\alpha}{2}&=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}\end{aligned}}$$

Kahekordse nurga ja poolnurga siinuse, koosinuse ja tangensi valemeid kasutame avaldiste teisendamisel ja mõne nurga funktsiooni väärtuse arvutamisel.

Näide 1. Võrdhaarse kolmnurga alusnurga siinus on $\frac{5}{13}$. Leia tipunurga siinus ja koosinus.

Lahendus. Tähistame alusnurga tähega α ja tipunurga tähega β, siis

$$\beta = 180° - 2\alpha$$

ja

$$\sin\beta = \sin(180° - 2\alpha) = \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha;$$

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} = \frac{12}{13}.$$

Seega,

$$\sin\beta = 2 \cdot \frac{5}{13} \cdot \frac{12}{13} = \frac{120}{169};$$

$$\cos\beta = \cos(180° - 2\alpha) = -\cos 2\alpha =$$

$$= -(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = \sin^2\alpha - \cos^2\alpha = \left(\frac{5}{13}\right)^2 - \left(\frac{12}{13}\right)^2 = -\frac{119}{169}.$$

Näide 2. Arvuta $\tan 22\frac{1}{2}°$.

Lahendus. Võttes valemis

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

$\alpha = 45°$, saame

$$\tan 22\frac{1}{2}° = \frac{\sin 45°}{1+\cos 45°} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2} - 1 = 0{,}414.$$

Ülesandeid.

29. Rombi külje ja diagonaali vahelise nurga siinus on 0,2. Leia rombi nurkade koosinused.
30. Võrdhaarse kolmnurga alusnurga koosinus on $\frac{3}{4}$. Leia tipunurga koosinus.
31. Ringjoone veerandist väiksemale kaarele toetuva kesknurga koosinus on $\frac{1}{9}$. Leia samale kaarele toetuva piirdenurga siinus, koosinus ja tangens.

32. Kontrolli võrdust

$$\sin 35^\circ \sin 55^\circ = \frac{1}{2}\cos 20^\circ.$$

33. Avalda x ja y vaheline seos, milles ei esine nurka α:

1) $\begin{cases} x = \sin\alpha + \cos\alpha \\ y = \sin 2\alpha \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = \sin\alpha \\ y = \cos 2\alpha \end{cases}$

34. On teada, et $\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{2}{5}$. Leia $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ ja $\tan\alpha$.

35. Lihtsusta avaldised:

1) $2\sin 40^\circ \cdot \cos 50^\circ$
2) $(\sin 10^\circ + \sin 80^\circ)(\cos 80^\circ - \cos 10^\circ)$
3) $\sin(60^\circ+\alpha)\cos(60^\circ-\alpha) - \cos(60^\circ+\alpha)\sin(60^\circ-\alpha)$

36. Arvuta avaldise väärtus:

1) $\cos(38^\circ+\alpha)\sin(52^\circ-\alpha) + \sin(38^\circ+\alpha)\cos(52^\circ-\alpha)$

2) $\frac{\sin 2\alpha}{2\sin\alpha} - \frac{\sin\alpha}{\tan\alpha}$

3) $\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right) - \sin 2\alpha$

1.4. KAHE NURGA TRIGONOMEETRILISTE FUNKTSIOONIDE SUMMA JA VAHE TEISENDAMINE KORRUTISEKS.

Kasutades kahe nurga summa ja vahe siinuse ning kahe nurga summa ja vahe koosinuse valemeid:

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y, \tag{1}$$
$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y, \tag{2}$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y, \tag{3}$$
$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y, \tag{4}$$

saame tuletada valemid kahe nurga siinuste summa ja vahe ning koosinuste summa ja vahe teisendamiseks korrutiseks.

Kahe nurga siinuste summa valemi tuletamiseks liidame võrduste (1) ja (2) vastavad pooled:

$$\sin(x+y) + \sin(x-y) = 2\sin x \cos y. \tag{5}$$

Tähistades nurgad $x+y$ ja $x-y$ vastavalt tähtedega α ja β, saame nurgad x ja y avaldada α ja β kaudu järgmisest võrrandisüsteemist:

$$\begin{cases} x+y=\alpha \\ x-y=\beta. \end{cases}$$

Siit

$$x=\frac{\alpha+\beta}{2} \quad \text{ja} \quad y=\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Tehes nüüd asendused, saame võrdusele (5) anda kuju

$$\boxed{\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

Seega,

kahe nurga siinuste summa võrdub nende nurkade poolsumma siinuse ja poolvahe koosinuse kahekordse korrutisega.

Kui kahe nurga siinuste summa valemis asendame nurga β nurgaga $-\beta$ ning peame silmas, et

$$\sin(-\beta)=-\sin\beta,$$

siis saame valemi kahe nurga siinuste vahe jaoks:

$$\sin\alpha+\sin(-\beta)=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

ehk

$$\boxed{\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

Niisiis,

kahe nurga siinuste vahe võrdub nende nurkade poolsumma koosinuse ja poolvahe siinuse kahekordse korrutisega.

Kahe nurga koosinuste summa korrutiseks teisendamise valemi saamiseks liidame võrduste (3) ja (4) vastavad pooled:

$$\cos(x+y)+\cos(x-y)=2\cos x\cos y.$$

Tehes siin asendused, nagu eelmiselgi korral, saame valemi:

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Järelikult,

kahe nurga koosinuste summa võrdub nende nurkade poolsumma ja poolvahe koosinuste kahekordse korrutisega.

Kirjutades viimases valemis nurga β asemele $180°-\beta$ ja pidades silmas, et $\cos(180°-\beta)=-\cos\beta$, saame:

$$\cos\alpha+\cos(180°-\beta)=2\cos\frac{\alpha+180°-\beta}{2}\cos\frac{\alpha-180°+\beta}{2}$$

ehk

$$\cos\alpha-\cos\beta=2\cos\left(90°+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-90°\right).$$

Et

$$\cos\left(90°+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=-\cos\left(180°-90°-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=$$

$$=-\cos\left(90°-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=-\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

ja

$$\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-90°\right)=\cos\left(90°-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\sin\frac{\alpha+\beta}{2},$$

siis saame

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$

s. t.

kahe nurga koosinuste vahe võrdub nende nurkade poolsumma ja poolvahe siinuste kahekordse korrutise vastandarvuga.

Trigonomeetriliste funktsioonide summa ja vahe korrutiseks teisendamise valemid võimaldavad avaldisi lihtsustada ja kergendavad avaldiste väärtuste arvutamist. Toome selle kohta mõned näited.

Näide 1. Arvutada avaldise $\sin 75°+\sin 15°$ väärtus.

Lahendus.

$$\sin 75° + \sin 15° = 2 \sin \frac{75°+15°}{2} \cos \frac{75°-15°}{2} =$$

$$= 2 \sin 45° \cos 30° = 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{6} \approx 1{,}224.$$

Näide 2. Teisendada üksliikmeks avaldis

$$\sin(60° + x) - \sin(60° - x).$$

Lahendus.

$$\sin(60° + x) - \sin(60° - x) =$$

$$= 2 \cos \frac{60° + x + 60° - x}{2} \cdot \sin \frac{60° + x - 60° + x}{2} =$$

$$= 2 \cos 60° \sin x = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin x = \sin x.$$

Näide 3. Lihtsusta avaldis

$$\frac{2 \sin \alpha - \sin 2\alpha}{2 \sin \alpha + \sin 2\alpha}.$$

Lahendus.

$$\frac{2 \sin \alpha - \sin 2\alpha}{2 \sin \alpha + \sin 2\alpha} = \frac{2 \sin \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha}{2 \sin \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = \tan^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Näide 4. Teisenda korrutiseks avaldis $1 + 2 \cos \alpha$.

Lahendus.

$$1 + 2 \cos \alpha = 2\left(\frac{1}{2} + \cos \alpha\right) = 2(\cos 60° + \cos \alpha) =$$

$$= 2 \cdot 2 \cos\left(30° + \frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(30° - \frac{\alpha}{2}\right) =$$

$$= 4 \cos\left(30° + \frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(30° - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Näide 5. Taandada murd $\frac{\cos 2x}{1 - \sin 2x}$.

Lahendus. Taandaja selgitamisel esitame murru lugeja ja nimetaja korrutistena.

Teisendame nimetaja korrutiseks:

$$1 - \sin 2x = \sin 90° - \sin 2x = 2 \cos(45° + x) \sin(45° - x).$$

Teisendades lugeja korrutiseks, saame:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x) =$$
$$= [\sin(90° - x) + \sin x] \cdot [\sin(90° - x) - \sin x] =$$

TRÜ Matemaatikateaduskond
Matemaatika õpetamise

$= 2 \sin 45° \cos(45° - x) \cdot 2 \cos 45° \sin(45° - x) =$
$= 2 \cos(45° - x) \sin(45° - x).$

Nüüd on

$$\frac{\cos 2x}{1 - \sin 2x} = \frac{2 \cos(45° - x) \sin(45° - x)}{2 \cos(45° + x) \sin(45° - x)} =$$
$$= \frac{\cos(45° - x)}{\cos(45° + x)} = \frac{\sin(45° + x)}{\cos(45° + x)} = \tan(45° + x).$$

Näide 6. Teisendada korrutiseks avaldis $\sin \alpha + \cos \alpha$.

Lahendus.

$\sin \alpha + \cos \alpha = \sin \alpha + \sin(90 - \alpha) =$
$= 2 \sin 45° \cos(-45° + \alpha) = \sqrt{2} \cos(45° - \alpha).$

Ülesandeid.

37. Tuleta kahe nurga siinuste vahe valem p. 1.4. alguses leiduva võrduse (1) pooltest võrduse (2) vastavate poolte lahutamise teel.

38. Tuleta kahe nurga koosinuste vahe valem p. 1.4. alguses leiduva võrduse (3) pooltest võrduse (4) vastavate poolte lahutamise teel.

39. Kasutades seoseid $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ ja $\tan \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta}$ tõesta, et

a) $\tan \alpha + \tan \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$;

b) $\tan \alpha - \tan \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$.

40. Tuleta p. 1.4. alguses leiduvate seoste (1) ja (2) abil valem

$$\sin x \cos y = \frac{\sin(x + y) + \sin(x - y)}{2},$$

mis võimaldab ühe nurga siinuse ja teise nurga koosinuse korrutise teisendada kahe nurga siinuste summaks.

41. Tuleta p. 1.4. alguses leiduvate seoste (3) ja (4) abil kahe nurga koosinuste korrutise summaks teisendamise valem:

$$\cos x \cos y = \frac{\cos(x + y) + \cos(x - y)}{2}.$$

42. Kasutades p. 1.4. alguses leiduvaid seoseid (3) ja (4), tuleta kahe nurga siinuste korrutise vaheks teisendamise valem:

$$\sin x \sin y = \frac{\cos(x - y) - \cos(x + y)}{2}.$$

43. Teisenda korrutiseks ja arvuta siis avaldise väärtus (kasutades tarbe korral tabeleid):

1) $\sin 75° - \sin 15°$;
2) $\cos 48° + \cos 12°$;
3) $\cos 135° + \cos 45°$;
4) $\cos 135° - \cos 45°$;
5) $\cos 5° - \cos 35°$;
6) $\tan 20° + \tan 70°$;
7) $\sin 80° + \sin 10°$;
8) $\cos 58° + \cos 32°$.

44. Lihtsusta avaldis ja seejärel arvuta ta väärtus (kasutades tarbe korral tabeleid):

1) $\frac{\sin 55° + \sin 35°}{\sin 55° - \sin 35°}$;
2) $\frac{\cos 54° + \cos 36°}{\cos 54° - \cos 36°}$;
3) $\frac{\sin 36° + \sin 24°}{\sin 36° - \sin 24°}$;
4) $\frac{\sin 24° + \sin 6°}{\cos 24° + \cos 6°}$;
5) $\frac{\sin 29° - \sin 9°}{\sin 29° + \sin 9°}$;
6) $\frac{\sin 100° - \sin 80°}{\sin 100° + \sin 80°}$;
7) $\sin^2 50° - \sin^2 40°$;
8) $\frac{\cos 5° - \cos 25°}{\sin 5° + \sin 25°}$;
9) $\frac{\cos 65° + \cos 35°}{\sin 65° - \sin 35°}$;
10) $\sin^2 70° - \cos^2 50°$.

45. Teisenda korrutiseks.

1) $\sin\alpha + \frac{1}{2}$
2) $\sin\alpha - \frac{1}{2}\sqrt{3}$
3) $1 + \sin\alpha$
4) $1 + 2\sin\alpha$
5) $\sqrt{3} - 2\sin\alpha$
6) $\frac{1}{2} + \cos\alpha$
7) $\sqrt{3} + \tan\alpha$
8) $1 - 4\sin^2\alpha$
9) $\sin^2\alpha - \sin^2\beta$
10) $\cos^2\alpha - \cos^2\beta$

46. Lihtsusta.

1) $\frac{\sin\alpha + \sin 3\alpha}{\cos\alpha + \cos 3\alpha}$
2) $\frac{\sin\frac{2}{3}\alpha + \sin\frac{4}{3}\alpha}{\cos\frac{2}{3}\alpha + \cos\frac{4}{3}\alpha}$
3) $\frac{\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)}$
4) $\frac{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)}$

47. Teisenda korrutiseks.

1) $\sin(45° + x) + \sin(45° - x)$
2) $\sin(30° + x) + \sin(30° - x)$
3) $\sin(45° + x) - \sin(45° - x)$
4) $\cos(30° + x) - \cos(30° - x)$

48. Tõesta samasus.

1) $\frac{\cos 3\alpha - \cos \alpha}{2 \sin \alpha \sin 2\alpha} = -1$

2) $\frac{1+\sin 2\alpha}{1-\sin 2\alpha} = \tan^2(45° + \alpha)$

3) $\frac{1-\sin 2\alpha}{1+\sin 2\alpha} = \tan^2(45° - \alpha)$

4) $\frac{1+\sin 2\alpha}{1-\sin 2\alpha} = \tan\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)$

5) $\frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \tan(45° + \alpha)$

6) $1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$

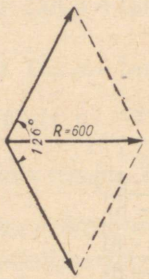
7) $1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$

49. Tõestada, et

1) $\sin 10° + \sin 50° - \cos 20° = 0$;
2) $\cos 85° + \cos 35° - \cos 25° = 0$.

50. Rombi lühema diagonaali pikkus on 4 cm ja teravnurk on 68°. Arvuta teise diagonaali pikkus.

51. Jõud $R = 600$ kG lahutatakse kaheks absoluutväärtuselt võrdseks komponendiks, mis moodustavad teineteisega 126°-se nurga (joon. 5). Kui suured on need komponendid?

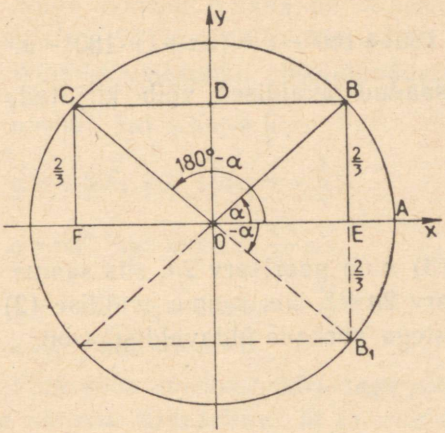


Joon. 5.

1.5. NURGA LEIDMINE TRIGONOMEETRILISE FUNKTSIOONI ANTUD VÄÄRTUSE JÄRGI.

1. Nurga leidmine antud siinuse järgi.

Olgu lahendada ülesanne: konstrueerida nurk, mille siinus on $\frac{2}{3}$. Selle ülesande lahendamiseks jaotame ühikringjoone raa-



Joon. 6.

diuse (joon. 6) kolmeks võrdseks osaks ning võtame siis y-teljel lõigu $OD=\frac{2}{3}\ r$. Punktist D joonestame x-teljega paralleelse sirge CB. Nurk $AOB=\alpha$ ongi nurk, mille siinus on $\frac{2}{3}$.

Kuid kõikidel nurkadel, mille lõppraadiuse otspunkt asub punktis B, on siinuse väärtus $\frac{2}{3}$. Seetõttu rahuldavad meie ülesande tingimust nurgad α, $\alpha\pm360°$, $\alpha\pm2\cdot360°$, $\alpha\pm3\cdot360°$, ... , $\alpha\pm n\cdot360°$, mis järeldub ka sellest, et siinus on perioodiline funktsioon perioodiga 360°.

Peale nurga $AOB=\alpha$ (joon. 6.) leidub ka teises veerandis nurk, mille siinus on $\frac{2}{3}$; selleks on nurk $AOC=180°-\alpha$.

Järelikult, meie ülesande tingimust rahuldavad siis veel nurgad $180°-\alpha$, $180°-\alpha\pm360°$, $180°-\alpha\pm2\cdot360°$, ..., $180°-\alpha+n\cdot360°$.

Seega on lõpmata hulk nurki, mille siinus on $\frac{2}{3}$. Neid nurki väljendavad avaldised

$$\alpha+n\cdot360°$$

ja

$$180°-\alpha+n\cdot360°,$$

kus n on mistahes täisarv.

Neid kaht avaldist saab asendada üheainsa avaldisega, pannes tähele, et

$$\alpha+n\cdot360°=2n\cdot180°+\alpha \qquad (1)$$

ja

$$180°-\alpha+n\cdot 360°=2n\cdot 180°+180°-\alpha=(2n+1)\cdot 180°-\alpha. \quad (2)$$

Need teisendamisel saadud avaldised võib kirjutada ühe avaldisena

$$k\cdot 180°+(-1)^k\cdot\alpha, \quad (3)$$

kus k on mistahes täisarv.

Tõesti, kui avaldises (3) k on paarisarv $2n$, siis saame avaldise (1), kui k on paaritu arv $2n+1$, siis saame avaldise (2).

Niisiis, võrdsete siinustega nurkade üldavaldiseks on

$$k\cdot 180°+(-1)^k\cdot\alpha,$$

nii et

$$\sin\alpha=\sin[k\cdot 180°+(-1)^k\cdot\alpha],$$

kus k on mistahes täisarv.

Antud siinus võib olla ka negatiivne arv, näiteks $-\frac{2}{3}$. Sel korral on üheks nurgaks, mis ülesande tingimust rahuldab, negatiivne nurk $AOB_1=-\alpha$ (joon. 6).

Eelmise arutluse eeskujul leiame üldavaldise kõikidele nurkadele, mille siinus on $-\frac{2}{3}$:

$$k\cdot 180°+(-1)^k\cdot(-\alpha).$$

Leides siinuste tabelist nurga, mille siinus on $\frac{2}{3}\approx 0{,}6667$, saame:

$$\alpha=41°49'$$

ja

$$-\alpha=-41°49'$$

ning üldavaldisteks on siis

$$k\cdot 180°+(-1)^k\cdot(-41°49')$$

ehk

$$k\cdot 180°-(-1)^k\cdot 41°49'.$$

Üldiselt, kui antud arv m täidab tingimust, et $|m|\leqslant 1$ (sest siinuse absoluutväärtus ei või olla 1-st suurem), siis on lõpmata hulk nurki, mille siinus on m. Kuid üks neist nurkadest on väikseima absoluutväärtusega.

Nagu jooniselt 6 näha, on väikseima absoluutväärtusega nurk vahemikus $-90°$ kuni $90°$ (need kaasa arvatud).

Näiteks väikseima absoluutväärtusega nurk

$\alpha = 30°$, kui $\sin\alpha = \frac{1}{2}$;

$\alpha = -30°$, kui $\sin\alpha = -\frac{1}{2}$;

$\alpha = 60°$, kui $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

$\alpha = -45°$, kui $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$\alpha = 0°$, kui $\sin\alpha = 0$.

Väikseima absoluutväärtusega nurgale, mille siinus on m, on antud nimetus **arkussiinus m** *ja teda tähistatakse sümboliga*

arcsin m.

Seega,

arcsin m on väikseima absoluutväärtusega nurk, mille siinus on m.

Sümbolites:

$\sin(\arcsin m) = m$ ja $-90° \leqslant \arcsin m \leqslant 90°$.

Näiteks,

$\arcsin \frac{1}{2} = 30° = \frac{\pi}{6}$;

$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -45° = -\frac{\pi}{4}$;

$\arcsin(-1) = -90° = -\frac{\pi}{2}$;

$\arcsin 0 = 0°$.

Kui $0 \leqslant m \leqslant 1$, siis leiame nurga arcsin m otse siinuste tabelist, näiteks $\arcsin 0{,}6667 = 41°49'$.

Kui $-1 \leqslant m < 0$, siis avaldame antud arkussiinuse positiivse arvu arkussiinuse kaudu.

Näitame joonise 6 varal, et

arcsin(−m) = −arcsin m.

Jooniselt 6 näeme, et nurk, mille siinus on $\frac{2}{3}$, on $\angle AOB$, ja nurk, mille siinus on $-\frac{2}{3}$, on $\angle AOB_1$, kusjuures

$\angle AOB_1 = -\angle AOB$,

s. t. $\arcsin\left(-\frac{2}{3}\right) = -\arcsin\frac{2}{3}$

ehk üldiselt

$$\arcsin(-m) = -\arcsin m.$$

Nüüd saame kõikide nurkade, mille siinus on m, üldavaldiseks

$$k \cdot 180° + (-1)^k \cdot \arcsin m$$

ehk radiaanides

$$k \cdot \pi + (-1)^k \cdot \arcsin m$$

Näide 1. Leia nurk, mille siinus on 0,83.

Lahendus. Nende nurkade üldavaldis on

$k \cdot 180° + (-1)^k \cdot \arcsin 0{,}83.$

Tabelist leiame, et $\arcsin 0{,}83 = 56°06'$. Seega otsitavate nurkade üldavaldis on

$k \cdot 180° + (-1)^k \cdot 56°06'.$

Näide 2. Leia nurk, mille siinus on $(-0{,}3535)$.

Lahendus. $\arcsin(-0{,}3535) = -\arcsin 0{,}3535 = -20°42'$. Otsitavate nurkade üldavaldis on seega

$k \cdot 180° - (-1)^k \cdot 20°42'.$

Ülesandeid.

52. Selgita, mida tähendavad sümbolid:

1) $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\arcsin(-0{,}75)$.

53. Konstrueeri nurk ja leia nende väärtused, kui

1) $\arcsin 0{,}8$; 2) $\arcsin\left(-\frac{3}{4}\right)$; 3) $\arcsin\frac{3}{5}$.

54. Anna üldavaldis nurkadele, mille siinus on

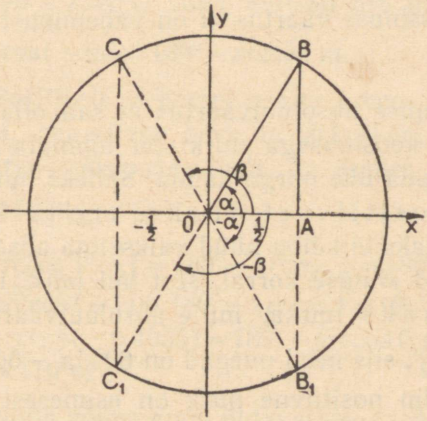
1) 0,3156; 2) 0,0087; 3) −0,4051.

2. Nurga leidmine antud koosinuse järgi.

Et ehitada nurka, mille koosinus on näiteks $\frac{1}{2}$, selleks ehitame ühikringjoone (joon. 7) punkti, mille abstsiss on $\frac{1}{2}$, poolitades selleks abstsissteljel asuva raadiuse. Otsitavaks nurgaks on $\angle AOB = \alpha$. Koosinuse perioodilisuse tõttu rahuldavad meie ülesande tingimust ka nurgad

$$n \cdot 360° + \alpha,$$

kus n on mistahes täisarv.



Joon. 7.

Jooniselt 7 näeme, et leidub veel nurki, mille koosinus on $\frac{1}{2}$. Üheks niisuguseks nurgaks on negatiivne teravnurk

$$\angle AOB_1 = -\alpha,$$

sest kolmnurkade AOB ja AOB_1 võrdsuse tõttu on nurkade AOB ja AOB_1 absoluutväärtused võrdsed.

Seega täidavad ülesande tingimust veel kõik nurgad kujuga

$$n \cdot 360° - \alpha.$$

Avaldisi $n \cdot 360° + \alpha$ ja $n \cdot 360° - \alpha$ saab väljendada ühe avaldise abil:

$$n \cdot 360° \pm \alpha.$$

See on üldavaldis nurkadele, mille koosinus on $\frac{1}{2}$.

Antud juhul $\alpha = 60°$.

Seega, üldavaldiseks kõikidele nurkadele, mille koosinus on $\frac{1}{2}$, on

$$n \cdot 360° \pm 60°.$$

Antud koosinus, mille järgi nõutakse nurga ehitamist, võib olla ka negatiivne, näiteks $-\frac{1}{2}$. Sel korral on otsitavateks nurkadeks nurgad $AOC = \beta$ ja $AOC_1 = -\beta$ ning seega kõik nurgad, mida väljendab avaldis

$$n \cdot 360° \pm \beta.$$

Üldiselt, kui antud koosinuse väärtus m on vahemikust

$$-1 \leqslant m \leqslant 1$$

ehk lühemalt $|m| \leqslant 1$ (koosinuse absoluutväärtus ei saa olla suurem kui 1), siis niisuguse koosinusega nurki on lõpmata hulk. Kõiki neid nurki saab avaldada ühe nurga kaudu. Selleks nurgaks kasutame *väikseimat positiivset nurka, mille koosinus on m*. Selleks nurgaks ei kõlba nüüd väikseima absoluutväärtusega nurk, nagu antud siinuse korral, sest kui $|m| \leqslant 1$, siis igale m väärtusele vastab *kaks* nurka, mille absoluutväärtused on võrdsed, näiteks kui $m = \frac{1}{2}$, siis need nurgad on 60° ja −60°.

Kui $m > 0$, siis väikseim positiivne nurk on esimesest veerandist, kui $m < 0$, siis teisest veerandist, s. t. vahemikust 0° kuni 180°, need kaasa arvatud.

Väikseimat mittenegatiivset nurka, mille koosinus on m, nimetatakse arvu m arkuskoosinuseks ja tähistatakse sümboliga

arccos *m*.

Seega,

arccos m on väikseim mittenegatiivne nurk, mille koosinus on m.

Seesama definitsioon sümbolites:
$\cos(\arccos m) = m$ ja $0° \leqslant \arccos m \leqslant 180°$.

Näiteks,

$\arccos \frac{1}{2} = 60° = \frac{\pi}{3}$; $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = 45° = \frac{\pi}{4}$;

$\arccos 1 = 0° = 0$; $\arccos 0 = 90° = \frac{\pi}{2}$.

Selgitame joonise 7 varal, et kehtib valem

$$\arccos(-m) = 180° - \arccos m.$$

Jooniselt 7 näeme, et väikseim positiivne nurk, mille koosinus on $-\frac{1}{2}$, on $\angle AOC$. Seega $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \angle AOC$; väikseim positiivne nurk, mille koosinus on $\frac{1}{2}$, on $\angle AOB$, nii et $\arccos\frac{1}{2} = \angle AOB$.

Kuid $\angle AOC = 180° - \angle AOB$, niisiis

$$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = 180° - \arccos\frac{1}{2}.$$

Kui arvu $\frac{1}{2}$ asemel võtta üldiselt arv m, saamegi

$\arccos(-m) = 180° - \arccos m.$

Positiivse m korral leiame arccos m väärtuse otse koosinuste tabelist, negatiivse arvu m arkuskoosinuse avaldame positiivse arvu arkuskoosinuse kaudu, kasutades viimast valemit.

Näiteks,

$$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = 180° - \arccos\frac{1}{2} = 180° - 60° = 120° = \frac{2\pi}{3};$$
$$\arccos(-1) = 180° - \arccos 1 = 180° = \pi;$$
$$\arccos(-0{,}4955) = 180° - \arccos 0{,}4955 = 180° - 60°18' =$$
$$= 119°42'.$$

Nüüd võime anda üldavaldise nurkadele, mille koosinus on m, kujul

$$\boxed{n \cdot 360° \pm \arccos m,}$$

kus n on mistahes täisarv.

Ülesandeid.

55. Selgita, mida tähendavad sümbolid:

1) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\arccos\frac{2}{3}$; 3) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

4) arccos 0,9673; 5) $\arccos(-0{,}4848)$,

ja leia nende väärtused.

56. Konstrueeri nurk:

1) $\arccos\frac{3}{4}$; 2) $\arccos(-0{,}25)$.

57. Anna üldavaldis nurkadele, mille koosinus on:

1) 0,4; 2) $-\frac{5}{7}$; 3) 0,8616; 4) $-0{,}342$.

3. Nurga leidmine antud tangensi järgi.

Et iga arv m võib olla tangensi väärtuseks, siis tangensi igale etteantud väärtusele leidub vastav nurk α.

Kui on leitud üks nurk α, mille tangens on m, siis tangensi perioodilisuse tõttu (periood 180°) rahuldavad ülesande nõuet ka nurgad

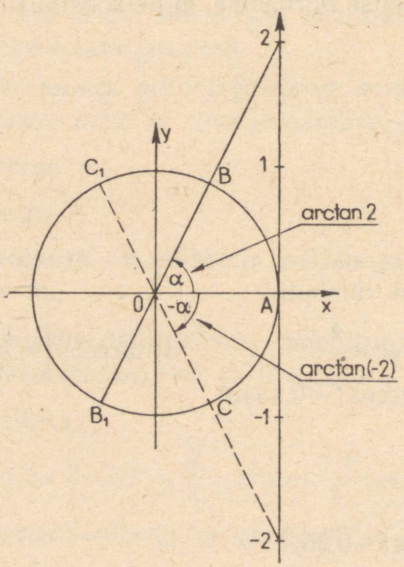
$$\alpha \pm 180°,\ \alpha \pm 2 \cdot 180°,\ \alpha \pm 3 \cdot 180°,\ \ldots$$

ehk üldiselt nurgad

$$\alpha + n \cdot 180°,$$

kus n on mistahes täisarv.

Nurga konstrueerimiseks, mille tangens on näiteks 2, paigutame tangensteljele (joon. 8) lõigu pikkusega 2 ja ühendame selle otspunkti ühikringi keskpunktiga. Nagu jooniselt 8 näeme, vastavad tangensi väärtusele 2 nurga lõpphaara kaks asendit OB ja OB_1. Nurgad AOB ja AOB_1 erinevad teineteisest 180° või selle



Joon. 8.

kordse võrra, s. o. tangensi perioodi võrra. Seetõttu saab üldavaldise kõikide nurkade jaoks, mille tangens on 2, anda ühe nurga kaudu. Selleks kasutame väikseima absoluutväärtusega nurka. Kui etteantud tangens on -2, siis vastavaks väikseima absoluutväärtusega nurgaks on negatiivne nurk AOC.

Niisiis, väikseima absoluutväärtusega nurgaks, mille tangens on m, on nurk vahemikust $-90°$-st kuni $90°$-ni, need välja arvatud, sest neil nurkadel tangensid puuduvad. *Seda väikseima absoluutväärtusega nurka nimetatakse arvu m arkustangensiks ja tähistatakse sümboliga*

arctan m.

Seega,

arctan m on väikseima absoluutväärtusega nurk, mille tangens on m.

Seesama definitsioon sümbolites:

$\tan(\arctan m) = m$ ja $-90 < \arctan m < 90°$.

Jooniselt 8 näeme, et negatiivse tangensi korral kehtib valem

$\arctan(-2) = -\arctan 2$.

Tõesti, nurgad AOB ja AOC on absoluutväärtuste poolest võrdsed, kuid teine neist on negatiivne, seega

$\angle AOC = -\angle AOB$, s. o.

$\arctan(-2) = -\arctan 2$

ehk üldiselt

$\arctan(-m) = -\arctan m$.

Positiivse m korral leiame nurga arctan m otse tangensite tabelist, negatiivse m korral kasutame saadud valemit.

Nüüd saame anda üldavaldise nurkadele, mille tangens on m. Selleks üldavaldiseks on

$$\boxed{n \cdot 180° + \arctan m,}$$

kus n on mistahes täisarv.

Näiteid.

1. Kui $\tan\alpha = 1$, siis $\alpha = n \cdot 180° + \arctan 1 =$
$= n \cdot 180° + 45° = n \cdot \pi + \frac{\pi}{4}$.

2. Nurk, mille tangens on -2, väljendub valemiga
$n \cdot 180° + \arctan(-2) = n \cdot 180° - \arctan 2 =$
$= n \cdot 180° - 63°26'$.

3. Üldavaldis nurkadele, mille tangens on $-\sqrt{3}$, on $n \cdot 180° +$
$+ \arctan(-\sqrt{3}) = n \cdot 180° - \arctan \sqrt{3} = n \cdot 180° - 60° =$
$= n \cdot \pi - \frac{\pi}{3}$.

Ülesandeid.

58. Selgita sümboli tähendus ja leia ta väärtus:

1) $\arctan 2{,}5$; 2) $\arctan(-3)$; 3) $\arctan \frac{\sqrt{3}}{3}$.

59. Konstrueeri nurk:

1) $\arctan 3$; 2) $\arctan(-3)$; 3) $\arctan 1{,}5$.

60. Anna üldavaldis nurkadele, mille tangens on:

1) 2; 2) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; 3) $\sqrt{2}$; 4) -1.

61. Arvuta:

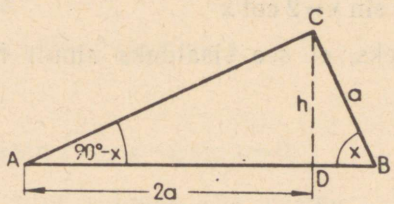
1) $\arctan 1 + \arctan \sqrt{3}$;
2) $\arccos 1 + 2 \arcsin \frac{1}{2}$;
3) $\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3}$;
4) $8 \arctan \frac{3}{4} + \arctan \frac{1}{7}$;
5) $\arctan 1 - \frac{\pi}{4}$;
6) $\sin\left(\arcsin \frac{1}{2} + \arccos \frac{1}{2}\right)$;
7) $\sin(\arcsin 0{,}5)$;
8) $\tan(\arctan 1{,}3)$.

2. TRIGONOMEETRILISED VÕRRANDID.

2.1. TRIGONOMEETRILISE VÕRRANDI MÕISTE.

On ülesandeid, mille lahendamine viib niisuguse võrrandi lahendamisele, milles otsitav esineb trigonomeetrilise funktsiooni argumendis.

Näide 1. Täisnurkses kolmnurgas on ühe kaateti projektsioon hüpotenuusil kaks korda pikem kui teine kaatet. Arvuta selle kolmnurga nurgad.



Joon. 9.

Lahendamisel saame kolmnurgast ADC (joon. 9)

$$h = 2a \tan (90° - x)$$

ja kolmnurgast BDC

$$h = a \sin x.$$

Seega saame võrrandi

$$a \sin x = 2a \tan (90° - x)$$

ehk

$$\sin x = 2 \tan (90° - x).$$

See on trigonomeetriline võrrand.

Trigonomeetriliseks võrrandiks nimetatakse niisugust võrrandit, milles tundmatu esineb mingi trigonomeetrilise funktsiooni argumendis.

Meie vaatleme siin üksnes niisuguseid trigonomeetrilisi võrrandeid, milles tundmatu esineb ainult trigonomeetrilise funktsiooni argumendis.

Tundmatu x väljendab trigonomeetrilises võrrandis tavaliselt nurga suurust kraadides või radiaanides, mõnikord (sõltuvalt ülesande tingimustest) aga ka abstraktset arvu, nagu näiteks võrrandis

$$x+\sin x=\frac{1}{2}.$$

Siin $\sin x$ tähendab x-radiaanise nurga siinust, näiteks

$$\sin 2{,}6=\sin 148°58'=\sin 31°02'=0{,}5155.$$

Trigonomeetrilise võrrandi lahendamisel püüame võrrandit nii teisendada, et see sisaldaks ainult üht trigonomeetrilist funktsiooni, näiteks ainult funktsiooni $\sin x$.

Eespool saadud võrrandit

$$\sin x=2\tan(90°-x) \text{ ehk } \sin x=2\cot x$$

on kerge teisendada niisuguseks, et see sisaldaks ainult funktsiooni $\cos x$. Teeme seda:

$$\sin x=2\cdot\frac{\cos x}{\sin x},$$
$$\sin^2 x=2\cos x,$$
$$1-\cos^2 x=2\cos x,$$
$$\cos^2 x+2\cos x-1=0.$$

Lahendades selle võrrandi, mis $\cos x$ suhtes on ruutvõrrand, leiame

$$\cos x=0{,}414$$

ja

$$\cos x=-2{,}414.$$

Saadud kahest uuest võrrandist teisel lahend ilmselt puudub, sest pole olemas nurka, mille koosinus on $-2{,}414$. Seega jääb nüüd lahendada lihtne võrrand

$$\cos x=0{,}414.$$

Et otsitav nurk on täisnurkse kolmnurga nurk, siis meie ülesande ainsaks lahendiks on

$$x=\arccos 0{,}414=65°33'.$$

Kolmnurga teine teravnurk on

$90° - 65°33' = 24°27'$.

Näide 2. Kolmnurga üks nurk on teisest kaks korda suurem, kusjuures nende nurkade siinuste suhe on $\frac{5}{3}$. Leia kolmnurga nurgad.

Olgu üks nurk x kraadi, siis teine on $2x$ kraadi. Ülesande tingimuste kohaselt saame võrrandi

$$\frac{\sin 2x}{\sin x} = \frac{5}{3}$$

ehk

$$3 \sin 2x = 5 \sin x.$$

Selle võrrandi vasakul poolel on siinuse argumendiks $2x$, paremal poolel aga x. Teisendame võrrandit nii, et see sisaldaks ainult ühe ja sama argumendi funktsioone, kasutades selleks valemit

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x.$$

Saame

$$6 \sin x \cos x - 5 \sin x = 0.$$

Tuues $\sin x$ sulgude ette, saame

$$\sin x \,(6 \cos x - 5) = 0.$$

Nüüd kas

$$\sin x = 0$$

või

$$6 \cos x - 5 = 0,$$

millest

$$\cos x = \frac{5}{6}.$$

Näeme, et ka selle ülesande lahendamisel saadud võrrand taandus lihtsatele võrranditele:

$$\sin x = 0 \text{ ja } \cos x = \frac{5}{6}.$$

Neist esimene võrrand meie ülesandele lahendit ei anna, sest kolmnurga nurk ei saa olla 0° ega 180°.

Teisest võrrandist aga saame

$$x = \arccos\frac{5}{6} = \arccos 0{,}8333 = 33°33'.$$

Teine nurk on

$$2x = 67°06'$$

ja kolmas nurk on

$$180° - (33°33' + 67°06') = 79°21'.$$

Nende näidisülesannete lahendamiskäigust selgub, et trigonomeetrilise võrrandi lahendamise üldplaan võiks olla järgmine:

1) antud võrrand teisendatakse niisuguseks, mis sisaldab ainult ühe argumendi üht ja sama funktsiooni;

2) saadud võrrand taandatakse üheks või mitmeks trigonomeetriliseks p õ h i v õ r r a n d i k s;

3) lahendatakse saadud trigonomeetrilised põhivõrrandid, milleks on:

$\sin x = m$,
$\cos x = m$,
$\tan x = m$.

Vaatleme trigonomeetriliste põhivõrrandite lahendamist.

2.2. TRIGONOMEETRILISED PÕHIVÕRRANDID.

1. Võrrandi $\sin x = m$ lahendamine.

Selle võrrandi lahendamise võimalus sõltub arvust m. Vaatleme kõiki võimalikke juhtumeid.

a) Kui $|m| > 1$, s. o. $m > 1$ või $m < -1$, siis võrrandil lahend puudub, sest ei ole olemas nurka, mille siinus on suurem kui 1 või väiksem kui -1.

b) Kui $m = 1$, siis võrrandi üheks lahendiks on 90°.

Võrdsete siinustega nurkade üldavaldise

$$k \cdot 180° + (-1)^k \cdot \arcsin m$$

järgi saame antud võrrandi üldlahendiks

$$x = k \cdot 180° + (-1)^k \cdot 90° = [2k + (-1)^k] \cdot 90°.$$

Võttes siin k väärtuseks paarisarvu

$$k = 2n,$$

saame

$$x=(4n+1)\cdot 90°;$$

juhul, kui k on paaritu arv

$$k=2n+1,$$

saame

$$x=[2(2n+1)-1]\cdot 90°=(4n+1)\cdot 90°.$$

Seega võrrandi

$$\sin x=1$$

üldlahend on

$$x=(4n+1)\cdot 90°,$$

kus n on mistahes täisarv.

Andes n-le täisarvulisi väärtusi ... -1, 0, 1, 2, ..., saame võrrandi erilahendid $-3\cdot 90°=-270°$; $90°$; $5\cdot 90°=450°$; $9\cdot 90°=810°$, jne.

Erilahendit $\arcsin 1=90°$ nimetatakse ka pealahendiks. Seega juhtumil $m=1$ on võrrandil lõpmata palju lahendeid.

c) Kui $|m|<1$, s. o. kui $-1<m<1$, siis võrrandil on lõpmata palju lahendeid. Nendeks on nimelt kõik nurgad, mille siinus on m. Seega üldlahend on

$$x=n\cdot 180°+(-1)^n\cdot \arcsin m,$$

kus n on mistahes täisarv.

Pealahendiks on $\arcsin m$.

Näiteks võrrandi

$$\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

pealahend on $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=45°$ ja üldlahend on

$$x=n\cdot 180°+(-1)^n\cdot 45°.$$

d) Kui $m=-1$, siis üheks lahendiks on $-90°$, kuid perioodilisuse tõttu on lahenditeks ka nurgad

$$-90°+4\cdot 90°=3\cdot 90°;\ 7\cdot 90°;\ 11\cdot 90°;\ \ldots,\ (4n-1)\cdot 90°.$$

Seega üldlahendiks on

$$x=(4n-1)\cdot 90°,$$

kus n on mistahes täisarv.

Ülesandeid.

62. Lahenda võrrandid:

1) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 2) $\sin x = 0$

3) $\sin x = 0{,}849$ 4) $\sin x = -\frac{2}{5}$

2. Võrrandi $\cos x = m$ lahendamine.

a) Kui $|m| > 1$, siis võrrandil lahend puudub.

b) Kui $m = 1$, siis üldlahend on

$$x = n \cdot 360°,$$

kus n on mistahes täisarv.

c) Kui $|m| < 1$, s. o. kui $-1 < m < 1$, siis üldlahend on

$$x = n \cdot 360° \pm \arccos m.$$

d) Kui $m = -1$, siis üldlahendiks on

$$x = n \cdot 360° \pm 180°$$

ehk

$$x = (2n \pm 1) \cdot 180°,$$

kus n on mistahes täisarv.

Seega juhtudel, kui m on vahemikust

$$-1 \leqslant m \leqslant 1,$$

on võrrandil $\cos x = m$ lõpmata palju lahendeid.

Ülesandeid.

63. Lahenda võrrandid:

1) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 2) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

3) $\cos x = \frac{1}{2}$ 4) $\cos x = 0{,}9646$

5) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 6) $\cos x = \frac{\sqrt{5}}{3}$

3. Võrrandi $\tan x = m$ lahendamine.

Et iga arv m võib olla tangensi väärtuseks, siis ka igasuguse m korral on võrrandil $\tan x = m$ lahendid olemas; lahenditeks on nimelt kõik nurgad, mille tangens on m.

Seega, võrrandi

$$\tan x = m$$

üldlahend on

$$x = n \cdot 180° + \arctan m.$$

Ülesandeid.

64. Lahenda võrrandid:

1) $\tan x = 1$ 2) $\tan x = 3$ 3) $\tan x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

2.3. VÕRRANDID, MIS OTSESELT TAANDUVAD PÕHIVÕRRANDEIKS.

Vaatleme nüüd võrrandeid, mis otseselt taanduvad põhivõrrandeiks. Säärasteks on võrrandid, mille vasaku poole kui trigonomeetrilise funktsiooni argumendiks on mingi x funktsioon ning paremaks pooleks on mingi arv.

Niisugused on näiteks võrrandid

1) $\sin 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

2) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$;

3) $\tan 4x = 1$.

Selliste võrrandite lahendamisel vaatleme vasakul poolel esineva trigonomeetrilise funktsiooni argumenti abitundmatuna, sest siis on antud võrrand abitundmatu suhtes põhivõrrand. Näiteks võrrand

$$\sin 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

on $3x$ suhtes põhivõrrand; võrrand

$$\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$$

on seda $2x+\frac{\pi}{3}$ suhtes ja võrrand

$$\tan 4x=1$$

$4x$ suhtes.

Niisuguste võrrandite lahendamisel lahendame esmalt põhivõrrandi abitundmatu suhtes ning seejärel leiame otsitava abitundmatu väärtuste järgi.

Näide 1. $\sin 3x=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$3x=n\cdot 180°\pm(-1)^n\cdot \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ehk

$$3x=n\cdot 180°\pm(-1)^n\cdot 60°.$$

Sellest võrrandist leiame nüüd x:

$$x=n\cdot 60°+(-1)^n\cdot 20°.$$

Kui saadud üldlahendi kirjutame kahe valemi abil, siis saame lihtsamad avaldised ja ka lahendite kontrollimine on kergem.

1) Võttes $n=2k$, saame

$$x_1=2k\cdot 60°+20°=6k\cdot 20°+20°=(6k+1)\cdot 20°.$$

2) Võttes $n=2k+1$, saame

$$x_2=(2k+1)\cdot 60°-20°=(6k+3)\cdot 20^c-20°=(6k+2)\cdot 20°.$$

Kontroll.

1) $\sin 3x=\sin[3\cdot(6k+1)\cdot 20°]=\sin[(6k+1)\cdot 60°]=$

$=\sin(k\cdot 360°+60°)=\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2) $\sin 3x=\sin[3\cdot(6k+2)\cdot 20°]=\sin[(6k+2)60°]=$

$=\sin(k\cdot 360°+120°)=\sin 120°=\sin(180°-120°)=$

$=\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Mõlemad lahendite sarjad rahuldavad võrrandit.

Näide 2. $\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=0$.

$$2x+\frac{\pi}{3}=n\cdot 2\pi\pm\frac{\pi}{2};$$

$$2x=n\cdot 2\pi-\frac{\pi}{3}\pm\frac{\pi}{2};$$

$$x=n\pi-\frac{\pi}{6}\pm\frac{\pi}{4}.$$

Selle üldlahendi võib kirjutada kahe sarjana:

$x_1 = n\pi - \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = n\pi + \frac{\pi}{12}$;

$x_2 = n\pi - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} = n\pi - \frac{5\pi}{12}$.

Kontroll.

1) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left[2\left(n\pi + \frac{\pi}{12}\right) + \frac{\pi}{3}\right] =$

$= \cos\left(n \cdot 2\pi + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0;$

2) $\cos\left[2\left(n\pi - \frac{5\pi}{12}\right) + \frac{\pi}{3}\right] = \cos\left(n \cdot 2\pi - \frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right) =$

$= \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0.$

Mõlemad lahendite sarjad rahuldavad võrrandit.

Ülesandeid.

65. Lahenda võrrandid ja kontrolli lahendid:

1) $\tan 4x = 1$ 2) $3\cos\frac{x - 45°}{2} = 2$

3) $\tan 2x = -1$ 4) $\sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$

2.4. VÕRRANDID, MILLE VASAK POOL ON KORRUTIS JA PAREM POOL NULL.

Olgu lahendada võrrand

$\sin 2x \cdot \cos 3x = 0.$

See võrrand on rahuldatud, kui vasaku poole esimene tegur on null, ja ka siis, kui teine tegur on null. Seega saame kaks võrrandit:

$\sin 2x = 0$ ja $\cos 3x = 0.$

Nende lahendamisel saame:

$2x = n \cdot 180°;$ $3x = n \cdot 360° \pm 90°;$

$x_1 = n \cdot 90°.$ $x = n \cdot 120° \pm 30°$ ehk

$x_2 = n \cdot 120° + 30° = (4n + 1) \cdot 30°;$

$x_3 = n \cdot 120° - 30° = (4n - 1) \cdot 30°.$

Kontroll näitab, et kõik kolm sarja rahuldavad antud võrrandit.

Kui korrutises üks tegureist võrdub nulliga, siis ei saa aga alati ütelda, et ka korrutis võrdub nulliga. Seda ei saa ütelda siis, kui ühe teguri nulliga võrdumise puhul mõni ülejäänud tegureist kaotab arvu tähenduse. Näiteks, kui võrrandis

$$\tan x \cdot \left(1 - \frac{1}{\sin x}\right) = 0$$

$$\tan x = 0,$$

s. t.

$$x = n \cdot 180°,$$

siis teine tegur kaotab arvu mõtte, sest kui

$$x = n \cdot 180°,$$

siis $\sin x = 0$ ja murrul $\frac{1}{\sin x}$ puudub arvu tähendus. Kui selle võrrandi vasakul poolel teine tegur

$$1 - \frac{1}{\sin x} = 0$$

ehk

$$\sin x = 1,$$

millest

$$x = n \cdot 180° + (-1)^n \cdot 90°,$$

siis esimesel teguril puudub arvu tähendus.

Niisiis, kui korrutises üks tegureist võrdub nulliga ja teistel teguritel on sel puhul arvu tähendus, siis võrdub korrutis nulliga.

Siit saame juhise:

et lahendada võrrandit, mille vasak pool on korrutis ja parem pool null, võrrutame nulliga iga teguri eraldi, lahendame saadud võrrandid ja kõrvaldame lahendite hulgast need, mille puhul mõnel teguritest puudub arvu tähendus.

Näide 1. $\sin 2x \cdot \tan x = 0.$

$\sin 2x = 0;$ $\quad \tan x = 0;$

$2x = n \cdot 180°;$ $\quad x_2 = n \cdot 180°.$

$x_1 = n \cdot 90°.$

Lahendite sari x_2 rahuldab võrrandit, kuna sel korral on vasaku poole mõlemal teguril arvu tähendus. Kuid sari x_1 ei ole võrrandi lahendiks paarituarvulise n korral, sest $\tan(n \cdot 90°)$ ei

oma siis arvu tähendust; paarisarvulise m korral annab see sari samad lahendid mis sari x_2.

Seega on antud võrrandi ainsaks lahendiks

$x = n \cdot 180°$.

Kui võrrandi parem pool on null ja vasak pool ei ole korrutis, kuid on korrutiseks teisendatav, siis teeme seda ning lahendame edasi nii, nagu eespool kirjeldatud.

Näide 2. $1 + \sin x + \cos 3x + \sin x \cos 3x = 0$.

Lahutades vasaku poole tegureiks, saame:

$1 + \sin x + \cos 3x(1 + \sin x) = 0$;
$(1 + \sin x)(1 + \cos 3x) = 0$.

Siit saame:

$1 + \sin x = 0$;
$\sin x = -1$;
$x_1 = (4n - 1) \cdot 90°$.

$1 + \cos 3x = 0$;
$\cos 3x = -1$;
$3x = n \cdot 360° \pm 180°$;
$x = n \cdot 120° \pm 60°$;
$x = (2n \pm 1)60°$.

Et sari $(2n-1) \cdot 60°$ on samane sarjaga $(2n+1) \cdot 60°$, siis $x_2 = (2n+1) \cdot 60°$.

Mõlemad sarjad rahuldavad võrrandit.

Ülesandeid.

66. Lahenda võrrandid:

1) $\cos^2 x = 0{,}25$
2) $(4 \sin x - 1)(2 \sin x + 1) = 0$
3) $\sin^2 2x = \cos^2 x$

67. Lahenda võrandid:

1) $(2 \tan x - 1)(\tan x + 1) = 0$
2) $(2 \sin x - 1)(\sin x + 1) = 0$
3) $\sin^2 4x - \sin 4x \sin 2x = 0$

Näide 3. Leida vahemikust 0° kuni 360° kõik nurgad, mis rahuldavad võrrandit

$\sin 2x = \cos x$.

Saame

$$\sin 2x = \sin(90° - x)$$

ehk

$$\sin 2x - \sin(90° - x) = 0.$$

Teisendades selle võrrandi vasaku poole korrutiseks, saame

$$2 \cos \frac{2x + 90° - x}{2} \sin \frac{2x - 90° + x}{2} = 0,$$

$$2 \cos \frac{x + 90°}{2} \sin \frac{3x - 90°}{2} = 0.$$

Siit saame võrrandid

$$\cos \frac{x + 90°}{2} = 0 \text{ ja } \sin \frac{3x - 90°}{2} = 0.$$

Neist esimese lahendamisel saame

$$\frac{x + 90°}{2} = (2k + 1) \cdot 90°,$$

$$x + 90° = (2k + 1) \cdot 180°,$$

$$x = (2k + 1) \cdot 180° - 90°;$$

$$x_1 = 2k \cdot 180° + 180° - 90° =$$

$$= 2k \cdot 180° + 90° = (4k + 1) \cdot 90°.$$

Teise võrrandi $\sin \frac{3x - 90°}{2} = 0$ lahendamisel saame

$$\frac{3x - 90°}{2} = k \cdot 180°,$$

$$3x - 90° = k \cdot 360°,$$

$$3x = k \cdot 360° + 90°,$$

$$x_2 = k \cdot 120° + 30° = (4k + 1) \cdot 30°.$$

Samale tulemusele jõuame, rakendades võrdsete siinustega nurkade üldavaldist

$$n \cdot 180° + (-1)^n \cdot \arcsin m.$$

Võrrandist $\sin 2x = \sin(90° - x)$ saame

$$2x = n \cdot 180° + (-1)^n \cdot (90° - x).$$

Juhul, kui n on paarisarv $2k$, saame

$$2x = 2k \cdot 180° + 90° - x,$$

$$3x = 2k \cdot 180° + 90°,$$

$$x = 2k \cdot 60° + 30° \text{ ehk}$$

$$x_1 = (4k + 1) \cdot 30°.$$

Kui n on paaritu arv, s. o. $n=2k+1$, siis

$2x=(2k+1)\cdot 180°-(90°-x)$,

$x=2k\cdot 180°+90°$ ehk

$x_2=(4k+1)\cdot 90°$.

Niisiis

$x_1=(4k+1)\cdot 30°$,

$x_2=(4k+1)\cdot 90°$.

Esimese täispöörde ulatuses x_1 ja x_2 annavad

30°, 90°, 150°, 270°,

mis kõik rahuldavad antud võrrandit, nagu näha alljärgnevast tabelist

x	30°	90°	150°	270°
$\sin 2x$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0
$\cos x$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0

Ülesandeid.

68. Leia vahemikust 0° kuni 360° kõik nurgad, mis rahuldavad võrrandit:

1) $\sin x-\cos x=0$

2) $\sin 2x+\cos x=0$

69. Leia vahemikust $-180°$ kuni 180° kõik nurgad, mis rahuldavad võrrandit:

1) $\sin 3x=\sin x$

2) $\sin 2x=\sin(x-90°)$

Näide 4.

$\cos(2x+30°)=\cos(60°-x)$.

Saame

$\cos(2x+30°)-\cos(60°-x)=0$,

$-2\sin\frac{x+90°}{2}\sin\frac{3x-30°}{2}=0$,

$$\sin\frac{x+90^\circ}{2}=0,$$

$$\frac{x+90^\circ}{2}=k\cdot 180^\circ,$$

$$x+90^\circ=k\cdot 360^\circ,$$

$$x=k\cdot 360^\circ-90^\circ$$

ehk

$$x_1=(4k-1)\cdot 90^\circ.$$

Kui

$$\sin\frac{3x-30^\circ}{2}=0,$$

siis

$$\frac{3x-30^\circ}{2}=k\cdot 180^\circ,$$

$$3x-30^\circ=k\cdot 360^\circ,$$

$$3x=k\cdot 360^\circ+30^\circ,$$

$$x=k\cdot 120^\circ+10^\circ$$

ehk

$$x_2=(12k+1)\cdot 10^\circ.$$

Kontroll näitab, et mõlemad sarjad x_1 ja x_2 on antud võrrandi lahendeiks.

Lahenda sama võrrand, rakendades võrdsete koosinustega nurkade üldavaldist.

Ülesandeid.

70. Lahenda võrrandid.

1) $\cos 3x=\cos(60^\circ-x)$
2) $\cos(x-60^\circ)=\sin 2x$

71. Lahenda võrrandid:

1) $\sin(45^\circ-2x)=\cos x$
2) $\sin(x+30^\circ)=\sin x$

72. Lahenda võrrandid:

1) $\tan(2x-30^\circ)=\tan(x+60^\circ)$

Näpunäide. Rakenda võrdsete tangensitega nurkade üldavaldist $n\cdot 180^\circ+\arctan m$, mille järgi

$$2x-30^\circ=n\cdot 180^\circ+x+60^\circ.$$

2) $\tan 3x=\tan 2x$
3) $\tan 3x=\cot(70^\circ+x)$

2.5. SIINUSE JA KOOSINUSE SUHTES HOMOGEENNE TRIGONOMEETRILINE VÕRRAND.

Trigonomeetrilist võrrandit nimetame homogeenseks siinuse ja koosinuse suhtes, kui selle võrrandi kõik liikmed sisaldavad üksnes ühe ja sama argumendiga siinust ja koosinust ning kõik liikmed on ühe ja sama astmelised.

Näiteks võrrandid

$$2 \sin x + 3 \cos x = 0,$$

$$2 \sin^2 x - 7 \sin x \cos x + 6 \cos^2 x = 0,$$

$$8 \sin^3 x = 2 \sin x \cos^2 x + (\cos^2 x - \sin^2 x) \sin x$$

on homogeensed.

Mõnda mittehomogeenset võrrandit saab kirjutada homogeense võrrandina kasutades seost

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Näiteks võrrandile

$$5 \sin^2 x - 7 \sin x \cos x + 4 \cos^2 x = 1$$

saame anda homogeense võrrandi kuju:

$$5 \sin^2 x - 7 \sin x \cos x + 4 \cos^2 x = \sin^2 x + \cos^2 x$$

ehk

$$4 \sin^2 x - 7 \sin x \cos x + 3 \cos^2 x = 0.$$

Samuti võrrand

$$9 \sin x \cos x + 5 \sin^2 x = 7$$

on kirjutatav homogeense võrrandina

$$9 \sin x \cos x + 5 \sin^2 x = 7 (\sin^2 x + \cos^2 x)$$

ehk

$$9 \sin x \cos x - 2 \sin^2 x - 7 \cos^2 x = 0.$$

Homogeense võrrandi lahendamisel tuuakse võrrandi liikmete ühistegur sulgude ette või, kui see ühistegur ei võrdu nulliga, jagatakse võrrandi liikmed selle ühisteguriga, mille tulemusena saame tangensi suhtes algebralise võrrandi.

Näide 1.

Lahendame võrrandi

$$2 \sin x + 3 \cos x = 0.$$

Siin $\cos x \neq 0$, sest vastasel juhul oleks $x = \frac{\pi}{2}$ ja $2 \sin x = 2$, mis ütleb, et $\frac{\pi}{2}$ ei ole võrrandi lahendiks.

Seepärast võime võrrandi liikmed jagada arvuga $\cos x$ ja saame

$$2 \tan x + 3 = 0,$$

millest

$$\tan x = -\frac{3}{2};$$

siit

$$x = k\pi + \arctan\left(-\frac{3}{2}\right).$$

Näide 2. Leia kõik nurgad esimese täispöörde ulatuses, mis rahuldavad võrrandit

$$\sin^2 x - 10 \sin x \cos x + 21 \cos^2 x = 0.$$

Lahendus. Et $\cos x \neq 0$ (miks?), võime võrrandi kõiki liikmeid jagada avaldisega $\cos^2 x$. Saame:

$$\tan^2 x - 10 \tan x + 21 = 0,$$

millest

$$\tan x = 5 \pm 2;$$
$$\tan x_1 = 7; \quad \tan x_2 = 3.$$
$$x_1 = n \cdot 180° + \arctan 7 = n \cdot 180° + 81°52';$$
$$x_2 = n \cdot 180° + \arctan 3 = n \cdot 180° + 71°34'.$$

Seega, antud võrrandi lahendid on

71°34', 81°52', 251°34' ja 261°52'.

