

JÜRI NUUT

KINEMAATIKA

JA

DÜNAAMIKA PÕHIJOOONI

RK „TEADUSLIK KIRJANDUS“

TARTU 1940

KINEMAATIKA
JA
DÜNAAMIKA PÕHIJOOONI

RK. TEADUSLIK KIRJANDUS
TARTU 1914

JÜRI NUUT

KINEMAATIKA
JA
DÜNAAMIKA PÕHIJOOONI

RK „TEADUSLIK KIRJANDUS“
TARTU 1940

✓

██████████ Tehniline
toimetaja: J. Ots. Korrektor: H. Pürkop.
Trükisuurus 700 eks. Trükiluba antud
12. X 1940. Paberi formaat 61 × 86 cm.
Trükitud natsion. „Ilutrüki“ trükikojas,
Tartus, 21. juuni t. Hind 3 krooni.

2



Eessõna.

Käesoleva õpperaamatu koostamisel on mõeldud esijoones Tallinna Tehnikaülikooli üliõpilastele: olemasolev muukeelne kirjandus mehaanika alal haarab tavaliselt probleeme niivõrra laias ulatuses, et üldmehaanika kursuse sooritamiseks vajalikkude osade väljaotsimine sealt tekitab õppijaile tõsiseid raskusi. Ka tundub, et on kätte jõudnud aeg, kus tuleks anda üliõpilastele võimalus tutvuda mehaanika elementidega eestikeelse raamatu najal. Autori arvates käesolev raamat võiks osutada kasulikuks ka valminud insenerile, kui see soovib üldmehaanika alal mõnes osas teadmisi värskendada, samuti aga ka matemaatikat õppivale üliõpilasele.

Raamatu lugejalt eeldatakse, et ta on kodus diferentsiaal- ja integraalarvutuse elementidega; erilisi eelteadmisi diferentsiaalvõrrandite teooria alalt pole nõutud — vajalikud osad on selgitatud tekstis. Lühidalt on arendatud ka vajalikud põhimõisted diferentsiaalgeomeetria piirkonnast, kasutades seejuures loomuliku lähtekohana punkti kinemaatikat.

Arvestades tõsiasja, et moodsa kirjanduse lugemiseks on tarvilik teatav vilumus vektorsümboolika kasutamises, on püütud lugejat sellega võimalust mööda tutvustada parajal kohal. Ühtlasi on aga rõhutatud töötamist projektsioonidega, mis osutub ju möödapääsematuks eriti numbrilisel arvutamisel; numbrilise töö tähtsust on püütud väärikalt alla kriipsutada, silmas pidades just tulevase insenere.

Palade paigutuses on jälgitud esijoones prantslaste eeskujul. Sisuliselt on katsutud materjali piirata nõnda, et esile oleksid tõstetud rakendatavate matemaatiliste meetodite üldpõhimõtted ja ühtlasi pakutud ikkagi treening mõtlemises mehaanika mõiste-

tes ja kujutelmades. Illustreerivate näidete valikus on haaratud mitmesuguseid alasid, eriti on ka silmas peetud vajalikku kontakti ballistikaga.

Eksperimentaalmehaanikat pole puudutatud — see on jäetud füüsiku hoolde. Samuti on teadlikult välja lülitatud tehniline mehaanika kitsamas mõttes, milleks on inseneridele ette nähtud põhjalikud erikursused.* Käesolev raamat tahab olla esijoonelise matemaatilise ilmega, täiendades osaliselt õppijate matemaatilisi teadmisi ja selgitades matemaatiliste uurimismeetodite rakenduslikke võimeid.

Tähelepanu osaliseks on saanud mõningatel kohtadel filosoofilised ja aksiomaatilise maiguga kaalutlused. Antud on ka mõningad näpunäited uue relativistliku mehaanika püüete mõistmiseks, kuigi raamat ise, arusaadavatel põhjustel, püsib klassikalise Newtoni kontseptsiooni alustel.

Autor.

Sisukord.

I OSA.

Kinemaatika.

	Lk.
§ 1. Koht ja aeg	9
§ 2. Trajektoor	12
§ 3. Kiirusvektor	18
§ 4. Kiirendusvektor	24
§ 5. Puutekiirendus ja normaalkiirendus	27
§ 6. Kõverus ja vääne	31
§ 7. Kindla keha rotatsioon	37
§ 8. Translatsioon ja kruviliikumine	42
§ 9. Vektorsümboolika põhiseadusi	44
§ 10. Kindla keha üldisim liikumine	47
§ 11. Hetkeline kruvitelg ja aksoidid	52
§ 12. Elliptiline liikumine	59
§ 13. Tasapinnaline liikumine	64
§ 14. Tasapinnaline liikumine graafilises käsitluses	71
§ 15. Hammasrataste profiilidest	76
§ 16. Coriolis'e lause	83
§ 17. Näiteid Coriolis'e lause kohta	88

II OSA.

Punkti dünaamika.

§ 18. Tung	95
§ 19. Newton'i kolm põhiseadust	100
§ 20. Punkti dünaamika põhivõrrandid	104
§ 21. Üldlahendi ja esimese integraali mõiste	108
§ 22. Impulss, impulssmoment ja pindalalause	113
§ 23. Hoolause ja potentsiaal	117
§ 24. Potentsiaali näiteid	123
§ 25. Planeedi liikumine	132

	Lk.
§ 26. Mürsu lend õhus	139
§ 27. Elektroni liikumine magnetilises väljas	147
§ 28. Võnked	157
§ 29. Sundvõnked	165
§ 30. Matemaatiline pendel	172
§ 31. Täiendavaid märkusi pendli kohta	179

III OSA.

Punktsüsteemi ja kindla keha dünaamika.

§ 32. Impulsilause süsteemi puhul	185
§ 33. Impulssmomendilause ja pindalalause süsteemi puhul	189
§ 34. Massikeskmed	194
§ 35. Inertsmomendid	202
§ 36. Inertsellipsoid	209
§ 37. Teljel roteeruv kindel keha	218
§ 38. Füüsiline pendel	222
§ 39. Süsteemi energia	227
§ 40. Inertsteljestikkudest	233
§ 41. D'Alembert'i printsiip	237
§ 42. Massikeskmega translatoorselt liikuv teljestik	242
§ 43. Hõõrdumisega liikumine horisontaalsel laual	248
§ 44. Tõuked; ballistiline pendel	253
§ 45. Elastsustungide osa põrgetel; tsentraalne põrge	260
§ 46. Hamilton'i printsiip	266

I OSA.

Kinemaatika.

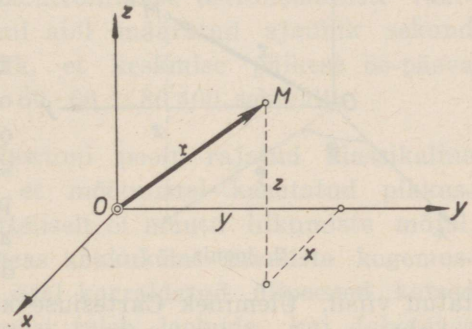
§ 1. Koht ja aeg.

Kinemaatikas käsitletakse seadusi, milledele allub koha muutumine aja jooksul kehade liikumisel, mitte peatudes küsimusel, millest kõnealune liikumine on tingitud.

Koht ja aeg on põhikujutelmad, mis paratamatult tekivad igasugusel mõtlemisprotsessil; nende põhikujutelmade kvalitatiivset sisu pole võimalik selgitada sõnaliste seletuste abil. Küll aga saab taandada koha ja aja määramist teatavatele mõõtmistele, mille najal osutub võimalikuks koha ja aja matemaatiline analüüsimine kvantitatiivsest küljest.

Valides näiteks ortogonaalse Cartesiuse teljestiku ruumis ja pikkusühiku, võime tuntud viisil kasutada koha määramiseks 3 arvu x , y , z , — koha „koordinaate“. Tavalisteks pikkusühikuteks on seejuures sentimeeter [cm] või meeter [m].

Vektorit \vec{OM} , mis viib koordinaatide algusest määratava kohani (1. joonis), kutsutakse koha vektoriks; lühendatult tähistame edaspidi kohavektorit enamasti tähega r . Koordinaadid x , y , z on kohavektori r projektsioonid valitud koordinaattelge-



1. joonis.

dele. Tähistades kohavektori suurust (pikkust, absoluutväärtust) sümboliga $|\mathbf{r}|$, saame teatavasti

$$|\mathbf{r}|^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (1)$$

kus ruutjuure väärtus on mõeldud positiivseks.

Kohavektori \mathbf{r} suunakoosinused l , m , n on määratud valemitega

$$l = \frac{x}{|\mathbf{r}|}, \quad m = \frac{y}{|\mathbf{r}|}, \quad n = \frac{z}{|\mathbf{r}|} \quad (2)$$

ning (1) ja (2) koos näitavad, et

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1. \quad (3)$$

Eksaktsele matemaatilisele analüüsile alluv kohavektori mõiste leiab mehaanika probleemide käsitlemisel laialdast rakendamist, andes algelisele, pisut subjektiivsele kujutlemale kohase matemaatiliselt täpsustatud sisu.

Valitud koordinaatteljestik võib ka erineda Cartesiuse omast. Sageli on näiteks otstarbekohane kasutada nn. silindrikoordinaate ehk semipolaarseid koordinaate, kus M asukoht on määratud arvudega ρ , Θ , z 2. joonisel kujutatud viisil.

Üleminek Cartesiuse koordinaatidest silindrikoordinaatide juurde toimub, nagu 1. ja 2. joonisest kergesti näha, valemite

$$x = \rho \cos \Theta, \quad y = \rho \sin \Theta, \quad z = z \quad (4)$$

põhjal. Seejuures on

$$|\mathbf{r}|^2 = \rho^2 + z^2, \quad |\mathbf{r}| = \sqrt{\rho^2 + z^2}. \quad (5)$$

Koordinaadid, ükskõik millised, määravad koha asendi alati vaid teatava teljestiku suhtes, s. t. teiste kohtade suhtes. Koha-

vektor r määrab tegelikult k o h a v a h e m i k u koordinaadistiku alguspunkti O suhtes.

Analoogiliselt määrab a e g a teatav ajavahemik. Kellamehhanismi abil saab teatavasti mõõta ajaühikute — tavaliselt sekundite [sec] — arvu, mis vastab mõõdetavale ajavahemikule. Seda ajaühikute arvu t kutsutaksegi mehaanikas lühidalt „ajaks“. See aeg t võib osutada positiivseks või ka negatiivseks, erijuhtudel ka nulliks. Ajamõõtmine eeldab igal juhul alghetke $t = 0$ fikseerimist, samuti nagu kohamääramine kohavektori r kaudu eeldas alguspunkti O fikseerimist. Oluline vahe võrreldes kohamääramisega esineb aga ajamõõtmise puhul selles, et aeg t on s k a l a a r s e iseloomuga, kuna koht on määratud v e k t o r i a a l s e l t. Tõsi küll, ka aega võiks kujutella vektorina (seda tehaksegi mõningatel juhtudel), kuid see vektor langeb siis alati ühele ja samale kandesirgele, nii et ajavektoril on alati kindel siht, kusjuures suund võib muutuda ainult vastupidiseks; see on klassikalise Newtoni mehaanika seisukoht.

Kellamehhanismi käiku kontrollitakse astronoomiliste vaatluste najal. Selle mehhanismi abil määratud ajaühik sekund peab olema parajasti nii pikk, et keskmise päikese öö-päeva vahemik sisaldaks täpselt $24 \cdot 60 \cdot 60 = 86\,400$ sekundit.

M ä r k u s: Galilei ja Newtoni poolt rajatud klassikaline mehaanika põhineb eeldusel, et mõõtmistel kasutatud pikkusühikud ja ajaühikud põhimõtteliselt ei muutu liikumiste mõjul. See hüpoteetiline eeldus on heas kokkukõlas tavaliste kogemustega. Ometi on aga uuemal ajal korraldatud ülipeened katsed selgitanud, et sellest hüpoteesist tuleb loobuda, kui tahetakse peensusteni õieti kirjeldada looduses toimuvat sündmustikku. Vastavalt nendele uutele avastatud tõsiasiadele on Einsteini poolt 1905. a. rajatud uus nn. „relativistlik“ mehaanika, mille suhtes endine „klassikaline“ kujutab vaid esimese, kuigi tavaliste küsimuste puhul õige täpset lähendust. Relativistliku mehaanika mõistmine eeldab igal juhul klassikalise mehaanika põhjalikku tundmist. Harilikkude tehniliste probleemide puhul on klassikaline mehaanika täiesti küllaldane. Käesolev kursus piirdub

klassikalise mehaanika algete esitamisega, puudutades vaid erandjuhtudel, möödaminnes, lugeja pealiskaudseks informatsiooniks, relativistliku mehaanika seisukohti seal, kus see võiks ehk huvi pakkuda.

§ 2. Trajektoor.

Kinemaatika käsitus osutub võrdlemisi elementaarseks, kui piirduda ideaalselt kindlate kehadega, s. t. kehadega, millede üksikute kohtade omavahelised kaugused on invariantseid (muutumatud) igas olukorras. Matemaatiliste arutluste hõlbustamiseks kujutellakse seejuures veel kindlat keha koosnevat pidevalt jaotatud „materiaalsetest punktidest“. Materiaalse punkti all mõistetakse keha, mille mõõtmed on niivõrra väikesed, et tema suurus või kuju ei vääri arvestamist. Asudes liikumisseaduste uurimisele, alustame materiaalse punkti liikumise puhul tekki-vate mõistete selgitamisega.

Liikumist saab jälgida, fikseerides teljestikku, mis kokkuleppe alusel tuleb lugeda paigalseisvaks: liikumise mõiste on oma loomuse poolest vaid relatiivne. Kui maailmas leiduks vaid üksainus materiaalne punkt, siis küsimusel, kas see punkt liigub või mitte, puuduks mõte. Materiaalse punkti liikumine toimub ikka ainult mõningate teiste materiaalsete punktide suhtes; lugedes neid teisi paigalseisvateks, saame kõnelda esimese liikumisest. Paigalseisvaks loetavat teljestikku tuleb fikseerida teatavate materiaalsete punktide, näiteks nn. kinnistähtede abil taevavõlvil. Puhkinemaatika seisukohalt on ükskõik, millist teljestikku nimelt lugeda paigalseisvaks (dünaamika seisukohalt aga mitte!).

Olgu nüüd meelevaldselt valitud teljestik paigalseisvana fikseeritud ning jälgime mõne materiaalse punkti M liikumist selle teljestiku suhtes. M liikumine väljendub vastava kohavektori r suuna ja suuruse muutumises aja t jooksul, s. t. selles, et r projektsioonid x , y , z osutuvad aja t funktsioonideks:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t). \quad (6a)$$

On otstarbekohane laiendada funktsiooni mõistet ka vektoreile, öeldes antud juhul, et kohavektor \mathbf{r} on aja t funktsioon; sellele vastab valemite (6a) lühendatud „vektoriaalne“ kirjutusviis

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t). \quad (6b)$$

Võrrandid (6a) määravad materiaalse punkti M trajektoori ruumis, s. t. selle punkti teekonna. Üldjuhul on trajektooriks ruumiline kõverjoon, mille üksikuid kohti saame, arvutades üksikute t väärtuste puhul koordinaate x , y , z valemite (6a) najal, kusjuures funktsioonid peavad muidugi olema ette antud. Kuid sama kõverjoont saab käsitleda ka kahe pinna lõikejoonena. Analüütiliselt leitakse mainitud pindade võrrandid, elimineerides parameetri t paarikaupa kombineeritud võrrandeid (6a). Olenevuses sellest, kuidas teostada eliminatsiooni, võime seejuures saada üsna erinevaid pindu, kuid kõik need pinnad peavad sisaldama ikka ühe ja sama ühise kõverjoone, ning see viimane on määratud juba ühe meelevaldselt valitud paariga sellest pindade kogust.

Tähelepanu väärrib seejuures aga veel asjaolu, et kirjeldatud viisil määratud kahe pinna lõikekõveral võib leiduda kohti, kuhu materiaalne punkt M ikkagi kunagi ei jõua, kuigi ta sellest kõverast kui trajektoori kandjast ei lahku. Olgu näiteks kohavektori sõltuvus ajast t säärane, et

$$x = \sin t, \quad y = 0 (= 0 \cdot t), \quad z = 0 (= 0 \cdot t).$$

Pindadena võiks siin valida koordinaattasapinnad $y = 0$, $z = 0$, mis mõlemad sisaldavad x -telge täies ulatuses. Ometi katab trajektoor sellest teljest vaid osa, sest tingimus $x = \sin t$ näitab, et $-1 \leq x \leq +1$, olgu t väärtus milline tahtes.

Valides pindu, millede ühisele lõikejoonele langeb trajektoor, nõnda, et vastavate pindade võrrandis esineksid korruga alati vaid 2 koordinaati, saame silindreid, millede moodustajad on paralleelsed just tolle koordinaatteljega, millele vastav koordinaat võrrandis puudub. Säärane silinder projektib trajektoori sellele koordinaattasapinnale, mis on risti puuduva koordinaadi

vastava teljega. Lühenduse mõttes nimetame neid silindreid lihtsalt projektivaiks. Projektivaid silindreid leidub alati kolm, vastavalt kolmele koordinaattasapinnale; löikejoon on juba kahe seesuguse projektiva silindriga määratud.

N ä i d e 1: Olgu

$$x = a_1 t + b_1, \quad y = a_2 t + b_2, \quad z = a_3 t + b_3.$$

Elimineerides t kahest esimesest ja siis kahest viimasest võrrandist, saame

$$\frac{x - b_1}{a_1} = \frac{y - b_2}{a_2}, \quad \frac{y - b_2}{a_2} = \frac{z - b_3}{a_3}.$$

Need on kahe projektiva silindri võrrandid. Lineaarsus näitab, et antud juhul mõlemad silindrid osutuvad tasapindadeks; trajektor on seetõttu sirge. Arvud a_1, a_2, a_3 on, nagu lugeja võib kergesti veenduda, võrdelised selle sirge suunakoosinustega. Sirge läbib kindlasti koha B , mille koordinaatideks on arvud b_1, b_2, b_3 . Lugeja veendugu ise, et trajektor katab seda sirget täies ulatuses.

Arvude a_1, a_2, a_3 najal saab suunakoosinusi määrata „normimise“ võtte abil: olgu esialgselt tundmatu võrdeteguri sümboliks λ ning olgu l, m, n otsitavad suunakoosinused; proportsionaalsus väidab, et

$$a_1 = \lambda l, \quad a_2 = \lambda m, \quad a_3 = \lambda n.$$

Tõstes ruutu ning liites, järeldame

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = \lambda^2(l^2 + m^2 + n^2) = \lambda^2,$$

sest suunakoosinuste ruutude summa võrdub alati ühega. Seega saame

$$\lambda = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2},$$

kust lõpuks

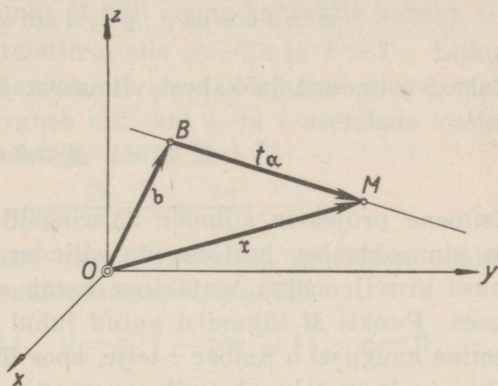
$$l = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}, \quad m = \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}, \quad n = \frac{a_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}.$$

Arvu $\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$, millega tuleb korrutada arve a_1, a_2, a_3

suunakoosinuste saamiseks, kutsutakse sellel ja ka analoogilistel juhtudel „normivaks teguriks“, ning kogu kirjeldatud toimingut vastavalt arvude a_1, a_2, a_3 „normimiseks“.

Vaatleme olukorda joonisel 3, kus \mathfrak{b} on koha $B : (b_1, b_2, b_3)$ konstantne kohavektor, M liikuva materiaalse punkti asukoht juhuslikul hetkel t , \mathfrak{r} selle M muutuv kohavektor, sirge BM punkti trajektoor. Valime sellel sirgel vektori \mathfrak{a} nõnda, et selle vektori projektsioonideks oleks

a_1, a_2, a_3 , mis on kindlasti võimalik selle tõttu, et mainitud arvud on võrdelised trajektoorsirge suunakoosinustega. Korrutame viimase vektori skalaariga t , s. t. moodustame vektori projektsioonidega ta_1, ta_2, ta_3 ; sel teel saadud vektori sümboliks olgu $t\mathfrak{a}$ (vektori \mathfrak{a} korrutis skalaariga t ,



3. joonis.

vektori \mathfrak{a} t -kordne). Et \overrightarrow{OM} on ahela OBM sulgeja, siis ilmsesti \mathfrak{r} on \mathfrak{b} ja $t\mathfrak{a}$ vektoriaalne summa (vektorit $t\mathfrak{a}$ võime kujutella rööplükkega üleviiduna rakenduskohale O):

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{b} + t\mathfrak{a}.$$

Tõepoolest, dešifreerides praegu antud vektoriaalset kirjutust tavalisse keelde projektsioonide kaudu, saaksimegi, et \mathfrak{r} iga üksik projektsioon on vastava \mathfrak{b} projektsiooni ja $t\mathfrak{a}$ projektsiooni summa:

$$x = b_1 + ta_1, \quad y = b_2 + ta_2, \quad z = b_3 + ta_3,$$

mis ühtib lähteks võetud võrrandsüsteemiga. Vektoriaalne kirjutus asendab seda kolmest võrrandist koosnevat süsteemi üheainsa võrrandiga.

Näide 2: Liikugu M nõnda, et silindrikoordinaatides ϱ omaks konstantset väärtust a , polaarnurk Θ ja koordinaat z aga

muutuksid proportsionaalselt ajaga t ; tähistades võrdetegureid vastavalt ω ja h , saame seega trajektoori määramiseks silindrikoordinaatides võrrandid

$$\rho = a, \quad \Theta = \omega t, \quad z = ht.$$

Üle minnes Cartesiuse koordinaatide juurde valemite (4) abil, leiame siis

$$x = a \cos \omega t, \quad y = a \sin \omega t, \quad z = ht.$$

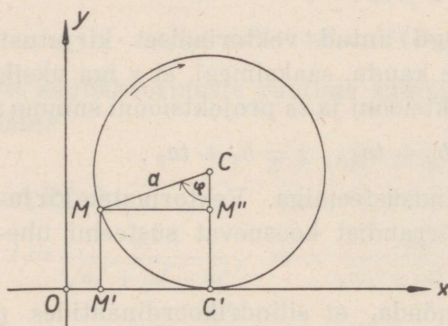
Kahest esimesest ja kahest viimasest järgneb siin

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad y = a \sin \frac{\omega}{h} z.$$

Esimene projektiv silinder on ringsilinder raadiusega a ; teine on sinusoidaalse juhtjoonega silinder. Nende lõikejoont kutsutakse kruvijooneks; trajektoor katab seda kruvijoont täies ulatuses. Punkti M liikumist antud juhul iseloomustab ühtlane tiirlemine kaugusel a ümber z -telje, koos ühtlase nihkumisega z -telje sihis. a kutsutakse kruvijoone raadiuseks; pikkust, mille võrra toimub nihkumine z -sihis ühe täistiiru vältel, nimetatakse kruvijoone sammuks. Lugeja veendugu ise, et sammu suurus on $\frac{2\pi h}{\omega}$.

Näide 3: Olgu M kinnitatud sirges joones ühtlaselt veereva ratta piirdejoonele; ratta raadius olgu a , ning aeg, mis ratta

tale kulub ühe täistiiru jaoks, olgu T . Alghetkel $t=0$ punkt M olgu kontaktis koordinaatide algusega O , ning ratta veeregu x -teljel, jäädes seejuures kogu aeg x - y -tasapinnasse, nii et alaliselt $z=0$. 4. joonisel on ratta asend kujutatud vastavalt juhuslikult võetud hetkele t . Joonisest nähtub:



4. joonis.

$$\begin{aligned}
 x &= OM' = OC' - M'C' = \tilde{C}M - MM'' \\
 &= a\varphi - a \sin \varphi \\
 &= a(\varphi - \sin \varphi) \\
 y &= M'M = C'M'' = C'C - CM'' \\
 &= a - a \cos \varphi \\
 &= a(1 - \cos \varphi) .
 \end{aligned}$$

Lõik OC' peab nimelt olema niisama pikk kui mahaveerenud kaar $\tilde{C}M$, kui alghetkel punkt M pidi olema kontaktis kohaga O .

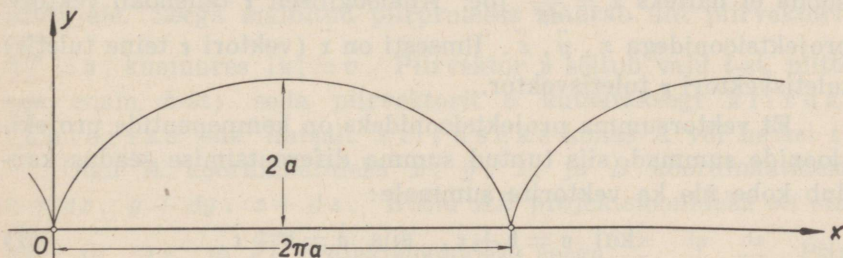
On ratas teinud ühe täistiiru, siis $\varphi = 2\pi$ ja $t = T$. Liikumise eeldatud ühtlus tähendab, et φ on võrdeline ajaga, s. t. $\varphi = \omega t$. Võrdetegur ω järgneb siit, kui φ ja t asendada vastavalt kokkukuuluvate väärtustega 2π ja T :

$$2\pi = \omega T, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}, \quad \varphi = \frac{2\pi}{T} t.$$

Paigutades seda φ väärtust varemini-saadud seostesse, saame antud juhul M liikumise määramiseks võrrandid

$$x = a\left(\frac{2\pi}{T} t - \sin \frac{2\pi}{T} t\right), \quad y = a\left(1 - \cos \frac{2\pi}{T} t\right), \quad z = 0.$$

On ilmne, et trajektoori kuju ei sõltu siin sellest, kas veeremine toimub kiiresti või aeglaselt; T võib seetõttu valida üsna



5. joonis.

meelevaldselt, seni kui tegemist on vaid trajektoori kuju küsimusega. Võttes näiteks $T = 2\pi$, saame väliselt lihtsama võrrandisüsteemi

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad z = 0.$$

Trajektoori kuju ei sõltu isegi sellest, kas veeremine toimub üht-

laselt või ebaühtlaselt. Veereva ratta piirdejoonele kinnitatud punkti trajektoori kutsutakse t s ü k l o i d i k s. Tsükloidi kuju on näidatud 5. joonisel.

§ 3. Kiirusvektor.

Vektori sõltuvus ajast t tähendab, et selle vektori projektioonid on aja t funktsioonid. Mehaanikas piirduakse juhtudega, kus need funktsioonid on üldiselt diferentsitavad t järgi. Diferentsimist aja t järgi tähistame edaspidi lühendatult punktisümboliga, nii et näiteks $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ jne. On otstarbekohane, lühenduse saavutamiseks, diferentsimist ja punktisümboli kasutamist laiendada ka vektoreile: on näiteks kohavektori \mathbf{r} projektioonideks x, y, z , kusjuures need viimased on t funktsioonid, siis mõistetakse $\dot{\mathbf{r}}$ all vektorit, mille projektioonideks on $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$. Sel viisil defineeritud vektorit $\dot{\mathbf{r}}$ kutsutakse vektori \mathbf{r} tuletiseks (aja t suhtes); tuletisvektori $\dot{\mathbf{r}}$ rakenduspunktiks on tavaliselt koordinaatide algus, kuid teda võib ka käsitleda vaba vektorina, viies teda rööplükkega kuhugi mujale.

Teise järgu tuletisi tähistatakse vastavalt kaksikpunktiga, nõnda et näiteks $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$ jne. Analoogiliselt $\ddot{\mathbf{r}}$ tähendab vektorit projektioonidega $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$. Ilmselt on $\ddot{\mathbf{r}}$ (vektori \mathbf{r} teine tuletis) tuletisvektori $\dot{\mathbf{r}}$ tuletisvektor.

Et vektorsumma projektioonideks on komponentide projektioonide summad, siis tuntud summa diferentsimise seadus kandub kohe üle ka vektorite summale:

$$\text{kui } \mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{c}, \text{ siis } \dot{\mathbf{a}} = \dot{\mathbf{b}} + \dot{\mathbf{c}}. \quad (7)$$

Kohavektori \mathbf{r} esimesel ja teisel tuletisvektoril $\dot{\mathbf{r}}$ ja $\ddot{\mathbf{r}}$ on mehaanikas tähtis tähendus: need tuletisvektorid määravad nimelt liikuva punkti kiirust ja kiirendust.

Selgitame seda kõigepealt kiiruse kohta.

Asetsegu liikuv punkt M hetkel t oma trajektoori kohas A ja mõnel hilisemal hetkel $t + h$ ($h > 0$) trajektoori kohas B (6. joonis). Olgu kõõlu AB pikkuseks a . Moodustame kande-

millest nähtubki, et kiirusvektor $\mathbf{v} : (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ on A kohavektori $\mathbf{r} : (x, y, z)$ tuletis $\dot{\mathbf{r}}$.

Kiirusvektor \mathbf{v} on rakendatud seal, kus liikuv materiaalne punkt hetkel t asetseb, s. t. kohas A . On aga ka mõeldav teda kujutella alati rakendatuna koordinaatide alguses O , — sel korral teine vektori otspunkt kujutab aja t muutumisel kõverjoont, mida kutsutakse vastava liikumise *h o d o g r a a f i k s*. Hodograaf on seega trajektoor, mille puhul kohavektoriks on \mathbf{r} .

Vektoriaalses kirjutuses A kohavektoriks on $\mathbf{r}(t)$ ning B kohavektoriks on $\mathbf{r}(t+h)$, mille tõttu vektoriks \overrightarrow{AB} osutub vektoriaalne vahe $\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)$ ja seega \overrightarrow{AL} on $\frac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h}$. Järelikult

$$\mathbf{v} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h} = \dot{\mathbf{r}}, \quad (8)$$

kust nähtub, et väliselt vektortuletise $\dot{\mathbf{r}}$ definitsioon ei erine tavalisest analüüsist tuntud tuletise skalaarsest definitsioonist.

Mõningatel juhtudel, kõneldes kiirusest, mõeldakse selle all mitte vektorit \mathbf{v} , vaid selle vektori suurust $|\mathbf{v}| = v$. Et \mathbf{v} projektsioonideks on \dot{x} , \dot{y} , \dot{z} , siis

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2, \quad v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}. \quad (9)$$

Ühenduses sellega on kombeks kiirusvektori projektsioone sageli ka tähistada sümbolitega v_x , v_y , v_z , nõnda et v_x tähendab \dot{x} jne.

(9) põhjal tuleks võtta $v \geq 0$. Kuid sageli lubatakse anda skalaarsele kiirusele v ka negatiivseid väärtusi, eeldusel, et teatavatel kaalutlustel trajektoor on käsitletud *o r i e n t e e r i t u d* kõverana, s. t. kõverana, millel üht suunda loetakse positiivseks, teist negatiivseks. Siis võib skalaari v lugeda negatiivseks niipea kui \overrightarrow{AT} suund osutub vastupidiseks trajektoori positiivsele suunale puutekohas A .

Tähendagu s trajektoori kaare pikkust teatavast algkohast A_0 arvatuna. Orienteeritud trajektoori puhul võib see s olla nii positiivne kui ka negatiivne. Teatavasti on

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

Jagades siin mõlemaid pooli dt -ga, järeldame

$$\dot{s} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = v,$$

seega

$$v = \dot{s}. \quad (10)$$

Selle põhjal käidud teekonna pikkust mingis ajavahemikus t_0 kuni t määravad valemid

$$ds = v dt, \quad s(t) - s(t_0) = \int_{t_0}^t v dt. \quad (11)$$

On v konstantne, siis liikumist kutsutakse ühtlaseks; on seejuures veel trajektoor sirge, siis kiirusvektor \mathbf{v} püsib nii suuruse kui suuna poolest, tähendab, \mathbf{v} on konstantne, — liikumine on siis ühtlane sirgjooneline.

Ühtlase liikumise korral valemist (11) järgneb, kui veel kirjutada $s(t)$ asemel lühidalt s ja $s(t_0)$ asemel s_0 :

$$s = s_0 + v(t - t_0), \quad v = \frac{s - s_0}{t - t_0} = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Kiirusvektori suunakoosinused l_1 , m_1 , n_1 on võrdelised selle vektori projektsioonidega \dot{x} , \dot{y} , \dot{z} ; normivaks teguriks osutub $\frac{1}{v}$, tähendab, $\frac{1}{s}$. Järelikult

$$l_1 = \frac{\dot{x}}{s}, \quad m_1 = \frac{\dot{y}}{s}, \quad n_1 = \frac{\dot{z}}{s}. \quad (12)$$

Näide 1: Olgu

$$x = a_1 t + b_1, \quad y = a_2 t + b_2, \quad z = a_3 t + b_3,$$

nagu § 2 näites 1. Diferentsimine annab siis

$$\dot{x} = a_1, \quad \dot{y} = a_2, \quad \dot{z} = a_3,$$

kust edasi

$$v = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \text{konst.},$$

$$l_1 = \text{konst.}, \quad m_1 = \text{konst.}, \quad n_1 = \text{konst.}$$

Liikumine on seega ühtlane sirgjooneline.

Näide 2: Olgu

$$x = a \cos \omega t, \quad y = a \sin \omega t, \quad z = ht,$$

nagu näites 2 § 2. Diferentsides saame

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -a\omega \sin \omega t, & \dot{y} &= +a\omega \cos \omega t, & \dot{z} &= h, \\ v &= \sqrt{a^2\omega^2 + h^2}. \end{aligned}$$

Tähendab, liikumine on igatahes ühtlane. Kiirusvektori kaks suunakoosinust on muutlikud, kolmas on konstantne, nimelt on

$$l_1 = \frac{-a}{\sqrt{a^2\omega^2 + h^2}} \sin \omega t, \quad m_1 = \frac{+a}{\sqrt{a^2\omega^2 + h^2}} \cos \omega t, \quad n_1 = \frac{h}{\sqrt{a^2\omega^2 + h^2}}.$$

Et kiirusvektori suunakoosinused, nagu kerge näha, alati ühtivad puutuja suunakoosinustega, siis praegu leitud seostest järgneb, et krurvijoone puutuja moodustab krurvijoone teljega (antud juhul z -teljega) konstantse nurga.

Lugedes krurvijoone algkohaks A_0 selle koha, kus $x = a$, $y = 0$, $z = 0$, mis vastab alghetkele $t_0 = 0$ ja $s_0 = 0$, leiame (11) põhjal:

$$s = t\sqrt{a^2\omega^2 + h^2} = \sqrt{a^2\omega^2 t^2 + h^2 t^2}.$$

Seega s kujutab hüpotenuusi täisnurkses kolmnurgas, mille kaatetid on $a\omega t$ ja ht .

N ä i d e 3: Olgu

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad z = 0,$$

nagu § 2 näite 3 lõpus. Diferentsides leiame

$$\dot{x} = a(1 - \cos t), \quad \dot{y} = a \sin t, \quad \dot{z} = 0,$$

kust

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = a\sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t} \\ &= a\sqrt{2 - 2\cos t} \\ &= a\sqrt{4\sin^2 \frac{t}{2}} \\ &= 2a \sin \frac{t}{2}. \end{aligned}$$

Materiaalse punkti M liikumine seega siin pole enam ühtlane, sest kiirus v muutub perioodiliselt, kuigi ratas ise veeres ühtlaselt.

Lugedes tsükloidi kaarepikkust s koordinaatide algusest $x = 0$, $y = 0$ kui algkohast, mis vastab hetkele $t_0 = 0$, saame

(11) kohaselt

$$s = \int_0^t 2a \sin \frac{t}{2} dt = -4a \cos \frac{t}{2} \Big|_0^t \\ = 4a \left(1 - \cos \frac{t}{2} \right).$$

On $t = 2\pi$, millele vastab ratta üks täistiir, siis järelkult

$$s = 4a(1 + 1) = 8a,$$

seega tsükloidi ühe perioodi kaarepikkuseks on veereva ratta läbimõõdu neljakordne.

Kiirusvektori (puutuja) suunakoosinused on:

$$l_1 = \frac{a(1 - \cos t)}{2a \sin \frac{t}{2}} = \frac{a2 \sin^2 \frac{t}{2}}{2a \sin \frac{t}{2}} = \sin \frac{t}{2}$$

$$m_1 = \frac{a \sin t}{2a \sin \frac{t}{2}} = \frac{a2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}}{2a \sin \frac{t}{2}} = \cos \frac{t}{2}$$

$$n_1 = 0.$$

Hetkil $t = 2n\pi$ täisarvulise n puhul on järelkult puutuja seis risti ratta veeremise sihiga. Üldasendis tsükloidi puutuja igal hetkel

läbib 7. joonisel näidatud punkti D , sest

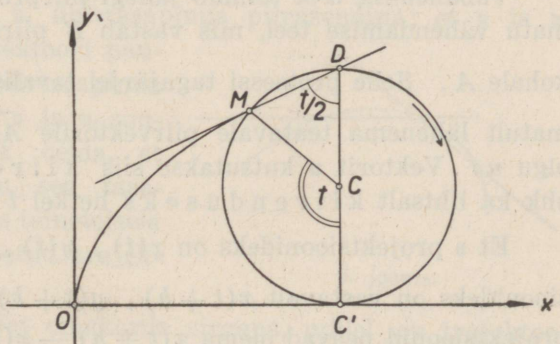
nurk CDM on $\frac{t}{2}$ ja sirge MD koosinus y -suunaga on see-

tõttu parajasti $\cos \frac{t}{2}$;

kohast M läbiminev sirge selle suunakoosinusega ongi aga, nagu ülaltoodud

valemid näitavad,

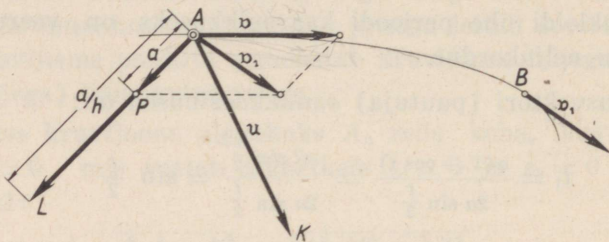
just puutujaks tsükloidile. Seega on selgunud lihtne puutuja konstrueerimise võtte tsükloidi mistahes kohas.



7. joonis.

§ 4. Kiirendusvektor.

Olgu jälle A liikuva materiaalse punkti asukoht trajektoorigil hetkel t ja B sama punkti asukoht hetkel $t+h$ (8. joonis). Olgu veel v kiirusvektor hetkel t ja v_1 kiirusvektor hetkel $t+h$. Rakendades v ja v_1 ühises algkohas A , määrame vektori \vec{AP} nõnda, et $v_1 = v + \vec{AP}$, s. t. $\vec{AP} = v_1 - v$. Olgu \vec{AP} pikkuseks sel puhul a . Määrame nüüd veel vektori \vec{AL} sama rakendus-



8. joonis.

kohaga A , mis oleks suunatud \vec{AP} suunas ja omaks suurust $\frac{a}{h}$. Sel viisil defineeritud \vec{AL} kutsutakse keskmiseks kiirendusvektorigiks ajavahemikus $t, t+h$.

Vabanemine h -st toimub jällegi piirprotsessi kaudu, h piiramatult vähendamise teel, mis vastab B piiramatule lähenemisele kohale A . Selle protsessi tagajärjel tavaliselt \vec{AL} hakkab piiramatult lähenema teatavale piirvektorile $\vec{AK} = u$, mille suurus olgu u . Vektorit u kutsutakse siis kiirendusvektorigiks ehk ka lihtsalt kiirenduseks hetkel t või kohas A .

Et v projektsioonideks on $\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)$ ning v_1 projektsioonideks on vastavalt $\dot{x}(t+h), \dot{y}(t+h), \dot{z}(t+h)$, siis \vec{AP} projektsioonid peavad olema $\dot{x}(t+h) - \dot{x}(t), \dot{y}(t+h) - \dot{y}(t), \dot{z}(t+h) - \dot{z}(t)$. Järelikult \vec{AL} projektsioonideks on

$$\frac{\dot{x}(t+h) - \dot{x}(t)}{h}, \quad \frac{\dot{y}(t+h) - \dot{y}(t)}{h}, \quad \frac{\dot{z}(t+h) - \dot{z}(t)}{h}.$$

Seega kiirendusvektori $\mathbf{u} = \lim_{h \rightarrow 0} \overrightarrow{AP}$ projektsioonideks osutuvad

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\dot{x}(t+h) - \dot{x}(t)}{h} = \ddot{x}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\dot{y}(t+h) - \dot{y}(t)}{h} = \ddot{y}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\dot{z}(t+h) - \dot{z}(t)}{h} = \ddot{z}$$

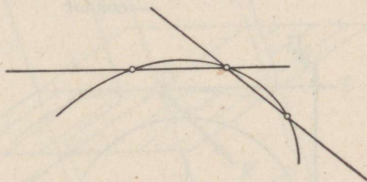
Niisiis

$$\mathbf{u} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\dot{\mathbf{r}}(t+h) - \dot{\mathbf{r}}(t)}{h} = \ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{v}}. \quad (13)$$

Kiirendusvektori \mathbf{u} suunakoosinused on vastavalt $\frac{\ddot{x}}{u}$, $\frac{\ddot{y}}{u}$, $\frac{\ddot{z}}{u}$, kus

$$u = |\mathbf{u}| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2} (\geq 0).$$

Trajektoori vastavas kohas A rakendatuna kiirusvektor \mathbf{v} ja kiirendusvektor \mathbf{u} määravad koos ühe tasapinna, mis neid mõlemaid vektoreid sisaldab; seda tasapinda kutsutakse trajektoori kooldumistasapinnaks kohas A . Kooldumistasapind on aga omane trajektoorile kui säärasele, — ta ei muutu, kui materiaalne punkt kulgeb trajektoori teissuguse kiirusega ja teissuguse kiirendusega. Selles veendume, tähele pannes, et kooldumistasapinda ilmsesti võib defineerida ka kohas A rakendatud vektorite \mathbf{v} ja \mathbf{v}_1 ühistasapinna piirasendina: et \mathbf{v} ja \mathbf{v}_1 omavad iga kord trajektoori puutujate sihte, siis selle piirtasapinna asend ei saa sõltuda \mathbf{v} ja \mathbf{v}_1 suurustest; võib lihtsalt öelda, et kooldumistasapind on see tasapind, mis sisaldab kaks teineteisele „lõpmata lähedal“ võetud trajektoori puutujat.



9. joonis.

Kujutelles puutujat omakorda sirgena, millel on trajektooriga kaks „lõpmata lähedal“ asetsevat ühist punkti, võib ka lähendada kujutelmast, et kahe „lõpmata läheda“ puutujaga on kõveral määratud kolm „lõpmata lähedast“ punkti (9. joonis); kooldumistasapinnaks osutub seega tasapind, mis sisaldab trajektoori kolm

„lõpmata lähedast“ punkti. Selle uduse sõnastuse täpne sisu on korrektselt väljendatav järgmiselt:

Kooldumistasapind kõvera kohas A on piirtasapind, millele läheneb selle kõvera kolmest meelevaldsest punktist läbiminev tasapind, kui igaüks neist kolmest punktist, trajektoori pidi libisedes, piiramatult läheneb kohale A .

Seos $u = v$ näitab, et kiirendusvektorit võib tõlgendada kiiruseks, millega vektori r liikuv otspunkt kulgeb hodograafi. On v konstantne, s. t. on liikumine ühtlane ja sirgjooneline, siis hodograaf kõduneb üheksainsaks punktiks ja kiirendus u osutub nulliks. See on kokkukõlas sellega, et konstantse r tuletis peab olema null.

Näites 1 § 2, 3 oligi v konstantne, järelkult seal $u = 0$.

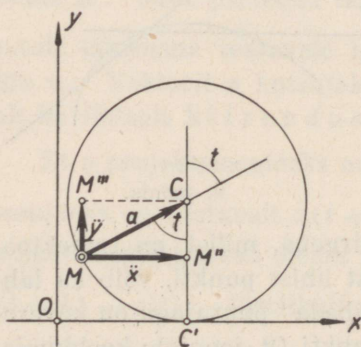
Näites 2 § 2, 3 saame

$$\ddot{x} = -a\omega^2 \cos \omega t, \quad \ddot{y} = -a\omega^2 \sin \omega t, \quad \ddot{z} = 0,$$

järelikult $u = a\omega^2$, ning suunakoosinused seejärgi on vastavalt $-\cos \omega t$, $-\sin \omega t$, 0 . S. t., siin kiirendus on suuruse poolest konstantne ja suuna poolest alati risti z -teljega. On kerge veenduda, et siin kiirendusvektori kandesirge alati lõikab seda z -telge. Tõepoolest, selle kandesirge võrrandiks on

$$\frac{x - a \cos \omega t}{-\cos \omega t} = \frac{y - a \sin \omega t}{-\sin \omega t} = \frac{z - ht}{0},$$

nagu lugeja võib ise kontrollida. Nulli esinemine nimetajas säärastes analüütilise geomeetria võrrandites tähendab teatavasti vaid seda, et ka lugejat tuleb lugeda võrdseks nulliga. Mainitud võrrand on rahuldatud, kui $x = 0$, $y = 0$, $z = ht$; see koht asetseb kindlasti z -teljel, aga ühtlasi ka kandesirgel, — s. t. see kandesirge tõesti lõikab z -telge. Olles risti z -teljega, see kandesirge on alati



10. joonis.

paralleelne x - y -tasapinnaga. Krüvijoone kooldumistasapind sisaldab seda kandesirget ja puutujat.

Näites 3 § 2, 3 on

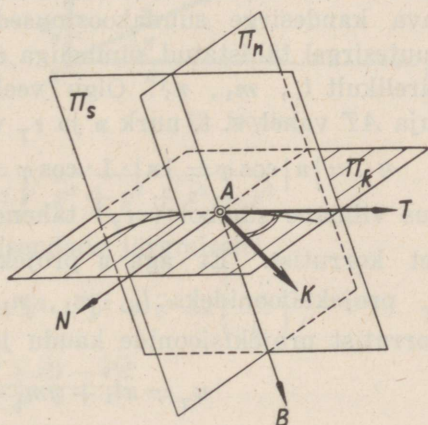
$$\ddot{x} = a \sin t, \quad \ddot{y} = a \cos t, \quad \ddot{z} = 0,$$

seega $u = a$ ning suunakoosinused on vastavalt $\sin t$, $\cos t$, 0 . Jällegi on kiirenduse suurus konstantne; nagu suunakoosinused näitavad, on nurk kiirendusvektori ja y -telje vahel võrdne nurgaga t , mille võrra just veerev ratas on algasendi suhtes pöördunud. 10. joonis näitab, et $\ddot{x} = MM''$, $\ddot{y} = MM'''$ ning kiirendusvektor $\mathbf{n} = MC$, s. t. ta lõpeb parajasti veereva ratta keskkoha hetkelises asendis.

§ 5. Puutekiirendus ja normaalkiirendus.

Olgu trajektoori puutuja AT orienteeritud kokkukõlas trajektoori kaare positiivse suunaga. Tasapinda Π_n läbi A risti puutu-
jaga AT kutsutakse trajektoori normaaltasapinnaks kohas A (11. joonis). Iga sirge selles tasapinnas Π_n on risti puutu-
jaga; läheb säärane sirge ühtlasi läbi punkti A , siis kutsutakse seda sirget trajektoori normaalsirgeks kohas A ; neid normaale kohas A leidub lõpmata palju.

Paneme läbi puutuja AT kooldumistasapinna, mille tähisteks olgu Π_k . Tasapindade Π_n ja Π_k lõikesirge AN on üks säärastest normaalidest — teda kutsutakse peanormaaliks ehk ka „esimeseks“ normaalsirgeks. Peanormaali orienteeritakse nõnda, et tema positiivseks suunaks oleks see, mis näitab puutuja AT suhtes



11. joonis.

samale poolele, kuhu näitab kiirendusvektor kohas A ; sellest poolest vaadatuna trajektoor tundub kohas A nõgusana.

Võtame veel kolmanda tasapinna Π_s läbi A risti kahe esimese tasapinnaga Π_n ja Π_k . Seda tasapinda Π_s kutsutakse trajektoori sirgestustasapinnaks. Tema lõikesirge AB normaaltasapinnaga Π_n moodustab trajektoori binormaaali ehk „teise“ normaali kohas A . Binormaaali orienteeritakse nõnda, et tema positiivne suund vastaks z -teljele, kui puutuja AT (positiivse kaare suunas) oleks x -teljeks ja peanormaal AN oleks y -teljeks.

Orienteeritud sirgete kolmik AT , AN , AB moodustab ortogonaalse teljestiku, mis osutub eriti kohaseks trajektoori omaduste uurimiseks kohas A . Selle teljestiku asend muutub muidugi ühes A muutumisega. Nimetame seda teljestikku liikuva punkti „loomulikku saateteljestikku“ (saksa kirjanduses on tarvitusel nimetus „begleitendes Dreikant“).

Otsime kiirendusvektori $\vec{AK} = u$ projektsioone u_T , u_N , u_B loomulikudele saatetelgedele AT , AN , AB vastavalt. Et u asetseb kooldumistasapinnas Π_k , siis on kõigepealt selge, et alati peab olema $u_B = 0$.

Võtame puutujal AT ühikvektori, s. o. vektori, mille suurus on 1. Säärase ühikvektori projektsioonideks on alati vastava kandesirge suunakoosinused. Olgu mainitud ühikvektor puutesirgel tähistatud sümboliga e_T ; selle e_T projektsioonid on järelikult l_1 , m_1 , n_1 . Olgu veel φ nurk kiirenduse u ja puutuja AT vahel, s. t. nurk u ja e_T vahel. Siis

$$u_T = |u| \cos \varphi = |u| \cdot 1 \cdot \cos \varphi = |u| \cdot |e_T| \cdot \cos \varphi = (ue_T),$$

kus viimane sümbol (ue_T) tähendab vektorite u ja e_T skalaarset korrutist. Et aga u projektsioonideks on \ddot{x} , \ddot{y} , \ddot{z} ning e_T projektsioonideks l_1 , m_1 , n_1 , siis, väljendades skalaarset korrutist projektsioonide kaudu ja kasutades (12), saame:

$$\begin{aligned} u_T &= \ddot{x}l_1 + \ddot{y}m_1 + \ddot{z}n_1 \\ &= \ddot{x} \frac{\dot{x}}{s} + \ddot{y} \frac{\dot{y}}{s} + \ddot{z} \frac{\dot{z}}{s} \\ &= \frac{\ddot{x}\dot{x} + \ddot{y}\dot{y} + \ddot{z}\dot{z}}{s}. \end{aligned}$$

Kuid seosest

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = \dot{s}^2$$

järgneb diferentsimise kaudu, kui mõlemal pool veel ära jätta ühistegur 2,

$$\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z} = \dot{s}\ddot{s}. \quad (14)$$

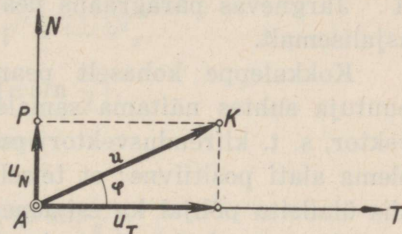
Kasutades seda seost (14), järeldame

$$u_T = \frac{\dot{s}\ddot{s}}{\dot{s}} = \ddot{s} = \frac{d\dot{s}}{dt} = \frac{dv}{dt} = \dot{v}.$$

u_T näitab kiirendust puutuja suunas ja kutsutakse selle tõttu puutekiirenduseks; ta on skalaarne suurus (arv) ning, nagu praegu selgus, ta pole midagi muud kui skalaarse kiiruse v tuletis aja t järgi, ehk, mis tähendab sama, kaarepikkuse s teine tuletis t järgi.

u_N võime nüüd arvutada täisnurksest kolmnurgast AKP

(12. joonis), kus \vec{AK} on kiirendusvektor u , AT ja AN on vastavalt puutuja ja peanormaal, kaatet AP omab pikkust u_N , kaatet PK pikkust u_T ja hüpotenuus AK pikkust u . Pythagorase lause annab:



12. joonis.

$$u_N = \sqrt{u^2 - u_T^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 - \dot{s}^2}.$$

Juurealust avaldist võib siin teisendada järgmiselt:

$$\begin{aligned} \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 - \dot{s}^2 &= \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 - \left(\frac{\dot{s}\ddot{s}}{\dot{s}}\right)^2 \\ &= \frac{\dot{s}^2(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \dot{s}^2\ddot{s}^2}{\dot{s}^2}. \end{aligned}$$

Teiselt poolt moodustades avaldise

$$(\dot{s}\ddot{x} - \ddot{s}\dot{x})^2 + (\dot{s}\ddot{y} - \ddot{s}\dot{y})^2 + (\dot{s}\ddot{z} - \ddot{s}\dot{z})^2,$$

mille lühendatult tähistame sümboliga Q , leiame

$$\begin{aligned}
 Q &= \dot{s}^2(\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2) + \ddot{s}^2(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - 2\dot{s}\ddot{s}(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z}) \\
 &= \dot{s}^2(\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2) + \ddot{s}^2\dot{s}^2 - 2\dot{s}^2\ddot{s}^2 \\
 &= \dot{s}^2(\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2) - \dot{s}^2\ddot{s}^2.
 \end{aligned}$$

Võrreldes seda ülalleituga näeme, et juure all seisab $\frac{Q}{\dot{s}^2}$. Järelikult

$$u_N = \frac{1}{\dot{s}} \sqrt{Q}.$$

Seda tulemust võib kirjutada ka nõnda:

$$u_N = \frac{\dot{s}^2}{\dot{s}^3} \sqrt{Q} = \frac{v^2}{\dot{s}^3} \sqrt{Q} = \frac{v^2}{\dot{s}^3 Q^{-\frac{1}{2}}}.$$

Suurust $\dot{s}^3 Q^{-\frac{1}{2}}$ tähistame sümboliga ρ_1 ; seda suurust kutsutakse trajektoori peakõverusraadiuseks ehk ka „esimeseks“ kõverusraadiuseks, sageli ka lühidalt „kõverusraadiuseks“ kohal A . Järgnevas paragraafis peatume selle mõiste juures üksik-asjalisemalt.

Kokkuleppe kohaselt peanormaali positiivne suund pidi puutuja suhtes näitama samale poole, kuhu näitab kiirendusvektor, s. t. kiirendusvektori projektsioon u_N peanormalile peab olema alati positiivne; et teiselt poolt v^2 on oluliselt positiivne, siis ülalleitu põhjal ka esimene kõverusraadius peab olema alati positiivne arv, kui ta just ei muutu parajasti nulliks.

Skalaari u_N , mis näitab kiirendust peanormaali suunas, kutsutakse normaalkiirenduseks.

Võtame tulemused valemitega kokku:

$$u_T = \dot{v}, \quad u_N = \frac{v^2}{\rho_1}, \quad u_B = 0, \quad (15)$$

$$\rho_1 = \frac{\dot{s}^3}{\sqrt{Q}}, \quad Q = (\dot{s}\ddot{x} - \ddot{s}\dot{x})^2 + (\dot{s}\ddot{y} - \ddot{s}\dot{y})^2 + (\dot{s}\ddot{z} - \ddot{s}\dot{z})^2.$$

Rakendame need valemid senikäsiteldud näidete juures, jäädes endise numeratsiooni juurde.

Näide 1: Siin leidsime $u = 0$, mille tagajärjel muidugi peab olema ka $u_T = 0$, $u_N = 0$. Tõepoolest ongi (15) põhjal $u_T (= \dot{v})$ sellepärast null, et v on konstantne. Peale seda on

kohe näha, et $Q = 0$, mille tõttu $q_1 = \infty$ ning u_N on seega null. Trajektoor on sirgjooneline, seepärast ongi kõverusraadius lõpmata suur.

N ä i d e 2: Siin oli $v(= \dot{s}) = \sqrt{a^2\omega^2 + h^2}$, seega (15) alusel $u_T = 0$. Kui aga kiirendus \mathbf{u} ei anna projektsiooni puutujale, siis ta on selle puutujaga risti, langedes järelikult peanormaalele kui kandesirgele; sel põhjusel peab olema $u_N = |\mathbf{u}| = a\omega^2$. Teiselt poolt on (15) kohaselt alati $q_1 = \frac{v^2}{u_N}$, mis antud juhul annab

$$q_1 = \frac{a^2\omega^2 + h^2}{a\omega^2} = a + \frac{h^2}{a\omega^2}.$$

Kruvijoone peakõverusraadius on järelikult konstantne ja suurem kui kruvijoone enda raadius a . Lugeja enda hooleks jäägu kontrollida, et sama väärtuse saaksime, arvutades q_1 avaldise Q kaudu.

N ä i d e 3: Siin oli $v = 2a \sin \frac{t}{2}$, $u = a$. Seetõttu

$$\begin{aligned} u_T &= a \cos \frac{t}{2}, & u_N &= \sqrt{u^2 - u_T^2} \\ & & &= \left| a \sin \frac{t}{2} \right|. \end{aligned}$$

Arvutades v ja u_N kaudu q_1 , leiame

$$q_1 = \frac{4a^2 \sin^2 \frac{t}{2}}{\left| a \sin \frac{t}{2} \right|} = \left| 4a \sin \frac{t}{2} \right|.$$

Tsükloidi kõverusraadius muutub seega perioodiliselt, omades maksimumi $4a$ kohtadel $t = (2n + 1)\pi$, ning miinimumi 0 kohtadel $t = 2n\pi$, kusjuures n tähendab meelevaldset täisarvu. Jällegi kontrolligu lugeja ise, et kõverusraadiuse arvutamine Q kaudu annab sama tulemuse.

§ 6. Kõverus ja vääne.

Peatume üksikasjalisemalt kõverusraadiuse mõiste juures, näidates ühtlasi, et siin on tegemist trajektoori omadusega, mis ei sõltu kiirusest ja kiirendusest, mida trajektooril liikuv materiaalne punkt omab. Selleks anname kõverusraadiusele puhtgeomeetrilise definitsiooni.

Nihkub koht A trajektoori kaarel lõpmata väikese osa ds võrra edasi, siis puutuja uues asendis moodustab puutujaga endises asendis lõpmata väikese nurga $d\tau$. On puutuja suunakoosinused endises asendis l_1, m_1, n_1 ja uues asendis $l_1 + dl_1, m_1 + dm_1, n_1 + dn_1$, siis, tuntud seaduse põhjal, puutujatevahelise nurga koosinust määrab skalaarne korrutis:

$$\begin{aligned}\cos d\tau &= l_1(l_1 + dl_1) + m_1(m_1 + dm_1) + n_1(n_1 + dn_1) \\ &= l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 + l_1dl_1 + m_1dm_1 + n_1dn_1 \\ &= 1 + l_1dl_1 + m_1dm_1 + n_1dn_1.\end{aligned}$$

Et $d\tau$ on lõpmata väike, siis, arendades $\cos d\tau$ ritta, võib piirduda kahe esimese liikmega:

$$\cos d\tau = 1 - \frac{1}{2} d\tau^2.$$

Asetades seda ülaltoodud avaldisse ning jättes mõlemal pool liidetava 1 ära, saame, korrutades veel mõlemad pooled teguriga 2:

$$d\tau^2 = -2(l_1dl_1 + m_1dm_1 + n_1dn_1).$$

Kuid ka uues kohas suunakoosinuste ruutude summa peab võrduma ühega, mille tõttu

$$(l_1 + dl_1)^2 + (m_1 + dm_1)^2 + (n_1 + dn_1)^2 = 1,$$

ehk

$$\begin{aligned}l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 + dl_1^2 + dm_1^2 + dn_1^2 \\ + 2(l_1dl_1 + m_1dm_1 + n_1dn_1) = 1.\end{aligned}$$

Siin kaob vasakul $l_1^2 + m_1^2 + n_1^2$ paremal pool seisva 1 vastu, millest järeldub

$$dl_1^2 + dm_1^2 + dn_1^2 = -2(l_1dl_1 + m_1dm_1 + n_1dn_1).$$

Niisiis

$$d\tau^2 = dl_1^2 + dm_1^2 + dn_1^2,$$

ehk, pärast jagamist dt^2 -ga ning juurimist:

$$\dot{\tau} = \sqrt{\dot{l}_1^2 + \dot{m}_1^2 + \dot{n}_1^2}. \quad (16)$$

Võrreldes nurka $d\tau$ nihke suurusega ds jagatise $\frac{d\tau}{ds}$ abil, saame ühe arvu κ_1 , mis osutub seda suuremaks, mida järsemalt muutub puutuja siht, kui liikuda mööda trajektoori. Seda arvu $\kappa_1 = \frac{d\tau}{ds}$ kutsutakse trajektoori peakõveruseks ehk ka „esimeseks“ kõveruseks, sageli lihtsalt „kõveruseks“. κ_1 pöördväärtust $\frac{1}{\kappa_1}$ kutsutakse vastavalt peakõverusraadiuseks, esimeseks kõverusraadiuseks või lihtsalt kõverusraadiuseks. See ongi kõverusraadiuse puhtgeomeetriline definitsioon, ning jääb vaid veel näidata, et ta ühtib eespool (§ 5) antud kinemaatilise definitsiooniga.

Et

$$\kappa_1 = \frac{d\tau}{ds} = \frac{d\tau}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{\dot{\tau}}{\dot{s}},$$

siis järelikult $\tau = \kappa_1 s$. Teiselt poolt järgneb valemist (12) diferentsimise teel:

$$l_1 = \frac{\dot{\dot{s}}\ddot{x} - \ddot{s}\dot{\dot{x}}}{s^2}, \quad m_1 = \frac{\dot{\dot{s}}\ddot{y} - \ddot{s}\dot{\dot{y}}}{s^2}, \quad n_1 = \frac{\dot{\dot{s}}\ddot{z} - \ddot{s}\dot{\dot{z}}}{s^2},$$

ja siit edasi:

$$l^2 + m^2 + n^2 = \frac{(\dot{\dot{s}}\ddot{x} - \ddot{s}\dot{\dot{x}})^2 + (\dot{\dot{s}}\ddot{y} - \ddot{s}\dot{\dot{y}})^2 + (\dot{\dot{s}}\ddot{z} - \ddot{s}\dot{\dot{z}})^2}{s^4} = \frac{Q}{s^4}.$$

Valem (16) näitab seega

$$\kappa_1 \dot{s} = \dot{\tau} = \frac{\sqrt{Q}}{s^2},$$

kust järgneb

$$\kappa_1 = \frac{\sqrt{Q}}{s^3}, \quad \varrho_1 = \frac{s^3}{\sqrt{Q}}.$$

Võrdlus valemiga (15) näitabki, et siin defineeritud kõverusraadius ühtib varemini kõverusraadiuseks nimetatud suurusega.

Koha A nihkumisel ds võrra trajektoori pidi võib tekkida ka lõpmata väike nurk binormaalide vahel; olgu selle nurga tähiseks $d\vartheta$. Jagatist $\frac{d\vartheta}{ds} = \kappa_2$ kutsutakse trajektoori „teiseks“ kõveru-

seks ehk väändeks kohas A , ning selle pöördväärtust $\frac{1}{\kappa_2} = Q_2$ vastavalt „teiseks“ kõverusraadiuseks ehk väänderaadiuseks.

Väände κ_2 arvutamine toimub analoogiliselt, kuid selle vahega, et nüüd tuleb lähtuda mitte puutuja, vaid binormaali suunakoosinustest. Olgu viimased tähistatud l_3 , m_3 , n_3 (vastavalt sellele, et binormaali moodustab kolmanda loomuliku telje). Kokkukõlas valemiga (16) peab siis tulemus kõlama

$$\kappa_2 \dot{s} = \vartheta = \sqrt{\dot{l}_3^2 + \dot{m}_3^2 + \dot{n}_3^2}. \quad (17)$$

On kergesti kontrollitav, et

$$l_3 = \frac{\dot{y}\ddot{z} - \dot{y}\ddot{z}}{\sqrt{Q}}, \quad m_3 = \frac{\dot{z}\ddot{x} - \dot{z}\ddot{x}}{\sqrt{Q}}, \quad n_3 = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{x}\ddot{y}}{\sqrt{Q}}. \quad (18)$$

Esiteks on nimelt

$$\begin{aligned} & (\dot{y}\ddot{z} - \dot{y}\ddot{z})^2 + (\dot{z}\ddot{x} - \dot{z}\ddot{x})^2 + (\dot{x}\ddot{y} - \dot{x}\ddot{y})^2 = \\ & = \ddot{x}^2(\dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \dot{y}^2(\dot{z}^2 + \dot{x}^2) + \dot{z}^2(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \\ & - 2(\dot{y}\ddot{y}\dot{z}\dot{z} + \dot{z}\dot{z}\dot{x}\dot{x} + \dot{x}\dot{x}\dot{y}\dot{y}) \\ & = \ddot{x}^2(\dot{s}^2 - \dot{x}^2) + \dot{y}^2(\dot{s}^2 - \dot{y}^2) + \dot{z}^2(\dot{s}^2 - \dot{z}^2) + \\ & - 2(\dot{y}\ddot{y}\dot{z}\dot{z} + \dot{z}\dot{z}\dot{x}\dot{x} + \dot{x}\dot{x}\dot{y}\dot{y}) \\ & = \dot{s}^2(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - (\dot{x}\dot{x} + \dot{y}\dot{y} + \dot{z}\dot{z})^2 \\ & = \dot{s}^2(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \dot{s}^2\dot{s}^2, \end{aligned}$$

tähendab,

$$(\dot{y}\ddot{z} - \dot{y}\ddot{z})^2 + (\dot{z}\ddot{x} - \dot{z}\ddot{x})^2 + (\dot{x}\ddot{y} - \dot{x}\ddot{y})^2 = Q. \quad (19)$$

Järelikult on siin tõepoolest tegemist mingisuguste suunakoosinustega. Õpetlik on kõrvutada praegusaadud Q definitsiooni (19) endise definitsiooniga (15).

Teiseks valemitega (18) määratud ühikvektor (l_3 , m_3 , n_3) on risti kiirusvektoriga (\dot{x} , \dot{y} , \dot{z}) ja ka kiirendusvektoriga (\ddot{x} , \ddot{y} , \ddot{z}), sest otsene arvutamine näitab, et vastavad skalaarsed

korrutised on nullid. Seega vektor (18) on risti kooldumistasapinnaga ning omab seetõttu just binormaali suunda.

Diferentsides (18) üksikjuhtudel, leiamegi \dot{l}_3 , \dot{m}_3 , \dot{n}_3 ja siis juba (17) põhjal x_2 ja q_2 .

Ka peanormaali siht üldiselt muutub koha A nihkumisel trajektoiril, mille põhjal avaneb võimalus defineerida veel üht kolmandat, nn. täiskõverust; viimase pöördväärtus R on vastavalt täiskõveruseraadius. Hõlpsasti võib aga arvutada R esimese kõveruse ja väände kaudu, sest on kehtiv seos

$$\frac{1}{R} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} . \quad (20)$$

Selles veenduda jäägu lugeja enda hooleks.

Ruumilise trajektoori esimene kõverus ühtib erijuhul, kus trajektoor osutub tasaseks, tavalise tasapinnalise kõvera kõveruse mõistega, sest tasapinnal defineeritakse kõverust just piirväärtusena, millele läheneb puutuja nurgamuutumise suhe kaarepikkusse, kui kaarepikkus piiramatult kahaneb. Vääne osutub tasapinnalise kõvera puhul nulliks, sest tasapinnalise kõvera kolm mistahes punkti asetsevad alati ühes ja samas tasapinnas, nimelt selle kõvera tasapinnas; viimane ongi seetõttu kõikides kohtades ühiseks kooldumistasapinnaks, ning temaga risti seisev binormaal omab igas kohas üht ja sama suunda, mille tõttu alati $d\vartheta = 0$, tähendab, $x_2 = 0$. On ümberpöörduvalt teada, et väänat pole olemas, siis binormaalid omavad konstantset suunda ja kooldumistasapind on seega püsiv, — s. t. kõver on tasane.

Ruumilisi kõveraaid kutsutakse ka väänatud kõverateks ehk kaksikkõverusega kõverateks.

Kaob esimene kõverus igas kohas, siis trajektoor on sirge. Sellest nähtub, et esimese kõveruse nulliks muutumisel igas kohas peab muutuma nulliks ka teine kõverus igas kohas, sest sirgjoon on tasane.

Selgitava näitena käsitleme väände arvutamist krurvijoone puhul. Korraldades arvutusi kohases skeemis, leiame:

$$\begin{array}{lll} x = a \cos \omega t & \dot{x} = -a\omega \sin \omega t & \ddot{x} = -a\omega^2 \cos \omega t \\ y = a \sin \omega t & \dot{y} = +a\omega \cos \omega t & \ddot{y} = -a\omega^2 \sin \omega t \\ z = ht & \dot{z} = h & \ddot{z} = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \dot{y}\ddot{z} - \ddot{y}\dot{z} = a\omega^2 h \sin \omega t \\ \dot{z}\ddot{x} - \ddot{z}\dot{x} = -a\omega^2 h \cos \omega t \\ \dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y} = a^2\omega^3 \end{array}$$

valem (19)! $Q = a^2\omega^4 h^2 + a^4\omega^6$
 $= a^2\omega^4(h^2 + a^2\omega^2)$
 $= a^2\omega^4 c^2, \quad c^2 = h^2 + a^2\omega^2$
 $\sqrt{Q} = a\omega^2 c$

$$\begin{array}{lll} \dot{s}^2 = a^2\omega^2 + h^2 = c^2 & l_3 = \frac{h}{c} \sin \omega t & \dot{l}_3 = \frac{h\omega}{c} \cos \omega t \\ s = c & m_3 = -\frac{h}{c} \cos \omega t & \dot{m}_3 = \frac{h\omega}{c} \sin \omega t \\ & n_3 = \frac{a\omega}{c} & \dot{n}_3 = 0 \end{array}$$

$$\sqrt{\dot{l}_3^2 + \dot{m}_3^2 + \dot{n}_3^2} = \frac{h\omega}{c}$$

$$\begin{array}{l} \kappa_2 = \frac{1}{s} \frac{h\omega}{c} = \frac{h\omega}{c^2} = \frac{h\omega}{h^2 + a^2\omega^2} \quad \dots \dots \dots \text{valem (17)!} \\ Q_2 = \frac{h^2 + a^2\omega^2}{h\omega} = \frac{h}{\omega} + \frac{\omega}{h} a^2 \end{array}$$

Kruvijoone vääne on järelikult konstantne. Erijuhul $h = 0$ vääne kaob, mis on arusaadav ka sellest, et krurvijoon kõduneb siis ringiks. Teise erijuhu, kus vääne osutub nulliks, annab $h = \infty$; jällegi on see arusaadav, sest krurvijoon kõduneb siis sirgeks jooneks, — silindri moodustajaks.

Lugeja veendugu omal jõul, et

$$Q_2 = \frac{2a}{\sin 2\alpha},$$

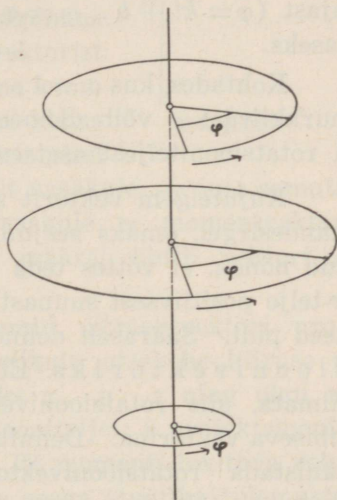
kus α tähendab krüvijoone tõusu, s. o. nurka, mille tema puutuja moodustab x - y -tasapinnaga. On $\alpha = 45^\circ$, siis väänderaadius on minimaalne, nimelt võrdne krüvijoone läbimõõduga.

§ 7. Kindla keha rotatsioon.

Seni kõnelesime üheainsa materiaalse punkti liikumisest; nüüd asume kindla keha liikumise uurimisele.

Kindla keha võimalikkudest liikumisviisidest omab erilist tähendust keha rotatsioon teatava telje ümber. Sel puhul keha üksikute punktide kiirused ja kiirendused võivad olla omavahel vägagi erinevad, kuid iga üksiku punkti trajektooriks on alati ring keskpunktiga rotatsiooniteljel, kusjuures selle ringi tasapind on teljega risti ja ringi raadiuseks a on punkti kaugus rotatsiooniteljest. Ühtlasi on tseentrinurgad φ (13. joonis), mille võrra punktid oma trajektooridel teatava ajavahemiku vältel on nihkunud, kindla keha kõikides kohtades samad. Jälgides selle nurga φ sõltuvust ajast t , saame selle tõttu üheselt määrata selle keha mistahes punkti asukoha ajavahemiku lõpul, kui teada olid asukoht ajavahemiku alguses ja rotatsiooni suund. Võib öelda, et rotatsiooni puhul keha üksikpunktide liikumisel on üksainus „vabadusaste“, mida iseloomustab parameetri φ väärtus antud hetkel.

Olgu $d\varphi$ nurga φ kasv lõpmata väikeses ajavahemikus dt . Punkt, mille kaugus teljest on a , on siis oma trajektoorigil, s. t.



13. joonis.

ringil, katnud teekonna ds , kusjuures ringi geomeetriliste omaduste põhjal

$$ds = a d\varphi.$$

Jagades dt -ga järeldame siit

$$\dot{s} = a\dot{\varphi} \quad \text{ehk} \quad v = a\dot{\varphi}.$$

$\dot{\varphi}$ on keha kõikides punktides sama, sest $d\varphi$ ja dt on samad. Skalaari $\dot{\varphi}$ kutsutakse rotatsiooni nurkkiiruseks ja tähistatakse tavaliselt sümboliga ω . Seega „lineaarse kiiruse“ v arvutamine nurkkiiruse ω kaudu toimub valemite

$$v = a\omega, \quad \omega = \dot{\varphi} \quad (21)$$

alusel.

On ω konstantne, mis eeldab, et φ oleks lineaarne funktsioon ajast ($\varphi = kt + b$, $\omega = \dot{\varphi} = k$), siis rotatsiooni kutsutakse ühtlaseks.

Kohtades, kus $a = 1$, järgneb valemist (21) $v = \omega$. Seetõttu nurkkiirust ω võib defineerida kui kiirust, mida omab kaugusel 1 rotatsiooniteljest asetsev keha mingi punkt.

Kujutelgem vektorit \mathbf{w} , mis asetseks rotatsiooniteljel kui kandesirgel, omaks seejuures suurust ω ja oleks ühtlasi suunatud nõnda, et võttes teda z -teljeks, rotatsioon paistaks toimuvat x -telje positiivsest suunast y -telje positiivse suuna poole lühemat teed pidi. Sääraselt defineeritud vektorit \mathbf{w} kutsutakse rotatsioonivektoriks. Et rakenduspunkt on definitsioonis mainimata, siis rotatsioonivektorit tuleb käsitleda rotatsiooniteljel libiseva vektorina. Definitsiooni kohaselt $|\mathbf{w}| = \omega$. On kombeks tähistada rotatsioonivektori projektsioone koordinaattelgedele vastavalt tähtedega p , q , r . Sel puhul järelikult

$$\omega = |\mathbf{w}| = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2} \quad (22)$$

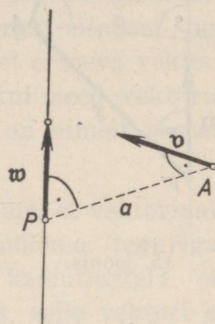
ning $\mathbf{w} : (p, q, r)$ suunakoosinusteks on arvud $\frac{p}{\omega}$, $\frac{q}{\omega}$, $\frac{r}{\omega}$.

Libiseva vektorina \mathbf{w} on analoogiline staatikast tuntud tungivektoriga, milline ju samuti oli käsitletud libisevana oma kandesirgel. Kiirusvektor \mathbf{v} on kinemaatikas seotud punkti külge —

staatikas oli analoogiliselt seotud punkti külge tungist tingitud momentvektor vastavas punktis. See analoogia

rotatsioonivektor \sim tungivektor
 kiirusvektor \sim momentvektor

küünib, nagu selgub, veel palju sügavamale, lubades rida staatikast tuntud tulemusi otseselt üle kanda kinemaatikale. Selles veendumiseks tuleb vaid tähele panna, et rotatsioonist ω tingitud kiirus v kindla keha mistahes kohas A vormiliselt pole midagi muud, kui vektori ω moment kohas A . Tõepoolest (14. joonis), olgu a punkti A kaugus rotatsiooniteljest, s. t. vektori ω kandesirgest. Siis 1) suurus v (21) kohaselt on $a\omega = a|\omega|$, — just niisama suur peaks aga ka olema ω momentvektor kohas A ; 2) v on puutujaks ringil raadiusega a ristasapinnas vektorile ω , s. t. v on risti A -st ja vektorist ω läbimineva tasapinnaga, — just sama omadus peab aga ka olema ω momentvektoril kohas A ; 3) parempoolse teljestiku kasutamisel v peab ω -st vaadatuna näitama paremalt vasakule, — just samuti peab aga siis näitama paremalt vasakule ω momentvektor kohas A . Seega vormiliselt v täiel määral ühtib vektori ω momentvektoriga kohas A .



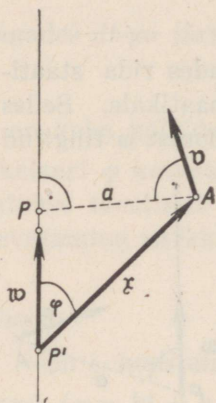
14. joonis.