Näide 3. Lahenda võrrand

$$2 \sin^2 x + 5 \sin x \cos x + \cos^2 x = 4.$$

Lahendus.

$$2 \sin^2 x + 5 \sin x \cos x + \cos^2 x = 4(\sin^2 x + \cos^2 x),$$
$$2 \sin^2 x + 5 \sin x \cos x + \cos^2 x = 4 \sin^2 x + 4\cos^2 x,$$
$$2 \sin^2 x - 5 \sin x \cos x + 3 \cos^2 x = 0,$$
$$2 \tan^2 x - 5 \tan x + 3 = 0,$$

$$\tan x = \frac{5 \pm 1}{4},$$
$$\tan x_1 = 1{,}5, \quad \tan x_2 = 1.$$

$x_1 = n\pi + \arctan 1{,}5;$

$x_2 = n\pi + \frac{\pi}{4}.$

Ülesandeid.

73. Lahenda võrrandid:

1) $2\sin^2 x - \cos^2 x = 0$
2) $\sin^2 x - 2\cos^2 x + \frac{1}{2}\sin 2x = 0$
3) $\sin^2 x - 3\cos^2 x + 2\sin 2x = 1$
4) $\sin 6x = \sin 4x$
5) $\sin 3x = \cos 2x$
6) $\sin(8x + 60°) + \sin 2x = 0$
7) $\cos 4x - \cos 2x = 0$
8) $\cos 8x + \cos 4x = 0$
9) $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) - x - \tan x = 0$
10) $\sin 2x = \cos 3x$
11) $\tan x = \cot x$

74. Lahenda võrrandid:

1) $2\sin^2 x = 3\cos x$
2) $2\cos^2 x = 1 - \sin x$
3) $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$
4) $\cos x + \sin x = 1$

75. Leia vahemikust 0° kuni 180° kõik nurgad, mis rahuldavad võrrandit:

1) $3\sin^2 x + 2\sin x - 1 = 0$
2) $3\cos x + \sin x = 0$
3) $\sin^2 x - \sin x = 1$
4) $2\cos^2 x + 5\cos x = 3$
5) $2\sin^2 x = 3\cos x$
6) $\cos^2 x - 2 = \cos x$
7) $\sin x + \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
8) $2\sin^2 x - 5\sin x - 3 = 0$
9) $\tan 3x + \tan x = 0$
10) $\tan^3 x = 8.$

76. Jaota täisnurk kahte ossa nii, et nende siinuste suhe oleks $1 : \sqrt{3}$.

77. Lahenda võrrandid:

1) $2 \sin x - 1 = 0$ 2) $\sin 6x = 0{,}5$

78. Lahenda võrrandid:

1) $2 \cos(2x - 60°) + 1 = 0$ 2) $3 \tan^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$

3) $\cos x \sin x - 0{,}25 = 0$ 4) $\sin(x + 40°) = 1$

79. Lahenda võrrandid:

1) $\tan^2 x - \tan x = 0$ 2) $2 \sin^2 x = \sin x$

3) $\tan^3 x = 3 \tan x$ 4) $\sin^2 x - \cos x = 0$

80. Lahenda võrrandid:

1) $\sin 2x = \sin(x - 90°)$ 2) $\cos 4x + \cos x = 0$

81. Täisnurkse kolmnurga nurkade siinused moodustavad geomeetrilise progressiooni. Leia kolmnurga nurgad.

82. Täisnurkse kolmnurga poolnurkade tangensid moodustavad aritmeetilise progressiooni. Leia kolmnurga nurgad.

83. Täisnurkse kolmnurga tipust hüpotenuusile tõmmatud kõrgus on võrdne hüpotenuusil asuvate kaatetite projektsioonide vahega. Leia kolmnurga nurgad.

84. Lahenda võrrandid:

1) $3 \sin x = 2 \cos^2 x$ 2) $\tan x + 3 \cot x = 4$

3) $\cos^2 x + 3 \sin^2 x = 2$ 4) $\cos^2 x + \cos 2x = \frac{1}{2}$

5) $3 \cos^2 x - \sin^2 x + 3 \cos x = 0$ 6) $2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1 = 0$

7) $\cos 2x + \cos x = 0$

85. Arvuta võrdhaarse kolmnurga nurgad, kui alusnurga siinus võrdub tipunurga kahekordse siinusega.

86. Lahenda võrrandid:

1) $\sin x = 2 \cos x$

2) $\sin^2 3x = 3 \cos^2 3x$

3) $\sin 3x = \cos 3x$

87. Ruudusse on joonestatud teine ruut. Arvuta ruutude külgede vaheline väiksem nurk, teades, et ruutude pindalade suhe on 1,5.

88. Lahenda võrrandid:

1) $\cos^2 x = 0{,}25$
2) $\cos(2x+45°) = 0$
3) $\sin 2x + \sin x = 0$
4) $\cos 2x + \cos x = 0$
5) $\cos 3x = \cos(60° - x)$
6) $\sin 4x = \sin 2x$
7) $\sin^2 x + \cos 2x = \frac{3}{4}$
8) $\cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x = 0$
9) $\frac{2 \sin x \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{\cos x}{\sin x}$
10) $6 \sin^2 x - 4 \sin x \cos x = 1$
11) $\sin^3 x + \cos^3 x = 0$

Kordamisülesandeid.

89. Lihtsusta avaldis $\sin^4 \alpha + 2 \cos^2 \alpha - \cos^4 \alpha$.
90. Tõesta, et $\sin x \cdot \cot x = \cos x$.
91. Tõesta, et $\cos x \cdot \sin x \cdot \tan x = 1 - \cos^2 x$.
92. Tõesta, et $\frac{\cos(90° - x)}{\cos x} = \tan x$.
93. Lihtsusta avaldis $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha$.
94. Lihtsusta avaldis $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha$.
95. Tõesta, et

$\cos^3 x + \sin^3 x = (\cos x + \sin x)(1 - \sin x \cos x)$.

96. Tõesta, et

$\cos^3 x - \sin^3 x = (\cos x - \sin x)(1 + \sin x \cos x)$.

97. Tõesta, et $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x$.
98. Teades, et $\sin x = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, avalda $\tan x + \cot x$ suuruste a ja b kaudu.
99. Avalda x kaudu avaldis $\frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\sin \alpha - \sin \beta}$, teades, et $\tan \alpha = x$ ja $\tan \beta = \frac{1}{x}$.
100. Kolmnurgas ABC on $\sin B = \frac{1}{3}$ ja $\sin C = \frac{1}{2}$. Leia $\sin A$.
101. Kolmnurgas ABC on $\sin B = \frac{3}{5}$ ja $\sin C = \frac{1}{4}$. Leia suhe $AB : BC$.
102. Kuidas saab funktsiooni $y = \sin x$ graafikust funktsiooni $y = |\sin x|$ graafiku? Kas viimane on perioodiline funktsioon? Kui suur on periood?
103. Joonesta funktsiooni $y = |\cos x|$ graafik.

104. Arvuta peast:

1) $\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}\cos\pi$

2) $\cos\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{6}\tan\frac{\pi}{3}$

3) $\tan 60°\sin 90°$

4) $\cos\frac{\pi}{6}\tan\frac{\pi}{4}\sin\pi$

5) $\cot\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{3}$

6) $\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{2}\tan\frac{\pi}{3}$

7) $\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

8) $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)+2\arccos(-1)$

105. Arvuta:

1) $x+\cos x$, kui $x=1{,}295$

2) $x+\cos\frac{1}{x}$, kui $x=\pi$

106. Lihtsusta avaldised:

1) $2\sin^2\frac{\alpha}{2}+3\cos^2\frac{\alpha}{2}$

2) $(\cos\alpha+\sin\alpha)^2-\sin 2\alpha$

3) $\frac{\cos(\alpha+\beta)+\sin\alpha\sin\beta}{\cos(\alpha-\beta)-\sin\alpha\sin\beta}$

4) $\frac{\sin(\alpha+\beta)-\cos\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)+\cos\alpha\sin\beta}$

5) $\frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos\alpha\cos\beta}{\cos(\alpha+\beta)+\sin\alpha\sin\beta}$

6) $\frac{\sin(\alpha-\beta)+\cos\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)-\sin\alpha\sin\beta}$

107. Tõesta, et

1) $\cos(45°+\alpha)-\sin(45°-\alpha)=0$

2) $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}=1$

108. Lihtsusta algul avaldist ja arvuta siis ta väärtus:

1) $\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha-\sin\beta}$, kui $\alpha=60°$ ja $\beta=30°$

2) $\left(\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}-\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\beta}}\right)^2$, kui $\alpha=30°$ ja $\beta=45°$

109. Lahenda võrrandid:

1) $3(1-\sin x)=1+\cos 2x$

2) $\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}+3\cos^2\dfrac{x}{2}-2}{\sin^2 2x(1+\cot^2 2x)}=\dfrac{1}{2}$

3) $\dfrac{(\cos x+\sin x)^2-\sin 2x}{\cos^4 x+\dfrac{1}{4}\sin^2 2x}=2$

4) $\cos x^2=1$

5) $\sin|x|=1$

6) $|\sin x|=1$

110. Taanda ja lahenda seejärel võrrand

$$\frac{\cos 2x}{1-\sin 2x}=0.$$

111. Jaga võrrandi liikmed avaldisega $\cos x$ ja lahenda seejärel saadud võrrand

1) $\sin x=-\cos x$

2) $2\sin x-3\cos x=0$

3) $2\sin x+3\cos x=0$

112. Lahenda võrrandid:

1) $1-\cos x=\sin\dfrac{x}{2}$

2) $\sin(x-60°)=\cos(x+30°)$

113. Leia niisuguse nurga siinus, mille tangens on $\dfrac{2a}{1-a^2}$.

114. Tabeleid kasutamata näita, et

$$\frac{\sin 50°+\sin 70°}{\sin 35°-\cos 125°}=\frac{\sqrt{3}\cos 10°}{2\sin 35°}.$$

115. Teades, et $0°<x<90°$, näita, et

$$\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}=\tan\left(45°+\frac{x}{2}\right).$$

116. Näita, et

$$(\cos x+\cos y)^2+(\sin x-\sin y)^2=4\cos^2\frac{x+y}{2}.$$

117. Näita, et

$$\left(\sin^2 x-\frac{1}{2}\right)^2=\left(\cos^2 x-\frac{1}{2}\right)^2.$$

TARTU ÜLIKOOLI
RAAMATUKOGU

118. Näita, et

$$\frac{\sin 2x+\sin x}{\cos x+\cos 2x}=\tan\frac{3x}{2}.$$

119. Näita, et

$$(1-\tan^4 x)\cos^2 x+\tan^2 x=1$$

120. Arvuta tabeleid kasutamata avaldise

$$\cos 20^\circ+\cos 100^\circ+\cos 140^\circ$$

väärtus.

121. Näita, et

$$\frac{\sin 85^\circ-\sin 55^\circ}{\cos 85^\circ-\cos 55^\circ}=-\tan 20^\circ.$$

122. Näita, et

$$\frac{\cos x-\cos 3x}{\sin 3x-\sin x}=\tan 2x.$$

123. Leia kaks teravnurka, mis rahuldavad võrrandit

$$\tan x+\sqrt{3}\cot x=1+\sqrt{3}.$$

124. Lahenda võrrand

$$\sin^2 2x-\sin^2 x=\sin 2x\sin x.$$

125. Lihtsusta avaldis

$$\frac{\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan\frac{\alpha}{2}}+\frac{\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan\frac{\alpha}{2}}.$$

126. Lahenda võrrand:

1) $1-\cos 2x=\sin x$; 2) $2\sin 2x=3\cos x$.

127. On teada, et $\tan\alpha=\frac{3}{4}$. Arvuta $\tan 2\alpha$.

128. Võttes $3\alpha=\alpha+2\alpha$, avalda nurga α funktsioonide kaudu:

1) $\sin 3\alpha$; 2) $\cos 3\alpha$; 3) $\tan 3\alpha$.

129. Leia nurk, mille siinus on 2 korda suurem kui koosinus.

130. Leia nurk, mille siinus on pool koosinusest.

131. Leia nurk, mille siinuse ja koosinuse summa on $\sqrt{2}$.

3. FUNKTSIOONI PIIRVÄÄRTUS JA PIDEVUS.

3.1. FUNKTSIOONI MÄÄRAMISPIIRKOND.

Funktsiooni defineerime järgmiselt:

kui ühe muutuva suuruse igale väärtusele vastab teise muutuva suuruse üks kindel väärtus, siis viimast suurust nimetatakse esimese suuruse funktsiooniks ehk esimesest suurusest sõltuvaks muutujaks.

Iga funktsiooni definitsiooni saab alles siis lugeda täielikuks, kui selles on öeldud või sellest järeldub, milliseid väärtusi saab omandada argument.

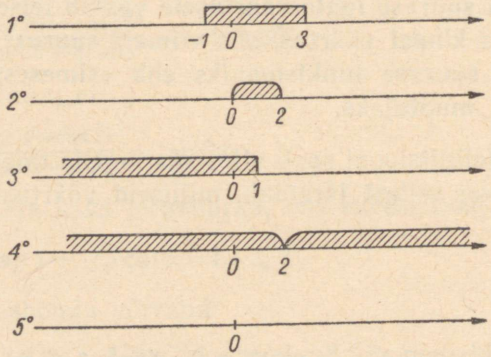
Näiteid.

1. On antud funktsioon x^2+3x, kus $-1 \leqslant x \leqslant 3$, s. t. et funktsioon on määratud, kui argument omandab väärtusi arvust -1 kuni arvuni 3, need mõlemad väärtused kaasa arvatud.
2. On antud funktsioon $\frac{x-1}{x-2}$, kus $0<x<2$, s. t. et funktsioon on määratud, kui argument omandab väärtusi arvust 0 kuni arvuni 2, need mõlemad väärtused välja arvatud.
3. On antud funktsioon $\sqrt{1-x}$. Siin pole lisatud tingimust argumendi muutumise kohta, kuid antud avaldisest järeldub, et argument omandab väärtusi, mis on väiksemad kui 1 või võrdub 1-ga, s. t. kui $x \leqslant 1$. Seega, antud funktsioon on määratud, kui $x \leqslant 1$.
4. On antud funktsioon $\frac{x}{x-2}$. See funktsioon on määratud, kui $x<2$ ja kui $x>2$. Juhul, kui $x=2$, on funktsiooni väärtuseks $\frac{2}{0}$, millel puudub arvu tähendus.

5. On antud funktsioon $3x-5$. Antud avaldisele saab leida väärtusi, kui argumendiks on mistahes reaalarv. Seda tõsiasja saab üles märkida nn. lõpmatuse sümboli «∞» abil. See funktsioon on määratud, kui $-\infty<x<\infty$.

Väärtuste hulka, mida argument võib antud funktsiooni puhul omandada, nimetatakse selle funktsiooni määramispiirkonnaks.

Esimeses näites on määramispiirkonnaks **kinnine vahemik** ehk **lõik** $-1\leqslant x\leqslant 3$, mida tähistatakse ka sümboliga $[-1, 3]$ (vt. joon. 10).



Joon. 10.

Teises näites on määramispiirkonnaks **lahtine vahemik** ehk lihtsalt **vahemik** $0<x<2$, mida tähistatakse ka sümboliga $(0, 2)$.

Kolmandas näites on määramispiirkonnaks nn. **poolkinnine vahemik** ehk **poollõik** $-\infty<x\leqslant 1$, mida tähistatakse sümboliga $(-\infty, 1]$.

Neljanda näite puhul koosneb määramispiirkond kahest vahemikust $(-\infty, 2)$ ja $(2,\infty)$.

Viiendas näites on määramispiirkonnaks vahemik $(-\infty,\infty)$.

3.2. NÄITEID FUNKTSIOONI MÄÄRAMISPIIRKONNA LEIDMISE KOHTA.

1. Funktsiooni $\frac{ax^2+bx+c}{dx^2+ex+f}$ määramispiirkond.

Murruna avalduva funktsiooni määramispiirkonda ei kuulu need väärtused, mille korral nimetaja saab võrdseks nulliga.

Leiame funktsiooni $y=\frac{5x^2-2x+6}{3x^2-2x-1}$ määramispiirkonna.

Nimetaja nullkohtade leidmiseks lahendame võrrandi

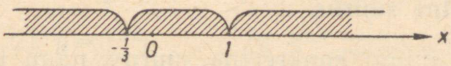
$3x^2-2x-1=0.$

Lahenditeks on $x_1=1$ ja $x_2=-\frac{1}{3}$. Seega,

antud funktsioon on määratud:

1) *kui* $x<-\frac{1}{3}$;
2) *kui* $-\frac{1}{3}<x<1$;
3) *kui* $x>1$ (joon. 11).

Seega koosneb funktsiooni $\frac{5x^2-2x+6}{3x^2-2x-1}$ määramispiirkond vahemikest: $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right)$, $\left(-\frac{1}{3}, 1\right)$ ja $(1,\infty)$.



Joon. 11.

2. Funktsiooni $\sqrt{ax^2+bx+c}$ määramispiirkond.

Et ruutjuurt saab leida ainult mittenegatiivsetest arvudest, siis antud funktsiooni määramispiirkonnaks on see x väärtuste hulk, mis rahuldab tingimust

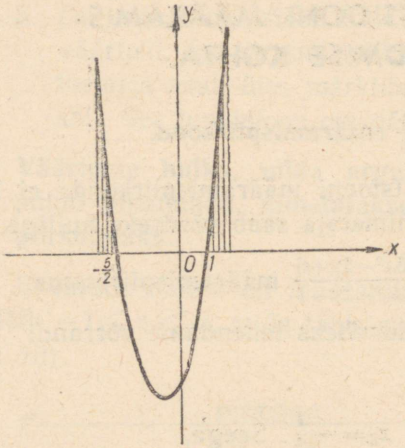
$ax^2+bx+c\geqslant 0.$

Leiame funktsiooni $y=\sqrt{2x^2+3x-5}$ määramispiirkonna. Ülesande lahendamiseks tuleb leida ruutfunktsiooni

$2x^2+3x-5$

positiivsuspiirkond koos nullkohtadega. Lahendades ruutvõrrandi

$2x^2+3x-5=0,$



Joon. 12.

saame lahendeiks $x_1 = -\frac{5}{2}$ ja $x_2 = 1$. Et ruutliikme kordaja on positiivne, siis saame positiivsuspiirkonnaks kaks piirkonda $x < -\frac{5}{2}$ ja $x > 1$ (joon. 12). Seega koosneb antud funktsiooni määramispiirkond järgmisest kahest poolkinnisest vahemikust:

$$\left(-\infty, -\frac{5}{2}\right] \text{ ja } [1, \infty].$$

3. Funktsiooni määramispiirkond juhul, kui argumendiks on mingi konkreetne suurus.

Kui argumendiks on mingi konkreetne suurus, nagu kolmnurga nurga suurus, ruudu külje pikkus, korrapärase hulknurga nurkade arv jm., siis funktsiooni määramispiirkonna moodustavad (kui definitsioonis pole teisiti öeldud) argumendi need väärtused, mida antud konkreetne suurus võib omandada. Näiteks, kui argumendiks on kolmnurga nurk, siis määramispiirkonnaks on vahemik $(0, \pi)$.

N ä i d e 1. Täisnurkses kolmnurgas on teravnurkade α ja β summa $\frac{\pi}{2}$, s. t. $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$. Siit $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ ehk $\beta = -\alpha + \frac{\pi}{2}$. Seega on täisnurkse kolmnurga teravnurgad lineaarses sõltuvuses. Tähistame siin nagu tavaliselt funktsiooni tähega y ja argumendi tähega x, siis

$$y = -x + \frac{\pi}{2}.$$

Et siin argument x tähendab teravnurka, siis

$$0<x<\frac{\pi}{2},$$

mis ongi vaadeldava funktsiooni määramispiirkonnaks.

Näide 2. Meres sügavusel h on veesamba kaal p võrdeline sügavusega:

$p=ch$, kus c on konstant.

Kogurõhk r samas kohas koosneb veesamba kaalust p ja atmosfääri rõhust b:

$$r=p+b$$

ehk

$$r=ch+b.$$

Seega on kogurõhk lineaarselt sõltuv sügavusest. Sügavust mõõdetakse alates merepinnast ja seetõttu $0\leqslant h<11$ (Vaikse ookeani suurim sügavus on 11 km), mis ongi vaadeldava lineaarse funktsiooni määramispiirkonnaks.

Ülesandeid.

132. Leia järgmiste funktsioonide määramispiirkonnad.

1) $y=\frac{1}{2-x}$ 4) $y=\frac{3}{x^2-1}$ 7) $y=\frac{x^2+3}{x^2-5x+6}$

2) $y=\frac{3x}{x+4}$ 5) $y=\frac{5}{x^2+4x}$ 8) $y=\frac{4x^2-20}{x^2+2x-35}$

3) $y=\frac{2x-1}{3x+2}$ 6) $y=\frac{2x-3}{x^2-2x+1}$ 9) $y=\frac{2x^2-3x-2}{2x^2-3x+1}$

133. Leia järgmiste funktsioonide määramispiirkonnad.

1) $y=\sqrt{x}$ 5) $y=(-2x+1)^{\frac{1}{2}}$ 9) $y=\sqrt{-x^2-2x+8}$

2) $y=\sqrt{x+2}$ 6) $y=(x^2-9)^{\frac{1}{2}}$ 10) $y=\sqrt{2x^2-4x-1}$

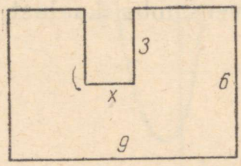
3) $y=\sqrt{3x}$ 7) $y=(2x^2-3x)^{\frac{1}{2}}$ 11) $y=\sqrt{-3x^2-5}$

4) $y=\sqrt{4x+2}$ 8) $y=(x^2-4x+3)^{\frac{1}{2}}$ 12) $y=\sqrt{\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}}$

134. Avalda poja vanus p funktsioonina isa vanusest i, kui isa vanus poja sündimisel oli s. Missugune on selle funktsiooni määramispiirkond?

135. Pendelkella keti ülespoole liikuva osa pikkus on x, allapoole liikuva osa pikkus y, ketti kandva hammasratta raadius r ning kogu keti pikkus l. Avalda y funktsioonina x-st. Missugune on selle funktsiooni määramispiirkond?

136. Avalda joonisel 13 esitatud kujundi pindala s suuruse x funktsioonina. Missugune on selle funktsiooni määramispiirkond?



Joon. 13.

137. Ringis raadiusega 5 cm on võetud keskpunktist 3 cm kaugusel punkt P. Seda punkti läbib kõõl MN. Avalda kõõlu lõik $MP=y$ funktsioonina lõigust $NP=x$, kui kõõl pöörleb ümber punkti P. Missugune on selle funktsiooni määramispiirkond?

138. Punkt P liigub mööda lõiku AB, mille pikkus on a. Avalda suurus $y=AP^2+PB^2$ suuruse $x=AP$ funktsioonina. Missugune on selle funktsiooni määramispiirkond?

3.3. FUNKTSIOONI ÜLDTÄHIS.

Teatavasti nimetatakse üht suurust y teise suuruse x funktsiooniks, kui suuruse x igale väärtusele tema määramispiirkonnast vastab suuruse y üks kindel väärtus.

Seda asjaolu, et suurus y on suuruse x funktsioon, märgitakse sümbolites kujul

$$y=f(x),$$

mida loetakse «igrek on f iksist». Selles võrduses paremal seisev sümbol $f(x)$ on funktsiooni üldtähis, s. t. sümbol, mille abil märgitakse suvalist suurust, mis sõltub suurusest x. Tähe f asemel võib selles esineda mistahes muu täht (välja arvatud argumendi tähis). Nii tähistavad x funktsioone ka sümbolid

$$F(x),\ g(x),\ h(x),\ y(x) \text{ jne.}$$

Analoogiliselt tähistavad sümbolid

$f(u)$, $y(t)$, $z(v)$

vastavalt suuruste u, t ja v mingeid funktsioone.

Kui suuruse x funktsioonina $f(x)$ mõtleme üht kindlat funktsiooni, näiteks funktsiooni $\sin^2 x$, siis kirjutame:

$$f(x) = \sin^2 x.$$

Siin täht f tähistab neid tehteid (operatsioone), mida tuleb teha suurusega x, et saada suurust $f(x)$.

Funktsiooni $f(x)$ väärtusi, mis vastavad argumendi x konkreetsetele väärtustele

2, -4, a jne.,

tähistatakse vastavalt sümbolitega

$f(2)$, $f(-4)$, $f(a)$ jne.

Näiteks, kui

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x-1},$$

siis

$$f(2) = \frac{2^2+1}{2-1} = 5;\ f(-4) = \frac{(-4)^2+1}{-4-1} = -3\frac{2}{5};\ f(a) = \frac{a^2+1}{a-1}.$$

Tulemusi loeme järgmiselt: funktsiooni $f(x)$ väärtus kohal 2 on 5, funktsiooni $f(x)$ väärtus kohal -4 on $-3\frac{2}{5}$ ja funktsiooni $f(x)$ väärtus kohal a on $\frac{a^2+1}{a-1}$. Lühemalt aga: f kohal 2 on 5 jne.

Ülesandeid.

139. Antud on funktsioon

$$f(x) = 2x^2 - 3x + 1.$$

Leia $f(0)$; $f(3)$; $f(-2)$; $f(2{,}3)$; $f\left(-\frac{1}{2}\right)$.

140. Antud on funktsioon

$$F(u) = u^3 - 1.$$

Leia $F(1)$; $F(a)$; $F(a+1)$; $F(a-1)$; $2F(2a)$.

141. Antud on funktsioon

$$g(t)=2t^2+\frac{2}{t^2}+\frac{5}{t}+5t.$$

Näita, et $g(t)=g\left(\frac{1}{t}\right)$.

142. Antud on funktsioonid

$$f(x)=\frac{x-2}{x+1} \text{ ja } \varphi(x)=\frac{x+2}{x-1}.$$

Leia $f(-x)$; $f(1)$; $\varphi(-3)$; $\varphi(a)$; $f(4)+\varphi(1)$.

3.4. PAARISFUNKTSIOON JA PAARITU FUNKTSIOON.

1. Paarisfunktsioon.

Funktsiooni, mille väärtused kohtadel $-x$ ja x on võrdsed, nimetatakse paarisfunktsiooniks.

Kasutades funktsiooni üldtähist võime sama definitsiooni üles kirjutada järgmiselt:

kui

$$f(-x)=f(x),$$

siis funktsioon on paarisfunktsioon.

Näitame nüüd, et

paarisfunktsiooni graafik on sümmeetriline y-telje suhtes.

Olgu funktsiooni $f(x)$ väärtused kohtadel $x=-a$ ja $x=a$ võrdsed (joon. 14), s. t.

$$f(-a)=f(a).$$

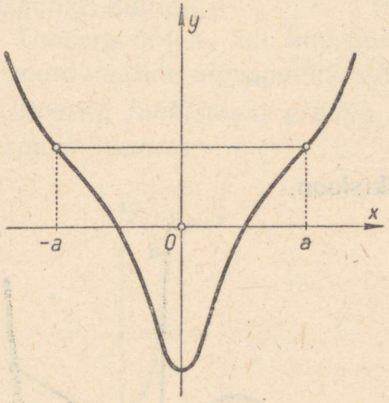
Siis neile vastavad funktsiooni graafiku punktid $[-a, f(-a)]$ ja $[a, f(a)]$ on y-telje suhtes sümmeetrilised, sest y-telg on nende ühenduslõigu keskristsirgeks (põhjenda seda!). Kui see asjaolu leiab aset x kõikide väärtuste puhul, s. t. kui

$f(-x)=f(x)$,

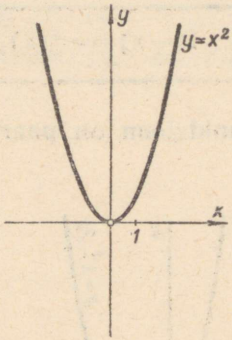
siis antud funktsiooni graafik on sümmeetriline y-telje suhtes.

Ümberpöördult, kui funktsiooni $f(x)$ graafik on sümmeetriline y-telje suhtes, siis $f(-x)=f(x)$.

Paarisfunktsiooni graafik on sümmeetriline y-telje suhtes.



Joon. 14.

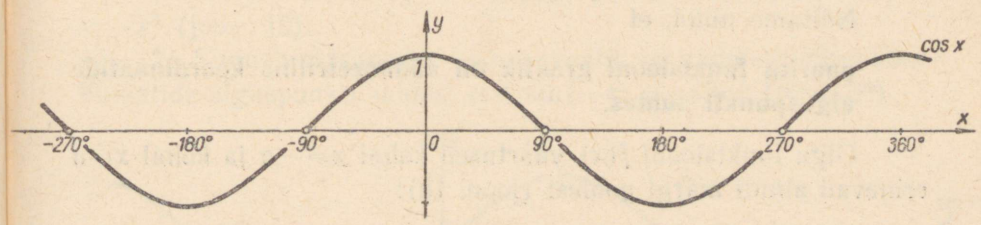


Joon. 15.

Näiteid.

1. Ruutfunktsioon $y=x^2$ on paarisfunktsioon, sest $(-x)^2=x^2$ (joon. 15).

2. Koosinusfunktsiooni $y=\cos x$ graafik on sümmeetriline y-telje suhtes, sest $\cos(-x)=\cos x$ (joon. 16).



Joon. 16.

3. Ruutfunktsiooni $y=x^2-2x$ graafik pole sümmeetriline y-telje suhtes, sest $(-x)^2-2(-x)\neq x^2-2x$ (joon. 17).

2. **Paaritu funktsioon.**

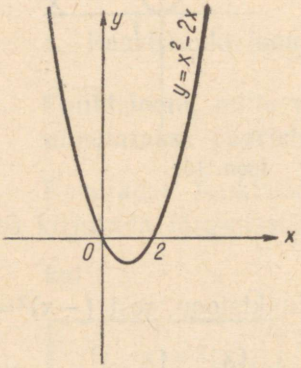
Funktsiooni, mille väärtused kohtadel $-x$ ja x erinevad ainult märgi poolest, nimetatakse paarituks funktsiooniks.

Kasutades funktsiooni üldtähist võime sama definitsiooni üles kirjutada järgmiselt:

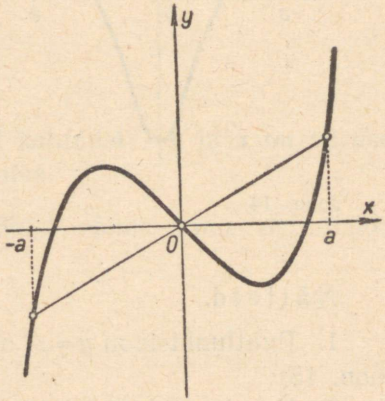
kui

$$f(-x)=-f(x),$$

siis funktsioon on paaritu funktsioon.



Joon. 17.



Joon. 18.

Näitame nüüd, et

paaritu funktsiooni graafik on sümmeetriline koordinaatide alguspunkti suhtes.

Olgu funktsiooni $f(x)$ väärtused kohal $x=-a$ ja kohal $x=a$ erinevad ainult märgi poolest (joon. 18):

$$f(-a)=-f(a).$$

Siis neile vastavad funktsiooni graafiku punktid $[-a,\ f(-a)]$ ja $[a,\ f(a)]$ on koordinaatide alguspunkti suhtes sümmeetrilised, sest punkt $[-a,\ f(-a)]$ on sümmeetriline y-telje suhtes punktiga

$[a, -f(a)]$ ning viimane on x-telje suhtes sümmeetriline punktiga $[a, f(a)]$.

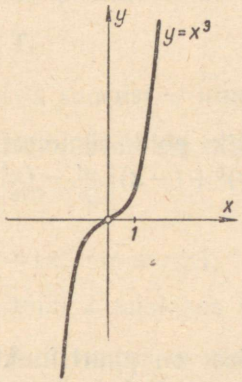
Kui kõigi x-väärtuste puhul kehtib seos

$$f(-x) = -f(x),$$

siis antud funktsiooni graafik on sümmeetriline koordinaatide alguspunkti suhtes.

Ümberpöördult, kui funktsiooni $f(x)$ graafik on sümmeetriline koordinaatide alguspunkti suhtes, siis $f(-x) = -f(x)$.

Paaritu funktsiooni graafik on sümmeetriline koordinaatide alguspunkti suhtes.

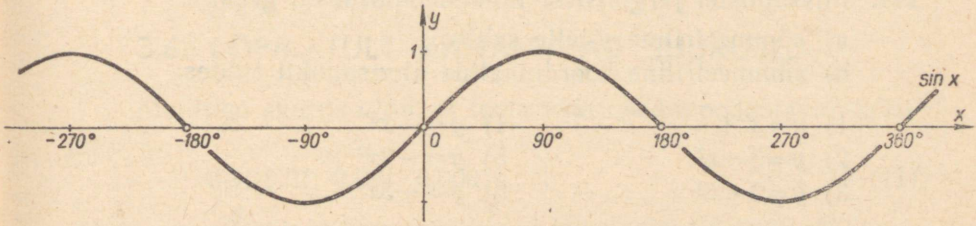


Joon. 19.

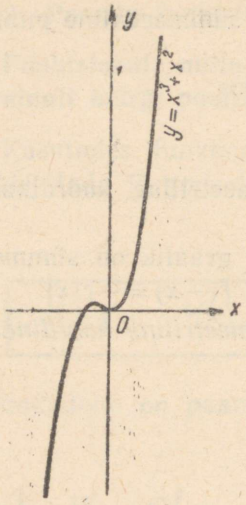
Näiteid.

1. Kuupfunktsioon $y = x^3$ on paaritu funktsioon, sest $(-x)^3 = -x^3$ (joon. 19).

2. Siinusfunktsiooni $y = \sin x$ graafik on sümmeetriline koordinaatide alguspunkti suhtes, sest $\sin(-x) = -\sin x$ (joon. 20).



Joon. 20.



Joon. 21.

3. Kuupfunktsiooni $y=x^3+x^2$ graafik pole sümmeetriline koordinaatide alguspunkti suhtes, sest $(-x)^3+(-x)^2 \neq -(x^3+x^2)$ (joon. 21).

Ülesandeid.

143. Missugused järgmistest funktsioonidest on paarisfunktsioonid, missugused paaritud funktsioonid?

1) $y=x^4$
2) $y=x^{-3}$
3) $y=x^2+x$
4) $y=x^3+x$
5) $y=\frac{1}{x}$
6) $y=x^4-2x^2+5$
7) $y=\tan x$
8) $y=\sin x+\cos x$
9) $y=x$
10) $y=\frac{3x^2+2}{x^2+1}$

144. Missugustel järgmistest funktsioonidest on graafik
a) sümmeetriline y-telje suhtes,
b) sümmeetriline koordinaatide alguspunkti suhtes:

1) $y=x^{-1}$
2) $y=3-x^2$
3) $y=3-x^3$
4) $y=-x^3$
5) $y=-2x^2$
6) $y=-3x^3$

145. Selgita, kas funktsioonid

$F_1(x)=f(x)+f(-x)$ ja $F_2(x)=f(x)-f(-x)$

on paaris- või paaritud funktsioonid, kui

1) $f(x)$ on paarisfunktsioon;

2) $f(x)$ on paaritu funktsioon.

3.5. SUURUSE TÄHTSAMAD MUUTUMISVIISID.

Tutvume mõne mõistega, mis on loodud suuruste muutumise iseloomustamiseks.

Kui suurus u muutub nii, et tema absoluutväärtus ei ületa üht positiivset arvu T, s. t. kui

$$|u| \leqslant T,$$

siis suurust u nimetatakse tõkestatuks.

Näiteks on $\sin x$ tõkestatud suurus, sest

$$|\sin x| \leqslant 1$$

ehk

$$-1 \leqslant \sin x \leqslant 1,$$

argumendi x mistahes väärtuse korral.

Kui suurus u muutub nii, et tema absoluutväärtus võib saada kuitahes suureks, siis suurust u nimetatakse tõkestamata suuruseks.

Näiteks on $\tan x$ tõkestamata suurus, sest $\tan x$ väärtused kasvavad üle iga määra, kui x läheneb 90°-le.

Nii tõkestatud kui ka tõkestamata suurus võib omakorda muutuda mitmeti. Vaatleme esmalt tõkestatud suuruse üht tähtsat muutumisviisi.

3.6. LÕPMATULT KAHANEVAD SUURUSED.

Muutugu suurus u nii, et tema väärtused moodustavad arvujada

$$0{,}1;\ 0{,}01;\ 0{,}001;\ 0{,}0001;\ \ldots \qquad (1)$$

ning suurus v nii, et tema väärtused moodustavad arvujada

$$-1;\ -\frac{1}{2};\ -\frac{1}{4};\ -\frac{1}{8};\ -\frac{1}{16};\ -\frac{1}{32};\ \ldots \qquad (2)$$

Punktide lisamine antud arvujada lõppu tähendab, et antud suuruse edasisel muutumisel omandab ta kuitahes palju väärtusi. Toodud arvujadade järgnevad liikmed leitakse antud liikmetest ilmneva eeskirja järgi. (Nimeta kummagi arvujada kolm järgmist liiget!) Et nendele jadadele võime lisada veel kuitahes palju liikmeid, siis nimetame neid jadasid lõpmatuteks arvujadadeks. Siin toodud arvujadade (1) ja (2) jätkamisel saame arvud, mis järjest enam lähenevad nullile. Et $|u| \leqslant 0{,}1$ ja $|v| \leqslant 1$, siis on suurused u ja v tõkestatud suurused.

Anname nüüd ette ühe väga väikese positiivse arvu, näiteks 10^{-6}. Jätkates jadasid (1) ja (2), võime leida liikme, millest alates antud suuruse absoluutväärtus saab ja edasisel muutumisel ka jääb sellest etteantud arvust väiksemaks. Suuruse u väärtuste jada liikmed saavad arvust 10^{-6} väiksemaks juba 7. liikmest alates, suuruse v absoluutväärtused aga alles 20. liikmest alates.

Kui suurus w muutub nii, et tema absoluutväärtused saavad ja edasisel muutumisel ka jäävad väiksemaks igast kuitahes väikesest etteantud positiivsest arvust, siis nimetatakse suurust w lõpmatult kahanevaks ehk nullile lähenevaks suuruseks.

Selles definitsioonis kirjeldatud muutumist märgitakse lühidalt kujul

$w \to 0$.

Ka vaadeldud suurused u ja v on lõpmatult kahanevad suurused ja seega

$u \to 0$ ja $v \to 0$.

3.7. LÕPMATULT KASVAVAD SUURUSED.

Vaatleme nüüd tõkestamata suuruse üht tähtsat muutumisviisi. Alustame jällegi näitega.

Muutugu suurus nii, et tema väärtused moodustavad lõpmatu arvujada

$-9,\ -99,\ -999,\ -9999,\ \ldots$

Seda muutumist iseloomustab asjaolu, et suuruse u absoluutväärtus saab suuremaks igast kuitahes suurest etteantud arvust. Näiteks, kui etteantud arvuks oleks 10^{100}, siis alates 101. liikmest on arvujada arvude absoluutväärtused temast suuremad. Tõepoolest, võttes antud arvude absoluutväärtused, saame

9, 99, 999, 9999, ...,

kus jada jätkamisel saame leida kuitahes suuri arve.

Suuruse u sellist muutumist iseloomustatakse sõnadega: u kasvab lõpmatult.

Üldiselt,

kui suurus u muutub nii, et tema absoluutväärtus saab ja edasisel muutumisel ka jääb suuremaks igast kuitahes suurest etteantud arvust, siis nimetatakse suurust u lõpmatult kasvavaks suuruseks.

Kirjeldatud muutumist märgitakse lühidalt kujul

$u \to \infty$.

3.8. MUUTUVA SUURUSE PIIRVÄÄRTUS.

Muutugu nüüd suurus u nii, et tema väärtused moodustavad järgmise lõpmatu arvujada

0,9; 0,99; 0,999; 0,9999; ...

Paneme tähele, et selle jada liikmed lähenevad järjest enam arvule 1. Lahutame antud arvujada kõigist liikmetest 1, saame

$-0{,}1$; $-0{,}01$; $-0{,}001$; $-0{,}0001$; ...,

mis on suuruse $u-1$ väärtuste jadaks. Suurus $u-1$ on lõpmatult kahanev suurus, sest andes ette kuitahes väikese positiivse arvu, saame viimases arvujadas ikka nii kaugele minna, et suuruse $u-1$ väärtused saavad ja jäävad temast väiksemaks.

Kui suurus u muutub nii, et tema ja mingi jääva arvu A vahe osutub lõpmatult kahanevaks suuruseks, siis öeldakse, et antud arv A on suuruse u piirväärtus.

Arvu A nimetame ka suuruse u väärtuste **jada piirväärtuseks.**

Kirjeldatud muutumist märgitakse lühidalt järgmiselt:

$$u \to A \quad \text{ehk} \quad \lim u = A,$$

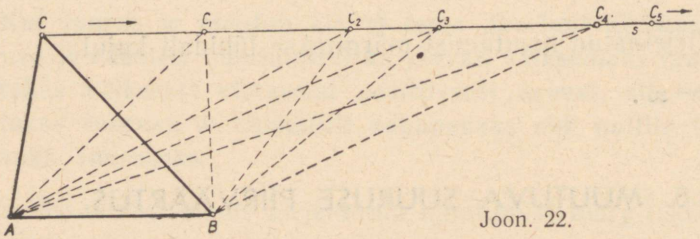
mida loetakse vastavalt: u läheneb arvule A ehk u piirväärtus on arv A (sümbol lim on lühend ladinakeelsest sõnast *limes* — piir).

Sümbolit lim kasutatakse ka lõpmatult kahanevate ja lõpmatult kasvavate suuruste ülesmärkimiseks. Kui suurus u on lõpmatult kahanev suurus, siis kirjutame

$$\lim u = 0,$$

ja kui suurus u on lõpmatult kasvav suurus, siis kirjutame

$$\lim u = \infty.$$

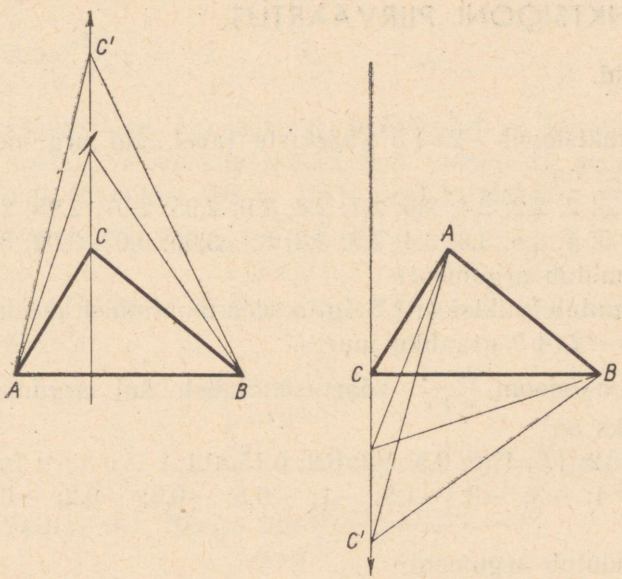


Joon. 22.

Vaatleme joonist 22. Läbi kolmnurga ABC tipu C on tõmmatud küljega AB paralleelne sirge s, millel on fikseeritud rida järjest kaugenevaid punkte C_1, C_2, C_3 jne. Jälgime kolmnurga nurkade muutumist, kui tipp C hakkab liikuma mööda sirget s noolega näidatud suunas. Nurgad tipu A ja tipu C juures saavad kuitahes väikeseks, need on lõpmatult kahanevad suurused. Nurk tipu B juures läheneb sirgnurgale. Seega $\lim \angle B = \pi$. Küljed AC ja BC on aga lõpmatult kasvavad suurused.

Ülesandeid.

146. Joonisel 23 on esitatud kahe kolmnurga muutumine tipu C nihkumisel mööda joonisel näidatud sirget. Tee kindlaks, missugused elemendid osutuvad seal lõpmatult kasvavaiks, mis-



Joon. 23.

sugused lõpmatult kahanevaiks ja missugustel neist on nullist erinev piirväärtus.

147. Missugusest n väärtusest alates saab ja jääb avaldise $3n^3$ väärtus suuremaks kui 3000?

148. Missugusest n väärtusest alates saab ja jääb

1) avaldise $n+15$ väärtus suuremaks kui 1000,

2) avaldise $5n-3$ väärtus suuremaks kui 18 007,

3) avaldise n^2+8 väärtus suuremaks kui 633?

149. 1) Missugusest n väärtusest alates saab ja jääb avaldise $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ väärtus väiksemaks arvust 0,0002?

2) Missugusest n väärtusest alates saab ja jääb avaldise $\left(\frac{3}{4}\right)^n$ väärtus väiksemaks kui 0,005?

3) Missugusest n väärtusest alates korrapärase n-nurga välisnurk saab ja jääb väiksemaks kui 1″?

3.9. FUNKTSIOONI PIIRVÄÄRTUS.

Ülesandeid.

150. Koosta funktsiooni $-2x+5$ väärtuste tabel, kui argumendi väärtusteks on

a) 0; 1; 1,5; 2; 2,2; 2,4; 2,6; 2,7; 2,8; 2,9; 2,95; 2,97; 2,98; 2,99;

b) 6; 5; 4,5; 4; 3,8; 3,6; 3,4; 3,3; 3,2; 3,1; 3,05; 3,03; 3,02; 3,01.

Kuidas muutub argument?

Kuidas muutub funktsioon? Selgita seda muutumist ka funktsiooni $y=-2x+5$ graafiku juures.

151. Koosta funktsiooni $\frac{3x-2}{x^2+1}$ väärtuste tabel, kui argumendi väärtusteks on

a) 5; 4; 3; 2; 1,5; 1; 0; 0,5; 0,3; 0,2; 0,15; 0,1;

b) -5; -4; -3; -2; $-1{,}5$; -1; $-0{,}5$; $-0{,}3$; $-0{,}2$; $-0{,}15$; $-0{,}1$.

Kuidas muutub argument?

Kuidas muutub funktsioon?

*

Olgu muutuv suurus u funktsioon x-st, s. t.

$$u=f(x),$$

ning olgu veel antud, et $x \to a$. Kasutades nüüd muutuva suuruse piirväärtuse definitsiooni, võime defineerida funktsiooni piirväärtuse järgmiselt:

kui f(x) muutub nii, et tema ja mingi jääva arvu A vahe osutub tõkestamatult kahanevaks suuruseks, samal ajal kui x — a on tõkestamatult kahanev suurus, siis nimetatakse arvu A funktsiooni f(x) piirväärtuseks argumendi x läheнemisel arvule a.

Tõsiasja, et arv A on funktsiooni $f(x)$ piirväärtuseks, kui argument x läheneb arvule a, kirjutatakse üles järgmiselt:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A.$$

Nii võime ülesande 150 lahendusena kirjutada

$$\lim_{x \to 3} (-2x+5) = -1$$

ja ülesande 151 lahendusena

$$\lim_{x \to 0} \frac{3x-2}{x^2+1} = -2.$$

Funktsiooni piirväärtuse leidmiseks ei koostata tavaliselt tema vastavat väärtuste tabelit ega joonestata selle funktsiooni graafikut (vt. üles. 150 ja 151), vaid teostatakse vastav arutlus.

Näide 1. Leida $\lim_{x \to 2}(5x-6)$.

Lahendus. Arutleme nii. Kui $x \to 2$, siis $5x \to 10$ ja $(5x-6) \to 4$.

Näide 2. Leida $\lim_{x \to 0} \frac{5x^2-1}{x+1}$.

Lahendus. Kui $x \to 0$, siis $x^2 \to 0$, $5x^2 \to 0$ ja $(5x^2-1) \to -1$ ning $(x+1) \to 1$. Seega $\lim_{x \to 0} \frac{5x^2-1}{x+1} = \frac{-1}{1} = -1$.

Leia samasuguse arutluse teel funktsiooni $\frac{4-7x}{\cos x}$ piirväärtus, kui $x \to 0$.

Näide 3. Leida $\lim_{x \to 0} \frac{(x-2)\sin x}{x^2-3x+5}$.

Lahendus. Kui $x \to 0$, siis $(x-2) \to -2$ ja $\sin x \to 0$ ning seega $[(x-2)\sin x] \to 0$. Kui $x \to 0$, siis $x^2 \to 0$ ja $-3x \to 0$ ning $(x^2-3x+5) \to 5$. Siit järeldub, et $\frac{(x-2)\sin x}{x^2-3x+5} \to 0$.

Ülesandeid.

152. Leia järgmiste funktsioonide piirväärtused, kui $x \to 0$ ja kui $x \to 1$.

1) $-4x+3$

2) $7+\frac{1}{3}x$

3) x^2+2x-3

4) $(2x-1)^2$

5) $\frac{4}{x+6}$

6) $\frac{3-x}{2}$

7) $\frac{4+2x}{3x-5}$

8) $\frac{\frac{1}{3}x-6}{3-\frac{1}{6}x}$

9) $\frac{x^2+x+1}{3-2x}$

10) $\frac{-x^2-x+5}{3+2x-x^2}$

11) $\frac{(3x-2)^2}{6-3x}$

12) $\left(\frac{0{,}14x-2{,}8}{0{,}7+8{,}6x}\right)^2$

153. a) Missuguseks suuruseks osutub funktsioon $\frac{1}{x}$, kui $x \to 0$?

b) Missuguseks suuruseks osutub funktsioon $\frac{1}{x}$, kui $x \to \infty$?

3.10. FUNKTSIOONI PIIRVÄÄRTUSE ARVUTAMINE.

1. Piirväärtuse leidmisel kasutatakse lauseid:

1) *summa piirväärtus võrdub liidetavate piirväärtuste summaga,*

sümbolites

$$\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x);$$

2) *korrutise piirväärtus võrdub tegurite piirväärtuste korrutisega,*

sümbolites

$$\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x);$$

3) *jagatise piirväärtus võrdub jagatava ja jagaja piirväärtuste jagatisega, kui jagaja piirväärtus ei ole* 0,
sümbolites

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}, \text{ kui } \lim_{x \to a} g(x) \neq 0.$$

Samuti ilmneb eelnenud aruteludest, et

konstandi piirväärtuseks on konstant ise,

sümbolites

$$\lim_{x \to a} c = c.$$

Selgita nende lausete rakendamist lk. 71 toodud näidete juures.

Nende lausete rakendamisel eeldame, et liidetavatel, teguritel ning lugejal ja nimetajal on piirväärtus olemas ja et nimetaja piirväärtus ei võrdu nulliga. Kuidas toimub piirväärtuse leidmine aga siis, kui nimetatud eeldused pole täidetud, seda vaatleme punktis 2.

Ülesandeid.

154. Leia piirväärtused.

a) $\lim\limits_{x \to 4} (2x-3)$

b) $\lim\limits_{x \to -1} (4-x^2)$

c) $\lim\limits_{x \to 1} (x^4-x^2+1)$

d) $\lim\limits_{x \to 0} (3x^2-2x^2-1)$

e) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2+5}{x^2+3}$

f) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{1+\sin 2x}{1-\cos 4x}$

g) $\lim\limits_{x \to a} \frac{2}{3-x}$

h) $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^2-1}{x}$

i) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x+1}{x-1}$

j) $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^2+2x-1}{x^2-2x+1}$

k) $\lim\limits_{x \to \sqrt{3}} \frac{x^2-3}{x^4+x^2-1}$

l) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x+\tan x}{\cos x}$

m) $\lim \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x}\right)$

n) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \left(\frac{x^2}{3-x} + \frac{2x}{x^2+1}\right)$

o) $\lim\limits_{x \to \frac{3}{4}} \left[\frac{(4-x)^2}{3x} - \frac{3x^2}{4-x}\right]$

p) $\lim\limits_{x \to 2} (3x^2-4x^3+1)^3$

q) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2-4x+1}{2x+1}$

r) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\sin x}$

2. Vaatleme nüüd näiteid piirväärtuse arvutamise kohta juhtumeil, kui mõni eespool toodud lausetest piirväärtuse arvutamiseks ei kehti.

1° $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x}{1-x}$.

Kui $x \to 1$, siis $(1-x) \to 0$; seega murru nimetaja läheneb nullile ja lugeja ühele. Et praegusel juhul murru nimetaja osutub tõkestamatult kahanevaks suuruseks, samal ajal kui lugeja jääb lõplikuks, siis on murd tõkestamatult kasvav suurus. Seega puudub temal lõplik piirväärtus. Seda tõsiasja märgime üles järgmiselt:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x}{1-x} = \infty$$

(loeme: argumendi lähenemisel 1-le kasvab funktsioon $\frac{x}{1-x}$ tõkestamatult või funktsiooni $\frac{x}{1-x}$ piirväärtuseks on lõpmatus).

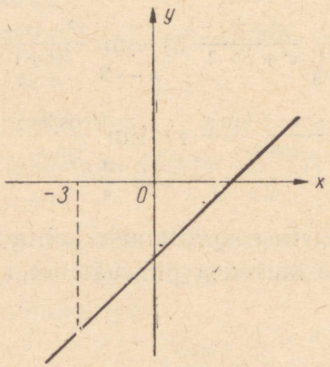
2° $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{1+x^2}$.

Et siin murru nimetaja on tõkestamatult kasvav suurus (kui $x \to \infty$, siis ka $(1+x^2) \to \infty$) ja murru lugeja on lõplik arv, siis on murd tõkestamatult kahanev suurus:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{1+x^2} = 0.$$

3° $\lim\limits_{x \to -3} \frac{x^2-9}{x+3}$.

Siin on nii murru lugeja kui ka nimetaja piirväärtus 0. Et siin x läheneb (-3)-le, s. t. $x \neq -3$, siis tuleb avaldist nii teisendada, et saaksime taandada teguriga $x+3$, mis läheneb nullile nii lugejas kui ka nimetajas.



Joon. 24.

Seega lahendame selle ülesande järgmiselt:

$$\lim_{x \to -3} \frac{x^2-9}{x+3} = \lim_{x \to -3} \frac{(x+3)(x-3)}{x+3} = \lim_{x \to -3} (x-3) = -6.$$

Saadud tulemust võime selgitada ka joonise 24 abil. Võrdus $\frac{x^2-9}{x+3} = x-3$ kehtib, kui $x \neq -3$. Seega funktsiooni $\frac{x^2-9}{x+3}$ graafikuks on sirge $y=x-3$, mis katkeb kohal $x=-3$. Jälgides antud funktsiooni muutumist, kui $x \to -3$, siis on ilmne, et $\frac{x^2-9}{x+3} \to -6$, s. t. funktsiooni $x-3$ väärtusele kohal $x=-3$.

4° $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2+1}{x^3+1}$.

Selles ülesandes pole lugejal ega nimetajal piirväärtust — nad mõlemad on tõkestamatult kasvavad suurused. Et x omab lõplikke väärtusi, mis järjest suurenevad, siis tuleb siin lugeja ja nimetaja nii tegureiks lahutada, et saaksime x kõrgeima astendajaga astmega taandada. Antud ülesande lahendame järgmiselt:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^3+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}{1+\frac{1}{x^2}}=\frac{0}{1}=0.$$

Ülesandeid.

155. Leia piirväärtused.

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{4x}{5x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{3x}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{x^3}$

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x}{5x}$

e) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{3x}$

f) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{x^3}$

156. Leia järgmiste funktsioonide piirväärtused, kui $x\to\infty$.

a) $3+x$

b) $5x$

c) x^2

d) x^2+5

e) $16-x$

f) x^3-1

g) $\frac{1}{x}$

b) $3+\frac{1}{x}$

i) $x+\frac{3}{x}$

157. Leia piirväärtused.

a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x-2}{x-1}$

b) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x+3}{12+4x}$

c) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-x}{x-1}$

d) $\lim\limits_{x\to -5}\frac{x^3+5x^2}{x^2+5x}$

e) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-6x+8}$

f) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x^2-x-12}{x^2-2x-15}$

g) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+3x-4}{x^2+4x-5}$

h) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-2x-3}$

158. Leia piirväärtused.

a) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2-2x+1}{x^3-x}$

b) $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^3+3x^2+x}{x^2-x-6}$

c) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2+x-2}{x^3-x^2-x+1}$

d) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \frac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$

159. Leia piirväärtused.

a) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x-1}{x^2+1}$

b) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{4x^4-5x}{x^2-3x+1}$

c) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x-1}{x^2+1}$

d) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1+x-3x^3}{1+x^2+3x^3}$

160. Leia järgmiste funktsioonide piirväärtused, kui $x \to 0$ ja kui $x \to \infty$.

a) $\frac{2x-5}{x+3}$

b) $\frac{3x^2+5x-2}{4x^2-3x+1}$

161. Leia piirväärtused.

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{\cos x}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{\sin x}$

c) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1+\tan x}{1-\tan x}$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan x-\sin x}{\tan x+\sin x}$

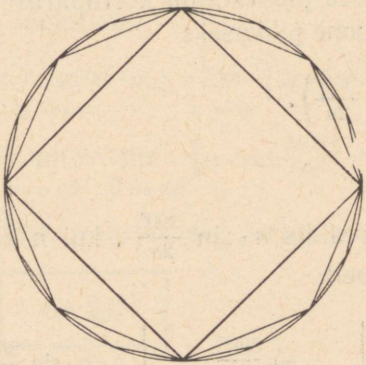
3.11. FUNKTSIOONI PIIRVÄÄRTUSE RAKENDUSI.

1. Ringjoone pikkuse mõiste.

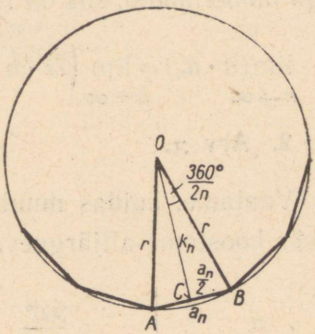
Ringjoon on kõverjoon, pikkusühik aga sirglõigu pikkus (näiteks 1 mm, 1 cm, 1 dm jne.), seetõttu ei ole võimalik ringjoone pikkust otseselt mõõta ja on vaja defineerida, mida mõista ringjoone pikkuse all.

Kui ringi sisse joonestada korrapärane hulknurk, siis tema ümbermõõt, mida saab pikkusühiku abil mõõta, on lühem ringjoone pikkusest, sest hulknurga küljed kui kahe punkti vahelised sirglõigud on lühemad igast teisest nende punktide vahelisest joo-

nest, seega ka lühemad neile vastavatest ringjoone kaartest. Kui hulknurga tippude arvu kahekordistada, saame uue hulknurga, mille ümbermõõt on pikem eelmise hulknurga ümbermõõdust ja lühem ringjoone pikkusest. Miks? Seda kahekordistamise protsessi jätkates saame hulknurgad, mis oma kujult ikka enam ja enam lähenevad ringile (joon. 25).



Joon. 25.



Joon. 26.

Seda tähelepanekut aluseks võttes defineeritaksegi ringjoone pikkust järgmiselt.

Ringjoone pikkuseks nimetatakse ringi sisse joonestatud korrapäraste hulknurkade ümbermõõtude piirväärtust, kui hulknurga tippude arv tõkestamatult kasvab.