Rakendades staatikast tuntud valemid momentvektori projektsioonide arvutamiseks, saame järelikult otsekohe kiiruse v projektsioone. Olgu A koordinaatideks x, y, z ning olgu ω rakendatud kohas (x_0, y_0, z_0) rotatsiooniteljel; v projektsioonideks kasutame sümboleid v_x, v_y, v_z . Et momenti tekitava vektori ω projektsioonid on p, q, r , siis seega staatika tulemuste põhjal:

$$\begin{aligned} v_x &= (y_0 r - z_0 q) - (y r - z q) = q(z - z_0) - r(y - y_0) \\ v_y &= (z_0 p - x_0 r) - (z p - x r) = r(x - x_0) - p(z - z_0) \\ v_z &= (x_0 q - y_0 q) - (x q - y p) = p(y - y_0) - q(x - x_0). \end{aligned} \quad (23)$$

Vektorsümboolikas saab neid valemeid (23) kiirusvektori v määramiseks kirjutada lühemalt. Olgu ω rakenduskoht P'

ning olgu vektori $\vec{P'A}$ lühendatud tähiseks valitud \mathfrak{r} (15. joonis). Selle vektori \mathfrak{r} projektsioonideks on siis, nagu kerge näha, parajasti suurused $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$. Valemid (23) näitavad, et otsitava vektori \mathfrak{v} projektsioonid v_x , v_y , v_z on moodustatud vektori \mathfrak{w} ja vektori \mathfrak{r} projektsioonidest eeskirja kohaselt, mis vastab nn. „vektoriaalsele korrutamisele“. See eeskiri kõlab üldjuhul järgmiselt:



15. joonis.

Olgu $\mathfrak{a}_1 : (X_1, Y_1, Z_1)$ ja $\mathfrak{a}_2 : (X_2, Y_2, Z_2)$ kaks antud meelevaldset vektorit; nende vektoriaalse korrutise $\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2$ all mõistetakse siis vektorit, mille projektsioonideks on $Y_1Z_2 - Z_1Y_2$, $Z_1X_2 - X_1Z_2$, $X_1Y_2 - Y_1X_2$. Kõrvutades seda eeskirja valemitega (23), näeme, et

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{w} \times \mathfrak{r}. \quad (24)$$

Olgu kohe tähendatud, et vastandina skalaarsele korrutamisele, vektoriaalse korrutamise puhul tegurite järjekord osutub oluliseks. Tegurite järjekorra muutumisel muutuvad nimelt tulemusena saadud projektsioonid märkide poolest kõik vastupidisteks, s. t. nad määravad tulemusena vektori, mis suuruselt on küll endine, kuid suunalt just vastupidine. Valemina võib seda asjaolu kirjutada kujul

$$\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2 = - (\mathfrak{a}_2 \times \mathfrak{a}_1). \quad (25)$$

Teine oluline erinevus skalaarse ja vektoriaalse vektorkorrutise vahel seisab muidugi selles, et esimese tulemuseks on s k a l a a r, teise tulemuseks aga v e k t o r.

Vektoriaalse korrutamiseeskirja definitsioonis pole midagi öeldud tegurite ja tulemuse rakenduspunktide kohta — need jäävad seega üsna vabaks. Võib näiteks nii tegureid kui ka tulemust kujutella rakendatuna ühes ja samas kohas O ; nii tulebki sageli toimida näiteks elektrodünaamiliste küsimuste käsitlemisel, kus vektoriaalsed korrutised mängivad tähtsat osa. Ainult

juhul, kus korrutiseks osutub kiirus (momentvektor), seda korrutisvektorit tuleb muidugi üldiselt kujutella rakendatuna vastavas kohas A .

Silmas pidades (21), leiame 15. joonise abil

$$|\mathbf{v}| = \omega a = |\mathbf{w}| a = |\mathbf{w}| \cdot |\mathbf{r}| \cdot \sin \varphi,$$

kus φ tähendab nurka \mathbf{w} ja \mathbf{r} vahel. See näitab, et ka igal üldjuhul vektoriaalset korrutist kujutava vektori suurus on korrutatavate vektorite suuruste korrutis vektoritevahelise nurga siinuse suurusega. Sellest omakorda järgneb, et kahe nullist erineva vektori vektoriaalne korrutis kaob siis ja ainult siis, kui need vektorid on omavahel paralleelsed, — siis ja ainult siis on nimelt vastav siinus võrdne nulliga.

Et \mathbf{v} on risti vektoritega \mathbf{w} ja \mathbf{r} , siis järeldame, et vektoriaalset korrutist kujutav vektor on alati risti mõlema teguriga. Samas võiksime veenduda ka analüütilistel kaalutlustel: on $\mathbf{a}_3: (X_3, Y_3, Z_3)$ mistahes kolmas vektor, siis selle vektori \mathbf{a}_3 skalaarne korrutis kahe esimese vektoriaalse korrutisega on

$$X_3(Y_1Z_2 - Z_1Y_2) + Y_3(Z_1X_2 - X_1Z_2) + Z_3(X_1Y_2 - Y_1X_2),$$

mis pole midagi muud, kui determinandi

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}$$

arendus kolmanda rea järgi, järelikult võrdne selle determinandi arvulise väärtusega. Vektorsümboolikas kasutatakse säärase determinandi lühendatud tähistamiseks sageli kirjutusviisi $(\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3)$. On nüüd \mathbf{a}_3 sama, mis \mathbf{a}_1 , või sama, mis \mathbf{a}_2 , siis determinandis esineb kaks võrdset rida, mille tagajärjel determinandi väärtuseks osutub null, — see on aga just ortogonaalsuse tingimus: skalaarne korrutis kaob. Järelikult tõepoolest vektoriaalne korrutis on iga oma teguriga risti.

§ 8. Translatsioon ja kruviliikumine.

Kiiruste käsitlemine vektoritena võimaldab samas punktis A rakendatud mitmesuguste kiirusvektorite liitmist resulteeruvaks kiirusvektoriks, või ka ümberpöördult, kiiruse asendamist samas punktis rakendatud komponentkiirustega.

Kiirusvektorite liitmise teel avaneb võimalus uurida kindla keha säärast liikumist, mis tekib mitme rotatsiooni $\omega_1, \omega_2, \dots$ koosmõjul. Et üksikust rotatsioonist ω_p keha mingisuguses kohas A tekitatud kiirus v_p , osutus libiseva vektori ω_p momendiks kohas A , siis nende kiiruste liitmisele vastab resultantkiirusena ω vektorkompleksi $\omega_1, \omega_2, \dots$ resulteeruv moment kohas A .

Staatikast on teada, et libisevate vektorite kompleks on asendatav ainuüksi kahest vektorist koosneva kompleksiga, nõnda et momendid kõikides kohtades jäävad endisteks. Seda tulemust kinemaatika keelde tõlkides järeldame, et mistahes rotatsioonide kompleksi koosmõju keha punktide kiirustele peab olema alati asendatav kahe sobivalt määratud rotatsiooni koosmõjuga.

Erijuhuna on mõeldav, et need kaks rotatsiooni moodustavad vektoripaari, s. t. et need rotatsioonivektorid on võrdsed, kuid vastassuunalised, langedes erinevatele (paralleelsetele) kandesirgetele. Jällegi staatikast on teada, et säärase vektoripaari moment ruumi igas kohas osutub üheks ja samaks. Kinemaatikas see tähendab, et erijuhul, kus antud kaks rotatsiooni moodustavad vektoripaari, kindla keha kõik punktid peavad omama üht ja sama kiirust. Säärast kindla keha liikumist, kus kõigis punktides on rakendatud sama kiirusvektor, kutsutakse keha translatsiooniks. Nagu nägime, translatsiooni saab taandada rotatsioonide koosmõjule.

Et vektoripaaride kompleks taandub alati ühele vektoripaarile, siis mitme translatsiooni koosmõju väljendub jällegi teatavas translatsioonis.

Pöördudes tagasi üldjuhule, kus oli tegemist kehale mõjuva mingi juhusliku rotatsioonide $\omega_1, \omega_2, \dots$ kompleksiga, tuletame meelde, et mistahes libisevatest vektoritest koosnev kompleks on alati taanduv dünaamile, s. o. kolmele vektorile,

milledest kaks moodustavad vektoripaari. Arvesse võttes, et vektoripaar antud juhul vastab translatsioonile, järeldame:

Meelevaldse rotatsioonikompleksi mõju kindlale kehale on alati asendatav ühe translatsiooni ja ühe rotatsiooni koosmõjuga.

Valides dünaami vektorkruvina, s. o. säärasena, et vektoripaari tasapind oleks risti ülejääva kolmanda vektoriga, järeldame veel:

Meelevaldse rotatsioonikompleksi mõju kindlale kehale on alati väljendatav ühe rotatsiooni ja ühe translatsiooni koosmõjuga sääraselt, et mainitud translatsioon kujutab keha libisemist just rotatsioonitelje sihis.

Kui nimelt vektoripaari tasapind on risti kolmanda vektoriga, siis selle vektoripaari moment on tole kolmanda vektoriga paralleelne, s. t. translatsiooni kiirus on paralleelne rotatsioonivektori kandesirgega; säärane translatsioon moodustabki „libisemise rotatsioonitelje sihis“. Roteerudes telje ümber ja ühtlasi libisedes telge pidi, keha liigub nagu kruvi mutris.

Libisevate vektorite üldteoriast on teada, et vektorkruvi puhul paariga risti seisev kolmas vektor langeb vektorkompleksi tsentraalteljele. Kirjeldatud „kruviliikumisel“ rotatsiooniteljeks on seega kompleksi w_1 , w_2 , ... tsentraaltelj; kinemaatikas kutsutakse seda tsentraaltelge liikumise hetkeliseks kruviteljeks, — hetkeliseks sellepärast, et aja t muutusel kompleks ise, ja seetõttu ka tsentraaltelj, võib muutuda.

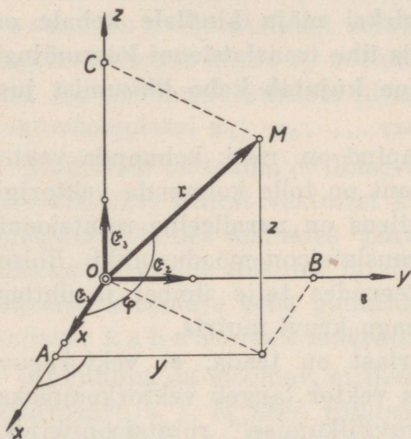
Hiljemini näitame, käsitledes probleemi analüütiliselt, et igal üksikul hetkel t osutub võimalikuks kindla keha kõige üldisemat liikumist vaadelda hetkelise kruviliikumisenä. See tähendaks siis seda, et ka kõige üldisemal mõeldaval juhul keha ikkagi igal üksikul hetkel liigub nagu teatavate rotatsioonide koosmõjul. Rotatsioon moodustab seega kõige üldisema liikumise põhi-elementi: kindla keha igasugune liikumine koosneb hetkelistest rotatsioonidest.

Lugeja tähelepanu olgu veel juhitud staatikast tuntud momentide sümmeetrilisele jaotusele ümber tsentraaltelje: täpselt samasuguselt on jaotatud liikuva keha üksikpunktide hetkelised kiirused ümber hetkelise kruvitelje.

§ 9. Vektorsümboolika põhiseadusi.

Kindla keha üldisima liikumise analüütilisel uurimisel on õige hõlpus kasutada vektoriaalset kirjutusviisi. Seepärast on otstarbekohane nüüd lühidalt peatuda vektorsümboolika üldistel küsimustel ja fikseerida juhiseid vektorsümboolitega töötamiseks.

Olgu $\vec{r} = \vec{OM}$ punkti M kohavektor (16. joonis). \vec{r} projektsoonideks, s. t. M koordinaatideks on arvud (skalaarid) x, y, z .



16. joonis.

Paigutame kolmele koordinaatteljele vastavalt kolm ühikvektorit $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \mathfrak{E}_3$, millele ühiseks rakenduskohaks võib olla koordinaatide alguspunkt O . Ilmseti on \mathfrak{E}_1 projektsoonideks $1, 0, 0$, \mathfrak{E}_2 projektsoonideks $0, 1, 0$ ja \mathfrak{E}_3 projektsoonideks $0, 0, 1$.

Vektorina \vec{r} on kolme komponentvektori $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$

summa. Seejuures on \vec{OA} vektori \mathfrak{E}_1 x -kordne, mida kirjutatakse kujul $\vec{OA} = x\mathfrak{E}_1$; analoogiliselt on $\vec{OB} = y\mathfrak{E}_2$ ning $\vec{OC} = z\mathfrak{E}_3$. Vektorvõrrand

$$\vec{r} = x\mathfrak{E}_1 + y\mathfrak{E}_2 + z\mathfrak{E}_3 \quad (25)$$

väljendabki seega mõtet, et kohavektor on mainitud komponentvektorite summa.

Arvu x võib seletada ka vektorite \vec{r} ja \mathfrak{E}_1 skalaarse korrutisena, sest

$$x = |\vec{r}| \cos \varphi = |\vec{r}| \cdot 1 \cdot \cos \varphi = |\vec{r}| \cdot |\mathfrak{E}_1| \cdot \cos \varphi = (\vec{r}\mathfrak{E}_1).$$

Analoogiliselt on $y = (\vec{r}\mathfrak{E}_2)$, $z = (\vec{r}\mathfrak{E}_3)$. Sel alusel tohib (25) asemel ka kirjutada

$$\vec{r} = (\vec{r}\mathfrak{E}_1)\mathfrak{E}_1 + (\vec{r}\mathfrak{E}_2)\mathfrak{E}_2 + (\vec{r}\mathfrak{E}_3)\mathfrak{E}_3. \quad (26)$$

Kirjutuses (26) rakenduspunkt ei mängi mingit osa; ta on selle tõttu niivõrra üldine, et r temas võib tähendada ükskõik mis-sugust vektorit, mitte tingimata vaid kohavektorit. Peeta-gu silmas, et sulgavaldised tähendavad arve — nimelt skalaar-seid korrutisi —, kuid üksikud liidetavad valemis (26) tähenda-vad juba vektoreid — nimelt ühikvektoreid korrutatutena skalaaridega.

Ühikvektorite kolmikuga $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \mathfrak{E}_3$ koordinaattelgede suu-nad on määratud; teljestik on määratud täielikult, kui on antud ühtlasi veel alguspunkt O . Neid ühikvektoreid kutsutakse ka koordinaadistiku „põhivektoreiks“.

Põhivektorite vektoriaalseid korrutisi paarikaupa määravad valemid

$$\mathfrak{E}_1 \times \mathfrak{E}_2 = \mathfrak{E}_3, \quad \mathfrak{E}_2 \times \mathfrak{E}_3 = \mathfrak{E}_1, \quad \mathfrak{E}_3 \times \mathfrak{E}_1 = \mathfrak{E}_2, \quad (27)$$

milles lugeja võib ise kerge vaevaga veenduda, arvutades vek-toriaalse korrutise projektsioone § 7 eeskirja kohaselt. Tegurite ümberpaigutusel muutuvad märgid, tähendab,

$$\mathfrak{E}_2 \times \mathfrak{E}_1 = -\mathfrak{E}_3, \quad \mathfrak{E}_3 \times \mathfrak{E}_2 = -\mathfrak{E}_1, \quad \mathfrak{E}_1 \times \mathfrak{E}_3 = -\mathfrak{E}_2.$$

Kui mistahes vektorite puhul kombineeritult esineb korru-tamise ja liitmise tehe, siis on alati lubatav rakendada nn. distri-butiivset seadust, s. t.

$$\begin{aligned} (a, b + c) &= (ab) + (ac) \\ (a + b, c) &= (ac) + (bc) \\ a \times (b + c) &= (a \times b) + (a \times c) \\ (a + b) \times c &= (a \times c) + (b \times c). \end{aligned} \quad (28)$$

Lugeja veendugu selles ise, tehes vastavaid arvutusi vekto-rite projektsioonidega. Samuti jäägu lugeja hooleks kontrollida, et skalaarse c puhul alati

$$\begin{aligned} c(a + b) &= ca + cb \\ c(ab) &= (ca, b) = (a, cb) \\ c(a \times b) &= ca \times b = a \times cb. \end{aligned} \quad (29)$$

Kõik need valemid selgitavad, kuidas on lubatud vektor-võrrandites toimetada teisendusi. Nagu näha, reeglid sarnane-

vad tavaliste arvutuseeskirjadega, kuid selle olulise vahega, et vektoriaalsete korrutiste puhul tegurite järjekorra muutumine kutsub esile märgi muutuse tulemuses. Skalaarse korrutamise puhul tegurite järjekorra muutumine on lubatud, samuti on lubatud liidetavate järjekorra muutumine summade puhul.

Korrutamine esineb vektorarvutuses kolmel põhimõtteliselt erineval kujul:

- 1) vektori \mathbf{a} korrutamise näol skalaariga c , — tulemus $c\mathbf{a}$ on vektor;
- 2) kahe vektori \mathbf{a} ja \mathbf{b} skalaarse korrutamise näol, — tulemus $(\mathbf{a}\mathbf{b})$ on skalaar;
- 3) kahe vektori \mathbf{a} ja \mathbf{b} vektoriaalse korrutamise näol, — tulemus $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ on vektor.

Iga kord võib tehete puhul vektoritega või skalaaridega valitseda olukord, et andmed ja tulemused sõltuvad ajast t . Sellest võib järgneda vajadus toimetada ka diferentsimistehet t järgi. Nagu § 3 valemiga (7) selgitasime, seejuures vektorisumma diferentsimine käib sama seaduse järgi kui tavalise skalaarse summa diferentsiminegi. Kuid ka korrutiste diferentsimise seadus on täiesti analoogiline tavalise korrutiste diferentsimise seadustega. Nimelt:

$$\begin{aligned} \text{kui } \dot{\mathbf{c}} &= \dot{c}\mathbf{a}, & \text{siis } \dot{\mathbf{c}} &= \dot{c}\mathbf{a} + c\dot{\mathbf{a}} \\ \text{kui } \dot{\mathbf{c}} &= (\dot{\mathbf{a}}\mathbf{b}), & \text{siis } \dot{\mathbf{c}} &= (\dot{\mathbf{a}}\mathbf{b}) + (\mathbf{a}\dot{\mathbf{b}}) \\ \text{kui } \dot{\mathbf{c}} &= \mathbf{a} \times \dot{\mathbf{b}}, & \text{siis } \dot{\mathbf{c}} &= (\dot{\mathbf{a}} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{a} \times \dot{\mathbf{b}}). \end{aligned} \quad (30)$$

Selles on jällegi kerge veenduda, moodustades vastavaid projektioone. Olgu näiteks $\mathbf{a} : (X_1, Y_1, Z_1)$, $\mathbf{b} : (X_2, Y_2, Z_2)$, $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$, tähendab, $\mathbf{c} : (Y_1Z_2 - Z_1Y_2, Z_1X_2 - X_1Z_2, X_1Y_2 - Y_1X_2)$. Siis

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{a}} \times \mathbf{b} & \text{ on vektor } (\dot{Y}_1Z_2 - \dot{Z}_1Y_2, \dot{Z}_1X_2 - \dot{X}_1Z_2, \dot{X}_1Y_2 - \dot{Y}_1X_2) \\ \mathbf{a} \times \dot{\mathbf{b}} & \text{ on vektor } (Y_1\dot{Z}_2 - Z_1\dot{Y}_2, Z_1\dot{X}_2 - X_1\dot{Z}_2, X_1\dot{Y}_2 - Y_1\dot{X}_2). \end{aligned}$$

Ühtlasi \dot{c} on vektor

$$(\dot{Y}_1 Z_2 - \dot{Z}_1 Y_2 + Y_1 \dot{Z}_2 - Z_1 \dot{Y}_2, \dot{Z}_1 X_2 - \dot{X}_1 Z_2 + Z_1 \dot{X}_2 - X_1 \dot{Z}_2, \\ X_1 Y_2 - Y_1 X_2 + X_1 \dot{Y}_2 - Y_1 \dot{X}_2).$$

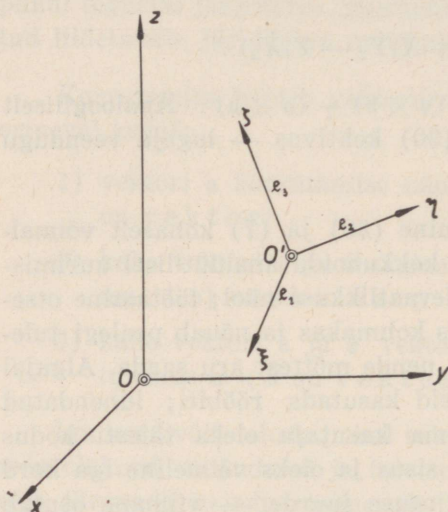
Võrdlus näitabki kohe, et $\dot{c} = (\dot{a} \times \mathfrak{b}) + (\mathfrak{a} \times \dot{\mathfrak{b}})$. Analoogiliselt selgub kahe esimese eeskirja (30) kehtivus — lugeja veendugu selles ise.

Vektorvalemite diferentsimine (30) ja (7) kohaselt võimaldab mitte üksnes ruumi ja aja kokkuhoidu analüütilisel uurimistööl, vaid ka võitu tulemuste ülevaatlikkuse näol; töötamine otsestelt projektsioonidega on kaunis kohmakas ja nõuab pealegi tulemuste tülikat dešifreerimist, et nende mõttest aru saada. Algajal tuleks siiski mõlemaid meetodeid kasutada rööbiti; lühendatud vektorkirjutusviis eeldab, et tema kasutaja oleks täiesti kodus tarvitatud lühendite mõttelises sisus ja oleks võimeline iga kord tagasi minema projektsioonkirjutuse juurde, — viimane osutub möödapääsematuks niipea kui tahetakse saada numbrilisi tulemusi.

§ 10. Kindla keha üldisim liikumine.

Vaatleme nüüd kindlat keha, mis liigub mingisugusel üsna meelevaldsel viisil. Selle keha jälgimist võimaldame, fikseerides kehaga lahutamatult seotud mingi punkti O' ja peale selle veel kolm, kehaga samuti lahutamatult seotud ühikvektorit e_1, e_2, e_3 , ühise algusega O' ; need ühikvektorid olgu omavahel paarikaupa risti ning numeratsioon nii valitud, et nende ühikvektoritega määratud teljestiku tüüp vastaks selle $x-y-z$ -teljestiku tüübile, mille suhtes keha liikumist määratakse, s. t. teljestikud olgu kas mõlemad parempoolsed, või aga mõlemad vasakpoolsed. Ütlus „kehaga lahutamatult seotud“ tähendab, et vastavad objektid teevad keha kõiki liikumisi kaasa. Keha asend „paigalseisva“ $x-y-z$ -teljestiku suhtes on määratud, niipea kui teada on O' asend

ja ühikvektorite e_1, e_2, e_3 suunad (s. t. suunakoosinused) x - y - z -telgede suhtes antud hetkel t . Ühikvektoreid e_1, e_2, e_3 kutsutakse „liikuvateks põhivektoriteks“, O' on „liikuv alguspunkt“.



17. joonis.

Liikuvate põhivektoritega määratud „liikuvat teljestikku“ ristime ξ - η - ζ -teljestikku (17. joonis). Mistahes punktil M on siis koordinaadid x, y, z paigalseisvate telgede suhtes ja koordinaadid ξ, η, ζ liikuvate telgede suhtes.

Liikuvate põhivektorite projektsioonid paigalseisvatele telgedele on aja t funktsioonid, sest keha liigub koos nende põhivektoritega.

Nagu selgus § 7, võib vektoriaalset korrutist tõlgendada momentvektorina;

see tõlgendus on täiesti sõltumata tarvitatud teljestikust. (27) põhjal see näitab, et alati

$$e_1 \times e_2 = e_3, \quad e_2 \times e_3 = e_1, \quad e_3 \times e_1 = e_2. \quad (31)$$

Tõepoolest, ühes asendis, nimelt siis, kui liikuvad põhivektorid on vastavalt paralleelsed paigalseisvate põhivektoritega e_1, e_2, e_3 , on (31) kindlasti õige; et aga vektoriaalne korrutis momendina on sõltumata teljestikust, mille suhtes vektoreid vaadeldakse, siis (31) peab olema igas asendis, s. t. igal hetkel t õige. Veel teisiti võib selles veenduda, § 7 kohaselt silmas pidades, et näiteks $e_1 \times e_2$ kujutab vektorit, mille suurus peab olema $|e_1| \cdot |e_2| \cdot \sin 90^\circ = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$, mis peab olema risti nii vektoriga e_1 kui ka vektoriga e_2 , ja suunatud nõnda, et ta vastaks y -suunale, kui e_1 vastab z -suunale ja e_2 vastab x -suunale, — kõiki neid tingimusi rahuldab aga alati just vektor e_3 , seega alati $e_1 \times e_2 = e_3$.

Liikuvate põhivektorite vastastikune ristseis väljendub juba valemis (31). Sama ristseisu nõuet võib aga väljendada sellega, et skalaarsed korrutised peavad olema nullid. Võtame lisaks veel arvesse, et mistahes vektori skalaarne korrutis iseendaga annab selle vektori suuruse ruudu, seega ühikvektori puhul arvu $+1$. Siis võime kirjutada

$$\begin{aligned} (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2) &= 0, & (\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3) &= 0, & (\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1) &= 0 \\ (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1) &= 1, & (\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2) &= 1, & (\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3) &= 1. \end{aligned} \quad (32)$$

Siin esimeses reas seisvate seoste diferentsimine annab

$$\begin{aligned} (\dot{\mathbf{e}}_1\mathbf{e}_2) + (\mathbf{e}_1\dot{\mathbf{e}}_2) &= 0, & (\dot{\mathbf{e}}_1\dot{\mathbf{e}}_2) &= -(\mathbf{e}_1\dot{\mathbf{e}}_2) \\ (\dot{\mathbf{e}}_2\mathbf{e}_3) + (\mathbf{e}_2\dot{\mathbf{e}}_3) &= 0, & (\dot{\mathbf{e}}_2\dot{\mathbf{e}}_3) &= -(\mathbf{e}_2\dot{\mathbf{e}}_3) \\ (\dot{\mathbf{e}}_3\mathbf{e}_1) + (\mathbf{e}_3\dot{\mathbf{e}}_1) &= 0, & (\dot{\mathbf{e}}_3\dot{\mathbf{e}}_1) &= -(\mathbf{e}_3\dot{\mathbf{e}}_1). \end{aligned} \quad (33)$$

Diferentsides valemid (32) teises reas, leiame

$$(\dot{\mathbf{e}}_1\mathbf{e}_1) = 0, \quad (\dot{\mathbf{e}}_2\mathbf{e}_2) = 0, \quad (\dot{\mathbf{e}}_3\mathbf{e}_3) = 0, \quad (34)$$

sest näiteks korrutise $(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1)$ tuletis on $(\dot{\mathbf{e}}_1\mathbf{e}_1) + (\mathbf{e}_1\dot{\mathbf{e}}_1)$ ehk $2(\dot{\mathbf{e}}_1\mathbf{e}_1)$; teiselt poolt tuleb arvu 1 tuletis, s. o. null; võrrutamise näitabki, et $(\dot{\mathbf{e}}_1\mathbf{e}_1)$ peab olema null.

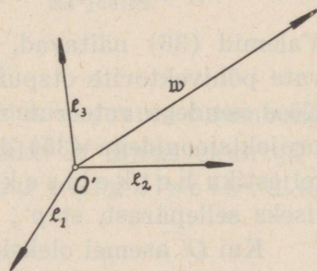
Tähistame lühenduseks valemis (33) esinevaid skalaarseid korrutisi tähtede p' , q' , r' abil nõnda, et

$$p' = (\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3), \quad q' = (\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1), \quad r' = (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2). \quad (35)$$

Moodustame ühe vektori \mathbf{w} , mille projektsioonideks liikuvatele telgedele oleksid vastavalt p' , q' , r' ; see vektor \mathbf{w} olgu rakendatud liikuva teljestiku alguskohas O' . Nagu peatselt selgub, on sellel vektoril \mathbf{w} põhjanev tähendus keha liikumise kirjeldamisel.

Kui O' lugeda hetkeks paigalseisvaks, siis $\dot{\mathbf{e}}_1$ näitaks vektori $\mathbf{e}_1 = \overrightarrow{O'E}$ (18. joonis) otspunkti E kiirust. (26) kohaselt võime aga kirjutada:

$$\dot{\mathbf{e}}_1 = (\dot{\mathbf{e}}_1\mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 + (\dot{\mathbf{e}}_1\mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2 + (\dot{\mathbf{e}}_1\mathbf{e}_3)\mathbf{e}_3,$$



18. joonis.

mis (33), (34) ja (35) põhjal taandub kujuks

$$\dot{\mathbf{e}}_1 = r' \mathbf{e}_2 - q' \mathbf{e}_3.$$

Teiselt poolt on (25) põhjal

$$\mathbf{w} = p' \mathbf{e}_1 + q' \mathbf{e}_2 + r' \mathbf{e}_3,$$

ning seetõttu

$$\begin{aligned} \mathbf{w} \times \mathbf{e}_1 &= (p' \mathbf{e}_1 + q' \mathbf{e}_2 + r' \mathbf{e}_3) \times \mathbf{e}_1 \\ &= (p' \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_1) + (q' \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1) + (r' \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1) \\ &= p' (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_1) + q' (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1) + r' (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1) \\ &= -q' \mathbf{e}_3 + r' \mathbf{e}_2 \\ &= \mathbf{e}_1. \end{aligned}$$

$(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_1)$ on nimelt null selle tõttu, et vektor on endaga paralleelne, peale selle on $(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1) = -\mathbf{e}_3$ ja $(\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_2$ (31) tõttu.

Ilmesti asi ei saa muutuda, kui $\dot{\mathbf{e}}_1$ asemel vaadelda \mathbf{e}_2 või \mathbf{e}_3 . Järelikult:

$$\dot{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{w} \times \mathbf{e}_1, \quad \dot{\mathbf{e}}_2 = \mathbf{w} \times \mathbf{e}_2, \quad \dot{\mathbf{e}}_3 = \mathbf{w} \times \mathbf{e}_3. \quad (36)$$

Valemid (36) näitavad, et paigalseisvaks loetud O' puhul liikuvate põhivektorite otspunktid liiguvad nagu rotatsiooni \mathbf{w} mõjul. Koos nendega roteerub muidugi kogu ξ - η - ζ -teljestik. Sel alusel projektsioonidega (35) defineeritud vektorit \mathbf{w} kutsutakse liikuva teljestiku hetkeliseks rotatsioonivektoriks, hetkeliseks sellepärast, et p' , q' , r' võivad sõltuda ajast t .

Kui O' asemel oleksime fikseerinud mõne teise punkti liikuva teljestiku alguspunktina, siis ilmesti seal oleksime võinud rakedada alati \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \mathbf{e}_3 paralleelselt endistega, mistõttu (35) põhjal arvutatud p' , q' , r' oleksid pidanud andma endisi väärtusi. See kaalutus näitab, et rotatsioonivektor \mathbf{w} peab osutama sõltumatuks O' valikust.

Olgu nüüd M liikuva kindla keha mingi meelevaldne kindel materiaalne punkt (19. joonis). Vastavalt kahele teljestikule võib M puhul kohavektorina vaadelda kas $\vec{OM} = \mathbf{r}$ või aga $\vec{O'M} = \mathbf{r}'$. Viimase \mathbf{r}' komponentideks liikuvate telgede suunda-

des on vektorid $\xi e_1, \eta e_2, \zeta e_3$, kus ξ, η, ζ tähendavad M koordinaate liikuvast teljestikus. Et nii M kui ka liikuv teljestik on lahutamatu seotud liikuva kehaga, tehes kõiki keha liikumisi koos kaasa, siis ξ, η, ζ on konstandid, tähendab, nende suuruste tuletised aja t suhtes on nullid. Et r' on oma komponentide summa, siis järelikult

$$r' = \xi e_1 + \eta e_2 + \zeta e_3.$$

Tähistagem veel liikuva koordinaatide alguse O' kohavektori paigalseisva alguse

O suhtes, s. o. vektori $\vec{OO'}$ tähega r_0 . Nagu joonis näitab, on r vektorite r_0 ja r' summa, teiste sõnadega,

$$r = r_0 + \xi e_1 + \eta e_2 + \zeta e_3.$$

Diferentsime seda seost t järgi, tähistades seejuures r sümboliga v ja r_0 sümboliga v_0 . Ilmseti v on punkti M kiirusvektor ja v_0 punkti O' kiirusvektor, — mõlemal juhul paigalseisva teljestiku suhtes vaadatuna. Saame:

$$v = v_0 + \xi e_1 + \eta e_2 + \zeta e_3.$$

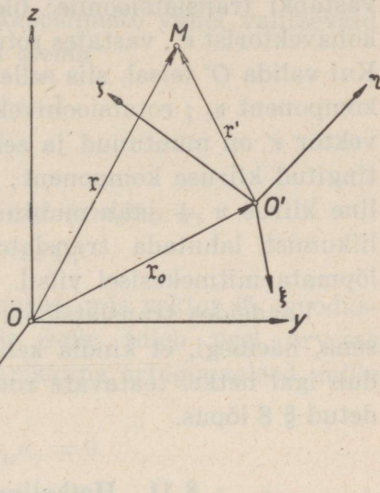
Rakendades siin veel seosed (36), järeldame edasi:

$$\begin{aligned} v &= v_0 + \xi(\omega \times e_1) + \eta(\omega \times e_2) + \zeta(\omega \times e_3) \\ &= v_0 + (\omega \times \xi e_1) + (\omega \times \eta e_2) + (\omega \times \zeta e_3) \\ &= v_0 + [\omega \times (\xi e_1 + \eta e_2 + \zeta e_3)], \end{aligned}$$

seega

$$v = v_0 + (\omega \times r'). \quad (37)$$

Et siin $\omega \times r'$ tähendab kiirust, mille M omandaks ainuüksi rotatsiooni ω tõttu, siis saadud tulemus tõestab lause:



19. joonis.

Üldisimal juhul kindel keha liigub üksikhetkel ikka teatava translatsiooni ja teatava rotatsiooni koosmõjul.

Komponent v_0 on nimelt keha kõikidel punktidel ühine, mis vastabki translatsioonile; ülejääv komponent $\omega \times r'$ sõltub M kohavektorist r' , vastates rotatsioonile ω ümber telje, mis läbib O' . Kui valida O' teisel, siis selle tagajärjel muutub ka translatsiooni komponent v_0 ; rotatsioonivektor ω jääb küll endiseks, kuid kohavektor r' on muutunud ja selle tõttu ka muutunud rotatsioonist tingitud kiiruse komponent; kahe komponendi summa — M tõeline kiirus v — jääb muutumatult endiseks. Nagu näha, saab liikumist lahutada translatoorseks ja rotatoorseks elemendiks lõpmata mitmekesisel viisil.

Vaadeldes translatsiooni omakorda rotatsioonipaari tulemusena, näemegi, et kindla keha üldisim liikumine tõepoolest taandub igal hetkel teatavate rotatsioonide koosmõjule, nagu oli väidetud § 8 lõpus.

§ 11. Hetkeline kruvitelg ja aksoidid.

Liikuvate põhivektorite projektsioonideks paigalseisvatele telgedele on vastavalt ξ, η, ζ suunakoosinused; see selgub projektsiooni põhilauseist, arvesse võttes, et põhivektorite suurused on ühikud. Olgu need vektorile e_ν vastavad suunakoosinused tähistatud l_ν, m_ν, n_ν , — nad on nende nurkade koosinused, mis e_ν moodustab paigalseisvate põhivektoritega $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \mathfrak{E}_3$. Ülevaatliku pildi l_ν, m_ν, n_ν tähendusest annab suunakoosinuste tabel:

	e_1	e_2	e_3
\mathfrak{E}_1	l_1	l_2	l_3
\mathfrak{E}_2	m_1	m_2	m_3
\mathfrak{E}_3	n_1	n_2	n_3

Siin reas μ ja veerus ν seisev arv kujutab nurga $\widehat{\mathfrak{E}_\mu e_\nu}$ koosinust.

Tegeliku arvutustöö puhul on kasulik alati lähtuda just suunakoosinuste tabelist, täites viimast vastavate funktsioonidega.

Neid 9 funktsiooni ei saa valida üsna meelevaldselt, sest tingimata tuleb silmas pidada suunakoosinuste vahel valitsevaid seoseid. Igal juhul peab ju näiteks olema

$$l_v^2 + m_v^2 + n_v^2 = 1.$$

Samuti peab aga ka olema

$$l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = 1, \quad m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 = 1, \\ n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1,$$

sest l_1, l_2, l_3 näiteks on suunakoosinused, mis vektor \mathfrak{E}_1 moodustab liikuvate põhivektoritega. Peale selle tuleb veel arvesse võtta, et vektorid \mathfrak{e} on omavahel paarikaupa ortogonaalsed, mille tõttu peab olema

$$l_\mu l_\nu + m_\mu m_\nu + n_\mu n_\nu = 0$$

iga kord, kui $\mu \neq \nu$. Kuid ka vektorid \mathfrak{E} on omavahel ortogonaalsed ning seepärast

$$l_1 m_1 + l_2 m_2 + l_3 m_3 = 0 \\ m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3 = 0 \\ n_1 l_1 + n_2 l_2 + n_3 l_3 = 0.$$

Kokku on siin loendatud 12 tingimust, mis peavad suunakoosinuste tabelis leidma täitmist, — osa neist järgneb aga loogiliselt juba ülejäänuid. Lähem analüüs, mille juures meie siin ei peatu, selgitab, et sõltumatuid tingimusi 9 suunakoosinuse kohta leidub parajasti 6; et seega 9 suurust on omavahel seotud kuue võrrandiga, siis vabaks jäävad 3 suurust.

Liikuva alguspunkti O' koordinaadid, milliseid tähistame x_0, y_0, z_0 , võivad olla meelevaldsed funktsioonid ajast t . Kokkuvõttes näeme, et liikuva teljestiku asendit, s. t. liikuva keha asendit, määravad 6 parameetrit, nimelt 3 vabaks jäänud suurust suunakoosinuste tabelis ja 3 koordinaati x_0, y_0, z_0 . Nagu öeldakse, üldisimal juhul kindla keha liikumisel on 6 „vabadusastet“.

Valemid (35) kõlavad, projektsioonide kaudu kirjutatuina, järgnevalt:

$$\begin{aligned} p' &= l_2 l_3 + m_2 m_3 + n_2 n_3 \\ q' &= l_3 l_1 + m_3 m_1 + n_3 n_1 \\ r' &= l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2. \end{aligned} \quad (38)$$

p' , q' , r' tähendasid definitsiooni kohaselt hetkelise rotatsiooni-vektori \mathbf{w} projektsioone liikuvatele telgedele. Sama vektori \mathbf{w} projektsioone paigalseisvatele telgedele tähistame p , q , r . § 9 kohaselt \mathbf{w} projektsioon p teljele x peab olema \mathbf{w} ja \mathfrak{E}_1 skalaarne korrutis ($\mathbf{w}\mathfrak{E}_1$); samal viisil $q = (\mathbf{w}\mathfrak{E}_2)$ ja $r = (\mathbf{w}\mathfrak{E}_3)$. Neid skalaarseid korrutisi võib aga arvutada projektsioonide kaudu mistahes teljestikule, näiteks projektsioonide kaudu liikuvatele telgedele. See annaks:

$$\begin{aligned} p &= p'l_1 + q'l_2 + r'l_3 \\ q &= p'm_1 + q'm_2 + r'm_3 \\ r &= p'n_1 + q'n_2 + r'n_3, \end{aligned} \quad (39)$$

sest liikuvast teljestikus on $\mathbf{w}: (p', q', r')$, $\mathfrak{E}_1: (l_1, l_2, l_3)$, $\mathfrak{E}_2: (m_1, m_2, m_3)$, $\mathfrak{E}_3: (n_1, n_2, n_3)$. Valemsüsteem (39) näitab, kuidas arvutada p , q , r tuntud p' , q' , r' ja suunakoosinuste kaudu.

Et, ümberpöörduvalt, analoogilistel kaalutlustel $p' = (\mathbf{w}\mathbf{e}_1)$, $q' = (\mathbf{w}\mathbf{e}_2)$, $r' = (\mathbf{w}\mathbf{e}_3)$, siis, kasutades viimaste skalaarsete korrutiste arvutamiseks projektsioone paigalseisvatele telgedele, leiame:

$$\begin{aligned} p' &= pl_1 + qm_1 + rn_1 \\ q' &= pl_2 + qm_2 + rn_2 \\ r' &= pl_3 + qm_3 + rn_3, \end{aligned} \quad (40)$$

sest paigalseisva teljestiku seisukohalt on $\mathbf{w}: (p, q, r)$, $\mathbf{e}_1: (l_1, m_1, n_1)$ jne. Valemsüsteem (40) sisaldab eeskirja p' , q' , r' arvutamiseks p , q , r kaudu. Olgu mööda minnes mainitud, et valemid (40) järgnevad juba valemeist (39), kui viimastes lugeda p' , q' , r' tundmatuteks ja lineaarset võrrand-süsteemi lahendada nende tundmatute suhtes. Et tõepoolest (40)

on sel korral lahenduste avaldised, on kerge tagantjärele kontrollida, asetades (40) võrranditesse (39): toetudes suunakoosinuste vahel valitsevatele seostele, saaksime siis samasused $p = p$, $q = q$, $r = r$, — lugeja veendugu selles ise.

Vihjasime juba eespool (§ 8) hetkelise kruvitelje mõistele, mis antud seletuste kohaselt pidi ühtima rotatsioonivektorite kompleksi tsentraaltelje mõistega. Defineerime nüüd veel hetkelist kruvitelge staatika kujutelmadest sõltumatult:

Hetkeliseks kruviteljeks keha liikumisel kutsutakse seda punktide kogu, kus kiirused \mathbf{v} osutuvad paralleelseiks hetkelise rotatsioonivektoriga $\mathbf{\omega}$.

See definitsioon peab ühtima varemini-antud definitsiooniga, kus hetkelist kruvitelge käsitleti tsentraalteljena; staatika keeles tähendab nimelt praegu antud uus definitsioon, et hetkeline kruvitelg on see punktide kogu, kus momentvektor (kiirus!) on paralleelne rotatsioonivektorite kompleksi üldise resultantiga (hetkelise rotatsioonivektoriga, sest translatsiooni asendav rotatsioonipaar ei muuda üldist resultanti!).

Hetkelise kruvitelje võrrandit võib kirjutada kas liikuva või aga paigalseisva telje suhtes. Olgu kiiruse \mathbf{v} projektsioonideks liikuvast teljestikus v_ξ , v_η , v_ζ , paigalseisvas teljestikus aga v_x , v_y , v_z . Liikuva alguspunkti O' kiiruse \mathbf{v}_0 projektsioonid olgu vastavalt $v_{0\xi}$, $v_{0\eta}$, $v_{0\zeta}$ liikuvast teljestikus ja v_{0x} , v_{0y} , v_{0z} paigalseisvas teljestikus. Kiirusvektori paralleelsuse nõue rotatsioonivektoriga $\mathbf{\omega}$ kõlab

$$\frac{v_\xi}{p'} = \frac{v_\eta}{q'} = \frac{v_\zeta}{r'}$$

liikuva teljestiku alusel, ning

$$\frac{v_x}{p} = \frac{v_y}{q} = \frac{v_z}{r}$$

paigalseisva teljestiku alusel. Kiirust \mathbf{v} määrav vektorvõrrand (37) annab, kui kasutada projektsioone liikuvatele telgedele:

$$\begin{aligned} v_\xi &= v_{0\xi} + (q'\zeta - r'\eta) \\ v_\eta &= v_{0\eta} + (r'\xi - p'\zeta) \\ v_\zeta &= v_{0\zeta} + (p'\eta - q'\xi). \end{aligned} \tag{41}$$

Kui aga kasutada projektsioone paigalseisvatele telgedele, siis kiiruse \mathbf{v} projektsioonide arvutamiseks sama (37) kohaselt on kehtiv eeskiri:

$$\begin{aligned} v_x &= v_{0x} + q(z - z_0) - r(y - y_0) \\ v_y &= v_{0y} + r(x - x_0) - p(z - z_0) \\ v_z &= v_{0z} + p(y - y_0) - q(x - x_0), \end{aligned} \quad (42)$$

sest vektori $\mathbf{r} = \overrightarrow{O'M}$ projektsioonid paigalseisvatele telgedele on $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$.

(41) ja (42) alusel hetkelise kruvitelje võrrandiks liikuvate telgede suhtes osutub

$$\frac{v_{0\xi} + q'\zeta - r'\eta}{p'} = \frac{v_{0\eta} + r'\xi - p'\zeta}{q'} = \frac{v_{0\zeta} + p'\eta - q'\xi}{r'}, \quad (43)$$

ja sama hetkelise kruvitelje võrrandiks paigalseisva teljestiku seisukohalt on

$$\begin{aligned} \frac{v_{0x} + q(z - z_0) - r(y - y_0)}{p} &= \frac{v_{0y} + r(x - x_0) - p(z - z_0)}{q} \\ &= \frac{v_{0z} + p(y - y_0) - q(x - x_0)}{r}. \end{aligned} \quad (44)$$

Neis võrrandis (43) ja (44) on muutujais vastavalt ξ , η , ζ ja x , y , z ; teised suurused peavad olema antud. Võrrandite lineaarsus mainitud muutujais näitab, et hetkeline kruvitelg on sirge joon; selle sirge suunakoosinusteks on p' , q' , r' liikuvate ja p , q , r paigalseisvate telgede suhtes. Kõike seda võib muidugi juba väita, lähtudes sellest, et hetkeline kruvitelg pole midagi muud, kui teatava rotatsioonidekompleksi tsentraaltelg.

Suurused v_{0x} , v_{0y} , v_{0z} on vektori $\mathbf{r}_0 = \overrightarrow{OO'}$ tuletise projektsioonid paigalseisvatele telgedele, tähendab,

$$v_{0x} = \dot{x}_0, \quad v_{0y} = \dot{y}_0, \quad v_{0z} = \dot{z}_0. \quad (45)$$

On liikuva alguspunkti O' koordinaadid x_0 , y_0 , z_0 aja t funktsioonidena antud, siis järelikult v_{0x} , v_{0y} , v_{0z} järgnevad otseselt nende funktsioonide diferentsimise teel. Võrrandis (43) esinevaid $v_{0\xi}$, $v_{0\eta}$, $v_{0\zeta}$ saab siis arvutada \dot{x}_0 , \dot{y}_0 , \dot{z}_0 kaudu, toetudes sellele, et $v_{0\xi}$, $v_{0\eta}$, $v_{0\zeta}$ on vektori \mathbf{v}_0 projektsioonid liikuvatele

telgedele ning seega, § 9 kohaselt, $v_{0\xi} = (v_{0e_1})$, $v_{0\eta} = (v_{0e_2})$, $v_{0\zeta} = (v_{0e_3})$. Väljendades viimaseid skalaarseid korrutisi projektsioonides paigalseisvatele telgedele, saame:

$$\begin{aligned} v_{0\xi} &= \dot{x}_0 l_1 + \dot{y}_0 m_1 + \dot{z}_0 n_1 \\ v_{0\eta} &= \dot{x}_0 l_2 + \dot{y}_0 m_2 + \dot{z}_0 n_2 \\ v_{0\zeta} &= \dot{x}_0 l_3 + \dot{y}_0 m_3 + \dot{z}_0 n_3, \end{aligned} \quad (46)$$

mis sisaldabki nõutava eeskirja. Harjutuseks olgu lugejale soovitatud koostada valemid, mis võimaldavad ümberpöörduvalt \dot{x}_0 , \dot{y}_0 , \dot{z}_0 arvutada $v_{0\xi}$, $v_{0\eta}$, $v_{0\zeta}$ kaudu.

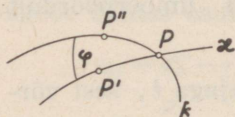
Hetkelise kruvitelje asend üldiselt muutub ajaga t , sest võrrandis (43) ja (44) suurused p' , q' , r' , $v_{0\xi}$, $v_{0\eta}$, $v_{0\zeta}$, p , q , r , v_{0x} , v_{0y} , v_{0z} sõltuvad ajast t . Jälgides hetkelise kruvitelje asendit liikuvate telgede suhtes, saame teatava joonpinna, mida kutsutakse liikuvaks aksoidiks. Tervikuna vaadatuna on selle liikuva aksoidi kuju ja asend liikuva teljestiku, s. o. keha enda suhtes täiesti määratud: aksoid ise ei sõltu enam ajast t ; olles defineeritud liikuva teljestiku suhtes, osutub ta lahutamatuks seotuks kehaga, tehes selle keha liikumist kaasa. Liikuva aksoidi kui pinna võrrandi muutujais ξ , η , ζ saame, elimineerides kahest võrrandist (43) parameetri t .

Jälgides sama hetkelise kruvitelje asendeid paigalseisva teljestiku suhtes, saame jällegi teatava joonpinna, mida kutsutakse paigalseisvaks aksoidiks. Kujult see paigalseisev aksoid võib oluliselt erineda liikuvast aksoidist. Paigalseisev aksoid samuti ei sõltu enam ajast t , kuid ta pole enam kehaga seotud, vaid, tervikuna vaadatuna, püsib ruumis liikumatult paigal. Paigalseisva aksoidi võrrandi muutujais x , y , z annab parameetri t elimineerimine kahest võrrandist (44).

Paigalseisva vaateleja silmis liikuv aksoid liigub nõnda, et igal hetkel tal on ühine moodustaja paigalpüsiva aksoidiga, nimelt hetkele vastav hetkeline kruvitelg. Mainitud ühist moodustajat pidi vastaval hetkel liikuv aksoid libiseb paigalseisval aksoidil, sest keha kiirus hetkelise kruvitelje kohtades

on paralleelne selle kruviteljega ning liikuv aksoid ise teeb kõik keha liikumised kaasa.

Ühtlasi (37) kohaselt liikuv aksoid tervikuna koos kehaga roteerib mainitud ühismoodustaja ümber nõnda, et lõpmata lähedasel uuel hetkel juba tekib uus ühismoodustaja mõlemal aksoidil. Viimasest asjaolust järgneb, et aksoididel on piki ühismoodustajat ka puutetasapind ühine. Tõepoolest, lõikame mõttes mõlemad aksoidid mingi tasapinnaga, mis ühismoodustaja suhtes oleks kallutatud. Liikuva aksoidi jälg sel lõiketasapinnal olgu kõverjoon α ja paigalseisva aksoidi jälg kõver k (20. joonis). Olgu P ühismoodustaja jälg hetkel t . Lõpmata lähedasel hilisemal hetkel $t + dt$ ühtimisele tulevate moodustajate jäljed olgu vastavalt P' ja P'' . Ühismoodustaja asendamise teisega leiab aset tänu ainuüksi rotatsioonile, sest libisemine ühismoodustajat pidi ilmsesti ei saaks seda ühissirget paigutada teisale. Et ajavahemik dt on lõpmata väike, siis nurk φ , mille võrra α asend sel ajavahemikul peaks muutuma, on samuti lõpmata väike. See tähendab aga, et jäljed α ja k ei saa mitte kohas P lõikuda, nagu see ilmsesti ebaõigelt on kujutatud 20. joonisel, vaid peavad omama ühist puutujat. Et jälgi tekitav tasapind selle arutluse juures oli meelevaldne, siis järgneb, et mõlemad joonpinnad ühismoodustaja kohtades P samuti ei saa lõikuda, vaid peavad omama ühist puutetasapinda, nagu ülal väitsimegi.



20. joonis.

puutetasapinna ühisus mõlemal aksoidil ühismoodustaja kohal igal hetkel t näitab, et tegemist on liikuva aksoidi veeremisega paigalseisval aksoidil; selle veeremisega seltsib juba varemini-mainitud libisemine ühismoodustaja sihis; teistes sihtides libisemist ei ole, sest peale libisemist hetkelist kruvitelge pidi keha omab ainuüksi veel puhast rotatsiooni selle telje ümber.

Niisiis keha üldisimat liikumist võib kujutella ka järgmiselt: Kehaga lahutamatu seotud aksoid on kogu aeg sunnitud veerema paigalseisval aksoidil ning ühtlasi libisema sel aksoidil hetkelise ühismoodustaja sihis.

Aksoidi liikumist sunniviisiliselt kaasa tehes keha liigubki. Keha liikumist määravad seega aksoidide kuju, libisemise kiirus ja veeremise kiirus.

§ 12. Elliptiline liikumine.

Tuletatud valemite rakendamise selgitamiseks käsitleme näitena nn. elliptilist liikumist, s. o. säärast erikujulist ruumilist liikumist, kus keha iga punkti trajektooriks osutub ellips.

Olgu φ mingi meelevaldne funktsioon ajast t . Olgu liikuva alguspunkti O' koordinaatide sõltuvus ajast t peale selle antud valemitega

$$x_0 = a \cos \varphi, \quad y_0 = a \sin \varphi, \quad z_0 = 2ka \sin \varphi,$$

kus a ja k on antud positiivsed konstandid. Olgu suunakoosinuste tabel antud järgneval kujul:

	ξ	η	ζ
x	$\cos \varphi$	$\sin \varphi$	0
y	$-\sin \varphi$	$\cos \varphi$	0
z	0	0	1

kus ühikvektorite nimetuste asemel seisavad neid kandvate koordinaattelgedele nimetused.

Diferentsides leiame

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 &= -a \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}, & \dot{y}_0 &= +a \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}, \\ \dot{z}_0 &= +2ka \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}. \end{aligned}$$

Valemid (38) annavad antud juhul

$$p' = 0, \quad q' = 0, \quad r' = (-\sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi) \cdot \dot{\varphi} = -\dot{\varphi},$$

kust järgneb, kui rakendada valemid (39),

$$p = 0, \quad q = 0, \quad r = -\dot{\varphi}.$$

Hetkelise rotatsioonivektori ω suurus ω (nurkkiirus) on seega

$$\omega = \sqrt{p'^2 + q'^2 + r'^2} = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2} = |\dot{\varphi}|$$

(46) põhjal leiame:

$$v_{0\xi} = (-a \sin \varphi \cos \varphi - a \cos \varphi \sin \varphi) \cdot \dot{\varphi} = -a \dot{\varphi} \sin 2\varphi$$

$$v_{0\eta} = (-a \sin \varphi \sin \varphi + a \cos \varphi \cos \varphi) \cdot \dot{\varphi} = +a \dot{\varphi} \cos 2\varphi$$

$$v_{0\xi} = 2ka\dot{\varphi} \cos \varphi.$$

Hetkelise kruvitelje võrrandiks liikuvast teljestikus on järelikult

$$\frac{-a\dot{\varphi} \sin 2\varphi + \dot{\varphi}\eta}{0} = \frac{a\dot{\varphi} \cos 2\varphi - \dot{\varphi}\xi}{0} = \frac{2ka\dot{\varphi} \cos \varphi}{-\dot{\varphi}},$$

ning paigalseisvas teljestikus

$$\frac{-a\dot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}(y - a \sin \varphi)}{0} = \frac{a\dot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}(x - a \cos \varphi)}{0} = \frac{2ka\dot{\varphi} \cos \varphi}{-\dot{\varphi}}.$$

Kokkuleppe kohaselt nulli esinemine nimetajais säärastes võrrandites tähendab vaid seda, et ka vastavad lugejad on nullid; see annab hetkelise kruvitelje jaoks liikuvast teljestikus

$$\xi = a \cos 2\varphi, \quad \eta = a \sin 2\varphi,$$

ning paigalseisvas teljestikus

$$x = 2a \cos \varphi, \quad y = 2a \sin \varphi.$$

Elimineerides siin parameetri φ , s. t. ühtlasi t , saame aksoidid:

$$\begin{aligned} \xi^2 + \eta^2 &= a^2 && \text{(liikuv aksoid)} \\ x^2 + y^2 &= (2a)^2 && \text{(paigalseisev aksoid)}. \end{aligned}$$

Aksoidideks on järelikult silindrid vastavalt raadiustega a (liikuv) ja $2a$ (paigalseisev); moodustajad on rööbikud telgedega ξ ja z , — viimased on ka omavahel rööbikud, sest suunakoosinuste tabelis oli võetud $n_3 = 1$.

Punkti O' koordinaadid rahuldavad, nagu kohe näha, nõuet

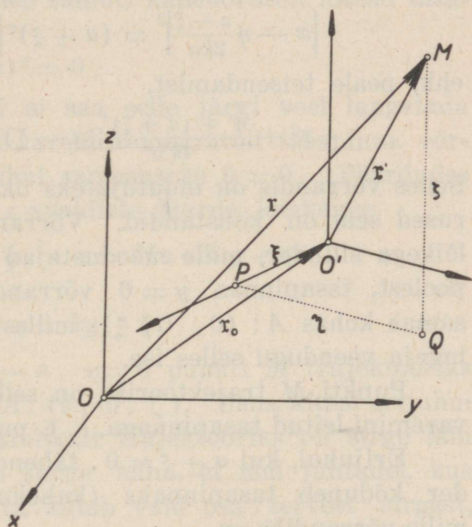
$$x_0^2 + y_0^2 = a^2,$$

s. t. O' asetseb alaliselt silindril raadiusega a , kusjuures silindri teljeks on z -telg. Ühtlasi asetseb aga O' liikuva aksoidi teljel. Neist asjaoludest nähtub, et veerev aksoid asetseb alaliselt paigalseisva aksoidi sisepoolel.

Otsime nüüd trajektoori, mida kujutab kehaga lahutamatu seotud mingi materiaalne punkt M , mille konstantsed koordinaadid liikuva teljestiku suhtes on ξ, η, ζ . Olgu sama punkti M koordinaatideks paigalseisvas teljestikus x, y, z , — nende arvude väärtused on aja t funktsioonid. Väljendame kõigepealt x, y, z konstantide ξ, η, ζ ja muutuja φ kaudu. Selleks paneme tähele, et \vec{OM} on $\vec{OO'}$ ja $\vec{O'M}$ summa (21. joonis), kusjuures $\vec{O'M}$ jaguneb kolmeks komponendiks vastavalt ξ, η, ζ

sihis. Teiste sõnadega, \vec{OM} on ahela $OO'PQM$ sulgeja. Projektides sulgeja vastavalt paigalseisvatele telgedele, saamegi otsitavad x, y, z väärtused — nad peavad võrduma ahela üksiklülide projektsioonide summaga. Lülide projektsioonide arvutamist võimaldab suunakoosinuste tabel ühenduses projektsiooni lausega. Sel teel järgneb (lugeja kontrolligu seda üksikasjaliselt!):

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \xi \cos \varphi + \eta \sin \varphi \\ y &= y_0 - \xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi \\ z &= z_0 + \zeta . \end{aligned}$$



21. joonis.

Väljendades siin ka x_0, y_0, z_0 muutuja φ kaudu, anname neile võrrandeile kuju:

$$\begin{aligned} x &= (a + \xi) \cos \varphi + \eta \sin \varphi \\ y &= \eta \cos \varphi + (a - \xi) \sin \varphi \\ z - \zeta &= 2ka \sin \varphi . \end{aligned}$$

Otsene kontroll näitab, et selle põhjal

$$2ka\eta x - 2(a + \xi)kay + (a^2 - \xi^2 - \eta^2)(z - \zeta) = 0 .$$

Et siin k, a, ξ, η, ζ on konstandid, siis tulemusest selgub, et

punkt $M: (x, y, z)$ püsib kogu aeg tasapinnal, mille võrrand on praegu leitud. See tasapind läbib punkti A koordinaatidega $0, 0, \zeta$ (paigalseisvate telgede suhtes).

Samadest võrranditest järgneb aga veel

$$\sin \varphi = \frac{z - \zeta}{2ka}, \quad \cos \varphi = \sqrt{1 - \left(\frac{z - \zeta}{2ka}\right)^2},$$

ja seega

$$x = (a + \xi) \sqrt{1 - \left(\frac{z - \zeta}{2ka}\right)^2} + \eta \frac{z - \zeta}{2ka}.$$

Viimasele seosele saab anda kuju

$$\left[x - \eta \frac{z - \zeta}{2ka}\right]^2 = (a + \xi)^2 \left[1 - \left(\frac{z - \zeta}{2ka}\right)^2\right],$$

ehk, peale teisendamist,

$$x^2 + \frac{\eta^2 + (a + \xi)^2}{4k^2 a^2} (z - \zeta)^2 - \frac{\eta}{ka} x(z - \zeta) = (a + \xi)^2.$$

Selles võrrandis on muutujateks üksnes x ja z ; kõik teised suurused seal on konstandid. Võrrandile vastab elliptilise põiklõikega silinder, mille moodustajad on rööbikud y -teljega. Tõepoolest, tasapinnas $y = 0$ võrrandile vastab ellips, tsentriga samas kohas $A: (0, 0, \zeta)$, millest oli juttu juba varemini, — lugeja veendugu selles ise.

Punkti M trajektooriks on selle elliptilise silindri lõikejoon varemini-leitud tasapinnaga, s. t. punkti trajektooriks on ellips.

Erijuhul, kui $a + \xi = 0$, tähendab, $\xi = -a$, elliptiline silinder kõduneb tasapinnaks (kahekordselt loetud tasapinnaks!), mille võrrandiks on

$$\left[x - \frac{\eta}{2ka} (z - \zeta)\right]^2 = 0.$$

Samaks osutub aga sel korral ka varemini-leitud tasapind, nagu on kerge näha; seega sel viisil ei saa veel otsust langetada trajektoori kuju kohta. Sel erijuhul $\xi = -a$ peab olema

$$\begin{aligned} x &= \eta \sin \varphi \\ y &= \eta \cos \varphi + 2a \sin \varphi \\ z - \zeta &= 2ka \sin \varphi, \end{aligned}$$

millest järeldub

$$\sin \varphi = \frac{x}{\eta}, \quad y = \eta \sqrt{1 - \frac{x^2}{\eta^2}} + 2\frac{a}{\eta} x,$$

ehk

$$[y - 2\frac{a}{\eta}x]^2 = \eta^2 [1 - \frac{x^2}{\eta^2}],$$

mida saab esitada kujus

$$(\eta^2 + 4a^2)x^2 - 4a\eta xy + \eta^2 y^2 = \eta^2.$$

See võrrand vastab jällegi elliptilisele silindrile, mille moodustajad aga nüüd on paralleelsed z -teljega. Trajektooriks on järelikult ka sel korral ellips.

Ainult veel kitsamal erijuhul, kus peale $\xi = -a$ ka veel $\eta = 0$, viimane silinder kõduneb samuti kahekordselt loetud tasapinnaks

$$(2ax)^2 = 0,$$

s. t. y - z -tasapinnaks. Jällegi ei saa selle järgi veel langetada otsust trajektoori kohta, sest varemini-määratud tasapinna võrrand kujuneb sel kitsal erijuhul samasuseks $0 = 0$. Pöördudes sel korral jälle tagasi x , y , z avaldiste juurde, leiaksime

$$x = 0, \quad y = 2a \sin \varphi, \quad z = 2ka \sin \varphi + \zeta,$$

seega

$$x = 0, \quad z = ky + \zeta.$$

Siit nähtub, et erijuhul $\xi = -a$, $\eta = 0$ punkti M trajektooriks on sirge joon, mis läbib koha $A: (0, 0, \zeta)$. Üsna kitsal erijuhul $\xi = -a$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$, järelikult trajektooriks on sirge läbi koordinaatide alguse O . On kerge näha, et neil juhtudel, kus trajektoori on sirgjooneline, ta katab vaid osa tervest sirgest, nii et trajektooriks siis õieti on vaid sirglõik, — viimast võib aga tõlgendada kõdunenud ellipsina.

Kõiki tulemusi võime kokku võtta järgmiselt:

Kirjeldatud liikumine on säärane, kus liikuvaks aksoidiks on ringsilinder teatava raadiusega a ning paigalseisvaks aksoidiks on ringsilinder kahekordse raadiusega; liikuv silinder veereb suurema silindri sisemisel poolel ja ühtlasi libiseb moodustaja sihis nõnda, et leiduvad punktid, millede trajektooriid on sirgjoonelised; seejuures keha üldiste punktide trajektooriid on ellipsid, erijuhtudel sirglõikudeks kõdunenud ellipsid. Viimasel korral trajektooriid tingimata kohtab paigalseisva silindri telge.

On võimalik tõestada, et kirjeldatud liikumine osutub ainuvõimalikuks liikumisviisiks, kui soovitakse, et ühelt poolt keha liikumine oleks tõeliselt ruumiline, s. t. et keha üksikpunktide kiirused ei oleks kogu aeg eranditult kõik paralleelsed ühe ja sama tasapinnaga, ja teiselt poolt siiski nõutakse, et iga üksiku punkti trajektoor osutuks t a s a s e k s kõveraks. Ainuüksi elliptiline liikumine rahuldab neid mõlemaid nõudeid korraga. Mehhanismis, kus on vajalik saavutada keha punktide liikumist tasastel trajektooridel, kusjuures nende trajektooride tasapinnad ei tarvitse olla kõik omavahel paralleelsed, tuleb järelikult möödapääsemata rakendada kirjeldatud silindrite põhimõtet. Viimase väite tõestusel meie ei peatu.

§ 13. Tasapinnaline liikumine.

Kui eelmises paragraafis käsitletud liikumisel konstant k omab väärtust null, siis (42) põhjal

$$v_z = v_{0z} + 0 = \dot{z}_0 = 2ka\dot{\varphi} \cos \varphi = 0.$$

Kaob aga seega v_z mistahes punktis M , siis tähendab see, et kiirus \mathbf{v} on keha kõikides punktides alaliselt paralleelne paigalseisva x - y -tasapinnaga.

Säärast liikumist, kus keha kõikide punktide kiirused on kogu aeg paralleelsed kindla paigalseisva tasapinnaga, kutsutakse t a s a p i n n a l i s e k s l i i k u m i s e k s. Ilmsesti võib selleks kindlaks tasapinnaks alati siis valida just x - y -tasapinda.

Asume üldise tasapinnalise liikumise uurimisele, orienteerides teljestikku just nõnda, nagu praegu öeldud. Kolmandast võrrandist (42) järgneb siis, võttes arvesse, et igal juhul peab olema $v_z = 0$:

$$0 = \dot{z}_0 + p(y - y_0) - q(x - x_0)$$

igal x , y , z_0 puhul. See on võimalik ainult siis, kui

$$p = 0, \quad q = 0, \quad \dot{z}_0 = 0,$$

millest esiteks nähtub, et tasapinnalisel liikumisel hetkeline rotatsioonivektor $\mathbf{\omega}$ peab olema alaliselt risti tolle põhitasapinnaga, millega paralleelselt keha on sunnitud liikuma. Teiseks nähtub,

et liikuva alguspunkti O' kaugus z_0 sellest põhitasapinnast peab olema konstantne. Kasutades O' meelevaldsust, võib sellele konstandile z_0 anda algusest peale väärtuse null, s. t. võib võtta liikuvat alguspunkti O' alaliselt x - y -tasapinnas.

Et \mathbf{w} on risti x - y -tasapinnaga, siis hetkeline nurkkiirus ω , tähendab, hetkelise rotatsioonivektori suurus $|\mathbf{w}|$, võrdub projektsiooni r suurusega. Osutub otstarbekohaseks antud juhul skalaari ω varustada märgiga vastavalt r märgile, s. t. vastavalt sellele, kas rotatsioon toimub ühes või teises suunas. Seega kirjutame:

$$\omega = r. \quad (47)$$

Kaks esimest võrrandit (42) annavad siis

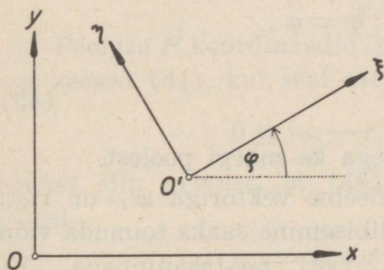
$$\begin{aligned} v_x &= \dot{x}_0 - \omega(y - y_0) \\ v_y &= \dot{y}_0 + \omega(x - x_0). \end{aligned} \quad (48)$$

Et järelikult kiirusvektor $\mathbf{v}: (v_x, v_y, 0)$ ei sõltu koordinaadist z , siis keha need punktid, mis asetsevad x - y -tasapinnale tõmmatud ühel ja samal ristsirgel, omavad üht ja sama kiirust \mathbf{v} . Sellepärast on keha liikumise täielikuks kirjeldamiseks küllaldane jälgida vaid nende punktide liikumist, mis asetsevad x - y -tasapinnas endas, kus $z = 0$, s. t. probleem taandub kahedimensiooniliseks.

Kiirusvektori projektsiooni v_z kadumise tõttu materiaalne punkt, mis mingil hetkel asetseb x - y -tasapinnas, ei saagi sellest tasapinnast kunagi lahkuda. Kui järelikult liikuvaid ξ - η -telgi võtta mõnel hetkel x - y -tasapinnas, siis nad peavad jääma sellesse tasapinda kogu aeg. Telg ζ on järelikult siis kogu aeg paralleelne z -teljega, nimelt risti x - y -tasapinnaga. Telgi võime ilmesti

orienteerida nõnda, et z - ja ζ -telje paralleelsus osutuks sama-suunaliseks.

Tähistame nurka $\hat{x}\xi$ sümboliga φ (22. joonis); φ on aja t mingi funktsioon. Joonisest nähtub, et suunakoosinuste tabel peab kirjeldatud telgede valiku puhul tasapinnalise liikumise jaoks oma ma kuju



22. joonis.

	ξ	η	ζ
x	$\cos \varphi$	$-\sin \varphi$	0
y	$\sin \varphi$	$\cos \varphi$	0
z	0	0	1

Probleemi tasapinnalisuse tõttu võivad siin kolmas veerg ja kolmas rida ka ära jääda, nii et võib piirduda neljaruudulise tabeliga

	ξ	η
x	$\cos \varphi$	$-\sin \varphi$
y	$\sin \varphi$	$\cos \varphi$

Siin esineb vaid üks vaba parameeter φ . Peale selle võivad liikuva alguspunkti O' koordinaadid x_0 , y_0 olla veel meelevaldsed funktsioonid ajast t . See näitab, et tasapinnalisel liikumisel on üldjuhul 3 vabadusastet (ruumilisel liikumisel oli üldjuhul 6 vabadusastet).

Et rotatsioonivektor \mathfrak{w} pidi olema alati risti x - y -tasapinnaga, mis antud juhul ühtib ξ - η -tasapinnaga, siis

$$p' = 0, \quad q' = 0, \quad r' = r = \omega.$$

Ühtlasi järgneb kolmandast seosest (38) suunakoosinuste tabeli põhjal

$$r' = (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) \cdot \dot{\varphi} = \dot{\varphi},$$

tähendab,

$$\omega = \dot{\varphi}. \quad (49)$$

Nurkkiirus ω ühtib seega φ tuletisega ka märgi poolest.

Hetkeline kruvitelg, olles paralleelne vektoriga \mathfrak{w} , on risti x - y - ja ξ - η -tasapinnaga. Hetkeline libisemine saaks toimuda vaid hetkelise kruvitelje sihis, tähendab, risti x - y -tasapinnaga. Et aga alaliselt antud juhul pidi olema $v_z = 0$, siis järgneb, et tasa-

pinnalisel liikumisel hetkeline libisemine jääb hoopis ära; üle jääb tasapinnalise liikumise juhul vaid hetkeline rotatsioon. Piirdudes kahedimensioonilise käsitleusega, võime piirduda ka selle punkti P asukoha määramisega, kus hetkeline kruvitelg lõikab x - y -tasapinda. P on hetkelise kruvitelje jälg x - y -tasapinnal; seda jälge kutsutakse tasapinnalise liikumise hetkeliseks pooluseks. Liikuv ξ - η -tasapind roteerub selle hetkelise pooluse P kui tsentri ümber, ühtides kogu aeg paigalseisva x - y -tasapinnaga.

Need kaalutlused näitavad, et tasapinnalist liikumist saab käsitleda ka säärasena, kus hetkeline libisemine puudub ja aksoiidid on paralleelsete moodustajatega, kuid meelevaldse põiklõikega mingisugused silindrid; liikuv silinder ainult veereb paigalseisval, libisemist ühismoodustajat pidi ei ole.

Pooluse P asukoha saab määrata nii paigalseisva teljestiku kui ka liikuva teljestiku ξ - η suhtes. Et tegemist on vaid puhta rotatsiooniga ümber tsentri P , siis P kohal kiirus peab olema null. Valemitest (48) järgneb seetõttu pooluse P : (x, y) jaoks

$$\begin{aligned} 0 &= \dot{x}_0 - \dot{\varphi} (y - y_0) \\ 0 &= \dot{y}_0 + \dot{\varphi} (x - x_0), \end{aligned}$$

kust lahendades leiame pooluse koordinaadid x, y paigalseisva tasapinna suhtes:

$$\begin{aligned} x &= x_0 - \frac{1}{\dot{\varphi}} \dot{y}_0 = x_0 - \frac{dy_0}{d\varphi} \\ y &= y_0 + \frac{1}{\dot{\varphi}} \dot{x}_0 = y_0 + \frac{dx_0}{d\varphi}. \end{aligned} \quad (50)$$

Pooluse P koordinaadid ξ, η liikuvate telgede suhtes määravad seosed (41), kui seal asetada $v_x = 0, v_y = 0$:

$$0 = v_{0\xi} - r'\eta, \quad 0 = v_{0\eta} + r'\xi.$$

Võttes siin arvesse, et (46) põhjal ja suunakoosinuste tabeli alusel

$$\begin{aligned} v_{0\xi} &= \dot{x}_0 \cos \varphi + \dot{y}_0 \sin \varphi \\ v_{0\eta} &= -\dot{x}_0 \sin \varphi + \dot{y}_0 \cos \varphi, \end{aligned}$$

järeldame:

$$\xi = \frac{\dot{x}_0 \sin \varphi - \dot{y}_0 \cos \varphi}{\dot{\varphi}}$$
$$\eta = \frac{\dot{x}_0 \cos \varphi + \dot{y}_0 \sin \varphi}{\dot{\varphi}} \quad (51)$$

Sellega on $P: (\xi, \eta)$ koordinaadid liikuvate telgede suhtes määratud.

Kahedimensioonilises käsitluses asendavad aksoide nende jäljed x - y - ja ξ - η -tasapinnal. Et aksoidid näitavad igal hetkel puutumist ühismoodustajat pidi, siis vastavad jäljed peavad samuti näitama puutumist ühises kohas P . Aksoidide jälgi põhitasapinnas kutsutakse pooluskõverateks tasapinnalise liikumise puhul. Sisukohaselt kõneldakse paigalseisvast ja liikuvast pooluskõverast. Libisemise puudumise tõttu tasapinnaline liikumine toimub sel viisil, et liikuv pooluskõver veereb paigalseisval pooluskõveral. Sellel veeremisel liikuv pooluskõver veab kaasa temaga lahutamatu seotud ξ - η -tasapinda.

Paigalseisva pooluskõvera määrab pooluse P trajektoori x - y -tasapinna suhtes, s. o. aja t elimineerimine võrrandeist (50). Analooiliselt määrab liikuva pooluskõvera P trajektoori ξ - η -teljestiku suhtes, s. o. parameetri t elimineerimine võrrandeist (51). Kirjutades φ avaldise t kaudu võrrandesse (50) ja (51) võime ka öelda, et need võrrandid (50) ja (51) vastavalt määravad paigalseisva ja liikuva pooluskõvera parameetrilisel kujul.

Igal üksikul hetkel t liikuv pooluskõver omab kindlat asendit ka x - y -tasapinnal, puutudes vastavas kohas P kokku paigalseisva pooluskõveraga; t muutudes see asend muutub, kuigi kõver ise kujult ja suuruselt jääb endiseks, nimelt sääraseks, nagu ta oli määratud ξ - η -teljestiku suhtes.

Näide 1: Elliptiline liikumine erijuhul $k = 0$. Siin

$$x_0 = a \cos \varphi, \quad y_0 = a \sin \varphi$$

ning suunakoosinuste tabelit võib kirjutada kujul

	ξ	η
x	$\cos (-\varphi)$	$\sin (-\varphi)$
y	$-\sin (-\varphi)$	$\cos (-\varphi)$

See pisut komplitseeritum kuju on antud kokkukõla saavutamiseks käesolevas paragraafis varemini-antud tabeliga. Nagu näha, tuleb meie valemis φ nüüd asendada $-\varphi$ -ga.

Hetkelise pooluse P asukohaks osutub paigalseisval tasapinnal

$$x = a \cos \varphi - \frac{a \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}}{-\dot{\varphi}} = 2a \cos \varphi$$

$$y = a \sin \varphi + \frac{-a \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}}{-\dot{\varphi}} = 2a \sin \varphi,$$

seega paigalseisvaks pooluskõveraks on ring raadiusega $2a$:

$$x^2 + y^2 = (2a)^2.$$

Liikuvasteljestikus pooluse P koordinaadid ξ , η on

$$\xi = \frac{[-a \sin \varphi \sin (-\varphi) - a \cos \varphi \cos (-\varphi)]\dot{\varphi}}{-\dot{\varphi}} = a \cos 2\varphi$$

$$\eta = \frac{[-a \sin \varphi \cos (-\varphi) + a \cos \varphi \sin (-\varphi)]\dot{\varphi}}{-\dot{\varphi}} = a \sin 2\varphi,$$

järelikult liikuvaks pooluskõveraks on ring raadiusega a :

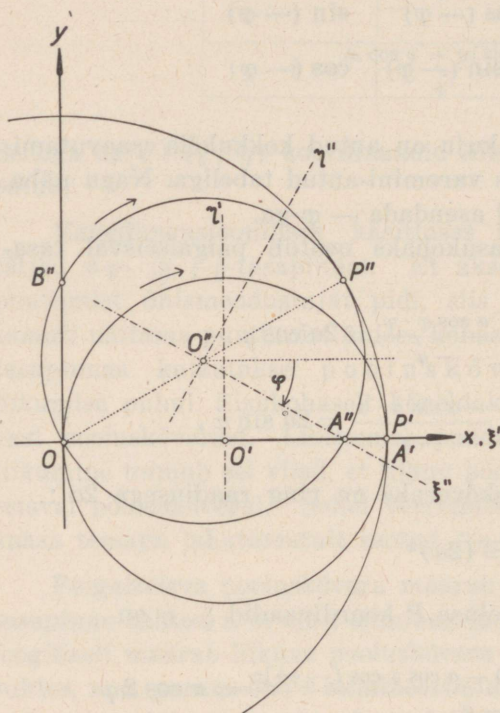
$$\xi^2 + \eta^2 = a^2.$$

23. joonisel on veerev ring kujutatud kahes erinevas asendis, nimelt esiteks alghetke $t = 0$ puhul, kus tsenter on märgitud O' , ja teiseks juhusliku hetke t puhul, kus tsentri märgiks on O'' . Vastavad hetkelise pooluse asukohad on märgitud P' ja P'' ; samuti on näidatud liikuvad teljed ξ' , η' alghetkel ja samad

teljed ξ'' , η'' hilisemal hetkel. Ühtlasi on näidatud nurga φ tähendus. Lugeja veendugu ise, et telg ξ'' peab tingimata läbima kohti

A'' ja B'' , kus veerev ring vastaval hetkel lõikab vastavalt x -telge ja y -telge, silmas pidades, et veeremise tõttu kaared $P'P''$ ja $A''P''$ peavad olema võrdse pikkusega. Arutluste hõlbustamiseks on A'' asukoht alghetkel joonisel märgitud veel tähega A' .