Olgu ringi sisse joonestatud korrapärane n-nurk (joon. 26). Ühendades hulknurga tipud ringi keskpunktiga, tekivad võrdhaarsed kolmnurgad alusega a_n ja haaraga r. Selle kolmnurga tipunurk on $\frac{360°}{n}$. Tõmbame hulknurga apoteemi, mis on ka vaadeldava võrdhaarse kolmnurga kõrguseks. See apoteem jaotab antud kolmnurga OAB kaheks võrdseks täisnurkseks kolmnurgaks OAC ja OBC. Nendes kolmnurkades on üks nurk $\frac{360°}{2n}$ ja selle nurga vastaskaatet $\frac{a_n}{2}$. Täisnurksest kolmnurgast OBC võime kirjutada:

$$\frac{\frac{a_n}{2}}{r} = \sin \frac{360°}{2n}$$

ehk

$$\frac{a_n}{2r} = \sin\frac{360°}{2n}.$$

Korrutades nüüd võrduse mõlemad pooled arvuga $2rn$, saame

$$n \cdot a_n = 2r \cdot n \cdot \sin\frac{360°}{2n}.$$

Et $n \cdot a_n$ väljendab ringi sisse joonestatud korrapärase hulknurga ümbermõõtu, siis on ringjoone pikkuseks

$$\lim_{n\to\infty}(n \cdot a_n) = \lim_{n\to\infty}\left(2r \cdot n \cdot \sin\frac{360°}{2n}\right).$$

2. Arv π.

Vaatame, kuidas muutub avaldis $n \cdot \sin\frac{360°}{2n}$, kui n kasvab. Selleks koostame alljärgneva tabeli.

n	$\frac{360°}{2n}$	$\sin\frac{360°}{2n}$	$n \cdot \sin\frac{360°}{2n}$
3	60°	0,8660	2,5980
6	30°	0,5	3,0
12	15°	0,2588	3,1056
24	7°30′	0,1305	3,1320
48	3°45′	0,0654	3,1392

Selle tabeli jätkamiseks ei piisa enam neljakohalisest siinuste tabelist. Kui aga kasutada järjest suurema arvu kohtadega tabeleid, siis võib tähele panna, et peale 3,1, mis jäi juba antud tabelis püsima $n \cdot \sin\frac{360°}{2n}$ väärtusena, jäävad edaspidi n suurenemisel püsima

3,14; 3,141; 3,1415; 3,14159; jne.

Avaldise $n \cdot \sin\frac{360°}{2n}$ piirväärtust tähistatakse kreeka tähega π.

Seega

$$\lim_{n\to\infty}\left(n \cdot \sin\frac{360°}{2n}\right) = \pi$$

π lähisväärtusena on kõige enam kasutusel arv 3,14.

3. Ringjoone pikkus.

Et $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\cdot\sin\frac{360°}{2n}\right)=\pi$ ja ringjoone pikkus on $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2r\cdot n\cdot\sin\frac{360°}{2n}\right)$, siis tähistades ringjoone pikkuse tähega c, võime kirjutada

$$c=\lim_{n\to\infty}(n\cdot a_n)=\lim_{n\to\infty}\left[2r\cdot\left(n\cdot\sin\frac{360°}{2n}\right)\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}2r\cdot\lim_{n\to\infty}\left(n\cdot\sin\frac{360°}{2n}\right)=2r\cdot\pi$$

ehk, jättes vahepealsed kirjutused ära,

$$\boxed{c=2\pi r}$$

Et $2r=d$, siis ka

$$c=\pi d.$$

Avaldades sellest võrdusest π, saame

$$\pi=\frac{c}{d},$$

mis ütleb, et *iga ringjoone pikkuse ja läbimõõdu suhe on konstantne ja võrdub π-ga.*

4. Ringi pindala.

Ringi pindala S all mõistame ringi sisse joonestatud korrapäraste hulknurkade pindalade S_n piirväärtust, kui hulknurga tippude arv tõkestamatult kasvab, s. t.

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n.$$

Teades, et korrapärase hulknurga pindala avaldub tema ümbermõõdu ja apoteemi poole korrutisega, võime kirjutada (joon. 25):

$$S_n=(n\cdot a_n)\cdot\frac{k_n}{2}$$

ja

$$S = \lim_{n \to \infty} \left[(n \cdot a_n) \cdot \frac{k_n}{2} \right].$$

Et $\lim_{n \to \infty} (n \cdot a_n) = 2\pi r$ ja $\lim_{n \to \infty} k_n = r$, siis

$$S = 2\pi r \cdot \frac{r}{2} = \pi r^2$$

ehk, jättes ära vahepealse avaldise,

$$\boxed{S = \pi r^2}$$

Avaldades saadud võrdusest π, saame

$$\pi = \frac{S}{r^2},$$

mis ütleb, et *ringi pindala ja selle ringi raadiusele ehitatud ruudu pindala suhe on konstantne ja võrdub π-ga.*

Enne leidsime, et $\pi = \frac{c}{d}$, seega

$$\frac{c}{d} = \frac{S}{r^2}.$$

See tähendab, et *ringjoone pikkus on läbimõõdust nii palju kordi pikem, kui ringi pindala on suurem tema raadiusele ehitatud ruudust.*

Ülesandeid.

162. Ringi raadius on r.
a) Kui suur on 1° kesknurgale vastava kaare pikkus?
b) Kui suur on 1° kesknurgale vastava sektori pindala?

163. Ringi raadius on 10 cm.
a) Kui suur on 15° kesknurgale vastava kaare pikkus?
b) Kui suur on 100° kesknurgale vastava sektori pindala?

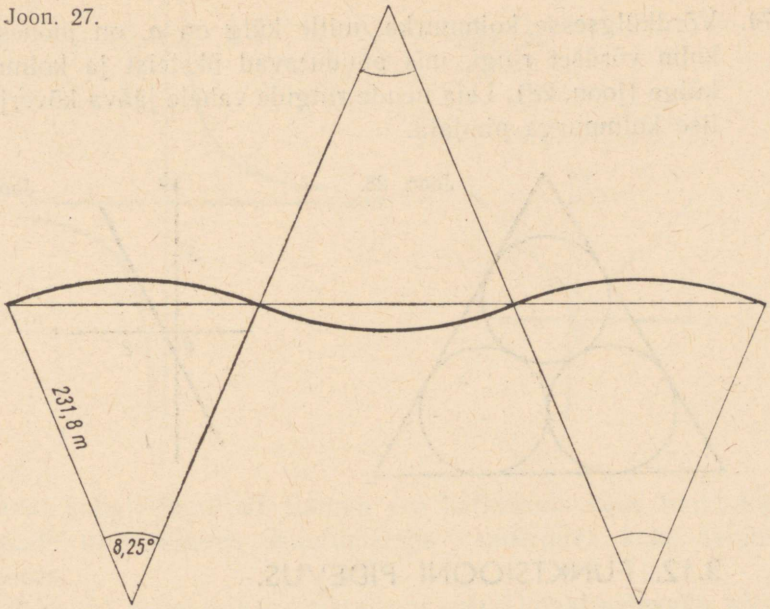
164. Sõnasta ringjoone kaare pikkuse leidmise eeskiri.

165. Sõnasta ringi sektori pindala leidmise eeskiri.

166. Mis on ringi segment? Sõnasta ringi segmendi pindala leidmise eeskiri.

167. Ringi raadius on 15 cm. Leia 25° kesknurgale vastava segmendi pindala.

Joon. 27.



168. 1 meeter on ligikaudu $\frac{1}{40\,000\,000}$ Maa ümbermõõdust, kui Maad vaadelda kerana. Kui pikk on Maa raadius?

169. Kui pikk on meridiaani kraad, teades, et Maa raadius on 6370 km?

170. Meridiaani minuti pikkust nimetatakse meremiiliks. Leia meremiili pikkus meetrites, kasutades eelmise ülesande andmeid.

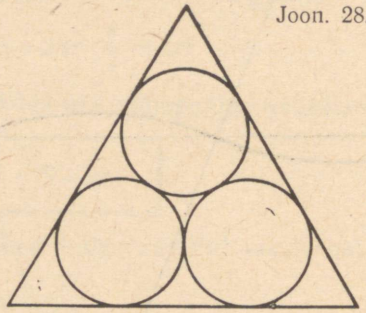
171. Mitu pööret teeb vaguniratas minutis, kui tema diameeter on 0,85 m ja rong sõidab kiirusega 80 km tunnis?

172. Poiss käib ümber ringikujulise tiigi 7 minutiga. Kui suur on tiigi pindala, kui poiss käib 10 minutiga 900 m?

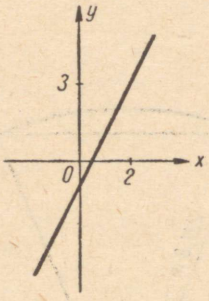
173. Sportlane ei jookse 100 meetrit mitte oma raja keskjoont mööda, vaid joonisel 27 näidatud kolme võrdse ringjoone kaart mööda, kusjuures vastavate ringide raadiused on 231,8 m ja kaartele vastav kesknurk 8,25°. Kui pika maa jooksis sportlane tegelikult? Kui palju kaotas sportlane aega, kui sirgjoont mööda joostes oleks ta läbinud 100 m 11 sekundiga?

174. Võrdkülgsesse kolmnurka, mille külg on a, on joonestatud kolm võrdset ringi, mis puudutavad üksteist ja kolmnurga külge (joon. 28). Leia nende ringide vahele jääva kõverjoonelise kolmnurga pindala.

Joon. 28.



Joon. 29.



3.12. FUNKTSIOONI PIDEVUS.

a) Jälgime funktsiooni $2x-1$ muutumist, kui $x\to 2$. Näeme, et sõltumata sellest, kuidas argumendi väärtused lähenevad 2-le, funktsiooni väärtus läheneb ikka 3-le (vt. joon. 29).

b) Funktsiooni $\frac{1}{x}$ väärtused kasvavad tõkestamatult positiivses suunas, kui $x\to 0$ (paremalt), ja kasvavad tõkestamatult negatiivses suunas, kui $x\to 0$ (vasakult) (vt. joon. 30).

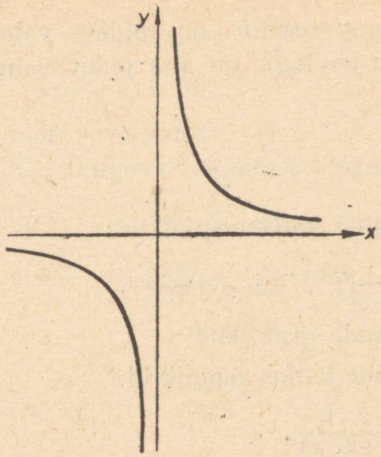
c) Funktsiooni piirväärtuse käsitlemisel selgitasime, et funktsioonil $\frac{x^2-9}{x+3}$ puudub väärtus, kui $x=-3$. Küll on tal aga piirväärtuseks -6, kui $x\to -3$ (vt. joon. 24).

d) Vaatleme funktsiooni $f(x)$, mis on defineeritud järgmiselt:

$$f(x)=\begin{cases} 1-x, & \text{kui } x\leqslant 0,\\ x, & \text{kui } x>0. \end{cases}$$

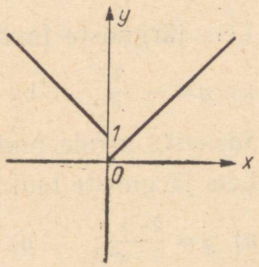
Jälgime selle funktsiooni muutumist graafikult (joon. 31). Kui $x\to 0$ (vasakult), siis $f(x)\to 1$, kui aga $x\to 0$ (paremalt), siis $f(x)\to 0$.

Juhul a) on funktsiooni graafik vaadeldava koha ümbruses pidev; juhul b) kaob funktsiooni graafik vaadeldava koha ümbruses meie vaateväljast; juhul c) katkeb funktsiooni graafik vaa-



Joon. 30.

Joon. 31.



deldaval kohal; juhul d) toimub see katkemine koos funktsiooni väärtuste ulatuslikuma muutumisega vaadeldava koha lähimas ümbruses.

Juhul a) nimetatakse funktsiooni antud kohal **pidevaks**, kõigil teistel vaadeldud juhtudel aga **mittepidevaks** ehk **katkevaks.**

Funktsiooni pidevuse analüütiline tingimus on sõnastatav järgmiselt:

funktsiooni $f(x)$ *nimetatakse pidevaks kohal* a, *kui*

1) *tal on kohal* a *väärtus olemas, s. t. eksisteerib* $f(a)$,

2) *tal on olemas lõplik piirväärtus, kui* $x \to a$, *s. t. eksisteerib* $\lim\limits_{x \to a} f(x)$,

3) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Kui need tingimused kehtivad argumendi kõigi väärtuste kohta vahemikus c-st kuni d-ni, siis öeldakse, et *funktsioon on pidev vahemikus* (c, d).

Kui need tingimused kehtivad kõigi määramispiirkonda kuuluvate väärtuste korral, siis öeldakse, et funktsioon on pidev oma määramispiirkonnas.

Funktsiooni graafikul kajastub pidevus joone katkematuses. Seni tundma õpitud funktsioonidest on lineaarne, ruut- ja kuupfunktsioon, samuti siinus- ja koosinusfunktsioon pidevad, s. t. et

näiteks lineaarne funktsioon $y=ax+b$ on pidev vahemikus $(-\infty,\infty)$. Logaritmfunktsioon $y=\log x$ on aga pidev vahemikus $(0,\infty)$.

Ülesandeid.

175. Leia järgmiste funktsioonide katkevuspunktid:

a) $y=-\frac{3}{x}$; b) $y=\frac{1}{x-2}$; c) $y=\frac{2}{4-x^2}$.

Joonesta nende funktsioonide graafikud!

176. Leia järgmiste funktsioonide katkevuspunktid:

a) $y=\frac{2-x}{4-x^2}$; b) $y=\frac{x-1}{x^2+2x-3}$.

177. Leia järgmiste funktsioonide katkevuspunktid:

a)

$$y=\begin{cases}\frac{x}{2}, & \text{kui } x\neq 2\\ 0, & \text{kui } x=2,\end{cases}$$

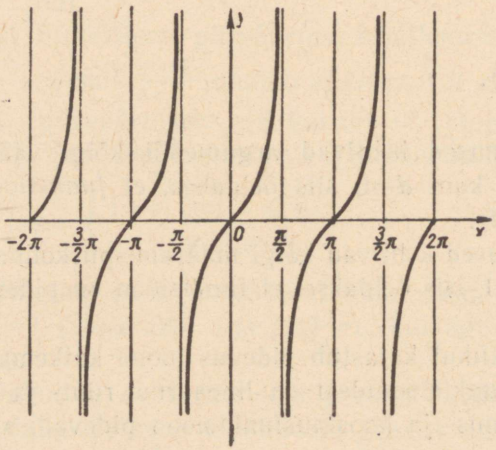
b)

$$y=\begin{cases}0{,}5x^2, & \text{kui } |x|<2\\ 2{,}5, & \text{kui } |x|=2\\ 3, & \text{kui } |x|>2,\end{cases}$$

c)

$$y=\begin{cases}2, & \text{kui } |x|=2\\ 4-x^2, & \text{kui } |x|<2\\ 4, & \text{kui } |x|>2.\end{cases}$$

Joonesta nende funktsioonide graafikud!



Joon. 32.

178. Kas funktsioon $y = \frac{a}{x}$ on kohal

$-a$, 0, a, 1, 10

pidev või katkev?

179. Kas tangensfunktsioon on kohal

$-\pi$, $-\frac{\pi}{2}$, 0, $\frac{\pi}{2}$, π

pidev või katkev (vt. joon. 32)?

4. FUNKTSIOONI TULETIS.

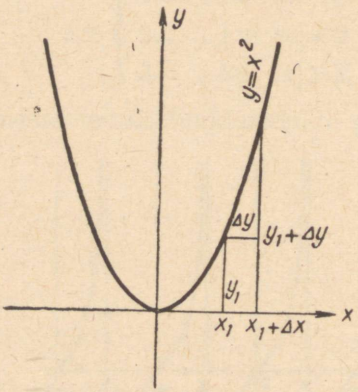
4.1. FUNKTSIOONI TULETISE MÕISTE.

Lineaarfunktsiooni $y=ax+b$ põhiomaduse järgi on lineaarfunktsiooni muutumise keskmine kiirus konstantne:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=a,$$

sõltumata sellest, missugune on argumendi x või argumendi muudu Δx väärtus.

Vaatleme nüüd ruutfunktsiooni $y=x^2$ ja avaldame tema muutumise keskmise kiiruse $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Valime argumendi väärtuseks x_1 (joon. 33). Temale vastav funktsiooni väärtus olgu y_1, s. t. $y_1=x_1^2$. Kui nüüd argument muutub Δx võrra, muutub funktsioon Δy võrra



Joon. 33.

ja me saame, et

$$y_1+\Delta y=(x_1+\Delta x)^2.$$

Siit

$$y_1+\Delta y=x_1^2+2x_1\cdot\Delta x+(\Delta x)^2.$$

Avaldame esmalt Δy:

$$\Delta y = x_1^2 + 2x_1 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - y_1$$

ehk

$$\Delta y = x_1^2 + 2x_1 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - x_1^2$$

ja pärast koondamist

$$\Delta y = 2x_1 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2.$$

Saadud võrduse jagame (Δx)-ga, saame

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x_1 + \Delta x.$$

Näeme, et ruutfunktsiooni muutumise keskmine kiirus $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ei ole konstantne, vaid sõltub argumendi väärtusest x_1 ja argumendi muudu väärtusest Δx.

Jälgime ruutfunktsiooni keskmise kiiruse muutumist, kui argumendi muut läheneb nullile. Järgnevas tabelis on toodud Δx ja temale vastavad $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ väärtused, kui $x_1 = 3$.

Δx	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{1000}$
$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x_1 + \Delta x$	7	$6\frac{1}{2}$	$6\frac{1}{4}$	$6\frac{1}{10}$	$6\frac{1}{1000}$

On ilmne, et kui $\Delta x \to 0$, siis $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to 6$, s. t. et

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 6.$$

Seda tulemust nimetatakse funktsiooni $y = x^2$ muutumise **hetkeliseks kiiruseks** kohal $x = 3$ ehk funktsiooni $y = x^2$ **tuletiseks** kohal $x = 3$.

Näiteks, ruutfunktsiooni $y = x^2$ tuletise väärtus kohal $x = 1$ on $2 \cdot 1 = 2$, argumendi väärtusel $x = -5$ on tuletise väärtuseks $2 \cdot (-5) = -10$, argumendi väärtusel $x = x_1$ on tuletise väärtuseks $2x_1$.

Kui leiame tuletise argumendi mistahes väärtusel x, siis saame antud funktsiooni nn. **tuletisfunktsiooni.** Seega on funktsiooni $y = x^2$ tuletisfunktsiooniks $y = 2x$. Tuletisfunktsiooni nimetatakse ka lihtsalt **tuletiseks** ja teda tähistatakse sümboliga y' või $f'(x)$. Niisiis,

kui $y=x^2$, siis $y'=2x$.

Rakenda sama arutelu funktsiooni $y=x^3$ suhtes ja näita, et

kui $y=x^3$, siis $y'=3x^2$.

Üldiselt, olgu antud funktsioon $y=f(x)$. Leiame tema tuletise.

Kui argument muutub Δx võrra, siis funktsioon muutub Δy võrra ja saame, et

$$y+\Delta y=f(x+\Delta x).$$

Siit

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-y$$

ehk

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x).$$

Leiame funktsiooni muutumise keskmise kiiruse

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

ja seejärel funktsiooni tuletise

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Seega,

$$\text{kui } y=f(x), \text{ siis } y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

Funktsiooni tuletiseks nimetatakse funktsiooni muudu ja argumendi muudu jagatise piirväärtust, kui argumendi muut läheneb nullile.

Kokkuvõte. *Funktsiooni $y=f(x)$ tuletis on argumendi x funktsioon, mida tähistatakse kas y' või $f'(x)$ ja leitakse antud funktsioonist järgmise skeemi järgi:*

1° *avaldatakse* Δy, tuginedes võrdusele

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x);$$

2° *moodustatakse jagatis* $\frac{\Delta y}{\Delta x}$;

3° *leitakse piirväärtus* $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Rakendame toodud skeemi funktsioonide $y=\frac{1}{x}$ ja $y=\sqrt{x}$ tuletise leidmiseks.

Näide 1. Leida funktsiooni $y=\frac{1}{x}$ tuletis.

1° Avaldame Δy:

$$\Delta y=\frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x}=\frac{x-x-\Delta x}{(x+\Delta x)x}=-\frac{\Delta x}{(x+\Delta x)x}.$$

2° Moodustame jagatise $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{\Delta x}{(x+\Delta x)x\cdot\Delta x}=-\frac{1}{(x+\Delta x)x}.$$

3° Leiame tuletise:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[-\frac{1}{(x+\Delta x)x}\right]=-\frac{1}{x^2}.$$

Seega,

kui $y=\frac{1}{x}$, **siis** $y'=-\frac{1}{x^2}$.

Näide 2. Leida funktsiooni $y=\sqrt{x}$ tuletis.

1° Avaldame Δy:

$$\Delta y=\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}.$$

2° Moodustame jagatise $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}.$$

3° Leiame tuletise:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}.$$

Et siin nimetaja piirväärtus on 0, siis ei saa rakendada teoreemi jagatise piirväärtuse kohta ja murdu tuleb nii teisendada, et saaksime murdu nullile läheneva teguriga Δx ($\neq 0$) taandada. Selleks laiendame murdu avaldisega $\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}$.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x}+\Delta x+\sqrt{x})}=$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x+\Delta x-x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Seega,

kui $y=\sqrt{x}$, **siis** $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Ülesandeid.

180. Leia järgmiste funktsioonide tuletised.

a) $y=x$ d) $y=x^2+1$
b) $y=3x-2$ e) $y=-x^2+5$
c) $y=-2x+1$ f) $y=x^2+x$

181. Näita, et funktsiooni $y=x^3+x^2+x+1$ tuletiseks on funktsioon $y=3x^2+2x+1$.

4.2. FUNKTSIOONI TULETIS KIIRUSENA.

Selgitame, missugune tähendus on funktsiooni tuletisel siis, kui vaadeldavaks funktsiooniks on tee pikkus s, mis sõltub ajast t: $s=s(t)$.

Jälgime näiteks ülesvisatud kivi liikumist, kolvi liikumist silindris või mõnda muud sirgjooneliselt liikuvat keha. Olgu tee pikkuse valem $s=t^2+2t$, kus t on aeg, mis on mõõdetud sekundites, ja s on läbikäidud tee pikkus sentimeetrites. Selle valemi abil saab leida, et ajamomendiks $t_1=3$ sek. on läbitud tee pikkus $s_1=15$ cm.

Järgnevas tabelis esitame rea aja muute Δt, alates ajamomendist t_1, ja leiame neile vastavad tee pikkuse muudud Δs. Suhe $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ esitab keskmist kiirust aja muudu Δt vältel.

Δt	2	1	0,5	0,2	0,1	0,05	0,01
Δs	20	9	4,25	1,64	0,81	0,4025	0,0801
$\frac{\Delta s}{\Delta t}$	10	9	8,5	8,2	8,1	8,05	8,01

Paneme tähele, et aja muudu vähenedes läheneb keskmine kiirus suurusele $8\frac{\text{cm}}{\text{s}}$. Et leitud keskmise kiiruse väärtused aja muudu vähenedes iseloomustavad järjest paremini vaadeldava keha liikumise kiirust ajamomendil $t_1=3$ sek., siis nimetataksegi piirväärtust $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}$ keha liikumise **hetkeliseks kiiruseks** antud ajamomendil. Et see piirväärtus on funktsiooni tuletis, siis seaduse $s=s(t)$ järgi sirgjooneliselt liikuva keha hetkeliseks kiiruseks ajamomendil t_1 on $s'(t_1)$ ja mistahes ajamomendil t avaldub hetkeline kiirus kujul $s'(t)$ ehk, tähistades hetkelise kiiruse tähega v,

$$\boxed{v=s'(t)}$$

Seega,

funktsiooni tuletise füüsikaliseks tähenduseks on liikumise hetkeline kiirus.

Näiteks seaduse $s=t^2+2t$ järgi sirgjooneliselt liikuva keha kiirus ajamomendil t avaldub tuletisena $s'=2t+2$. Siit saame leida, et selle keha liikumise kiirus ajamomendil $t=5$ sek. on $12\frac{\text{cm}}{\text{s}}$. Sümbolites kirjutame seda järgmiselt:

$$s'(5)=12\frac{\text{cm}}{\text{s}} \quad \text{ehk} \quad v\,|_{t=5}=12\frac{\text{cm}}{\text{s}}.$$

Ülesandeid.

182. Punkt liigub sirgjooneliselt seaduse järgi

$s=5t+6$.

Leia liikumise keskmine kiirus:

a) esimese kuue sekundi jooksul;

b) ajavahemikus kolmanda sekundi lõpust kuni kuuenda sekundi lõpuni.

183. Punkt M kaugeneb liikumatust punktist A nii, et kaugus AM kasvab võrdeliselt aja ruuduga. 2 minutit pärast liikumise algust oli kaugus $AM=12$ meetrit. Leia liikumise keskmine kiirus:

a) esimese viie minuti jooksul;

b) ajavahemikus $t_1=4$ min. kuni $t_2=7$ min.

184. Keha liigub sirgjooneliselt seaduse järgi

$$s=t^3+\frac{3}{t}.$$

Leia liikumise keskmine kiirus ajavahemikus $t_1=4$ kuni $t_2=4+\Delta t$. Kui suur on keskmine kiirus, kui $\Delta t=2$; 1; 0,1; 0,03?

185. Vabalt langev keha liigub seaduse järgi

$$s=\frac{gt^2}{2},\ \text{kus}\ g=980\,\frac{\text{cm}}{\text{s}^2}.$$

Leia liikumise keskmine kiirus ajavahemikus $t_1=5$ sek. kuni $t_2=(5+\Delta t)$ sek. Kui suur on keskmine kiirus, kui $\Delta t=1$ sek.; 0,1 sek.; 0,05 sek.; 0,001 sek.? Leia langeva keha kiirus:

a) 5. sekundi lõpul;

b) 10. sekundi lõpul.

Leia langeva keha kiiruse valem mistahes ajamomendi t jaoks.

186. Kui kõva keha pöörleb ümber telje, siis pöördenurk φ on aja t funktsioon: $\varphi=f(t)$. Avalda:

1) pöörlemise keskmine nurkkiirus ajavahemiku Δt jooksul;

2) pöörlemise hetkeline nurkkiirus ajamomendil t.

187. Soojushulk Q, mis on vajalik anda kehale, et kuumutada teda mingilt algtemperatuurilt Θ_0 temperatuurini Θ, on temperatuuri funktsioon: $Q=g(\Theta)$. Avalda:

1) keha keskmine soojusmahtuvus keha kuumutamisel temperatuurilt Θ kuni temperatuurini $\Theta+\Delta\Theta$;

2) keha soojusmahtuvus temperatuuril Θ.

188. Kasutades teadaolevaid funktsioonide tuletisi, leia

a) seaduse järgi $s=t^2$ liikuva keha hetkeline kiirus ajamomentidel $t=-2$; 1; 3;

b) seaduse järgi $s=t^3$ liikuva keha hetkeline kiirus ajamomentidel $t=-1$; 0; 2;

c) seaduse järgi $s=\frac{1}{t}$ liikuva keha hetkeline kiirus ajamomentidel $t=-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; 2; 3.

189. Kaks maratonijooksjat läbisid esimese poolteise tunni jooksul distantsi vastavalt seaduste järgi $s=15t+1$ ja $s=16t$ (s kilomeetrites ja t tundides).

a) Kui pika maa oli kumbki võistleja läbinud esimese poole tunni ja esimese poolteise tunni jooksul?
b) Missugusel ajamomendil jooksid võistlejad kõrvuti?
c) Kui suur oli võistlejate kiirus esimese poole tunni lõpul? poolteise tunni lõpul? kõrvuti jooksmise momendil?

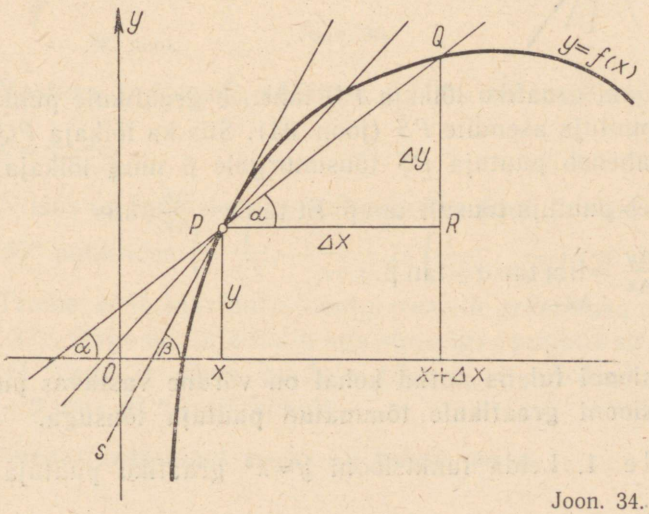
190. Sügavasse kraatrisse lasti kivi, mis langes seaduse järgi $s=5t^2$, kus s on mõõdetud meetrites ja t sekundites. Kui sügav oli kraater, kui kivi langes kraatri põhja 10 sekundiga? Kui suur oli kivi liikumise kiirus põhja langemise hetkel?

191. Leia seniitkahurist otse üles lastud kuuli kiirus 3 sekundit pärast lasku, kui kuuli algkiirus on $200\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

4.3. FUNKTSIOONI TULETISE GEOMEETRILINE TÕLGENDUS.

Olgu antud funktsioon $y=f(x)$. Teame, et $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Joonisel 34 on kujutatud funktsiooni $y=f(x)$ graafik. Selgitame nüüd, mis vastab sellel graafikul funktsiooni tuletisele. Valime argumendi mingi väärtuse x. Temale vastav punkt funktsiooni graafikul on $P(x;y)$. Muutugu nüüd argument Δx võrra.



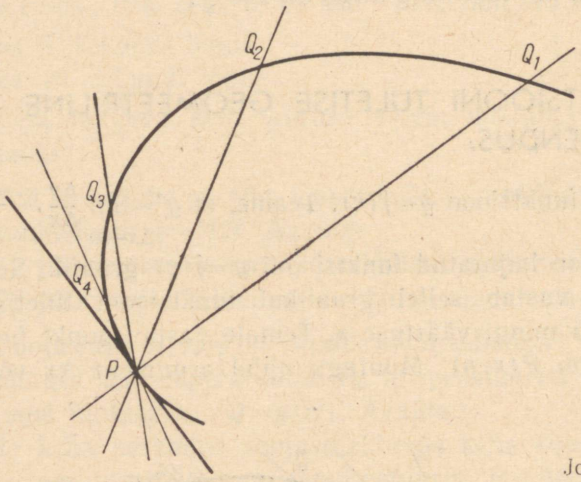
Joon. 34.

Argumendi muutunud väärtusele vastab graafikul punkt $Q(x+\Delta x;\ y+\Delta y)$. Kolmnurgast PQR näeme, et

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tan} \alpha,$$

kus α on graafiku lõikaja PQ tõusunurk ja seega $\operatorname{tan} \alpha$ selle lõikaja tõus. Vaatleme nüüd suurust Δx muutuva suurusena, mis hakkab lähenema nullile. Sel korral hakkab punkt Q lähenema punktile P. Et

joone puutuja on joone lõikaja piirseis, kui üks lõikepunkt läheneb teisele (joon. 35),



Joon. 35.

siis funktsiooni graafiku lõikaja PQ läheneb graafikule punktis P tõmmatud puutuja asendile PS (joon. 34). Siis ka lõikaja PQ tõusunurk α läheneb puutuja PS tõusunurgale β ning lõikaja tõus $\operatorname{tan} \alpha$ läheneb puutuja tõusule $\operatorname{tan} \beta$. Et $\operatorname{tan} \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, siis

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tan} \alpha = \operatorname{tan} \beta.$$

Seega,

funktsiooni tuletis antud kohal on võrdne vastavas punktis funktsiooni graafikule tõmmatud puutuja tõusuga.

Näide 1. Leida funktsiooni $y=x^3$ graafiku puutuja tõus kohal $x=1$.

Funktsiooni $y=x^3$ tuletis on $y'=3x^2$ ja $y'\big|_{x=1}=3$, mis ongi otsitav puutuja tõus (joon. 36).

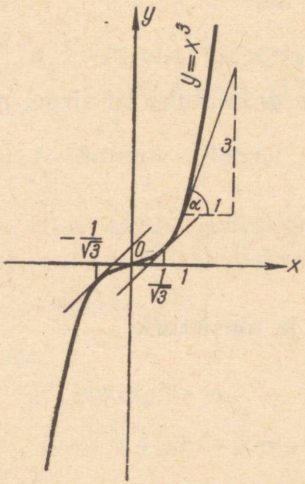
Näide 2. Missugustes punktides on funktsiooni $y=x^3$ graafiku puutuja tõusunurk 45°?

Kui puutuja tõusunurk on 45°, siis puutuja tõus on $\tan 45°=1$. Seega peame lahendama võrrandi

$$3x^2=1,$$

millest

$$x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}.$$



Joon. 36.

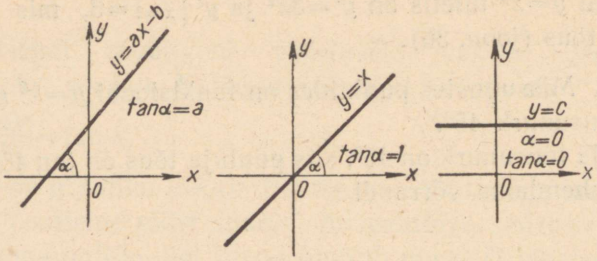
Vastava ordinaadi väärtuse leiame võrrandist $y=x^3$, s. t.

$$y=\pm\frac{1}{3\sqrt{3}}.$$

Niisiis on funktsiooni $y=x^3$ graafiku puutuja tõus 1 ja tõusunurk 45° punktides $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}};-\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)$ ja $\left(\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)$ (vt. joon. 36).

Teame, et lineaarfunktsiooni $y=ax+b$ graafikuks on sirgjoon (joon. 37). Sirge puutuja ühtib aga sirge igas punktis sirge endaga, s. t. et sirge ja tema puutuja tõusud on võrdsed. Sirgjoone $y=ax+b$ tõus on a ja järelikult

lineaarfunktsiooni $y=ax+b$ tuletis on a.



Joon. 37.

Nii on lineaarfunktsiooni $y=3x+7$ tuletis 3, $y=-5x+1$ tuletis -5 ja $y=x$ tuletis 1.

Viimast tulemust rõhutame eraldi lausena

argumendi tuletis on 1.

Et ka konstantse funktsiooni $y=c$ graafikuks on sirge, mille tõus on 0 ($y=0\cdot x+c$), siis

konstandi tuletis on 0.

Ülesandeid.

192. Leia parabooli $y=x^2$ puutuja tõus ja tõusunurk

a) koordinaatide alguspunktis,
b) kohal $x=2$,
c) kohal $x=-1$.

193. Leia kuupparabooli $y=x^3$ puutuja tõus ja tõusunurk
a) kohal $x=-0{,}5$;
b) kohal $x=1{,}3$;
c) kohal $x=\frac{3}{2}$.

194. Leia järgmiste funktsioonide graafiku puutuja tõus kohal $x=0$.

a) $y=2x$ c) $y=3-5x$
b) $y=-4x+1$ d) $y=-1-3x$

195. Leia punktid, kus parabooli $y=x^2$ puutuja tõus on

-5; $-\frac{3}{2}$; 0; 1,4; 100.

196. Leia kuupparabooli $y=x^3$ punktid, kus puutuja tõus on

3; 12; 27; 0,75; $\frac{3}{16}$.

Miks ei saa kuupparabooli $y=x^3$ puutuja tõus olla negatiivne?

197. Leia hüperbooli $y=\frac{1}{x}$ punktid, kus puutuja tõus on

-1, -4, $-\frac{9}{36}$, $-0{,}25$.

Miks ei saa hüperbooli $y=\frac{1}{x}$ puutuja tõus olla positiivne ega null?

4.4. FUNKTSIOONIDE SUMMA, KORRUTISE JA JAGATISE TULETISED.

1. Summa tuletis.

Olgu antud funktsioonid $f(x)$ ja $g(x)$. Nende tuletised on $f'(x)$ ja $g'(x)$. Ülesandeks on leida funktsiooni

$$y=f(x)+g(x)$$

tuletis.

1° Avaldame Δy:

$$\Delta y=f(x+\Delta x)+g(x+\Delta x)-f(x)-g(x).$$

2° Moodustame jagatise $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)+g(x+\Delta x)-f(x)-g(x)}{\Delta x}.$$

3° Et

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x)$$

ja

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}=g'(x),$$

siis teisendame eespool saadud $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ avaldist nii, et pärast piirväärtuse leidmist jõuaksimegi nende tuletisteni. Selleks rühmitame lugeja ja jagame kummagi rühma eraldi Δx-ga:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}+\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}.$$

Leiame tuletise:

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}+\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\right].$$

Et summa piirväärtus on võrdne liidetavate piirväärtuste summaga, siis

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}$$

ja seega

$$y'=f'(x)+g'(x)$$

ehk

$$\boxed{[f(x)+g(x)]'=f'(x)+g'(x)}$$

Kui oletada, et kumbki liidetavatest funktsioonidest või vähemalt üks neist avaldub ise kahe funktsiooni summana, näiteks

$$f(x)=h(x)+k(x)$$

ja seega

$$y=h(x)+k(x)+g(x),$$

siis tõestatu põhjal

$$f'(x)=h'(x)+k'(x)$$

ja

$$y'=h'(x)+k'(x)+g'(x)$$

ehk

$$\boxed{[h(x)+g(x)+k(x)]'=h'(x)+g'(x)+k'(x)}$$

Niisiis,

summa tuletis on võrdne liidetavate tuletiste summaga.

Näita, et kahe funktsiooni vahe tuletis on võrdne nende funktsioonide tuletiste vahega

2. Korrutise tuletis.

Olgu antud funktsioonid $f(x)$ ja $g(x)$. Nende tuletised on $f'(x)$ ja $g'(x)$. Ülesandeks on leida funktsiooni

$$y=f(x)\cdot g(x)$$

tuletis.

Rakendame siingi juba tuttavat eeskirja funktsiooni tuletise leidmiseks

1° $\Delta y=f(x+\Delta x)\cdot g(x+\Delta x)-f(x)\cdot g(x)$.

2° $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)\cdot g(x+\Delta x)-f(x)\cdot g(x)}{\Delta x}$.

3° Et siin jõuda pärast piirväärtuse leidmist avaldiseni, mis sisaldab antud tuletisi, selleks lahutame ja liidame lugejas $f(x)\cdot g(x+\Delta x)$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)\cdot g(x+\Delta x)-f(x)\cdot g(x+\Delta x)+f(x)\cdot g(x+\Delta x)-f(x)\cdot g(x)}{\Delta x}.$$

Nüüd rühmitame ja jagame kummagi rühma eraldi Δx-ga:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\cdot g(x+\Delta x)+f(x)\cdot\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}.$$

Leiame tuletise:

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}g(x+\Delta x)+$$

$$+\lim_{\Delta x\to 0}f(x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}.$$

Siit saame, et

$$\boxed{y'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)}$$

Kahe funktsiooni korrutise tuletis on võrdne esimese teguri tuletise ja teise teguri korrutise ning teise teguri tuletise ja esimese teguri korrutise summaga.

Näide.

$$(x\cdot\sqrt{x})'=x'\cdot\sqrt{x}+x\cdot(\sqrt{x})'=1\cdot\sqrt{x}+x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=$$

$$=\sqrt{x}+\frac{1}{2}\sqrt{x}=\frac{3}{2}\sqrt{x}.$$

Olgu korrutises üks tegureist konstant, siis

$$[cf(x)]' = c' \cdot f(x) + c \cdot f'(x),$$

ja et $c' = 0$, siis

$$\boxed{[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x)}$$

Konstandi ja funktsiooni korrutise tuletis on võrdne sellesama konstandi ja funktsiooni tuletise korrutisega.

3. Jagatise tuletis.

Olgu antud funktsioonid $f(x)$ ja $g(x)$, kus $g(x) \neq 0$. Nende tuletised on $f'(x)$ ja $g'(x)$. Ülesandeks on leida funktsiooni

$$y = \frac{f(x)}{g(x)}$$

tuletis.

Korrutame võrduse mõlemad pooled $g(x)$-ga ja leiame funktsiooni

$$f(x) = y \cdot g(x)$$

tuletise.

Korrutise tuletise valemi järgi

$$f'(x) = y' \cdot g(x) + y \cdot g'(x).$$

Siit avaldame y':

$$y' = \frac{f'(x) - y \cdot g'(x)}{g(x)}.$$

Asendame siin $y = \frac{f(x)}{g(x)}$, saame

$$y' = \frac{f'(x) - \frac{f(x)}{g(x)} \cdot g'(x)}{g(x)},$$

millest

$$\boxed{y' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}}$$

Jagatise tuletis on võrdne murruga, mille lugejaks on jagatava tuletise ja jagaja korrutise ning jagaja tuletise ja jagatava korrutise vahe ning nimetajaks on jagaja ruut.

Näide.

$$\left(\frac{\sqrt{x}}{x^2}\right)' = \frac{(\sqrt{x})' \cdot x^2 - \sqrt{x} \cdot (x^2)'}{(x^2)^2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot x^2 - 2x \cdot \sqrt{x}}{x^4} =$$

$$= \frac{x^2 - 4x^2}{2x^4\sqrt{x}} = -\frac{3}{2x^2\sqrt{x}} = -\frac{3\sqrt{x}}{2x^3}.$$

4.5. FUNKTSIOONI $y = x^n$ TULETIS.

1. Funktsiooni x^n tuletis, kui n on naturaalarv.

Eespool leidsime, et

$x' = 1 = 1 \cdot x^0$;
$(x^2)' = 2x^1$;
$(x^3)' = 3x^2$.

Leiame veel funktsioonide x^4 ja x^5 tuletise, kasutades korrutise leidmise eeskirja

$(x^4)' = (x^3 \cdot x)' = 3x^2 \cdot x + x^3 \cdot 1 = 3x^3 + x^3 = 4x^3$;
$(x^5)' = (x^3 \cdot x^2)' = 3x^2 \cdot x^2 + x^3 \cdot 2x = 3x^4 + 2x^4 = 5x^4$.

Paneme tähele huvitavat seaduspärasust:

$(x^n)' = nx^{n-1}$, kus $n = 1, 2, 3, 4$ või 5.

Analoogiliselt jätkates selgub, et valem

$$\boxed{(x^n)' = nx^{n-1}}$$

kehtib iga naturaalarvu n korral.

Näita selle valemi kehtivust, kui $n = 6, 8, 10$.

2. Funktsiooni x^n tuletis, kui n on negatiivne täisarv.

Tähistame $n = -m$, kus m on naturaalarv. Saame

$$x^n = x^{-m} = \frac{1}{x^m}.$$

Tuletise leidmiseks rakendame jagatise tuletise leidmise eeskirja:

$$\left(\frac{1}{x^m}\right) = \frac{1' \cdot x^m - 1 \cdot (x^m)'}{(x^m)^2} = \frac{-m \cdot x^{m-1}}{x^{2m}} = -m \cdot x^{-m-1}.$$

Seega

$$(x^n)' = (x^{-m})' = -m \cdot x^{-m-1} = n \cdot x^{n-1}$$

ehk, jättes vahepealsed kirjutised ära, saame

$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$, kus n on negatiivne täisarv.

Astme tuletise leidmise eeskiri on ühesugune nii positiivse kui ka negatiivse täisarvulise astendaja korral, s. t. *täisarvulise astendajaga astme tuletis on võrdne astendaja ja sama alusega, kuid ühe võrra vähendatud astendajaga astme korrutisega.*

Saadud valem kehtib ka siis, kui $n = 0$. Kontrolli seda!

Seega

$(x^n)' = nx^{n-1}$, kus n on mistahes täisarv.

4.6. NÄITEID FUNKTSIOONI TULETISE ARVUTAMISEKS.

Näide 1. Leida funktsiooni $2x^3$ tuletis.

Et $c \cdot f(x) = c \cdot f'(x)$ ja $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$, siis

$$(2x^3)' = 2 \cdot 3x^2 = 6x^2.$$

Näide 2. Leida funktsiooni $y = x^4 - x^2$ tuletis.

Et summa tuletis on võrdne liidetavate tuletiste summaga ja $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$, siis

$$y' = 4x^3 - 2x.$$

Näide 3. Leida funktsiooni

$$f(x) = x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x - 5$$

tuletis kohal $x = 1$.

Rakendame summa, korrutise, astme ja konstandi tuletise leidmise eeskirju:

$$f'(x) = 4x^3 + 3 \cdot 3x^2 - 2 \cdot 2x + 1 = 4x^3 + 9x^2 - 4x + 1;$$

$$f'(1) = 4 \cdot 1 + 9 \cdot 1 - 4 \cdot 1 + 1 = 10.$$

Ülesandeid.

198. Leia järgmiste funktsioonide tuletised.

a) $3x-7$ e) $mx+n$

b) x^2-3x+5 f) $c-\frac{p}{q}x$

c) $\frac{1}{2}x^3-5x^2+x$ g) ax^2+bx+c

d) $4x^4+3x^2-5x+6$ h) $ax+\frac{b}{x}$

199. Leia järgmiste funktsioonide tuletised: 1) avades enne sulud; 2) sulge avamata.

a) $x(x+1)$ d) $x^2(a^2+x^2)$

b) $(x+2)(x-3)$ e) $\frac{1}{x}(1-x)$

c) $(x-5)(x+5)$ f) $x\left(2-\frac{3}{x}\right)$

200. $f(x)=x^2$. Leia $f'(5)$; $f'(-2)$; $f'\left(-\frac{3}{2}\right)$.

201. $g(x)=x^3-6x^2+2$. Leia $g(0)$; $g(2)$; $g'(0)$; $g'(4)$; $g'(-3)$.

202. Leia järgmiste funktsioonide tuletised.

a) $\sqrt{x}+\sqrt{2}$ d) $\frac{x}{a^2+1}$ g) $\frac{v^5}{v^3-2}$

b) $\sqrt{x}(x^3-\sqrt{x}+1)$ e) $\frac{1-x^3}{\sqrt{\pi}}$ h) $\frac{2x^4}{b^2-x^2}$

c) $0{,}8y-\frac{y^3}{0{,}3}+\frac{1}{5y^2}$ f) $\frac{1}{t^2+t+1}$ i) $\frac{3}{(1-x^2)(1-2x^3)}$

203. Keha massiga 3 kg liigub sirgjooneliselt seaduse järgi

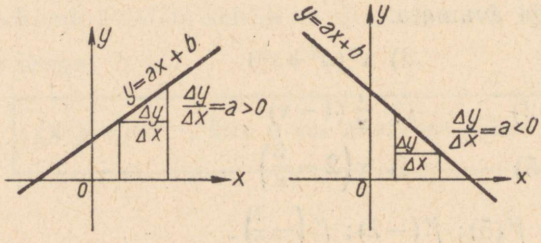
$s=1+t+t^2$,

kus s on avaldatud sentimeetrites ja t sekundites. Leia keha kineetiline energia $\left(\frac{mv^2}{2}\right)$ 5 sekundit pärast liikumise algust.

204. Ratas pöörleb nii, et pöördenurk on võrdeline aja ruuduga. Leia nurkkiirus ω 32 sekundit pärast liikumise algust, kui on teada, et esimese pöörde tegi ratas 8 sekundiga.

4.7. FUNKTSIOONI KASVAMINE JA KAHANEMINE.

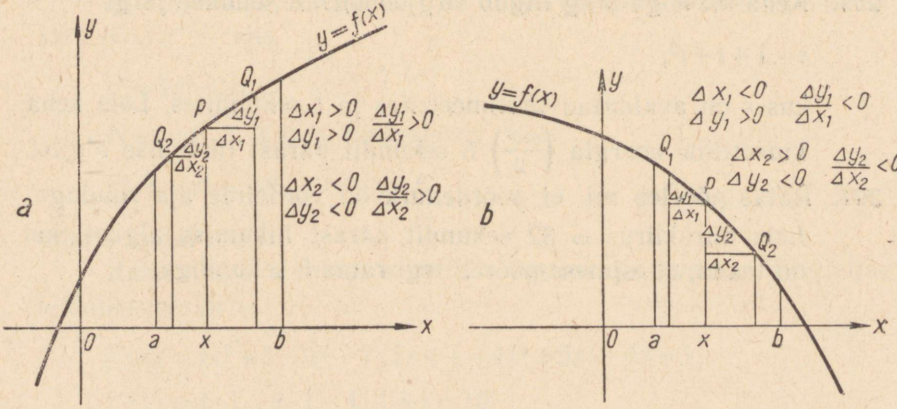
Lineaarfunktsiooni $y=ax+b$ põhiomaduse kohaselt on $a=\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Lineaarfunktsiooni nimetatakse kasvavaks, kui $\frac{\Delta y}{\Delta x}>0$, ning kahanevaks, kui $\frac{\Delta y}{\Delta x}<0$ (joon. 38). Nende tingimuste kaudu defineerime ka kõigi teiste funktsioonide kasvamise ja kahanemise. Et üldiselt



Joon. 38.

pole funktsioon kogu ulatuses kasvav ega kahanev, siis kõneleme funktsiooni kasvamisest ja kahanemisest vahemikus, kus eespool nimetatud tingimus on täidetud.

Vaatleme vahemikus (a, b) pidevat funktsiooni $y=f(x)$. Olgu selle funktsiooni graafikul punkt $P(x; y)$, kus $a<x<b$. Kui nüüd osutub, et selle vahemiku kõigis punktides $Q(x+\Delta x; y+\Delta y)$ on Δx ja Δy sama märgiga, s. t. $\frac{\Delta y}{\Delta x}>0$, siis on funktsioon $y=f(x)$

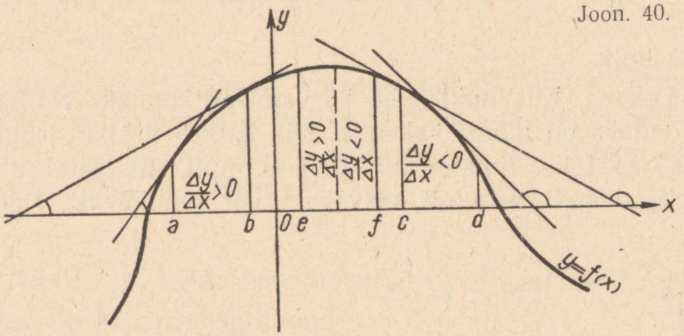


Joon. 39.

vahemikus (a, b) kasvav (joon. 39, a). Kui aga osutub, et Δx ja Δy on selle vahemiku ulatuses erimärgilised, s. t. $\frac{\Delta y}{\Delta x} < 0$, siis on funktsioon $y = f(x)$ vahemikus (a, b) kahanev (joon. 39, b).

Joonisel 40 on kujutatud mingi funktsiooni graafik. Jooniselt näeme, et vahemikus (a, b) on funktsioon kasvav, vahemikus (c, d) on funktsioon kahanev, vahemikus (e, f) pole aga funktsioon kogu vahemiku ulatuses kasvav ega ka kahanev.

Joon. 40.



Funktsiooni kasvamist ja kahanemist mingis punktis selgitame funktsiooni graafiku abil. Jälgime funktsiooni $y = f(x)$ graafikule tõmmatud puutujaid (joon. 40). Vahemikus, kus funktsioon on kasvav, on tema graafikule tõmmatud puutujad kasvavate lineaarfunktsioonide graafikud. Vahemikus aga, kus funktsioon on kahanev, on tema graafikule tõmmatud puutujad kahanevate lineaarfunktsioonide graafikud. Et funktsiooni graafikule mingis tema punktis tõmmatud puutuja tõus on võrdne funktsiooni tuletise väärtusega vastaval kohal, siis

kui funktsioon $y = f(x)$ on kasvav kohal $x = x_1$, on $f'(x_1) > 0$

ja

kui funktsioon $y = f(x)$ on kahanev kohal $x = x_1$, on $f'(x_1) < 0$.

Samuti vastupidi,

funktsioon $y = f(x)$ on kasvav kohal $x = x_1$, kui $f'(x_1) > 0$

ja

funktsioon $y = f(x)$ on kahanev kohal $x = x_1$, kui $f'(x_1) < 0$.

Nende argumendi väärtuste hulka, mille korral antud funktsioon on kasvav, nimetatakse selle funktsiooni **kasvamispiirkon-**

naks, ja nende argumendi väärtuste hulka, mille korral antud funktsioon on kahanev, nimetatakse selle funktsiooni **kahanemispiirkonnaks.**

Antud funktsiooni $y=f(x)$ kasvamispiirkonnaks on võrratuse

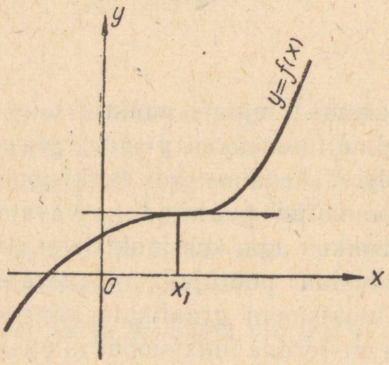
$$f'(x)>0$$

lahendite hulk ja kahanemispiirkonnaks võrratuse

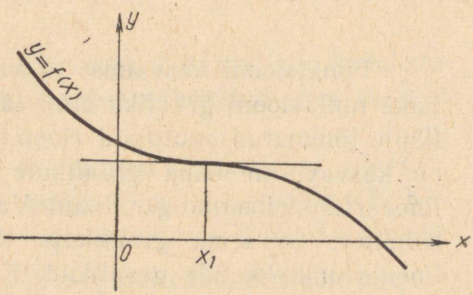
$$f'(x)<0$$

lahendite hulk.

Märkus. Kui funktsiooni kasvamispiirkonnaks või kahanemispiirkonnaks on mingi vahemik, mis katkeb üksiku argumendi väärtuse korral, kus funktsiooni tuletis on null, siis loetakse funktsioon sellel kohal vastavalt kasvavaks või kahanevaks (joon. 41 ja 42).



Joon. 41.



Joon. 42.

Näide 1. Kas funktsioon $y=x^2-3x+4$ on kohal $x=1$ kasvav või kahanev?

Avaldame esmalt funktsiooni tuletise:

$$y'=2x-3.$$

Seejärel leiame selle tuletise väärtuse, kui $x=1$:

$$y'|_{x=1}=2\cdot 1-3=-1<0.$$

Et antud funktsiooni tuletis on kohal $x=1$ negatiivne, siis on see funktsioon kohal $x=1$ kahanev.

Näide 2. Leida funktsiooni $y=x^3-3x^2+4x-5$ kasvamispiirkond ja kahanemispiirkond.

Et

$$y'=3x^2-6x+4,$$

siis on funktsiooni kasvamispiirkonnaks võrratuse

$$3x^2-6x+4>0$$

lahendite hulk ja kahanemispiirkonnaks võrratuse

$$3x^2-6x+4<0$$

lahendite hulk. Et esimene võrratus on rahuldatud argumendi x iga väärtuse korral, teisel võrratusel pole aga ühtegi lahendit, siis on antud funktsioon kogu ulatuses kasvav. Tema kasvamispiirkonna võime üles kirjutada nii:

$$-\infty<x<\infty.$$

Näide 3. Leida funktsiooni $y=\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2-2x+1$ kasvamispiirkond ja kahanemispiirkond.

Et

$$y'=2x^2-3x-2,$$

siis on kasvamispiirkonnaks võrratuse

$$2x^2-3x-2>0$$

lahendite hulk. See on: $x<-\frac{1}{2}$ ja $x>2$.

Kahanemispiirkonnaks on võrratuse

$$2x^2-3x-2<0$$

lahendite hulk, s. o.

$$-\frac{1}{2}<x<2.$$

Näide 4. Leida funktsiooni $y=x^3$ kasvamispiirkond ja kahanemispiirkond.

Et $y'=3x^2$, siis $y'|_{x=0}=0$ ja $y'|_{x\neq 0}>0$. Seega on funktsioon $y=x^3$ kasvav, kui $x<0$ ja $x>0$. Et kohal $x=0$ on funktsiooni tuletis 0, siis loetakse ka see koht funktsiooni kasvamispiirkonna hulka. Kasvamispiirkonnaks on seega

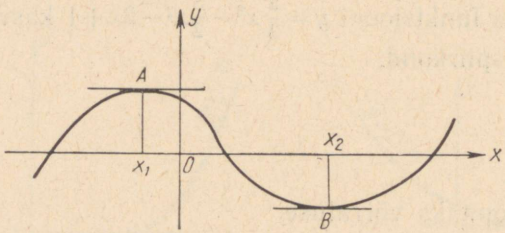
$$-\infty<x<\infty.$$

4.8. FUNKTSIOONI EKSTREEMUMKOHAD.

Argumendi väärtusi, kus funktsiooni kasvamine läheb üle kahanemisele või vastupidi, kus kahanemine läheb üle kasvamisele, nimetatakse selle funktsiooni **ekstreemumkohtadeks.** Nii on näites 3 (lk. 107) argumendi väärtused $-\frac{1}{2}$ ja 2 ekstreemumkohtadeks.

Ekstreemumkohad liigitatakse **maksimumkohtadeks** ja **miinimumkohtadeks.**

Argumendi väärtust, kus funktsiooni kasvamine läheb üle kahanemisele, nimetatakse selle funktsiooni **maksimumkohaks** ja argumendi väärtust, kus funktsiooni kahanemine läheb üle kasvamisele, nimetatakse selle funktsiooni **miinimumkohaks.** Vastavaid punkte funktsiooni graafikul nimetatakse **maksimumpunktideks** ja **miinimumpunktideks.** Nii on joonisel 43 punkt A maksi-



Joon. 43.

mumpunkt ja punkt B miinimumpunkt. Maksimumpunkte ja miinimumpunkte nimetatakse ka **ekstreemumpunktideks.**

Ekstreemumpunktis on puutuja paralleelne x-teljega, s. t. et puutuja tõusunurk on 0 ja seega puutuja tõus on samuti 0. Seega,

kui $x=x_1$ on funktsiooni ekstreemumkohaks, siis $f'(x_1)=0$;

s. t. et ekstreemumkohti tuleb otsida võrrandi $f'(x)=0$ lahendite hulgast.

Nagu juba teame, on tuletise nullkoht funktsiooni ekstreemumkohaks siis, kui tuletis muudab sellel kohal oma märki, s. t. kui sellel kohal funktsiooni kasvamine läheb üle kahanemisele või vastupidi, kahanemine läheb üle kasvamisele.

Näide 1. Leida funktsiooni $y=-3x^2+4x-5$ ekstreemumkoht.

Leiame funktsiooni tuletise $y'=-6x+4$ ja moodustame võrrandi

$$-6x+4=0.$$

Selle võrrandi lahend on $x=\frac{2}{3}$.

Et $y' \mid_{x<\frac{2}{3}} > 0$ ja $y' \mid_{x>\frac{2}{3}} < 0$, siis leitud lahend on ekstreemumkoht. Et siin toimub üleminek kahanemiselt kasvamisele, siis on see ekstreemumpunkt miinimumpunkt.

Näide 2. Leida joone $y=x^3-2x^2-4x+5$ ekstreemumpunktid.

Otsitavate punktide abstsissid on võrrandi

$$3x^2-4x-4=0$$

lahendite hulgas, s. o. kas $x_1=2$ või $x_2=-\frac{2}{3}$ või mõlemad.

Näita, et mõlemad leitud lahendid on ekstreemumkohad!

Et leida ekstreemumpunktide ordinaate, asetame leitud abstsissi väärtused joone võrrandisse:

$$y_1=2^3-2\cdot 2^2-4\cdot 2+5=-3,$$

$$y_2=\left(-\frac{2}{3}\right)^3-2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^2-4\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)+5=2\frac{25}{27}.$$

Seega on antud joone ekstreemumpunktideks

$$E_1(2;\ -3) \text{ ja } E_2\left(-\frac{2}{3};\ 2\frac{25}{27}\right).$$

E_1 on miinimumpunkt ja E_2 maksimumpunkt.