Edasi lugeja veendugu ise, et veereva ringi piirdejoonel fikseeritud meelevaldse punkti trajektoor on sirgjooneline, läbides kindlasti alguspunkti O . Mujal võetud materiaalse punkti trajektoorigi on ellips, kui see punkt on lahutamatu seotud veereva ringiga, — see järgneb ju § 12 üldtulemustest; lugeja toime-

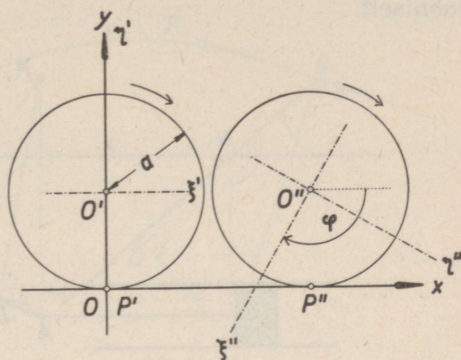


23. joonis.

tagu aga siin kontrolli, rakendades käesoleva paragraafi valemeid.

Näide 2: Veerevaks pooluskõveraks olgu ring raadiusega a , paigalseivaks pooluskõveraks olgu x -telg (24. joonis). Tähiste mõte on kokkukõlas eelmise näite tähistustega. Lugeja koostagu suunakoosinuste tabel, väljendagu liikuva alguspunkti O'' koordinaate x_0 , y_0 pöördenurga φ kaudu ning kontrolligu valemite põhjal analüütiliselt, et hetkeline poolus asetseb iga kord

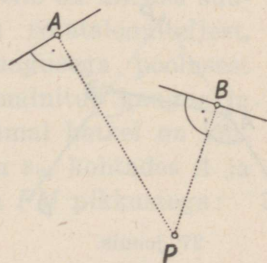
just seal, kus veerev ring parajasti x -teljega kokku puutub. Vee-
 reva ringi piirdejoonel asetseva punkti trajektoori on teata-
 vasti tsükloid. Lugeja koostagu trajektoori võrrand parameetri
 t kaudu üldjuhul, kus vaa-
 deldav punkt M asetseb
 kas väljaspool ringi või
 aga seespool, kaugusel c
 ringi tsentrist; mainitud
 kaks erijuhtu tuleb käsi-
 tella lahus. Õpetlik on ka
 välja joonestada mõni
 vastav trajektoori, konst-
 ruerides enne küllalt
 tiheda asendite kogu.



24. joonis.

§ 14. Tasapinnaline liikumine graafilises käsitluses.

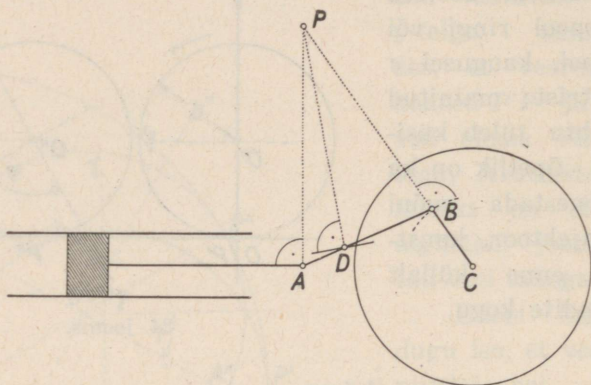
Hetkelist poolust saab hõlpsasti leida graafilise konstruk-
 tsiooni kaudu, niipea kui on teada kiirusvektori kandesirged
 kahes kohas teataval ühel ja samal hetkel t . Et tasapinnalisel
 juhul hetkeline liikumine taandub nimelt roteerumiseks ümber
 pooluse, siis raadiusvektorid PA , PB , mis ühendavad poolust P
 kahe mistahes kohaga A ja B vastavalt, peavad asetsema risti
 kiirusvektoritega kohtades A ja B vasta-
 valt, tähendab, asetsema risti nende kii-
 rusvektorite kandesirgetega. Überpöör-
 dult, poolus P on too koht, kus kiirusvek-
 torite kandesirgetele vastavalt kohtades A
 ja B püstitatud perpendikulaarid lõiku-
 vad (25. joonis).



25. joonis.

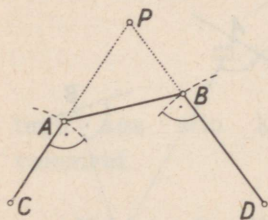
Olgu näiteks tasapinnaliselt liiku-
 vaks kindlaks kehaks mehhanismi varras
 AB (26. joonis), mis kannab silindris edasi-tagasi liikuva kolvi
 liikumist üle hoorattale tsentriga C . Igal hetkel siis A saab
 liikuda vaid silindri telje sihis; B , liikudes ringil raadiusega BC

ümber C liigub igal hetkel vaid selle ringi puutuja sihis, tähendab, risti raadiuse BC hetkelise asendiga. Järelikult kaks kiiruste kandesirget on teada; pooluse P konstruktsioon on näha jooniselt.



26. joonis.

Olgu mingi varras AB (27. joonis) šarniirühenduses varras-
tega CA ja DB , kusjuures kohad C ja D püsivad paigal (nn. „kurblimehhanism“!), siis A saab liikuda vaid ringil tsentriga C ja B saab liikuda ringil tsentriga D . Kiiruste kandesirgeteks kohtades A ja B on järelikult mainitud ringide puutujad, mis teatavasti seisavad risti puutekohtadeni viivate vastavate raadiustega. See näitab, et hetkeline poolus P asetseb sirgete CA ja DB lõikekohas.

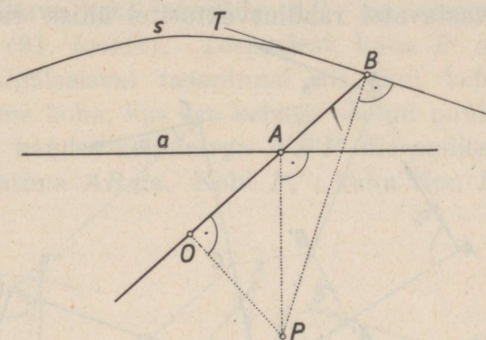


27. joonis.

Olgu varras DB (28. joonis) sunnitud liikuma nõnda, et selle varda üks kindel materiaalne punkt A alaliselt püsib teataval kindlal sirgel a , seejuures aga varras ise veel alaliselt läbib ühe paigalseisva koha O (pikkus OA on siis tingimata muutlik!). Varda DB hetkelise pooluse konstruktsioon on näidatud joonisel; tuleb silmas pidada, et materiaalne punkt A saab

liikuda vaid sirge a sihis, peale selle vardale kuuluv too materiaalne punkt, mis parajasti asetseb kohas O , võib tingimuste kohaselt nihkuda ainult varda enda hetkelise asendi sihis.

Samale vardale kuuluv mingi materiaalne punkt B (pikkus AB on siis konstantne!) kujutab paigalseisval tasapinnal kõverjoone s , mille nimeks on Nikomedes'e konhoid. Konhoidi puutuja hetkelises kohas B peab olema B kiirusvektori kandesirgeks ja seetõttu mine ma risti raadiusvektoriga



28. joonis.

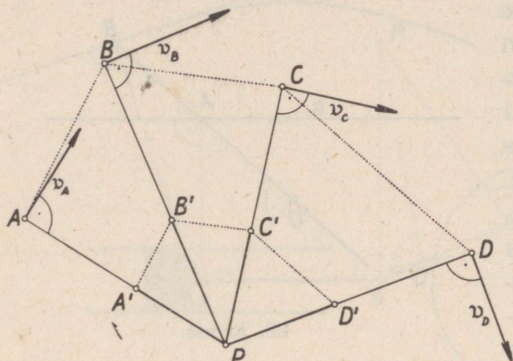
PB . Seega on antud konhoidi puutuja geomeetiline konstruktsioon kinemaatiliste kaalutluste najal.

On mingisuguse tasapinnalise liikumise puhul pooluse P hetkeline asukoht joonisel ette antud, siis mainitud ristseisu kaalutlused määravad kiiruste sihte igas kohas. On peale selle veel teada kiirusvektori suurus ja suund ühes mingisuguses kohas A , siis on määratud ka kiiruste suurused ja suunad igas teises kohas M . Tõepoolest, hetkelise rotatsiooni suund peab ju igas kohas olema sama, mis kohas A ; peale selle on kiiruse suurus v rotatsiooni puhul võrdeline kaugusega rotatsiooniteljest, s. t. antud juhul võrdeline vastava koha kaugusega poolusest P . (21) järgi on nimelt $v = \omega a$, kus a on mainitud kaugus ja nurkkiirus ω on võrdetegur, mille väärtus samal hetkel on kõikides kohtades sama. Kiiruste suurused v_A ja v_M kohtades A ja M vastavalt on seega võrdelised lõikude PA ja PM pikkustega:

$$\frac{v_A}{v_M} = \frac{PA}{PM} .$$

v_M graafilist määramist selle proportsiooni kolme ülejäänud liikme kaudu võimaldab hõlpsasti nn. pööratud kiiruste plaan

(29. joonis): pöörame ajutiselt kõik kiirusvektorid 90° võrra nõnda, et nad omaksid nüüd vastavate raadiusvektorite PA , PB , ... suundi ning libistame need pööratud kiirusvektorid vastavatel raadiusvektoritel ühise rakenduskohani P . Sel teel



29. joonis.

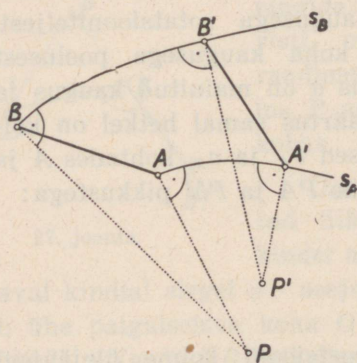
tekib vektorite kimp PA' , PB' , ... Proportsioonist järgneb, et

$$\frac{PA'}{PB'} = \frac{PA}{PB} = \dots$$

Selle tagajärjel peab aga olema $AB \parallel A'B'$, $BC \parallel B'C'$ jne. On punktid P , A , B , C , ... ja peale selle veel

üks punkt A' antud, siis B' , C' jne. leiame, tõmmates $A'B' \parallel AB$, $B'C' \parallel BC$ jne. Seega oleksid kiirused PB' , PC' , ... suuruse poolest leitud. Viies need vektorid tagasi oma õigete rakenduskohtade B , C , ... juurde ning pöörates nad tagasi õigesse asendisse 90° võrra, olemegi küsimuse graafiliselt lahendanud.

On paigalseisval tasapinnal väljajoonestatud tasapinnal liikuva kindla keha kahe materiaalse punkti A ja B trajektorid

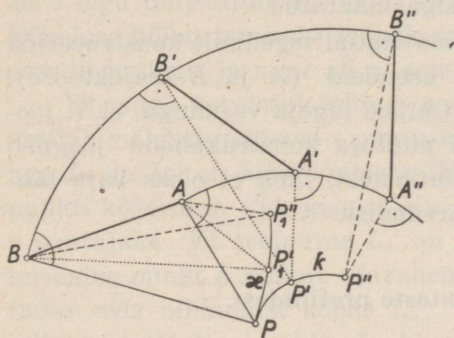


30. joonis.

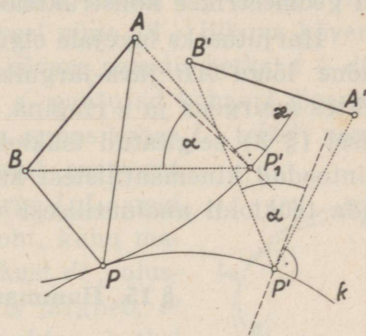
s_A ja s_B ning löigu AB lähteasend tähendatud, siis sama löigu asendit $A'B'$ teisel hetkel määrab nõue, et $AB = A'B'$. Poolus P (30. joonis) on määratud vastavalt kohtades A ja B kõveratele tõmmatud puutujate kaudu varemini kirjeldatud viisil. Samal teel on määratud pooluse asukoht P' teisel hetkel, mis vastaks asendile $A'B'$. Konstrueerides sel kombel

pooluste järk-järgulisi asukohti küllalt tihedalt, saame välja joonestada paigalseisva pooluskõvera k .

Kuid ka liikuva pooluskõvera asend mõnel meelevaldsel hetkel, mis vastab näiteks liikuva keha asendile AB , on samuti graafiliselt konstrueeritav (31. joonis). Tõepoolest, kuna P' on hetkelise pooluse asend paigalseisval tasapinnal siis, kui keha asendiks on $A'B'$, siis leiame koha, kus see kehaga seotud punkt P' pidi asetsema varemini, kandes kolmnurga $A'B'P'$ üle endisse asendisse, kus $A'B'$ pidi ühtima AB -ga. Koht P_1' , kuhu tipp P'



31. joonis.



32. joonis.

sel ülekandmisel langeb, peab kuuluma liikuvale pooluskõverale \varkappa algasendis. Kirjeldatud viisil saab \varkappa konstrueerida punktide kaupa.

Kõver \varkappa , veeredes kõveral k , viib endaga kaasa liikuva lõigu AB . Kui \varkappa ja k mõlemad on mingi hetke jaoks ette joonestatud (32. joonis), siis nende ühine puutepunkt P on pooluse asukoht paigalseisval tasapinnal sel hetkel. Liikuv lõik, mille asendiks samal hetkel on AB , määrab koos poolusega P kolmnurga ABP . Et pooluse asukoht AB enda suhtes võib ajaga nihkuda, siis see kolmnurk aja jooksul deformeerub. Olgu hili-semal hetkel pooluseks koht P' paigalseisval pooluskõveral k ; otsitud on lõigu vastav asend $A'B'$. Selle leidmiseks määrame kõigepealt liikuvale pooluskõveral \varkappa koha P_1' nõnda, et kaared PP' ja

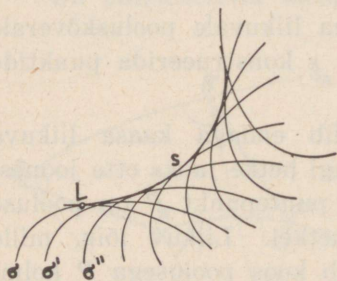
PP_1' oleksid võrdse pikkusega, mis vastab veeremisele. P_1' on siis hilisemal hetkel pooluseks muutuva koha asend alghetkel. Sel alghetkel määrab P_1' asendit AB suhtes kolmnurk ABP_1' , mis ongi hilisemaks hetkeks deformeerinud ABP . $A'B'$ leidmiseks jääb vaid ABP_1' üle kanda tipuga P_1' kohta P' ja nimelt nõnda, et selles uues asendis siht $P'A'$ moodustaks k puutujaga sama nurga, nagu siht $P_1'A$ moodustab α puutujaga kohas P_1' : hilisemal hetkel, kus veeremise tagajärjel P_1' peab jõudma kontakti kohaga P' , peavad nimelt mõlema kõvera puutujad uues puutekohas jälle ühtima. Kirjeldatud viisil AB uus asend $A'B'$ on geomeetrilise konstruktsiooniga määratud.

Harjutuseks lugejale olgu soovitatud tegelikult konstrueerida mõne löigu AB järk-järgulisi asendeid (A ja B trajektoore), võttes k sirgena ja α ringina. Ühtlasi lugeja veendugu, et 7. joonisel (§ 3) selgitatud tsükloidi puutuja konstruktsioon järgneb siintoodud kinemaatilistest kaalutlustest, ilma et oleks vaja lähendada tsükloidi analüütilisest võrrandist.

§ 15. Hammasrataste profiilidest.

Liikuva tasapinnaga lahutamatu seotud mingi meelevaldne kõver σ omab paigalseisval tasapinnal üksikhetkil t , t' , t'' , ...

rea eriasendeid σ , σ' , σ'' , ... Puhtgeomeetriliselt kõverateparv σ , σ' , σ'' , ... määrab teatava mähiskõvera s (33. joonis), mida nimetame kinemaatika seisukohalt liikuva kõvera mähistrajektoriks. Liikuva kõvera σ seda materiaalselt punkti L , mis teataval hetkel parajasti on kontaktis mähistrajektoriga s , kutsutakse kõvera σ libisemispunktiks vastaval hetkel t . Ole-



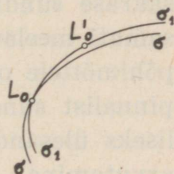
33. joonis.

nevalt kõverate σ ja s kujust, võib neid libisemispunkte olla mitu korraga. Libisemispunktide asendid kõveral σ üldiselt muutuvad ajaga.

Mähiskõvera geomeetrilise definitsiooni kohaselt libisemis- punkt asetseb seal, kus kaks lõpmata lähedases asendis joonestatud σ -kõverat kohtuvad. Neis kohtumispaikades ühtib mähiskõvera s puutuja mõlemate vastavate σ -kõverate puutujatega, tähendab, mainitud σ -kõverate kohtumine kannab samuti puutu- mise iseloomu.

Olgu L kõveraga σ lahutamatu kaasaminev too materiaalne punkt, mis hetkel t osutub libisemispunktiks. Paigalseisva tasa- pinna suhtes, s. t. paigalseisvaks loetud kõvera s suhtes mate- riaalne punkt L liigub. L asupaik paigalseisval tasapinnal het- kel t olgu tähistatud L_0 , sama L asupaik hetkel $t + dt$ olgu L_0' . Kõneluse hõlbustamiseks mõistkem veel nime all σ liikuva kõvera asendit hetkel t ja nime all σ_1 sama kõvera asendit hetkel $t + dt$.

Et, nagu varemini öeldud, σ ja σ_1 puutujad kohas L peavad ühtima mähistrajektoori s puutujaga samas kohas L , teiselt poolt aga L_0 ja L_0' on kaks lõpmata lähedal asetsevat punkti kõveral σ_1 (34. joonis), siis sirge L_0L_0' ongi s puutujaks. Et seejuures L_0' on koht, kuhu ma- teriaalne punkt L nihkub ajavahemikust dt , alus- tades seda nihkumist kohas L_0 , siis järgneb, et selle materiaalse punkti L kiirusvektor hetkel t on sihitud mööda s puutujat L_0L_0' . Järelikult libisemispunkt L (materiaalse punktina vaada- tuna) tõepoolest „libiseb“ mähistrajektoori puutuja sihis, millest ongi tingitud selle punkti nimetus.

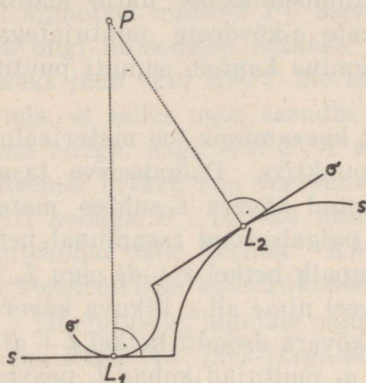


34. joonis.

Hetkeline poolus P peab seetõttu asetsema libisemispunktile vastaval kõvera s normaalil, mis omakorda ühtib kõvera σ norma- aliga samas kohas. On libisemispunkte vähemalt 2, siis poo- luse P asukoht on määratud vastava kahe normaali lõikekohana; teised normaalid libisemispunktides samal hetkel t peavad läbima sama koha P . Überpöörduvalt, kui poolus P on ette teada, siis libisemispunktid asetsevad neis kohtades L liikuvale kõverale σ , kus sirged PL osutuvad σ normaalideks.

35. joonis illustreerib pooluse leidmist konkreetsel erijuhul, kus nii σ kui ka s koosnevad sirgest ja ringi kaarest. Normaalide konstrueerimine ja seega P asukoha leidmine toimub siin erakord-

selt lihtsal viisil. Olgu sel puhul tähelepanu juhitud tõsiasjale, et liikumise relatiivsuse tõttu on lubatav käsitleda ka ümberpöörduvalt s liikuva kõverana ja σ vastava mähistrajektorina; on kerge näha, et see ei saa mõjustada pooluse P asukohta.



35. joonis.

Kui kõveraid σ ja s valmistada materiaalselt šabloonidena (profiilidena) ning kinnitada nad vastavalt liikuva ja paigalseisva tasapinna külge lahutamatu, siis järgneb vastavas mehhanismis sundliikumine, kui hoolitseda selle eest, et σ ja s oleksid alalises kontaktis (näiteks 35. joonis);

säärase sundliikumise puhul meelevaldselt valitud kõver s ongi samuti meelevaldselt valitava kõvera σ mähistrajektor. Sellele põhimõttele on rajatud kõik mehhanismid, mis teostavad tasapinnalist sundliikumist, eriti *h a m m a s r a t t a* d. Matemaatiliseks ülesandeks on seejuures olukorrale sobiva σ ja s profiili arvutamine.

Peatudes lühidalt vaid tavaliste hammasrataste juures, olgu tähendatud, et harilikuks nõudeks hammasrataste kasutamisel on „veoratta“ ja „vastasratta“ pöördenurkade proportsionaalsus. Kõverateks σ ja s on kontaktis olevate hammaste profiilid; tehnilise detailina tuleb muidugi arvestada ka nõuet, et kontakti kadumisel ühe hamba kohal jalamaid oleks tekkimas kontakt järgneva hambapaari kohal. Puht-matemaatilisest seisukohast võib hammaste profiile valida lõpmata mitmekesisel viisil; tegelikult on aga mõõtuandev kaalutlus, et valitud profiilide freesimine oleks tehniliselt hõlpsasti teostatav.

Selgitame kõigepealt üldisi kaalutlusi hammasrataste funktsioneerimise kohta:

Kujutleme 2 ringi k ja κ vastavalt tsentritega C ja I ning raadiustega r ja ρ nõnda, et neil ringidel oleks näiteks väline

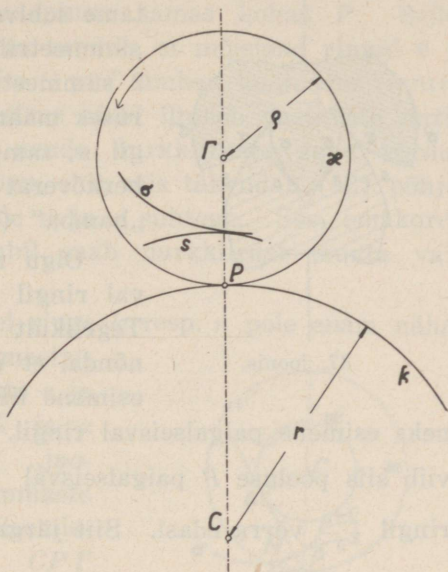
puutumine kohas P (36. joonis). On k mõeldud paigalseisvana ja α temal veerevana, siis k ja α moodustavad vastavalt liikumise paigalseisva ja liikuva pooluskõvera, ning kokkupuutepunkt P on hetkeline poolus. Veereva pooluskõveraga α lahutamatu seotud mistahes profilkõver σ määrab, liikumist kaasa tehes, teatava mähstrajektoori s ; viimane, olles paigalseisev, on lahutamatu seotud paigalseisva pooluskõveraga k .

Veeremisel poolus P nihkub mõlema ringi kaartel võrdse kaarepikkuse võrra. On α ja a neile kaarepikkustele vastavad tsentrinurgad ringides α ja k , siis kaarepikkused ise on vastavalt $a\varrho$ ja ar . Kaarepikkuste võrdsusest järgneb

$$\frac{a}{a} = \frac{r}{\varrho},$$

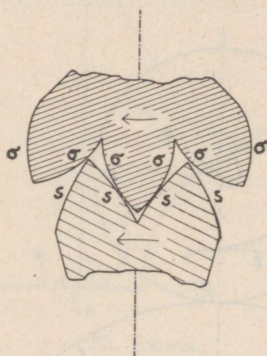
tähendab, suhe $\frac{a}{a}$ jääb konstantseks, s. t. mainitud tsentrinurgad on proportsionaalsed.

On ringid α ja k tõeliselt valmistatud mingisugusest materjalist, siis veeremist võiks kindlustada hõõrdumine puutekohas P , kui ainult veel hoolt kanda selle eest, et $CT = r + \varrho$ alaliselt. Jõuülekaneks sellest hõõrdumisest aga tavaliselt ei jätkuks. Seetõttu on otstarbekohasem nõutava veeremise kindlustamiseks kasutada kontaktis olevaid profile σ ja s , hoolitsedes ikkagi endiselt CT konstantsuse eest: kõver σ peab nimelt libisema kõveral s just nõnda, et liikumist määraksid endised pooluskõverad α ja k , tähendab, et suhe $\frac{a}{a}$ jääks konstantseks. Tehnilistel põhjustel kõverad σ ja s ei saa muidugi olla kuigi pikad, nii et teatava α ja a puhul kontakt nende vahel peab kaduma. Seda arvestades tuleb α -ga ja k -ga siduda teistel kohtadel uued täpselt



36. joonis.

samasugused kõverad, nõnda et need juba kriitilisel hetkel astuksid omavahel kontakti jne. Mainitud kõverad (koos CT konstant-susega) garanteerivad veeremist ühes suunas. Soovides garan-teerida veeremist ka vastassuunas, paigu-tame sobival viisil samad kõverad σ ja s sümmeetriliselt pööratud asendisse.



37. joonis.

2 sümmeetrilist σ -kõverat üksteise naab-ruses määravadki „hamba“ liikuvale rin-gil ν , samuti nagu 2 sümmeetrilist naab-erkõverat s määravad paigalseisva „hamba“ (37. joonis).

Olgu mainitud hammaste arv liikuv-val ringil ν ja paigalseisval ringil n . Tegelikult tuleb asja muidugi teostada nõnda, et ν -ndale hambale järgneks jälle esimene liikuvale ringil ja n -ndale järg-neks esimene paigalseisval ringil. Kontakt ühe hamba piirides viib siis pooluse P paigalseisval ringil $\frac{2\pi r}{n}$ võrra ja liikuvale ringil $\frac{2\pi Q}{\nu}$ võrra edasi. Siit järgneb

$$\frac{2\pi r}{n} = \frac{2\pi Q}{\nu},$$

kust

$$\frac{n}{\nu} = \frac{r}{Q} = \frac{a}{a}. \quad (52)$$

Tsentrinurkade „ülekanDESuhe“ $\frac{a}{a}$ on järelikult pöördväärtus hammaste arvu suhtest, ükskõik millisena σ on valitud (s on kaudu üheselt määratud). Ühtlasi (52) näitab, et pooluskõverate raadiuste suhe peab ilmtingimata olema ratsionaalne arv, nimelt kahe täisarvu n ja ν jagatis, — vastasel korral konstruktsioon pole teostatav.

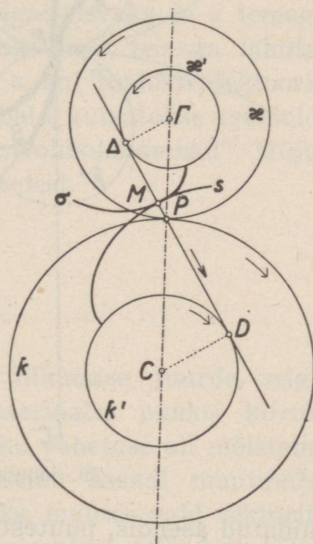
Võtame nüüd veel arvesse, et kinemaatika seisukohalt, liiku-mise mõiste relatiivsuse tõttu, paigalseisva tasapinna valik on üsna meelevaldne. Võiks seega niisama hästi lugeda ν paigal-

seisvaks ja k veerevaks ringiks. Kuid võib näiteks paigalseisvateks lugeda ka ringide k ja \varkappa keskohti C ja Γ , mille tagajärjel siis ka sirgel CF asetsev poolus P osutub alaliselt paigalseisvaks: ringid \varkappa ja k veerevad siis „vastastikku teineteisel“, olles alaliselt kontaktis paigalseisva tasapinna samas kohas P . Selles viimasena-kirjeldatud olukorras tundub, et mõlemad ringid k ja \varkappa vaid roteeruvad oma tsentrite C ja Γ ümber, kusjuures tsentri-nurkade α ja α proportsionaalsus nüüd ilmneb vastavate nurkkiiruste proportsionaalsuses; nende nurkkiiruste suhe võrdub jällegi raadiuste r ja ρ suhtega, ehk, mis tähendab (52) põhjal sama, võrdub hammastearvude n ja ν suhtega. See omakorda kinnitab, et hammasrataste abil saab nurkkiirust muuta vaid ratsionaalses vahekorras.

Valminud hammasratastel ringe k resp. \varkappa pole enam näha; neid ringe on vaid geomeetriselt kasutatud kokkukuuluvate s ja σ kuju määramisel. Ringe k ja \varkappa (pooluskõvera)id) kutsutakse „jaotusringideks“. Koht, kus hammaste profiilid on kontaktis (libisemis-punkt), nihkub paigalseisva CPI suhtes; vastavat trajektoori kutsutakse hammaste „mõjujooneks“.

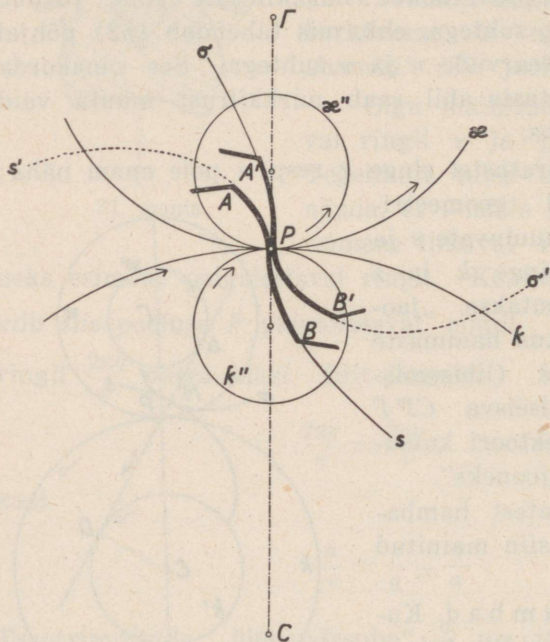
Praktikas tähtsamatest hamba-profili tüüpidest olgu siin mainitud kaks.

1) *Evolventhambad*. Kujutleme lisaks jaotusringidele k ja \varkappa veel 2 vastavalt kontsentrilist ringi k' ja \varkappa' sääraste raadiustega, et 38. joonisel näidatud k' ja \varkappa' ühispuutuja DA läbiks pooluse P . Ühispuutujal DA valime meelevaldse punkti M . Kujutelgem sirge joone DA materiaalsena nõnda, et ta hõõrdumise tõttu hakkaks enda suunas libisema, niipea kui k koos k' -ga hakkab roteeruma ning viimase tagajärjel ka \varkappa koos \varkappa' -ga hakkab proportsionaal-



38. joonis.

selt roteeruma. Materiaalse sirgega $D\Delta$ lahutamatu seotud punkt M nihkub koos sirgega just ringidel k' ja κ' mahaveerunud kaarepikkuse võrra, asetsedes kogu aeg nende ringide puutujal. Kui jälgida M trajektoori roteeruva k' seisukohalt, siis selleks trajektooriks peab osutama järelikult k' evolvent s ; kui jälgida sama M trajektoori roteeruva κ' seisukohalt, siis M trajektooriks on samadel kaalutlustel ringi κ' evolvent σ . Et evolvent on alati risti oma evolüüdi vastava puutujaga, siis mõlemal evolvendil s ja



39. joonis.

näidatud asendis, puutekohaga pooluses P . Nende k'' ja κ'' raadius moodustagu $\frac{1}{m}$ osa raadiusest r ja $\frac{1}{\mu}$ osa raadiusest ϱ , kusjuures m ja μ on täisarvud (joonisel on võetud $m = 5$, $\mu = 3$). Hoides C ja Γ paigal, paneme k ja κ roteeruma; ringid k'' ja κ'' veerevad sel puhul vastastikku teineteisel, ühtlasi veereb kumbki neist nii ringil k kui ka ringil κ .

mõlemal evolvendil s ja σ kohas M esineb puutumine. Püües k paigal, siis evolvent σ veereb evolvendil s . Evolvendid σ ja s sobivad seega vastavate hammaste profiilidena; sääraselt konstrueeritud hambaid kutsutakse evolventhambasteks. Mõjujooneks on ühispuutuja $D\Delta$.

2) Tsükloidhambad. Kujutelgem tsentreerituna sirgel C kaks kongruentset ringi k'' ja κ'' 39. joonisel

Olgu P mõeldud materiaalse punktina, mis lahutamatu on seotud ringiga k'' . Et viimane veereb ringil k , siis k suhtes P selle veeremise tagajärjel kujutab m kongruentsest harust koosneva trajektoori, mille nimeks on hüpotsükloid (korreksem nimetus on „hüpotrohoid“). Et k'' veereb ka ringil κ , siis koos k'' -ka P kujutab κ suhtes μ harust koosneva epitsükloidi (epitrohoidi). Analoogiliselt võiks sama P kujutella aga ka lahutamatu seotuna ringiga κ'' . Et viimane veereb ringil κ , siis P seejuures kujutab μ harust koosneva hüpotsükloidi; et κ'' veereb samuti ringil k , siis P kujutab k suhtes m harust koosneva epitsükloidi. Kohas P joonisel näidatud asendis κ hüpotsükloid ja epitsükloid omavad ühist puutujat $C\Gamma$; koos nad moodustavad teatava kõvera σ' . Samuti puutuvad kokku kohas P ringi k hüpotsükloid ja epitsükloid, moodustades koos kõvera s' . Kui k lugeda paigalseisvaks ja s temaga lahutamatu seotuks, κ lugeda veerevaks ja σ temaga lahutamatu seotuks, siis σ libiseb kõveral s kui mähistrajektoiril. Kirjeldatud viisil σ ja s profiiliga hambaid kutsutakse tsükloidhammasteks; korrektsem nimetus oleks „trohoidhambad“. Mõjujoon koosneb ringide k'' ja κ'' kaarte osadest.

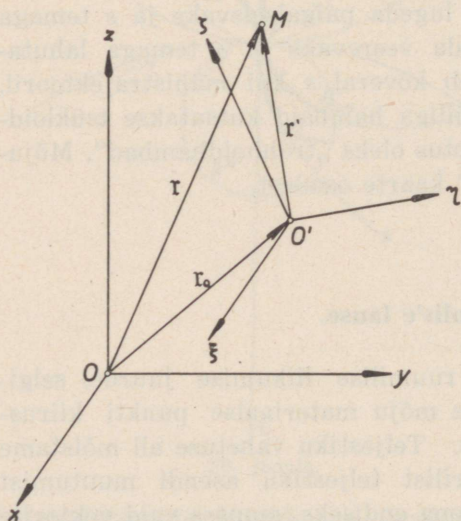
§ 16. Coriolis'e lause.

Tagasi pöördudes üldise ruumilise liikumise juurde, selgitame nüüd teljestiku vahetuse mõju materiaalse punkti kiirusvektorile ja kiirendusvektorile. Teljestiku vahetuse all mõistame seejuures mitte puht-geomeetrilist teljestiku asendi muutumist (see jätkaks vektorid niisugustena endiseks, muutes vaid vektorite projektsioone), vaid üleminekut paigalseisvatest telgedest liikuvate telgede juurde.

Olgu seega kõrvuti vaadeldud 2 teljestikku, üks ξ - η - ζ -teljestik alguspunktiga O' ja teine x - y - z -teljestik algusega O (40. joonis). Oletagem, et seejuures ξ - η - ζ -teljestik liigub x - y - z -teljestiku suhtes; seda liikumist võib siis täielikult haarata, andes 1) punkti O'

liikumist x - y - z -telgede suhtes ja 2) ξ - η - ζ -teljestiku hetkelise rotatsioonivektori ω jällegi x - y - z -telgede suhtes. Nagu juba korduvalt rõhutatud, on liikumise mõiste oluliselt relatiivne, omades konkreetset sisu üksnes siis, kui on saavutatud kokkulepe selle kohta, millist teljestikku tuleb lugeda „paigalseisvaks“. Lepime kokku „paigalseisvateks“ telgedeks lugeda just x - y - z -telgi; ξ - η - ζ -telgi oleme siis õigustatud nimetama „liikuvateks“ telgedeks.

Olgu nüüd jälgitud mingi materiaalne punkt M , mis võib täitsa vabalt liikuda nii ühe kui ka teise teljestiku suhtes, s. t. mille koordinaadid x , y , z paigalseisvate telgede suhtes, samuti aga ka koordinaadid ξ , η , ζ liikuvate telgede suhtes võivad aja t muutudes muutuda. Säärane punkt M kujutab



40. joonis.

teatava trajektoori paigalseisvate telgede suhtes — seda trajektoori on kombeks kutsuda punkti M „absoluutseks“ trajektooriks (kuigi see „absoluutsus“ püsib vaid seni, kuni peame kinni kokkuleppest lugeda just x - y - z -telgi paigalseisvateks). Sama punkti M trajektoori liikuvate ξ - η - ζ -telgede suhtes on kombeks kutsuda punkti M „relatiivseks“ trajektooriks (kuigi sisuliselt iga trajektoor on relatiivne, olles alati määratud ainult teatavate telgede suhtes!). Analooiliselt räägitakse M „absoluutsest“ kohavektorist $\vec{r} = \vec{OM}$ ja „relatiivsest“ kohavektorist $\vec{r}' = \vec{O'M}$. Toetudes § 3 ja 4 definitsioonidele, võime sellekohaselt kõnelda ka punkti M „absoluutsest“ kiirusvektorist ja „absoluutsest“ kiirendusvektorist, mõistes nende all vastavalt \dot{r} ja \ddot{r} ,

lähtudes seega „absoluutsest“ trajektoorist; samal viisil võik-
sime aga ka lähtuda „relatiivsest“ trajektoorist ning määrata
sellekohaselt „relatiivse“ kiirusvektori ja „relatiivse“ kiirendus-
vektori: relatiivne kiirus on vektor, mis liikuvate telgede suhtes
omab projektsioone ξ , η , ζ , ja relatiivne kiirendus on vektor,
mis liikuvate telgede suhtes omab projektsioone $\dot{\xi}$, $\dot{\eta}$, $\dot{\zeta}$. Lühen-
duseks tarvitame absoluutse kiiruse ja absoluutse kiirenduse
tähistamiseks sümboleid v_a ja u_a vastavalt ning relatiivse kiiruse
ja relatiivse kiirenduse tähistamiseks v_r ja u_r vastavalt.