Ülesandeid.

205. Näita, et funktsioon $y=x^3+x$ on kogu ulatuses kasvav.

206. Missugustel x väärtustel on funktsioon $y=x^3-3x^2+7$ kahanev?

207. Leia järgmiste funktsioonide kasvamis- ja kahanemispiirkonnad.

a) $y=x^3-5x^2+3x-5$
b) $y=2x^3-15x^2+36x-24$
c) $y=2x^3-6x^2-18x+7$
d) $y=x^4-2x^2-5$
e) $y=x^5-5x^4+5x^3+1$

208. Selgita, kas funktsioon

$y=\sin x+\cos x$

on kohtadel $x_1=0$, $x_2=-\frac{\pi}{3}$ ja $x_3=\frac{\pi}{3}$ kasvav või kahanev.

209. Selgita, kas funktsioon

$y=\sin 2x+\cos 2x$

on kohtadel $x_1=0$, $x_2=\frac{\pi}{12}$, $x_3=-\frac{\pi}{12}$, $x_4=-\frac{\pi}{4}$, $x_5=\frac{\pi}{4}$ kasvav või kahanev.

210. Leia järgmiste funktsioonide kasvamis- ja kahanemispiirkonnad ning ekstreemumpunktid.

a) x^2-x-2

b) $-\frac{1}{3}x^2+2x-\frac{5}{3}$

c) $\frac{1}{2}x^2+2x+\frac{5}{2}$

d) x^3-3x

e) $\frac{1}{4}x^4-8x$

f) x^2-x^3

g) x^3-3x^2+2

h) $\frac{1}{3}x^3-x^2+\frac{1}{3}$

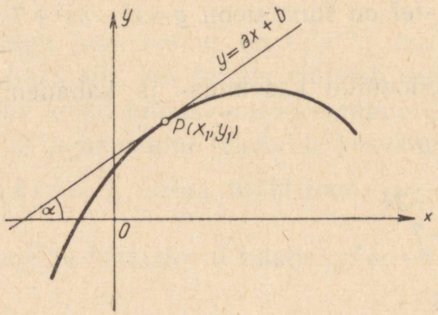
i) $0{,}1x^4-1{,}3x^2+3{,}6$

j) $-1\frac{1}{3}x^3+x-1$

4.9. JOONE PUUTUJA VÕRRAND.

Olgu antud funktsioon $y=f(x)$. Ülesandeks on leida funktsiooni $f(x)$ graafikule punktis $P(x_1; y_1)$ tõmmatud puutuja võrrand (joon. 44). Selleks peame kindlaks tegema, missugused on sirgjoone võrrandis $y=ax+b$ konstantide a ja b väärtused. Et a on puutuja tõus, siis

$a=f'(x_1)$.



Joon. 44.

Sirgjoone võrrandisse jääb seega veel üks tundmatu parameeter b:

$$y=f'(x_1)\cdot x+b.$$

Selle saame määrata teades, et puutuja läbib punkti $(x_1; y_1)$. Seega peavad viimast võrrandit rahuldama väärtused $x=x_1$ ja $y=y_1$, s. t. et peab kehtima võrdus

$$y_1=f'(x_1)\cdot x_1+b,$$

millest

$$b=y_1-f'(x_1)\cdot x_1.$$

Otsitav võrrand on

$$y=f'(x_1)\cdot x+y_1-f'(x_1)\cdot x_1.$$

Näide. Leida parabooli $y=2x^2-3x+4$ puutuja kohal $x=1$.

Kui $x=1$, siis $y=3$. Seega tuleb leida paraboolile punktis (1; 3) tõmmatud puutuja võrrand $y=ax+b$.

Leiame a:

$y'=4x-3$ ja $y'|_{x=1}=1$, seega $a=1$.

b leiame võrrandist:

$3=1\cdot 1+b.$

Siit

$b=2$

ja otsitav puutuja võrrand on

$y=x+2.$

Ülesandeid.

211. Leia võrrand sirgjoonele, mis läbib punkti $A(2; -3)$ ja mille tõus on 5.

212. Leia võrrand sirgjoonele, mis läbib punkti $B(-1; -4)$ ja mille tõusunurk on 135°.

213. Leia võrrand sirgjoonele, mis läbib sirgete $y=3x-1$ ja $y=-2x+3$ lõikepunkti ja on

a) paralleelne sirgega $y=-0{,}3x$,

b) paralleelne sirgega $\frac{x}{3}+\frac{x}{4}=1$.

214. Leia võrrand sirgjoonele, mis läbib sirge $y=3x-2$ ja ringjoone $x^2+y^2=26$ lõikepunkti ja mille tõusunurk on 100°. (Kaks lahendit.)

215. Leia võrrand parabooli $y=x^2+2x-1$ puutujale punktis, mille abstsiss on 1.

216. Leia võrrand parabooli $y=-3x^2-6x+12$ puutujale punktis, mille ordinaat on 3.

217. Leia joone $y=x^3-x^2+x$ puutujale võrrand punktis, mille abstsiss on -1.

218. Leia punkt, milles joonele $y=x^2-3x-1$ tõmmatud puutuja tõus on 1.

Kordamisülesanded.

219. Leia järgmiste funktsioonide nullkohad, positiivsus- ja negatiivsuspiirkonnad, ekstreemumkohad ning kasvamis- ja kahanemispiirkonnad.

1) $y=x^2-8x+12$
2) $y=4x^2-5x+3$
3) $y=-x^2+2x+3$
4) $y=-5x^2+12x-9$

Joonesta leitud andmete põhjal nende funktsioonide graafikud.

220. Leia järgmiste funktsioonide nullkohad, positiivsus- ja negatiivsuspiirkonnad, ekstreemumkohad ning kasvamis- ja kahanemispiirkonnad.

1) $y=3x^3-13x^2+13x-3$
2) $y=x^3-x^2+x-1$
3) $y=x^4-5x^2+4$
4) $y=x^4-24x^2-25$

Joonesta leitud andmete põhjal nende funktsioonide graafikud.

221. Tee kindlaks järgmiste funktsioonide määramispiirkond ja kas ta on paarisfunktsioon või paaritu funktsioon. Leia nullkohad, positiivsus- ja negatiivsuspiirkonnad, ekstreemumkohad ning kasvamis- ja kahanemispiirkonnad.

1) $y=\frac{x-3}{x-5}$
2) $y=\frac{3x+7}{2x+3}$
3) $y=\frac{2(x+2)}{x+4}$
4) $y=\frac{x-5}{3(x+3)}$

Leia funktsiooni piirväärtus, kui argument läheneb nimetaja nullkohale paremalt ja kui argument läheneb nimetaja nullkohale vasakult. Joonesta leitud andmete põhjal nende funktsioonide graafikud.

5. EKSPONENTFUNKTSIOON JA LOGARITMFUNKTSIOON.

5.1. EKSPONENTFUNKTSIOONI MÕISTE.

1. Irratsionaalarvulise astendajaga aste.

Teame astme a^m tähendust juhul, kui astendaja m on mistahes ratsionaalarv.

Millega võrduvad järgmised astmed, kus m ja n on naturaalarvud:

$$a^n,\ a^{-m},\ a^{\frac{m}{n}},\ a^{-\frac{m}{n}},\ a^0?$$

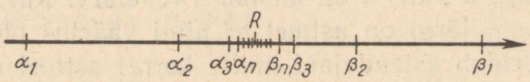
Järgnevalt selgitame, mida mõista irratsionaalarvulise astendajaga astme all.

Olgu r irratsionaalarv ja $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ tema ratsionaalarvulised lähendid puuduga ning $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \ldots$ tema ratsionaalarvulised lähendid liiaga. Sealjuures

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n < \ldots$$

ja

$$\beta_1 > \beta_2 > \ldots > \beta_n > \ldots$$



Joon. 45.

Jälgides jooniselt 45 vahemikke (α_1, β_1), (α_2, β_2), $\ldots$, (α_n, β_n), $\ldots$ näeme, et iga järgnev vahemik asetseb eelmise sees. Irratsionaalarvule r vastav punkt R asetseb aga kõigis neis vahemikes, s. t. et

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} \beta_n = r.$$

Vaadeldes näiteks vahemikke

(1; 2), (1,4; 1,5), (1,41; 1,42), (1,414; 1,415),
(1,4142; 1,4143), (1,41421; 1,41422) jne.

paneme tähele, et iga järgnev vahemik on eelmise sees. Kõigis neis vahemikes asetseb aga irratsionaalarv $\sqrt{2}$ ja ta on piirväärtuseks arvujadadele

1; 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; 1,41421; ...

ja

2; 1,5; 1,42; 1,415; 1,4143; 1,41422; ...

Moodustame nüüd kaks rühma ratsionaalarvulise astendajaga astmeid

$$a^{\alpha_1}, a^{\alpha_2}, \ldots, a^{\alpha_n}, \ldots$$

ja

$$a^{\beta_1}, a^{\beta_2}, \ldots, a^{\beta_n}, \ldots$$

Siingi on vahemik $(a^{\alpha_2}, a^{\beta_2})$ vahemikus $(a^{\alpha_1}, a^{\beta_1})$, vahemik $(a^{\alpha_3}, a^{\beta_3})$ vahemikus $(a^{\alpha_2}, a^{\beta_2})$ jne. ja siingi eksisteerib piirväärtus, mis rahuldab tingimust

$$\lim_{n\to\infty} a^{\alpha_n} = \lim_{n\to\infty} a^{\beta_n}$$

Seda piirväärtust nimetataksegi irratsionaalarvulise astendajaga astmeks a^n.

2. Eksponentfunktsiooni mõiste.

Vaatleme astmeid a^x, kus x on mistahes reaalarv. Kui $a>0$, siis astme definitsiooni järgi on astmel a^x alati väärtus olemas. Kui aga $a<0$, siis leidub astendajaid, mille korral astmel reaalarvuline väärtus puudub. Näiteks kui $a=-4$ ja $x=\frac{1}{2}$, siis $a^x=\sqrt{-4}$.

Funktsiooni a^x, kus x on argument ja $a>0$ (välja arvatud $a=1$), nimetatakse eksponentfunktsiooniks.

Tingimus $a \neq 1$ on võetud definitsiooni seepärast, et eksponentfunktsiooni a^x väärtuseks juhul, kui $a=1$, on konstant 1.

Eksponentfunktsiooni a^x määramispiirkonnaks on kogu arvtelg, s. t. $-\infty < x < \infty$. Kui eksponentfunktsioonini jõutakse aga mingi konkreetse ülesande lahendamisel, võib eksponentfunktsiooni määramispiirkonnaks olla ainult osa reaalarvudest. Näitena vaatleme järgmist ülesannet.

Ülesanne. Paberipoognast valmistatakse väikesi kaardikesi. Selleks murtakse poogen pooleks, saadud pooled omakorda pooleks jne. Kokku poolitatakse 8 korda. Mitu kaardikest saadakse? Mitu kaardikest saadakse pärast x-kordset poolitamist?

1. poolitamise tulemusena saadakse 2^1 kaarti;

2. „ „ „ 2^2 „ ;
3. „ „ „ 2^3 „ ;
. . . . . .
8. „ „ „ 2^8 „ ;
x „ „ „ 2^x „ .

Seega saadakse pärast 8-kordset poolitamist $2^8 = 256$ kaarti ja pärast x-kordset poolitamist 2^x kaarti.

Siin saadud eksponentfunktsiooni määramispiirkonda kuuluvad ainult positiivsed täisarvud.

5.2. VÕRRATUSE OMADUSI.

1° Olgu a, b, c ja d positiivsed reaalarvud, kusjuures

$$a > b \quad \text{ja} \quad c > d.$$

Et võrratuse poolte korrutamisel ühe ja sama positiivse arvuga saame samapidise võrratuse, siis

$$ac > bc \quad \text{ja} \quad bc > bd.$$

Siit järeldub, et

$$ac > bd,$$

s.t. *positiivsete liikmetega samapidiste võrratuste vastavate poolte korrutamisel saame samapidise võrratuse.*

Näiteks olgu antud võrratused

$$3 < 5 \quad \text{ja} \quad 8 < 13,$$

siis

$$3 \cdot 8 < 5 \cdot 13,$$

s. o.

$$24<65.$$

Järeldus. Korrutades võrratuste $a>b$ ja $a>b$ vastavad pooled ($a>0$ ja $b>0$), saame

$$a^2>b^2.$$

Saadud tulemust omakorda võrratuse $a>b$ vastavate pooltega korrutades saame

$$a^3>b^3$$

jne. Üldiselt

$$a^n>b^n,$$

kus n on positiivne täisarv.

Niisiis, *positiivsete liikmetega võrratuse mõlemat poolt ühe ja sama naturaalarvuga astendades saame samapidise võrratuse.*

Näiteks saame võrratusest

$$3<5,$$

et

$$9<25,\ 27<125,\ 81<625 \text{ jne.}$$

2° Olgu a ja b positiivsed reaalarvud ja sealjuures $a>b$. Väidame, et

$$\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}.$$

Selle võrratuse kehtivuse tõestamiseks näitame, et vastupidine võrratus ega võrdus kehtida ei saa. Niisiis, teeme vastuväitelise oletuse, et

$$\sqrt[n]{a}\leqslant\sqrt[n]{b}.$$

Omaduse 1° põhjal peab siis kehtima ka võrratus

$$(\sqrt[n]{a})^n\leqslant(\sqrt[n]{b})^n$$

ehk

$$a\leqslant b.$$

See võrratus on aga vastuolus eeldusega, s. o. $a>b$. Seega vastuväiteline oletus ei saa kehtida ja jääb ainus võimalus, et

$$\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b},$$

s. t. *positiivsete liikmetega võrratuse mõlemat poolt sama juurijaga juurides saame samapidise võrratuse.*

Siin vaadeldud kahest võrratuse omadusest järeldub, et *positiivsete liikmetega võrratuse mõlemat poolt ühe ja sama positiivse ratsionaalarvuga astendades saame samapidise võrratuse.*

Tõepoolest, olgu $a>0$ ja $b>0$ ning sealjuures

$$a>b.$$

Olgu m ja n positiivsed täisarvud. Omaduse 1° põhjal

$$a^m>b^m$$

ja omaduse 2° põhjal

$$a^{\frac{m}{n}}>b^{\frac{m}{n}}.$$

3° Olgu a ja b positiivsed reaalarvud ning

$$a>b.$$

Olgu r positiivne irratsionaalarv. Saab näidata, et ka nüüd

$$a^r>b^r.$$

Nii võime üldiselt öelda, et

positiivsete liikmetega võrratuse mõlemat poolt ühe ja sama positiivse reaalarvuga astendades saame samapidise võrratuse.

Siit järeldub (kui x on positiivne reaalarv), et

kui $a>0$, *siis* $a^x>0$,
kui $a>1$, *siis* $a^x>1$,
kui $0<a<1$, *siis* $0<a^x<1$.

5.3. EKSPONENTFUNKTSIOONI UURIMINE.

Funktsiooni uurimisel tehakse kindlaks:

1) *määramispiirkond*;
2) *kas antud funktsioon on paaris- või paaritu funktsioon või ei kumbki*;
3) *nullkohad;*
4) *positiivsus- ja negatiivsuspiirkonnad;*
5) *kasvamis- ja kahanemispiirkonnad;*
6) *ekstreemumkohad.*

Uurimistulemused annavad ülevaate funktsiooni muutumisest ja seetõttu saab uurimistulemuste põhjal ka kergesti skitseerida funktsiooni graafiku. Ülesandeid 219—221 lahendades olemegi seda juba teinud.

Uurime nüüd eksponentfunktsiooni $y=a^x$.

1) Definitsiooni põhjal on eksponentfunktsioon a^x määratud x iga reaalarvulise väärtuse korral, s. t. et

eksponentfunktsiooni määramispiirkonnaks on vahemik $-\infty<x<\infty$.

2) Et $a^{-x}=\frac{1}{a^x}$, siis ei kehti siin ei paaris- ega paaritu funktsiooni tingimus. Järelikult

eksponentfunktsioon pole ei paaris- ega paaritu funktsioon.

3) ja 4) Et $a^x>0$ x iga väärtuse korral, siis

eksponentfunktsioonil pole nullkohti, positiivsuspiirkonnaks on vahemik $-\infty<x<\infty$, negatiivsuspiirkond puudub.

5) Näitame nüüd, et

eksponentfunktsioon $y=a^x$ on kasvav, kui $a>1$, ja kahanev, kui $0<a<1$.

Kasutame selleks funktsiooni ja argumendi muutude kaudu antud kasvamise ja kahanemise definitsioone (vt. lk. 105).

Avaldame Δy:

$$\Delta y=a^{x+\Delta x}-a^x=a^x(a^{\Delta x}-1).$$

Eksponentfunktsiooni definitsiooni järgi $a>0$. Et positiivse arvu aste on alati positiivne arv, siis saadud korrutise esimene tegur on positiivne, s. t. $a^x>0$.

Olgu $a>1$ ja $\Delta x>0$, siis $a^{\Delta x}>1$ ehk $a^{\Delta x}-1>0$, ja seega on vaadeldaval juhul ka teine tegur Δy avaldises positiivne. Siit $\Delta y=a^x(a^{\Delta x}-1)>0$ ja seega $\frac{\Delta y}{\Delta x}>0$. Näita, et samale tulemusele jõuame ka siis, kui $\Delta x<0$.

Niisiis, *kui* $a>1$, *on eksponentfunktsioon* a^x *kasvav* x *iga väärtuse korral.*

Kui $0<a<1$ ja $\Delta x>0$, siis $a^{\Delta x}<1$ ehk $a^{\Delta x}-1<0$, ja seega $\Delta y=a^x(a^{\Delta x}-1)<0$ ning $\frac{\Delta y}{\Delta x}<0$.

Näita, et samale tulemusele jõuame ka siis, kui $\Delta x<0$.

Niisiis, *kui* $0<a<1$, *siis on eksponentfunktsioon* a^x *kahanev* x *iga väärtuse korral.*

6) Et eksponentfunktsioon on kasvav, kui $a>1$, ja kahanev, kui $0<a<1$, siis

eksponentfunktsioonil pole ekstreemumkohti.

Eksponentfunktsiooni kasvamisest ja kahanemisest ning tõsiasjast, et $a^0=1$, saab veel järeldada, et

1° kasvava eksponentfunktsiooni korral peavad negatiivsetele argumendi väärtustele vastavad funktsiooni väärtused jääma 0 ja 1 vahele, positiivsetele argumendi väärtustele vastavad funktsiooni väärtused peavad olema suuremad kui 1, s. t.

kui $a>1$ ja $x<0$, siis $0<a^x<1$

ja

kui $a>1$ ja $x>0$, siis $a^x>1$.

Järeldus:

kui $a>1$, siis $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x=0$ ja $\lim\limits_{x\to\infty} a^x=\infty$.

2° Kahaneva eksponentfunktsiooni korral peavad negatiivsetele argumendi väärtustele vastavad funktsiooni väärtused olema suuremad kui 1 ja positiivsetele argumendi väärtustele vastavad funktsiooni väärtused peavad olema 1 ja 0 vahel, s. t.

kui $0<a<1$ ja $x<0$, siis $a^x>1$

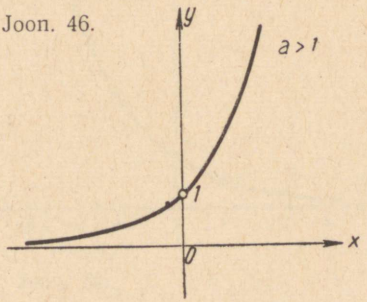
ja

kui $0<a<1$ ja $x>0$, siis $1>a^x>0$.

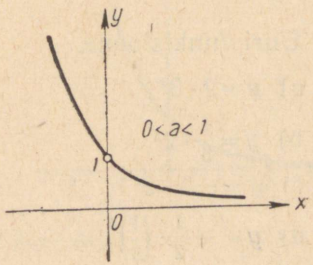
Järeldus:

kui $0<a<1$, siis $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x=\infty$ ja $\lim\limits_{x\to\infty} a^x=0$.

Joon. 46.



Joon. 47.



Eksponentfunktsiooni omaduste põhjal on konstrueeritud tema graafik juhul, kui $a>1$, joonisel 46, ja juhul, kui $0<a<1$, joonisel 47.

Suurema täpsusega graafiku saamiseks tuleb leida selle graafiku mõne punkti koordinaadid. Järgnevates tabelites on see tehtud funktsioonide $y=2^x$, $y=3^x$, $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ ja $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ jaoks.

x	-3	-2	-1	1	2	3
2^x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	2	4	8

x	-3	-2	-1	1	2	3
3^x	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	3	9	27

x	-3	-2	-1	1	2	3
$\left(\frac{1}{2}\right)^x$	8	4	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

x	-3	-2	-1	1	2	3
$\left(\frac{1}{3}\right)^x$	27	9	3	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$

Joonistel 48—51 on esitatud nende funktsioonide graafikud.

Ülesandeid.

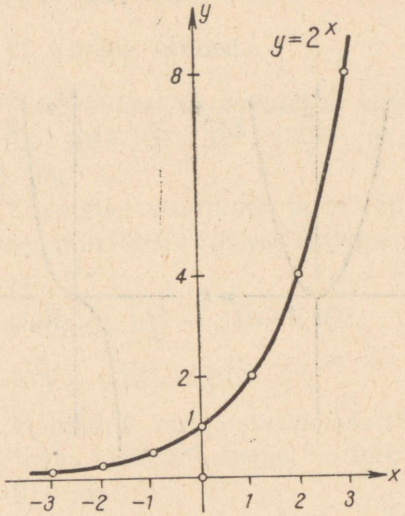
222. Uuri funktsioone.

a) $y=2\cdot 3^x$

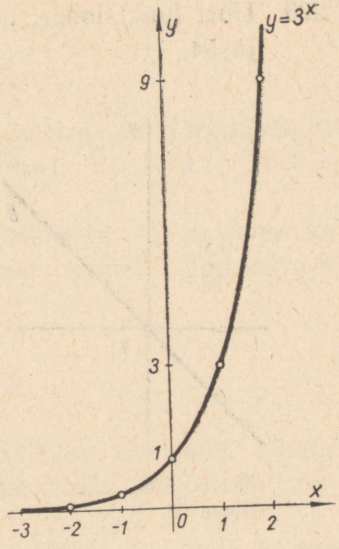
b) $y=\frac{1}{3}\cdot 2^x$

c) $y=-3\cdot 2^x$

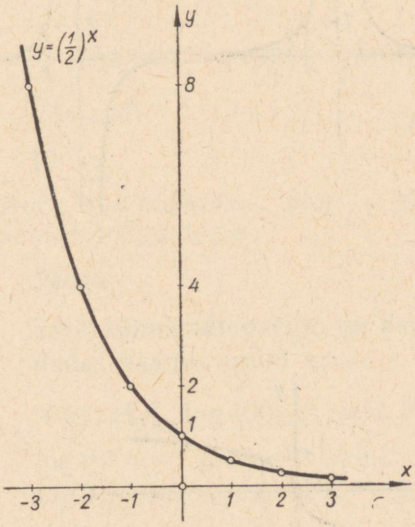
d) $y=-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x$



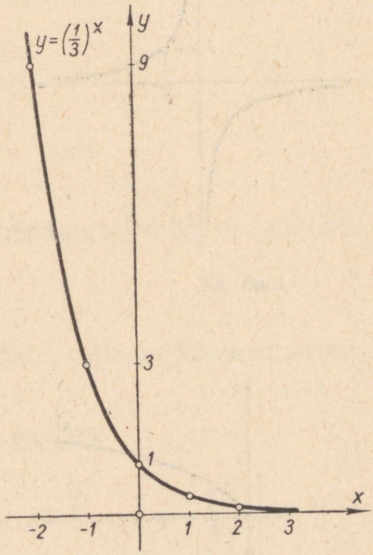
Joon. 48.



Joon. 49.

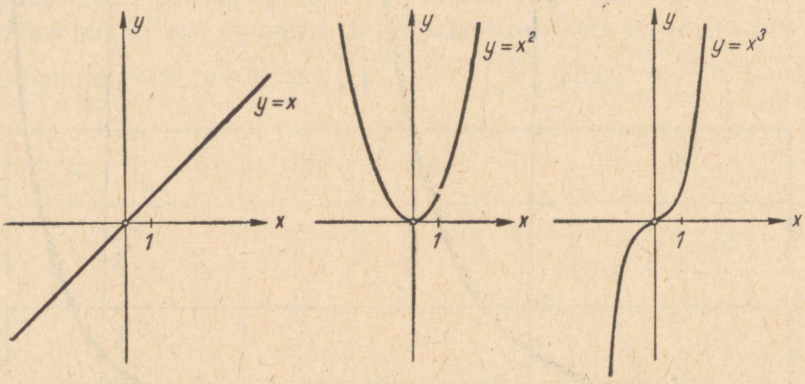


Joon. 50.

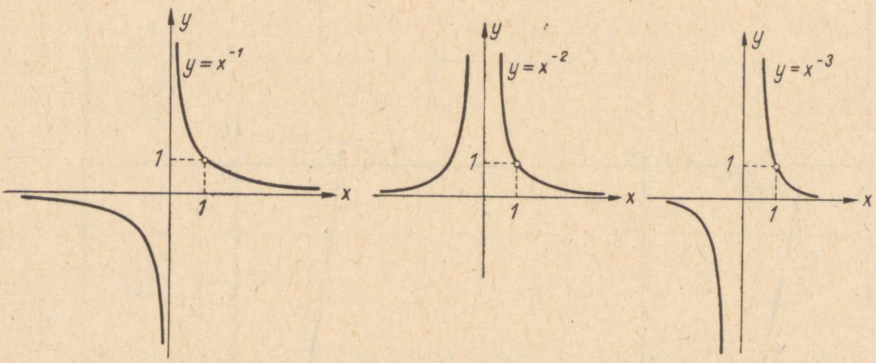


Joon. 51.

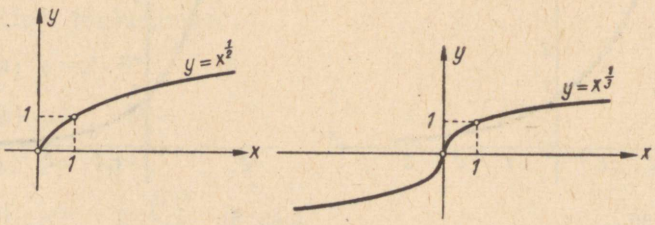
223. Uuri funktsioone, mille graafikud on antud joonistel 52, 53 ja 54.



Joon. 52.



Joon. 53.



Joon. 54.

5.4. KÜMNENDLOGARITM.

1. Kümne astmed.

Täisarvulise astendajaga kümne astmed on järguühikud: $10^1=10$, $10^2=100$, $10^3=1000$ jne.; $10^0=1$, $10^{-1}=0{,}1$, $10^{-2}=0{,}01$ jne.

Kasutades ruutjuure ja kuupjuure tabeleid, saame leida ka mõnede murruliste astendajatega kümne astmete ligikaudseid väärtusi.

Näiteks: $10^{\frac{1}{2}}=\sqrt{10}=3{,}162$,

$10^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{10^2}=4{,}642$.

Mõnikord on otstarbekas järguühikuid kirjutada kümne astmetena: 1 000 000 asemel on lihtsam kirjutada 10^6; 0,00001 asemel 10^{-5} jne.

Leia eeskiri, mille järgi saab järguühikut kirjutada kümne astmena!

Ülesandeid.

224. Leia tabelite abil $10^{\frac{1}{4}}$, $10^{\frac{3}{4}}$, $10^{-\frac{1}{2}}$, $10^{-\frac{3}{2}}$, $10^{\frac{1}{3}}$, $10^{\frac{4}{3}}$.

2. Kümnendlogaritmi definitsioon.

Võrrandi

$10^x=a$

lahendit x *nimetatakse arvu* a **kümnendlogaritmiks** *ja tähistatakse sümboliga* $\log a$.

Seega

arvu kümnendlogaritm on astendaja, millega kümmet astendades saame antud arvu.

Näiteid. $\log 100=2$, sest $10^2=100$;

$\log 0{,}1=-1$, sest $10^{-1}=0{,}1$;

$\log 2=0{,}3010$, sest $10^{0{,}3010}=2$.[1]

[1] Kuigi siin ei kehti täpne võrdus, on kokku lepitud kasutada arvu logaritmi üleskirjutamisel võrdusmärki.

Üldiselt,

$$\log a = b, \text{ kui } 10^b = a$$

Et arvu a kümnendlogaritm (lühidalt $\log a$) tähendab astendajat, millega kümmet astendades saame arvu a, siis peab kehtima samasus

$$10^{\log a} = a$$

Näiteid.

$10^{\log 100} = 100$;

$10^{\log 0{,}1} = 0{,}1$;

$10^{\log 2} = 2$ jne.

Märkus. Negatiivsetel arvudel ja arvul 0 puudub kümnendlogaritm, sest ei ole olemas astendajat, millega kümmet astendades saaksime negatiivse arvu või arvu null.

Ülesandeid.

225. Leia järgmised kümnendlogaritmid:
log 10 000, log 1000, log 10, log 1, log 0,1, log 0,01, log 0,001.

226. Sõnasta eeskiri, mille järgi saab leida kümnendlogaritmi järguühikutest.

227. Kasutades samasust $10^{\log a} = a$, arvuta:
$10^{\log 2}$, $10^{\log 7}$, $10^{\log 1}$, $10^{\log 2{,}5}$.

228. Kirjuta järgmised arvud kümne astmetena:

3, 5, 0,7, b, x, ab, $\frac{a}{b}$.

229. Teisendades antud astmed astmete korrutiseks, leia:
$10^{\log 2+\log 3}$, $10^{\log 4+\log 3}$, $10^{\log 5+\log 2}$,
$10^{\log 3+\log 5+\log 2}$, $10^{1+\log 3}$.

230. Teisendades antud astmed astmete jagatiseks, leia:
$10^{\log 6-\log 2}$, $10^{\log 12-\log 4}$, $10^{\log 8-\log 2-\log 2}$,
$10^{2-\log 5}$, $10^{\log 8-\log 2+\log 2}$.

231. Teisendades antud astmed astme astmeks, leia:

$10^{2\log 5}$, $10^{3\log 3}$, $10^{-2\log 4}$, $10^{\frac{1}{2}\log 4}$.

5.5. LOGARITMI DEFINITSIOON.

On antud eksponentfunktsioon a^x, kus $a>0$ ja $a\neq 1$, ning positiivne arv b. Ülesandeks on leida argumendi x väärtus, mille puhul funktsiooni väärtuseks on b, s. t. tuleb leida lahend võrrandile

$$a^x=b.$$

Selle võrrandi lahendit x nimetatakse arvu b logaritmiks alusel a ja tähistatakse sümboliga

$$\log_a b.$$

Seega,

antud arvu logaritmiks alusel a nimetatakse astendajat, millega alust a astendades saame antud arvu.

Näiteid.

1. $\log_5 25=2$, sest $5^2=25$.
2. $\log_3 \frac{1}{27}=-3$, sest $3^{-3}=\frac{1}{27}$.
3. $\log_9 3=\frac{1}{2}$, sest $9=3$.

Üldiselt,

$$\log_a b=c, \text{ kui } a^c=b$$

Et arvu logaritm alusel a tähendab astendajat, millega arvu a astendades saame b, siis peab kehtima samasus

$$a^{\log_a b}=b$$

Näiteid.

1. $2^{\log_2 7}=7$.
2. $5^{\log_5 \frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$.
3. $8^{\log_2 3}=(2^3)^{\log_2 3}=(2^{\log_2 3})^3=3^3=27$.
4. $5^{\log_5 4+\log_5 3}=5^{\log_5 4}\cdot 5^{\log_5 3}=4\cdot 3=12$.
5. $a^{\log_a 8-\log_a 2}=a^{\log_a 8}:a^{\log_a 2}=8:2=4$.

Ülesandeid.

232. Leia aste ja avalda saadud võrdusest astendaja.

a) 4^3 d) $(-3)^3$ g) $4^{\frac{1}{2}}$

b) 2^5 e) $(-2)^6$ h) $27^{\frac{1}{3}}$

c) 5^4 f) $(-4)^3$ i) $16^{\frac{1}{4}}$

233. Leia:

a) $\log_5 25$ e) $\log_2 16$

b) $\log_2 \frac{1}{8}$ f) $\log_3 \frac{1}{81}$

c) $\log_9 81$ g) $\log_6 36$

d) $\log_{11} 121$ h) $\log_5 125$

234. Leia:

a) $\log_7 49$ b) $\log_2 \frac{1}{32}$ c) $\log_6 216$ d) $\log_3 81$

e) $\log_5 625$ f) $\log_{25} 625$ g) $\log_9 729$ h) $\log_4 64$

235. Leia x.

a) $\log_3 \frac{1}{9} = x$ d) $\log_6 \frac{1}{216} = x$

b) $\log_4 \frac{1}{64} = x$ e) $\log_7 \frac{1}{343} = x$

c) $\log_5 \frac{1}{625} = x$ f) $\log_8 \frac{1}{512} = x$

236. Leia x.

a) $\log_5 \sqrt{5} = x$ d) $\log_4 1 = x$

b) $\log_4 \sqrt[3]{4} = x$ e) $\log_8 1 = x$

c) $\log_6 6 = x$ f) $\log_{75} 1 = x$

237. Leia x, kui

a) $\log_2 x = 5$; b) $\log_{\frac{1}{2}} 4 = x$; c) $\log_x 2 = 2$;

d) $\log_{\frac{1}{3}} x = -3$; e) $\log_2 \frac{1}{8} = x$; f) $\log_x 0{,}125 = -2$;

g) $\log_2 x = 4$; h) $\log_{0,1} 10 = x$; i) $\log_x 8 = \frac{3}{4}$.

238. Leia:

a) $2^{\log_2 8}$; b) $3^{\log_3 9}$; c) $36^{\log_6 2}$; d) $25^{\log_5 3}$; e) $81^{\log_9 7}$.

239. Kirjuta arv 5 arvude 3, 7 ja 2 astmena.

240. Kirjuta arvud 11, 8, 7, u, v arvu a astmena.

241. Lihtsusta.

a) $3^{\log_3 5+\log_3 7}$

b) $5^{\log_5 12-\log_5 4}$

c) $a^{\log_a 2+\log_a 3+\log_a 4}$

d) $2^{\log_2 18-\log_2 3-\log_2 2}$

e) $2^{2+\log_2 5}$

f) $4^{-\log_2 6}$

5.6. LOGARITMFUNKTSIOON.

Kui eksponentfunktsiooni $y=a^x$ vaadelda võrrandina, kus tundmatuks on x, siis, nagu juba teame, saame lahendiks $x=\log_a y$.

Et võrduses $y=a^x$ vastab x igale väärtusele üks kindel y väärtus, siis y on x funktsioon. Antud juhul võib seost $y=a^x$ vaadelda ka sellise võrdusena, kus igale lubatud y väärtusele vastab üks kindel x väärtus. Näiteks, kui $y=1$, siis $x=0$; kui $y=a^3$, siis $x=3$ jne. Seega võib öelda, et ka x on y funktsioon.

Eelnevast selgub, et võrdus $x=\log_a y$ kujutab x ja y vahelist funktsionaalset sõltuvust, kus argumendiks on y ja funktsiooniks x. Kui kujunenud tava kohaselt tähistada argument tähega x ja funktsioon tähega y, saame

$$y=\log_a x,$$

mida nimetatakse **logaritmfunktsiooniks.**

Logaritmfunktsiooniks nimetatakse funktsiooni $\log_a x$, kus $a>0$ ja $a\neq 1$.

Logaritmfunktsiooni $y=\log_a x$ saime eksponentfunktsioonist $y=a^x$ sel teel, et vahetasime argumendi ja funktsiooni. Selliseid funktsioone nimetatakse teineteise **pöördfunktsioonideks.** Seega on logaritmfunktsioon eksponentfunktsiooni pöördfunktsioon ja vastupidi — eksponentfunktsioon on logaritmfunktsiooni pöördfunktsioon.

Koostame nüüd eksponentfunktsiooni $y=10^x$ ja tema pöördfunktsiooni $y=\log x$ vastavate väärtuste tabelid:

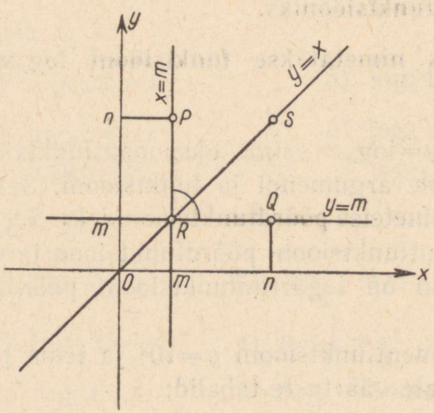
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y=10^x$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{10}$	1	10	100	1000

x	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{10}$	1	10	100	1000
$y=\log x$	-3	-2	-1	0	1	2	3

Neist tabeleist näeme, et kui üht võrdustest $y=10^x$ või $y=\log x$ rahuldab arvupaar (1; 10), siis teist rahuldab arvupaar (10; 1). Üldiselt, kui eksponentfunktsiooni $y=a^x$ rahuldab arvupaar $(m; n)$, siis logaritmfunktsiooni $y=\log_a x$ rahuldab arvupaar $(n; m)$. Kui võtame funktsiooni $y=a^x$ graafikul punkti $P(m; n)$, siis leidub pöördfunktsiooni $y=\log_a x$ graafikul punkt $Q(n; m)$. See tõsiasi annab võimaluse kergesti joonestada antud funktsiooni graafiku abil tema pöördfunktsiooni graafikut, sest

punktid (m; n) ja (n; m) on sümmeetrilised sirge y=x suhtes.

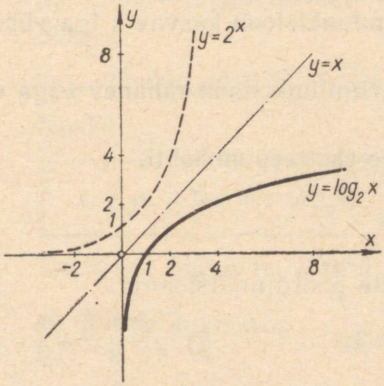
Tõepoolest, punkt $P(m; n)$ asetseb sirgel $x=m$ ja punkt $Q(n; m)$ sirgel $y=m$ (joon. 55). Need mõlemad sirged lõikuvad punktis $R(m; m)$ ja seega $PR=QR=n-m$. Et nurk $\angle PRQ$ on täis-



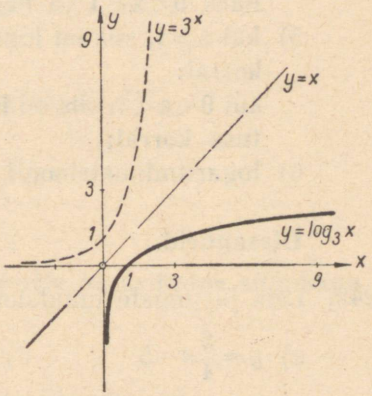
Joon. 55.

nurk ja sirge $y=x$ on selle nurga poolitaja, siis $\angle PRS=\angle QRS$. Sümmeetriliste punktide põhiomaduse järgi on siis punktid P ja Q sirge $y=x$ suhtes sümmeetrilised.

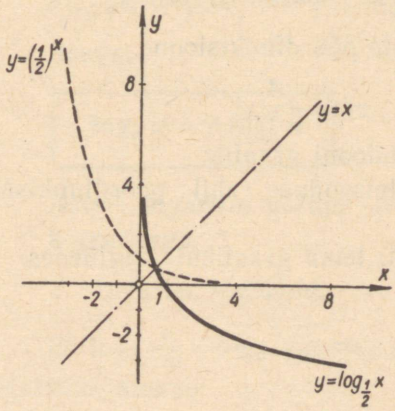
Et igale punktile $(x;\ y)$ eksponentfunktsiooni $y=a^x$ graafikul leidub vastav punkt $(y;\ x)$ logaritmfunktsiooni $y=\log_a x$ graafikul, siis joonestame koordinaatteljestiku, kus on juba olemas eksponentfunktsiooni graafik ja sirge $y=x$, ning konstrueerime selle sirge suhtes eksponentfunktsiooni graafikule sümmeetrilise kõvera. Joonistel 56, 57, 58 ja 59 ongi nii konstrueeritud funktsioonide $y=\log_2 x$, $y=\log_3 x$, $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ ja $y=\log_{\frac{1}{3}} x$ graafikud.



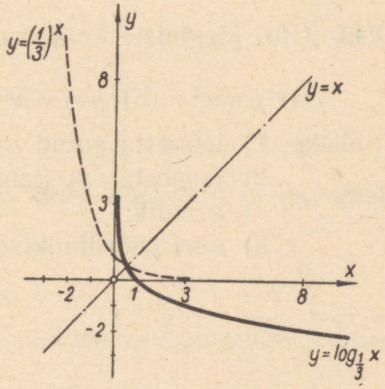
Joon. 56.



Joon. 57.



Joon. 58.



Joon. 59.

Eksponentfunktsiooni uurimise tulemuste ja logaritmfunktsiooni graafiku põhjal võime fikseerida logaritmfunktsiooni omadused:

1) **logaritmfunktsiooni määramispiirkonna moodustavad kõik positiivsed reaalarvud;**
2) **logaritmfunktsioon pole ei paaris- ega paaritu funktsioon;**
3) **logaritmfunktsiooni nullkohaks (s. t. võrrandi $\log_a x = 0$ lahendiks) on $x = 1$;**
4) **kui $a > 1$, siis on logaritmfunktsiooni positiivsuspiirkonnaks $x > 1$ ja negatiivsuspiirkonnaks $0 < x < 1$; kui $0 < a < 1$, siis on logaritmfunktsiooni positiivsuspiirkonnaks $0 < x < 1$ ja negatiivsuspiirkonnaks $x > 1$.**
5) **kui $a > 1$, siis on logaritmfunktsioon kasvav x iga väärtuse korral:**
   kui $0 < a < 1$, siis on logaritmfunktsioon kahanev x iga väärtuse korral;
6) **logaritmfunktsioonil pole ekstreemumkohti.**

Ülesandeid.

242. Leia järgmiste funktsioonide pöördfunktsioonid.

a) $y = \frac{3}{4}x - 5$ d) $y = 3x^2$ g) $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - 2$

b) $y = -\frac{2}{3}x + \frac{13}{5}$ e) $y = -4x^2 + 6$ h) $y = \frac{3-x}{4+x}$

c) $y = 35{,}2x + 17{,}6$ f) $y = 2x^2 - 3x$ i) $y = \frac{5}{x^2+1}$

243. Uuri järgmiste funktsioonide pöördfunktsioone.

a) $y = x^3$ b) $y = -2x^2$ c) $y = \sqrt[3]{x^2}$

Selleks: 1) joonesta antud funktsiooni graafik;
2) joonesta peegeldusteisenduse abil pöördfunktsiooni graafik;
3) uuri pöördfunktsiooni tema graafikule tuginedes.

5.7. KORRUTISE, JAGATISE, ASTME JA JUURE LOGARITM.

1. Korrutise logaritm.

Ülesandeks on avaldada korrutise logaritm tegurite logaritmide kaudu. Selleks kirjutame arvud u ja v arvu a astmena:

$$a^{\log_a u}=u,$$

$$a^{\log_a v}=v.$$

Siit saame, et

$$uv=a^{\log_a u}\cdot a^{\log_a v}=a^{\log_a u+\log_a v}.$$

Seega,

$$\log_a uv=\log_a a^{\log_a u+\log_a v}=\log_a u+\log_a v.$$

Niisiis,

$$\boxed{\log_a uv=\log_a u+\log_a v}$$

Korrutise logaritm võrdub tegurite logaritmide summaga.

2. Astme logaritm.

Et

$$u^n=(a^{\log_a u})^n=a^{n\log_a u},$$

siis

$$\log_a u^n=\log_a a^{n\log_a u}=n\log_a u.$$

Seega,

$$\boxed{\log_a u^n=n\log_a u}$$

Astme logaritm võrdub astme aluse logaritmi ja astendaja korrutisega.

3. Jagatise logaritm.

Et $\log_a \frac{u}{v}=\log_a (uv^{-1})$, siis, kasutades korrutise ja astme logaritmi, saame:

$$\log_a \frac{u}{v}=\log_a u+\log_a v^{-1}=\log_a u-\log_a v.$$

Niisiis,

$$\log_a \frac{u}{v} = \log_a u - \log_a v$$

Jagatise logaritm võrdub jagatava logaritmi ja jagaja logaritmi vahega.

4. Juure logaritm.

Et juurt saab avaldada murrulise astendajaga astmena ja astme logaritmi oskame juba leida, siis

$$\log_a \sqrt[n]{u} = \log_a u^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \log_a u = \frac{\log_a u}{n}.$$

Seega,

$$\log_a \sqrt[n]{u} = \frac{1}{n} \log_a u$$

Juure logaritm võrdub juuritava logaritmi ja juurija jagatisega.

Teades, kuidas leitakse korrutise, jagatise, astme ja juure logaritmi, saame lahendada mitmesuguseid ülesandeid.

Näiteid. Teades, et $\log_2 8 = 3$ ja $\log_2 4 = 2$, leia

$\log_2 32$, $\log_2 2$, $\log_2 64$ ja $\log_2 \sqrt{8}$.

a) $\log_2 32 = \log_2 (8 \cdot 4) = \log_2 8 + \log_2 4 = 3 + 2 = 5$,

b) $\log_2 2 = \log_2 (8 : 4) = \log_2 8 - \log_2 4 = 3 - 2 = 1$,

c) $\log_2 64 = \log_2 4^3 = 3 \log_2 4 = 3 \cdot 2 = 6$,

d) $\log_2 \sqrt{8} = \frac{1}{2} \log_2 8 = \frac{1}{2} \cdot 3 = 1{,}5$.

Ülesandeid.

244. Teades, et $\log_a b = 6$ ja $\log_a c = 4$, arvuta:

1) $\log_a (bc)$,
2) $\log_a \frac{b}{c}$,
3) $\log_a c^2$
4) $\log_a \sqrt[3]{b}$,
5) $\log_a b^{-2}$,
6) $\log_a \sqrt{c^3}$
7) $\log_a (a \cdot b)$,
8) $\log_a \frac{a^2}{c}$.

5.8. AVALDISE LOGARITMIMINE JA POTENTSEERIMINE.

1. Avaldise logaritmimine.

Avaldise logaritmi väljendamist avaldises esinevate arvude logaritmide kaudu nimetatakse avaldise logaritmimiseks.

Avaldiste logaritmimine toimub eelmises paragrahvis tõestatud nelja teoreemi rakendamisega.

Näide 1. $\log \frac{ab}{c} = \log ab - \log c = \log a + \log b - \log c.$

Näide 2. $\log \frac{a\sqrt[3]{c}}{b^2 d} = \log a\sqrt[3]{c} - \log b^2 d = \log a + \log \sqrt[3]{c} -$

$- (\log b^2 + \log d) = \log a + \frac{1}{3} \log c - (2 \log b + \log d) =$

$= \log a + \frac{1}{3} \log c - 2 \log b - \log d.$

Murdavaldise logaritmi leidmine muutub lihtsamaks, kui murdavaldise esitame täisavaldisena, kasutades selleks negatiivseid astendajaid. Ka juuri on soovitav kirjutada murrulise astendajaga astmetena.

Ülesandeid.

245. Leia järgmiste avaldiste kümnendlogaritmid:

1) abc 2) a^2x 3) $\frac{2a}{b}$ 4) $\frac{0{,}7a^2}{b}$ 5) $\frac{a+b}{c^2}$ 6) $a\sqrt[3]{b^2}$ 7) $\sqrt{\frac{1}{xy}}$

8) $\sqrt{\frac{a}{b}}$ 9) $\frac{(a-b)^2}{c}$ 10) $\frac{(a+b)d}{(a-b)c}$ 11) $a\sqrt{b}$ 12) $\frac{a^2b}{c^4}$ 13) $\frac{d^2fc}{h\sqrt{g}}$

246. Leia järgmiste avaldiste kümnendlogaritmid:

1) $\frac{10\sqrt{a^2-b^2}}{a^2b^2}$ 2) $\sqrt[5]{(e+f)\sqrt{h}}$ 3) $\sqrt{\frac{x\sqrt{y}}{\sqrt[3]{z}}}$

4) $\frac{a^{-1}b^{\frac{1}{2}}}{c}$ 5) $\frac{a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{2}{5}}}{c^{-1}d}$ 6) $\frac{x\sqrt[5]{y}}{\frac{a+b}{c}}$

247. Teades, et $\log 2 = 0{,}3010$, $\log 3 = 0{,}4771$, $\log 5 = 0{,}6990$ ja $\log 7 = 0{,}8451$, arvuta:

1) $\log 14$; $\log 35$; $\log 1{,}4$; $\log 0{,}4$; $\log 25$.

2) $\log \frac{7}{5}$; $\log 125$; $\log \sqrt{7}$; $\log 5^4$.

248. Kasutades ülesandes 247 antud arvude logaritme, arvuta:

1) $\log(2 \cdot 3 \cdot 7)$ 2) $\log \frac{5 \cdot 3}{2}$ 3) $\log(3^2 \cdot \sqrt{5})$

4) $\log \frac{5^3 \cdot \sqrt[3]{7}}{3^3}$ 5) $\log \frac{1}{2^5 \cdot \sqrt{3}}$

2. Potentseerimine.

Alajaotuses 5.7. tõestatud teoreemidest järeldub:

1) $\log_a u + \log_a v = \log_a uv$.

Logaritmide summa võrdub korrutise logaritmiga.

2) $\log_a u - \log_a v = \log_a \frac{u}{v}$.

Logaritmide vahe võrdub jagatise logaritmiga.

3) $n \log_a u = \log_a u^n$.

Arvu ja logaritmi korrutis võrdub astme logaritmiga.

4) $\frac{1}{n} \log_a u = \frac{\log_a u}{n} = \log_a \sqrt[n]{u}$.

Logaritmi ja arvu jagatis võrdub juure logaritmiga.

Avaldise leidmist tema logaritmi järgi nimetatakse **potentseerimiseks.**

Näide 1. $\log_a x = 2 \log_a m + 3 \log_a n - 5 \log_a k$; Missuguse avaldisega võrdub x?

Lahendus. $\log_a x = \log_a m^2 + \log_a n^3 - \log_a k^5$;

$\log_a x = \log_a m^2 n^3 - \log_a k^5$;

$\log_a x = \log_a \frac{m^2 n^3}{k^5}$;

$x = \frac{m^2 n^3}{k^5}$.

Näide 2. Millega võrdub x, kui $\log x = \log a + 2 \log b - \frac{1}{2} \log(c+d)$?

Lahendus. $\log x = \log a + \log b^2 - \log \sqrt{c-d}$;

$\log x = \log \frac{ab^2}{\sqrt{c-d}}$;

$x = \frac{ab^2}{\sqrt{c-d}}$.

Näide 3. Leida x, teades, et $\log x = 2\log 3 + 3\log 2$.

Lahendus. $\log x = \log 3^2 + \log 2^3 = \log 3^2 \cdot 2^3 = \log 72$.

$x = 72$.

Ülesandeid.

249. Potentseerida.

1) $5\log 2$
2) $6\log 3 + 3\log 4$
3) $\frac{1}{3}(2\log a + 2\log b - \log c)$
4) $\frac{1}{4}\log a + 2\log b - \frac{2}{3}\log c$
5) $\log 5 + \log 2$
6) $\log 12 - \log 4$
7) $2\log a + 3\log b$
8) $\frac{1}{2}\log 16 + \frac{1}{3}\log 8$

250. Missuguse avaldise logaritm on:

1) $\log_a s + \log_a t$,
2) $\log_a r - \log_a m$,
3) $1 + \log_a b$,
4) $\log_a b - 2$,
5) $2\log_a k$,
6) $\frac{1}{3}\log_a d$,
7) $\frac{2}{3}\log_a b$,
8) $-\log_a c^2$?

5.9. KÜMNENDLOGARITMI OMADUSED.

Rakendades teoreemi korrutise logaritmist ja teades, et $\log 2 = 0{,}3010$, saame arvutada $\log 20$; $\log 200$; $\log 2000$; $\log 0{,}2$; $\log 0{,}02$; $\log 0{,}002$ jne.

$\log 20 = \log(10 \cdot 2) = \log 10 + \log 2 = 1 + 0{,}3010 = 1{,}3010$;

$\log 200 = \log(100 \cdot 2) = \log 100 + \log 2 = 2 + 0{,}3010 = 2{,}3010$ jne.

$\log 0{,}2 = \log(0{,}1 \cdot 2) = \log 0{,}1 + \log 2 = -1 + 0{,}3010 = -0{,}6990$.

$-0{,}6990 = -1 + 0{,}3010$ asemel aga kirjutatakse $\bar{1}{,}3010$ (loe: üks miinusega koma 3010).

Niisugust kümnendmurdu, mille täisosa on negatiivne, murdosa aga positiivne, nimetatakse poolnegatiivse kujuga arvuks.

$\log 0{,}02 = \log(0{,}01 \cdot 2) = \log 0{,}01 + \log 2 = -2 + 0{,}3010 = \bar{2}{,}3010$.

Teades, et $\log 3{,}728 = 0{,}5714$, võime samuti leida, et

$\log 37{,}28 = 1{,}5714$; $\log 0{,}3728 = \bar{1}{,}5714$;
$\log 372{,}8 = 2{,}5714$; $\log 0{,}03728 = \bar{2}{,}5714$;
$\log 3728 = 3{,}5714$; $\log 0{,}003728 = \bar{3}{,}5714$ jne.
$\log 37280 = 4{,}5714$ jne.

Esitatust selgub, *et arvu kümnendlogaritm on kümnendmurd, mille* **täisosa** *sõltub koma asukohast antud arvus ja alati positiivne* **murdosa** *sõltub arvu tüvest.*

Kümnendlogaritmi täisosa ja murdosa nimetatakse vastavalt ka tema **karakteristikuks** *ja* **mantissiks**.

Toodud näidete põhjal võime öelda, et

a) *arvust* 1 *suurema arvu kümnendlogaritmi täisosa on positiivne ja võrdub* $(n-1)$*-ga, kui arvul on n numbrit koma ees*;

b) *arvust* 1 *väiksema arvu kümnendlogaritmi täisosa on negatiivne ja selle absoluutväärtus võrdub nullide arvuga tüve ees* (*koma ees seisev null kaasa arvatud*).

Näiteks arvu 287,4 kümnendlogaritmi täisosa on 2, sest koma ees on kolm numbrit. Arvu 0,00047 kümnendlogaritmi täisosa on $\bar{4}$, sest tüve 47 ees seisab neli nulli.

Ülesandeid.

251. Määra järgmiste arvude kümnendlogaritmide täisosad:
1) 32,4; 300; 4,576; 6; 0,643; 0,0007; 1,008; 100.
2) 23 000 000; 0,0080; 0,001; 682 397; 0,00006602; 1,5788.

5.10. TEHTED POOLNEGATIIVSETE ARVUDEGA.

Et kirjutada poolnegatiivse kujuga arvu negatiivse arvuna, selleks liidame negatiivse täisosa positiivse murdosaga.
Näiteks:

$\bar{2}{,}7409 = -2 + 0{,}7409 = -1{,}2591$,
$\bar{1}{,}7880 = -1 + 0{,}7880 = -0{,}2120$,
$\bar{3}{,}0336 = -3 + 0{,}0336 = -2{,}9664$ jne.

Kui tahame negatiivset arvu kirjutada poolnegatiivsel kujul, toimime nii:

$$-1{,}2591 = -1 - 0{,}2591 = (-1-1) + (-0{,}2591+1) =$$
$$= -2 + 0{,}7409 = \bar{2}{,}7409.$$

Siit selgub, et negatiivse arvu teisendamisel poolnegatiivseks peame täisosaga liitma -1 ja murdosa asemele kirjutama tema täienduse üheni. Lühidalt kirjutame:

$$\overset{-1+1}{-1{,}2591} = \bar{2}{,}7409,$$
$$\overset{-1+1}{-2{,}4240} = \bar{3}{,}5760,$$
$$\overset{-1+1}{-0{,}6605} = \bar{1}{,}3395 \text{ jne.}$$

Ülesandeid.

252. Teisenda alljärgnevad poolnegatiivsed arvud negatiivseiks:

1) $\bar{1}{,}4462$; $\bar{2}{,}0738$; $\bar{5}{,}6804$; $\bar{1}{,}2480$; $\bar{3}{,}0073$.
2) $\bar{1}{,}0008$; $\bar{1}{,}6200$; $\bar{4}{,}7000$; $\bar{2}{,}2219$; $\bar{6}{,}3040$.
3) $\bar{1}{,}5999$; $\bar{2}{,}9990$; $\bar{3}{,}3001$; $\bar{4}{,}0048$; $\bar{1}{,}8548$.

253. Teisenda alljärgnevad negatiivsed arvud poolnegatiivseiks:

1) $-3{,}7082$; $-2{,}0563$; $-1{,}8455$; $-0{,}6639$; $-0{,}0470$.
2) $-0{,}5861$; $-2{,}0009$; $-4{,}9991$; $-0{,}2$; $-5{,}76$.
3) $-3{,}408$; $-4{,}4000$; $-0{,}02$; $-1{,}0001$; $-4{,}4739$,

Poolnegatiivseid arve saab liita ja lahutada nagu kümnendmurde, kirjutades need üksteise alla nii, et vastavad järgud oleksid kohakuti. Siinjuures ei tohi aga unustada, et täisosad on negatiivsed!

Näide 1.

$$\begin{array}{r} \bar{2}{,}8647 \\ +\ \bar{1}{,}7438 \\ \hline \bar{2}{,}6085. \end{array}$$

Täisosade liitmisel peame silmas, et kümnendike liitmisel saime 16 kümnendikku. Siit saame ühe positiivse ühelise, mille liidame antud täisosadega

$$1 + (-2) + (-1) = -2.$$

Näide 2.

$$\begin{array}{r} \dot{\bar{1}},\dot{7}608 \\ -\bar{2},9462 \\ \hline 0,8146 \end{array}$$

Täisosade lahutamisel peame silmas, et kümnendike lahutamiseks oli vähendatavas vaja üks üheline peenestada kümnendikeks (seda tähistab punkt vähendatava täisosa kohal). Selle tulemusena muutus vähendatava täisosa ühe võrra väiksemaks. Seega pärast kümnendike lahutamist on vähendatava täisosa -2 ja vahe täisosa on

$$-2-(-2)=0.$$

Näide 3.

$$\begin{array}{r} 2,\dot{7}\dot{6}48 \\ -\ 4,4766 \\ \hline \bar{2},2882 \end{array}$$

Ülesandeid.

254. Soorita alljärgnevad tehted:

1) $\bar{1},7446+0,8367$
$\bar{1},5834+0,4293$
$2,6737-\bar{1},4636$
$0,6351-\bar{2},9442$

2) $\bar{4},6385-\bar{2},8856$
$\bar{1},9074+\bar{1},5229$
$\bar{2},1788-\bar{5},0669$
$\bar{3},4467-\bar{1},6262.$

3) $\bar{1},7735+\bar{2},6849+2,5327$
$4,3374+\bar{5},5228+\bar{1},5781+0,6117$
$\bar{3},0805+\bar{4},5901+5,3306+\bar{2},7717+0,4862$
$0,8840+\bar{8},6162+4,5287+\bar{5},5613+3,7494$

*

Poolnegatiivsete arvude korrutamisel ja jagamisel teisendame need üldiselt enne negatiivseteks, sooritame siis korrutamise

või jagamise ja muudame tarbe korral saadud vastuse uuesti poolnegatiivseks.

Näiteid. 1) $1{,}2 \cdot \overline{3}{,}4675 = 1{,}2 \cdot (-2{,}5325) = -3{,}0390 = \overline{4}{,}9610.$

2) $\overline{2}{,}8896 : 2{,}4 = -1{,}1104 : 2{,}4 = -0{,}4627 = \overline{1}{,}5373.$

Erijuhtumeil, kui korrutaja või jagaja on naturaalarv, saab poolnegatiivseid arve korrutada ja jagada negatiivseiks teisendamata.

Näide. $3 \cdot \overline{4}{,}7708 = \overline{10}{,}3124.$

Peame silmas, et $3 \cdot (-4) = -12$ ja 2 meeles annab -10.

Kui negatiivne täisosa jagub jagajaga, saame poolnegatiivset arvu kohe jagada.

Näide. $\overline{6}{,}4672 : 2 = \overline{3}{,}2336.$

Kui negatiivne täisosa ei jagu jagajaga, siis poolnegatiivse arvu kirjutame negatiivse täisosa ja positiivse murdosa summana. Seejärel täiendame täisosa negatiivse arvuni, mis jagub jagajaga. Positiivse murdosaga liidame aga selle täienduse vastandarvu, et summa ei muutuks, ja sooritame siis jagamise.

Näide. $\overline{7}{,}6438 : 3 = \overset{-2+2}{(-7+0{,}6438)} : 3 =$
$= (-9+2{,}6438) : 3 =$
$= -3+0{,}8813 = \overline{3}{,}8813.$

Kasutades lühemat kirjutusviisi, saame viimast ülesannet lahendada ka nii:

$\overset{-2+2}{\overline{7}}{,}6438 : 3 = 3{,}8813,$

kusjuures positiivne täiendus tuleb mõelda murdosa ette.

Ülesandeid.

255. Soorita alljärgnevad tehted:

1) $2 \cdot \overline{2},1323$ 2) $\overline{1},5472 : 2$ 3) $\overline{2},7567 : 6$

$3 \cdot \overline{3},8813$ $\overline{8},4666 : 2$ $\overline{14},6735 : 5$

$4 \cdot \overline{1},7633$ $\overline{4},0833 : 3$ $\overline{5},1852 : 4$

$7 \cdot \overline{1},8043$ $\overline{9},4572 : 4$ $\overline{3},0051 : 3$

4) $\overline{1},4766 : 0{,}2$; $2{,}5 \cdot \overline{1},5825$; $7{,}5 \cdot \overline{3},7604$

5.11. LOGARITMIDE TABELID.

Eespool nägime, et kui
$x = 100$, siis $\log x = 2$;
$x = 1000$, siis $\log x = 3$;
$x = 2$, siis $\log x = 0{,}3010$ jne.

Siit näeme, et kui avaldises $\log x$ vaadelda x muutuva suurusena, siis igale x väärtusele vastab avaldise $\log x$ kindel väärtus. See aga tähendab, et avaldis $\log x$ on muutuva suuruse x funktsioon. Valemi kujul kirjutatakse seda järgmiselt:

$$y = \log x,$$

kus y on funktsioon ja x argument. Sellist funktsiooni nimetasime logaritmfunktsiooniks.

Kuna kümnendlogaritme kasutatakse laialdaselt arvutustöös, siis töö lihtsustamiseks on koostatud kümnendlogaritmide tabelid. Kuna kümnendlogaritmi täisosa on leitav peast, siis on tabelisse kantud ainult logaritmide murdosad. Vastavalt sellele, mitme kohaga on murdosa antud, nimetatakse logaritme ja ka tabeleid kolme-, nelja- jne. kohalisteks. Tabeli valik sõltub arvutustöö täpsusest. Et neljakohalised tabelid on piisavad enamiku igapäevases elus esinevate ülesannete lahendamiseks, siis vaatleme ainult neid.

Koolis kasutatava V. Bradise logaritmide tabeli abil saab leida ülimalt nelja tüvenumbriga arvu kümnendlogaritmi murdosa. Kui arvul on rohkem tüvenumbreid, siis ümardame selle neljale tüvenumbrile.

Näiteks: $27{,}4683 \approx 27{,}47$.

$397\,732 \approx 397\,700$ jne.

Selgitame arvu kümnendlogaritmi murdosa leidmist näite varal.

Väljavõte neljakohaliste logaritmide tabelist.

N	0	1	2	3	4	...	9	1	2	3	4	...	9
...	...	...	...	...	...	...	...	..	..	..	..	...	..
20	3010	3032	3054	3075	3096	...	3201	2	4	6	8	...	19
21	3222	3243	3263	3248	3304	...	3404	2	4	6	8	...	18
22	3424	3444	3464	3483	3502	...	3598	2	4	6	8	...	17
23	3617	3636	3655	3674	3692	...	3784	2	4	6	7	...	17
...	...	...	...	...	...	...	...	..	..	..	..	...	..

Paranduste tabel

Tabeli esimesse, *N*-ga tähistatud veergu on trükitud arvu esimene ja teine tüvenumber, esimesse ritta aga kolmas tüvenumber. Sisenedes arvu kolme esimese tüvenumbri järgi tabelisse, leiame tabeli seest arvu kümnendlogaritmi murdosa.

Näiteks arvu 214 logaritmi murdosa on 3304,
„ 2,32 „ „ „ 3655,
„ 20,4 „ „ „ 3096,
„ 20,9 „ „ „ 3201,
„ 22 „ „ „ 3424,
„ 2 „ „ „ 3010 jne.

Kui arvul on neli tüvenumbrit, siis kasutame arvu logaritmi murdosa leidmiseks paranduste tabelit.

Algul leiame logaritmi murdosa arvu esimese kolme tüvenumbri järgi, siis siirdume samal real paranduste tabelisse, kus on trükitud neljandale tüvenumbrile vastav parandus.

Näiteks arvu 2234 puhul saame 223 järgi murdosa 3483 ja paranduste tabelis 4 järgi paranduse 8. Seega arvu 2234 logaritmi murdosa on 3483+8=3491. Samuti leiame, et

arvu 2321 logaritmi murdosa on 3657,
„ 2,002 „ „ „ 3014,
„ 0,2199 „ „ „ 3422,
„ 20,43 „ „ „ 3102,
„ 20,94 „ „ „ 3209 jne.

Arvu kümnendlogaritmi määramisel leiame tabelite abil arvu kümnendlogaritmi murdosa, kümnendlogaritmi täisosa aga leiame peast. Sel teel saame näiteks, et

$\log 2234 = 3{,}3491$,
$\log 2{,}002 = 0{,}3014$,
$\log 0{,}02303 = \overline{2}{,}3623$,
$\log 209{,}1 = 2{,}3203$.

Ülesandeid.

256. Leia alljärgnevate arvude kümnendlogaritmid.
1) 2,55; 67,3; 52; 40; 0,4; 0,0308; 0,01.
2) 28,62; 0,5323; 2,646; 705 200; 0,004508; 1,006.
3) 1,5848; 17 523; 832 960; 60 953; 0,0079527; 1,0008.

5.12. ARVU LEIDMINE TEMA KÜMNENDLOGARITMI JÄRGI.

1. Arvu kümnendlogaritmi leidmise pöördtehteks on arvu leidmine tema kümnendlogaritmi järgi, mida nimetatakse *antilogaritmi* leidmiseks.

Võrrandi

$\log x = a$

lahendamine nõuab kümne astendamist arvuga a. Selleks võime kasutada logaritmide tabelit, kusjuures antud kümnendlogaritmi a murdosa otsime tabeli seest ja kui see on leitud, siis saame x tüvenumbrid lugeda tabeli äärtelt. Koma asukoha aga määrame kümnendlogaritmi täisosa järgi.

Leiame näiteks x, kui $\log x = 1{,}3464$.

Leidnud tabeli seest kümnendlogaritmi murdosa 3464, saame tabeli äärtelt lugeda x tüvenumbrid 222. Koma asukoha määrame sellise kaalutlusega, et otsitava x kümnendlogaritmi täisosa oleks 1. See aga saab olla 1 ainult siis, kui x täisosas on kaks numbrit. Seega

$x = 22{,}2$.

Leiame x, kui $\log x = 0{,}3681$.

Kui oleme kindlaks teinud, et kümnendlogaritmi murdosa 3681 asub tabeliarvude 3674 ja 3692 vahel, siis määrame paranduse, mis tuleb liita väiksemale tabeliarvule, et saada antud kümnendlogaritmi murdosa. Käesoleval juhul on see $3681-3674=7$. Siirdudes real, millel seisab väiksem tabeliarv 3674, paranduste tabelisse, otsime sealt 7-ga võrdse või lähima paranduse; selle paranduse veerunumber annabki meile arvu neljanda tüvenumbri 4.

$x=2{,}334$.

2. Kümnendlogaritmi järgi arvu leidmist hõlbustab veelgi antilogaritmide tabel.

Väljavõte antilogaritmide tabelist.

m	0	1	2	3	...	9	1	2	3	...	9
...	...	...	...	...	...	...	..	..	..	...	..
,40	2512	2518	2523	2529	...	2564	1	1	2	...	5
,41	2570	2576	2582	2588	...	2624	1	1	2	...	5
,42	2630	2636	2642	2649	...	2685	1	1	2	...	6
,43	2692	2698	2704	2710	...	2748	1	1	2	...	6
...	...	...	...	...	...	...	..	..	..	...	..

Paranduste tabel

Selle tabeli esimesse m-ga tähistatud veergu on trükitud arvu kümnendlogaritmi murdosa kaks esimest numbrit ja esimesse ritta kolmas number.

Sisenenud tabelisse kümnendlogaritmi murdosa kolme esimese numbri järgi, leiame tabelist arvu tüvenumbrid, millele tuleb veel liita kümnendlogaritmi murdosa neljanda numbri järgi saadud parandus paranduste tabelist.

Näiteks leiame antilogaritmide tabeli abil x, kui

$\log x=2{,}4123$.

Kümnendlogaritmi murdosa esimese kolme numbri 412 järgi leiame tabeli seest tüvenumbrid 2582. Samal real paranduste tabelist saame kümnendlogaritmi murdosa neljanda tüvenumbri 3 järgi paranduse 2. Seega on otsitava x tüvenumbrid 2584. Määranud kümnendlogaritmi täisosa (2) järgi koma asukoha, saame, et

$x=258{,}4$.

Samuti leiame, et kui
$\log x = 0{,}4101$, siis $x = 2{,}571$.
$\log x = \bar{2}{,}4333$, siis $x = 0{,}02712$,
$\log x = 4{,}4009$, siis $x = 25\,170$,
$\log x = \bar{1}{,}0377$, siis $x = 0{,}1091$,
$\log x = 1{,}0086$, siis $x = 10{,}20$ jne.

Ülesandeid.

257. Leia x, kui:

1) $\log x = 2{,}5478$; $\log x = \bar{1}{,}8035$; $\log x = 0{,}1703$.
2) $\log x = \bar{3}{,}3350$; $\log x = 4{,}8751$; $\log x = \bar{2}{,}9317$.
3) $\log x = 1{,}0622$; $\log x = 0{,}0096$; $\log x = \bar{1}{,}0007$.
4) $\log x = 5{,}7762$; $\log x = 4{,}6068$; $\log x = \bar{3}{,}4004$.
5) $\log x = 0{,}0520$; $\log x = \bar{4}{,}6000$; $\log x = \bar{2}{,}9746$.

5.13. ARVUTAMINE KÜMNENDLOGARITMI ABIL.

Kümnendlogaritmide kasutamine arvutamisel hõlbustab tööd, sest korrutamine taandub liitmisele, jagamine — lahutamisele, astendamine — korrutamisele ja juurimine — jagamisele. Arvutustulemuste täpsus neljakohaliste murdosadega kümnendlogaritmide kasutamisel ei ületa küll nelja tüvenumbrit, kuid tavaliselt on selline täpsus piisav.

Kümnendlogaritmide rakendamist arvutamisel selgitame mõne konkreetse näite varal.

Näide 1. Leia korrutis

$x = 29{,}78 \cdot 6{,}546$.

Rakendades teoreemi korrutise logaritmist, saame

$\log x = \log 29{,}78 + \log 6{,}546$.

Tabelist leiame $\log 29{,}78$ ja $\log 6{,}546$ väärtused:

$\log x = 1{,}4740 + 0{,}8160 = 2{,}2900$.

Antilogaritmide tabelist leiame kümnendlogaritmi murdosa 2900 järgi x tüvenumbrid 195. Et karakteristik on 2, siis peab arvu täisosa olema kolmekohaline, seega

$x=195$.

Näide 2. Arvuta: $x=\frac{763{,}6\cdot 0{,}8445}{42{,}94\cdot 2{,}706}$.

Kirjutame murdavaldise täisavaldisena

$$x=763{,}6\cdot 0{,}8445\cdot 42{,}94^{-1}\cdot 2{,}706^{-1}$$

ja logaritmime

$$\log x=\log 763{,}6+\log 0{,}8445-\log 42{,}94-\log 2{,}706.$$

Kui oleme tabelist leidnud arvude kümnendlogaritmid, saame:

$$\log x=2{,}8828+1{,}9266-1{,}6329-0{,}3423=0{,}8342.$$

Antilogaritmide tabelist leiame, et

$x=6{,}826$.

Näide 3. Arvuta:

$$x=\frac{0{,}0874^2\cdot\sqrt[3]{68150^2}}{1{,}488^4\cdot\sqrt{0{,}00547}}.$$

Esitanud murdavaldise täisavaldisena ja juured murruliste astendajatega astmetena, saame

$$x=0{,}0874^2\cdot 68150^{\frac{2}{3}}\cdot 1{,}488^{-4}\cdot 0{,}00547^{-\frac{1}{2}}.$$

Edasi leiame avaldise logaritmi:

$$\log x=2\log 0{,}0874+\frac{2}{3}\log 68150-4\log 1{,}488-\frac{1}{2}\log 0{,}00547.$$

Arvutuste käepärasemaks muutmiseks koostame tabeli.

N	$\log N$	n	$n\cdot\log N$
0,0874	2,9415	2	$\overline{3}$,8830
68150	4,8334	$\frac{2}{3}$	3,2223
			1,1053
1,488	0,1726	4	0,6904
0,00547	$\overline{3}$,7380	$\frac{1}{2}$	$\overline{2}$,8690
			$\overline{1}$,5594

$\log x=1{,}5459$;
$x=35{,}15$

Tabelis arvutame esiteks positiivsete liikmete summa ja teiseks negatiivsete liikmete summa. Lahutanud positiivsete liikmete summast negatiivsete liikmete summa, saame $\log x$ väärtuse. Lõpuks leiame antilogaritmide tabelist x väärtuse.

Ülesandeid.

258. 1) $68{,}4 \cdot 3{,}764$ 2) $459{,}2 \cdot 0{,}08063$
3) $65410 \cdot 0{,}01728$ 4) $17{,}66 \cdot 1{,}8647$
5) $56397 \cdot 0{,}8804365$ 6) $1{,}7588 \cdot 0{,}4294$

259. 1) $\frac{15{,}3 \cdot 1{,}206}{44{,}8}$ 2) $\frac{0{,}4921 \cdot 75{,}8}{0{,}1422}$

3) $\frac{4608 \cdot 3}{67{,}45 \cdot 0{,}72}$ 4) $\frac{0{,}1}{2{,}66 \cdot 0{,}3666 \cdot 4}$

5) $\frac{1}{24{,}32 \cdot 0{,}0092}$ 6) $\frac{29{,}61 \cdot 0{,}0532}{0{,}8177 \cdot 163{,}4}$

260. 1) $8{,}803^5 : 0{,}6146^4$ 2) $31{,}73^{2{,}2} : 0{,}562^{0{,}12}$

3) $\sqrt[3]{5713} : \sqrt[5]{9417}$ 4) $\sqrt[7]{10} : \sqrt[10]{1000}$

5) $62{,}4 \cdot 17{,}8^2$ 6) $\frac{0{,}7324^3}{\sqrt{0{,}0142}}$ 7) $0{,}158^2 \cdot \sqrt{77{,}2}$

261. 1) $\frac{14{,}85 \cdot \sqrt[3]{0{,}9308}}{5{,}78^2 \cdot \sqrt{0{,}126}}$ 2) $\frac{6{,}85^2 \cdot \sqrt[5]{667{,}9}}{11{,}42^3 \cdot \sqrt[4]{0{,}033}}$

3) $\frac{66240 \cdot \sqrt[3]{0{,}09405 \cdot 1{,}52^2}}{0{,}868^3 \cdot \sqrt{226{,}2 \cdot 0{,}78}}$ 4) $\frac{0{,}004492 \cdot \sqrt[5]{17900^2}}{\sqrt[7]{55{,}2^4} \cdot 0{,}00895^3}$

5) $\sqrt[3]{\frac{17{,}96^2 \cdot \sqrt{0{,}52}}{42{,}8}}$ 6) $\frac{\sqrt[4]{0{,}04671}}{0{,}0728^3 \cdot \sqrt[5]{0{,}000496}}$

262. Torni katus on ruudukujulise põhjaga korrapärane püramiid. Leia katuse pindala, kui põhiserv on 6,78 m ja külgtahu apoteem 8,06 m.

263. Koonuse põhja diameeter on 522 mm ja kõrgus 472 mm. Leia koonuse ruumala.

264. Kera raadius on 8,27 cm. Kui suur on kera ruumala?

265. Vagonett sõidab paigalseisust 1 minuti ja 13 sekundi kestel kallakust alla kiirendusega 14,8 $\frac{\text{cm}}{\text{s}^2}$. Kui pika tee läbib vagonett selle ajaga ja milline on vagoneti kiirus tee lõpul?

*

Kui avaldises esinevad liitmise ja lahutamise tehted, siis peame need sooritama eraldi, sest summat ja vahet ei saa logaritmida.

Näide 4. $\frac{16,73}{0,5208}+\frac{6,38^2\sqrt[3]{42,2}}{44,7}$.

Selle ülesande lahendamisel arvutame algul logaritmide abil esimese ja teise liikme eraldi ja siis liidame tulemused.

Teosta nimetatud tehted!

Näide 5. $\frac{84,17\sqrt{36,42^2-17,85^2}}{72,63}$.

Selle ülesande lahendamisel arvutame ruutude tabelite abil $36,42^2-17,85^2$, mille tulemusena saame juba logaritmitava avaldise.

Ülesandeid.

266. Arvuta:

1) $\sqrt{3,442^2-0,67888^2}$

2) $\sqrt{\frac{848,3}{766,5}}+\sqrt[3]{\frac{42,55^2}{2067}}$ 3) $\sqrt[3]{\frac{14+\sqrt{14}}{81-\sqrt{170}}}$ 4) $\frac{3,64^3\sqrt{18,72^2-66,4}}{15,52\sqrt{3,974^3+8,693^2}}$

267. Arvuta ülesannete 262 ja 263 andmete põhjal torni katusealuse ruumala ja koonuse täispindala.

5.14. LOGARITMILINE SKAALA.

Koordinaatteljestikus kujutatakse argumendi ja vastava funktsiooni väärtusi kahe arvtelje — abstsisstelje ja ordinaattelje abil.

On olemas võte argumendi ja funktsiooni vastavate väärtuste graafiliseks kujutamiseks ühe arvtelje abil. Selleks paigutatakse pärast mõõtühiku valimist arvteljele alguspunktist alates lõigud, mille pikkused kujutavad funktsiooni väärtusi; nende lõikude lõpppunktide juurde aga kirjutatakse argumendi vastavad väärtused. Funktsiooni väärtusi joonisele ei kirjutata, sest need on lõigu pikkustena mõõdetavad. Sel teel saadaksegi pilt nii argumendi kui

ka funktsiooni vastavatest väärtustest ühelainsal arvteljel. Niisugust arvtelge nimetatakse funktsiooni astmikuks ehk skaalaks.

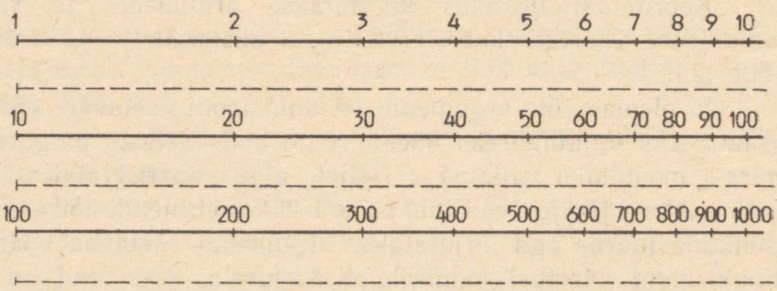
Valmistades funktsiooni $y=\log x$ skaala, saame **logaritmilise skaala.**

Selle skaala ehitamiseks koostame esmalt funktsiooni $y=\log x$ väärtuste tabeli, ümardades logaritmide väärtused kahe numbrini koma järel.

x	$\log x$	x	$\log x$	x	$\log x$
1	0,00	10	1,00	100	2,00
2	0,30	20	1,30	200	2,30
3	0,48	30	1,48	300	2,48
4	0,60	40	1,60	400	2,60
5	0,70	50	1,70	500	2,70
6	0,78	60	1,78	600	2,78
7	0,85	70	1,85	700	2,85
8	0,90	80	1,90	800	2,90
9	0,95	90	1,95	900	2,95
10	1,00	100	2,00	1000	3,000

Kui valida mõõtühikuks 1 dm, siis saame $\log 2$ puhul lõigu pikkusega 3 cm, $\log 3$ puhul 4,8 cm, $\log 10$ puhul 10 cm, $\log 20$ puhul 13 cm, $\log 30$ puhul 14,8 cm jne. Paigutades kõik need lõigud ühisest alguspunktist alates arvteljele ja kirjutades nende lõikude otspunktide juurde vastavad argumendi x väärtused, saame logaritmilise skaala. See skaala on osade kaupa paigutatud joonisele 60.

Nagu näha, skaala vahemikus 1-st 10-ni on samasuguse kujuga nagu vahemikus 10-st 100-ni või vahemikus 100-st 1000-ni, sest logaritmide väärtused teises tulbas erinevad esimese tulba



Joon. 60.

logaritmide vastavatest väärtustest ühe võrra ja kolmanda tulba väärtused — kahe võrra.

Logaritmilist skaalat vahemikus 1-st 10-ni nimetatakse **logaritmiliseks põhiskaalaks,** sest ta kujutab ühtlasi ka funktsiooni $y = \log x$ skaalat vahemikus 10-st 100-ni, 100-st 1000-ni jne.; samuti ka vahemikus 0,1-st 1-ni, 0,01-st 0,1-ni jne. Seetõttu tuleb skaalale märgitud arvude all mõista ainult argumendi x tüve. Näiteks arv 2 võib tähistada argumendi x väärtusi ... 0,02; 0,2; 2; 20; 200; ...

Varem õpitud korrutamine ja jagamine ning ruudu, kuubi, ruutjuure ja kuupjuure leidmine arvutuslükati abil pole seni põhjendamist leidnud. Olles tutvunud kümnendlogaritmidega ja logaritmilise skaalaga, osutub see nüüd võimalikuks, sest arvutuslükatile trükitud skaalad K, A, B, R, C ja D on logaritmilised skaalad.

5.15. KORRUTAMINE LÜKATI SKAALADE D JA C ABIL.

Skaalat C saab viia ühtima skaalaga D. Selles võib veenduda otsese võrdlemisega. Kui viia skaala C ja D esimesed kriipsud ühtimisele, siis langevad ka kõik nende ülejäänud vastavad kriipsud kokku.

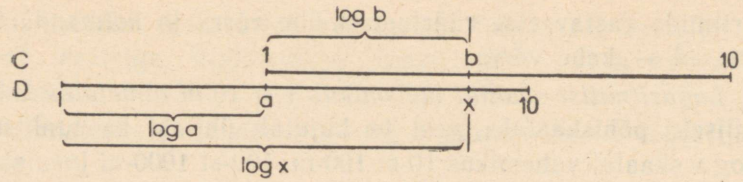
Et hõlbustada lükatil teostatavate operatsioonide kirjeldamist, tähistame erinevate skaalade jaotuskriipsu lühidalt skaala tähega, millele järgnevad jaotuskriipsule vastava arvu tüvenumbrid.

Näiteks D-27 tähendab skaala D jaotuskriipsu, mis vastab arvule, mille tüvenumbrid on 2 ja 7, näiteks 2,7; 27; 270; 0,27 jne. C-475 tähendab skaala C jaotuskriipsu, mis vastab arvule, mille tüvenumbrid on 4—7—5, näiteks 4,75; 47,5; 0,475 jne.

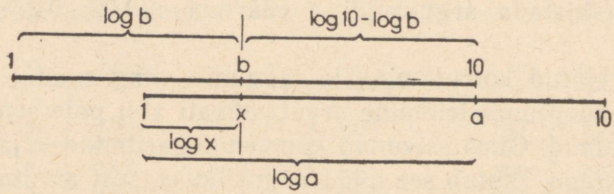
Selleks, et korrutada arve a ja b, paigutame C-1 D-a kohale ja märgime märkijaga C-b. Arvude a ja b korrutise x leiame skaalalt D märkija alt.

Tõestuseks vaatleme joonisel 61 kujutatud logaritmiliste skaalade D ja C ning püstkriipsuga tähistatud märkija seisu, millest nähtub, et

$$\log a + \log b = \log x.$$



Joon. 61.



Joon. 62.

Rakendades teoreemi korrutise logaritmist, saame

$$\log ab = \log x,$$

millest

$$ab = x.$$

Kui *C*-*d* peaksid sattuma väljapoole skaala *D* piirkonda, siis viime *C*-1 asemel *C*-10 *D*-*a* kohale. Niisugust skaala *C* otste vahetamist nimetatakse keele ü l e l ü k k e k s. Peale ülelükke teostamist on lükatil joonisel 62 näidatud seis ja me leiame korrutise *x* tüvenumbrid *C*-*d* kohalt skaalal *D*.

Tõestuseks vaatleme joonist 62, millest nähtub, et

$$\log a = \log x + \log 10 - \log b,$$

millest

$$\log a + \log b = \log x + \log 10.$$

Rakendades teoreemi korrutise logaritmist, saame

$$\log ab = \log(x \cdot 10),$$

kust

$$ab = x \cdot 10$$

ja

$$\frac{ab}{10} = x.$$

Nii esimese kui ka teise lükatiseisu puhul leiame lükatilt kahe arvu a ja b korrutise tüvenumbrid. Koma asukoha aga määrame vastuse ligikaudse hindamise teel.

Näiteks korrutades lükatil

$2{,}78 \cdot 1{,}28,$

leiame esmalt vastuse kolm tüvenumbrit 3—5—6. Koma asukoha määramiseks ümardame $2{,}78 \approx 3$ ja $1{,}28 \approx 1$. Et $3 \cdot 1 = 3$, siis peab vastus olema

3,56.

Täpne vastus on 3,5584, mis erineb lükatil saadud vastusest 0,0016 võrra.

Ülesandeid.

268. Kontrolli lükatiga järgnevad korrutised:

1) $2{,}2 \cdot 4{,}5 = 9{,}90$
$3{,}7 \cdot 1{,}8 = 6{,}66$
$5{,}8 \cdot 1{,}23 = 7{,}13$
$4{,}9 \cdot 2{,}02 = 9{,}90$

2) $6{,}5 \cdot 4{,}4 = 28{,}6$
$7{,}8 \cdot 2{,}05 = 16{,}0$
$8{,}6 \cdot 5{,}07 = 60{,}6$
$3{,}2 \cdot 5{,}7 = 18{,}2$

3) $13{,}5 \cdot 28 = 378$
$256 \cdot 4{,}7 = 1200$
$48{,}5 \cdot 333 = 16150$
$208 \cdot 7{,}2 = 1500$

4) $3{,}78 \cdot 0{,}64 = 2{,}42$
$256 \cdot 0{,}072 = 18{,}4$
$80{,}5 \cdot 0{,}473 = 38{,}0$
$0{,}082 \cdot 0{,}407 = 0{,}0334$

269. Põhjenda jagamise operatsiooni (kui korrutamise pöördoperatsiooni) teostamist lükatil.

270. Kontrolli lükatiga järgmised jagatised:

1) $5{,}3 : 2{,}9 = 1{,}825$
$8{,}8 : 3{,}7 = 2{,}38$
$6{,}55 : 4{,}5 = 1{,}455$
$3{,}07 : 1{,}16 = 2{,}64$

2) $4{,}8 : 7{,}2 = 0{,}667$
$1{,}06 : 6{,}8 = 0{,}156$
$2{,}43 : 2{,}85 = 0{,}853$
$7{,}4 : 9{,}05 = 0{,}818$

3) $16{,}7 : 3{,}06 = 5{,}46$
$882 : 72 = 12{,}25$
$6{,}3 : 17{,}8 = 0{,}354$
$44 : 960 = 0{,}0458$

4) $0{,}81 : 3{,}72 = 0{,}218$
$62{,}5 : 0{,}48 = 130$
$7{,}7 : 0{,}0203 = 379$
$0{,}505 : 0{,}065 = 7{,}77.$

5.16. RUUTUDE JA RUUTJUURTE LEIDMINE LÜKATIGA.

Skaalade A ja B peamine ülesanne ei seisne mitte korrutamis- ja jagamistehete teostamises, vaid arvu ruudu ning ruutjuure leidmises.

Võrdleme skaalade A ja D kohakuti seisvaid arve (joon. 63). Võrdlus näitab, et skaala D arvudele vastavad skaalal A nende arvude ruudud.

Tõestuseks vaatleme kahte suvalist teineteise kohal asuvat arvu y ja x skaalal A ja D (joon. 64).

Nende arvude kümnendlogaritmidele $\log y$ ja $\log x$ vastavad lõigud skaaladel on võrdsed. Kuna aga esimese lõigu kujutamisel kasutatud ühik on kaks korda väiksem teise lõigu kujutamisel kasutatud ühikust, siis $\log y$ arvuline väärtus on kaks korda suurem $\log x$ arvulisest väärtusest:

$$\log y = 2 \log x.$$

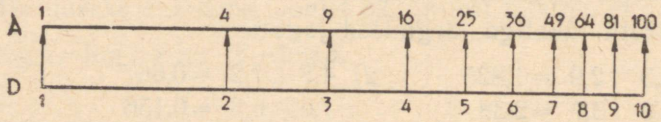
Kuid siis

$$\log y = \log x^2$$

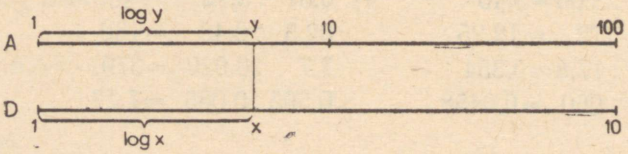
ja

$$y = x^2.$$

Sedasama võime tõestada ka skaalade B ja C kohakuti seisvate arvude kohta.



Joon. 63.



Joon. 64.

Arvu ruudu leidmiseks paigutame märkija skaala D vastavale kriipsule ja arvu ruudu tüvenumbrid loeme skaalalt A märkija alt.

Kui arv on ühekohalise täisosaga, siis arvu ruut võib olla ühe- või kahekohalise täisosaga. Kas arvu ruut on ühe- või kahekohalise täisosaga, seda näeme otsekohe skaalalt A. Kui arv ei ole ühekohalise täisosaga, siis loeme skaalalt A ainult arvu ruudu tüvenumbrid ja koma asukoha määrame hindamise teel. Koma asukoha määramisel võime rakendada ka ruutude tabeli puhul kasutatavat koma nihutamise võtet. Selleks vaatleme arvu esmalt ühekohalise täisosaga arvuna ja leiame selle ruudu. Siis nihutame arvus koma õigele kohale, vastuses aga teeme sama komanihutuse kaks korda.

Näide 1. Et leida 354^2, leiame esmalt $3{,}54^2 = 12{,}5$. Nüüd nihutame arvus koma õigele kohale, s. o. kahe koha võrra paremale. Arvu ruudus aga teeme sama komanihutuse kaks korda, s. t. nihutame koma paremale nelja koha võrra ja me saame

$$354^2 = 125\,000.$$

Näide 2. Samuti leiame $0{,}208^2$.

$$2{,}08^2 = 4{,}33,$$
$$0{,}208^2 = 0{,}0433.$$

Ülesandeid.

Leia järgmiste arvude ruudud:

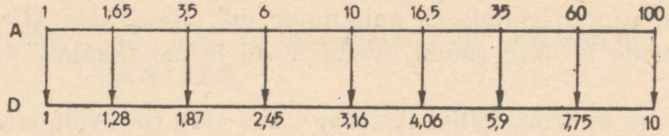
271. 4; 7; 10; 17; 26; 3,16; 0,41; 50,5; 0,155.

272. 91,3; 88; 8,08; 0,0745; 2380; 667; 6,07; 0,137.

*

On arusaadav, et kui asetada märkija skaala A mingile arvule, siis peab märkija all skaalal D olema arv, mis vastab skaala A arvu ruutjuurele. Ruutjuure leidmisel peame skaala A esimese poole arve lugema ühekohalise täisosaga arvudeks, teise poole arve aga kahekohalise täisosaga arvudeks ja skaala D arve ühekohalise täisosaga arvudeks.

Joonisel 65 on näidatud ruutjuurte leidmine nii ühekohalise kui ka kahekohalise täisosaga arvudest.



Joon. 65.

Arve, mis pole ühe- või kahekohalise täisosaga, muudame niisugusteks koma nihutamisega k a h e k o h a kaupa ja leiame siis ruutjuure. Kui ruutjuur on leitud, siis viime arvus koma õigele kohale tagasi, vastuses aga teeme sama komanihutuse kaks korda vähem.

Näiteks $\sqrt{360}$ leidmisel nihutame mõttes koma kahe koha võrra vasakule ja leiame $\sqrt{3{,}6}=1{,}9$. Siis viime arvus koma õigele kohale, s. o. kaks kohta paremale, vastuses aga teeme sama komanihutuse kaks korda vähem, s. o. viime koma ühe koha võrra paremale. Seega, $\sqrt{360}=19$.

Samuti leiame veel, et $\sqrt{0{,}73}=0{,}855$; $\sqrt{66\,000}=257$;

$\sqrt{1780}=42{,}2$; $\sqrt{0{,}005}=0{,}0707$; $\sqrt{3850000}=1960$.

Ülesandeid.

273. Leia ruutjuured järgmistest arvudest:

1) 3,9; 39; 2,02; 202; 115; 0,115; 6000; 0,6.

2) 0,07; 0,7; 440; 82000; 0,0051; 1080; 920000.

274. Lahenda lükati abil järgmised ülesanded:

1) $8{,}4^2+6{,}75^2$; 2) $\sqrt{32{,}5^2-17{,}6^2}$;

3) $\sqrt{520}+\sqrt{425}$; 4) $\sqrt{\sqrt{0{,}42}-\sqrt{0{,}32}}$.

275. Täisnurkse kolmnurga kaatetid on 425 m ja 380 m. Leia hüpotenuus.

276. Täisnurkse kolmnurga hüpotenuus on 9,2 cm ja üks kaatet 7,8 cm. Leia teine kaatet.

277. Võrdhaarse trapetsi lühem alus on 17,6 m, pikem alus 28 m ja haar 20,8 m. Leia trapetsi pindala.

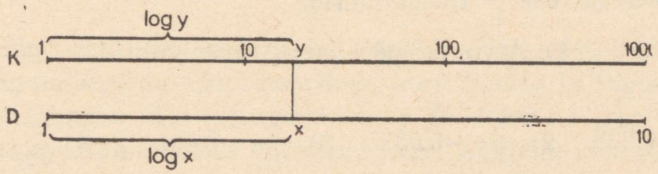
278. Võrdhaarse kolmnurga ümbermõõt on 68,6 cm ja haar 19,2 cm. Leia kolmnurga pindala.

279. Ringile on ühest ja samast punktist tõmmatud puutuja ja lõikaja. Lõikaja välisosa pikkus on 4,9 cm ja puutuja pikkus 7,05 cm. Arvuta ringi raadius.

280. Arvuta korrapärase kuusnurga pindala, kui kuusnurga külje pikkus on 5,6 m.

Märkus. Ruutude ja ruutjuurte leidmisel võib skaalade *A* ja *D* asemel kasutada ka skaalasid *B* ja *C*.

281. Põhjenda kuupide ja kuupjuurte leidmist lükatil (vt. joonist).



Leia järgmiste arvude kuubid:

282. 2,66; 1,72; 1,06; 3,72; 3,08; 9,05; 7,75.

283. 3,87; 6,23; 7,07; 8,88; 1,915; 2,05; 4,33.

284. 15,4; 154; 288; 92,5; 0,0444; 0,007; 1729.

285. 2760; 17,85; 2970; 0,955; 0,3; 0,03; 1040.

Leia kuupjuured järgmistest arvudest:

286. 5; 50; 500; 325; 17,2; 1,48; 22,6; 10; 100.

287. 304; 3,4; 25,6; 820; 93,5; 73,3; 1,89; 1,09.

288. 4320; 43200; 0,432; 0,22; 0,2; 100000; 0,01.

289. 0,0008; 72000000; 40500; 0,067; 0,129; 0,0125.

Arvuta:

290. 1) $\sqrt[3]{14{,}8^2+6{,}7^3}$ 2) $\sqrt[3]{328^2-260^2}$

291. 1) $0{,}47^3-0{,}38^3$ 2) $\sqrt[3]{7600000}$

292. $\sqrt[3]{56^2}$; $\sqrt[3]{455^2}$; $\sqrt[3]{0{,}79^2}$; $\sqrt[3]{0{,}006^2}$.

293. $\sqrt[3]{6{,}8^3}$; $\sqrt[3]{380^3}$; $\sqrt[3]{0{,}157^3}$; $\sqrt[3]{0{,}026^3}$.

294. Kuubi ruumala on 85 cm³. Leia kuubi ühe tahu pindala.

295. Kui suur on kuubi ruumala, kui tahu pindala on 4,26 m²?

5.17. PÖÖRDARVUDE LEIDMINE LÜKATIGA.

Keele keskmine skaala on samasugune nagu skaala C, kuid ta on trükitud keelele vastupidises järjekorras, nii et tema alguskriips on kohakuti skaala C lõppkriipsuga. Sellest sõltuvalt kasvavad jaotustele vastavad arvud paremalt vasakule, mida tuleb silmas pidada jaotuste märkimisel ja lugemisel. Seda skaalat nimetatakse pöördarvude skaalaks ja tähistatakse tähega R.

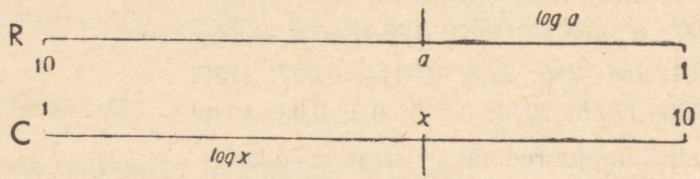
Märkides niidiga skaala R jaotuse a, loeme skaalal C niidi alt arvu a pöördväärtuse $\frac{1}{a}$ tüvenumbrid.

Näiteid. 1) Arvu 4,2 pöördarvu tüvenumbrid on 2—3—8, seega

$\frac{1}{4{,}2}=0{,}238$. 2) $\frac{1}{18{,}7}=0{,}0535$. 3) $\frac{1}{710}=0{,}00141$. 4) $\frac{1}{0{,}27}=3{,}7$.

5) $\frac{1}{0{,}052}=19{,}2$.

Tõestuseks vaatleme joonist 66.



Joon. 66.

Joonisel on näha, et

$$\log x+\log a=\log 10,$$

millest

$$x\cdot a=10 \text{ ja } x=\frac{10}{a}.$$

On ilmne, et arvudel $\frac{1}{a}$ ja $\frac{10}{a}$ on ühesugused tüvenumbrid.

Eespool toodud näidetest selgub, et kui arvu väärtus asub 1 ja 10 vahel, siis pöördarvu tüvenumbrite ees on 0; kui arvu väärtus asub 10 ja 100 vahel, siis pöördarvu tüvenumbrite ees on 0,0 jne. Aga kui arvu väärtus asub 1 ja 0,1 vahel, siis pöördarv on ühekohalise täisosaga; kui arvu väärtus asub 0,1 ja 0,01 vahel, siis pöördarv on kahekohalise täisosaga jne.

Ülesanne.

296. Leia järgmiste arvude pöördarvud.

3,7; 22,6; 450; 1080; 0,54; 0,0062;
0,074; 0,209; 92500; 0,000164; 72,3.

5.18. PÖÖRDARVUDE SKAALA KASUTAMINE AVALDISE VÄÄRTUSE ARVUTAMISEL.

Lükatiga on hõlbus arvutada avaldise väärtust, kui alustada saab jagamisega ja edasi sooritada korrutamise ja jagamise tehteid vaheldumisi. Kui niisugust tehete järjekorda ei saa kasutada avaldise arvutamisel, siis on mõnel juhul võimalik avaldist nii teisendada, et tehete järjekord muutub sobivamaks lükatiga arvutamisel.

Näide 1.

$x = 2{,}6 \cdot 41{,}5 \cdot 0{,}82.$

Teisendame korrutise kujule

$$x = 2{,}6 : \frac{1}{41{,}5} \cdot 0{,}82$$

ja teeme siis kõik tehted järjest, võttes arvu 41,5 skaalalt R.

Et viimane tehe on korrutamine, leiame skaalalt D niidi alt korrutise tüvenumbrid 8—8—5. Korrutise hindamisel saame kahekohalise täisosaga arvu, seega $x = 88{,}5$.

Näide 2.

$$\frac{32{,}6}{15{,}4 \cdot 2{,}7 \cdot 0{,}42} = 32{,}6 : 15{,}4 \cdot \frac{1}{2{,}7} : 0{,}42 = 1{,}86.$$

Ülesandeid.

297. Leia järgmiste avaldiste väärtused:

1) $16{,}2 \cdot 5{,}8 \cdot 0{,}23$
2) $6{,}05 \cdot 72{,}1 \cdot 0{,}133 \cdot 4{,}8$
3) $\frac{8{,}3 \cdot 14{,}7 \cdot 0{,}67}{3{,}88}$

4) $\frac{5,55}{131 \cdot 0,27 \cdot 0,183}$

5) $\frac{1}{4,65 \cdot 0,72 \cdot 3,8}$

298. 1) Vasest risttahuka mõõtmed on 15,8, 8,6 ja 7,2 cm. Leia risttahuka kaal. (Vase erikaal on 8,5.)

2) Siseujula basseini pikkus on 25 m ja laius 11,4 m. Kui kõrgele tõuseb veepind basseinis, kui sinna pumbata 430 m^3 vett?

*

Keerukama avaldise arvutamisel võib tekkida raskus koma koha määramisel. Sel juhul on otstarbekas kirjutada iga arv avaldises nii, et arv oleks ühekohalise täisosaga arvu ja kümne astme korrutis.

Näide.

$$\frac{8200 \cdot 0,037}{0,00072} = \frac{8,2 \cdot 10^3 \cdot 3,7 \cdot 10^{-2}}{7,2 \cdot 10^{-4}}.$$

Ülesandeid.

299. Arvuta.

1) $42000 \cdot 670 \cdot 840$

2) $22,8 \cdot 0,00485 \cdot 0,00017$

3) $\frac{0,056 \cdot 50300}{0,0091 \cdot 3,6 \cdot 6650}$

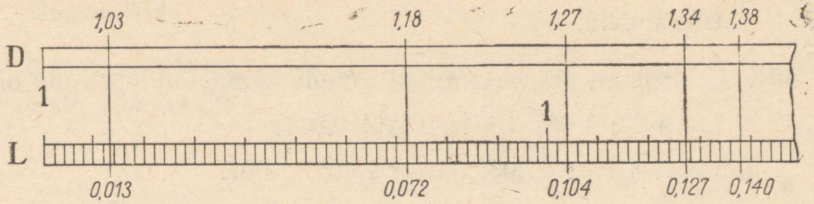
4) $\frac{192000 \cdot 470 \cdot 0,0069}{0,044 \cdot 0,081}$

5.19. LOGARITMIDE SKAALA.

Skaala D on logaritmfunktsiooni $y = \log x$ skaala. Et leida selle skaala abil mingi arvu x logaritmi y, peame mõõtma lõigu pikkuse, mis asub skaala D esimese jaotuskriipsu ja arvule x vastava jaotuskriipsu vahel, võttes mõõtühikuks kogu skaala pikkuse. Selleks kasutame lükati korpuse esikülje alumist skaalat L.

Skaala L mõõtühikuks on kogu skaala pikkus, mis on jaotatud kümnendikeks, kümnendikud omakorda sajandikeks ja sajandikud kahetuhandikeks.

Kui niidiga märgime arvu x skaalal D, siis on skaalal L niidi all arvu x logaritmi murdosa.



Joon. 67.

Joonisel 67 näeme, et

$\log 1{,}03 = 0{,}013$, $\log 1{,}27 = 0{,}104$;
$\log 1{,}18 = 0{,}072$, $\log 1{,}38 = 0{,}140$.

Logaritmi täisosa määrame varem õpitud reegli järgi. Nii on

$\log 103 = 2{,}013$, $\log 0{,}0013 = \bar{3}{,}114$,
$\log 0{,}118 = \bar{1}{,}072$, $\log 1380 = 3{,}140$.

Ülesandeid.

300. Leia lükati abil järgmiste arvude logaritmid ja võrdle tulemusi tabelite abil leitud logaritmidega:
2; 3; 8; 2,7; 5,8; 3,42; 7,45;
427; 5200; 0,0062; 0,0405; 72400; 100;
0,0005; 17,1; 0,101; 0,0925; 700000.

*

Kui on tarvis leida arvu tema antud logaritmi järgi, siis märgime niidiga skaalal L antud logaritmi murdosa ja loeme skaalalt D niidi alt arvu tüvenumbrid. Koma asukoha arvus määrame varem õpitud reegli järgi.

Näiteks, kui

1) $\log x = 0{,}114$, siis $x = 1{,}3$;
2) $\log x = 2{,}076$, siis $x = 119$;
3) $\log x = \bar{1}{,}550$, siis $x = 0{,}355$;
4) $\log x = 1{,}4$, siis $x = 25{,}1$.

Ülesandeid.

301. Leia lükati abil arvud, kui arvude kümnendlogaritmid on:

1,5; 1,24; $\bar{1}$,06; 2,448; 0,526; 0,062;

3,004; $\bar{1}$,737; $\bar{2}$,203; $\bar{3}$,048; 2,402; 1,007.

*

Lükati skaalad *D* ja *L* asendavad kolmekohalisi logaritmide tabeleid.

Lahendame näiteks mõned ülesanded, kasutades tabelite asemel lükatit.

1) Arvutame x, kui

$$x = 7{,}25^4 \cdot \sqrt[5]{0{,}026}.$$

$$\log x = 4 \log 7{,}25 + \tfrac{1}{5} \log 0{,}026 = 4 \cdot 0{,}86 + \tfrac{1}{5} \cdot \bar{2}{,}415 =$$

$$= 3{,}440 + \bar{1}{,}683 = 3{,}123.$$

$$x = 1340.$$

2) Leiame x võrrandist

$$1{,}7^x = 5{,}9.$$

$$x \cdot \log 1{,}7 = \log 5{,}9;$$

$$x = \frac{\log 5{,}9}{\log 1{,}7} = \frac{0{,}771}{0{,}231} = 3{,}34.$$

3) Arvutame x, kui

$$x = \log_{2{,}7} 17{,}5.$$

Logaritmi definitsiooni põhjal võime kirjutada

$$2{,}7^x = 17{,}5.$$

Saadud eksponentvõrrandi lahendame kümnendlogaritmide abil järgmiselt:

$$x \cdot \log 2{,}7 = \log 17{,}5;$$

$$x = \frac{\log 17{,}5}{\log 2{,}7} = \frac{1{,}243}{0{,}432} = 2{,}88.$$

Ülesandeid.

302. Kasutades lükatit, arvuta logaritmide abil järgmiste avaldiste väärtused.

1) $57{,}5^{1{,}2}$

2) $\sqrt[5]{1000}$

3) $15{,}8 \cdot \sqrt[7]{0{,}00805}$

4) $\frac{302^{0{,}8}}{47{,}5^{2{,}4}}$

5) $\frac{3{,}4^4 \cdot \sqrt[5]{4200}}{2{,}42^3}$

6) $\frac{28{,}2 \cdot \sqrt[6]{0{,}685}}{1{,}93^5 \cdot \sqrt[5]{930}}$

303. Arvuta.

1) $32 \cdot 1{,}4$; $29{,}3 : 61$; $2060 \cdot 0{,}0132$; $6{,}42 : 0{,}78$

2) $7{,}8 : 0{,}24$; $545 \cdot 37{,}8$; $7{,}8 \cdot 0{,}24$; $333 : 0{,}61$

304. Arvuta.

1) $\frac{6 \cdot 17{,}4}{8{,}3}$

2) $\frac{0{,}55 \cdot 4{,}3 \cdot 23}{0{,}8 \cdot 11{,}2 \cdot 2{,}8}$

3) $3{,}42 \cdot 0{,}206 \cdot 17{,}4 \cdot 8{,}3$

4) $\frac{1{,}72}{5{,}2 \cdot 0{,}27 \cdot 0{,}65}$

305. Arvuta.

1) $\sqrt{\frac{4{,}75 \cdot 62}{5{,}3}}$

2) $\sqrt[3]{\frac{44{,}5}{1{,}92 \cdot 0{,}67}}$

3) $\frac{15{,}8^2 \cdot \sqrt{0{,}7}}{\sqrt[3]{3{,}66}}$

4) $\frac{0{,}72^3 \cdot \sqrt[3]{2090}}{16{,}2^2}$

306. Lahenda lükati abil järgmised võrrandid.

1) $\frac{66{,}1}{x} = \frac{18{,}7}{4{,}6}$

2) $32{,}5x^2 - 710 = 0$

3) $8{,}4x^3 - 232 = 0$

4) $3{,}7x^2 - 5{,}28x - 4{,}3 = 0$

307. Arvuta rauast korrapärase nelinurkse püramiidi kaal, kui püramiidi põhiserv on 12,8 cm ja kõrgus 26 cm.

308. Leia niisuguse silindri diameeter, mille ruumala on 685 m^3 ja kõrgus on 4,7 m.

309. Leia kera raadius, kui kera ruumala on 14 900 dm^3.

310. Võrdhaarse trapetsi haar on 0,47 m ja alused on 1,08 m ja 0,69 m. Arvuta trapetsi pindala.

311. Arvuta ühe valgusaasta pikkus kilomeetrites.

312. Takistused 2,4, 1,78 ja 0,67 oomi on lülitatud paralleelselt. Kui suur on kogutakistus?

313. Kui kõrgele tõuseb algkiirusega $58\frac{m}{s}$ ülesvisatud keha?

5.20. LIHTSAMAID EKSPONENTVÕRRANDEID.

Olgu ülesandeks leida argumendi x väärtus, mille korral funktsioon ka^x on b, s. t. leida x, mis rahuldab võrrandit

$$ka^x=b.$$

Seda võrrandit nimetatakse **eksponentvõrrandiks.**

Kui vastava eksponentfunktsiooni graafik on olemas, siis saab antud ülesande vastuse leida selle graafiku abil. Joonisel 68 on esitatud funktsiooni $y=2^x$ graafik. Sealt leiame näiteks, et võrrandi

$$2^x=5$$

lahendiks on $x=2{,}3$.

Kui funktsiooni graafik puudub, siis kasutame selle võrrandi lahendamiseks nn. logaritmimise võtet.

Selleks logaritmime antud võrrandi mõlemaid pooli, saame

$$x\log 2=\log 5$$

ja siit

$$x=\frac{\log 5}{\log 2}=2{,}32.$$

Mõnikord on taoliste ülesannete puhul võimalik kasutada logaritmimise võtte asemel nn. aluste võrdsustamise võtet.

Näiteks olgu lahendada võrrand

$$2^x=8.$$

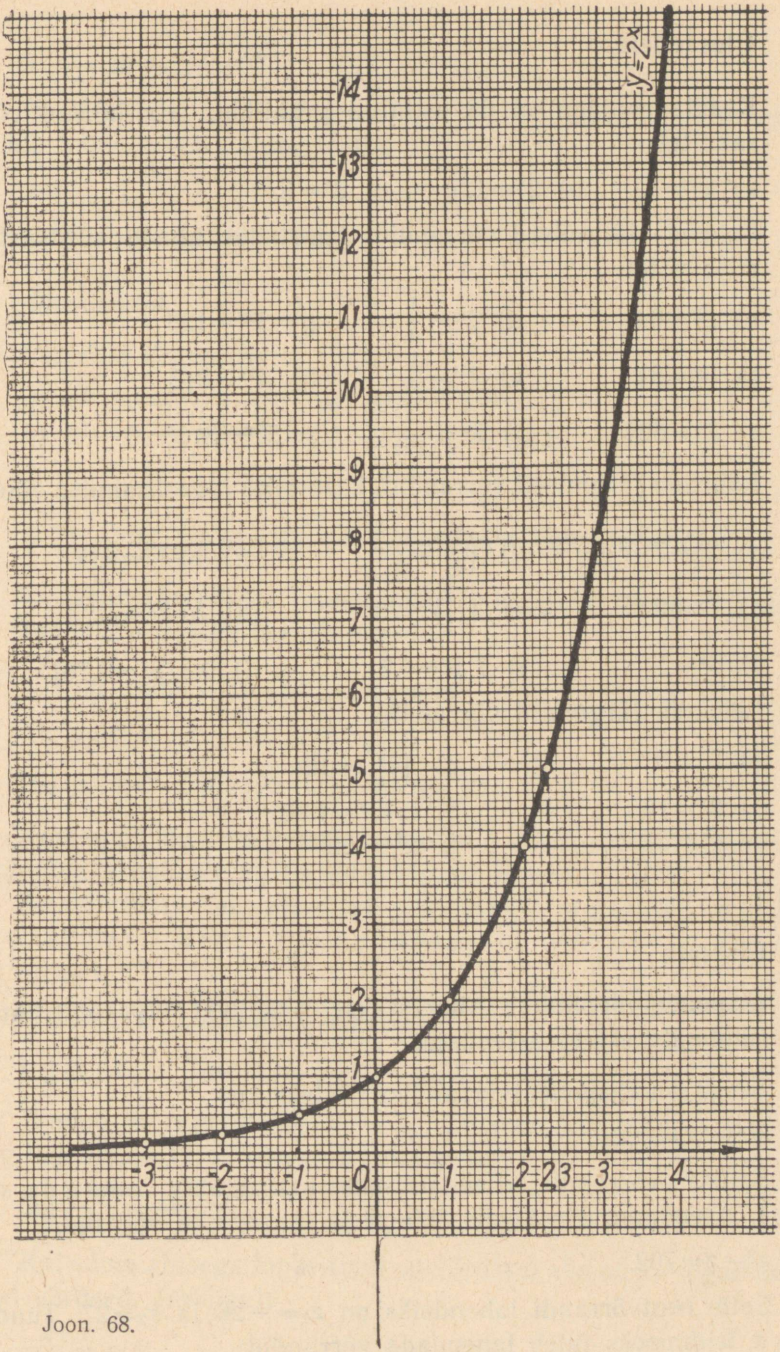
Et $8=2^3$, siis

$$2^x=2^3.$$

Kui astmed on võrdsed ja astme alused on võrdsed, siis peavad ka astendajad olema võrdsed.

Järelikult

$$x=3.$$



Joon. 68.

Ülesandeid.

314. Kasutades joonisel 68 esitatud graafikut, leia lahend võrranditele:

a) $2^x=3$, b) $2^x=1{,}5$, c) $2^x=6$.

315. Lahenda järgmised võrrandid, kasutades aluste võrdsustamise võtet:

a) $2^x=64$ d) $2^x=\frac{1}{4}$ g) $2^{2x}=128$

b) $3^x=81$ e) $3^x=\frac{1}{27}$ h) $3^{3x}=243$

c) $5^x=625$ f) $5^x=\frac{1}{125}$ i) $5^{5x}=3125$

316. Lahenda järgmised võrrandid, kasutades logaritmimise võtet:

a) $2^x=7$ d) $\left(\frac{2}{3}\right)^x=\frac{6}{7}$ g) $13{,}4^x=219$

b) $7^x=2$ e) $\left(\frac{12}{13}\right)^x=5$ h) $3{,}62^x=42{,}7$

c) $3^x=5$ f) $2{,}4^x=6{,}7$ i) $0{,}872^x=0{,}761$

317. Lahenda järgmised võrrandid.

a) $3^x=9$ d) $\left(\frac{1}{4}\right)^x=16$

b) $2^x=16$ e) $3{,}42^x=1{,}38$

c) $4^x=64$ f) $67^x=22$

*

Üldiselt,

eksponentvõrrandiks nimetatakse niisugust võrrandit, kus tundmatu esineb astendajas.

Seega on eksponentvõrrandiks näiteks ka

$3^{2x}-3^x=702$.

Sellise võrrandi lahendamiseks kasutatakse asendusvõtet. Asendame $3^x=z$, siis $3^{2x}=z^2$ ja lahendame võrrandi

$z^2-z=702$.

Selle ruutvõrrandi lahendeiks on $z_1=-26$ ja $z_2=27$. Tundmatu x leidmiseks tuleb lahendada võrrandid:

$3^x = -26$ ja $3^x = 27$.

Et $3^x > 0$ x iga väärtuse korral, siis esimesel võrrandil puudub lahend. Teisest võrrandist saame, et

$x = 3$,

mis rahuldab ka antud võrrandit.

Ülesandeid.

318. Lahenda võrrandid:

a) $7^{2x} - 6 \cdot 7^x + 5 = 0$ c) $2^{2x+1} + 2^{x+2} = 16$
b) $3^{2x} - 5 \cdot 3^x + 6 = 0$ d) $3^{2x+5} - 3^{x+2} = 2$

5.21. LIHTSAMAID LOGARITMVÕRRANDEID.

Logaritmvõrrandiks nimetatakse niisugust võrrandit, kus tundmatu esineb logaritmitavas.

Nii on näiteks logaritmvõrrandid:

$\log x = 2$;

$\log(x+6) - \frac{1}{2}\log(2x-3) = 2 - \log 25$.

Võrrandit $\log x = a$ saame lahendada, kui kasutame logaritmfunktsiooni graafikut või antilogaritmide tabelit.

Analüütilisel lahendamisel kasutatakse samade alustega logaritmide võrdsustamise võtet ja asendusvõtet.

Näide 1. Lahendada võrrand

$\log(x+6) - \frac{1}{2}\log(2x-3) = 2 - \log 25$.

Teades, et logaritmide vahe on jagatise logaritm ja et $2 = \log 100$, võime antud võrrandi esitada kujul

$$\log \frac{x+6}{\sqrt{2x-3}} = \log \frac{100}{25}.$$

Kui sama alusega logaritmid on võrdsed, siis on ka logaritmitavad võrdsed. Järelikult

$$\frac{x+6}{\sqrt{2x-3}} = 4.$$

Selle juurvõrrandi lahendeiks on $x_1=6$ ja $x_2=14$, mis mõlemad rahuldavad antud võrrandit.

Näide 2. Lahendada võrrand

$$\frac{1}{12}\log^2 x=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\log x.$$

Asendame $\log x=z$, saame võrrandi

$$\frac{1}{12}z^2=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}z.$$

See võrrand on teisendatav kujule

$$z^2+3z-4=0,$$

mille lahendeiks on $z_1=-4$ ja $z_2=1$.

Seega

$$\log x_1=-4,$$

$$x_1=10^{-4}$$

ja

$$\log x_2=1,$$

$$x_2=10.$$

Mõlemad lahendid rahuldavad antud võrrandit.

Ülesandeid.