Olgu veel punkti O' absoluutse kohavektori sümboliks r_0 ,
seega r_0 liikuva alguspunkti absoluutne kiirus ja \ddot{r}_0 tema abso-
luutne kiirendus. 40. joonisest nähtub, et

$$r = r_0 + r'.$$

Siin võime r' pealegi kujutella oma komponentvektorite summana,
vastavalt liikuvate telgede suundadele, s. t. rakendada valemis (25)
esitatud põhimõtet, valides aga põhivektoreiks e_1 , e_2 , e_3 liiku-
vatel telgedel ja kokkukõlas viimasega r' projektsioonideks punkti
 M koordinaate ξ , η , ζ . See annab:

$$r = r_0 + \xi e_1 + \eta e_2 + \zeta e_3.$$

Diferentsides seda seost, kusjuures tuleb arvestada, et ka ξ , η ,
 ζ sõltuvad ajast t , leiame (7) ja (30) kohaselt:

$$\dot{r} = (\dot{r}_0 + \dot{\xi} e_1 + \dot{\eta} e_2 + \dot{\zeta} e_3) + (\xi \dot{e}_1 + \eta \dot{e}_2 + \zeta \dot{e}_3) \quad (53)$$

Siin teine sulgavaldis paremat kätt pole midagi muud kui M rela-
tiivne kiirus v_r , nimelt vektor, mille projektsioonideks liikuvatele
telgedele on $\dot{\xi}$, $\dot{\eta}$, $\dot{\zeta}$. Esimene sulgavaldis üksinda oleks juba
kujutanud \dot{r} sel korral, kui ξ , η , ζ oleks tulnud käsitada konstan-
tidena, s. t. kui M oleks olnud lahutamatu seotud liikuva teljes-
tikuga, tehes kõik selle liikumised kaasa. Seda fiktiivset koha-
vektori tuletist kutsutakse punkti M „kaasaminekukiiruseks“;
meie tähistame seda kaasaminekukiirust sümboliga v_k .

Silmas pidades, et valemis (53) esinev tõeline $\dot{\mathbf{r}}$ kujutab M absoluutset kiirust, võimegi (53) kirjutada lühendatud kujul

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_k + \mathbf{v}_r . \quad (54)$$

Sõnastatult see tähendab:

Absoluutne kiirus on kaasaminekukiiruse ja relatiivse kiiruse summa.

Summeerimine on siin muidugi mõeldud vektoriaalsel kujul.

Diferentsides (53) veel kord t suhtes, leiame:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}} &= (\ddot{\mathbf{r}}_0 + \xi \ddot{\mathbf{e}}_1 + \eta \ddot{\mathbf{e}}_2 + \zeta \ddot{\mathbf{e}}_3) + (\dot{\xi} \dot{\mathbf{e}}_1 + \dot{\eta} \dot{\mathbf{e}}_2 + \dot{\zeta} \dot{\mathbf{e}}_3) + \\ &\quad + (\dot{\xi} \dot{\mathbf{e}}_1 + \dot{\eta} \dot{\mathbf{e}}_2 + \dot{\zeta} \dot{\mathbf{e}}_3) + (\ddot{\xi} \mathbf{e}_1 + \ddot{\eta} \mathbf{e}_2 + \ddot{\zeta} \mathbf{e}_3) \\ &= (\ddot{\mathbf{r}}_0 + \xi \ddot{\mathbf{e}}_1 + \eta \ddot{\mathbf{e}}_2 + \zeta \ddot{\mathbf{e}}_3) + (\ddot{\xi} \mathbf{e}_1 + \ddot{\eta} \mathbf{e}_2 + \ddot{\zeta} \mathbf{e}_3) + \\ &\quad + 2(\dot{\xi} \dot{\mathbf{e}}_1 + \dot{\eta} \dot{\mathbf{e}}_2 + \dot{\zeta} \dot{\mathbf{e}}_3) . \end{aligned}$$

Siin $\ddot{\mathbf{r}}$ on punkti M absoluutne kiirendus \mathbf{u}_a ; esimene sulgavaldis lõpptulemuses kujutab säärast fiktiivset $\ddot{\mathbf{r}}$, mille oleksime saanud, kujutelles diferentsimise toimingu vältel ξ , η , ζ konstantidena, s. t. seda fiktiivset kiirendust, mille M oleks omandanud, tehes liikuva teljestiku kõiki liikumisi lahutamatult kaasa, — seda fiktiivset kiirendust kutsutakse M „kaasaminekukiirenduseks“ \mathbf{u}_k ; teine sulgavaldis lõpptulemuses on vektor, mille projektsioonideks liikuvatele telgedele osutuvad $\ddot{\xi}$, $\ddot{\eta}$, $\ddot{\zeta}$, s. t. teine sulgavaldis on M relatiivne kiirendus. Viimane sulgavaldis koos teguriga 2 moodustab erikujulise lisavektori, mida tähistame sümboliga \mathbf{u}_C . Niisiis:

$$\mathbf{u}_a = \mathbf{u}_k + \mathbf{u}_r + \mathbf{u}_C . \quad (55)$$

Nagu näha, absoluutne kiirendus koosneb mitte kahest komponendist, nagu oleks võinud arvata analoogia põhjal kiirusega, vaid kolmest. Kolmandat komponenti \mathbf{u}_C kutsutakse „lisa-kiirenduseks“ ehk, Coriolis’*e* nimega, „Coriolis’*e* kiirenduseks“.

Opereerides liikuva teljestiku hetkelise rotatsioonivektoriga \mathbf{w} , mille projektsioonideks p' , q' , r' (35) kohaselt on vastavalt $(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3)$, $(\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1)$, $(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)$, kusjuures (36) järgi kehtivad seosed

$$\dot{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{w} \times \mathbf{e}_1, \quad \dot{\mathbf{e}}_2 = \mathbf{w} \times \mathbf{e}_2, \quad \dot{\mathbf{e}}_3 = \mathbf{w} \times \mathbf{e}_3,$$

saame \mathbf{u}_C teisendada järgmiselt:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_C &= 2(\dot{\xi}\mathbf{e}_1 + \dot{\eta}\mathbf{e}_2 + \dot{\zeta}\mathbf{e}_3) \\ &= 2[\dot{\xi}(\mathbf{w} \times \mathbf{e}_1) + \dot{\eta}(\mathbf{w} \times \mathbf{e}_2) + \dot{\zeta}(\mathbf{w} \times \mathbf{e}_3)] \\ &= 2[(\mathbf{w} \times \dot{\xi}\mathbf{e}_1) + (\mathbf{w} \times \dot{\eta}\mathbf{e}_2) + (\mathbf{w} \times \dot{\zeta}\mathbf{e}_3)] \\ &= 2[\mathbf{w} \times (\dot{\xi}\mathbf{e}_1 + \dot{\eta}\mathbf{e}_2 + \dot{\zeta}\mathbf{e}_3)] \\ &= \mathbf{w} \times 2(\dot{\xi}\mathbf{e}_1 + \dot{\eta}\mathbf{e}_2 + \dot{\zeta}\mathbf{e}_3) \\ &= \mathbf{w} \times 2\mathbf{v}_r, \end{aligned}$$

sest vektor $\dot{\xi}\mathbf{e}_1 + \dot{\eta}\mathbf{e}_2 + \dot{\zeta}\mathbf{e}_3$ pole midagi muud kui relatiivne kiirus \mathbf{v}_r .

Niisiis Coriolis'e kiirendus valemis (55) tähendab hetkelise rotatsioonivektori \mathbf{w} vektoriaalset korrutatist kahekordse relatiivse kiirusega:

$$\mathbf{u}_C = \mathbf{w} \times 2\mathbf{v}_r. \quad (56)$$

Teiste sõnadega, \mathbf{u}_C kujutab kiirust, mille hetkelise rotatsiooni \mathbf{w} : (p' , q' , r') mõjul omandaks fiktiivne punkt, mille koordinaatideks liikuvate telgede suhtes on $2\dot{\xi}$, $2\dot{\eta}$, $2\dot{\zeta}$, kui ξ , η , ζ tähendavad vaadeldava materiaalse punkti M koordinaate samas liikuvast teljestikus; rotatsioonitelg on seejuures mõeldud läbiminevana kohast O' .

(56) kohaselt Coriolis'e kiirendus langeb ära siis ja ainult siis, kui 1) $\mathbf{w} = 0$, tähendab, hetkel pole olemas rotatsiooni, või 2) $\mathbf{v}_r = 0$, tähendab, hetkel pole olemas relatiivset kiirust, või 3) \mathbf{w} ja \mathbf{v}_r on paralleelsed, tähendab, fiktiivne punkt ($2\dot{\xi}$, $2\dot{\eta}$, $2\dot{\zeta}$) langeb hetkelisele rotatsiooniteljele.

Valemid (55) ja (56) koos sõnastame järgmiselt:

Absoluutne kiirendus on kaasaminekukiirenduse, relatiivse kiirenduse ja Coriolis'e kiirenduse summa. Seejuures Coriolis'e

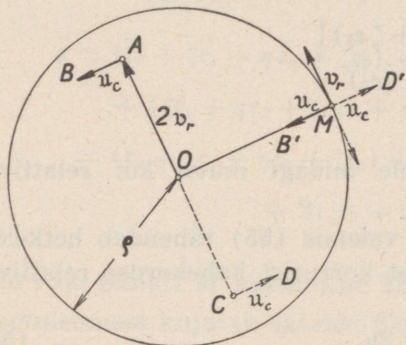
kiirendus on hetkelise rotatsioonivektori vektoriaalne korrutis kahekordse relatiivse kiirusega: seda Coriolis'e kiirendust pole olemas ainult siis, kui kaob rotatsioon või kaob relatiivne kiirus, või kui rotatsioonivektor on paralleelne relatiivse kiirusega.

Seda teoreemi kutsutakse Coriolis'e lauseks.

§ 17. Näiteid Coriolis'e lause kohta.

Selgituseks käsitleme järgmisi näiteid.

Näide 1: Liikumine roteerüval kettal. Roteerugu ketas positiivses suunas ühtlase nurkkiirusega ω (41. joonis). Sel roteerüval kettal liikugu mingi materiaalne punkt M , püsites kogu aeg kettaga kontsentrilisel ringjoonel raadiusega ρ , ühtlase relatiivse kiirusega v_r . Vektorina relatiivne kiirus v_r osutub mainitud ringi puutujaks; joonisel on v_r märgitud pideva joonena, kui tema suund ühtib ketta roteerumise suunaga, ja punktiiriga, kui v_r suund on vastupidine.



41. joonis.

Roteeruv ketas avaldab materiaalsele punktile kaasamineku mõju. Kaasaminekukiirendus u_k on ω konstantsuse tõttu puhtakujuline normaalkiirendus, suunatud ketta tsentri O poole, omades (15) ja (21) põhjal suurust $\frac{\omega^2 \rho^2}{\rho} = \omega^2 \rho$. Samadel kaalutlustel ka relatiivne kiirendus u_r osutub puhtakujuliseks normaalkiirenduseks ja on samuti suunatud O poole, omades suurust $\frac{v_r^2}{\rho}$. Kõige selle tõttu u_k ja u_r liituvad üheks vektoriks, mis on suunatud O poole, omades suurust $\omega^2 \rho + \frac{v_r^2}{\rho}$.

Coriolis'e kiirenduse u_c määrab positiivselt suunatud v_r puhul \vec{AB} ja vastassuunalise v_r puhul \vec{CD} , kusjuures

$\overline{OA} = \overline{OC} = 2v_r$. Mõlemal juhul tuleb muidugi sel viisil määratud vektorid üle kanda rakenduskoha M juurde; vektorite suurus on kummalgi juhul $2v_r\omega$. Nagu näha, positiivselt suunatud v_r juhul $u_C = \overrightarrow{MB'}$ on suunatud O poole, teisel juhul $u_C = \overrightarrow{MD'}$ on suunatud O -st eemale. Olgu raadiuse OM positiivseks suunaks loetud see, mis viib O poole. Summa $u_k + u_r$ on siis igal juhul suunatud positiivselt. Esimesel juhul u_C on samuti suunatud positiivselt, s. t. absoluutse kiirenduse u_a suund raadiusel osutub samuti kindlasti positiivseks, ning u_a suuruseks on

$$\omega^2 \varrho + \frac{v_r^2}{\varrho} + 2v_r\omega = \frac{(\omega\varrho + v_r)^2}{\varrho}.$$

Teisel juhul u_C suund raadiusel on negatiivne, seega u_a suuruse arvutamisel $2v_r\omega$ tuleb lahutada u_k ja u_r summa suurusest. Selle lahutamise tulemus on aga ikkagi kindlasti positiivne arv, s. t. u_a ei saa omada negatiivset suunda raadiusel; see nähtub sellest, et

$$\omega^2 \varrho + \frac{v_r^2}{\varrho} - 2v_r\omega = \frac{(\omega\varrho - v_r)^2}{\varrho}$$

ilmsesti ei saa olla negatiivne. Ainult erijuhul $\omega\varrho = v_r$ vastava u_a suuruseks osutub null, s. t. sel erijuhul absoluutne kiirendus kaob. On kerge näha, et sel erijuhul M püsib tegelikult paigal, sest tema kaasaminekukiirust $\omega\varrho$ kompenseerib siis täiel määral relatiivne kiirus v_r roteerumisele vastupidises suunas; on arusaadav, et „absoluutse“ paigalpüsimise puhul ei saa olla ka „absoluutset“ kiirendust.

Niipea kui aga on olemas „absoluutne“ kiirus $(\omega\varrho \pm v_r)$, on olemas ka „absoluutne“ kiirendus, mis, nagu nägime, on kindlasti suunatud O poole, ja omab suurust, mida võib kirjutada kujul $\frac{v_a^2}{\varrho}$. See ongi just normaalkiirendus ringjoonelisel liikumisel konstantse kiirusega v_a . On eriti v_r suunatud positiivselt ja seejuures veel $|v_r| = \omega\varrho$, siis $v_a = 2v_r$ ja kiirenduse suurus kasvab neljakordseks võrreldes sellega, mis ta oleks, kui M ei omaks üldse relatiivset kiirust, s. t. kui M laseks ennast lihtsalt ketta rotatsioonist kaasa viia; see on kokkukõlas valemiga (15).

Kui unustada Coriolis'e kiirendus, siis olukord roteeruva kettal tunduks paradoksaalselt segasena; selgust selle kohta, miks igal juhul „absoluutne“ tsentripetaalkiirendus peab omama just nõutavat suurust ja suunda, annabki just Coriolis'e kiirendusvektori esinemine.

Näide 2: Liikumine Maakera pinnal. Päikese suhtes Maakera esiteks liigub peaaegu ringikujulisel trajektooriga, mille raadius $R = 15 \cdot 10^{12}$ [cm], kiirusega $V = 3 \cdot 10^6$ [cm sec⁻¹], teiseks roteerub ümber telje nurkkiirusega $\omega = \frac{2\pi}{24 \cdot 60 \cdot 60} = 7,3 \cdot 10^{-5}$ [sec⁻¹]. Maakera raadius $\rho = 6,4 \cdot 10^8$ [cm]. Kaasaminekukiirendus Maakera pinna mingis kohas koosneb kahest osast, nimelt kiirendusest u_k' , mis on tingitud Maakera liikumisest ringikujulisel orbiidil, ja kiirendusest u_k'' Maakera rotatsiooni tõttu. u_k' suurus on $\frac{V^2}{R} = \frac{9 \cdot 10^{12}}{15 \cdot 10^{12}} = 0,6$ [cm sec⁻²]. u_k'' suurus sõltub koha kaugusest rotatsiooniteljest; see kaugus $\rho' = \rho \cos \varphi$, kus φ tähendab geograafilist laiust. Parasvöötme piirkonnas võiks võtta $\varphi = 50^\circ$, mis annab $\rho' = 6,4 \cdot 10^8 \cdot 0,64 = 4 \cdot 10^8$ [cm]. Säärasel korral $u_k'' = \omega^2 \rho' = (7,3 \cdot 10^{-5})^2 \cdot 4 \cdot 10^8 = 2,1$ [cm sec⁻²]. Seega siin u_k'' ületab u_k' suuruselt umbes 3,5 korda. Tavaliselt piirduakse vaid u_k'' arvestamisega.

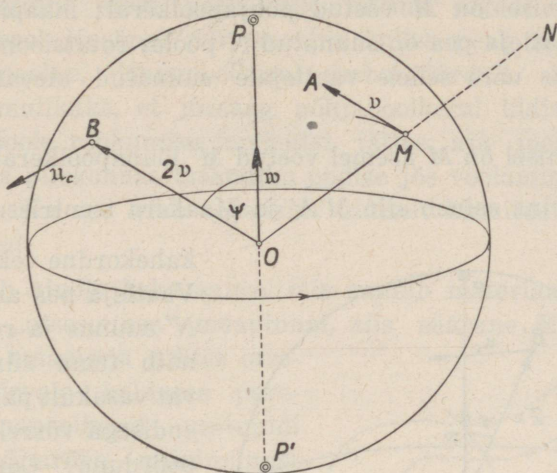
Võtame vastavalt viimasele kokkuleppele Päikese suhtes mitte-roteeruva teljestiku algusega Maakera keskkohas O ning loeme seda teljestikku absoluutselt paigalseisvaks.

Liikugu Maakera pinnal otsesuunas, s. t. Maakera mingi suuringi suunas, kiirrong 100-kilomeetrilise tunnikiirusega, teiste sõnadega, relatiivse kiirusega $v_r = 2,8 \cdot 10^3$ [cm sec⁻¹]. Relatiivse kiirenduse suurus u_r on siis

$$\frac{v_r^2}{\rho} = \frac{(2,8 \cdot 10^3)^2}{6,4 \cdot 10^8} = 1,2 \cdot 10^{-2} \text{ [cm sec}^{-2}\text{]}.$$

Relatiivne kiirusvektor $\vec{v}_r = \vec{MA}$ (42. joonis) asetseb Maakera puutetasapinnas puutekohas M . Kanname kahekordse \vec{MA} vektorina \vec{OB} punkti O juurde üle. On $\vec{OC} = \omega$ Maakera rotatsioonivektor, siis Coriolis'e kiirendus on ω vek-

toriaalne korrutis vektoriga OB . Sirge OMN on üldmainitud puutetasapinna normaal ja nurk POM on $90^\circ - \varphi$. Seega Maakera telg moodustab puutetasapinna normaalliga nurga



42. joonis.

$90^\circ - \varphi$, mille tõttu sama telg moodustab puutetasapinnas tõmmatud juhusliku sirgega nurga, mille suurus võib kõikuda φ ja $180^\circ - \varphi$ piirides (vt. 43. joonis).

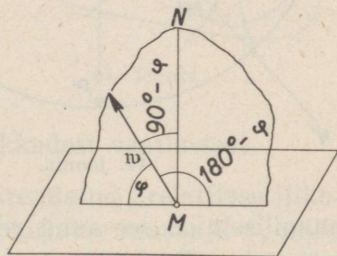
Tähistades nurka POB sümboliga ψ , saame järelikult

$$\varphi \leq \psi \leq 180^\circ - \varphi.$$

Definitsiooni kohaselt on Coriolis'e kiirendusvektori suurus u_c võrdne $\omega \cdot \overline{OB} \cdot \sin \psi = 2v_r \omega \sin \psi$, seega u_c minimaalväärtus on $2v_r \omega \sin \varphi$. Võttes

$\varphi = 50^\circ$ saaksime seega u_c alammääraks $2 \cdot 2,8 \cdot 10^3 \cdot 7,3 \cdot 10^{-5} \cdot 0,77 = 31,5 \cdot 10^{-2}$ [cm sec⁻²], mis ületab u_r ligi 26 korda, olles aga vektori u_k'' suuruselt umbes 7 korda väiksem.

Toodud arvestused näitavad, et esimeses lähenduses absoluutne kiirendus on määratud just kaasaminekukiirendusega u_k'' ,

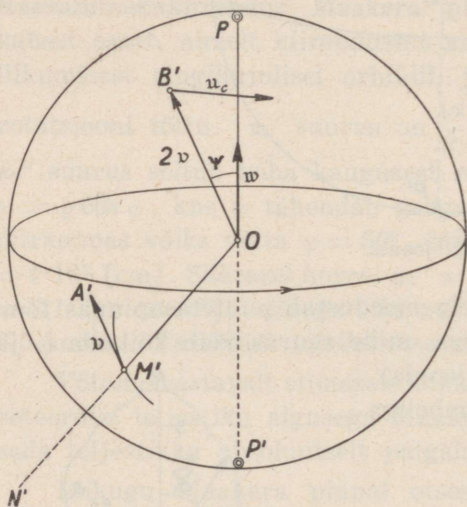


43. joonis.

teises lähenduses tuleb aga arvestada lisaks veel Coriolis'e kiirendust u_C ; relatiivse kiirenduse u_r tähendus jääb hoopis tagaplaanile.

42. joonisel on M võetud põhjapoolkeral; maapinnal kohas M seisva vaatleja pea on suunatud N poole; rotatsioonist ω tingitud B kiirus näib sellele vaatlejale suunatud olevat paremalt vasakule.

44. joonisel on M asemel võetud M' lõunapoolkeral, relatiivse kiirusvektorina esineb siin $\overrightarrow{M'A'}$ ja Maakera tsentrisse ülekantud



44. joonis.

kahekordne vektor on $\overrightarrow{OB'}$. Vaatleja pea asetseb nüüd N' suunas ja rotatsioon ω näib tema silmis toimuvat vasakult paremale, s. t. endisega võrreldes ümberpöörduna; Coriolis'e kiirenduse suund on lõunapoolkeral vastupidine sellele, mis ta oli põhjapoolkeral.

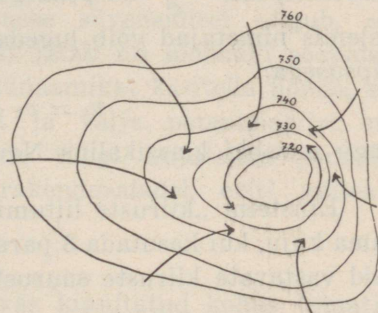
Meie oletasime, et rong on sunnitud liikuma otsesuunas. Selle sundolukorra üheks tulemuseks ongi kirjeldatud Coriolis'e kiirendus. Me-

haaniliselt on see sund realiseeritud rööbaste surve näol rongi ratastele. Reaktsiooni seaduse kohaselt peab sellele vastama rataste surve vastupidises suunas, s. t. säärasel sundliikumisel peab tekkima rongi surve rööbastele vastassuunaliselt Coriolis'e kiirendusele. Järelikult põhjapoolkeral peab tekkima eriline surve liikuva rongi poolt p a r e m p o o l s e l e rööpale, kusjuures rööbastiku siht maapinnal pole oluline. Ühesuunalise rongide liiklemise puhul peab seetõttu põhjapoolkeral parempoolne rööbas

kuluma kiiremini. Lõunapoolkeral vastupidiselt kiiremini kuluvaks peab osutama vasakpoolne rööbas. Statistilised andmed kinnitavadki neid väiteid.

Analoogiline efekt peab esile tulema jõgede voolamisel: põhjapoolkeral jõesängi parempoolne kallas peab kuluma enam kui vasakpoolne, lõunapoolkeral überpöördukt. Seega tuleb pidada loomulikuks, et jõesäng põhjapoolkeral üldiselt ilmutab paremale poole nihkumise tendentsi, jättes aja jooksul vasakpoolse kalda piirkonnas tasandiku endise jõe voolamise piirkonna jäänusena. Ka see leiab tegelikult üldiselt kinnitust suuremate jõgede puhul.

Puudub kindla keha surve, mis sunnib materiaalset punkti M liikuma „otsesuunas“ maapinnal, siis säärane M põhjapoolkeral peab maapinna suhtes otsesuunast kõrvale kalduma paremale, lõunapoolkeral vastupidi vasakule. Õhurõhu miinumist tingitud tuulesuund põhjapoolkeral peab seetõttu otsesuunast kalduma paremale, mille tulemusena peab tekkima tuule tsirkulatsioon ümber miinumikoha kellaosuti liikumisele vastupidiselt, kui pilti vaadata ülevalt (tsüklon, 45. joonis). Ka see seaduspärasus on meteoroloogidele hästi tuntud tegelikkudest vaatlustest.



45. joonis.

M ä r k u s. Eelmises paragraafis arendatud „relatiivse liikumise“ teooria põhineb eeldusel, et aega kujutav muutuja t , mille järgi toimus diferentsimine, peab nii absoluutses kui ka relatiivses teljestikus olema sama. See näiliselt endastmõistetav hüpotees on aga vastuolus sellega, et valguse kiirus $c = 3 \cdot 10^{10}$ [cm sec⁻¹], nagu juba 50 aastat tagasi peenelt korraldatud interferentsi põhimõttele rajatud katsed kinnitavad, jääb teljestikkudes, mis teineteise suhtes näitavad translatsiooni, samaks. Einstein'i relativistlik mehaanika arvestab seda tõsiasja, lähtudes

teisest hüpoteesist, mille järgi t peab olema erinevate teljestik-
kude puhul üldiselt erinev. Selle relativistliku mehaanika koha-
selt absoluutne kiirus ei saa enam olla kaasamineku kiiruse ja
relatiivse kiiruse summa, vaid seos on keerulisem. Vastavais
relativistlikes valemis mängib tähtsat osa just ülalmainitud
k o n s t a n t n e valguskiirus c . On näiteks v_k ja v_r omavahel
paralleelsed, seejuures nende suurused v_k ja v_r kohasel viisil
arvestatud märkidega pluss või miinus, siis, Einsteini järgi,

$$v_a = \frac{v_k + v_r}{1 + \frac{v_k v_r}{c^2}}.$$

On, nagu tavaliselt, v_k ja v_r õige väikesed valguskiirusega c
võrreldes, siis $\frac{v_k v_r}{c^2}$ on peaaegu null, mille tõttu praegukirjutatud
valemis nimetajad võib lugeda ühikuks ning seega, väga suure
täpsusega,

$$v_a = v_k + v_r,$$

nagu arvabki klassikaline Newtoni mehaanika.

Einsteini „kiiruste liitumise valemile“ võib anda läbipaist-
vama kuju, kui kasutada 3 parameetrit ν_a , ν_k , ν_r , sidudes viima-
seid vastavate kiiruste suurustega nõuete

$$v_a = c \operatorname{th} \nu_a, \quad v_k = c \operatorname{th} \nu_k, \quad v_r = c \operatorname{th} \nu_r$$

abil. Neis parameetris Einsteini kiiruste liitumise eeskiri kõlaks

$$\operatorname{th} \nu_a = \operatorname{th}(\nu_k + \nu_r).$$

Järelikult relativistliku kinemaatika seisukohalt ei liitu mitte
kiirused ise, vaid vastavad parameetrid ν_k ja ν_r .

Üldjuhul, kui v_k ja v_r ei ole omavahel paralleelsed, relativist-
liku mehaanika seisukohalt parameetrid ν_k , ν_r , ν_a näitavad ühe
kolmnurga külgede pikkusi, kusjuures aga selle kolmnurga ele-
mentide arvutamisel tuleb lähtuda mitte enam tavalisest eukleidi-
lisest geometriast, vaid nn. hüperboolse geometria (Lobatševski
geomeetria) seadustest.

II OSA.

Punkti dünaamika.

§ 18. Tung.

Newtoni vaadete kohaselt on liikumisnähtuste põhjendamine rajatud tungi mõistele. Kuigi asjasse süvenemisel selgub, et tuginemine tungi mõistele loogiliselt jätab nii mõndagi soovida, ja et sisuliselt järjekindlam oleks dünaamikat käsitleda nõnda, et jutt oleks vaid impulsist, energiast ja välja potentsiaalidest, on ometi praegu ikkagi kombeks jääda tungi kujutelma juurde, silmas pidades viimase sobivust rakendusosaladel, eriti näiteks inseneriteadustes.

Tung avaldub kahel viisil:

a) survena või tõmbena teatavas kinnitatud kohas (staatiline kontseptsioon);

b) kiirusvektori muutumist esilekutsuva põhjusena liikuva materiaalse punkti puhul (dünaamiline kontseptsioon).

Vastavalt neile kahele kontseptsioonile saab tunge mõõta kas staatiliste või aga dünaamiliste kaalutluste najal. Staatiliseks mõõtmiseks võib kasutada näiteks dünamomeetrit, jälgides tungi mõju vedru pikkusele. Dünaamilisel mõõtmisel tuleks määrata kiirendust, mis tungi mõjul tekib.

Katsed näitavad, et mõlemad mõõtmisviisid annavad ühesuguseid tulemusi ses mõttes, et juhul, kui staatilisel mõõtmisel tung \mathfrak{M} on osutunud tungist \mathfrak{B} n korda suuremaks, siis ka dünaamilisel mõõtmisel \mathfrak{M} poolt esilekutsutud kiirendus võrdsetel tingi-

mustel osutub samuti n korda suuremaks tungi \mathfrak{B} poolt esilekutsutud kiirendusest.

Tehnikas eelistatakse staatilist mõõtmist. Staatilisel käsitlusel tungi vektoriaalne iseloom on ilmne, sest surve või tõmbe puhul on tähtis mitte üksnes suurus, vaid ka suund. Dünaamilises käsitluses on see asjaolu rohkem varjatud kõverjoonelise liikumise puhul. Täpsel katsetamisel selgub aga, et siin, kokkõla saavutamiseks staatiliselt määratud tungi mõistega, tuleb tungi käsitada vektorina, mille suund ühtib kiirendusvektori suunaga. Just siis nimelt osutubki dünaamiliselt mõõdetud tung võrdeliseks staatiliselt mõõdetud tungiga. Seda väidabki Newtoni nn. teine põhiseadus:

Liikumise muutus (s. t. kiirendus) on võrdeline mõjuva tungiga ja langeb tungi kandesirgele.

Selles sõnastuses kiirendusvektorit määratakse just tungivektori kaudu, eeldades vaikselt, et viimane on juba varemini staatiliselt määratud.

Olgu \mathfrak{B} tungivektor, u kiirendusvektor, m teatav positiivne (skalaarne) võrdetegur. Newtoni teist põhiseadust võib siis kirjutada valemina

$$\mathfrak{B} = mu, \quad (57)$$

mis väljendabki esiteks tungivektori ja kiirendusvektori sama-suunalisust ja teiseks nende vektorite võrdelisust.

Võrdetegur on konstantne seni kui tungi dünaamilist mõõtmist teostatakse ühe ja sama materiaalse punkti liikumise jälgimise abil. Kui aga vahepeal asendatakse materiaalne punkt mõne teisega, siis ka võrdetegur m selle uue materiaalse punkti puhul võib osutada teiseks, jäädes aga jällegi konstantseks, seni kui kasutatakse ainuüksi seda teist punkti. Katsed kinnitavad neid väiteid väga suure täpsusega. Võrdetegur m iseloomustab materiaalse punkti käitumist tungide mõjul; seda tegurit m kutsutakse vastava materiaalse punkti **i n e r t s e k s m a s s i k s**.

Tähtsaks tungi eriliigiks on maapinna läheduses asetseva materiaalse punkti **r a s k u s** (raskustung), mille vektorsuund on vertikaalne ülevalt allapoole. Staatilistel tungimõõtmistel kasu-

tatakse just teatavate kehade raskusi võrdlustungidena, s. t. tungiühikutena. Nii näiteks on tehniline (staatiline) tungiühik 1 kg väga suure täpsusega võrdne 1000 cm^3 puhta vee raskusega 4° C temperatuuri puhul, merepinna nivool, Pariisi geograafilisel laiusel.

Raskustungi võib staatiliste kaalutluste najal kujutella rakendatuna keha massikeskmes, s. t. teatavas geomeetrilises punktis. See omakorda võimaldab neis küsimustes kehi käsitleda materiaalseste punktidena, kui lisaks kujutella, et katsetamisel nähtavale tulev keha inertne mass m on koondatud tervikuna just selle massikeskme kohas.

Juba Galilei jõudis äratundmisele, et raskustung kutsub kõikide kehade juures esile võrdseid kiirendusi; hilisemad täpsed katsed on seda veenvalt kinnitanud. Teiselt poolt aga igapäevaste kogemuste najal teame, et kehade raskused on omavahel vägagi erinevad. Ilmsesti, valemi (57) põhjal erijuhul, kus u on raskusest tingitud kõikidel kehadel sama kiirendus, vastav raskus P peab osutama võrdeliseks vastava keha inertse massiga m . Raskus on seega inertse massi põhiomadus, kasvades just proportsionaalselt inertse massiga. Ühtlasi kogemused näitavad, et kahe täpselt samasuguse keha liitumisel uueks tervikuks viimane omab ka täpselt kahekordset raskust, s. t. ülaltoodu põhjal ka täpselt kahekordset inertset massi; seejuures kehade kuju ei mängi mingit osa. Säärane kaalutus viib kujutelmale, mille järgi raskust määrab vaid kehas peituv „ainehulk“, mis nagu allubki raskusele. Lähtudes ainehulga kujutelmast, räägitaksegi sageli keha „raskest“ massist, mis peaks järelikult olema selle ainehulga arvuliseks väljendajaks. Definiitsiooni kohaselt see raske mass peab olema võrdeline vastava keha kaaluga. Kuid, nagu nägime, keha inertne mass on samuti võrdeline keha kaaluga, järelikult raske mass ja inertne mass on omavahel võrdelised. Raske mass määrab raskustungi staatiliselt, inertne mass dünaamiliselt (nimelt selle kaudu, et kiirendus raskustungi mõjul osutub kõikidel kehadel samaks). Mõlema massikujutelma sisuline ühtivus väljendubki selles, et staatiline ja dünaamiline tungimõõtmine annab ühtivaid tulemusi.

Valides mõõduühikuid nõnda, et võrdeteguriks oleks ühik, mis võrdeliste suuruste puhul on alati võimalik, saame inertset massi ja rasket massi väljendada sama arvuga. Seega langeb aga üldse ära vahetegemise vajadus nende kahte liiki massimõistete vahel. Tegelikult räägitaksegi tavaliselt lihtsalt keha või materiaalse punkti massist; kas see mass on mõeldud inertsenä või raskena, pole oluline, — mõlemad mõisted on, nagu katsed kinnitavad, täpselt ekvivalentsed. On valemis (57) ühe keha puhul suurus m teatav arv kordi suurem kui teisel kehal, siis esimene keha kaalub sama arv kordi enam kui teine.

C-G-S süsteemis on massiühikuks gramm [g], mis suure täpsusega vastab 1,000 027 cm³ puhta vee massile 4° C ja normaalrõhumise puhul. Tehnilises ühikute süsteemis, kus põhiühikuteks on tung 1 kg, pikkus 1 m ja aeg 1 sec, massiühikuks (57) põhjal osutub säärane mass, mis omaks kiirendust 1 [m sec⁻²], kui selle massi juures rakendada tungi 1 [kg]. Säärase massiga keha peaks kaaluma umbes 9,81 [kg]. See selgub järgmiste kaalutluste najal:

Katsed näitavad, et enda raskuse mõjul keha omab maapinna läheduses kiirendust, mille suurus on umbes 981 [cm sec⁻²]; seda raskuskiirenduse suurust tähistatakse tavaliselt sümboliga g . (57) põhjal raskustungi suurus R peab olema raskuskiirenduse suuruse m -kordne:

$$R = mg . \quad (58)$$

Kui nüüd keha, mille mass võrdub tehnilise massiühikuga, tungi 1 [kg] mõjul omab vaid kiirendust 100 [cm sec⁻²], oma raskuse mõjul aga, nagu kõik teisedki kehad, peab omama kiirendust 981 [cm sec⁻²], siis tähendab see, et mainitud kehale mõjuv raskustung (keha kaal) peab olema 9,81 korda suurem kui tung 1 [kg], teiste sõnadega, see mass kaalub 9,81 kilogrammi.

Raskuskiirenduse suurus g sõltub vähesel määral kohast maapinnal. Rahvusvahelise kokkuleppe alusel (1930) arvutatakse g väärtust olenevalt koha geograafilisest laiuselt φ ja kõrgusest H [m] merepinna suhtes järgmise valemi põhjal:

$$g = 978,049 (1 + 0,005288 \sin^2 \varphi - 0,000006 \sin^2 2\varphi) - 0,0003086 H,$$

C-G-S-ühikuis [cm sec⁻²]. Võttes $\varphi = 50^\circ$, $H = 0$, saamegi umbes $g = 981$.

Dünaamiliseks C-G-S-tungiühikuks on tung, mis annab masile 1 [g] kiirenduse 1 [cm sec⁻²]; selle tungi nimetuseks on düün [Dyn]. Jämedas lähenduses 1 Dyn vastab umbes 0,000001 kilogramm-tungile, s. t. 1 milligramm-tungile. Suurema tungiühikuna kasutatakse C-G-S-süsteemis megadüüni, mis võrdub 10⁶ düüniga, vastates seega umbes 1 kilogramm-tungile. Täpsemalt on uusimate mõõtmiste najal:

1 kilogramm-tung = 980616 düüni = 0,980616 megadüüni;

1 megadüün = 1,019767 kilogramm-tungi.

Nii teoreetiliselt kui ka praktiliselt on C-G-S-süsteem, kus põhiühikuteks on [g], [cm], [sec], mugavam kui tehniline süsteem oma põhiühikutega [kg] (tung!), [m], [sec]. Kui siiski tehnikas tavaliselt eelistatakse viimast süsteemi, siis on see tingitud peamiselt sellest, et inseneripraksises mõõdetakse tunde enamasti staatiliselt, mille tagajärjel tundub nagu loomulik olevat lähtuda otseselt tungist, mitte aga massist. Selle eest tuleb aga siis ka paratamatult leppida murdarvuliste võrdeteguritega paljudes arvutusvalemities, kus C-G-S-süsteemi tarvitamise puhul oleks esinenud võrdetegur 1. Sellest on tingitud ka, et inseneridele antavad käsivalemid mõnikord näiliselt erinevad sama asja käsitlevaist valemest füüsika õpperaamatutes, — viimastes on nimelt peaaegu eranditult tarvitusel C-G-S-süsteem. Eksituste vältimiseks arvutamise tulemustes tuleb iga kord hoolsalt silmas pidada põhiühikute süsteemi, millele see arvutamine on rajatud. Olgu veel tähendatud, et paljudel juhtudel tehniliste ühikutena kasutatakse [cm] meetri asemel ja ühtlasi [min] sekundi asemel. Kirjanduse kasutamisel tuleb seetõttu alati kõigepealt selgitada, milliseid ühikuid autor tarvitab.