319. Lahenda võrrandid:

a) $\log x=2-\log 5$

b) $\frac{\log x}{1-\log 2}=2$

c) $\log\left(\frac{1}{2}+x\right)=\log\frac{1}{2}-\log x$

d) $\frac{1}{5-\log x}+\frac{2}{1+\log x}=1$

320. Lahenda võrrandid:

a) $x^{\log x+2}=1000$

b) $x^{2-\frac{\log x}{2}}=100$

c) $100^{\log(x+2)}=10\,000$

d) $(0{,}1)^{-(x^2-5x+8)}=100$

321. Esita järgmised võrrandid süsteemina ja lahenda graafiliselt.

a) $2^x=x$

b) $2^x-2x=0$

c) $2^x+x=1$

d) $\log x=x$

e) $\log x+0{,}5x=0$

f) $\log x-2x=3$

322. Lahenda järgmised võrrandid.

1) $2^{x+1}+4^x=80$

2) $2^{x+3}+4^{x+1}=320$

3) $3^{x+2}+9^{x+1}=810$

4) $2\log x=\log 192+\log\frac{3}{4}$

5) $5\log x-\log 288=3\log\frac{x}{2}$

6) $\left(\frac{3}{4}\right)^x=51{,}5$

7) $3^{0{,}5x}=768$

8) $5^{x^2-3x}=625$

9) $7^{x^2-5x+9}=343$

10) $3\cdot 2^{x+3}=192\cdot 3^{x-3}$

6. GEOMEETRILINE PROGRESSIOON.

6.1. GEOMEETRILISE PROGRESSIOONI MÕISTE.

Andes argumendile x naturaalarvulised väärtused

$1, 2, 3, \ldots, n, \ldots,$

saame eksponentfunktsioonist $y=5^x$ jada

$5, 25, 125, \ldots, 5^n, \ldots .$

Sellele jadale on iseloomulikuks omaduseks see, et alates teisest liikmest on iga arvu ja temale eelneva arvu jagatis võrdne astme alusega 5.

Vaadeldes eksponentfunktsioonist $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$ saadavat jada

$\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \ldots, \left(\frac{1}{4}\right)^n, \ldots$

või eksponentfunktsioonile $0{,}3 \cdot 2^x$ vastavat jada

$0{,}6;\ 1{,}2;\ 2{,}4;\ \ldots\ ;\ 0{,}3 \cdot 2^n;\ \ldots$

näeme, et ka neis on teisest liikmest alates iga arvu ja temale eelneva arvu jagatis võrdne sellele jadale vastavas eksponentfunktsioonis esineva astme alusega.

Arvujada, milles teisest liikmest alates on iga arvu ja temale eelneva arvu jagatis jääv suurus, nimetatakse geomeetriliseks progressiooniks.

Seda jäävat suurust nimetatakse geomeetrilise progressiooni **teguriks** ja tähistatakse tähega q.

Toodud kolm jada on seega geomeetrilised progressioonid.

Geomeetrilise progressiooni definitsioonis ei nõuta, et tegur q peaks olema positiivne, s. t. siin puudub nõue, et eksponentfunktsioonis esinev astme alus oleks positiivne. Seega on geomeetrilised

progressioonid saadavad ka avaldistest $k \cdot q^x$, kus $q<0$. Näiteks on geomeetrilised progressioonid mõlemad arvujadad

$$-1,\ 2,\ -4,\ \ldots,\ \tfrac{1}{2}(-2)^n,\ \ldots,$$

ja

$$\tfrac{3}{2},\ -\tfrac{3}{4},\ \tfrac{3}{8},\ \ldots,\ (-3)\left(-\tfrac{1}{2}\right)^n,\ \ldots.$$

Geomeetrilise progressiooni definitsiooni rahuldavad ka jadad nagu

$$5,\ 5,\ 5,\ \ldots,\ 5\cdot(1)^n,\ \ldots,$$
$$2,\ (-2),\ 2,\ \ldots,\ (-2)(-1)^n,\ \ldots,$$
$$3,\ 0,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 3\cdot 0^n,\ \ldots.$$

Kui tähistame geomeetrilise progressiooni esimese, teise, kolmanda jne. liikme vastavalt

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots,$$

siis definitsiooni põhjal on

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_2}=\ldots=\frac{a_n}{a_{n-1}}=\ldots=q. \qquad (*)$$

Leia käesolevas paragrahvis vaadeldud geomeetriliste progressioonide tegurid.

6.2. GEOMEETRILISE PROGRESSIOONI ÜLDLIIKME VALEM.

Võrduste reast (*) saame, et

$$a_2=a_1\cdot q,$$
$$a_3=a_2\cdot q,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$a_n=a_{n-1}\cdot q.$$

Nende võrduste vastavaid pooli omavahel korrutades saame

$$a_2\cdot a_3\cdot\ldots\cdot a_n=a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_{n-1}\cdot q^{n-1}.$$

Jagades nii saadud võrduse mõlemad pooled korrutisega $a_2\cdot a_3\cdot\ldots\cdot a_{n-1}$, saame

$$\boxed{a_n=a_1\cdot q^{n-1}}$$

Seda võrdust nimetatakse **geomeetrilise progressiooni üldliikme valemiks.** See seob nelja suurust: a_1, q, n ja a_n. Kui neist kolm on antud, siis saame üldliikme valemi abil neljanda arvutada.

Näiteid. a) Leida jada

0,6; 1,2; 2,4; ...; $0{,}3 \cdot 2^n$; ... 7. liige.

Siin on antud $a_1 = 0{,}6$, $q = 2$, $n = 7$. Üldliikme valemi põhjal

$a_7 = 0{,}6 \cdot 2^6 = 153{,}6$.

b) On antud, et $a_8 = -4374$ ja $a_1 = 2$. Leida q.

Et $q = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}}$, siis praegusel juhul

$$q = \sqrt[7]{\frac{-4374}{2}} = \sqrt[7]{-2187} = -3.$$

Tulemus on leitud proovimise teel.

Kuidas lahendatakse taolist ülesannet siis, kui proovimine on palju aega nõudev?

Ülesandeid.

323. Missugust arvujada nimetatakse aritmeetiliseks progressiooniks?

Kuidas avaldub aritmeetilise progressiooni üldliikme valem?

324. Esita eksponentfunktsioonidest

3^x; $\left(\frac{2}{3}\right)^x$; $\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^x$; $2{,}3 \cdot 1{,}2^x$

saadavate geomeetriliste progressioonide neli esimest liiget.

325. Tee kindlaks, missugused järgmistest arvude jadadest on aritmeetilised ja missugused geomeetrilised progressioonid.

a) 1, 2, 3, 4, 5, ...
b) 2, 4, 8, 16, ...
c) -5, -1, 3, 7, ...
d) $\frac{2}{3}$, $-\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, $-\frac{1}{12}$, ...
e) 6; 0; -6, -12, ...
f) -32, -16, 16, 32, ...
g) 14, -7, 3,5, $-\frac{7}{4}$, ...
h) 456, 233, 10, -213, ...

326. Leia geomeetrilise progressiooni nõutud elemendid.

a) 5. liige, kui $a_1=3$ ja $q=2$;

b) 4. liige, kui $a_3=35$ ja $q=5$;

c) 6. liige, kui $a_9=\frac{2}{3}$ ja $q=\frac{1}{2}$;

d) 1. liige, kui $a_8=256$ ja $q=4$;

e) 13. liige, kui $a_7=0{,}2187$ ja $q=1\frac{2}{3}$;

f) 6. liige ja tegur, kui $a_5=4$ ja $a_4=169$;

g) 9. liige ja tegur, kui $a_8=64$ ja $a_{10}=9$.

327. Leia geomeetrilise progressiooni esimene liige a_1, kui

a) $a_8=640$ ja $q=2$;

b) $a_6=500$ ja $q=1{,}2$;

c) $a_6=3125$ ja $q=2{,}5$.

328. Leia geomeetrilise progressiooni tegur q, kui

a) $a_1=\frac{1}{9}$ ja $a_{10}=2187$;

b) $a_1=6{,}25$ ja $a_7=0{,}0256$;

c) $a_1=\frac{1}{64}$ ja $a_{13}=64$.

329. Leia geomeetrilise progressiooni liikmete arv n, kui

a) $a_1=6$, $a_n=96$ ja $q=4$;

b) $a_1=0{,}3$, $a_n=0{,}108$ ja $q=0{,}6$;

c) $a_1=74{,}67$, $a_n=2{,}333$ ja $q=0{,}5$.

330. Arvuta logaritmide abil

a) a_1, kui $q=0{,}75$ ja $a_5=1{,}9$;

b) a_1, kui $q=1{,}083$ ja $a_{41}=239{,}6$;

c) a_{20}, kui $a_1=2$ ja $q=1{,}229$;

d) a_{25}, kui $a_1=1$ ja $q=1{,}334$.

331. a) Õhukindlas anumas on 24 g õhku. Õhupumba iga tõmbega imetakse $\frac{3}{8}$ anumas olevast õhust välja. Mitu grammi õhku on jäänud anumasse 15 tõmbe järel?

b) Õhupumba kupli all on õhu rõhk normaalne. Pumba iga tõmbega imetakse kupli alt välja 2% seal olevast õhust. Kui suur õhurõhk on kupli all pärast 20 tõmmet?

332. a) Määra geomeetrilise progressiooni 15. liige teades, et 14. liige on $\frac{8}{9}$ ja 16. liige on $\frac{32}{81}$.

b) Arvud 6, x ja 96 moodustavad antud järjekorras geomeetrilise progressiooni. Määra arv x.

c) Arvud $a-2$, a ja $a+4$ moodustavad antud järjekorras geomeetrilise progressiooni. Leia arv a.

d) Määra arvud x ja y, kui arvud 8, x, y ja 27 moodustavad geomeetrilise progressiooni.

6.3. GEOMEETRILISE PROGRESSIOONI SUMMA VALEM.

Olgu antud geomeetriline progressioon

$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n;$

nõutakse leida summat

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n.$$

Kui liikmeid on vähe, siis on seda summat lihtne leida otsese liitmise teel. Näiteks

$$5 + 25 + 125 + 625 = 780.$$

Kui liikmeid on palju, siis otsene liitmine oleks tülikas ja aeganõudev. Seepärast on otstarbekohane siin samuti nagu aritmeetilise progressiooni puhulgi tuletada valem, mis hõlbustab otsitava summa arvutamist.

Kasutades üldliikme valemit, esitame summa S_n kõik liidetavad progressiooni esimese liikme ja teguri kaudu:

$$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \ldots + a_1q^{n-1}. \quad (1)$$

Korrutades selle võrduse mõlemad pooled q-ga, saame võrduse

$$S_nq = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \ldots + a_1q^n. \quad (2)$$

Lahutades võrduse (2) pooltest võrduse (1) vastavad pooled, saame

$$S_nq - S_n = (a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \ldots + a_1q^n) - (a_1 + a_1q + a_1q^2 + \ldots + a_1q^{n-1}).$$

Avades sulud, saame pärast koondamist

$$S_nq - S_n = a_1q^n - a_1$$

ehk

$$S_n(q-1)=a_1(q^n-1),$$

millest $q\neq 1$ korral

$$\boxed{S_n=\frac{a_1(q^n-1)}{q-1}}$$

Saadud valem ongi geomeetrilise progressiooni **summa valem.** Leiame selle abil näiteks progressiooni

2, 6, 18, 54, ...

üheksa esimese liikme summa.

Siin on $a_1=2$, $q=3$ ja $n=9$. Seega

$$S_9=\frac{(3^9-1)\cdot 2}{3-1}=3^9-1=19\,683-1=19\,682.$$

Missugusel kujul on otstarbekohane esitada geomeetrilise progressiooni summa valem juhul, kui $0<q<1$? Miks?

Geomeetrilise progressiooni summa valemile võib anda ka teistsuguse kuju. Selleks avame kõigepealt lugejas sulud:

$$S_n=\frac{a_1q^n-a_1}{q-1};$$

rakendades saadud murru lugeja esimeses liikmes progressiooni üldliikme valemit $a_n=a_1q^{n-1}$, saame selle liikme kirjutada kujul a_nq ning summa valemi kujul:

$$\boxed{S_n=\frac{a_nq-a_1}{q-1}}$$

Viimast summa valemi kuju kasutame juhul, kui on teada progressiooni viimane liige a_n.

Ülesandeid.

333. Leia geomeetrilise progressiooni summa valemi abil järgmised summad.

a) $34+68+136+272+544+1088$

b) $7+3\frac{1}{2}+1\frac{3}{4}+\frac{7}{8}+\frac{7}{16}+\frac{7}{32}$

c) $2-10+50-250+1250-6250$

d) $15-12+9{,}6-7{,}68+6{,}144$

334. Leia geomeetrilise progressiooni

a) $6,\ 3\sqrt{3};\ 4\frac{1}{2};$ ... 12 liikme summa;

b) $\sqrt[3]{16};\ \sqrt[3]{4};\ 1;$ ... 9 liikme summa;

c) $-12{,}5;\ 5;\ -2;$ ... 10 liikme summa.

335. Leia neli arvu, mis moodustavad geomeetrilise progressiooni, kui teine arv on esimesest 12 võrra suurem ja neljas arv kolmandast 108 võrra suurem.

336. Geomeetrilises progressioonis on kolmas liige $3\frac{1}{8}$ ja neljas liige $4\frac{11}{16}$. Leia selle progressiooni 8 liikme summa.

337. Geomeetrilises progressioonis, milles on 8 liiget, on kaks keskmist liiget $9\sqrt{2}$ ja $9\sqrt{6}$. Leia selle progressiooni summa.

338. Joonesta alljärgnev geomeetrilise progressiooni elementide tabel vihikusse ning täida lüngad.

a_1	q	n	a_n	S_n
2	3	15		
4	5		1 562 500	
1		9		6 725 601
	6	11	241 864 704	
	−2		262 144	174 763
1		20	−524 288	
32	$2\frac{1}{2}$			5 187
	3	10		$3\,280\frac{4}{9}$
	2	13	64	
2 187	$\frac{2}{3}$	12		
	$1\frac{1}{2}$	13	$132\,860\frac{1}{4}$	
−0,0256	−2,5			−11,1534
6,25		7	0,0256	
	0,5		6,25	51 193,75

339. Alljärgnevate summade liidetavad moodustavad geomeetrilise progressiooni. Leia igal antud juhul: 1) progressiooni tegur, 2) puuduvad liidetavad, 3) liidetavate arv ja 4) summa.

a) $a^{10}+a^9b+a^8b^2+\ldots+b^{10}$

b) $a^7-a^6b+a^5b^2-a^4b^3+\ldots-b^7$

c) $a+\sqrt[5]{a^4b}+\sqrt[5]{a^3b^2}+\ldots+b$

d) $a+\sqrt[7]{a^6b}+\sqrt[7]{a^5b^2}+\ldots+b$

e) $\sqrt[8]{a^7}+\sqrt[8]{a^6b}+\sqrt[8]{a^5b^2}+\ldots+\sqrt[8]{b^7}$.

340. Aednik tellis endale haruldase taime 20 seemet. Ta külvas esimesel ja igal järgmisel kevadel kõik seemned ja sai igal sügisel igalt taimelt 7 seemet. Oletades, et ükski seeme ei lähe kaduma, leia, mitmendal aastal saab aednik 5 kg seemneid, kui 40 seemet kaalub 1 g.

341. Päevalill annab aastas keskmiselt 2 000 seemet. Oletame, et kasvutingimused on päevalillele ühesugused üle kogu maakera, et iga taim vajab jõudsaks arenemiseks 1 m^2 pinda, et ükski seeme ei lähe kaduma, vaid idaneb ja annab uue taime, ning et taim annab aastas ühe lõikuse. Mitu aastat kuluks, et ühest päevalilleseemnest arenenud taimed kataksid maakera kogu maismaa osa? Maakera raadius on 6 400 km ja mered moodustavad 72% maakera pinnast.

342. Geomeetrilises progressioonis on 20 liiget. Paarisarvulise indeksiga kohtadel olevate liikmete summa on a ja paarituarvulise indeksiga kohtadel olevate liikmete summa on b. Leia esimene liige ja progressiooni tegur.

343. Geomeetrilises progressioonis on 40 liiget. Esimese kahekümne liikme summa on a ja viimase kahekümne liikme summa on b. Leia esimene liige ja progressiooni tegur.

344. Keegi räägib uudise kahele tuttavale. Need räägivad selle edasi kumbki omakorda kahele tuttavale jne. Oletame, et edasirääkimine toimub veerand tunni jooksul ja ainult neile, kes seda uudist veel ei tea. Mis kellaks on see uudis 7-miljonilise elanikkonnaga linnas kõigile teada, kui esimene rääkimine toimub kell 7 hommikul?

345. Kolhoos suurendab igal aastal oma põllupinda $\frac{1}{15}$ osa võrra eelmise aasta pinnast. Mitmendal aastal ületab põllupinna kogukasv 50% lähtepinnast?

346. Positiivsete liikmetega geomeetrilise progressiooni kolme esimese liikme summa on 221. Selle progressiooni kolmanda ja esimese liikme vahe on 136. Leia selle progressiooni kuue esimese liikme summa.

347. Tõesta, et geomeetrilises progressioonis on iga liige (välja arvatud esimene) temale eelneva ja järgneva liikme geomeetriline keskmine.

348. Tõesta, et kui kolm arvu x, y ja z moodustavad geomeetrilise progressiooni, siis

$$(x+y+z)(x-y+z)=x^2+y^2+z^2.$$

349. Tõesta, et iga geomeetrilise progressiooni algusest ja lõpust võrdsetel kaugustel seisvate liikmete korrutis on jääv ning võrdub äärmiste liikmete korrutisega.

350. Kasutades eelmises ülesandes leitud omadust, tuleta geomeetrilise progressiooni n liikme korrutise valem.

351. Leia progressiooni 1, 4, 16, ... kuue esimese liikme korrutis.

352. India prints Schiram oli malemängust nii vaimustatud, et lubas mängu leiutajale Sissa Ibn Dahirile autasuna iga summa, mille see peaks küsima. Mängu leiutaja palus endale autasu nisuterades ja nimelt: 1 tera malelaua esimesele ruudule, 2 tera teisele, 4 tera kolmandale, 8 tera neljandale jne. Mitu tera palus endale Sissa Ibn Dahir?
Terade hulgast kujutluse saamiseks olgu antud järgmised andmed: 1 kott (70 kg) sisaldab ligikaudu $1{,}6 \cdot 10^6$ tera; ühe kaubavaguni kandejõud on 16 tonni.

6.4. TÕKESTAMATULT KAHANEVA GEOMEETRILISE PROGRESSIOONI MÕISTE.

Kui geomeetrilise progressiooni tegur on lihtmurd, s. t. $|q|<1$, siis liikmete arvu n tõkestamatul kasvamisel geomeetrilise progressiooni liikmed kahanevad tõkestamatult. Näiteks progressiooni

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots$$

puhul tegur $q=\frac{1}{2}$ ning seetõttu $n\to\infty$ korral

$a_n\to 0$.

Sama võib öelda progressiooni

$$3; -1; \frac{1}{3}; -\frac{1}{9}; \frac{1}{27}; -\frac{1}{81}; \ldots$$

kohta, milles tegur on negatiivne, kuid absoluutväärtuselt väiksem kui 1 $\left(\text{antud juhul } q=-\frac{1}{3}\right)$.

Progressiooni nimetatakse lõpmatuks, kui tema liikmete arv n tõkestamatult kasvab, s. t. kui $n\to\infty$. Geomeetrilist progressiooni nimetatakse kahanevaks, kui $|q|<1$.

Lõpmatu ja kahaneva geomeetrilise progressiooni üldliige on tõkestamatult kahanev suurus.

Sümboleis:

kui $n\to\infty$ ja $|q|<1$, siis $a_n\to 0$.

Seepärast nimetatakse lõpmatut ja kahanevat geomeetrilist progressiooni ka **tõkestamatult kahanevaks geomeetriliseks progressiooniks.**

6.5. TÕKESTAMATULT KAHANEVA GEOMEETRILISE PROGRESSIOONI SUMMA.

Olgu vaja leida lõpmatu geomeetrilise progressiooni

2; 1; 0,5; 0,25; 0,125; ...

liikmete summa. Eespool tuletatud summa valemeid ei saa nüüd kasutada, sest need kehtivad ainult siis, kui geomeetrilise progressiooni liikmete arv n on lõplik. Seepärast võtamegi liikmete arvu esialgu lõpliku ning uurime summa muutumist liikmete arvu järsul suurenemisel. Näiteks kümne, saja ja tuhande esimese liikme summa arvutamisel saaksime valemi põhjal:

$$S_{10} = \frac{2(1-0{,}5^{10})}{1-0{,}5} = 4(1-0{,}5^{10});$$

$S_{100} = \quad = 4(1-0{,}5^{100})$;

$S_{1000} = \quad = 4(1-0{,}5^{1000})$.

Märkame, et liikmete arvu kasvamisel antud progressiooni summa läheneb piiramatult arvule 4, sest kui $n \to \infty$, siis $0{,}5^n \to 0$. Seepärast loemegi antud lõpmatu geomeetrilise progressiooni liikmete summaks arvu 4.

Tõkestamatult kahaneva geomeetrilise progressiooni summaks S loetakse selle progressiooni n esimese liikme summa S_n piirväärtust, kui n tõkestamatult kasvab, s. t.

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n.$$

Et

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}, \quad \text{kus } |q| < 1,$$

siis

$$S = \lim_{n \to \infty} \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{a_1}{1-q}.$$

Põhjenda saadud tulemust!

Seega

$$\boxed{S = \frac{a_1}{1-q},}$$

mis ongi tõkestamatult kahaneva geomeetrilise progressiooni summa valemiks. Valemi rakendamise näitena arvutame järgmise lõpmatu progressiooni summa:

$$3 - 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} - \frac{1}{81} + \ldots$$

Siin $a_1 = 3$ ja $q = -\frac{1}{3}$, seega

$$S = \frac{3}{1+\frac{1}{3}} = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}.$$

Ülesandeid.

353. Leia iga järgmise lõpmatult kahaneva geomeetrilise progressiooni summa.

a) $1+\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\ldots$

b) $16+4+1+\frac{1}{4}+\ldots$

c) $\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{3}{8}+\frac{9}{32}+\ldots$

d) $3\cdot 2+2+\frac{2}{3}+\ldots$

354. Joonesta tabelid vihikusse ja täida tühjad kohad, kui a_1 on tõkestamatult kahaneva geomeetrilise progressiooni esimene liige, q — tegur ja S — summa.

a_1	q	S
7	$\frac{1}{2}$	
	$-\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$
5		$7\frac{1}{2}$
14	$-\frac{2}{5}$	
	0,2	15

a_1	q	S
117		90
	0,96	250
0,88		0,5
0,94	0,53	
	−0,1	1,2

355. Leia tõkestamatult kahaneva geomeetrilise progressiooni esimene liige ja suurusest y sõltuv tegur, kui summaks on:

a) $\frac{1}{2-y}$; b) $\frac{1}{5+2y}$; c) $\frac{3}{4+y}$.

Missugust väärtust ei tohi $|y|$ ületada?

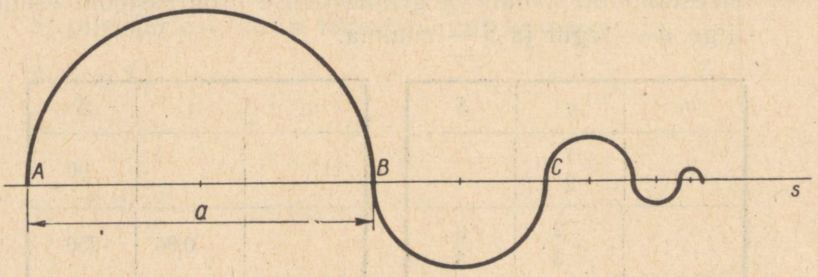
Näide. Olgu $S=\frac{1}{8+3y}$. Et $S=\frac{a_1}{1-q}$, siis tuleb antud murd teisendada niisugusele kujule, kus nimetajas oleks esimeseks liikmeks 1. Selle kuju saame murru lugeja ja nimetaja jagamisel 8-ga:

$$S=\frac{\frac{1}{8}}{1+\frac{3}{8}y}.$$

Siit võime kirjutada, et $a_1 = \frac{1}{8}$ ja $q = -\frac{3}{8}y$. Et rahuldada tingimust $|q| < 1$, peab olema $|y| < \frac{8}{3}$.

356. 45°-se nurga haaral on võetud punkt, mis on nurga tipust kaugusel a. Sellest punktist on ehitatud ristlõik teisele haarale, selle ristlõigu aluspunktist on ehitatud ristlõik esimesele haarale jne. lõpmata. Leia nende ristlõikude pikkuste summa.

357. Sirgel s kujutatud lõiku $AB = a$ (joon. 69) pikendatakse tema poole võrra ja saadakse punkt C. Lõiku BC pikendatakse



Joon. 69

omakorda tema poole võrra jne. Kõigile nii saadud lõikudele kui diameetritele joonestatakse poolringjooned vaheldumisi üks ühele, teine teisele poole sirget s. Leia tekkiva kõverjoone kogupikkus p ning kõigi poolringide pindalade summa S.

6.6. HARILIKU MURRU TEISENDAMINE KÜMNENDMURRUKS.

Hariliku murru teisendamisel kümnendmurruks jagatakse murru lugeja murru nimetajaga. See jagamine kas lõpeb ja saame tulemuseks lõpliku kümnendmurru, nagu näiteks

$$\frac{5}{4} = 1{,}25,$$

või ei lõpe ja saame tulemuseks lõpmatu perioodilise kümnendmurru, nagu näiteks

$$\frac{4}{3} = 1{,}3333\ldots,$$

mida lühemalt kirjutatakse nii:

$$\frac{4}{3} = 1,(3).$$

Et kümnendmurd on võrdne hariliku murruga, mille nimetajaks on kümne aste, siis lõpliku kümnendmurruna avalduvad need harilikud murrud, mille nimetajas ei ole teisi tegureid peale 2 ja 5. Põhjenda seda!

Kui murru lugeja ei jagu täpselt nimetajaga, siis tekib jääk. Jäägile kirjutatakse juurde 0, saadud arv jagatakse uuesti nimetajaga, tekib uus jääk jne. Kui nimetaja teguriks on arv, mis ei ole 2 ega 5, siis jätkub jagamise protsess lõputult. Jagatiseks saame lõpmatu kümnendmurru. Jääk on alati väiksem kui nimetaja. Näiteks, kui on antud murd $\frac{a}{b}$, siis jääkideks võivad olla arvud 1, 2, ..., $(b-1)$, s. t. võimalik jääkide arv on lõplik ja võrdub $(b-1)$-ga. Niisiis, kui jagamise protsess on lõputu, siis arv, mis on kord olnud jäägiks, kordub hiljem jälle jäägina. Siis korduvad aga ka temale järgnevad jäägid. Näiteks teisendame $\frac{37}{7}$ ja $\frac{19}{14}$ kümnendmurruks.

37	7
20	5,285714 ...
60	
40	
50	
10	
30	
20	

19	14
50	1,3571428 ...
80	
100	
20	
60	
40	
120	
80	

Siin saime esimese ülesande jääkideks arvud 2, 6, 4, 5, 1, 3 ja siis tuli jäägiks jälle 2, millele järgnevad uuesti 6, 4, 5, 1, 3 ning jällegi 2. Nii kordub see lõputult.

Jääkidele 2, 6, 4, 5, 1, 3 vastavad jagatises numbrid 2, 8, 5, 7, 1, 4, mis samuti hakkavad korduma. See number või numbrite rühm, mis jagatises hakkab korduma, moodustab jagatise **perioodi.** Et jagatiseks on lõpmatu kümnendmurd, siis ei saa seda täielikult üles kirjutada. Seetõttu on kokku lepitud kirjutada jagatises ainult üks periood ja eraldada see sulgudega.

Nii kirjutame

$\frac{37}{7} = 5,(285714)$ ja $\frac{19}{14} = 1,3(571428)$.

Kui periood algab kohe pärast koma, siis nimetatakse seda arvu **puhtperioodiliseks kümnendmurruks.** Kui aga periood ei alga kohe pärast koma, siis nimetatakse seda arvu **segaperioodiliseks kümnendmurruks.** Seega esimene toodud näidetest on lõpmatu puhtperioodiline ja teine lõpmatu segaperioodiline kümnendmurd.

Ülesandeid.

358. Missugused järgmistest murdudest on esitatavad lõpliku kümnendmurruna:

$\frac{2}{5}, \frac{6}{25}, \frac{4}{35}, \frac{12}{17}, \frac{11}{8}, \frac{14}{15}, \frac{121}{16}, \frac{1024}{625}$?

359. Esita järgmised murrud kümnendmurdudena:

$\frac{9}{5}, \frac{29}{64}, \frac{132}{25}, \frac{17}{6}, \frac{35}{32}, \frac{16}{11}, \frac{87}{63}$.

6.7. PERIOODILISE KÜMNENDMURRU ESITAMINE HARILIKU MURRUNA.

Olgu antud perioodiline kümnendmurd

$4,5(62)$.

Vaatleme seda arvu summana

$4,5+0,0(62)$.

Esitame teise liidetava harilike murdude abil:

$$0,0(62) = \frac{62}{1000} + \frac{62}{100\,000} + \frac{62}{10\,000\,000} + \ldots$$

Tulemuseks on tõkestamatult kahaneva geomeetrilise progressiooni summa, kus $a_1 = \frac{62}{1000}$ ja $q = \frac{1}{100}$. Kasutades vastavat summa valemit, leiame, et

$$0{,}0(62)=\frac{\frac{62}{1000}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{62\cdot 100}{1000\cdot 99}=\frac{62}{990}.$$

Seega

$$4{,}5(62)=4{,}5+\frac{62}{990}=\frac{45}{10}+\frac{62}{990}=\frac{4455+62}{990}=\frac{4517}{990}.$$

Ülesandeid.

360. Esita hariliku murruna järgmised puhtperioodilised kümnendmurrud: 0,(9); 0,(23); 0,(061); 2,(71); 63,(418).

361. Tuginedes eelmise ülesande lahendustele, sõnasta eeskiri puhtperioodilise kümnendmurru teisendamiseks harilikuks murruks.

362. Esita hariliku murruna järgmised segaperioodilised kümnendmurrud: 0,2(8); 0,3(54); 0,13(9); 2,65(15).

363. Tuginedes eelmise ülesande lahendustele, sõnasta eeskiri segaperioodilise kümnendmurru teisendamiseks harilikuks murruks.

364. Näita, et

$$0{,}11\ldots+0{,}222\ldots+0{,}333\ldots+\ldots+0{,}999\ldots=5.$$

6.8. LIITINTRESS.

Hoiukassasse hoiule antud rahasummale, nn. **hoiusele,** arvestatakse iga aasta lõpul juurde teatud kindel osa hoiusest. Näiteks, kui aasta algul anti hoiule 50 rubla ja juurde arvestatakse 2% hoiusest, s. o. 1 rubla, siis on järgmise aasta algul hoiul 51 rubla.

Juurdearvestatud summat nimetatakse **intressiks** ja arvu, mis näitab, mitmendik osa hoiusest kuulub juurdearvestamisele, nimetatakse **intressimääraks.**

Seega on toodud näites intressiks 1 rubla ja intressimääraks 0,02.

Ülesanne 1. Aasta algul on hoiul 60 rubla ning intressimäär on 3%. Kui suur on hoius järgmise aasta algul?

Lahendus. Aasta jooksul kasvab hoius 3% võrra 60-st rublast, s. o. 1,8 rubla; seega järgmise aasta alguseks on hoiul 61,8 rubla.

Ülesanne 2. Aasta algul viiakse hoiule k rubla; intressimäär on $p\%$. Leida hoiuse väärtus teise, kolmanda, ..., $n+1$ aasta alguseks, kui intressi arvestatakse ainult esialgu hoiule viidud summalt.

Lahendus.

Esialgne hoiusumma: k;

teise aasta algul: $k+\frac{kp}{100}$;

kolmanda aasta algul: $k+\frac{kp}{100}+\frac{kp}{100}=k+2\cdot\frac{kp}{100}$;

neljanda aasta algul: $k+3\cdot\frac{kp}{100}$;

. . . . . .

$n+1$ aasta algul: $k+n\cdot\frac{kp}{100}$.

Näeme, et sel viisil intressi arvestades moodustavad hoiuse väärtused aritmeetilise progressiooni, mille vaheks on aastaintress $\frac{kp}{100}$. Sel viisil n aasta jooksul saadavat koguintressi $\frac{nkp}{100}$ nimetatakse **lihtintressiks.**

Ülesanne 3. Aasta algul viiakse hoiule k rubla; intressimäär on $p\%$. Leida hoiuse väärtus $n+1$ aasta algul, kui igal aastavahetusel liidetakse intress hoiuse senisele väärtusele juurde, s. t. kui intressi arvestatakse ka intressilt.

Lahendus.

Esialgne hoiusumma: k;

teise aasta algul: $k+\frac{kp}{100}=k\left(1+\frac{p}{100}\right)$;

kolmanda aasta algul: $k\left(1+\frac{p}{100}\right)+k\left(1+\frac{p}{100}\right)\frac{p}{100}=$

$=k\left(1+\frac{p}{100}\right)\left(1+\frac{p}{100}\right)=k\left(1+\frac{p}{100}\right)^2$;

neljanda aasta algul: $k\left(1+\frac{p}{100}\right)^3$;

. . . . . .

$n+1$ aasta algul: $k\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$.

Kirjeldatud viisil arvestatavat intressi nimetatakse **liitintressiks.** Kirjutades sel viisil arvutatud hoiuse väärtused aastate järgi ritta, saame geomeetrilise progressiooni

$$k;\ k\left(1+\frac{p}{100}\right);\ k\left(1+\frac{p}{100}\right)^2,\ \ldots,\ k\left(1+\frac{p}{100}\right)^n.$$

Selle progressiooni tegurit $q=1+\frac{p}{100}$ nimetatakse **intressiteguriks.** Niisiis,

liitintressi korral kasvab hoiule viidud rahasumma k n aasta jooksul intressiteguri n-nda astme kordseks.

Sümboleis:

$$\boxed{L=k\left(1+\frac{p}{100}\right)^n,}$$

kus L on hoiuse lõppväärtus.

Kui hoiusummat tahetakse aasta keskel suurendada või tahetakse osa summat välja võtta, siis on tarvis arvutada intressi ka kuude ja päevade eest. Rahanduslikes küsimustes loetakse aasta päevade arvuks 360. Seega, kui ühe aasta intress on $\frac{kp}{100}$ rubla, siis ühe kuu intress on $\frac{kp}{12\cdot 100}$ rubla ja ühe päeva intress on $\frac{kp}{360\cdot 100}$ rubla.

Hoiukassades makstakse hoiustelt, milliseid võib välja võtta ükskõik millal, nn. nõudmiseni-hoiustelt, 2% intressi ja tähtajalistelt hoiustelt, s. o. hoiustelt, mis on antud hoiule kuni kindla tähtajani, 3% intressi.

Kui hoiustusaeg on üle ühe aasta, siis arvestatakse intressi ikka liiteviisil, s. t. igal aastavahetusel liidetakse aastaintress hoiusummale juurde.

6.9. SUURUSTE LIITPROTSENDILINE MUUTUMINE.

Liitintressiga analoogilise mõttekäigu juurde jõuame mitmete muude ülesannete lahendamisel. Need ülesanded kuuluvad *suuruste liitprotsendilise muutumise* valdkonda. Toome mõned näited.

Näide 1. Kolhoosi aastast piimatoodangut k liitrit otsustati suurendada igal aastal $p\%$ võrra. Kui suur on kolhoosi piimatoodang m aasta pärast?

Esimese aasta jooksul suureneb piimatoodang $\frac{kp}{100}$ liitri võrra, seega:

esimese aasta jooksul toodetakse piima $k\left(1+\frac{p}{100}\right)$ liitrit;

teise aasta jooksul toodetakse piima $k\left(1+\frac{p}{100}\right)^2$ liitrit;

. . . . . .

m-nda aasta jooksul toodetakse piima $k\left(1+\frac{p}{100}\right)^m$ liitrit.

Näide 2. Õhurõhu kohta kehtib seadus: 100-meetrilisele tõusule vastab õhurõhu vähenemine 1,2% võrra. Arvutada õhurõhk 400 m kõrgusel, kui merepinnal valitseb normaalrõhk (760 mm).

Kui õhurõhk merepinnal tähistada a_1, 100 m kõrgusel a_2 jne., siis rõhud 100-meetriliste kõrgusvahede tagant moodustavad geomeetrilise progressiooni:

$$760;\ 760\left(1-\frac{1{,}2}{100}\right);\ 760\left(1-\frac{1{,}2}{100}\right)^2, \ldots$$

Selle progressiooni tegur

$$q=1-0{,}012=0{,}988.$$

Vastuseks on progressiooni viies liige $760 \cdot 0{,}988^4 \approx 724$ (mm). Seega on õhurõhk 400 m kõrgusel 724 mm.

Näide 3. Rahvaarvu aastane juurdekasv olgu 1%. Kui suur peab olema põllumajandussaaduste toodangu aastase juurdekasvu protsent, et 15 aasta pärast tuleks ühe elaniku kohta põllumajandussaadusi 2 korda rohkem kui praegu?

Eelkõige tuleb leida, mitmekordseks kasvab elanikkond 15 aasta jooksul.

Loeme praeguse elanike arvu ühikuks, $a_1=1$. Aastase juurdekasvu tegur $q=1+\frac{1}{100}=1{,}01$. Otsitav on progressiooni kuueteistkümnes liige.

$$a_{16}=a_1 \cdot q^{15}=1 \cdot 1{,}01^{15} \approx 1{,}16.$$

Seega kasvab elanikkond 15 aasta jooksul 1,16-kordseks. Põllumajandussaaduste toodang peab sama aja jooksul kasvama 2 korda suuremaks, s. o. 2,32-kordseks.

Kui praegune põllumajandussaaduste toodang lugeda ühikuks, siis $a_1 = 1$ ja $a_{16} = 2{,}32$.

$$2{,}32 \approx 1 \cdot q^{15}$$

$$q \approx 1{,}06 = 1 + \frac{6}{100}.$$

Püstitatud nõue on seega täidetud siis, kui põllumajandussaaduste toodangu aastane juurdekasv on 6%.

Ülesandeid.

365. Õpilane pani 31. augustil oma suvisest teenistusest 25 rbl. hoiukassasse hoiule «nõudmiseni». Kui suur oli õpilase hoius järgmise aasta 31. augustiks?

366. Tööline kogus raha mööbli ja televiisori ostmiseks. Selleks pani ta iga aasta algul hoiukassasse hoiule «nõudmiseni» oma ühe kuu palga 95 rubla. Hoiukassa arvestab liitintressi määraga 2%. Kui suur oli töölise hoiusumma teise aasta algul? kolmanda aasta algul? Kui suure summa võis tööline välja võtta viienda aasta algul?

367. Õpetaja viis hoiukassasse hoiule «nõudmiseni» iga kuu 12% oma palgast. Kui suur oli õpetaja hoiusumma 1 kuu pärast, 2 kuu pärast, 12 kuu pärast (kõik enne järjekordset sissemaksu), kui õpetaja kuupalk on 85 rubla?

368. 3. septembril 1963. a. toimunud raha- ja asjade loterii järjekordsel loosimisel võitis 8. klassi õpilane 65-rublase külmutuskapi. Ta võttis eseme väärtuse välja rahas ja andis hoiukassasse tähtajaliselt hoiule kuni kooli lõpetamiseni, s. o. 3. juulini 1967. a. Hoiukassa maksab liitintressi määraga 3%. Kui suur on tähtpäeval väljavõetav summa?

369. Isa pani temale makstud preemiast 24% tähtajaliselt (liitintressimääraga 3%) hoiule oma poja jaoks, kes hakkas parajasti õppima 1. klassis. Kui suure summa saab poeg pärast kooli lõpetamist (11 aastat hiljem), kui isale makstud preemia oli 50 rubla?

370. Tööstuse sisseseade maksis uuena 15 000 rubla. Tema väärtuse iga-aastasel hindamisel kustutatakse sisseseade vanenemise ja kulumise tõttu 8% eelmise aasta väärtusest. Kui suur on sisseseade väärtus 10 aasta pärast?

371. Ameerika Ühendriikide president ja teadlane Benjamin Franklin pärandas oma testamendiga 1790. aastal Bostoni linnale 1000 naela tingimusel, et see kapital liitintressi kandes kasvaks tähtajaliselt 100 aastat. Saadud summast, 130 000 naelast, kuulus 100 000 naela linnale, jääk tuli aga jätta uuesti sajaks aastaks tähtajaliselt hoiule. Missugust intressimäära arvestas Franklin?

372. Puu kõrguse iga-aastane juurdekasv on 80% eelmise aasta juurdekasvust. Mitme sentimeetri võrra kasvab puu teisel aastal, viiendal aastal, kui ta esimesel aastal kasvas 25 cm võrra?

373. Tööstuse toodangut kavatsetakse suurendada igal aastal 15% võrra, võrreldes eelneva aastaga. Mitme protsendi võrra suureneb tööstuse aastatoodang seitseaastaku jooksul?

374. Radioaktiivse aine aatomeist laguneb ööpäeva vältel 2,8%. Mitme ööpäeva vältel laguneb pool selle aine aatomeist?

375. Toas, mille temperatuur on 20°, on keha, mille temperatuur on 100°. Olgu keha soojusisolatsioonil tingimused sellised, et keha temperatuur langeb igas minutis 2% võrra keha temperatuuri ja toa temperatuuri vahest. Leia keha temperatuur poole tunni pärast.

376. Kuumutamisel laguneb vesinikülihapend (H_2O_2) veeks ja hapnikuks. 10 minutit pärast reaktsiooni algust oli vesinikülihapendi kontsentratsioon $8\,\frac{g}{l}$ ja 10 minutit hiljem $4{,}8\,\frac{g}{l}$. Arvuta vesinikülihapendi esialgne kontsentratsioon eeldusel, et kontsentratsioon väheneb iga minuti jooksul sama protsendi võrra minuti algul olnud kontsentratsioonist.

377. Kinnises anumas on vedela väävli kohal esialgu 1 g vesinikku. Reaktsiooni tõttu väheneb vesiniku hulk 12 tunni jooksul 0,832 grammini. Arvuta, kui palju vesinikku on anumas 24 tunni pärast, arvestades, et vesiniku hulk väheneb iga tunni jooksul sama % võrra tunni algul olnud hulgast.

Kordamisküsimusi ja ülesandeid.

378. Mis on funktsioon?
379. Mis on funktsiooni määramispiirkond?
380. Missugust funktsiooni nimetatakse paarisfunktsiooniks?
381. Mis on funktsiooni negatiivsuspiirkond?
382. Mis on funktsiooni $y=3x$ positiivsuspiirkonnaks?
383. Kas lineaarne funktsioon $y=2-x$ on kasvav või kahanev?
384. Millal on ruutfunktsiooni graafikul maksimumpunkt?
385. Kuidas avaldub funktsiooni $y=-345-x$ pöördfunktsioon?
386. Missugune sirge on funktsiooni ja tema pöördfunktsiooni graafikute sümmeetriateljeks?
387. Missuguses vahemikus asetsevad funktsiooni $y=\sin 2x$ väärtused?
388. Mida nimetatakse arvu a logaritmiks alusel b?
389. Missugust funktsiooni nimetatakse eksponentfunktsiooniks?
390. Mis on aritmeetiline progressioon?
391. Mis on geomeetriline progressioon?
392. Kuidas avaldub aritmeetilise progressiooni n liikme summa valem?
393. Kuidas avaldub geomeetrilise progressiooni üldliikme valem?
394. Missugust geomeetrilist progressiooni nimetatakse tõkestamatult kahanevaks?
395. Kuidas defineeritakse tõkestamatult kahaneva geomeetrilise progressiooni summa?
396. Mis on lõputu segaperioodiline kümnendmurd?
397. Mis on liitintress?
398. Kuidas teostatakse tehteid harilike murdudega?
399. Missugust võrrandit nimetatakse eksponentvõrrandiks?
400. Missugust võrrandit nimetatakse logaritmvõrrandiks?
401. Aritmeetilise progressiooni kolmas liige on 6 ja kaheksas liige 24. Leia kümne liikme summa.
402. Arvude 7 ja 92 vahele aseta 16 niisugust arvu, mis koos antud arvudega moodustaksid aritmeetilise progressiooni.

403. Linnas on praegu 138 000 elanikku. 16 aastat tagasi oli selles linnas 115 000 elanikku. Leia selle linna elanike arvu aastane juurdekasvu protsent.

404. Missugune peaks olema linna elanike arvu aastane juurdekasvu protsent, et 34 aasta pärast oleks selles linnas 2 korda rohkem elanikke?

405. Esita hariliku murruna
0,444 . . . ; 0,272727 . . . ; 3,3(81).

406. Keha paigutatakse vee ja sulava jää segusse. Keha jahtub siis nõnda, et tema temperatuur väheneb iga minuti lõpuks murru $\frac{p}{q}$ võrra temperatuurist selle minuti alguses. Olgu keha temperatuur katse alguses (jäässe paigutamisel) t_0, tema temperatuur n-nda minuti lõpul peale katse algust t_n. Anna arvude n ja t_n vaheline seos.
Kui suur on temperatuuri kahanemistegur minutilt minutile?

407. Päikesekiired tungivad läbi klaasplaatide kihi, kusjuures läheb igas plaadis kaduma murdosa $\frac{p}{q}$ plaadile langenud valgusest. Olgu plaatide kihile langeva valguse tugevus T_0 ja plaatide hulk kihis n. Avalda 1., 2., 3., . . . , n-ndast plaadist läbitungiva valguse tugevused T_1, T_2, . . . , T_n andmete kaudu. Kui suur on valguse tugevuse kahanemistegur plaadilt plaadile?

Leia T_n, kui $\frac{p}{q} = \frac{1}{10}$.

408. Lahenda järgmised võrrandid:

a) $3 \cdot 2^x = 48$
b) $3 \log x = 2 \log 8$
c) $11^x = 23$
d) $\log^2 x - 3 \log x + 2 = 0$

409. Lahenda järgmised võrrandisüsteemid.

1) $\begin{cases} \frac{x}{a+b} - \frac{y}{a-b} = \frac{1}{a+b} \\ \frac{x}{a+b} + \frac{y}{a-b} = \frac{1}{a-b} \end{cases}$

2) $\begin{cases} (a+b)x + (a-b)y = 2ab \\ (a+c)x + (a-c)y = 2ac \end{cases}$

3) $\begin{cases} x+y+z=11 \\ 2x-y+z=5 \\ 3x+2y+z=24 \end{cases}$

410. Lahenda järgmised võrrandid.

1) $24^{3x-2}=10\,000$

2) $3^{\sqrt{x}}=243$

3) $3^{\frac{x}{2}}=768$

4) $x^{x^2-7x+12}=1$

7. KOLMNURGA LAHENDAMINE.

7.1. TÄISNURKSE KOLMNURGA LAHENDAMINE LOGARITMIDE KASUTAMISEGA.

Kui andmetena esinevad arvud on enam kui kahe tüvenumbriga, siis kolmnurga lahendamisel on kasulik teha arvutusi logaritmide abil.

Matemaatiliste tabelite kogudes on peale nurgafunktsioonide tabelite ka nende funktsioonide logaritmide tabelid, kust saame leida kas nurga antud suuruse järgi soovitava funktsiooni logaritmi või ümberpöördult — nurgafunktsiooni logaritmi järgi nurga.

Näiteks:

$\log \sin 31°42' = \bar{1},7205;$
$\log \cos 40°45' = \bar{1},8794;$
$\log \tan 69°20' = 0,4235.$

Mõned näited ka nurga leidmise kohta funktsiooni antud logaritmi järgi:

$\log \sin \alpha = \bar{1},7723;$ $\quad \alpha = 36°18'.$

$\log \tan \beta = \bar{1},3032;$ $\quad \beta = 11°22'.$

Ülesandeid.

411. Leia.

1) $\log \sin 16°24'$
$\log \tan 19°30'$
$\log \cos 72°12'$
$\log \cot 32°12'$

2) $\log \sin 42°54'$
$\log \tan 59°18'$
$\log \cos 26°42'$
$\log \cot 7°36'$

3) $\log \sin 47°15'$
$\log \tan 8°08'$
$\log \cos 16°45'$
$\log \cot 56°17'$

4) $\log \sin 4°41'$
$\log \tan 30°04'$
$\log \cos 72°19'$
$\log \cot 83°16'$

412. Leia trigonomeetrilise funktsiooni antud logaritmi järgi vastav nurk.

1) $\log \sin x = \overline{2},7183$
$\log \tan x = \overline{2},8960$
$\log \cos x = \overline{1},8053$
$\log \cot x = \overline{1},9529$

2) $\log \sin y = \overline{1},9656$
$\log \tan y = 0,4068$
$\log \cos y = \overline{1},9998$
$\log \cot x = 0,5174$

3) $\log \sin x = \overline{1},5692$
$\log \tan x = \overline{1},7375$
$\log \cos x = \overline{1},9776$
$\log \cot x = 0,6934$

4) $\log \sin x = \overline{1},9320$
$\log \tan y = \overline{0},4496$
$\log \cos y = \overline{1},7199$
$\log \cot y = 1,7759$

*

Lahendame nüüd täisnurkse kolmnurga logaritmide kasutamisega.

Ülesanne. Täisnurkse kolmnurga kaatet $a = 23,5$ mm ja kaatet $b = 24,1$ mm. Kui suured on selle kolmnurga teravnurgad ja hüpotenuus?

Lahendus.

1) $\tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{23,5}{24,1}$;
$\log a = 1,3711$;
$\log b = 1,3820$;
$\log \tan \alpha = \overline{1},9891$;
$\alpha = 44°17' \approx 44°20'$.

2) $\tan \beta = \frac{b}{a} = \frac{24,1}{23,5}$;
$\log b = 1,3820$;
$\log a = 1,3711$;
$\log \tan \beta = 0,0109$;
$\beta = 45°43' \approx 45°40'$.

3) $\frac{a}{c} = \sin \alpha$;
$c = \frac{a}{\sin \alpha}$;
$\log a = 1,3711$;
$\log \sin \alpha = \overline{1},8439$;
$\log c = 1,5272$;
$c = 33,67 \approx 33,7$ mm.

Kontroll:
$a^2 = 552,2$;
$b^2 = 580,8$;
$a^2 + b^2 = 1133,0 = c^2$;
$c = \sqrt{1133} = 33,66 \approx 33,7$.

Vastus. Kolmnurga teravnurgad on 44°20′ ja 45°40′; hüpotenuus on 33,7 mm.

Ülesandeid.

413. Lahenda täisnurkne kolmnurk, ümardades tulemused vastavalt andmetele.

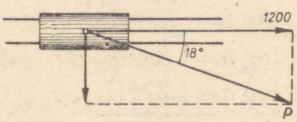
1) $a=25$; $b=75$.
2) $a=31$; $c=76$.
3) $a=30{,}2$; $\beta=53°20'$.
4) $b=32{,}2$; $\beta=62°30'$.
5) $c=32{,}5$; $b=18{,}4$.
6) $c=4{,}56$; $a=2{,}88$.
7) $c=32{,}54$; $\alpha=26°42'$.
8) $a=12{,}75$; $c=20{,}58$.

414. Raudtee vagunit, mida rööpme sihis mõjuv jõud 1200 kG võib paigast ära nihutada, tõmbab rööpme kõrval liikuv traktor (joon. 70 *a*). Vagunit ja traktorit ühendav vaier moodustab rööpme sihiga nurga 18°. Kui suure jõuga P tõmbab traktor?

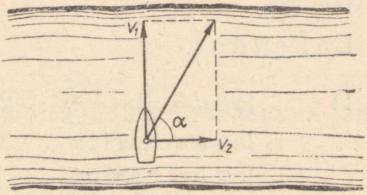
415. Mootorpaat sõidab kiirusega $v_1=1{,}7\,\frac{m}{s}$. Paat sõidab üle jõe, mille voolu kiirus $v_2=0{,}9\,\frac{m}{s}$ (joon. 70 *b*). Kui suure nurga α all liigub paat kalda suhtes, kui tüüritakse kaldaga risti?

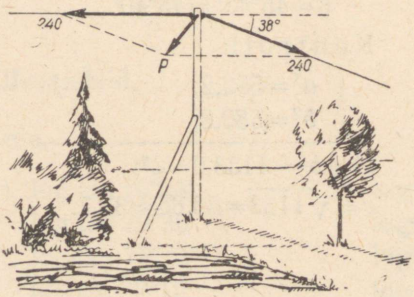
416. Kõrgepinge kaabel juhitakse ühest isolaatoripostist oma sihist horisontaaltasapinnas 38° võrra kõrvale (joon. 71).

Joon. 70 *a*.



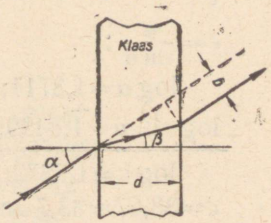
Joon. 70 *b*.





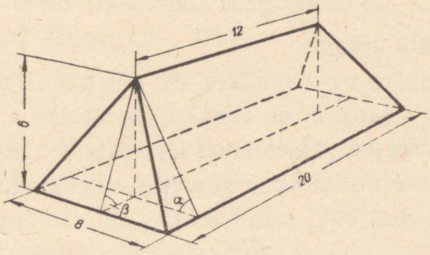
Joon. 71.

Joon. 72.



Kaabel on pingutatud jõuga 240 kG. Kui suur on horisontaalne jõud P, millega kaabel kisub posti viltu?

417. Tasaparalleelsele klaasplaadile kaldu langev valguskiir teeb plaati läbides paralleelse nihke b (joon. 72). Arvuta see nihe, kui plaadi paksus $d=26$ mm, murdumisnäitaja $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=1{,}5$ ja langemisnurk $\alpha=30°$.



Joon. 73.

418. Kelpkatuse pikkus on 20 m, laius 8 m ja kõrgus 6 m, katuse harja pikkus on 12 m (joon. 73). Arvuta nurgad α ja β, mis katuse pinnad moodustavad laega.

7.2. VEA ÜLEMMÄÄR NURGA ARVUTAMISEL.

Kui lineaarsed andmed (pikkused) nurga arvutamiseks on saadud mõõtmise teel, siis on nad ligikaudsed arvud, mistõttu ka nurga suurus kui arvutustulemus on ligikaudne. Selle tulemuse ümardamisel peame teadma, kui suur viga võib ülimalt tekkida nurga arvutamisel. Selgitame nurga vea ülemmäära leidmist näidete varal.

N ä i d e 1. Laste mänguväljakul oleval muruplatsil on täisnurkse kolmnurga kuju, mille üks kaatet on 35 m ja hüpotenuus 60 m. Kui suured on selle muruplatsi teravnurgad?

L a h e n d u s. Paneme tähele, et kolmnurga külgede pikkused on siin mõõdetud veaga mitte üle 0,5 m.

Arvutame 35-meetrise kaateti vastasnurga suuruse tõkked. Tähistades selle nurga tähega α, saame $\sin\alpha$ ülemtõkkeks

$$\frac{35{,}5}{59{,}5}=\frac{71}{119}=0{,}597;$$

et kolmnurga teravnurk on esimese veerandi nurk, siis suuremale siinusele vastab suurem nurk, seepärast nurga α enda ülemtõkkeks on

$$\arcsin 0{,}597 = 36°42'.$$

$\sin\alpha$ alamtõkkeks saame

$$\frac{34{,}5}{60{,}5} = \frac{69}{121} = 0{,}571,$$

millega nurga α alamtõkkena leiame

$$\arcsin 0{,}571 = 34°48'.$$

Ligikaudse suuruse kõige tõenäolisemaks väärtuseks loetakse ta ülemtõkke ja alamtõkke aritmeetilist keskmist. Niisiis

$$\alpha \approx \frac{36°42' + 34°48'}{2} = 35°45'.$$

Ligikaudse suuruse ülemtõkke ja alamtõkke vahet nimetatakse ligikaudse suuruse **kõikumisvahemikuks.**

Meie näites nurga α kõikumisvahemik on

$$36°42' - 34°48' = 1°52' \approx 2°.$$

Pool kõikumisvahemikust kannab ligikaudse suuruse **absoluutse vea ülemmäära** nime.

Antud juhul nurga α absoluutse vea ülemmäär on $2° : 2 = 1°$. Sümbolites märgitakse seda nõnda: $\Delta\alpha = 1°$ (kus kolmnurkne sümbol on kreeka suurtäht «delta»).

Et nurga α arvutamisel viga võib küündida 1°-ni, siis pole otstarbekohane vastuses näidata minuteid; vastuseks saadav arv tuleb ümardada kraadideni: $35°45' \approx 36°$.

Vastuse kirjutame nõnda:

$$\alpha \approx 36° (\pm 1°),$$

mida loetakse «nurk α on ligikaudu 36° veaga 1°».

Absoluutse vea ülemmäära ja ligikaudse arvu suhet nimetatakse ligikaudse **arvu relatiivse vea ülemmääraks.** See suhe antakse tavaliselt protsentides.

Meie näites on nurga α relatiivse vea ülemmääraks

$$1° : 36° = 0{,}028 \approx 0{,}03 = 3\%.$$

Tulemuse võib nüüd kirjutada ka nõnda:

$\alpha \approx 36° (\pm 3\%)$,

mida loetakse «nurk α on ligikaudu 36° veaga 3%».

Ülesandes esineva muruplatsi teine nurk $\beta \approx 54° (\pm 1°)$ ehk $\beta \approx 54° (\pm 2\%)$.

Näide 2. Ristküliku alus on 564 mm, kõrgus 162 mm. Kui pikk on selle ristküliku diagonaal ja kui suure nurga moodustab diagonaal alusega?

Lahendus. Et pikkused on mõõdetud millimeetrise täpsusega, siis vea ülemmääraks on siin 0,5 mm.

Diagonaali arvutamisel võtame arvesse, et andmed on kolme tüvenumbriga arvud, mistõttu ka tulemuse ümardame kolme tüvenumbriga arvuks, ümardades seejuures vahepealsed tulemused nelja tüvenumbriga arvudeks.

Tähistades aluse tähega a, kõrguse tähega b ja diagonaali tähega d, saame:

$$\begin{aligned} a^2 &= 162^2 \approx 26\,240; \\ h^2 &= 569^2 \approx 328\,000; \\ \hline d^2 &\approx 355\,000; \end{aligned}$$

$d = \sqrt{355\,000} \approx 595{,}8 \approx 596.$

Diagonaali ja aluse vahelise nurga α tangensi ülemtõke on

$$\frac{162{,}5}{568{,}5} = 0{,}2858,$$

et siin suuremale tangensile vastab suurem nurk, siis nurga α ülemtõkkeks saame

$\arctan 0{,}2858 = 15°57'$.

Arvutades $\tan \alpha$ alamtõket, leiame

$$\frac{161{,}5}{569{,}5} = 0{,}2835,$$

millest nurga α enda alamtõkkeks saame

$\arctan 0{,}2835 = 15°50'$.

Nurga α absoluutse vea ülemmäära arvutamisel leiame, et

$$\Delta\alpha = \frac{15°57' - 15°50'}{2} \approx 4'.$$

Nurga α kõige tõenäolisem väärtus on

$$\alpha = \frac{15°57' + 15°50'}{2} = 15°54'.$$

Seega $\alpha \approx 15°54'(\pm 0{,}4')$ ehk $\alpha \approx 15°54'(\pm 0{,}4\%)$.

Ülesandeid.

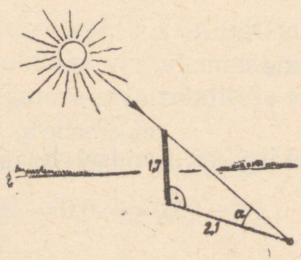
419. Täisnurkse kolmnurga kaatetid on ligikaudu 4 m ja 6 m. Arvuta hüpotenuus ja nurgad. Nurga arvutamisel leia absoluutse vea ülemmäär ja relatiivse vea ülemmäär. Ümarda tulemused vastavalt andmetele.

420. Tarvis on joonestada täisnurkne kolmnurk, mille üks kaatet on 372 mm ja hüpotenuus 943 mm. Kui pikk tuleb teine kaatet ja kui suured tulevad nurgad? Kui suur viga võib tekkida nurkade arvutamisel?