Sümbol [kg] tähendab enamikul juhtudel tehnilist ühikut kilogramm-tungi; sümbol [g] tähendab peaaegu alati C-G-S-

ühikut gramm - m a s s i. Mõnikord esinevad siiski juhud, kus kirjutusega [kg] mõeldakse kilogramm-massi, ja ka juhud, kus [g] on mõeldud gramm-tungina. Arusaamatuste vältimiseks sageli autorid kasutavad sel puhul eristusmärke näiteks tähe * näol.

§ 19. Newtoni kolm põhiseadust.

Massi $m > 0$ esinemine on materiaalse punkti oluliseks tunnuseks. Mida suurem on m , seda väiksem on kiirenduse u suurus ühe ja sama tungi \mathfrak{F} mõjul, nagu seda otseselt näitab põhivalem (57), mis väidab, et

tungivektor on kiirendusvektori m -kordne.

Sisuliselt peitub selles sõnastuses vaid tungivektori definitsioon, eeldusel, et mass on aktsepteeritud põhimõistena. Kui aga pidada võimalikuks luua kujutelma tungist täiesti sõltumatult massi ja kiirenduse mõistest, toetudes näiteks staatilistele kaalutlustele, siis ülalantud lause omab teissugust ilmet, — ta pole siis mitte enam tundmatuks loetud tungi mõiste definitsioon, vaid kujutab katsetulemuste najal püstitatud postulaati, mis selgitab, kuidas kolm juba tuntud mõistet — tung, mass, kiirendus — on omavahel seotud. Viimasel seisukohal asus Newton mehaanika loomisel; sellest seisukohast lähtutakse praegugi inseneriteaduslikudes distsipliinides. Newtoni algeline sõnastus sellele postulaadile kõlas järgmiselt:

Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae et fieri secundum lineam rectam, qua vis illa imprimitur.

Tõlkes see tähendab:

Liikumise muutus on võrdeline liikumist mõjustava tungiga ning langeb samale sirgele, millel mõjub tung.

Praegusel ajal ebamäärasena tunduv ütlus „liikumise muutus“ on mõttekohaselt asendatav pretsiseeritud mõistega „kiirendus“. Massist Newtoni sõnastus otseselt ei räägi, kuid võrdelisuus eeldab *eo ipso* võrdetegurit, — seda olemegi defineerinud masina m .

Tsiteeritud Newtoni lauset kutsutakse Newtoni teiseks põhiseaduseks mehaanikas. Tema on sisuliselt samaväärne paragraafi alguses formuleeritud lausega.

Erijuhul, kui tung üldse kaob, järgneb sellest lausest, et siis ka kiirendus peab kaduma ja ümberpöörduvalt. Vastav materiaalne punkt, millele tungid üldse ei mõju, peab seega liikuma ühtlaselt ja sirgjooneliselt. See on inertsi seadus, mis Newtoni poolt on sõnastatud järgmiselt:

Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus illud a viribus impressis cogitur, statum suum mutare.

Tõlgitult see kõlaks:

Iga keha püsib paigalseisu või ühtlase sirgjoonelise liikumise olekus seni, kuni mingid temale mõjuvad tungid ei sunni teda seda olekut muutma.

Praegu-antud sõnastust kutsutakse Newtoni esimeseks põhiseaduseks mehaanikas. Nagu nägime, on ta loogiline järeldus teisest põhiseadusest. Asi vajab aga veel pretsiseerimist alljärgnevate kaalutluste najal.

Me selgitasime § 17, et kiirendus ühe ja sama liikumise puhul sõltub valitud teljestikust, mille suhtes liikumist jälgitakse. On hästi mõeldav, et ühes teljestikus punkt ei oma kiirendust, teises aga küll. Klassikalise Newtoni seisukohalt kõrvaldab selle raskuse eelistatud paigalseisva teljestiku mõiste loomine, kus alguspunkt on mõeldud Päikese keskkohas ja teljed on suunatud teatavate kinnistähtede poole (kolmandas peatükis selgub, et praegu-kirjeldatud „absoluutselt paigalseisva“ teljestiku aset võivad täita ka sobivalt valitud teised, mis selle esimese suhtes ikkagi osutuvad liikuvaiks).

Newtoni järgi ainult sääraseid tunge tuleks arvestada „reaalselt olemasolevatena“, mis (57) kohaselt kutsuvad esile kiirenduse just praegu kirjeldatud eelistatud paigalseisva teljestiku suhtes. Kui aga kiirendus tuleb ilmsiks vaid tänu sellele, et teljestik on valitud teisiti, siis klassikaline mehaanika kutsub

vastavaid tunge „näilisteks“. Jäädes selle klassikalise kujutelmajuurde, räägime siin edaspidi tungidest ilma lisandita üksnes sel korral, kui tegemist on ülalmainitud mõttes „reaalsete“ tungidega. Olgu mööda minnes tähendatud, et Einsteini relativistlikus mehaanikas vahetegemine reaalsete ja näiliste tungide vahel on põhjendatud kaalutlustel heidetud kõrvale.

Inertsiseaduse täpsustatud mõte seisab selles, et reaalsete tungide puudumisel ei teki kiirendust ülalmainitud eelistatud teljestiku suhtes. Olgugi et see seisukoht on loogiliselt korrektne, tundub ta siiski liiga abstraktsena. Seetõttu on püütud läheneda küsimusele pisut teisiti:

Füüsikute kujutelmade kohaselt tungi antud materiaalse punkti A juures võib esile kutsuda ainult mingi teine materiaalne punkt B . Toetudes kogemustele, täiendatakse seda kujutelmaveel sellega, et B saab mõjustada materiaalselt punkti A üksnes siis, kui B ei asetse liiga kaugel A asukohast. Kui nüüd kõik teised materiaalsed punktid B asetsevad A asukohast niivõrra kaugel, et mõjustamisest ei saa enam juttu olla, siis öeldakse, et A on välismõjudest eraldatud. Inertsiseadus väidab, et välismõjudest eraldatud materiaalne punkt ei saa omada kiirendust eelistatud paigalseisva teljestiku suhtes. Oluline on siin võimaluse eitamine, mille järgi A vahest võiks ise end juures esile kutsuda tungi, mis annaks temale kiirenduse. Seega inertsiseadus omab täpset sisu ainult siis, kui on arvestatud ka mõeldavate tungide päritolu.

Nende täiendustega tuleks inertsiseadus sõnastada järgnevalt:

Eelistatud absoluutselt paigalseisva teljestiku suhtes materiaalne punkt liigub ühtlaselt ja sirgjooneliselt nii kaua, kui kaua ta on isoleeritud välismõjudest.

Et tegelikku isolatsiooni välismõjudest saab teostada alati vaid teatava määrani, siis eksperimentaalselt otsesed katsed saavad kinnitada seda seaduse kehtivust vaid teatava määrani. Väitega, et seadus on kehtiv absoluutse täpsusega, oleme järelikult püstitanud ainult teatava postulaadi loogiliste deduktsioo-

nide teostamiseks. Kuni sellest postulaadist tehtud järeldused ei ole ilmses vastuolus katseliste kogemustega, pole kaaluvat põhjust kahelda postulaadi kehtivuses.

Tungi päritolu arvestamisel selgub ühtlasi Newtoni kolmanda põhiseaduse — nn. reaktsiooni seaduse — täpsustatud mõte. Newtoni redaktsioonis see seadus kõlab järgmiselt:

Actioni contrariam semper et aequalem esse reactionem; sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse aequales et in partes contrarias dirigi.

Tõlgitult see kõlab:

Igale mõjule vastab alati vastassuunaline ja võrdne vastumõju, teiste sõnadega, kahe keha vastastikused mõjustused on alati võrdsed ja vastupidi suunatud.

Pisut üksikasjalisemalt väljendame seda mõtet järgnevate sõnadega:

Kui materiaalne punkt *B* kutsub esile materiaalse punkti *A* juures mingisuguse tungi, siis alati ka ümberpöörduvalt *A* kutsub *B* juures esile niisama suure, kuid vastupidiselt suunatud tungi.

Kuigi see Newtoni ülalantud sõnastuses ei ole eksplitsiitselt väljendatud, teeb tavaline klassikaline mehaanika harilikult veel lisahüpooteesi, et tungivektor ja reaktsioonitungi vektor langevad ühisele kandesirgele. Sellele lisahüpooteesile on näiteks rajatud nn. impulssmomentide lause süsteemi dünaamikas (peatükk III). Praegu tuleb aga arvestada tegelikkuses esinevaid juhtumeid, kus see lisahüpootees ja ühes sellega temale rajatud järeldused ei pea paika. Nii näiteks magnetipooluse ja elektri-voolukandja vastastikune mõju väljendub tungipaari tekkimises, s. t. tung ja reaktsioonitung on siin küll võrdsed ja vastassuunalised, kuid kandesirged on erinevad. Sellest tungipaarist ongi näiteks tingitud elektrimootori töötamine.

M ä r k u s: Newtoni põhiseaduste täpse kehtivuse küsimust on uusimal ajal uute avastatud loodusnähtuste najal põhjalikult uuritud. Seejuures on selgunud, et inertsia seadus on planeetidevahelises ulatuses ja isegi Linnutee piirides kindlasti täidetud,

kuid tunduvalt suuremal kaugusel asetsevad udukogud näitavad omapärast käitumist, mis ei taha hästi sobida väitega, et Newtoni inertsi seadus kehtib maailma koguulatuses. Teine põhiseadus osutub ebatäpseks väga suurte kiiruste puhul, kui lugeda tungi staatiliselt defineerituks: katoodkiirte puhul, kus elektronide kiirused võivad olla $100\,000\text{ km sec}^{-1}$ ja veelgi rohkem, on kiirendus ühe ja sama tungi mõjul järjest vähenev, kui kiirus kasvab. Reaktsiooni seaduse kohta on avaldatud ka mõningaid kahtlusi, kuigi küsimus siin on veel ebaselge. Inseneriteadustes arvesse tuleva täpsusega tuleb Newtoni põhiseadusi igatahes tunnistada vastuvaidlematult kehtivaiks.

§ 20. Punkti dünaamika põhivõrrandid.

Käesolevas teises osas tuleb käsitlemisele vaid ühe üksikult mõeldud materiaalse punkti liikumine selles punktis rakendatud tungide mõjul; kõnealuse materiaalse punkti mass on, nagu varem inigi, tähistatud sümboliga m . See materiaalne punkt allub välismõjudele — tungidele, kuid punkti dünaamika peatükis nende tungide päritolu on kõrvalise tähtsusega; ei tule siin järelikult rakendamisele reaktsiooni seadus, sest pole huvi selle vastu, kuidas kõnealune materiaalne punkt mõjustab teisi materiaal-seid punkte. Võiks arvata, et kogu punkti dünaamika küsimuste kompleks on teataval määral fiktiivne, sest tegelikus olukorras ei leidu ju säärast eset, millel mass oleks lõplik, ruumiline suurus aga null; hiljemini, III osas, selgub aga siiski, et punkti dünaamika käsitleb päris reaalseid olukordi.

Kui pole öeldud teisiti, siis aluseks on meil edaspidi võetud eelmises paragraafis mainitud eelistatud absoluutselt paigalseisev teljestik, või, mis ei tee sisulist vahet, mõni teine teljestik, millest aga on eeldatud, et ta selle eelistatud teljestiku suhtes püsib paigal.

Jälgitava materiaalse punkti M (massiga m) koordinaadid olgu x, y, z . Need koordinaadid on aja t funktsioonid. M koha-vektor olgu endiselt \mathbf{r} . Punkti M kiirendusvektor \mathbf{u} omab pro-

jektsoone \ddot{x} , \ddot{y} , \ddot{z} . Punktis M on rakendatud mingisugused tungid $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \dots$, mis seetõttu, et neil rakenduskoht on ühine, nimelt M , on alati asendatavad üheainsa tungiga \mathfrak{F} . Selle resultanttungi \mathfrak{F} projektsioone tähistame sümboolitega X, Y, Z . Need projektsioonid on teatavasti komponenttungide vastavate projektsioonide summad:

$$X = \sum X_\nu, \quad Y = \sum Y_\nu, \quad Z = \sum Z_\nu,$$

kus X_ν, Y_ν, Z_ν tähendavad komponenttungi \mathfrak{F}_ν projektsioone.

Võttes arvesse, et kiirendus \ddot{r} on samaväärne vektoriga \ddot{r} , võime (57) antud juhul kirjutada kujul

$$m\ddot{r} = \mathfrak{F}. \quad (59)$$

Tarvitades vektoriaalse kirjutusviisi asemel kirjutust projektsioonides, saame (59) asemel 3 võrrandit:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= X \\ m\ddot{y} &= Y \\ m\ddot{z} &= Z. \end{aligned} \quad (60)$$

Võrrandeid (60) kutsutakse punkti dünaamika põhivõrrandeks. (59) on dünaamika põhivõrrand vektoriaalsel kujul.

X, Y, Z võivad sõltuda mitmest asjaolust, näiteks kohast, s. t. koordinaatidest x, y, z rakenduskoahas M , ja ka ajast t . Kaudselt nad sõltuvad siis ajast t ka juba selle tõttu, et nad sõltuvad suurustest x, y, z , mis muutuvad ühes t -ga. Sellele lisaks võib aga tulla ka otsene sõltuvus t -st, sest on mõeldav, et tung \mathfrak{F} samas kohas aja jooksul muutub. Diferentsimistehete rakendamisel tuleb enne selgitada, kas otsene sõltuvus t -st tuleb arvesse või mitte. Jaataval korral X täisdiferentsiaal dX on

$$dX = \frac{\partial X}{\partial x} dx + \frac{\partial X}{\partial y} dy + \frac{\partial X}{\partial z} dz + \frac{\partial X}{\partial t} dt,$$

kuna eitaval korral siin viimane liige paremat kätt langeb ära, sest osatuletis $\frac{\partial X}{\partial t}$ on siis null.

Tung \mathfrak{F} võib sõltuda ka veel teistest asjaoludest, näiteks punkti M hetkelisest kiirusest v ; säärased juhud mängivad tähtsat osa ballistika küsimustes.

Kui \mathfrak{F} sõltub ainuüksi koordinaatidest x, y, z , ajast t otse-
selt aga mitte, siis öeldakse, et materiaalsele punktile M mõjub
„statsionaarne tungiväli“.

Põhivõrrandid (60), kus esinevad teise järgu tuletised
 $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$, kujundavad teise järgu diferentsiaalvõrrandite süs-
teemi kolme tundmatu funktsiooni $x(t), y(t), z(t)$ jaoks. On
need diferentsiaalvõrrandid integritud, s. t. on need 3 funk-
tsiooni leitud, siis punkti M liikumine on määratud. Üldjuhul
mainitud diferentsiaalvõrrandite integrimine võib osutada õige
raskeks ülesandeks. Erandjuhtudel integrimine toimub võrdle-
misi lihtsalt. Sääraseks lihtsaks erijuhuks on näiteks olu-
kord, kus tung \mathfrak{F} üldse osutub konstantseks, s. t. kus $X = A$,
 $Y = B$, $Z = C$. Siis iga diferentsiaalvõrrand on hõlpsasti
integritav omaette:

$$\begin{aligned} m \ddot{x} &= A, & m \dot{x} &= At + \alpha, & m x &= \frac{1}{2} At^2 + at + a \\ m \ddot{y} &= B, & m \dot{y} &= Bt + \beta, & m y &= \frac{1}{2} Bt^2 + \beta t + b \\ m \ddot{z} &= C, & m \dot{z} &= Ct + \gamma, & m z &= \frac{1}{2} Ct^2 + \gamma t + c. \end{aligned}$$

Siin $\alpha, \beta, \gamma, a, b, c$ tähendavad meelevaldseid integrimis-
konstante.

Leitud tulemuste selgemaks mõistmiseks valime telgede
suunad nõnda, et konstantne tung \mathfrak{F} oleks paralleelne z -teljega;
siis kindlasti $X = 0$, $Y = 0$, s. t. $A = 0$, $B = 0$. Punkti M
trajektoor on selle valiku puhul määratud võrranditega:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\alpha}{m} t + \frac{a}{m} \\ y &= \frac{\beta}{m} t + \frac{b}{m} \\ z &= \frac{1}{2} \frac{C}{m} t^2 + \frac{\gamma}{m} t + \frac{c}{m}. \end{aligned}$$

Elimineerides siin kahest esimesest võrrandist t , järeldame

$$\frac{mx - a}{\alpha} = \frac{my - b}{\beta}.$$

See projektiv silinder on järelikult z -teljega (s. t. tungiga \mathfrak{F})
paralleelne tasapind; niisiis trajektoor on kindlasti tasapinnaline.

Elimineerides t teisest ja kolmandast võrrandist, leiame:

$$z = Py^2 + Qy + R,$$

kus P , Q , R on teatavad konstandid, nimelt

$$P = \frac{Cm}{2\beta^2}, \quad Q = \frac{\beta\gamma - BC}{\beta^2}, \quad R = \frac{Cb^2 - 2\beta\gamma b + c\beta^2}{2m\beta^2}.$$

See teine projektiv silinder, nagu näha, osutub paraboolseks. Trajektoori ise, olles paraboolse silindri lõikejoon tasapinnaga, on parabool. Niisiis:

Konstantse tungi mõjul materiaalne punkt liigub paraboolil, mille tasapind on tungiga paralleelne.

Maapinna läheduses võib piiratud alal materiaalsele punktile mõjuvat raskustungi lugeda konstantseks; järelikult maapinna läheduses materiaalne punkt, mis allub ainuüksi raskustungile, peab liikuma paraboolil vertikaaltasapinnas. Olukord muutuks muidugi oluliselt, kui peale raskustungi mõjuvad veel mingisugused teised tungid, näiteks õhutakistus.

Erakorraliste algtingimuste puhul, tähendab, erikujuliste integrimiskonstantide valiku puhul, võib parabool kõduneda sirgeks jooneks.

Peatume lühidalt erijuhul, kus \mathfrak{B} on raskustung. On z -telg suunatud vertikaalselt ülespoole, siis $A = 0$, $B = 0$, $C = -mg$, kus g tähendab raskuskiirendust. Oletame veel, et alghetkel $t = 0$ liikuv materiaalne punkt asetseb koordinaatide alguses, — siis on kerge veenduda, et integrimiskonstandid a , b , c peavad olema nullid. Oletame veel, et samal alghetkel $t = 0$ punkt M omas kiirust v_0 (algkiirust), mille vektor asetseb x - z -tasapinnal, moodustades x -teljega nurga φ . Siis algkiiruse projektsioon x -teljele on $v_0 \cos \varphi$, projektsioon y -teljele on 0 ja projektsioon z -teljele on $v_0 \sin \varphi$. See nõuab, et integrimiskonstant α omaks väärtust $mv_0 \cos \varphi$, kuna β oleks 0 ja γ oleks $mv_0 \sin \varphi$. Asetades neid algtingimuste põhjal määratud integrimiskonstantide väärtusi võrranditesse, leiame, jättes ära ühisteguri m :

$$x = v_0 t \cos \varphi, \quad y = 0, \quad z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin \varphi,$$

millega liikumine on määratud algtingimustele vastava erilahendina. On $\varphi = 90^\circ$, s. t. liigub M alghetkel vertikaalselt ülespoole, siis ka $x = 0$ ning trajektoori on osa z -teljest.

Märkus: Käsitelles praegu materiaalse punkti liikumist raskustungi mõjul maapinna läheduses, oletasime vaikselt, et maapind ja temaga seotud x - y - z -teljestik püsib paigal. See pole enam õige, kui lähtuda varemini-mainitud eelistatud paigalseisvast teljestikust, juba sellepärast mitte, et Maa roteerub eelistatud teljestiku suhtes. Sellest tingitud viga on aga tavalises olukorras võrdlemisi väike, sest, nagu varemini nägime (§ 17), antud juhul on näiteks Coriolis'e kiirendus ikkagi õige väike. Esimeses lähenduses loetakse harilikult ballistika küsimuste puhul Maakera paigalseisvaks. Eksaktsemas käsitluses tuleks aga võrrandi (59) rakendamisel Maakeraga kaasa mineva teljestiku kohta paremat kätt arvestada rotatsioonist tingitud näilisi lisatunge.

§ 21. Üldlahendi ja esimese integraali mõiste.

Pöördudes tagasi diferentsiaalvõrrandite süsteemi (60) juurde üldkujul, paneme tähele järgmist:

1) Teise järgu kolme diferentsiaalvõrrandi süsteem (60) määrab 3 funktsiooni x , y , z muutujast t . Kuid ka \dot{x} , \dot{y} , \dot{z} on muutuja t funktsioonid ning $\ddot{x} = \frac{dx}{dt}$ jne., mille tõttu süsteemi (60) tohib asendada kuuest võrrandist koosneva esimese järgu diferentsiaalvõrrandite süsteemiga

$$\begin{aligned} m\dot{dx} &= Xdt, & m\dot{dy} &= Ydt, & m\dot{dz} &= Zdt \\ dx &= \dot{x}dt, & dy &= \dot{y}dt, & dz &= \dot{z}dt. \end{aligned} \quad (61)$$

See esimese järgu süsteem määrab 6 funktsiooni x , y , z , \dot{x} , \dot{y} , \dot{z} muutujast t . Süsteemid (60) ja (61) on samaväärsed. Nende integrimisel tuleb arvestada kuue meelevaldse integrimiskonstandi C_1 , C_2 , C_3 , C_4 , C_5 , C_6 tekkimist, mis võivad esineda igas integrimise teel leitud funktsioonis x , y , z , \dot{x} , \dot{y} , \dot{z} :

On mõeldav, et seostest (66) saab teha järelduse, mille kujuks on

$$\psi(C_1, C_2, \dots, C_n) = 0,$$

kus ψ on teatav funktsioon, mille argumentide hulgas $t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ enam ei leidu. Kui säärase järelduse tegemine osutub võimatuks, siis öeldakse, et esimesed integraalid (66) on omavahel erinevad. On $n \geq 7$, siis esimesed integraalid (66) kindlasti ei saa olla omavahel kõik erinevad. Tõepoolest, kui $n > 7$, siis saab kaheksast võrrandist (66) kindlasti elimineerida 7 suurust $t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$, mille tagajärjel tekibki seos $\psi(C_1, C_2, \dots, C_8) = 0$. On aga $n = 7$, siis seitsmest seostest (66) saab ikkagi elimineerida 6 suurust $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$, mis annaks seose $\psi(C_1, C_2, C_7, t) = 0$; viimane moodustaks diferentsiaalvõrrandite süsteemi (60) loogilise järelduse ja kehtiks seega igal t puhul, — kehtivus igal t puhul on aga võimalik vaid siis, kui ainus ülejäänud muutuja t selles järelduses üldse ei esine; seega oleks ikkagi saadud seos $\psi(C_1, \dots, C_7) = 0$, tähendab, esimesed integraalid ei saaks olla omavahel erinevad. Niisiis:

Omavahel erinevate esimeste integraalide üldarvuks on maksimaalselt kuus.

Esimeste integraalide omavahelise erinevuse nõue ilmsesti tähendab seda, et ükski neist ei tohi kujuneda ülejäänute loogiliseks järelduseks.

6) Niipea kui on õnnestunud kuue omavahel erineva esimese integraali leidmine, avaneb kohe võimalus üldintegraalide koostamiseks. Tõepoolest, jääb vaid lahendada esimesi integraale väljendavad 6 võrrandit kuue suuruse $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ kui tundmatute suhtes, millega igaüks neist viimastest ongi saadud aja t ja kuue meelevaldse konstandi C_1, \dots, C_6 funktsioonina. See toiming on puht-algebraline, ta ei vaja enam mingit integreerimist.

7) On leitud omavahel erinevate esimeste integraalide arv väiksem kui kuus, siis igatahes saab nende najal osa suurustest $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ muutuja t ja meelevaldsete konstantide kaudu

väljendada. Asendades need väljendused diferentsiaalvõrrandite süsteemi (60) või (61), saame diferentsiaalvõrrandite süsteemi ülejäänute funktsioonide jaoks, millede arv on kuuest just nii mitme ühiku võrra väiksem, mitu esimest integraali on saadud kasutada. Seega probleemi lahendamine taandub matemaatiliselt lihtsamale, niipea kui mõnedki esimesed integraalid on käes. Selles peitubki esijoonel esimeste integraalide tähtsus mehaanika küsimustes.

Asja selgitamiseks käsitleme siin veel kord konstantse tungi erijuhtumit, millest jutt oli juba eelnevas paragraafis, kasutades aga nüüd esimese integraali mõistet. On $X = A$, $Y = B$, $Z = C$, siis põhivõrrandite süsteemi (61) saab kirjutada kujul

$$m\dot{x} = A dt, \quad m\dot{y} = B dt, \quad m\dot{z} = C dt$$

$$dx = \dot{x} dt, \quad dy = \dot{y} dt, \quad dz = \dot{z} dt.$$

Kolm esimest neist võrrandeist saab kirjutada kujul

$$d(m\dot{x} - At) = 0, \quad d(m\dot{y} - Bt) = 0, \quad d(m\dot{z} - Ct) = 0,$$

millest kohe järgneb 3 esimest integraali

$$m\dot{x} - At = \alpha, \quad m\dot{y} - Bt = \beta, \quad m\dot{z} - Ct = \gamma.$$

Need integraalid on omavahel erinevad. Lahendades neid \dot{x} , \dot{y} , \dot{z} suhtes ning asetades tulemused ülejäänud kolme diferentsiaalvõrrandisse, saame

$$dx = \left(\frac{A}{m}t + \frac{\alpha}{m}\right) dt, \quad dy = \left(\frac{B}{m}t + \frac{\beta}{m}\right) dt, \quad dz = \left(\frac{C}{m}t + \frac{\gamma}{m}\right) dt,$$

kust otsene integrimine annab

$$x = \frac{1}{2} \frac{A}{m} t^2 + \frac{\alpha}{m} t + a, \quad y = \frac{1}{2} \frac{B}{m} t^2 + \frac{\beta}{m} t + b,$$

$$z = \frac{1}{2} \frac{C}{m} t^2 + \frac{\gamma}{m} t + c,$$

nagu varemingi. Antud erijuhul esimeste integraalide kasutamine ei too olulisi erinevusi lahenduskäigus, tegelikult kordub endine protsess. Keerulisematel juhtudel esimeste integraalidega töötamine võib aga pakkuda väärtuslikke hõlbustusi. Järgneva-

tes paragraafides tulevad kõne alla mõned üldise ilmega võtted, mis sobivas olukorras annavad esimesi integraale.

M ä r k u s: Klassikalise mehaanika kujutelmade kohaselt antud tungidest tekitatud liikumine peab olema määratud üheselt, kui on teada algasend ja algkiirus. Puhtmatemaatiliselt vaadatuna annab süsteemi (60) lahendamine x, y, z üheste funktsioonidena ainult siis, kui X, Y, Z rahuldavad teatavaid matemaatilisi nõudeid, millede lähem arutus ületaks käesoleva kursuse raamistiku. Tähtis on igatahes aga silmas pidada, et mehaanika *eo ipso* saab arvestada vaid sääraseid tunge, kus need nõuded leiavad täitmist, — vastasel korral „põhjus“ (tung) ei määraks „tulemust“ (liikumist) üheselt.

§ 22. Impulss, impulssmoment ja pindalalause.

Tungivektor \mathfrak{F} põhivõrrandi (59) kohaselt on kiirendusvektori $\ddot{\mathbf{r}}$ ehk n m -kordne. Vaadeldes kiirusvektori $\dot{\mathbf{r}}$ ehk \mathbf{v} m -kordset, saame nn. impulsi vektori \mathfrak{p} :

$$\mathfrak{p} = m\dot{\mathbf{r}} = m\mathbf{v}. \quad (67)$$

Impulsi vektori suurust $|\mathfrak{p}|$ tähistatakse tavaliselt sümboliga p , impulsi vektori projektsioone vastavalt p_x, p_y, p_z . (67) kohaselt on

$$p_x = m\dot{x}, \quad p_y = m\dot{y}, \quad p_z = m\dot{z}. \quad (68)$$

Impulsi vektori \mathfrak{p} kutsutakse mõnikord ka (vanema nimetusega) liikumishulgaks.

Kõrvutades (67) põhivõrrandiga (59), järeldame:

$$\dot{\mathfrak{p}} = \mathfrak{F}. \quad (69)$$

See kirjutis väljendab dünaamika põhivõrrandit uuel kujul:

Impulsi tuletis võrdub punktile mõjuva tungiga.

Seda väidet kutsutakse mehaanikas impulsilauseks.

Impulsilausest järgneb kohe, et neil erijuhtudel, kus tung on jäävalt risti teatava suunaga, ütleme x -suunaga, impulsi projektsioon vastavale suunale peab kogu liikumise vältel osutama konstantseks. On nimelt $X = 0$, siis (69) põhjal peab olema

$\dot{p}_x = 0$ ja seetõttu $p_x = C$. See ongi säärasel erijuhul juba üks esimene integraal, kui silmas pidada, et definitsiooni kohaselt p_x asemel võib kirjutada $m\dot{x}$.

On tungivektor alaliselt paralleelne teatava sihiga, ütleme z -sihiga, siis on ta ühtlasi kindlasti risti kahe suunaga, antud oletusel nimelt x - ja y -suunaga. Seega säärases olukorras võime kirjutada kohe 2 esimest integraali

$$m\dot{x} = C_1, \quad m\dot{y} = C_2.$$

Nendest esimestest integraalidest järgneb edasi integrimise kaudu:

$$mx = C_1t + \alpha, \quad my = C_2t + \beta.$$

Elimineerides siit t , järeldame antud juhul, et iga t puhul peab olema

$$\frac{mx - \alpha}{C_1} = \frac{my - \beta}{C_2}.$$

See on aga teatava, z -teljega paralleelse tasapinna võrrand. Seega kehtib lause:

Kui tung on paralleelne kindla sihiga, siis trajektoor on tasane, ja nimelt on trajektoori tasapind tungi sihiga paralleelne.

Uusi esimesi integraale võib soodsal juhul saada, vaadeldes impulsivektori momenti \mathfrak{m} koordinaatide alguses O . Nagu selgitatud § 7, vektori momendiks kohas O on vektori rakenduspunkti kohavektori \mathfrak{r} vektoriaalne korrutis vektori endaga, tähendab, $\mathfrak{m} = \mathfrak{r} \times \mathfrak{p}$. Korrutades (69) mõlemaid pooli vasakult koha-vektoriga \mathfrak{r} , saame

$$\mathfrak{r} \times \mathfrak{p} = \mathfrak{r} \times \mathfrak{P}.$$

Teiselt poolt on (30) põhjal

$$\begin{aligned} \mathfrak{m} &= (\dot{\mathfrak{r}} \times \mathfrak{p}) + (\mathfrak{r} \times \dot{\mathfrak{p}}) \\ &= (\dot{\mathfrak{r}} \times m\dot{\mathfrak{r}}) + (\mathfrak{r} \times \dot{\mathfrak{p}}) \\ &= 0 + (\mathfrak{r} \times \dot{\mathfrak{p}}) \\ &= (\mathfrak{r} \times \dot{\mathfrak{p}}), \end{aligned}$$

sest vektorite \mathfrak{r} ja $m\dot{\mathfrak{r}}$ vektoriaalne korrutis peab osutama nulliks

nende vektorite paralleelsuse tõttu. Võrreldes tulemust varemini-
leituga, järeldame:

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{r} \times \mathfrak{P}, \quad (70)$$

s. t. impulssmomendi \mathfrak{m} tuletis võrdub mõjuva tungi \mathfrak{P} momen-
diga.

Seda teoreemi kutsutakse impulssmomendi lauseks.

Impulssmomendi \mathfrak{m} projektsioonideks on definitsiooni koha-
selt

$$yp_z - zp_y, \quad zp_x - xp_z, \quad xp_y - yp_x$$

ehk

$$m(y\dot{z} - z\dot{y}), \quad m(z\dot{x} - x\dot{z}), \quad m(x\dot{y} - y\dot{x}).$$

Vektorvõrrand (70) vastab seega projektsioonides kirjutatud
võrrandsüsteemile

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} m(y\dot{z} - z\dot{y}) &= yZ - zY \\ \frac{d}{dt} m(z\dot{x} - x\dot{z}) &= zX - xZ \\ \frac{d}{dt} m(x\dot{y} - y\dot{x}) &= xY - yX. \end{aligned} \quad (71)$$

Erijuhul, kui mõjuva resultanttungi \mathfrak{P} moment mõne telje suhtes
kaob, muutub impulssmomendi projektsiooni tuletis sama telje
kohta (71) alusel samuti nulliks, s. t. impulssmomendi projekt-
sioon vastavale teljele peab osutama konstantseks. See annab
jällegi ühe esimese integraali. On näiteks $xY - yX = 0$, siis
vastav esimene integraal kõlaks, arvesse võttes, et ka m on
konstantne:

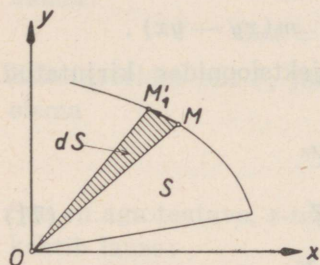
$$xy - yx = C. \quad (72)$$

On tungiväli säärane, et tungi \mathfrak{P} kandesirge alati läbib kindla
punkti O , mida ilmsesti võib valida koordinaatide alguseks, siis
tungi moment kindlasti kaob iga telje suhtes, mis läbib O . Praegu
selgitatud viisil järgnevad siis võrrandeist (71) kolm esimest
integraali. Säärast tungivälja kutsutakse „tsentraalseks“, ehk
öeldakse ka, et „tung on tsentraalne“. Punkti O , mida tsentraalse
välja tungide kandesirged alati läbivad, kutsutakse sel puhul
välja tsentriks.

Juhul, kui leidub esimene integraal (72), võib asjale anda huvitava geomeetrilise tõlgenduse. Korrutades seoses (72) mõlemaid pooli dt -ga, saame kõigepealt

$$x dy - y dx = C dt,$$

kusjuures dx ja dy tähendavad liikuva punkti M nihkumise ds projektsioone x - ja y -teljele. Samad dx ja dy tekivad, kui projekteerida punkti M trajektoori enne x - y -tasapinnale ning siis jälgida M projektsiooni liikumist trajektoori projektsioonil. Olgu M' ja M_1' materiaalse punkti M projektsioonid x - y -tasapinnale vastavalt hetkil t ja $t + dt$ (46. joonis). dx ja dy on siis lõpmata väikese nihke-



46. joonis.

vektori $\vec{M'M_1'}$ projektsioonid x - y -tasapinna koordinaattelgedele ning x ja y on selle nihkevektori alguspunkti M' koordinaadid selles tasapinnas. Järelikult $x dy - y dx$ on selle nihkevektori lõpmata väike moment alguspunktis O , s. t. lõpmata väikese kolmnurga $OM'M_1'$ kahekordne pindala $2dS$. Liikumisel

pinnaelemendid dS liituvad pindalaks S , mille „katab“ liikuv raadiusvektor OM' liikumist jälgides. Tähistades $\frac{C}{2}$ sümboliga A , võime varemleitud seosele anda kuju

$$dS = A dt.$$

Lugedes pindala S nulliks alghetkel t_0 ning integreerides vastavalt vasakul rajades 0 ja S , paremal pool rajades t_0 ja t , leiame:

$$S = A(t - t_0). \quad (73)$$

Sõnastatult see kõlaks:

Kui tungi moment teatava telje suhtes jäädavalt kaob, siis selle teljega risti võetud tasapinnas materiaalse punkti projektsioon liigub nõnda, et seda projektsiooni teljega ühendav raadiusvektor katab pindala, mis osutub proportsionaalseks möödunud ajavahemikuga.

Seda teoreemi kutsutakse punkti dünaamika pindala-
lauseks. Suurust A kutsutakse pindalakonstandiks.

On tungiväli tsentraalne, siis kaob tungi moment iga sirge
suhtes, mis läbib O ; selle tagajärjel siis pindalalause kehtib
igas tasapinnas, sest iga tasapind on risti mõne sirgega läbi O .

On kerge veel veenduda, et tsentraalse tungi puhul mate-
riaalse punkti M trajektoor peab olema tasane. Tõepoolest,
tsentraalsete tungide puhul kehtivatest esimestest integraalidest

$$C_1 = y\dot{z} - z\dot{y}$$

$$C_2 = z\dot{x} - x\dot{z}$$

$$C_3 = x\dot{y} - y\dot{x}$$

järgneb pärast korrutamist suurustega x , y , z vastavalt ja
pärast liitmist:

$$C_1x + C_2y + C_3z = 0.$$

See on teatava tasapinna võrrand, mida liikuva M koordinaadid
 x , y , z peavad rahuldama igal hetkel, — tähendab, trajektoor
on tasane.

Nagu näha, trajektoori tasapind läbib tsentri O . Niisiis:

**Tsentraalse tungi mõjul punkt liigub tasapinnal, mis läbib
tungide tsentri.**

Et, nagu varemini nägime, tsentraalsete tungide puhul pind-
alalause peab kehtima igas tasapinnas, siis ta kindlasti kehtib ka
trajektoori enda tasapinnas, kus liikuva raadiusvektori alguseks
on tungivälja tsenter O ise. Sellest järgneb otseselt näiteks nn.
Kepleri teine seadus planeetide liikumise kohta: tung, nimelt
gravitatsioonitung, on seal tsentraalne, sest ta on alaliselt suuna-
tud Päikese tsentri poole.

§ 23. Hoolause ja potentsiaal.

Kõrvuti impulsivektoriga omab mehaanikas põhjanevat
tähtsust materiaalse punkti hoog H . Hoog defineeritakse
skalaarse suurusena $\frac{1}{2}mv^2$:

$$H = \frac{1}{2}mv^2, \quad (74)$$

kus m on endiselt materiaalse punkti mass ja v on kiiruse suurus $|v|$. Meelde tuletades, et $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$, võime (68) põhjal ka kirjutada

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2). \quad (75)$$

Diferentsides (75) aja t järgi, saame

$$\begin{aligned} \dot{H} &= \frac{1}{m}(p_x \dot{p}_x + p_y \dot{p}_y + p_z \dot{p}_z) \\ &= \dot{x} \dot{p}_x + \dot{y} \dot{p}_y + \dot{z} \dot{p}_z, \end{aligned}$$

mis (69) alusel taandub kujuks

$$\dot{H} = X\dot{x} + Y\dot{y} + Z\dot{z}.$$

Korrutades siin veel mõlemaid pooli dt -ga, leiame

$$dH = X dx + Y dy + Z dz. \quad (76)$$

Paremat kätt seisev skalaar $X dx + Y dy + Z dz$ kujutab aga teatavasti tungi \mathfrak{B} poolt materiaalse punkti M lõpmata väikesel nihkumisel tehtud elementaartööd, nimelt tungivektori ja nihkevektori skalaarset korrutist. Seega (76) väljendab lauset:

Hoo lõpmata väike kasv võrdub tungi poolt liikumisel tehtud lõpmata väikese tööga.

Seda teoreemi tuntakse mehaanikas hoo lause nime all.