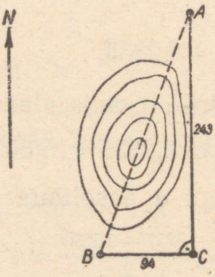
421. Päikese kõrgusnurga α määramiseks löödi maa sisse püsti teivas, mille maapealse osa pikkuseks jäi 1,7 m; teiba varju pikkus oli 2,1 m (joon. 74). Arvuta Päikese kõrgusnurk α varju mõõtmise momendil.

422. Punktide A ja B vahele on tarvis ehitada tunnel (joon. 75). Punkt C on valitud nõnda, et kolmnurk ABC on täisnurkne, kusjuures $BC = 94$ m ja $AC = 234$ m. Kui pikk tuleb ehitatav tunnel? Kui suure nurga moodustab tunneli siht AB põhjalõuna sihiga AC ja kui suure nurga ta moodustab ida-lääne sihiga?

423. Arvuta nürinurkse kolmnurga ABC kõrgus BD, teades, et alus $AC = 55$ mm, alusnurk $BAC = 18°$ ja alusnurk $ACB = 147°$ (joon. 76).

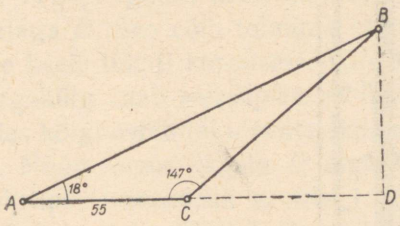


Joon. 74.

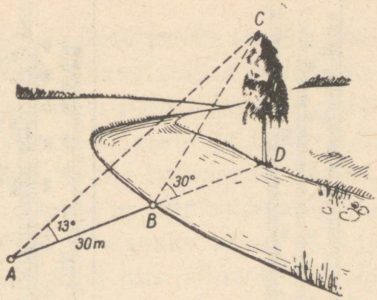


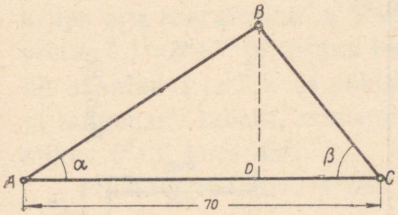
Joon. 75.

Joon. 76.

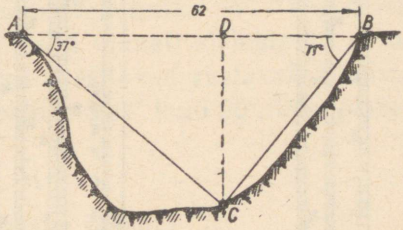


Joon. 77.





Joon. 78.



Joon. 79.

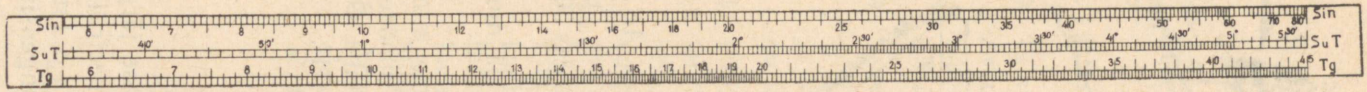
424. Jõe laiuse BD mõõtmiseks märgiti BD sihis pikkus $AB = 30$ m (joon. 77). Jõe teisel kaldal vee piiril kasvava puu latv C paistab punktist A nurgas 13° ja punktist B nurgas 30°. Kui lai on jõgi?

425. Kolmnurga ABC alus $AC = 70$ mm, nurk $\alpha = 32°20'$ ja nurk $\beta = 50°20'$ (joon. 78). Arvuta kõrgus BD.

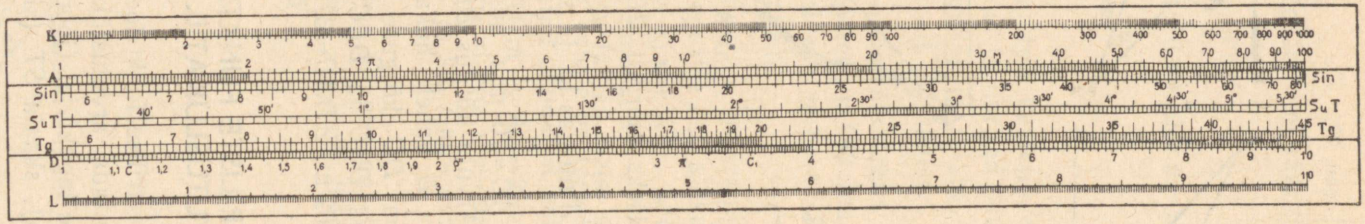
426. Üle oru punktide A ja B vahele hakatakse ehitama silda (joon. 79). Tugisamba DC kõrguse leidmiseks mõõdeti punkti C alangunurgad DAC ja DBC. Arvuta samba DC pikkus, teades, et $AB = 62$ m, $\angle DAC = 37°$ ja $\angle DBC = 71°$.

7.3 TRIGONOMEETRILISTE FUNKTSIOONIDE SKAALAD ARVUTUSLÜKATIL.

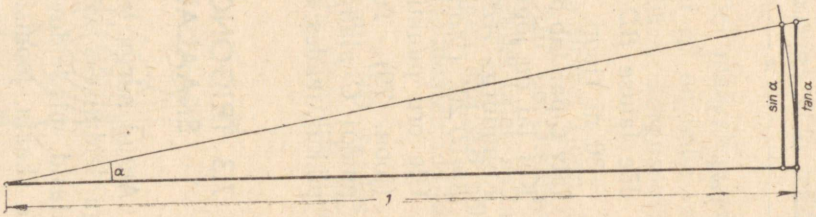
Antud nurga trigonomeetrilise funktsiooni või viimase järgi nurga leidmiseks võib kasutada arvutuslükati trigonomeetrilisi skaalasid, mis leiduvad keele tagaküljel (joon. 80): skaala S (siinuste skaala, joonisel «Sin»), skaala ST (siinuste ja tangensite



Joon. 80.



Joon. 81.



Joon. 82.

ühine skaala, joonisel «SuT») ja skaala *T* (tangensite skaala, joonisel «Tg»). Igaüht neist kolmest skaalast kasutatakse koos põhiskaalaga *D*. See võib toimuda kahel viisil. Esiteks nõnda, et tõmbame keele lükati korpusest välja, pöörame ta pikitelje ümber nii, et tagakülg saab esiküljeks, ja lükkame ta siis korpusesse tagasi, seades kõigi esiküljel olevate skaalade algus- ja lõppkriipsud kohakuti. Nüüd loeme skaala *D* alguskriipsu vastavaks arvule 0,1 ja lõppkriipsu vastavaks arvule 1 (joon. 81). Siis siinuste skaala algab suurusega 5°44′ ja tema lõppkriips märgib nurka 90°. Tõepoolest, $\arcsin 0{,}1 = 5°44'$, $\arcsin 1 = 90°$. Tangensite skaala alguskriips aga märgib nurka 5°43′ ja lõppkriips nurka 45°. Tõepoolest, $\arctan 0{,}1 = 5°43'$ ja $\arctan 1 = 45°$. Seega viimati kirjeldatud asendis skaalad *S* ja *T* koos põhiskaalaga *D* esitavad vastavalt siinuste ja tangensite tabelit, esimene vahemikus 5°44′ kuni 90°, teine vahemikus 5°43′ kuni 45°.

Skaalat *S* uurides märkame, et

6°-st	kuni	10°-ni	iga	kriipsuvahe	märgib	5′,
10°-st	„	20°-ni	„	„	„	10′,
20°-st	„	40°-ni	„	„	„	20′,
40°-st	„	60°-ni	„	„	„	30′,
60°-st	„	80°-ni	„	„	„	1°.

Skaala lõpul 80° ja 90° vahel on kaks kriipsu, millest esimene märgib nurka 83° ja teine nurka 85°.

Skaalalt *T* paneme tähele, et

6°-st	kuni	20°-ni	iga	kriipsuvahe	märgib	5′,
20°-st	„	45°-ni	„	„	„	10′.

Kui nurk α on väike, siis $\sin \alpha \approx \tan \alpha$. Seda näeme joonisel 82, kus ühikringis väikese nurga α korral siinuslõik ja tangenslõik on peaaegu võrdsed. (Kontrolli seda ka siinuste ja tangensite tabelite abil, võrreldes 6°-st väiksemate nurkade siinuseid tangensitega!)

See asjaolu võimaldab väikeste nurkade siinuste ja tangensite jaoks kasutada ühist skaalat, milleks ongi skaala *ST*. Selle skaala kasutamisel koos skaalaga *D* loetakse skaala *D* alguskriips vastavaks arvule 0,01 ja lõppkriips vastavaks arvule 0,1. Skaala *ST* alguskriips märgib siis nurka 34′ ja lõppkriips nurka 5°44′, sest

$\arcsin 0{,}01 \approx \arctan 0{,}01 \approx 34'$;
$\arcsin 0{,}1 \approx \arctan 0{,}1 \approx 5°44'$.

Paneme tähele, et skaalal *ST*

40′-st kuni 3°-ni iga kriipsuvahe märgib 1′,
3°-st „ 5°-ni „ „ „ 2′,
5°-st „ lõpuni „ „ „ 5′.

Niisiis skaala *ST* koos põhiskaalaga *D* kujutab siinuste ja tangensite ühist tabelit vahemikus 34′ kuni 5°44′.

Eeldusel, et keel on pööratud ja nurk α on vahemikus 5°44′...90°, leiame sin α väärtuse järgmiselt: märgime märkijaga skaalal *S* nurga α ja loeme niidi alt skaalalt *D* selle nurga siinuse väärtuse. Ümberpöördult, antud siinuse järgi nurga leidmisel märgime skaalal *D* antud siinuse ja loeme niidi alt skaalalt *S* nurga suuruse.

Analoogiliselt toimime antud nurga tangensi leidmisel ning antud tangensi järgi nurga leidmisel, kasutades sel korral vaid skaalat *T*.

Näiteks:

sin 45° = 0,707; tan 15° = 0,268;
arcsin 0,574 = 35°; arctan 0,795 = 38°30′.

Kui antud nurk on vahemikus 34′...5°44′, siis toimime täpselt eespool kirjeldatud viisil, kasutades skaalat *ST* ja pidades silmas, et siinuse ja tangensi väärtused on sel korral vahemikus 0,01...0,1.

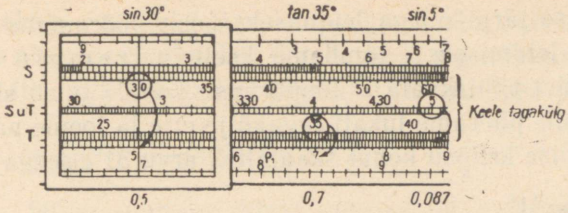
Näiteks:

sin 1°30′ = 0,0262; tan 2°18′ = 0,0402;
arcsin 0,0405 = 2°19′; arctan 0,0769 = 4°24′.

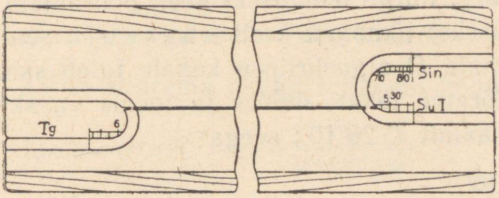
Joonisel 83 on näidatud sin 30°, tan 35° ja sin 5° leidmine lükatil, kui selle keel on pööratud.

Kirjeldatud operatsioone saab lükatil teostada ka keelt pööramata, kasutades selle asemel lükati korpuse otstes leiduvaid õnaraid. Pöörates lükatit pikitelje ümber 180°, näeme tagaküljel õnarate äärtel kriipse: parempoolses otsas kaks kriipsu — üks ülal ja teine all, vasakpoolses otsas üks kriips — all (joon. 84).

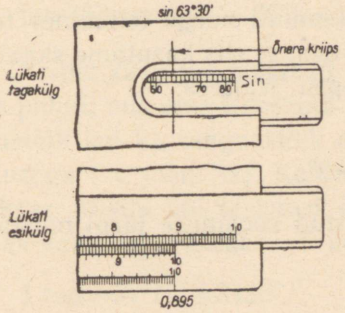
Parempoolse otsa ülemist kriipsu kasutame kraadide ja minutite märkimiseks ja lugemiseks skaalal *S*, alumist skaalal *ST*; vasakpoolse otsa kriipsu kasutame seoses skaalaga *T*.



Joon. 83.



Joon. 84.



Joon. 85.

Leiame keelt pööramata näiteks sin 63°30′. Selleks pöörame lükati tagakülje ette, tõmbame keelt paremale seni, kuni skaala *S* arvule 63°30′ vastav kriips tuleb kohakuti parempoolse ōnara ülemise kriipsuga (joon. 85, ülal); siis pöörame lükati esikülje ette ja loeme skaala *D* lõppkriipsu kohalt skaalalt *C* (keele alumisel äärel) numbrid 8—9—5 (joon. 85, all); seega

sin 63°30′ = 0,895.

Antud nurga tangensi (näiteks tan 20°) leidmiseks pöörame lükati tagakülje ette, tõmbame keelt vasakule seni, kuni skaalal *T* arvule 20° vastav kriips tuleb kohakuti vasakpoolse ōnara kriipsuga; siis pöörame lükati esikülje ette ja loeme skaala *D* alguskriipsu kohalt skaalal *C* numbrid 3—6—4; seega

tan 20° = 0,364.

Antud siinuse järgi nurga leidmiseks keelt pööramata (näiteks arcsin 0,515 leidmiseks), tõmbame keelt paremale seni, kuni lükati esiküljel põhiskaala D lõppkriipsu kohale tuleb skaala C väärtus 0,515; siis pöörame lükati tagakülje ette ja loeme parempoolse õnara ülemise kriipsu kohal skaalalt S arvu 31°; seega

$$\arcsin 0{,}515 = 31°.$$

Antud tangensi järgi nurga leidmiseks keelt pööramata (näiteks arctan 0,535 leidmiseks) tõmbame keelt vasakule seni, kuni lükati esiküljel põhiskaala D alguskriipsu kohale tuleb skaala C väärtus 0,535; siis pöörame lükati ümber ja loeme vasakpoolse õnara kriipsu kohal skaalalt T 28°10′; seega

$$\arctan 0{,}535 = 28°10'.$$

Kui antud nurk on väike (vahemikust 34′ ... 5°44′), siis nii siinuse kui ka tangensi leidmine (samuti nurga leidmine) toimub analoogiliselt, ainult selle erinevusega, et siis kasutame skaalat ST ja parempoolse õnara alumist kriipsu. Näiteks:

$$\sin 4° = \tan 4° = 0{,}0698;$$
$$\arcsin 0{,}0525 = \arctan 0{,}0525 = 3°.$$

Antud nurga koosinuse ja antud koosinuse järgi nurga leidmisel kasutame valemi

$$\cos \alpha = \sin(90° - \alpha)$$

vahendust; näiteks:

$$\cos 32° = \sin(90° - 32°) = \sin 58° = 0{,}848.$$

Olgu antud, et $\cos \alpha = 0{,}588$. Kui suur on α?

Sel korral $\sin(90° - \alpha) = 0{,}588$; siit

$90° - \alpha = 36°$ ja $\alpha = 54°$.

Antud nurga kootangensi leidmisel kasutame abivahendina seost

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}.$$

Näiteks $\cot 25° = \frac{1}{\tan 25°}$ leidmiseks pöörame lükati tagakülje ette, tõmbame keelt vasakule seni, kuni skaala T koht 25° tuleb

kohakuti vasaku ōnara kriipsuga: nüüd pöörame lükati esikülje üles ning loeme skaalalt C (skaala D alguskriipsu kohalt) $\tan 25° = 0{,}466$, aga skaalalt D (skaala C lõppkriipsu kohalt) jagatise

$$\frac{1}{\tan 25°} = \frac{1}{0{,}466} = 2{,}14 = \cot 25°.$$

90°-st suurema nurga siinuse või koosinuse leidmisel rakendame taandamisvalemeid. Näiteks:

$$\sin 125° = \sin(180° - 125°) = \sin 55° = 0{,}82.$$

45°-st suurema nurga tangensi leidmisel rakendame seoseid

$$\tan \alpha = \cot(90° - \alpha) = \frac{1}{\tan(90° - \alpha)}.$$

Näiteks

$$\tan 75° = \cot(90° - 75°) = \cot 15° = \frac{1}{\tan 15°} = 3{,}73.$$

Erilist käsitlust nõuavad trigonomeetrilised funktsioonid nurkade puhul, mis on väiksemad kui 34′. Sääraste nurkade korral nii siinuslõik kui ka tangenslõik on pikkuselt peaaegu võrdsed kaare pikkusega (vt. joon. 82). Kesknurka teatavasti mõõdab temale vastav kaar; niisiis, kui kesknurk on α radiaani, siis ka sellele nurgale vastav kaar on α radiaani. Teades, et

$$1 \text{ rad} = 57°18′ = 3438′,$$

leiame nurgale α' vastava kaare pikkuse radiaanides jagatisena:

$$\alpha' : 3438′.$$

Arvu 3438 kohal leidub lükati põhiskaalal märge ϱ', nii et

$\varrho' = 3438′$ ja (kui $\alpha < 34′$)

$$\sin \alpha = \tan \alpha = \frac{\alpha'}{\varrho'}.$$

Näiteks $\sin 20′ = \frac{20′}{3438′} = \frac{20′}{\varrho'} = 0{,}00582.$

Sääraste jagatiste arvutamisel peame meeles:

kui $\alpha < 34′$, siis $\sin \alpha = \tan \alpha < 0{,}01$.

Ülesandeid.

427. Leia lükatilt keele pööratud asendi puhul:

1) $\sin 50°$, $\sin 45°$, $\sin 24°$, $\sin 51°$, $\sin 9°30'$

2) $\sin 8°25'$, $\sin 85°$, $\sin 14°10'$, $\sin 130°$, $\sin 300°$

3) $\cos 15°$, $\cos 40°30'$, $\cos 72°50'$, $\cos 61°$, $\cos 147°$

4) $\tan 13°$, $\tan 32°$, $\tan 9°10'$, $\tan 36°30'$, $\tan 25°30'$

5) $\tan 50°$, $\tan 54°$, $\tan 77°30'$, $\tan 71°$, $\tan 60°30'$

6) $\cot 61°$, $\cot 43°$, $\cot 48°$, $\cot 12°30'$, $\cot 10°10'$

7) $\sin 1°38'$, $\tan 2°18'$, $\tan 0°42'$, $\tan 4°24'$, $\tan 5°30'$

8) $\sin 2°10'$, $\sin 3°20'$, $\sin 3°25'$, $\sin 1°55'$, $\sin 0°42'$

9) $\tan 2°05'$, $\tan 2°44'$, $\tan 0°54'$, $\cos 88°17'$, $\cot 87°54'$

428. Leia lükatilt normaalasendi puhul:

1) $\sin 30'$, $\sin 27'$, $\tan 25'$, $\sin 17'$, $\tan 6'$

2) $\cot 89°45'$, $\tan 89°44'$, $\tan 88°45'$, $\cos 89°15'$, $\cos 88°20'$

3) $\sin 15'$, $\sin 32'$, $\tan 18'$, $\tan 21'$, $\tan 46'$

429. Leia lükatilt keele pööratud asendi puhul teravnurk x, kui:

1) $\sin x=0{,}245$, $\sin x=0{,}142$, $\sin x=0{,}315$, $\sin x=0{,}375$, $\sin x=0{,}485$

2) $\cos x=0{,}670$, $\cos x=0{,}245$, $\cos x=0{,}158$, $\cos x=0{,}588$, $\cos x=0{,}225$

3) $\sin x=0{,}309$, $\sin x=0{,}339$, $\sin x=0{,}799$, $\sin x=-0{,}242$, $\sin x=-0{,}334$

4) $\tan x=0{,}268$, $\tan x=0{,}625$, $\tan x=0{,}161$, $\tan x=0{,}795$, $\tan x=0{,}966$

5) $\tan x=1{,}192$, $\tan x=1{,}376$, $\tan x=4{,}511$, $\tan x=2{,}90$, $\tan x=1{,}192$

6) $\cot x=0{,}554$, $\cot x=1{,}07$, $\cot x=0{,}900$, $\cot x=4{,}51$, $\cot x=2{,}88$

430. Leia lükatilt keele pööratud asendi puhul:

1) arcsin 0,707
arcsin 0,375
arcsin 0,777
arcsin 0,165
arcsin 0,146

2) arctan 0,839
arctn 0,259
arctan 0,445
arctan 0,835
arctan 0,615

3) arctan 1,195
arctan 1,575
arccot 2,90
arccot 1,192
arccot 0,554

4) arcsin 0,0552
arcsin 0,0596
arcsin 0,0334
arcsin 0,0122
arcsin 0,030

5) arctan 0,0364
arctan 0,0477
arctan 0,0157
arctan 0,0114
arctan 0,0556

6) arcsin 0,00262
arctan 0,00582
arcsin 0,00728
arctan 0,00485
arcsin 0,00211

7) arcsin 0,00582
arcsin 0,00786
arctan 0,00728
arcsin 0,00512
arctan 0,00197

8) sin 31°
tan 19°
sin 1°15′
sin 3°40′
tan 2°10′

9) sin 1°40′
sin 40′
tan 9°
tan 17°
cot 52°

10) cot 76°
cot 87°
tan 43°20′
cot 47°40
cot 62°20′

11) arctan 0,625
arctan 0,815
arctan 0,244
arctan 0,880
arctan 0,250

12) arcsin 0,707
arcsin 0,174
arcsin 0,819
arcsin 0,985
arcsin 0,259

7.4. TRIGONOMEETRILISI ARVUTUSI LÜKATI KASUTAMISEGA.

Näiteid.

1) Leia nurk α, kui $\sin\alpha=\frac{12,6}{17,5}$.

Lahendame ülesande lükati keelt pööramata. Märgime skaalal D arvu 17,5; tõmbame keelt paremale niipalju, et skaala C arv 12,6 jääb kohakuti arvuga 17,5 skaalalt D. Pöörame nüüd lükati ümber ning loeme parempoolse õnara ülemise kriipsu järgi skaalalt S väärtuse 46°. Seega vastuseks on $\alpha=46°$.

2) $\frac{3,6}{\sin 30°}=\frac{2,5}{\sin x}$. Leia x.

Lahendus pööratud keelega lükatil on järgmine. Märgime niidiga skaalal D arvu 3,6. Tõmbame keelega niidi alla 30° skaalalt S. Nüüd märgime niidiga skaalal D arvu 2,5. Niidi alt skaalal S loeme vastuseks 20°19′. Seega $x = 20°19'$.

3) Arvuta avaldis $14{,}6 \cdot \sin 56°30'$.

Lahendame ülesande lükati keelt pööramata. Lükatit tagaküljelt jälgides tõmbame keelt paremale niipalju, et skaalalt S tuleks õnara kriipsu kohale 56°30′. Pöörame nüüd lükati päripidi ning märgime niidiga skaalal D arvu 14,6. Vastuseks loeme niidi alt skaalalt C arvu 12,2.

Seega $14{,}6 \cdot \sin 56°30' = 12{,}2$.

4) Teosta jagamine $\frac{13{,}9}{\tan 41°}$.

Lahendame ülesande lükatil keele pööratud asendis. Märgime niidiga skaalal D arvu 13,9, tõmbame niidi alla skaala T arvu 41 ning loeme keele lõpult skaalalt D tulemuseks 16. Seega

$$\frac{13{,}9}{\tan 41°} = 16.$$

5) Täisnurkse kolmnurga kaatet $a = 250$ ja $b = 575$. Leia teravnurgad ja hüpotenuus.

Ülesannet lükati abil lahendades leiame kõigepealt, et

$$\tan \alpha = \frac{250}{575} = 0{,}435.$$

Nüüd saame skaala C arvu 0,435 kohakuti skaala D algus-kriipsuga, pöörame lükati ümber ning loeme vasakpoolse õnara kriipsu skaalalt T arvu 23°30′. Seega

$$\alpha = 23°30'; \quad \beta = 90° - 23°30' = 66°30'.$$

Hüpotenuusi arvutame seosest

$$\frac{a}{c} = \sin \alpha \text{ ehk } c = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{250}{\sin 23°30'}.$$

Viimase jagatise leiame järgmiselt. Pöörame keele ja märgime niidiga skaalal S koha 23°30′; niidi all skaalal D leidub siis vastav siinuse väärtus (0,399; selle väljalugemine pole tarvilik). Nüüd pöörame keele tagasi ja leiame jagatise

$$250 : \sin 23°30' = 627.$$

Kontrolliks kasutame Pütagorase teoreemi, arvutades lükatil

$a^2 = 250^2 = 62\,500;$
$b^2 = 575^2 = 331\,000;$
$a^2 + b^2 = 393\,500 \approx 393\,000;$
$c^2 = 627^2 \approx 393\,000.$

Vastus. $\alpha = 23°30'$; $\beta = 55°30'$; $c = 627$.

Ülesandeid.

431. Arvuta lükati abil nurk α, kui

1) $\sin\alpha = \frac{6,3}{8,6}$ 3) $\tan\alpha = \frac{37,6}{54,5}$
2) $\cos\alpha = \frac{18}{73}$ 4) $\cot\alpha = \frac{23}{52}$

432. Arvuta lükati kasutamisega avaldis:

1) $\frac{15,4}{\sin 69°30'}$ 6) $\frac{12,5}{\sin 28°20'}$ 11) $5,85 \cdot \sin 21°40'$
2) $\frac{13,8}{\sin 24°30'}$ 7) $\frac{41,5}{\sin 45°30'}$ 12) $2,4 \cdot \tan 22°20'$.
3) $\frac{8,5}{\sin 76°}$ 8) $\frac{26,2}{\sin 15°15'}$ 13) $2,54 \cdot \tan 66°30'$.
4) $\frac{52}{\sin 69°}$ 9) $\frac{243}{\sin 71°}$ 14) $\frac{27,8}{\tan 42°}$
5) $\frac{25,4}{\tan 35°}$ 10) $\frac{1,43}{\tan 40°35'}$ 15) $\frac{0,84}{\tan 28°10'}$

433. Arvuta lükati abil avaldis:

1) $\frac{25,2}{\sin 3°11'}$ 3) $\frac{0,28}{\sin 2°30'}$ 5) $78 \cdot \sin 1°55'$
2) $\frac{10}{\tan 2°20'}$ 4) $\frac{542}{\tan 4°20'}$ 6) $635 \cdot \tan 4°15'$

434. Lahenda lükati kasutamisega võrre:

1 $\frac{\sin 15°}{3,5} = \frac{\sin x}{6,9}$ 4) $\frac{\sin 10°}{2,4} = \frac{\sin x}{3,8}$
2) $\frac{43,3}{\sin 60°} = \frac{a}{\sin 30°}$ 5) $\frac{7,2}{\sin 30°} = \frac{5}{\sin x}$
3) $\frac{\tan 18°}{30} = \frac{\tan 32°}{x}$ 6) $\frac{\tan 40°}{3} = \frac{\tan x}{2}$

435. Arvuta lükati abil täisnurkse kolmnurga puuduvad küljed ja nurgad.

1) $a=7{,}9$ cm; $c=10{,}7$ cm
2) $b=10{,}5$ dm; $c=15{,}3$ dm
3) $a=6{,}05$ m; $b=8{,}32$ m
4) $a=16{,}1$ cm; $b=13{,}3$ cm
5) $a=12{,}9$ mm; $\alpha=33°30'$
6) $c=74{,}5$ mm; $\alpha=28°20'$

436. Joonestati kolmnurk külgede pikkustega $a=8$ cm; $b=5$ cm ja $c=7{,}2$ cm. Nurkade mõõtmisel leiti, et $\alpha=80°$, $\beta=38°$ ja $\gamma=62°$. Arvuta lükati abil suhted

$$\frac{a}{\sin\alpha},\ \frac{b}{\sin\beta} \text{ ja } \frac{c}{\sin\gamma}$$

ja võrdle tulemusi omavahel.

437. Joonesta kolmnurk, mille küljed on $a=4$ cm, $b=6$ cm ja $c=8{,}9$ cm. Mõõda selle kolmnurga nurgad α, β ja γ.
Arvuta lükati abil suhted

$$\frac{a}{\sin\alpha},\ \frac{b}{\sin\beta} \text{ ja } \frac{c}{\sin\gamma}.$$

Võrdle nende suhete suurusi. Joonesta saadud kolmnurga ümber ringjoon ja mõõda selle diameeter sentimeetrites; võrdle saadud arvu eelmiste suhetega.

438. Joonesta kolmnurk külgedega $a=87$ mm, $b=65$ mm ja $c=76$ mm. Mõõda saadud kolmnurga nurgad α, β ja γ ning arvuta lükati abil suhted

$$\frac{a}{\sin\alpha},\ \frac{b}{\sin\beta} \text{ ja } \frac{c}{\sin\gamma}.$$

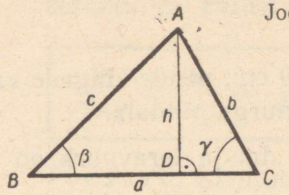
Võrdle neid tulemusi kolmnurga ümberringjoone läbimõõduga, kui viimane on mõõdetud millimeetrites.

7.5. KOLMNURGA PINDALA KAHE KÜLJE JA NENDEVAHELISE NURGA JÄRGI.

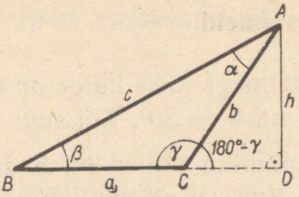
Kolmnurga pindala saab arvutada kahe külje ja nendevahelise nurga järgi. Vastava eeskirja saamiseks lähtume valemist

$$S=\frac{1}{2}ah.$$

Tõmmates kolmnurgas ABC kõrguse h alusele a (joonised 86 ja 87), saame täisnurkse kolmnurga ACD, milles $h=b\sin\gamma$ [nüri-



Joon. 86.



Joon. 87.

nurkses kolmnurgas $h = b \sin(180° - \gamma) = b \sin \gamma$]. Asendades pindala valemis h avaldisega $b \sin \gamma$, saamegi otsitava valemi:

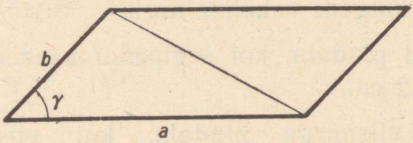
$$S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$$

Võttes kõrguse küljele b või küljele c, saame vastavalt valemid

$$S = \frac{1}{2} bc \sin \alpha \qquad S = \frac{1}{2} ac \sin \beta$$

Niisiis,

kolmnurga pindala võrdub poolega kahe külje ja nendevahelise nurga siinuse korrutisest.



Joon. 88.

Järeldus. Et diagonaal jaotab rööpküliku kaheks võrdseks kolmnurgaks (joon. 88), millest kummagi pindala on $\frac{1}{2} ab \sin \gamma$, siis rööpküliku pindala arvutamiseks saame valemi:

$S = ab \sin \gamma$.

Rööpküliku pindala võrdub kahe külje ja nendevahelise nurga siinuse korrutisega.

Eeskiri on õige sõltumata sellest, kas rööpküliku vaadeldav nurk on terav- või nürinurk.

Ülesandeid.

439. Kolmnurga kaks külge on 6 cm ja 9 cm; nende külgede vaheline nurk on 30°. Kui suur on kolmnurga pindala?

440. Rööpküliku küljed on 5 dm ja 12 dm ja teravnurk on 30°. Kui suur on rööpküliku pindala?

441. Tõesta, et diagonaalid jaotavad rööpküliku neljaks pindvõrdseks kolmnurgaks.

442. Tõesta, et diagonaalid jaotavad ristküliku neljaks pindvõrdseks kolmnurgaks.

443. Arvuta lükati abil kolmnurga pindala, kui

1) $a=632$ m; $b=496$ m; $\gamma=134°20'$;
2) $b=542$ mm; $c=435$ mm; $\alpha=35°40'$.

444. Arvuta rööpküliku pindala, kui küljed ja nurk on vastavalt

1) 4 cm, 6 cm ja 40°;
2) 4,6 m, 5,8 m ja 130°.

445. Võrdhaarse kolmnurga haar on 3,4 cm ja tipunurk 80°. Arvuta kolmnurga pindala.

446. Võrdkülgse kolmnurga külg on 15 cm. Arvuta pindala.

447. Kolmnurga kaks külge on 5 cm ja 6 cm. Kolmnurga pindala on 7,5 cm^2. Leia antud külgede vaheline nurk.

448. Arvuta ringi segmendi pindala, kui segmendi kaar on 70° ja ringi raadius on 20,2 cm.

449. Arvuta korrapärase viisnurga pindala, kui viisnurga ümberringjoone raadius on 3 cm.

7.6. SIINUSTEOREEM.

Üldkujulist kolmnurka saab lahendada, kui tükeldada antud kolmnurk kõrgusega täisnurkseteks kolmnurkadeks ning arvutada nendest antud kolmnurga puuduvad elemendid. Lihtsam on aga siiski lahendada otseselt, kasutades mõnesuguseid kolmnurga elementide vahelisi seoseid. Üht niisugust seost väljendab nn. s i i n u s t e o r e e m:

kolmnurga küljed on võrdelised vastasnurkade siinustega.

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$$

Tõestus. Lähtume kolmnurga pindala valemist:

$$S=\frac{1}{2}ac\sin\beta; \tag{1}$$

$$S=\frac{1}{2}bc\sin\alpha; \tag{2}$$

$$S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma. \tag{3}$$

Esimesest ja teisest võrdusest järeldub, et

$$ac\sin\beta=bc\sin\alpha$$

ehk

$$a\sin\beta=b\sin\alpha.$$

Siit

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}.$$

Esimesest ja kolmandast võrdusest järeldub, et

$$ac\sin\beta=ab\sin\gamma$$

ehk

$$c\sin\beta=b\sin\gamma.$$

Siit saame

$$\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}.$$

Seega tõesti

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}.$$

Kui võrdes

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}$$

kolm liiget on antud, siis neljanda saab arvutada. Seega siinusteoreem võimaldab

1) arvutada kolmnurga külge teise külje ja nende külgede vastasnurkade järgi; näiteks:

$$a=\frac{b\sin\alpha}{\sin\beta};$$

2) arvutada kolmnurga nurka teise nurga ja nende nurkade vastaskülgede järgi; näiteks:

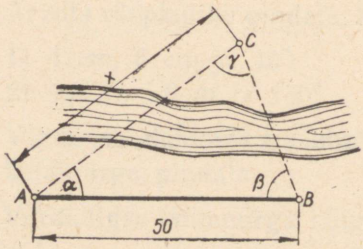
$$\sin \alpha = \frac{a \sin \beta}{b},$$

kust nurga α saame leida lükati või tabeli abil.

Kokkuvõttes: *siinusteoreem võimaldab lahendada kolmnurka, millest on antud*

1) *kaks nurka ja üks külg või*
2) *kaks külge ja neist ühe külje vastasnurk.*

Näide 1. Tahetakse mõõta ligipääsmatu punkti C kaugust punktist A. Selleks võetakse lõik $AB = 50$ m baasiks ja mõõdetakse nurgad $CAB = \alpha$ ja $CBA = \beta$. Arvutame kauguse $AC = x$, kui $\alpha = 36°30'$ ja $\beta = 68°30'$ (joon. 89).



Joon. 89.

Lahendus. Rakendades siinusteoreemi, saame:

1) $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$;

2) $\frac{x}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$,

millest

$$x = \frac{c \sin \beta}{\sin \gamma}.$$

Numbriliselt:

$\gamma = 180° - (36°30' + 68°30') = 180° - 105° = 75°$.

Võrret $\frac{x}{\sin 68°30'} = \frac{50}{\sin 75°}$ lükatiga lahendades leiame, et $x = 48{,}2$.

Seega on punktide A ja C vaheline kaugus ligikaudu 48 m.

Näide 2. Lahendada kolmnurk andmeil:

$c=93{,}1$; $b=49{,}5$; $\gamma=110°50'$.

Lahendus. Et antud nurk on nürinurk, siis peavad ülejäänud nurgad α ja β olema teravnurgad.

1) Arvutame nurga β, milleks rakendame siinusteoreemi:

$$\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}.$$

Asendades saame:

$$\frac{49{,}5}{\sin\beta}=\frac{93{,}1}{\sin 110°50'} \text{ ehk } \frac{49{,}5}{\sin\beta}=\frac{93{,}1}{\sin 69°10'}.$$

Siit $\beta=29°50'$.

2) $\alpha=180°-(110°50'+29°50')=39°20'$.

3) Arvutame külje a:

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta} \text{ ehk } \frac{a}{\sin 39°20'}=\frac{49{,}5}{\sin 29°50'}.$$

Seega,

$a=63{,}19\approx 63{,}2$.

Paneme tähele, et

$b<a<c$ ja $\beta<\alpha<\gamma$.

Vastus. $a=63{,}2$; $\alpha=39°20'$; $\beta=29°50'$.

Näide 3. Lahendada kolmnurk andmeil:

$b=34$; $c=46$; $\beta=42°$.

1) Arvutame nurga γ:

$$\frac{c}{\sin\gamma}=\frac{b}{\sin\beta}, \text{ millest } \sin\gamma=\frac{c\sin\beta}{b} \text{ ehk}$$

$$\sin\gamma=\frac{46\cdot\sin 42°}{34} \text{ ehk } \sin\gamma=0{,}9054.$$

Nurga γ arvutamisel peame silmas pidama, et $\gamma>\beta$ (sest $c>b$), ja teiseks, et viimasel võrrandil on kaks lahendit; tõesti, ka $\sin(180°-\gamma)=0{,}9054$.

Nurga γ väärtuseks saame antud juhul:

$\gamma_1=53°32'\approx 53°30'$;

$\gamma_2=126°30'$.

Mõlemad väärtused võivad olla lahendatava kolmnurga nurgaks, sest mõlemad on suuremad kui β.

2) Leiame nurga α:

$\alpha_1 = 180° - (42° + 53°30') = 84°30';$

$\alpha_2 = 180° - (42° + 126°30') = 11°30'.$

3) Külje a arvutamisel saame:

$\frac{a_1}{\sin \alpha_1} = \frac{b}{\sin \beta}$, millest $a_1 = \frac{b \sin \alpha_1}{\sin \beta}$ ehk

$a_1 = \frac{34 \cdot \sin 84°30'}{\sin 42°} \approx 50{,}5;$

$a_2 = \frac{34 \cdot \sin 11°30'}{\sin 42°} \approx 10{,}2.$

Vastused.

1) $\begin{cases} \alpha = 84°30' \\ \gamma = 53°30' \\ a = 50{,}5 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \alpha = 11°30' \\ \gamma = 126°30' \\ a = 10{,}2 \end{cases}$

Kui kolmnurgast on antud kaks külge ja väiksema külje vastasnurk, siis, nagu teada, määravad need andmed kas kaks kolmnurka, ühe kolmnurga või ei määra ühtki kolmnurka. Olgu näiteks antud a, b ja α nii, et $a < b$; nurga β arvutamisel saame

$$\sin \beta = \frac{b \sin \alpha}{a}.$$

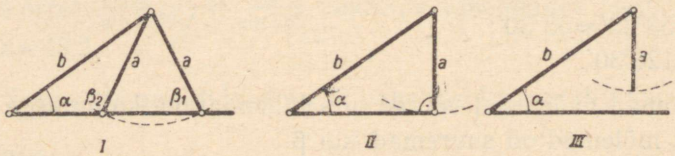
Sõltuvalt andmetest a, b ja α võib juhtuda, et

1) $a > b \sin \alpha$; 2) $a = b \sin \alpha$; 3) $a < b \sin \alpha$, millele vastavalt peaks olema

1) $\sin \beta < 1$; 2) $\sin \beta = 1$; 3) $\sin \beta > 1$.

Esimesel juhul leidub alati teravnurk β_1, mis sellele siinusele vastab. Kuid siis leidub ka nürinurk β_2, millel on sama siinuse väärtus, sest $\sin \beta_1 = \sin(180° - \beta_1)$, seega $\beta_2 = 180° - \beta_1$. Lahendamisel saame sel korral kaks kolmnurka, ühe teravnurkse, teise nürinurkse (joon. 90-I).

Teisel juhul, kui $\sin \beta = 1$, saame lahendamisel ühe kolmnurga, nimelt täisnurkse, sest siis $\beta = 90°$ (joon. 90-II).



Joon. 90.

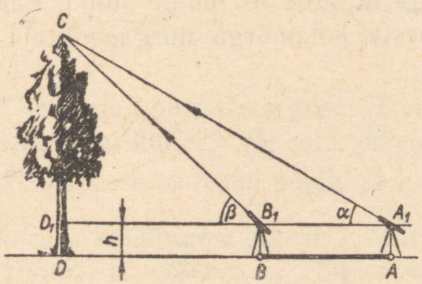
Kolmandal juhul, kui $\sin\beta > 1$, andmed a, b ja α ei määra ühtki kolmnurka, sest pole olemas nurka, mille siinus on suurem kui 1. Ülesandel sel korral lahend puudub (joon. 90-III).

Ülesandeid.

450. Lahenda kolmnurk andmeil:

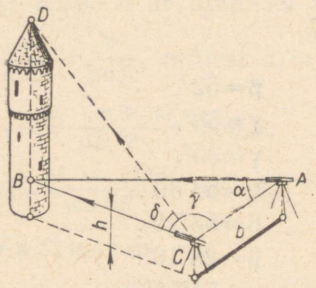
1)	$a=22$;	$\alpha=36°$;	$\beta=52°$.
2)	$b=30$;	$\alpha=52°$;	$\gamma=58°$.
3)	$c=24$;	$\beta=122°$;	$\gamma=35°$.
4)	$c=174$;	$\beta=36°30'$;	$\gamma=63°30'$.
5)	$b=72$;	$c=45$;	$\beta=58°20'$.
6)	$a=416$;	$b=635$;	$\beta=28°10'$.
7)	$b=85{,}76$;	$\beta=36°55'$;	$\gamma=74°18'$.
8)	$c=144{,}7$;	$\alpha=120°16'$;	$\beta=42°24'$.
9)	$b=56$;	$\alpha=52°$;	$\gamma=6°$.
10)	$a=62$;	$b=48$;	$\alpha=50°$.
11)	$a=32$;	$b=48$;	$\beta=40°$.
12)	$b=35$;	$c=45$;	$\beta=46°$.
13)	$b=127$;	$c=283$;	$\beta=70°30'$.
14)	$a=99$;	$c=68$;	$\gamma=28°$.
15)	$a=14{,}5$;	$b=21{,}1$;	$\alpha=63°50'$.

451. Mõõtmistöödel maastikul said õpilased ülesande mõõta niisuguse puu kõrgus, millele ei saanud ligi minna. Ülesande täitmiseks võeti puu tüve läbival sirgel baas $AB=10$ m ning mõõdeti puu kõrgusnurgad α ja β vastavalt punktide A ja B juurest viseerimisega puu latva C (joon. 91). Saadi $\alpha=28°17'$ ja $\beta=41°20'$. Nurgamõõtja kõrgus $h=1{,}3$ m. Kui kõrge oli puu?



Joon. 91.

452. Vabrikukorstna kõrguse kindlakstegemiseks mõõdeti korstna sihis baas $AB=75$ m ning korstna kõrgusnurgad punktide A ja B kohal, saades $\alpha=20°48'$ ja $\beta=32°18'$. Nurgamõõtja kõrgus oli 1,3 m. Kui kõrge oli korsten? (Kasuta joonist 91.)



Joon. 92.

453. Veetorni kõrguse mõõtmiseks võeti maapinnal baas $b=AC$, mis ei asunud torni jalamit läbival sirgel. Mõõdeti nurgad $BAC=\alpha$, $BCA=\gamma$ ja $DCB=\delta$ (joon. 92). Arvuta torni kõrgus andmeil: $b=35$ m; $\alpha=47°43'$; $\gamma=110°28'$; $\delta=32°13'$. Teodoliidi kõrgus $h=1{,}3$ m.

454. Näita, et siinusteoreem kehtib ka täisnurkse kolmnurga kohta.

455. Näita siinusteoreemi abil, et

1) kui kolmnurgas kaks nurka on võrdsed, siis on võrdsed ka nende nurkade vastasküljed;

2) kolmnurgas, mille kõik nurgad on võrdsed, on ka kõik küljed võrdsed.

456. Kolmnurga nurgad suhtuvad nagu $1:2:3$ ja ümbermõõt on 20 cm. Kui pikad on kolmnurga küljed?

457. Kolmnurgas ABC on joonestatud nurga B poolitaja BE, kus E on nurgapoolitaja ja külje AC ühine punkt. Rakendades siinusteoreemi, tõesta kolmnurga nurgapoolitaja omadus:

$$AE:EC=AB:BC.$$

7.7. KOOSINUSTEOREEM.

Kolmnurga lahendamist juhul, kui ta on määratud kolme küljega või kahe külje ja nendevahelise nurgaga, ei saa alustada siinusteoreemiga, sest sel korral ei saa kirjutada võrret, millest kolm liiget on teada.

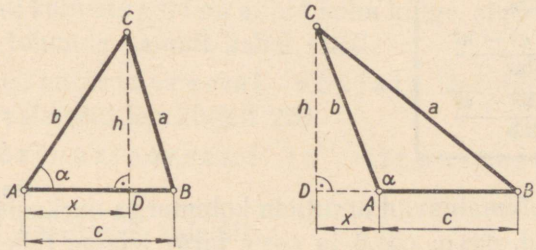
Sel puhul on rakendatav seos, mida väljendab nn. koosinusteoreem:

kolmnurga külje ruut on võrdne teiste külgede ruutude summaga, millest on lahutatud külgede ja nendevahelise nurga koosinuse kahekordne korrutis.

Sümbolites

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$$
$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos\beta$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$$

Tõestus. Tõestame koosinusteoreemi ühtaegu nii teravnurkse kui ka nürinurkse kolmnurga kohta (joon. 93).



Joon. 93.

Tõmbame tipust C kõrguse $CD=h$. Tähistame tähega x külje b projektsiooni küljel c või selle pikendusel.

Pütagorase teoreemi põhjal saame kolmnurgast DBC:

teravnurkse kolmnurga korral:	nürinukse kolmnurga korral
$a^2=h^2+(c-x)^2$,	$a^2=h^2+(c+x)^2$,
$a^2=h^2+x^2+c^2-2cx$.	$a^2=h^2+x^2+c^2+2cx$.

Kolmnurgast ADC: $h^2+x^2=b^2$, seega

$a^2=b^2+c^2-2cx.$ | $a^2=b^2+c^2+2cx.$

Kolmnurgast ADC saame, et

$x=b\cos\alpha.$ | $x=b\cos(180°-\alpha)=$
$=-b\cos\alpha.$

Kirjutades eespool saadud valemites tähe x asemele tema avaldised, saame

$a^2=b^2+c^2-2cb\cos\alpha.$ | $a^2=b^2+c^2+2c(-b\cos\alpha).$

Seega saame nii teravnurkse kui ka nürinurkse kolmnurga puhul:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha.$$

Analoogiliselt saame koosinusteoreemi tõestada ka külgede b ja c kohta.

Valemid, mis väljendavad koosinusteoreemi, võimaldavad arvutada kolmnurga külge kahe ülejäänud külje ja nendevahelise nurga järgi.

Eespool toodud valemeid võib kirjutada ka kujul:

$$\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$\cos\beta=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$$

$$\cos\gamma=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

Need valemid võimaldavad arvutada kolmnurga nurkasid, kui kõik küljed on antud. $\cos\alpha$, $\cos\beta$ ja $\cos\gamma$ järgi leiame tabelitest või lükati abil nurgad α, β ja γ.

Logaritmide kasutamine on koosinusteoreemi rakendamisel raskendatud, sest külje ruudu ja nurga koosinuse avaldised ei ole logaritmitavad.

Niisiis, *koosinusteoreem võimaldab lahendada kolmnurka, millest on antud*

1) *kaks külge ja nendevaheline nurk või*

2) *kolm külge.*

Kui kolmnurgast on antud kaks külge ja nendevaheline nurk, näiteks a, b ja γ, siis ülejäänud elemendid võime leida kahel erineval viisil.

A. Koosinusteoreemi põhjal:

1) rakendades valemit

$c^2=a^2+b^2-2ab \cos\gamma$, arvutame külje c;

2) rakendades valemit

$\cos\beta=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$, leiame nurga β;

3) rakendades valemit

$\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, leiame nurga α.

Viis A on otstarbekohane siis, kui antud külgede mõõtarvud on ühe- või kahekohalised.

B. Koosinusteoreemi ja siinusteoreemi põhjal:

1) valemist $c^2=a^2+b^2-2ab \cos\gamma$ arvutame külje c;

2) rakendades siinusteoreemi, kirjutame võrde

$\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$, millest leiame nurga β;

3) võrdest $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{c}{\sin\gamma}$ leiame lõpuks nurga α.

Kui kolmnurgast on antud kolm külge, siis võib nurkade arvutamine toimuda samuti kahel viisil.

A. Koosinusteoreemi põhjal, kasutades nurkade koosinuste valemeid leheküljelt 220.

B. Koosinusteoreemi ja siinusteoreemi põhjal järgmiselt:

1) kasutades valemit

$\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, leiame nurga α;

2) kirjutades siinusteoreemi põhjal võrde

$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}$, leiame sellest nurga β;

3) võrdest $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{c}{\sin\gamma}$ leiame lõpuks nurga γ.

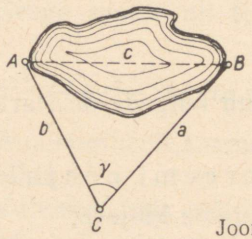
7.8. KOLMNURGA LAHENDAMISE NÄITEID.

Näide 1. Arvuta tiigi pikkus AB (joon. 94), kui $AC=60$ m, $BC=80$ m ja nurk $ACB=88°$.

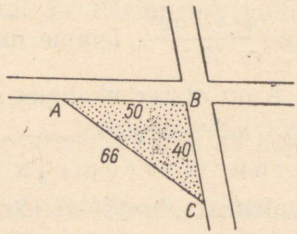
Lahendus. Tähistades pikkuse AB meetrites tähega c, võime koosinusteoreemi põhjal kirjutada:

$$c^2=60^2+80^2-2\cdot 60\cdot 80\cdot\cos 88°=$$
$$=3600+6400-9600\cdot 0{,}0349=9665.$$

$$c=\sqrt{9665}=98{,}29\approx 98.$$



Joon. 94.



Joon. 95.

Seega on tiigi pikkus ligikaudu 98 m.

Näide 2. Risttänavate vahel on kolmnurkne haljasala ABC, mille külgede pikkused on vastavalt 50, 40 ja 66 m (joon. 95). Arvuta tänavatevaheline nurk ABC.

Lahendus. Tähistades otsitava nurga tähega β, võime koosinusteoreemi põhjal kirjutada:

$$\cos\beta=\frac{50^2+40^2-66^2}{2\cdot 50\cdot 40}=\frac{2500+1600-4356}{4000}=-0{,}0640.$$

Seega

$$\cos(180°-\beta)=0{,}0640;$$
$$180°-\beta=86°20';$$
$$\beta=93°40'\approx 94°.$$

Seega on tänavatevaheline nurk 94°.

Näide 3. Kui suured on nurgad kolmnurgas, mille küljed on: $a=195$, $b=169$, $c=182$?

Lähtudes koosinusteoreemist ja rakendades tuntud valemit

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

pole raske tuletada (proovi seda teha!) kolmnurga nn. **poolnurkade koosinuste valemeid:**

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} \qquad \cos\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}} \qquad \cos\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}},$$

kus $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$ tähendab kolmnurga poolt ümbermõõtu. Need valemid on eriti sobivad lükatiga arvutamiseks. Meie näite puhul korraldaksime arvutused nii:

$a=195;$ $\quad p-a=273-195=\ 78;$
$b=169;$ $\quad p-b=273-169=104;$
$c=182;$ $\quad p-c=273-182=\ 91;$
$p=546:2=273;$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{273\cdot 78}{169\cdot 182}=0{,}692;$$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=1-0{,}692=0{,}308; \qquad \sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{0{,}308};$$

$$\frac{\alpha}{2}=33°40'; \qquad \alpha=67°20'.$$

$$\cos^2\frac{\beta}{2}=\frac{273\cdot 104}{195\cdot 182}=0{,}800;$$

$$\sin^2\frac{\beta}{2}=1-0{,}800=0{,}200; \qquad \sin\frac{\beta}{2}=\sqrt{0{,}200};$$

$$\frac{\beta}{2}=26°35'; \qquad \beta=53°10'.$$

$$\cos^2\frac{\gamma}{2}=\frac{273\cdot 91}{195\cdot 169}=0{,}753;$$

$$\sin^2\frac{\gamma}{2}=1-0{,}753=0{,}247; \qquad \sin\frac{\gamma}{2}=\sqrt{0{,}247};$$

$$\frac{\gamma}{2}=29°45'; \qquad \gamma=59°30'.$$

Kontroll. $\alpha+\beta+\gamma=180°00'.$

Märkus. Arusaadavalt võiks näiteks 3. antud ülesande lahendada ka ainult koosinusteoreemi põhjal või rakendades viimast koos siinusteoreemiga (tee seda!).

Ülesandeid.

458. Lahenda kolmnurk järgmisil andmeil:

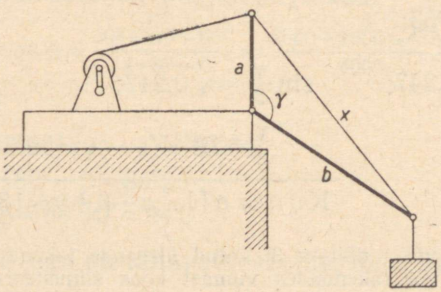
1) $a=16$; $b=12$; $\gamma=38°$.
2) $b=81{,}7$; $c=39{,}2$; $\alpha=122°10'$.
3) $a=52{,}84$; $c=14{,}88$; $\beta=24°55'$.
4) $a=8$; $b=12$; $c=16$.
5) $a=50$; $b=41$; $c=19$.
6) $a=6{,}4$; $b=8{,}8$; $c=10$.
7) $a=40$; $b=19$; $c=41$.
8) $a=1{,}5$; $b=2{,}5$; $c=1{,}8$.
9) $a=24{,}57$; $b=24{,}75$; $c=10{,}05$.
10) $a=0{,}2243$; $b=0{,}2469$; $c=0{,}3126$.

459. Arvuta järve pikkus AB (joon. 94), kui $AC=570$ m, $BC=860$ m ja nurk $\gamma=79°$.

460. Nelinurga küljed on järjestikku 16 m, 18 m, 24 m ja 26 m; üks diagonaal on 36 m. Arvuta nelinurga pindala.

461. Matkaja näeb oma asukohast P kolme mäetippu A, B ja C, millest A ja B paistavad talle ühes ja samas suunas ja millest A on talle kõige lähemal. Kaardi järgi on $AB=9{,}4$ km, $BC=6{,}0$ km ja $AC=11{,}2$ km. Matkaja mõõdab nurga BPC ja leiab selle olevat 12°. Kui kaugel on matkaja mäest C?

462. Ühest ja samast punktist alustasid ühtlast sirgjoonelist liikumist kaks keha, üks kiirusega 2 m sekundis, teine kiirusega 3 m sekundis. Kui kaugel on need kehad teineteisest 10 sekundi pärast, kui liikumise teed moodustavad nurga 34°?



Joon. 96.

463. Joonisel 96 on skemaatiliselt kujutatud tõstekraana, millel tugi $a=3{,}8$ m, õlg $b=6{,}5$ m ning nendevaheline nurk $\gamma=125°$. Arvuta trossi pikkus x.

7.9. KOLMNURGA PINDALA VALEMID.

Kolmnurga pindala saab arvutada tuntud valemi

$$S = \frac{1}{2} ah \tag{1}$$

järgi, kus a tähendab kolmnurga alust ja h alusele tõmmatud kõrgust.

Kui kolmnurk on määratud kahe külje ja nendevahelise nurga kaudu, siis pindala arvutamiseks sobib valem (7.5.):

$$S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma \tag{2}$$

Viimasest pindala valemist saab tuletada valemi kolmnurga pindala arvutamiseks ühe külje ja kolme nurga järgi.

Avaldame siinusteoreemi põhjal külje b:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}; \quad b = \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha}.$$

Asendades pindala valemis (2) külje b tema avaldisega, saame

$$S = \frac{1}{2} a \cdot \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha} \cdot \sin \gamma;$$

$$S = \frac{a^2 \sin \beta \sin \gamma}{2 \sin \alpha} \tag{3}$$

Analoogiliselt saame valemid:

$$S = \frac{b^2 \sin \alpha \sin \gamma}{2 \sin \beta} \tag{3'}$$

$$S = \frac{c^2 \sin \alpha \sin \beta}{2 \sin \gamma} \tag{3''}$$

Näide. Leida kolmnurga pindala, kui külg $c = 89$ m ja selle lähisnurgad on: $\alpha = 88°$, $\beta = 10°50'$.

Lahendus.

$\gamma = 180° - (\alpha + \beta) = 180° - 98°50' = 81°10'$.

Valemi (3″) järgi kirjutame:

$$S=\frac{89^2\cdot\sin 88^\circ\cdot\sin 10^\circ 50'}{2\cdot\sin 81^\circ 10'}.$$

Edasisi arvutusi lükati abil sooritades saame vastuse järgmiselt:

$$S=\frac{7900\cdot 1\cdot 0{,}188}{2\cdot 0{,}988}=\frac{7900\cdot 0{,}094}{0{,}988}=756\ (\text{m}^2).$$

Kolmnurga pindala saab arvutada ka kolme külje järgi. Sellekohase valemi tuletamisel lähtume valemist (2) kujul

$$S=\frac{1}{2}bc\sin\alpha$$

ning rakendame põhiseost

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)}.$$

Saame: $S=\frac{bc}{2}\sqrt{(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)}$.

Teisendame juuritavat avaldist. Liites koosinusteoreemist saadud valemis

$$\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

mõlema poolega arvu 1, saame

$$1+\cos\alpha=1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}$$

ehk, lahutades viimase murru lugeja tegureiks,

$$1+\cos\alpha=\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc}.$$

Tähistame kolmnurga ümbermõõdu sümboliga $2p$; siis

$$a+b+c=2p,$$
$$a+b-c=a+b+c-2c=2p-2c=2(p-c).$$
$$a+c-b=a+b+c-2b=2p-2b=2(p-b),$$
$$b+c-a=a+b+c-2a=2p-2a=2(p-a).$$

Seega

$$1+\cos\alpha=\frac{2p(p-a)}{bc}.$$

Saadud võrduse mõlemaid pooli arvust 2 lahutades saame

$$1-\cos\alpha=2-\frac{2p(p-a)}{bc}=\frac{2}{bc}(bc-p^2+ap).$$

Asendades viimases sulgavaldises a väärtusega $2p-b-c$, saame sulgavaldist teisendada järgmiselt:

$$bc-p^2+ap=bc-p^2+2p^2-pb-pc=$$
$$=p^2-pb-pc+bc=$$
$$=(p-b)(p-c).$$

Järelikult

$$1-\cos\alpha=\frac{2(p-b)(p-c)}{bc}.$$

Pindala valemi saame lõpuks nii:

$$S=\frac{bc}{2}\sqrt{\frac{2p(p-a)}{bc}}\cdot\sqrt{\frac{2(p-b)(p-c)}{bc}};$$

$$\boxed{S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}} \qquad (4)$$

Seda valemit nimetatakse Heroni pindalavalemiks. Kreeka matemaatik Heron elas II ja III sajandi vahetusel e. m. a. Viimasel ajal on selgunud, et valem oli tuntud juba enne Heronit.

Näide. Leida võrdhaarse kolmnurga pindala, kui haar on 4,6 m ja alus 5,8 m.

Lahendus. Kasutades Heroni pindalavalemit, viime arvutused läbi järgmise skeemi järgi:

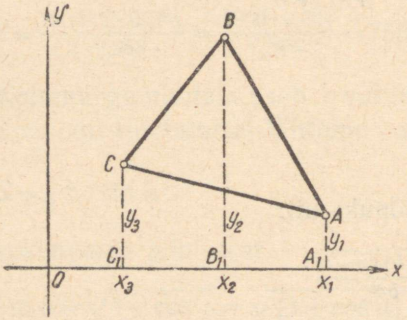
$a=4,6$	$p-a=2,9;$
$b=4,6;$	$p-b=2,9;$
$c=5,8;$	$p-c=1,7;$
$p=15,0:2=7,5;$	

$$S=\sqrt{7,5\cdot 2,9^2\cdot 1,7}=2,9\cdot\sqrt{7,5\cdot 1,7}.$$

Edasi leiame lükatil korrutise $7,5\cdot 1,7$ skaalade A ja B abil; korrutise väärtust välja lugemata saame niidi alt skaalalt D ruutjuure väärtuse; viimastki välja lugemata korrutame ta kohe arvuga 2,9 ning loeme lõpptulemuseks numbrid 1—0—4. Arvutusandmete suurusjärke ja nimetusi arvestades otsustame, et

$$S=10,4\ (\text{m}^2).$$

Kolmnurga pindala on arvutatav ka kolmnurga tippude koordinaatide järgi. Olgu koordinaatteljestikus antud kolmnurk ABC, mille tippude koordinaadid on vastavalt $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$ ja $(x_3; y_3)$. Kolmnurga ABC pindala on vaadeldav trapetsite AA_1B_1B ja BB_1C_1C pindalade summana, millest on lahutatud trapetsi $AA_1C_1C_1$ pindala (vt. joonis 97):



Joon. 97.

$$S_{ABC}=S_{AA_1B_1B}+S_{BB_1C_1C}-S_{AA_1C_1C}.$$

Saame:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}(y_1+y_2)(x_1-x_2)+\frac{1}{2}(y_2+y_3)(x_2-x_3)-$$

$$-\frac{1}{2}(y_1+y_3)(x_1-x_3)=$$

$$=\frac{1}{2}[y_1x_1-y_1x_2+y_2x_1-y_2x_3+y_3x_2-y_1x_1+y_1x_3-y_3x_1]=$$

$$=\frac{1}{2}[y_1(x_1-x_2)-y_3(x_1-x_2)+y_2(x_1-x_3)-y_1(x_1-x_3)]=$$

$$=\frac{1}{2}[(x_1-x_2)(y_1-y_3)-(x_1-x_3)(y_1-y_2)].$$

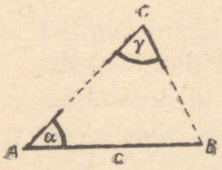
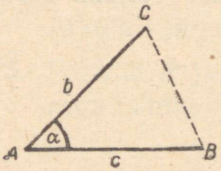
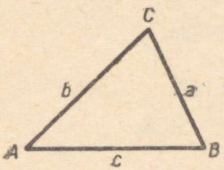
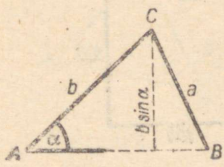
Viimase avaldise väärtus on positiivse orientatsiooniga kolmnurga korral positiivne ja negatiivse orientatsiooniga kolmnurga korral negatiivne. Et pindala mõistame positiivse arvuna, sellepärast loeme kolmnurga pindala väärtuseks selle avaldise absoluutväärtuse:

$$S=\left|\frac{1}{2}[(x_1-x_2)(y_1-y_3)-(x_1-x_3)(y_1-y_2)]\right|$$

ehk

$$\boxed{S=\frac{1}{2}|(x_1-x_2)(y_1-y_3)-(x_1-x_3)(y_1-y_2)|}$$

7.10. KOLMNURGA LAHENDAMISE SKEMAATILINE ÜLEVAADE.

Antud elemendid	Puuduvate elementide leidmine	Pindala
I. Külg ja kaks nurka 	1) $\beta = 180° - (\alpha + \gamma)$ $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$ 2) $b = \frac{c \sin\beta}{\sin\gamma}$ 3) $a = \frac{c \sin\alpha}{\sin\gamma}$	$S = \frac{c^2 \sin\alpha \sin\beta}{2 \sin\gamma}$
II. Kaks külge ja nurk nende vahel 	1) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos\alpha$ $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$ 2) $\sin\beta = \frac{b \sin\alpha}{a}$ 3) $\sin\gamma = \frac{c \sin\alpha}{a}$	$S = \frac{1}{2} bc \sin\alpha$
III. Kolm külge 	$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$ $\sin\frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$	Heroni pindalavalem
IV. Kaks külge ja neist ühe vastasnurk 	A. Lahend puudub, kui $a < b \sin\alpha$ B. On üks lahend, kui 1) $a > b$ 2) $a = b$ ja $\alpha < 90°$ 3) $a = b \sin\alpha$ C. Kaks lahendit, kui $b > a > b \sin\alpha$ $\frac{a}{\sin\gamma} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$	

Ülesandeid.

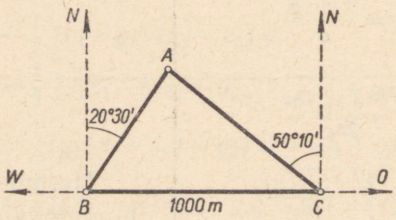
464. Arvuta kolmnurga pindala järgmisil andmeil:

1) $a=93$; $b=65$; $\gamma=42°$.
2) $b=4{,}42$; $c=5{,}72$; $\alpha=65°20'$.
3) $a=50{,}8$; $c=32{,}3$; $\beta=23°30'$.
4) $a=20{,}73$; $b=36{,}26$; $\gamma=70°45'$.
5) $a=48{,}8$; $\beta=106°$; $\gamma=25°20'$.
6) $a=98{,}55$; $\alpha=23°42'$; $\beta=47°24'$.
7) $b=0{,}307$; $\alpha=32°40'$; $\beta=70°20'$.
8) $a=28$; $b=35$; $c=42$.
9) $a=0{,}18$; $b=0{,}23$; $c=0{,}09$.
10) $a=421{,}6$; $b=499{,}8$; $c=335{,}9$.

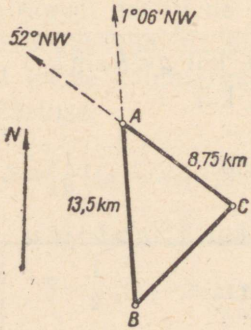
465. Võrdhaarse kolmnurga pindala on 636 cm² ja kolmnurga suurim nurk on 92°42′. Arvuta kolmnurga haar.

466. Leia kolmnurga nurgad, kui kolmnurga pindala on 78 m² ja kaks külge on 13,8 m ja 24,6 m.

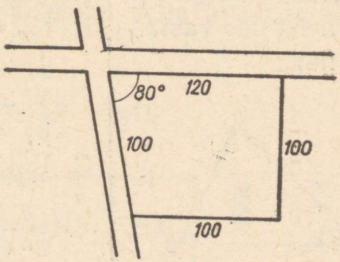
467. Joonisel 98 on kujutatud kolmnurgakujulise väljaku ABC plaan. Arvuta väljaku pindala.



Joon. 98.



Joon. 98a.



Joon. 99.

468. Arvuta joonisel 98a kujutatud kolmnurga pindala.

469. Arvuta joonisel 99 kujutatud maatüki pindala.

470. Arvuta kolmnurga ABC pindala:

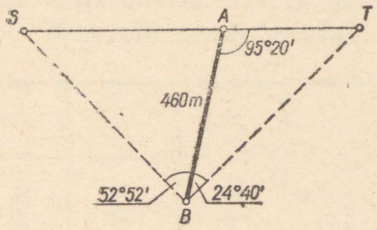
1) $A(2; -1)$, $B(-3; 1)$, $C(0; 2)$;
2) $A(2; -2)$, $B(-2; -8)$, $C(7; -3)$;
3) $A(2; 3)$; $B(3; 3)$, $C(-4; 3)$;
4) $A(-3; 2)$, $B(1; 3)$, $C(-2; 3)$.

471. Ligipääsmatute punktide S ja T vahelise kauguse määramiseks mõõdeti baas AB, mille üks otspunkt A asus sirgel ST punktide S ja T vahel (joon. 100) ja mille pikkus oli 460 m. Peale selle mõõdeti nurgad $\angle BAT = 95°20'$, $\angle ABT = 24°40'$ ning $\angle ABS = 52°52'$. Arvuta kaugus ST.

472. Ligipääsmatute punktide S ja T vahelise kauguse kindlakstegemiseks mõõdeti baas AB, mille otspunkt A asus lõigu ST pikendusel (joon. 101), ning nurgad $\angle SAB = \alpha$, $\angle ABS = \beta$ ja $\angle SBT = \gamma$.

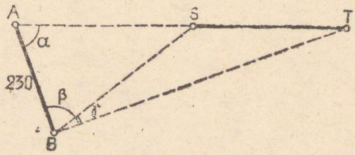
Arvuta kaugus ST, kui $AB = 230$ m, $\alpha = 80°$, $\beta = 70°$ ja $\gamma = 25°$.

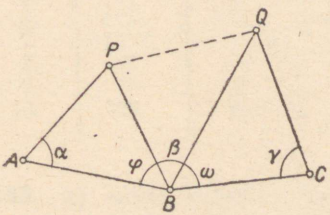
473. Punktid P ja Q teisel pool jõge on siinpoolselt kaldalt korraga nähtavad ainult punktist B (joon. 102). Punktid B ja P



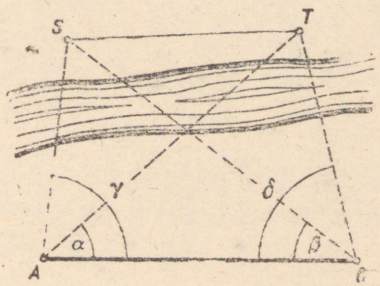
Joon. 100.

Joon. 101.





Joon. 102.



Joon. 103.

on korraga nähtavad punktist A. Punktid Q ja B on nähtavad punktist C. Pikkused AB ja BC on vastavalt 92,3 ja 72,1 m. Teodoliidiga nurki mõõtes leiti, et $\alpha = 66°16'$, $\beta = 20°48'$, $\gamma = 82°25'$, $\varphi = 52°18'$ ja $\omega = 60°05'$. Arvuta pikkus PQ.

474. Punktid S ja T teisel pool jõge on korraga nähtavad nii punktist A kui ka punktist B siinpool jõge. Punktide S ja T vahelise kauguse (joon. 103) määramiseks mõõdeti AB ja nurgad α, β, γ ja δ. Arvuta kaugus ST, kui $AB = 100$ m, $\alpha = 52°$, $\beta = 57°$, $\gamma = 96°$ ja $\delta = 87°$.

Näpunäiteid. 1) Arvuta AS kolmnurgast ASB. 2) Arvuta AT kolmnurgast ATB. 3) Arvuta ST kolmnurgast AST. Kontrolliks arvuta samal viisil ST kolmnurgast BST.

475. Lahenda ülesanne 474 (joon. 103) järgmisil andmeil: $AB = 150$ m, $\alpha = 97°$, $\beta = 45°$, $\gamma = 107°$, $\delta = 59°$.

KORDAMISÜLESANDEID.

476. Ristküliku pikem külg $a=48{,}06$ mm; ühendades külgede keskpunktid, saame rombi, mille nurk $\alpha=32°$. Arvuta ristküliku lühem külg.

477. Peegli ees asetseb kaks punkti, mille kaugused peegli tasapinnast on 2 cm ja 10 cm. Punktide kaugused teineteisest on 17 cm.
Kui suur langemisnurk on valguskiirel, mis väljudes ühest punktist läbib pärast peegeldumist teise punkti?

478. Täisnurkse kolmnurga pindala on 12,34 m² ja üks nurk on 36°24′. Leia kolmnurga hüpotenuus.

479. Arvuta korrapärase kümmenurga ümberringjoone raadius, kui kümmenurga apoteem on 26,8 cm.

480. Ehita sirkli ja joonlaua abil kolmnurk andmeil: $a=10$ cm, $\alpha=60°$ ja $\beta=45°$. Mõõda külg b. Kontrolli mõõtmistulemust arvutamise teel.

481. Ehita sirkli ja joonlaua abil kolmnurk andmeil: $a=54$ mm, $b=42$ mm ja $\alpha=135°$. Mõõda jooniselt nurk β ja kontrolli tulemust arvutamise teel.

482. Alljärgnevas tabelis on antud kümne kolmnurga elemendid. Kontrolli nende sobivust.

Nr.	a	b	c	α	β	γ	S
1.	5	12	13	22°37′	67°23′	90°	30
2.	16	63	65	14°15′	75°45′	90°	500
3.	6	5	5	73°44′	53°08′	53°08′	12
4.	55	110	110	28°58′	75°31′	75°31′	2 900
5.	84	72	45	89°35′	58°18′	32°07′	1 600
6.	416	635	970	18°02′	28°12′	133°46′	95 200
7.	133,1	85,76	137,5	68°47′	36°55′	74°18′	5 500
8.	52	56	6,3	52°	122°32′	5°28′	140
9.	17	8	11,9	116°	25°	39°	43
10.	108	81,7	39,2	122°06′	39°58′	17°56′	1 350

483. a) Ehita sirkli ja joonlaua abil kolmnurk andmeil: $a=50$ mm, $b=70$ mm ja $\gamma=22°30′$. Mõõda jooniselt kolmas külg c ja kontrolli tulemust arvutamise teel.

b) Ehita sirkli ja joonlaua abil kolmnurk, mille küljed on: $a=60$ mm, $b=70$ mm ja $c=80$ mm. Mõõda jooniselt kolmnurga nurgad ja kontrolli tulemust arvutamise teel.

484. Alljärgnevas tabelis on antud kolmnurka määravad elemendid. Arvuta puuduvad elemendid.

Nr.	a	b	c	α	β	ν	S
1.	7	8					14
2.	5			44°25′		101°32′	
3.	5	7					9,8
4.		14		53°08′		67°23′	
5.	13	20			67°23′		
6.		75	91			120°31′	
7.	9	65		6°22′			
8.		65	76		46°24′		
9.	9	1,7	8,9				
10.	8,95	6,88	10,2				

485. Kolmnurgas, mille küljed moodustavad aritmeetilise progressiooni, on üks külg 5 cm ja selle külje vastasnurk 120°. Arvuta teised küljed, nurgad ja pindala.

486. Võrdhaarse täisnurkse kolmnurga hüpotenuus on jaotatud kolmeks võrdseks osaks ja jaotuspunktid on ühendatud täisnurga tipuga. Millisteks osadeks jaguneb täisnurk?

487. Kolmnurga nurgad suhtuvad nagu 2:3:4. Kuidas suhtuvad kolmnurga küljed?

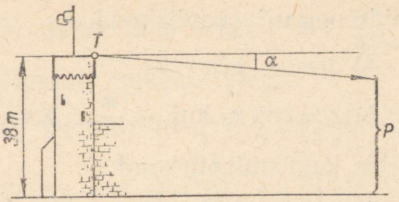
488. Kolmnurga küljed suhtuvad nagu 2:3:4. Kuidas suhtuvad kolmnurga nurgad?

489. Kolmnurga pindala on 252 cm^2 ja kaks nurka on 53°08′ ja 120°31′. Arvuta kolmnurga küljed.

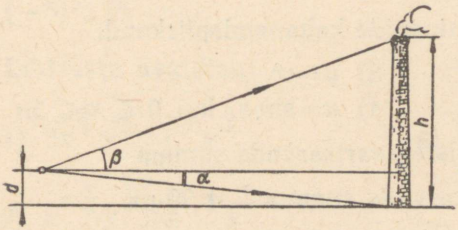
490. Nelinurga küljed on järjestikku 11 cm, 8,4 cm, 5,5 cm ja 4,2 cm; viimase kahe külje vaheline nurk on 70°. Arvuta nelinurga pindala.

491. Täisnurkse kolmnurga teravnurga α siinus on $\frac{1}{3}$. Missuguse osa hüpotenuusist moodustab kaatet a?

492. Täisnurkse kolmnurga teravnurga β koosinus on $\frac{5}{8}$. Mitu protsenti hüpotenuusist on nurga β lähiskaatet?



Joon. 104.



Joon. 105.

493. Missuguse nurga koosinus võrdub 45°-se nurga tangensiga?

494. Missuguse teravnurga tangens võrdub 30°-se nurga siinusega?

495. 38 m kõrguse torni tipust T vaadeldava punkti P alangunurk $\alpha = 4{,}3°$ (joon. 104). Arvuta punkti P kaugus torni tipust T.

496. Kõrguselt $d = 9{,}30$ m vaadelduna paistab vabriku korstna jalg rõhtsihist nurga $\alpha = 6{,}1°$ võrra allpool, korstna ülemine äär aga nurga $\beta = 16{,}3°$ võrra kõrgemal (joon. 105). Arvuta korstna kõrgus h.

497. Leia vahemikust 0° kuni 360° kõik nurgad, mis rahuldavad võrrandit:

a) $\cos x = \sin 2x$; b) $\cos x + \cos 2x = 0$; c) $\sin x = 2 \cos x$.

498. Leia järgmiste funktsioonide nullkohad:

1) $y = 2x + 9$
2) $y = -x^2 + x - 12$
3) $y = -\frac{1}{3}x + 1$
4) $y = 12 - x - 6x^2$
5) $y = \sin 2x$
6) $y = \cos \frac{1}{3}x$

499. Leia järgmiste funktsioonide positiivsuspiirkond:

1) $y = 3x - 6$
2) $y = x^2 + 5x - 14$
3) $y = 24 - 17x - 20x^2$
4) $y = \sin x$, kui $0 \leqslant x \leqslant 4\pi$

500. Leia järgmiste funktsioonide negatiivsuspiirkond:

1) $y=-0{,}3x+1{,}5$ 3) $y=2x^2+3x-2$

2) $y=-x^2-6x+16$ 4) $y=\cos x$, kui $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}\pi$

501. Leia järgmiste funktsioonide kasvamispiirkond:

1) $y=x^2+3x+22$ 3) $y=\tan x$, kui $0\leqslant x\leqslant 2\pi$,

2) $y=-x^2-x+2$ 4) $y=x^4$

502. Leia järgmiste funktsioonide kahanemispiirkond:

1) $y=x^2+3x-10$ 3) $y=x^3$

2) $y=2x^2-13x+15$ 4) $y=\sin x$, kui $0\leqslant x\leqslant 3\pi$

503. Leia kõigi kahekohaliste paarisarvude summa.

504. Leia kõigi paaritute arvude summa 1-st 99-ni.

505. Aritmeetilise progressiooni neljas liige on 10, seitsmes liige 19. Leia progressiooni esimene liige ja vahe.

506. Kaldpinda mööda liikuv kera läbib esimeses sekundis 0,5 m ja igas järgnevas 0,8 m rohkem. Kui pika tee läbib kera 10 sekundiga?

507. Leia progressiooni

$\log 1;\ \log 10;\ \log 100;\ \log 1000;\ \ldots$

10. liige

508. Arvuta avaldise

$$\frac{(x^2yz)^3-(8yz)^2}{4x^3y^2-3x^5z^2}$$

väärtus, kui $x=-2$, $y=5$ ja $z=-3$.

509. Lahenda proovimise teel võrrandid

1) $4x^3-108=0$

2) $3x^4-48=0$

510. Järjesta suuruse järgi:

1) 3^9; $2{,}1^9$; 10^9; $(-9)^9$; $0{,}2^9$; $0{,}9^9$; $(-0{,}2)^9$; $(-31)^9$; $(-5)^9$.

2) 3^{10}; $2{,}1^{10}$; 10^{10}; $(-9)^{10}$; $0{,}2^{10}$; $0{,}9^{10}$; $(-0{,}2)^{10}$; $(-31)^{10}$; $(-31)^{10}$; $(-5)^{10}$.

511. Lihtsusta avaldisi:

1) $(-2x\cdot 4yz^2)^3$ 2) $\frac{4^3a^4b^5c^2}{4^2a^7b^3c^3}$

3) $3x^2y^5 \cdot 2x^4y^3 - (2x^3y^4)^2 + \frac{12x^9y^{10}}{3x^3y^2}$

512. Järjesta suuruse järgi:

1) 2^8; 2^{-8}; $(-2)^8$; $(-2)^{-8}$; $\left(\frac{1}{2}\right)^8$; $\left(\frac{1}{2}\right)^{-8}$; $\left(-\frac{1}{2}\right)^8$; $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-8}$;

2) 3^7; 3^{-7}; $(-3)^7$; $(-3)^{-7}$; $\left(\frac{1}{3}\right)^7$; $\left(\frac{1}{3}\right)^{-7}$; $\left(-\frac{1}{3}\right)^7$; $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-7}$;

3) 5^9; 5^{10}; $(-5)^9$; $(-5)^{10}$; 5^{-9}; 5^{-10}; $(-5)^{-9}$; $(-5)^{-10}$; $(-5)^0$; 5^0.

513. Lihtsusta avaldisi:

1) $3x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{2}{3}} : x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}$

2) $x^{-\frac{2}{5}}y^{\frac{1}{4}} : x^{-\frac{2}{5}}y^{\frac{3}{4}}$

3) $\left(x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{5}{6}}\right)^2 \cdot \left(2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{2}{3}}\right)^{-1}$

4) $(a^4b^6c)^{\frac{1}{2}} : \left(a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}c\right)^2$

5) $\left[\left(a^{-\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{6}}\right)^{-\frac{3}{2}}\right]^4$

6) $\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}x^{\frac{5}{6}}}{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{2}{3}}}\right)^{-3}$

7) $\sqrt{a^2b^3} \cdot \sqrt[3]{a^2b}$

8) $\sqrt[3]{x^2y^4z} : \sqrt[4]{x^3y^2z^3}$

9) $(\sqrt[3]{x^2y})^4 \cdot (\sqrt{xy})^3$

10) $\left[(\sqrt{ab^3} \cdot \sqrt[3]{a^2b})^2\right]^{\frac{1}{3}}$

514. Järjesta suuruse järgi:

1) $52^{\frac{1}{2}}$; $2^{\frac{1}{2}}$; $52^{-\frac{1}{2}}$; $2^{-\frac{1}{2}}$; $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$; $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}$

2) $3^{\frac{1}{3}}$; $(-3)^{\frac{1}{3}}$; $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$; $\left(-\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$; $3^{-\frac{1}{3}}$; $(-3)^{-\frac{1}{3}}$; $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{3}}$; $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{3}}$;

3) 10^2; $10^{\frac{1}{2}}$; 10^{-2}; $10^{-\frac{1}{2}}$; 10^0; 10^3; 10^{-3}; $10^{\frac{1}{3}}$; $10^{-\frac{1}{3}}$.

515. Kirjuta järgmised murrud kujul, kus nimetaja on ratsionaalne:

1) $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2y}}$

2) $\frac{1}{1-\sqrt{14}}$

3) $\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

4) $\frac{2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}}{3a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}}$

5) $\dfrac{xy}{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}$ 6) $\dfrac{(2-a)^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}-(2-a)^{\frac{1}{2}}}$

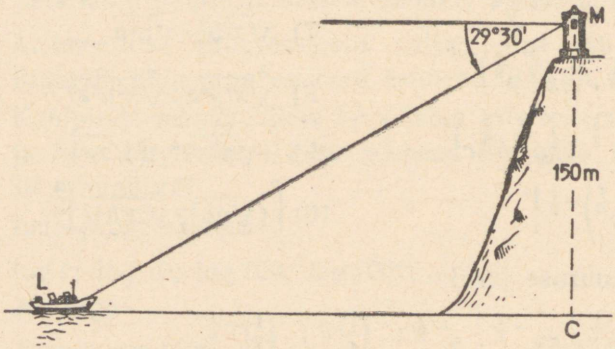
516. Lahenda järgmised võrrandid:

1) $3\sqrt{x}-75=0$ 4) $\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x+1}=0$

2) $(2-x)^{\frac{1}{2}}-7=0$ 5) $(x+2)^{\frac{1}{3}}-2x^{\frac{1}{3}}=0$

3) $(2y-1)^{\frac{1}{2}}-y=0$

517. Tuletornist, mis asub 150 m kõrgusel merepinnast, paistab laev horisontaaltasapinnast, mis läbib vaatleja silma, 29°30′ allpool. Kui kaugel on laev rannast (punktist *C*, joon. 106)?



Joon. 106.

518. Kahe kontsentrilise ringjoone raadiused on 16 mm ja 28 mm. Kui kaugel nende ringjoonte ühisest keskpunktist paistab suurem ring kaks korda suuremas nurgas kui väiksem? Kontrolli lahendit andmete ja saadud tulemuse järgi tehtud joonise abil.

519. Sarika pikkus maja seina kohalt katuse harjani on 3,8 m ja katuse kaldenurk on 35°. Leia aampalgi pikkus.

520. On antud lõik a ja nurk α. Konstrueeri sirkli ja joonlaua abil lõik:

1) $a \sin \alpha$; 2) $a \cos \alpha$.

521. Äratuskella kõlisti osuti on 6 peal. Kui suure nurga võrra peab seda osutit pöörama, et äratuskell kõliseks kell 8, kui

kõlisti osutit saab pöörata tunniosuti pöörlemisele vastupidises suunas?

522. Hammasrattal on 72 hammast. Kui suure nurga võrra pöördub hammasratas, kui ta pöördub:

1) kellaosuti pöörlemisele vastupidises suunas 42; 300 hamba võrra?

2) kellaosuti pöörlemise suunas 24; 144 hamba võrra?

523. Lihtsusta avaldised:

1) $\sin 49° + \sin(-49°) + \cos 25° - \cos(-25°)$

2) $\cos 33° - \cos 17° - \cos(-33°) - \sin 40° + \cos(-17°) - -\sin(-40°)$

3) $\sin(\pi - 1) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$

4) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \cos(\pi - \alpha)$

524. Arvuta järgnevate avaldiste väärtused tabeleid kasutamata:

1) $\frac{\tan 26° + \tan 19°}{1 - \tan 26° \tan 19°}$

2) $\frac{\tan\frac{\pi}{15} + \tan\frac{4\pi}{15}}{1 - \tan\frac{\pi}{15}\tan\frac{\pi 4}{15}}$

3) $\sin 18° \cos 42° + \cos 18° \sin 42°$

4) $\cos 48° \cos 16° + \sin 48° \sin 16°$

525. Lahenda võrrandid:

1) $\cos 4x + \cos 2x = 0$

2) $\tan 2x = \tan x$

526. Täisnurkses kolmnurgas on üks külg teise kahe külje geomeetriline keskmine. Kui suured on selle kolmnurga teravnurgad?

527. Arvuta logaritmide abil:

1) $\frac{\sqrt{0.06768 \cdot \sqrt{0.001}}}{0{,}004837^3 \cdot \sqrt{10}}$

2) $\frac{17{,}62}{4{,}834^3 \cdot \sqrt{\frac{0{,}716}{8{,}55}}}$

3) $\frac{\sqrt[5]{1000} \cdot \sqrt[3]{100}}{\sqrt{100000} \cdot \sqrt[4]{10}}$

4) $\frac{\sqrt{0.1} \cdot \sqrt[5]{0.0001}}{\sqrt{0{,}0001} \cdot \sqrt[4]{0{,}001}}$

5) Arvuta maakera ruumala, kui maakera raadius on 6371 km. Kui pikk oleks niisama suure ruumalaga kuubi serv?

6) Kui pika tee läbib Maa aastas, tehes täistiiru ümber Päikese? (Maa kaugus Päikesest on 149 700 000 km.)

7) Rauast kuub kaaluga 82,7 kg on asetatud rõhtsale lauale. Kui suurt rõhku avaldab kuup lauale? (Raua erikaal on $7{,}8\ \frac{\text{G}}{\text{cm}^3}$.)

8) Vasktraadi kera kaalub 24,67 kG. Mitu meetrit traati on keras, kui traadi läbimõõt on 1,5 mm? (Vase erikaal on $8{,}9\ \frac{\text{G}}{\text{cm}^3}$.)

9) Kolmnurga külgede pikkused on 283,5 m, 309,2 m ja 3467 m. Arvuta kolmnurga pindala.

528. Lahenda arvutuslükati abil järgmised ülesanded:

1) 0,722 · 268
14,9 : 0,066
0,0304 : 9,23
3,14 · 2030

2) 56,6 · 125,5
6200 : 19,8
0,87 : 52,3
942 : 40,7

3) $0{,}0288^2$
137^3
8530^2
$0{,}046^3$

4) $\sqrt{108000}$
$\sqrt[3]{0{,}01}$
$\sqrt[3]{675000}$
$\sqrt{0{,}00007}$

5) $\sqrt[4]{28000}$; $\sqrt[6]{0{,}003}$

6) Leia x:

a) $x : 232 = 15{,}6 : 8{,}7$; $59{,}3 : x = 692 : 7{,}4$.

b) $19{,}9 : 0{,}79 = x : 36{,}5$; $0{,}0405 : 0{,}97 = 16{,}4 : x$.

7) $\frac{31{,}7 \cdot 9.25}{17{,}2}$ $\quad$ $\frac{0{,}281 \cdot 4{,}76 \cdot 18{,}9}{11{,}8 \cdot 0{,}647}$

$\frac{91{,}5 \cdot 107 \cdot 3.90}{16{,}4 \cdot 0{,}54 \cdot 522}$ $\quad$ $\frac{5200 \cdot 249}{3140 \cdot 178}$

8) Silikaatkivi standardmõõtmed on $6\times12\times25$ cm. Arvuta ühe kivi kaal, kui silikaatkivi erikaal on 2,1 $\frac{\text{G}}{\text{cm}^3}$.

9) Ristkülik, mille mõõtmed on 87,5 m ja 17,2 m, tuleb jaotada sirgetega, mis on paralleelsed lühema küljega, osadeks, mille pindalad suhtuvad nagu 7 : 12 : 17. Leia osade pindalad ja mõõtmed.

10) Toa põranda mõõtmed on 4,26 m ja 3,72 m. Mitu 15 cm laiust ja 3,5 m pikkust lauda kulub selle põranda katmiseks, kui arvestada, et laudade parajaks saagimisel läheb kaduma 6% kogu materjalist.

11) Risttahuka mõõtmed on 56,7 cm, 67,5 cm ja 31,6 cm. Arvuta risttahuka tahkude diagonaalide pikkused.

2) Lahenda võrrandid:

a) $2{,}1x^2-4{,}7x-5{,}85=0$

b) $0{,}2x^2+1{,}82x-7{,}87=0$

529. Teisenda logaritmitavaks:

1) $\frac{\cos x+\sqrt{3}\sin x}{\cos x-\sqrt{3}\sin x}$ 2) $\frac{1+\tan x}{1-\tan x}$

530. Teisenda avaldist

$\sin 87°-\sin 59°-\sin 93°+\sin 61°$.

531. Arvuta peast:

1) $\cos 40°\cos 10°+\sin 40°\sin 10°$

2) $\sin 10°\cos 50°+\cos 10°\sin 50°$

532. Lihtsusta:

1) $4\cos\left(45°-\frac{x}{2}\right)\cdot\sin\left(45°-\frac{x}{x}\right)$

2) $\tan(30°+x)\cdot\tan(x-60°)$

3) $\sin^2 2x(1+\cot^2 2x)$

4) $\cos^4\alpha+\sin^2 2\alpha$

533. 1) Missugustel argumendi väärtustel funktsioonid $y=\cos^2 x$ ja $y=2(\sin x+1)$ on võrdsed?

2) Missugusel argumendi väärtusel funktsiooni $y=2\sin x\cdot\tan x+\cos x$ väärtus võrdub 1-ga?

534. Leia arvutamise teel niisuguste punktide koordinaadid, milles funktsiooni $y=7(1-\cos x)-2\sin^2 x$ graafik lõikab x-telge?

535. Lahenda võrrandid:

1) $5\cos 2x = 4\sin x$
2) $2\cos x - \cos 2x = 1$
3) $\sin\frac{x}{3} = 1$
4) $\sin 10x = 2\cos 5x$
5) $\sin 2x = (\cos x - \sin x)^2$
6) $\cos 4x + \cos 2x = 0$
7) $\sin 5x - \sin x = 0$
8) $\sin\frac{\pi}{6} + \cos x = 1$

536. Teisenda korrutiseks:

1) $\sin\alpha + \frac{1}{2}$
2) $\sin\alpha - \frac{1}{2}\sqrt{3}$

537. Tõesta, et

1) $\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha} = \cot^2\frac{\alpha}{2}$
2) $\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} + \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} = \frac{2}{\sin\alpha}$
3) $\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}} - \sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}} = 2\tan\alpha$

538. Tõesta, et avaldise

$$\frac{\sin\alpha+\tan\alpha}{\cos\alpha+\cot\alpha}$$

väärtuseks ei saa olla negatiivne arv.

539. Lihtsusta ja arvuta

$\sin 27^\circ\cos 33^\circ + \sin 63^\circ\cos 57^\circ$.

540. Teades, et α ja β on positiivsed teravnurgad, näita, et kui $\tan\alpha = \frac{1}{7}$ ja $\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{10}}$, siis $\alpha + 2\beta = 45^\circ$.

541. Kumb on suurem, kas $\sin 1$ või $\sin 1^\circ$?

542. Missugustel x väärtustel funktsioon

$$y = \frac{1}{\sqrt{\sin x}}$$

on määratud?

543. Leia niisugused x väärtused, mille puhul avaldise $\sqrt{\frac{3x-1}{2-x}}$ väärtus on suurem kui 1?

544. Lahenda võrratus:

$$\tan\frac{\pi x}{4(x+1)}>1.$$

545. Lahenda võrrandid:

1) $\sqrt{4x+2}+\sqrt{4x-2}=4$

2) $\sqrt{4-x}+\sqrt{5+x}=3$

3) $\sqrt{x+5}+\sqrt{2x+8}=7$

4) $x+x^{\frac{1}{2}}=6$

546. Lihtsusta avaldised:

1) $\left(a^{-\frac{1}{2}}+b^{-\frac{1}{2}}\right)^{-2}+\left(a^{-\frac{1}{2}}-b^{-\frac{1}{2}}\right)^{-2}$

2) $\left[a+\left(a^2-1\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{-1}+\left[a-\left(a^2-1\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{-1}$

547. Arvuta avaldise $\sin\alpha\cos\alpha$ väärtus, teades, et α ja β on täisnurkse kolmnurga teravnurgad ja et $\sin\alpha+\sin\beta=1{,}4$.

548. Arvuta murru $\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}$ väärtus, teades, et $\tan\alpha=2{,}7$.

549. Kas on olemas niisugune nurk, mille puhul

1) $\sin\alpha=\frac{1}{3}$ ja $\cos\alpha=\frac{1}{2}$?

2) $\sin\alpha=\sqrt{\frac{1}{3}}$ ja $\cos\alpha=-\sqrt{\frac{2}{3}}$?

550. Arvuta $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ ja $\cot\alpha$, teades, et $\tan\alpha=\frac{1}{2}$ ja $\sin\alpha<0$.

551. Arvuta kolmnurga nurga α funktsioonide väärtused, teades, et $\cos\alpha=-0{,}4$.

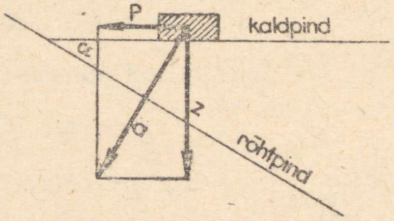
552. Tõesta, et

1) $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha\geqslant\frac{1}{2}$

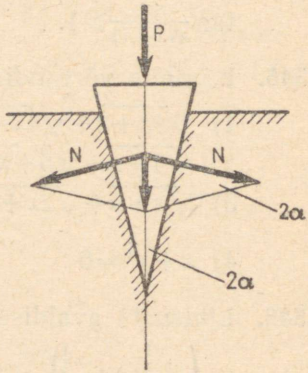
2) $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha\geqslant\frac{1}{4}$

553. Kaldpinnal (joon. 107) on keha, mille raskus $Q=50$ kG. Arvuta jõud P, mis keha kaldpinda mööda alla veab, ja kaldpinnale risti mõjuv jõud z, kui kaldpinna kaldenurk rõhttasapinna suhtes on $\alpha=30°$.

Joon. 107.

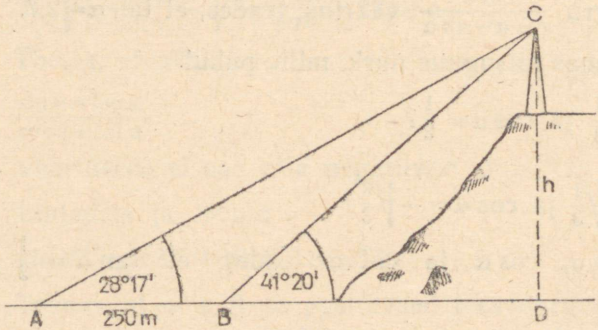


Joon. 108.



554. Kiilu silmale mõjuv jõud P jaotub kaheks komponendiks, mis kiilu põsktasapindadega on risti. Arvuta komponent N (joon. 108), kui kiilunurk $2\alpha=28°$.

555. Mäel asuva mälestusobeliski tipp C (joon. 109) paistab mäejalamist mööduval horisontaalsel teel punktist A nurgas



Joon. 109.

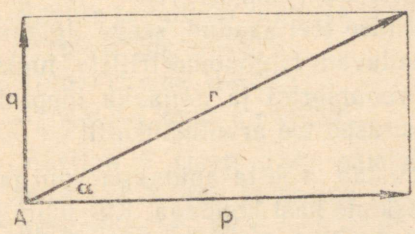
$28°17'$. Punktist B, mis on obeliskile 250 meetrit lähemal, paistab tipp C nurgas $41°20'$. Arvuta obeliski tipu C kõrgus CD tee tasapinnast.

556. Tõesta, et

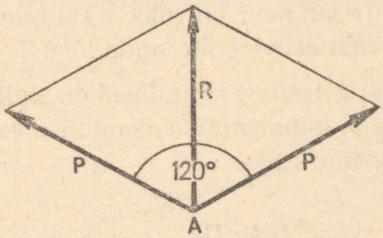
1) $\sin 10°+\sin 50°-\cos 20°=0$
2) $\cos 85°+\cos 35°-\cos 25°=0$

557. Kasvuhoone, mille pikkus on 16 m ja laius 6 m, on kaetud kaheviilulise klaaskatusega. Mitu ruutmeetrit klaasi kulub selle katuse valmistamiseks, kui katuse kalle on 48°?

558. Punktile A mõjuvad kaks jõudu $p=40$ kG ja $q=20$ kG, mille suunad on teineteisega risti. Arvuta punktile A mõjuv resultantjõud r, kui selle suund moodustab jõu p suunaga nurga $\alpha=28°$ (joon. 110).



Joon. 110.



Joon. 111.

559. Jõud $R=600$ kg lahutatakse kaheks absoluutväärtuselt võrdseks komponendiks, mis teineteisega moodustavad 120°-se nurga (joon. 111). Kui suured on need komponendid?

560. Tõesta, et

1) $\sin 10°+\sin 50°-\cos 20°=0$;
2) $\cos 85°+\cos 35°-\cos 25°=0$.

561. Arvuta $a \sin 2x+b \cos 2x$, teades, et $\tan x=\frac{a}{b}$.

562. Täisnurkses kolmnurgas on üks külg teise kahe külje geomeetriline keskmine. Kui suured on selle kolmnurga teravnurgad?

563. Anna korrutise kuju avaldisele:

1) $\sin 52°+\frac{1}{2}$;
2) $\frac{3}{4}-\sin^2 42°$;
3) $3-4\cos^2 56°$;
4) $1-2\sin 15°$;
5) $\frac{1}{2}+\cos 81°$.

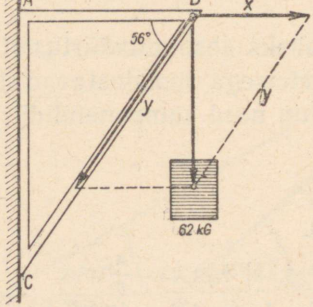
564. Lahenda võrrand.

1) $\sin(x+30°)=\sin x$
2) $\cos(x-60°)=\sin 2x$
3) $\cos 3x+\cos 2x=0$
4) $\sin 5x+\sin 3x=\cos x$

565. Kronsteini (seinapunkti) ABC punktisse B on riputatud raskus 62 kG. Rõhtsa varda AB ja kaldtoe BC vaheline nurk on 56°. Kui suur jõud x mõjub varrast AB seinalt lahti rebivalt ja kui suur on surve y toele BC (joon. 112)?
Et siin andmed on mõõtmise teel saadud, seega ligikaudsed, siis ümarda tabelist saadavad trigonomeetriliste funktsioonide väärtused kahe tüvenumbrini ja anna ka lõpptulemus kahe tüvenumbriga. Arvutused tee arvutuslükatil!

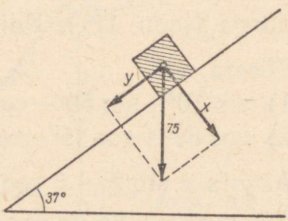
566. Kaldpinnal, mis moodustab rõhttasapinnaga nurga 37° (joon. 113), on 75 kG raskune kast kaubaga. Kui suurt jõudu y on tarvis selle kasti hoidmiseks kaldpinnal tasakaalus (hõõrdumist arvestamata) ja kui suur on rõhk x kaldpinnale? Lahendamisel arvesta märkust eelmise ülesande lõpus!

567. Lahenda täisnurkne kolmnurk, teades, et andmed on ligikaudsed arvud (kaatetid on a ja b, hüpotenuus c, kaateti a vastasnurk on a ja kaateti b vastasnurk β):



Joon. 112.

Joon. 113.



1) $c=8$ m; $\beta=40°$;
2) $c=12$ m; $\alpha=26°$;
3) $a=200$ m; $\beta=67°$;
4) $a=72$ mm; $\alpha=32°$;
5) $b=24$ m; $\beta=78°$;
6) $b=153$ mm; $\alpha=56°30'$.

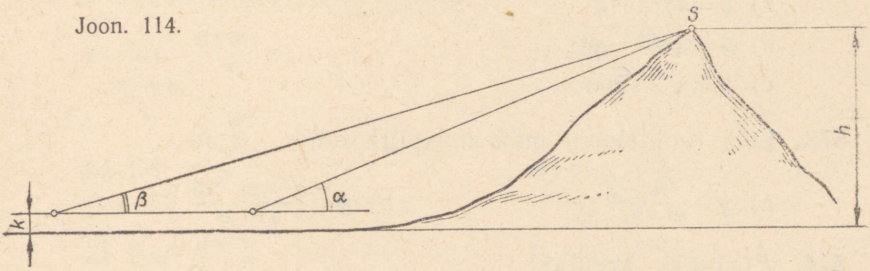
568. Püstprisma põhjaks on täisnurkne kolmnurk, mille kaatetid on a ja b ning teravnurgad on α ja β. Prisma kõrgus on h. Arvuta prisma ruumala ja täispindala järgmistel andmetel:

1) $a=48$ mm; $\alpha=35°$; $h=82$ mm;
2) $b=13{,}5$ cm; $\alpha=62°30'$; $h=11{,}2$ cm;
3) $b=2{,}72$ m; $\alpha=43°20'$; $h=1{,}55$ m;
4) $a=2{,}08$ dm; $\beta=59°10'$; $h=1{,}12$ dm.

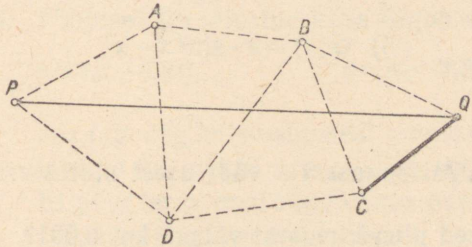
569. Korrapärase kolmnurkse püramiidi põhiserv on a ja külgserv moodustab põhja mediaaniga nurga α. (Korrapärase kolmnurkse püramiidi kõrguse aluspunktiks on põhja mediaanide lõikepunkt.)
Arvuta püramiidi ruumala ja täispindala järgmistel andmetel:
1) $a=5$ cm; $\alpha=40°$;
2) $a=18$ cm; $\alpha=32°$;
3) $a=124$ mm; $\alpha=50°30'$.

570. Mäetipp S (joon. 114) paistab punktidest A ja B, mis on punktiga S ühes ja samas püsttasapinnas, vastavalt kõrgusnurkadega $\alpha=15{,}5°$ ja $\beta=7{,}4°$. Arvuta mäetipu kõrgus h, kui $AB=538$ m ja nurgamõõtja kõrgus $k=1{,}65$ m.

Joon. 114.



571. Suurte kauguste mõõtmisel valitakse mõõdetava lõigu ümbruses vaatluspunktid nii, et igast vaatluspunktist on nähtavad kaks naabruses olevat punkti (triangulatsioonimeetod). Mõõdetakse baas CQ (joon. 115) ja vajalikud nurgad. Arvuta kaugus PQ, teades, et $CQ=2{,}00$ km ja nurkade suurused on



Joon. 115.

järgmised: $\angle APD=83°20'$; $\angle PAD=46°50'$; $\angle BAD=71°20'$; $\angle ADB=38°40'$; $\angle DBC=62°10'$; $\angle BDC=40°30'$; $\angle CBQ=35°20'$; $\angle BCQ=72°20'$.

Näpunäide.

1) Arvuta BC kolmnurgast BCQ;
2) „ BD ja DC „ DBC;
3) „ AD „ ABD;
4) „ PD „ PAD;
5) „ PC „ PCD;
6) „ PQ „ PQC.

Kontrolliks arvuta analoogiliselt PQ kolmnurgast PQB.

*

572. Leia funktsiooni määramispiirkond:

a) $y=x\sqrt{4-x}$
b) $y=\sqrt{4x-x^2}$
c) $y=\sqrt{2\sin x}$

573. Leia funktsiooni määramispiirkond:

a) $y=\frac{4x-x^2}{x^2-2x-35}$ b) $y=\frac{x^2-2x-35}{4x-x^2}$

574. $F(x)=x^2$. Arvuta:

1) $\frac{F(b)-F(a)}{b-a}$; 2) $F\left(\frac{a+b}{2}\right)-F\left(\frac{a-b}{2}\right)$.

575. Missugused järgmistest funktsioonidest on paarisfunktsioonid, missugused paaritud funktsioonid?

1) $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ 4) $\Phi(x)=a^x-\frac{1}{a^x}$
2) $\varphi(x)=\frac{a^x-1}{a^x+1}$ 5) $G(x)=x\cdot\sin^2 x-x^3$
3) $F(x)=a^x+\frac{1}{a^x}$

576. a) Leia $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x-3}{2x+1}$. Missugusest x väärtusest alates erinevad funktsiooni väärtused piirväärtusest vähem kui 0,001?

b) Leia $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-2x^2}{2+4x^2}$. Missugusest x väärtusest alates erinevad funktsiooni väärtused piirväärtusest vähem kui 0,01?

577. Leia järgmised piirväärtused:

a) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-3x+2}$

b) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\tan x}{\sin 2x}$

c) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{\cos 2x}$

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-1}{3x^2-4x}$

e) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^3-7x}{1-2x^3}$

f) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{3x+6}{x^3+8}$

g) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-x-2}{x^3+1}$

578. Leia järgmised piirväärtused:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{4}}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{3x}$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x}{x}$

f) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$

579. Uuri funktsioone:

a) $s=v_0t-gt^2$

b) $v=v_0-gt$

c) $y=-\frac{1}{2}\cdot 3^x$

d) $y=-2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x$

580. Tühjuses ülesvisatud keha liigub seaduse järgi

$s=v_0t-4{,}9t^2$, $v=v_0-9{,}8t$,

kus t on aeg katse algusest arvates, v_0 — ülesviske kiirus, s — läbitud tee pikkus ja v — kiirus ajahetkel t.
Et pikk terav nool liigub õhus peaaegu nii nagu tühjuses, siis lahenda järgmised ülesanded.

1. Vibunool lastakse püstsihis üles kiirusega 20 m sekundis. Millal jõuab ta oma püstlennu piirile? Kui kõrgel see on?

2. Missuguse kiirusega jõuab nool vabal langemisel tagasi maapinnale?

3. Missugusel ajamomendil asetseb nool 15 m kõrgusel?

581. Doominokividel on silmi järgmiselt:

$0+0,\ 0+1, \ldots, 0+6;\ 1+1,\ 1+2, \ldots, 1+6;$
$2+2,\ 2+3, \ldots, 2+6; \ldots; 6+6.$

Leia doominokividele kantud silmade kogusumma.

582. Leia kõigi p-ga jaguvate arvude summa alates arvust mp kuni arvuni np, kus m ja n on täisarvud.

583. Lahenda järgmised võrrandid:

a) $\frac{1}{3}\log(1+x)=1-\log 2$
b) $\log(x+4)+\log x=2\log(x+1)$
c) $\log 5x+\log 7x=\log 140$

584. Lahenda järgmised võrrandid:

a) $\left(\frac{14}{9}\right)^x=\frac{5}{6}$
b) $(1{,}4)^x=8{,}1$
c) $(3{,}9)^x=1$

585. Mitu numbrit on pärast astendamist arvudes

2^{100}, 43^{15}, 5^{55}?

586. Mitu nulli on koma ja esimese nullist erineva numbri vahel pärast astendamist arvudes

$\left(\frac{1}{3}\right)^{100}$, $\left(\frac{10}{17}\right)^{20}$, $\left(\frac{13}{19}\right)^{50}$?

587. Teame, et $\log\frac{1}{2}=\log\frac{1}{2}$ ja et $3>2$. Seega kehtib võrratus

$$3\log\tfrac{1}{2}>2\log\tfrac{1}{2}$$

ja siit

$$\log\left(\tfrac{1}{2}\right)^3>\log\left(\tfrac{1}{2}\right)^2,$$

millest

$\left(\frac{1}{2}\right)^3 > \left(\frac{1}{2}\right)^2$ ehk $\frac{1}{8} > \frac{1}{4}$.

Kus on viga?

*

588. Kell on kolme ja nelja vahel ja minutiosuti katab tunni osutit. Kui palju on kell?

589. Poiss käis jalgrattaga raudteejaamas. Minnes oli tuul vastu, tulles tagant, mistõttu sinnasõit toimus kiirusega 12 km tunnis ja tagasisõit kiirusega 18 km tunnis. Jaamas kulutal aega $\frac{1}{2}$ tundi. Kogu reis kestis aga 3 tundi. Kui kaugel raudteejaamast elas poiss?

590. Ruudukujulise tiigi keskpaigas kasvab pillirookõrs, mille veepealne osa on 1 jalg pikk. Kui selle roo tipp tõmmati tiigi külje keskkohta, puudutas tipp just veepinda. Tiigi külje pikkus on 10 jalga. Eeldades, et pillirookõrs jäi sirgeks, leia, kui sügav on tiik. (Tsin Kiu Tšaou, ca 2600 a. e. m. a.)

591. Üks mees lausub teisele: «Anna mulle 1 sent, siis on mul niipalju, kui sinul üle jääb.» Teine vastab: «Anna sina mulle 1 sent, siis on mul kaks korda niipalju, kui sinul üle jääb.» Kui palju raha on kummalgi? (Riese, a. 1524)

592. Poisil on kaks korda rohkem õdesid kui vendi, igal õel aga on niisama palju vendi kui õdesid. Mitu last on peres?

593. Kaks kontsentrilist ringi raadiustega 17 cm ja 10 cm on lõigatud sirgega, nii et kõõlu osa väiksemas ringis on $\frac{2}{5}$ suurema kõõlu pikkusest. Kui pikk on suurema ringi kõõl ja kui kaugel ta asetseb ringide keskpunktist?

594. Kahekohalise arvu jagamisel tema numbrite summaga saame jagatise 7 ja jäägi 3; jagamisel numbrite vahega saame jagatise 18 ja jäägi 1. Missugune kahekohaline arv see on?

595. Kui kahekohalise arvu jagame tema ristsummaga, siis saame jagatise 4 ja jäägi 9. Kui otsitavas arvus vahetame numbrid ja jagame saadud arvu ristsummaga, siis saame jagatise 6 ja jäägi 6. Leia see arv.

596. Tähesõitja B lähtub stardist m minutit hiljem kui tähesõitja A. A sõidab kiirusega a km tunnis ja B kiirusega b km tunnis. Mitme minuti pärast ja kui kaugel stardikohast möödub sõitja B sõitjast A?

597. Stopperid näitasid 100 m jooksus kahele esimesele kohale tulnud jooksja aegadeks 11,2 ja 11,3 sekundit. Võitja oli stardis kaotanud aega 0,3 sekundit. Mitu meetrit enne lõpujoont hakkas võitja «vedama», kui eeldada, et kõik jooksjad jooksid jääva kiirusega?

598. Näita, et

$$a^3+b^3=125-15\,ab,$$

kui $a+b=5$.

599. Konstrueeri punktid $A\ (-4;\ 0)$ ja $B(-1;\ 4)$ ning punktid A_1 ja B_1, mis on sümmeetrilised antud punktidega y-telje suhtes. Leia nende punktidega määratud trapetsi ümbermõõt ja pindala.

600. Konstrueeri kolmnurk, mille tipud on $A(-4;\ 2)$, $B(0;\ -1)$ ja $C(3;\ 3)$. Leia selle kolmnurga ümbermõõt ja pindala.

601. Leia võrrand ringjoonele, mille keskpunktiks on $C(3;\ 4)$ ja raadiuseks $r=5$. Kas sellel ringjoonel on punktid $A(-1;\ 1)$, $B(2;\ 3)$, $C(0;\ 0)$ ja $D(4;\ 1)$?

602. Kuidas avalduvad koordinaattelgede vaheliste nurkade poolitajate võrrandid?

603. Konstrueeri sirged:

1) $3x+4y=12$
2) $3x-4y=0$
3) $2x-5=0$
4) $2y+5=0$

604. Leia parabooli haripunkt, kui parabooli võrrand on

1) $y=x^2-2x+2$;
$y=-3x^2+3x-3$.

SISUKORD

1. Trigonomeetriliste avaldiste teisendamine.

1.1. Trigonomeetria eelmise osa kordamiseks 3
1.2. Kahe nurga summa ja vahe siinus, koosinus ja tangens 4
1.3. Kahekordse nurga ja poolnurga siinus, koosinus ja tangens . . . 10
1.4. Kahe nurga trigonomeetriliste funktsioonide summa ja vahe teisendamine korrutiseks 14
1.5. Nurga leidmine trigonomeetrilise funktsiooni antud väärtuse järgi . . 20

2. Trigonomeetrilised võrrandid.

2.1. Trigonomeetrilise võrrandi mõiste 31
2.2. Trigonomeetrilised põhivõrrandid 34
2.3. Võrrandid, mis otseselt taanduvad põhivõrrandeiks 37
2.4. Võrrandid, mille vasak pool on korrutis ja parem pool null 39
2.5. Siinuse ja koosinuse suhtes homogeenne trigonomeetriline võrrand . 45

3. Funktsiooni piirväärtus ja pidevus.

3.1. Funktsiooni määramispiirkond 53
3.2. Näiteid funktsiooni määramispiirkonna leidmise kohta 55
3.3. Funktsiooni üldtähis 58
3.4. Paarisfunktsioon ja paaritu funktsioon 60
3.5. Suuruse tähtsamad muutumisviisid 65
3.6. Lõpmatult kahanevad suurused 65
3.7. Lõpmatult kasvavad suurused 66
3.8. Muutuva suuruse piirväärtus 67
3.9. Funktsiooni piirväärtus 70
3.10. Funktsiooni piirväärtuse arvutamine 72
3.11. Funktsiooni piirväärtuse rakendusi 76
3.12. Funktsiooni pidevus 82

4. Funktsiooni tuletis.

4.1. Funktsiooni tuletise mõiste 86
4.2. Funktsiooni tuletis kiirusena 90
4.3. Funktsiooni tuletise geomeetriline tõlgendus 93
4.4. Funktsioonide summa, korrutise ja jagatise tuletised 97
4.5. Funktsiooni $y=x^n$ tuletis 101
4.6. Näiteid funktsiooni tuletise arvutamiseks 102
4.7. Funktsiooni kasvamine ja kahanemine 104
4.8. Funktsiooni ekstreemumkohad 108
4.9. Joone puutuja võrrand 110

5. Eksponentfunktsioon ja logaritmfunktsioon.

5.1. Eksponentfunktsiooni mõiste 113
5.2. Võrratuse omadusi 115
5.3. Eksponentfunktsiooni uurimine 117
5.4. Kümnendlogaritm 123
5.5. Logaritmi definitsioon 125
5.6. Logaritmfunktsioon 127
5.7. Korrutise, jagatise, astme ja juure logaritm 131
5.8. Avaldise logaritmimine ja potentseerimine 133
5.9. Kümnendlogaritmi omadused 135
5.10. Tehted poolnegatiivsete arvudega 136
5.11. Logaritmide tabelid 140
5.12. Arvu leidmine tema kümnendlogaritmi järgi 142
5.13. Arvutamine kümnendlogaritmide abil 144
5.14. Logaritmiline skaala 147
5.15. Korrutamine lükati skaalade *D* ja *C* abil 149
5.16. Ruutude ja ruutjuurte leidmine lükatiga 152
5.17. Pöördarvude leidmine lükatiga 155
5.18. Pöördarvude skaala kasutamine avaldise väärtuse arvutamisel . . 157
5.19. Logaritmide skaala 158
5.20. Lihtsamaid eksponentvõrrandeid 162
5.21. Lihtsamaid logaritmvõrrandeid 165

6. Geomeetriline progressioon.

6.1. Geomeetrilise progressiooni mõiste 168
6.2. Geomeetrilise progressiooni üldliikme valem 169
6.3. Geomeetrilise progressiooni summa valem 172
6.4. Tõkestamatult kahaneva geomeetrilise progressiooni mõiste . . . 176
6.5. Tõkestamatult kahaneva geomeetrilise progressiooni summa . . . 177
6.6. Hariliku murru teisendamine kümnendmurruks 180
6.7. Perioodilise kümnendmurru esitamine hariliku murruna 182
6.8. Liitintress 183
6.9. Suuruste liitprotsendiline muutumine 185

7. Kolmnurga lahendamine.

7.1. Täisnurkse kolmnurga lahendamine logaritmide kasutamisega . . 192
7.2. Vea ülemmäär nurga arvutamisel 195
7.3. Trigonomeetriliste funktsioonide skaalad arvutuslükatil 199
7.4. Trigonomeetrilisi arvutusi lükati kasutamisega 207
7.5. Kolmnurga pindala kahe külje ja nendevahelise nurga järgi . . 210
7.6. Siinusteoreem 212
7.7. Koosinusteoreem 219
7.8. Kolmnurga lahendamise näiteid 222
7.9. Kolmnurga pindala valemid 225
7.10. Kolmnurga lahendamise skemaatiline ülevaade 229

Kordamisülesandeid 233

Олаф Принитс, Георг Розенберг, Арнольд Вихман. МАТЕМАТИКА ДЛЯ X КЛАССА. На эстонском языке. Издательство «Валгус». Таллин, Пярнуское шоссе, 10

*

Toimetaja K. Kallaste. Kunstiline toimetaja H. Keigo. Tehniline toimetaja I. Vahtre. Korrektor E. Bitter. Laduda antud 5. IV 1967. Trükkida antud 31. V 1967. Paber 60×90/16. Trükipaber nr. 2, Kohila Paberivabrik. Trükipoognaid 16. Arvestuspoognaid 10,8. Trükiarv 7500. Tell. nr. 2366. Hans Heidemanni nim. trükikoda, Tartu, Ülikooli 17/19. I

Hind 22 kop.

22 kop.

A
28639

TÜ RAAMATUKOGU
1 0300 00990785 0