Integratsiooni kaudu järgneb sellest, et hoo lõplik kasv võrdub lõpliku tööga (s. t. elementaartööde summaga), mis tehtud tungi poolt materiaalse punkti liikumisel trajektoiril. See lõplik töö üldiselt sõltub trajektoori kujust; tema arvutamiseks tuleb määrata joonintegraali väärtus integritavast suuruselt $Xdx + Ydy + Zdz$, kui jooneks, mida pidi integrimine toimub, on trajektoor. Erilist tähelepanu väärib aga erijuhtum, kus see joonintegraal sõltub üksnes integrimiskõvera otspunktidest, mitte aga kõvera kujust muus osas nende otspunktide vahel. See leiab aset nimelt siis ja ainult siis, kui avaldis $Xdx + Ydy + Zdz$ osutub teatava funktsiooni $U(x, y, z)$ täisdiferentsiaaliks dU . Sel korral nimelt joonintegraal $\int Xdx + Ydy + Zdz$ on lihtsalt joonintegraal $\int dU$, s. t. $U_1 - U_0$, kus U_0 on funktsiooni U väärtus $U(x_0, y_0, z_0)$ trajektoori algkohas (x_0, y_0, z_0) ja

U_1 on sama funktsiooni väärtus $U(x_1, y_1, z_1)$ trajektoori lõpu-
kohas (x_1, y_1, z_1) . Kuidas trajektoor on kulgenud vahepeal,
pole oluline.

Avaldis $Xdx + Ydy + Zdz$ on täisdiferentsiaal dU , siis ja
ainult siis, kui

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z}, \quad (77)$$

s. t. kui tungi \mathfrak{F} projektsioonid on funktsiooni U vastavateks osa-
tuletisteks. Funktsiooni $U(x, y, z)$ kutsutakse säärasel korral
välja tungifunktsiooniks. Tungifunktsioon on määra-
tud vaid meelevaldse lisakonstandini, sest konstandi juurdevõt-
misel osatuletised ei muutu.

Juhtudel, kus leidub tungifunktsioon U , öeldakse ka, et tung
 \mathfrak{F} on „tuletatav“ tungifunktsioonist, ehk ka, et tung on „konser-
vatiivne“. Viimase kõneviisi mõtet selgitavad järgmised kaalut-
lused:

Tähistades hoo H väärtusi kohtades (x_0, y_0, z_0) ja
 (x_1, y_1, z_1) vastavalt sümbolitega H_0 ja H_1 , võime tungifunkt-
siooni U olemasolu puhul (76) alusel kirjutada

$$H_1 - H_0 = U_1 - U_0.$$

See näitab, et

$$H_1 - U_1 = H_0 - U_0 = \text{konstantne},$$

milline ka oleks koht (x_1, y_1, z_1) materiaalse punkti M trajek-
tooril. Teiste sõnadega,

$$\frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(x, y, z) = C. \quad (78)$$

Nagu näha, on siin tegemist jälle ühe esimese integraaliga. Suu-
rust $-U(x, y, z)$ kutsutakse seejuures potentsiaalseks
energiaks ehk ka lihtsalt potentsiaaliks kohas
 (x, y, z) . Potentsiaalse energia (potentsiaali) tähistamiseks
tarvitame edaspidi ka sümbolit Π . See Π on koordinaatide x, y, z
funktsioon, ja nimelt on

$$\Pi = -U(x, y, z). \quad (79)$$

Hoogu H kutsutakse ka materiaalse punkti M kineetiliseks

energiaks. (78) väidab, et tungifunktsiooni olemasolu puhul peab alati kehtima seos

$$H + \Pi = C. \quad (80)$$

Kineetilise ja potentsiaalse energia summat $H + \Pi$ kutsutakse materiaalse punkti koguenergiaks ehk ka lihtsalt energiaks. (80) väidab, et juhul, kus üldse saab rääkida energiast, see **energia peab olema konstantne**. See on energia jäävuse lause.

Silmas pidades seda energia jäävust, säilivust, konservatiivsus, kutsutaksegi tungi, millel leidub tungifunktsioon, konservatiivseks.

Kineetiline energia H on määratud igal juhul; potentsiaalne energia Π omab mõtet vaid siis, kui on mängus tungifunktsioon. Seega koguenergia mõiste on seotud tungifunktsiooni mõistega. Juhtudel, kus tungifunktsiooni ei leidu, kutsutakse tunge vahel ka **dissipatiivseiks**.

Konservatiivse tungi puhul võib tema projektsioone saada (77) kohaselt tungifunktsiooni osatuletistena; silmas pidades (79) selgub, et selle asemel võib tungi projektsioonide saamiseks võtta niisama hästi ka osatuletisi potentsiaalset Π , siis tuleb aga veel nende osatuletiste märgid muuta vastupidisteks.

Kohad, kus tungifunktsioon U või potentsiaal Π omab konstantset väärtust, moodustavad teatava pinna; selle pinna võrrandiks on

$$\Pi(x, y, z) = K. \quad (81)$$

Säärast pinda kutsutakse potentsiaalpinna ehk nivoopinna. Üksikud potentsiaalpinna erinevad omavahel vaid konstandi K väärtuse poolest võrrandis (81). Pidades silmas just konstandi vastavat eriväärtust, võib kõnelda nivoopinna K_1 , nivoopinna K_2 jne. Seejuures on tavaliseks eelduseks, et Π on ühene funktsioon, s. t. et antud x, y, z puhul temale vastab vaid üks funktsiooni väärtus. Kaks erinevat nivoopinda K_1 ja K_2 ei saa siis kunagi lõikuda, sest vastasel korral lõikekohas funktsioon Π peaks omama kaht erinevat väärtust K_1, K_2 korraga.

Olgu $P: (x, y, z)$ mõni koht pinnal (81). Kui sellest kohast nihkuda dx, dy, dz võrra edasi, kuid nõnda, et seejuures jääda ikka endiselt samale nivoo pinnale, siis K ei tohi muutuda, s. t. II täisdiferentsiaal peab olema null:

$$\frac{\partial II}{\partial x} dx + \frac{\partial II}{\partial y} dy + \frac{\partial II}{\partial z} dz = 0.$$

Võttes arvesse, et siin kolm osatuletist on tungivektori projektsioonid vastasmärkidega, seega vastassuunalise tungivektori projektsioonid, ning et dx, dy, dz on lõpmata väikese nihkevektori projektsioonid, järeldame, et tungivektor on mainitud nihkevektoriga risti: täisdiferentsiaal pole midagi muud, kui vektorite $(\frac{\partial II}{\partial x}, \frac{\partial II}{\partial y}, \frac{\partial II}{\partial z})$ ja (dx, dy, dz) skalaarne korrutis, — et see korrutis on null, siis mainitud vektorid peavad olema vastastikku risti. Niisiis:

Konservatiivne tung on igas kohas risti vastavast kohast läbimineva potentsiaalpinna.

See tung on nimelt risti iga lõpmata väikese nihkega dx, dy, dz nivoo pinda pidi.

Tungi suurus $|\mathfrak{P}|$ on $\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$, tähendab,

$$|\mathfrak{P}| = \sqrt{\left(\frac{\partial II}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial II}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial II}{\partial z}\right)^2},$$

teiste sõnadega, tungi suurus võrdub funktsiooni II tuletise normaali suunas suurusega. Tungi \mathfrak{P} suuna nivoo pinna normaali sihis määrab asjaolu, et $\frac{\partial II}{\partial x} = -X$ jne. See näitab, et tung \mathfrak{P} on suunatud normaali pidi just sennapoole, kuhu minnes II kahaneb: kui II kahaneb x -i kasvades, siis $-X$ osutub negatiivseks, järelikult $+X$ osutub positiivseks, s. t. X on siis ja ainult siis x -i positiivse suunaga samasuunaline, kui II selles suunas kahaneb.

Igas kohas (x, y, z) funktsioon II omab teatavat väärtust, mis loomuse poolest kujutab teatavat skalaari. On II antud, siis on sellega antud teatav skalaarne väli, s. t. skalaarsete suuruste jaotus ruumi kõikidele kohtadele. Vektorid komponentidega $\frac{\partial II}{\partial x}, \frac{\partial II}{\partial y}, \frac{\partial II}{\partial z}$ on sellest skalaarsest väljast diferentsi-

mise teel tuletatud; tänu skalaarse välja olemasolule tekib sel teel vektorväli: ruumi igas kohas osutub rakendatuks üks teatav vektor, mille projektsioonid on ülalmainitud skalaari osatuletised. Säärasel viisil skalaarsest väljast tuletatud vektorvälja kutsutakse vastava skalaari *g r a d i e n d i* k s. Seda vektorvälja tähistatakse vektoranalüütilises kirjutusviisis sümboliga $\text{grad } \Pi$. Üksik vektor $\text{grad } \Pi$ on, nagu nägime, risti niivoojannaga $\Pi = K$ vastavas kohas ja on suunatud kasvava Π poole ning suuruse poolest võrdne Π tuletisega normaali suunas. Tung \mathfrak{F} on vastasuunaline, seega

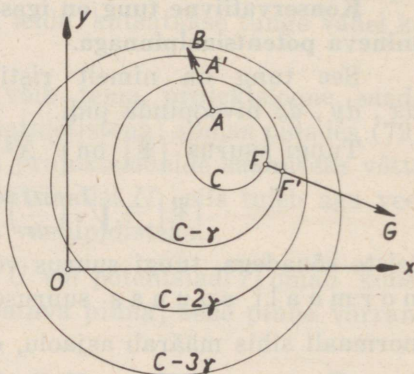
$$\mathfrak{F} = -\text{grad } \Pi. \quad (82)$$

Gradiendi mõiste mängib tähtsat osa tavalises mehaanikas, hüdro-mehaanikas, soojusõpetuses, elektriõpetuses ja mujal.

Juhtudel, kus probleeme võib käsitada tasapinnalistena, näiteks x - y -tasapinnal, astuvad niivoojannade asemele niivoojooned;

tung on siis risti niivoojoonega antud kohas, suunatud väheneva potentsiaali poole ja suuruse poolest võrdne potentsiaalfunktsiooni tuletisega niivoojoone normaali suunas. Joonestades niivoojooni $\Pi = K$, $\Pi = K - \gamma$, $\Pi = K - 2\gamma$ jne. vastavalt järjest potentsiaali kaahanemisele igakordselt γ võrra (47. joonis), näeme, et tung, olles risti niivoojoonega, osutub suuremaks neis kohtades, kus niivoojooned esinevad tihedamini, — seal nimelt on potentsiaali langus normaali suunas järsem.

On γ valitud küllalt väikesena, siis tungivektori suurus on ligikaudu pöördvõrdeline naaberniivoojannade omavahelise kaugusega vastavas kohas. Tungivektor \vec{FG} 47. joonisel on sel alusel joonestatud ligi 2 korda suuremana tungivektorist \vec{AB} , sest kaugus $\vec{FF'}$ on 2 korda väiksem kaugusest AA' .



47. joonis.

§ 24. Potentsiaali näiteid.

Potentsiaali mõistet selgitavad järgmised konkreetset näited.

1) Liikumine raskuse mõjul maapinna läheduses piiratud alal.

Juhtides z -telge vertikaalselt ülespoole ning lugedes maapinda paigalseisvaks ja tasapinnaliseks, võime lugeda raskustungi vektoreid omavahel paralleelseiks ja võrdseiks. Raskustungi \mathfrak{P} projektsioonid on siis $X = 0$, $Y = 0$, $Z = -mg$. Siit nähtub, et tungifunktsioonina $U(x, y, z)$ võib sel korral võtta $U = -mgz$, s. t. potentsiaalfunktsioonina U võib võtta $+mgz$; osatuletised on siis nimelt parajasti $0, 0, -mg$. Meelevaldse konstandi potentsiaalile lisandamine ei muuda ses mõttes midagi. Nivoo-pindadeks on maapinnaga paralleelsed rõhttasapinnad $mgz = K$. Tung on risti nivoo-pinnaga, järelikult vertikaalne, ning suunatud kahaneva U poole, s. t. allapoole. Vähendades K järjest γ võrra,

saame nivoo-pindu $z = \frac{K}{mg} - \frac{\gamma}{mg}$, $z = \frac{K}{mg} - 2\frac{\gamma}{mg}$ jne.; kahe sää-

rase nivoo-pinna omavaheline naaberkaugus on igal pool konstantne, nimelt $\frac{\gamma}{mg}$, mis ongi tungi konstantsuse tunnuseks.

Käesoleval juhul välja nivoo-pindadeks on ühtlase tihedusega jaotatud paralleelsed tasapinnad, — säärast välja kutsutakse *homogeenseks*. Säärase välja gradientvektor on igas kohas sama, s. t. antud juhul tungivektor on konstantne. Viimast asjaolu võib ka võtta lähtekohaks: on tungivektor igal pool sama, siis väli on homogeenne, s. t. nivoo-pindadeks on siis ühtlase tihedusega jaotatud paralleelsed tasapinnad. Raskusväli maapinna läheduses piiratud maa-alal on homogeenne.

Nagu juba eespool näidatud, on materiaalse punkti M trajektooriiks selles homogeeneses raskusväljas vertikaaltasapinnas asetsev parabool. Selle parabooli kuju sõltub algkiirusest v_0 ja algkohast $A: (x_0, y_0, z_0)$ alghetkel t_0 . Energia jäävuse lause võimaldab aga otseselt määrata kiiruse v suurust v meelevaldses kohas B , niipea kui on teada algkiiruse suurus v_0 kohas A , ilma et vaja oleks trajektoori kui niisugust tunda. Tõepoolest, (80)

põhjal $H + \Pi$ peab olema konstantne igas kohas, tähendab, niisama suur kui ta on kohas A ; järelikult

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgz = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgz_0.$$

Seega

$$v^2 = v_0^2 - 2g(z - z_0).$$

Siin $z - z_0$ näitab koha B kõrgust h koha A suhtes; järelikult

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2gh}.$$

Tulemus näitab, et v sõltub kindla v_0 puhul vaid veel kõrgusest h , milleni M on parajasti tõusnud. Ühtlasi selgub, et mainitud kõrgusel h leidub ülemmäär, sest ruutjuure alune ei tohi muutuda negatiivseks:

$$v_0^2 - 2gh \geq 0, \quad h_{max} = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Olgu tähendatud, et energia jäävuse lause alusel üksinda ei saa veel midagi öelda kiirusvektori v suuna kohta. Ekslik oleks ka arvata, et M peab ilmtingimata kõrguseni h jõudma, kui ainult see h ei ületa leitud maksimumi, — see toimub üksnes siis, kui algkiiruse v_0 suund on sobiv. Samuti ei saa väita, et M peab tingimata kohani B jõudma; võib väita ainult seda, et kui M peaks jõudma kohani B , siis tema kiiruse suurus v selles kohas on arvutatav ülalleitud valemi põhjal. Igal juhul aga h_{max} kaudu on määratud keelupiirkond, kuhu M mingil tingimusel ei jõua antud v_0 puhul, sõltumata v_0 suunast.

2) Liikumine raskuse mõjul Maakera ümbruses. Loeme Maakera absoluutselt paigalseisvaks ning valime koordinaatide alguse O Maakera keskkohas. Maakera ümbritsev raskustungiväli on tsentraalne, tsentriga kohas O . Liikuva materiaalse punkti M trajektoor on seetõttu tasane; vastav tasapind läbib O . Valime x - ja y -telje trajektoori tasapinnas; z -telge meie siis üldse ei vaja.

Olgu M asukohaks hetkel t koht (x, y) ; selle koha kaugus Maakera tsentrist O olgu ρ , tähendab, $\rho^2 = x^2 + y^2$. Newtoni järgi raskustungi \mathfrak{F} suurus vastavas kohas on $\propto \frac{m_1 m}{\rho^2}$, kus m_1

on Maakera mass, m on materiaalse punkti M mass ja κ on nn. gravitatsioonikonstant. Uusimate mõõtmiste najal

$$\kappa = 6,685 \cdot 10^{-8} \text{ [g}^{-1} \text{ cm}^3 \text{ sec}^{-2}\text{]} .$$

Maakera massi m_1 võib ligikaudu arvutada valemi põhjal

$$m_1 = 5,52 \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 ,$$

kus R on Maakera raadius ja võrdetegur 5,52 tähendab Maakera keskmist tihedust. Võttes $R = 6,370 \cdot 10^8$ [cm], leiame seega

$$\begin{aligned} |\mathfrak{P}| &= 6,685 \cdot 10^{-8} \cdot 5,52 \cdot \frac{4}{3} \cdot 3,1416 \cdot 6,370^3 \cdot 10^{24} \cdot \frac{m}{\varrho^2} \\ &= \frac{4,00 \cdot 10^{20}}{\varrho^2} m \text{ [g cm sec}^{-2}\text{]} . \end{aligned}$$

Maapinnal, kus $\varrho = R$, järgneb siit

$$|\mathfrak{P}| = 984 m ,$$

mis vastab seega raskuskiirendusele $g = 984$ [cm sec⁻²]. Väike suurenemine tavaliselt aktsepteeritud väärtusega $g = 981$ võrreldes on tingitud esijoones sellest, et Maakera on loetud paigalseisvaks, s. t. et rotatsioonist tingitud (näiline) tsentrifugaaltung praegu meil pole arvesse võetud.

Tung \mathfrak{P} on suunatud O poole ja rakendatud kohas (x, y) . Järelikult vektori \mathfrak{P} suunakoosinused on vastavalt

$-\frac{x}{\varrho}$ ja $-\frac{y}{\varrho}$ (48. joonis). Seega

$$X = -\frac{4,00}{\varrho^2} \cdot \frac{x}{\varrho} \cdot 10^{20} m = 4,00 \cdot 10^{20} m \frac{x}{\varrho^3}$$

$$Y = -\frac{4,00}{\varrho^2} \cdot \frac{y}{\varrho} \cdot 10^{20} m = 4,00 \cdot 10^{20} m \frac{y}{\varrho^3} .$$

Antud juhul tungifunktsioon leidub. Võttes nimelt

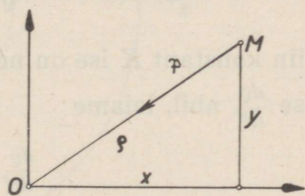
$$U(x, y) = + \frac{4,00}{\varrho} 10^{20} m , \quad \varrho = \sqrt{x^2 + y^2} ,$$

leiaksime

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= \frac{\partial U}{\partial \varrho} \frac{\partial \varrho}{\partial x} = -\frac{4,00}{\varrho^2} 10^{20} m \frac{\partial \varrho}{\partial x} \\ &= -\frac{4,00}{\varrho^2} 10^{20} m \frac{x}{\varrho} = X \end{aligned}$$

ja analoogiliselt

$$\frac{\partial U}{\partial y} = Y .$$



48. joonis.

Arvutamisel tuleb silmas pidada, et seosest $\varrho^2 = x^2 + y^2$ järgneb diferentsimisel x -i järgi

$$2\varrho \frac{\partial \varrho}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial \varrho}{\partial x} = \frac{x}{\varrho},$$

ja diferentsimisel y järgi samal viisil

$$\frac{\partial \varrho}{\partial y} = \frac{y}{\varrho}.$$

Niisiis potentsiaalina Π antud juhul võib võtta

$$\Pi = -\frac{4,00}{\varrho} 10^{20} m.$$

Konstantne potentsiaali väärtus tekib siin, kui ϱ on konstantne; nivoojoonteks on seega kontsentrilised ringid ümber O . Et Π seejuures on, nagu näha, alati negatiivne, siis Π kahaneb väheneva ϱ suunas. Normaaliid on nivooringide raadiused.

Nivooringi raadius ϱ väljendub potentsiaali väärtuse K kaudu järgmiselt:

$$\varrho = -\frac{4,00}{K} 10^{20} m.$$

Siin konstant K ise on negatiivne. Jälgides ϱ sõltuvust K -st tule-tise $\frac{d\varrho}{dK}$ abil, leiame

$$\frac{d\varrho}{dK} = +\frac{4,00}{K^2} 10^{20} m,$$

millest nähtub, et väheneva K puhul ka ϱ väheneb, kuid seda aeglasemalt, mida suuremaks läheb väheneva negatiivse K absoluutväärtus. K kahanemisel järk-järgult ühe ja sama γ võrra kahaneb ϱ samuti, kuid järk-järgult aeglasemalt. Seega vastavad nivooringid kuhjuvad O ümbruses ja asetsevad järjest hõreda-mini, kui minna O -st eemale. Vastav pilt on näidatud 49. joonisel. Tung \mathfrak{P} on suur seal, kus ringid asetsevad tihedalt, ja väiksem seal, kus nad on hõredad.

Energia lause antud juhul annab:

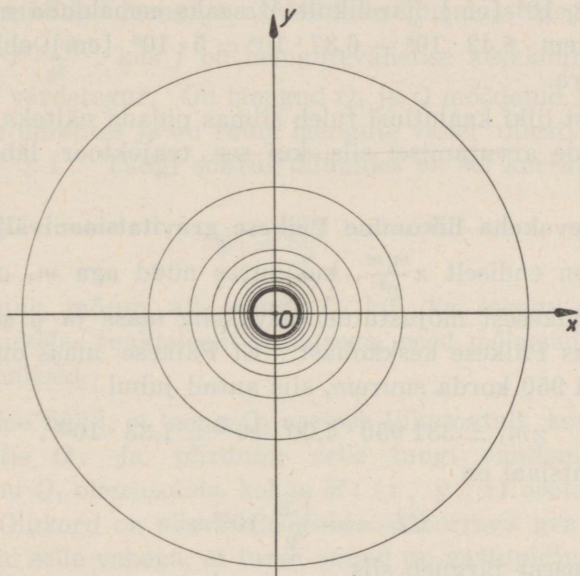
$$\frac{1}{2} mv^2 - \frac{4,00}{\varrho} 10^{20} m = \frac{1}{2} mv_0^2 - \frac{4,00}{\varrho_0} 10^{20} m,$$

kui v_0 on algiiruse suurus ja ϱ_0 algkaugus alghetkel t_0 . Sellest seosest järgneb

$$v^2 = v_0^2 - 8,00 \cdot 10^{20} \left(\frac{1}{\varrho_0} - \frac{1}{\varrho} \right),$$

kust selgub, et $v > v_0$, kui $\varrho < \varrho_0$, ja ümberpöördult, $v < v_0$, kui $\varrho > \varrho_0$. On aga $\varrho = \varrho_0$, siis ka $v = v_0$. Jällegi leiame keelupiirkonna, silmas pidades nõuet $v^2 \geq 0$:

$$v_0^2 - 8,00 \cdot 10^{20} \left(\frac{1}{\varrho_0} - \frac{1}{\varrho} \right) \geq 0.$$



49. joonis.

Selle võrratuse lahendamine $\frac{1}{\varrho}$ suhtes annab:

$$\frac{1}{\varrho} \geq \frac{1}{\varrho_0} - \frac{v_0^2}{8,00 \cdot 10^{20}}.$$

See nõue on *eo ipso* rahuldatud alati siis, kui avaldis paremat kätt osutub negatiivseks või nulliks, s. t. kui

$$\frac{1}{\varrho_0} \leq \frac{v_0^2}{8,00 \cdot 10^{20}}, \quad v_0 \geq \sqrt{\frac{8,00}{\varrho_0}} \cdot 10^{10};$$

säärasel korral, kus näiteks $q_0 = R$ puhul tuleb $v_0 \geq 11,2$ [km sec⁻¹], q võiks omada kuitahes suuri väärtusi, — keelupiirkonda pole olemas. On aga $v_0 < \sqrt{\frac{8,00}{q_0}} \cdot 10^{10}$, siis leiame q_{max} :

$$q_{max} = \frac{8,00 \cdot 10^{20}}{8,00 \cdot 10^{20} - q_0 v_0^2} q_0.$$

Seda maksimaalset kaugust siis liikuv materiaalne punkt M ei saa kunagi ületada, olgu algkiiruse suund ükskõik milline. On näiteks $q_0 = R$, $v_0 = 1$ [km sec⁻¹] = 10^5 [cm sec⁻¹], siis $q_{max} = 6,42 \cdot 10^8$ [cm], järelikult M saaks eemalduda maapinnast kõige rohkem $6,42 \cdot 10^8 - 6,37 \cdot 10^8 = 5 \cdot 10^6$ [cm] ehk 50 kilomeetri võrra.

Säärast liiki kaalutlusi tuleb silmas pidada näiteks mürskude trajektooride arvutamisel siis, kui see trajektoor läbib stratosfääri.

3) Taevakeha liikumine Päikese gravitatsiooniväljas. Tungi κ suurus on endiselt $\kappa \frac{m_1 m}{q^2}$, kusjuures nüüd aga m_1 on Päikese mass, m Päikesest mõjustatud taevakeha mass ja q selle taevakeha kaugus Päikese keskkohast. Et Päikese mass on Maakera massist 331 950 korda suurem, siis antud juhul

$$\kappa m_1 = 331\,950 \cdot 4,00 \cdot 10^{20} = 1,33 \cdot 10^{26},$$

seega potentsiaal on

$$II = -\frac{1,33}{q} 10^{26} m.$$

Energia lausest järgneb siis

$$v^2 = v_0^2 - \frac{2,66}{q} 10^{26} \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{q_0} \right).$$

Keelupiirkonda ei ole, kui

$$v_0 \geq \sqrt{\frac{2,66}{q_0}} \cdot 10^{13},$$

vastasel korral aga leidub q ülemmäär. Teades, et gravitatsiooniväljast tingitud üksiku materiaalse punkti M trajektoorigs on igal juhul koonuslõige (vt. § 25), järeldame, et juhul, kui leidub q ülemmäär, peab trajektoorigs olema ellips. Paraboolse trajek-

toori saavutamiseks peab v_0 küündima kriitilise väärtuseni $\sqrt{\frac{2,66}{\rho_0}} \cdot 10^{13}$, mis näiteks Maakera kaugusel Päikesest $\rho_0 = 1,495 \cdot 10^{13}$ [cm] tähendaks $v_0 = 42$ [km sec⁻¹]; Maakera kiirus on vaid 30 [km sec⁻¹], seega tunduvalt allpool seda kriitilist kiirust.

4) **Elektrivälja potentsiaal.** Coulomb'i seaduse kohaselt samanimeliste elektrilaengute Q_1 ja Q vahel, mis asetsevad kaugusel ρ teineteisest, mõjub tõuketung, mille kandesirge ühtib punkti- taolistena mõeldud laengute asukohtade ühendussirgega, ja mille suurus on $f \frac{Q_1 Q}{\rho^2}$, kus f on laengutevahelise keskkonna omadustest sõltuv võrdetegur. On laengud Q_1 ja Q mõõdetud nn. elektrostaatilistes ühikutes ja on ruum laengute vahel täiesti materias- tühhi, siis $f = 1$. Tungi suurus düünides on sel korral määratud valemiga

$$|\mathfrak{F}| = \frac{Q_1 Q}{\rho^2}.$$

Säärane tung mõjub nii laengu Q_1 kui ka laengu Q kandjale ning, kokkukõlas reaktsiooni seadusega, need mõlemad tungid on vastassuunalised.

Oletame nüüd, et laeng Q_1 asetseb liikumatult koordinaatide alguspunktis O , ja piirdume selle tungi vaatlemisega, mis mõjub, tänu Q_1 olemasolule, kohas $M: (x, y, z)$ asetsevale laengule Q . Olukord on siis analoogiline olukorraga gravitatsiooni- väljas, kuid selle vahega, et tungi suund on vastupidine ja võrde- tegur on teissugune. Väli on ikkagi tsentraalne, tsentriga kohas O . Tungi projektsioonideks on:

$$X = \frac{Q_1 Q}{\rho^2} \frac{x}{\rho}, \quad Y = \frac{Q_1 Q}{\rho^2} \frac{y}{\rho}, \quad Z = \frac{Q_1 Q}{\rho^2} \frac{z}{\rho}.$$

On kerge kontrollida, et säärasel korral potentsiaalina Π võib võtta

$$\Pi = + \frac{Q_1}{\rho} Q,$$

kus ρ jällegi tähendab kaugust koordinaatide algusest O .

Energia jäävuse lause põhjal järgneb siit:

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{Q_1}{\varrho} Q = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{Q_1}{\varrho_0} Q,$$

kust

$$v^2 = v_0^2 - 2Q_1 \frac{Q}{m} \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0} \right).$$

Siin m tähendab elektrilaengut Q kandva materiaalse punkti M massi. Keelupiirkond esineb igal juhul, sest nõue, et v^2 ei saa olla negatiivne, annab:

$$\varrho \geq \frac{2Q_1Q}{2Q_1Q + v_0^2 m \varrho_0} \varrho_0.$$

Punkti M trajektooriga leidub seega kindlasti teatav nullist erinev minimaalne kaugus alguspunktist O .

On H ja Π hoog ja potentsiaal kaugusel ϱ , analoogiliselt H_0 ja Π_0 hoog ja potentsiaal kaugusel ϱ_0 , siis (80) põhjal

$$H + \Pi = H_0 + \Pi_0,$$

tähendab,

$$H - H_0 = \Pi_0 - \Pi. \quad (83)$$

Teiselt poolt on (76) põhjal $H - H_0$ võrdne integraaliga avaldisest $Xdx + Ydy + Zdz$, tähendab, võrdne tungi poolt tehtud tööga. Võrdlusest (83)-ga järgneb seega, et tungi poolt tehtud töö ongi potentsiaalide diferents $\Pi_0 - \Pi$, nimelt

$$Q_1Q \left(\frac{1}{\varrho_0} - \frac{1}{\varrho} \right).$$

On eriti võetud $Q = 1$, siis seda potentsiaalide diferentsi kutsutakse vastavate kohtade vahel valitsevaks elektriliseks pingeks. Pinge on elektrivälja tekitava laenguga Q_1 võrdeline. Selles väljas laengule $Q = 1$ mõjuvat tungi kutsutakse väljatugevuseks ja tähistatakse tavaliselt sümboliga \mathcal{E} (väljatugevus on tung, seega vektor).

Elektrostaatilises ühikute süsteemis tuleks pingeühikuks võtta 1 erg, nimelt see pinge, mis vastab $Q = 1$ puhul potentsiaalide diferentsile (s. t. tehtavale tööle) 1 erg. Tegelikult kasutatakse elektrotehnikas 300 korda väiksemat ühikut 1 volt. Kõr-

vuti sellega kasutatakse ühtlasi laenguühikuna 1 kulon, mis on elektrostaatilisest laenguühikust $3 \cdot 10^9$ korda suurem.

Nimetuse all „elektron“ tuntud materiaalne elementaarosake kannab laengut $e = 1,59 \cdot 10^{-19}$ kulonit ja omab seejuures massi $m = 9 \cdot 10^{-28}$ [g].

Olgu elektron, liikudes elektrivälja mõjul, katnud vahemaa, mis vastab pingele V volti, kusjuures selle elektroni algkiirus olgu null. Silmas pidades, et V volti tähendab $\frac{V}{300}$ elektrostaatilist pingehikut (erg'i), leiame kõigepealt (arvestades $Q = 1$) :

$$Q_1 \left(\frac{1}{e_0} - \frac{1}{e} \right) = \frac{V}{300} .$$

Siit järgneb, et elektroni lõppkiirus v on määratud valemiga

$$v^2 = 2 \frac{Q}{m} \cdot \frac{V}{300} ,$$

kus Q tähendab elektroni laengut elektrostaatilistes ühikutes, seega $Q = 1,59 \cdot 10^{-19} \cdot 3 \cdot 10^9 = 4,77 \cdot 10^{-10}$. Järelikult

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 4,77 \cdot 10^{-10}}{9 \cdot 10^{-28} \cdot 300} V} = 5,94 \cdot 10^7 \sqrt{V} \quad [\text{cm sec}^{-1}] .$$

Pinge 1 volt annaks seega elektronile kiiruse 594 [km sec⁻¹], pinge 100 000 volti annaks kiiruse 188 000 [km sec⁻¹]; kiirus sõltub ainuüksi pingest, mitte aga tegelikult läbikäidud teekonna pikkusest. Sel alusel moodsas füüsikas tavaliselt elektronide kiirusi iseloomustatakse lihtsalt vastava voltide arvuga.

Liikuvate elektronide (katoodkiirte) puhul esinevad kiirused, nagu näha, on juba suuruselt võrreldavad valguse kiirusega 300 000 [km sec⁻¹]. See näitab, et tegelikult Newton'i mehaanika valemid peavad osutama elektronide puhul rakendatuina ebatäpseiks. Relativistliku Einsteini mehaanika alusel arvutatud kiirused on märgatavalt väiksemad, jäädes mistahes V puhul ikka piirväärtusest 300 000 [km sec⁻¹] allapoole ja olles heas kokkukõlas mitmesuguste katsete tulemustega.

Märkus: On kerge kontrollida, et siinkäsiteldud näidetes 1 kuni 4 potentsiaalfunktsioon $\Pi(x, y, z)$ alati rahuldab diferentsiaalvõrrandit

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} = 0. \quad (84)$$

Seda diferentsiaalvõrrandit kutsutakse Laplace'i võrrandiks ehk potentsiaalvõrrandiks; see mängib tähtsat osa gravitatsiooniteoorias, elektriõpetuses, hüdromehaanikas, soojusõpetuses ja mujalgi. Seda kirjutatakse sageli lühendatult

$$\Delta \Pi = 0 \quad \text{või ka} \quad \nabla^2 \Pi = 0,$$

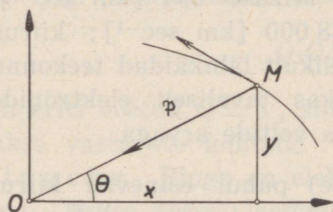
mõistes sümboli Δ või ∇^2 all operatsiooni

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

mis tuleb rakendada vastava juurdekirjutatud funktsiooni juures. Sümboliga Δ (või ∇^2) haaratud toimingut kutsutakse „Laplace'i operaatoriks“.

§ 25. Planeedi liikumine.

Käesolevas paragraafis arendame üksikasjalisemalt § 24 näites 3 lühidalt puudutatud üksiku taevakeha liikumist teise taeva-



50. joonis.

keha poolt tekitatud gravitatsiooni-välja mõjul. Säärane väli on tsentraalne ja temas valitsev tung on pöördvõrdeline kauguse ρ ruuduga tsentrist.

Liikuvat taevakeha nimetame planeediks M ja loeme ta materiaalseks punktiks. Välja tsentraalsusest järgneb, et trajektoor on tasane. Valime koordinaatide alguspunkti O välja tsentris ja paigutame x - ja y -telgi trajektoori tasapinda (50. joonis); koordinaat z ei tule siis selle probleemi puhul enam arvesse — probleem on tasapinnaline. m tähendagu planeedi massi, k olgu võrdetegur, mis võrdub gravitatsiooni-

konstandi κ ja tsentrisse koondatud massi m_1 korrutisega. Päikese puhul, nagu nägime, see korrutis $\kappa m_1 = k$ on ligikaudu $1,33 \cdot 10^{26}$ [cm³ sec⁻²]; täpsem väärtus selgub allpool.

Planeedile mõjuva tungi \mathfrak{F} suurus on $m \frac{k}{\varrho^2}$, kus $\varrho^2 = x^2 + y^2$; tungivektori suunakoosinused on $-\frac{x}{\varrho}$ ja $-\frac{y}{\varrho}$. Järelikult tungi projektsioonid X ja Y on

$$X = -m \frac{kx}{\varrho^3}, \quad Y = -m \frac{ky}{\varrho^3}.$$

Põhivõrrandid (60) kõlavad seega:

$$m\ddot{x} = -m \frac{kx}{\varrho^3}, \quad m\ddot{y} = -m \frac{ky}{\varrho^3},$$

kus ühisteguri m mõlemal pool võib muidugi ka ära jätta. Et siin tegemist on vaid kahe teise järgu diferentsiaalvõrrandiga, siis üldlahendis peab esinema $2 \times 2 = 4$ meelevaldset konstanti.

Üldlahendi leidmiseks kasutame kõigepealt esimesi integraale, millede abil siis lahendatavat süsteemi saab hiljemini lihtsustada.

Tungiväljal leidub potentsiaal:

$$\Pi = -m \frac{k}{\varrho}.$$

Kirjutades valemis (80) esineva konstandi C asemel mE , saame seega

$$\frac{1}{2} v^2 - \frac{k}{\varrho} = E;$$

E nimetame planeedi M energiakonstandiks.

Veel ühe esimese integraali annab impulssmomendi lause, sest väli on tsentraalne. Kirjutades valemis (72) sellekohaselt C asemel F , saame:

$$xy - yx = F.$$

F nimetame planeedi M pindalakonstandiks.

Siit edasi on mugavam töötada polaarkoordinaatidega ϱ , Θ . Seostest

$$\begin{aligned} x &= \varrho \cos \Theta & y &= \varrho \sin \Theta \\ \dot{x} &= \dot{\varrho} \cos \Theta - \varrho \sin \Theta \cdot \dot{\Theta}, & \dot{y} &= \dot{\varrho} \sin \Theta + \varrho \cos \Theta \cdot \dot{\Theta} \end{aligned}$$

järgneb

$$xy - yx = \varrho^2 \cdot \dot{\Theta}, \quad v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{\varrho}^2 + \varrho^2 \dot{\Theta}^2.$$

Niisiis meie esimesed integraalid polaarkoordinaatides kõlaksid:

$$\frac{1}{2} (\dot{\varrho}^2 + \varrho^2 \dot{\Theta}^2) - \frac{k}{\varrho} = E \quad (85)$$

$$\varrho^2 \dot{\Theta} = F.$$

Need praegukirjutatud võrrandid kujutavad omalt poolt esimese järgu diferentsiaalvõrrandite süsteemi. Nende integreerimisel tulevad lisaks endistele konstantidele juurde veel $2 \times 1 = 2$ meelevaldset konstanti. Sel teel saaksimegi üldlahendi kokku nelja meelevaldse konstandiga.

Kõigepealt saame (85) põhjal määrata ϱ sõltuvuse Θ -st, s. t. leida planeedi trajektoori. Võttes arvesse, et

$$\dot{\varrho} = \frac{d\varrho}{dt} = \frac{d\varrho}{d\Theta} \frac{d\Theta}{dt} = \dot{\Theta} \frac{d\varrho}{d\Theta} = \frac{F}{\varrho^2} \frac{d\varrho}{d\Theta},$$

leiame esimesest võrrandist (85):

$$\frac{1}{2} \left[\left(\frac{d\varrho}{d\Theta} \right)^2 + \varrho^2 \right] \frac{F^2}{\varrho^4} - \frac{k}{\varrho} = E.$$

See teisendub kergesti kujule:

$$\frac{F d\varrho}{\varrho \sqrt{2E\varrho^2 + 2k\varrho - F^2}} = d\Theta.$$

Diferentsides on võimalik kontrollida, et siin vasakul pool seisab avaldise

$$\arcsin \frac{k\varrho - F^2}{\varrho \sqrt{k^2 + 2EF^2}}$$

diferentsiaal. Leitud diferentsiaalvõrrandi lahendiks on seega:

$$\arcsin \frac{k\varrho - F^2}{\varrho \sqrt{k^2 + 2EF^2}} = \Theta + A,$$

ehk

$$\sin(\Theta + A) = \frac{k\varrho - F^2}{\varrho \sqrt{k^2 + 2EF^2}}.$$

Siin A on meelevaldne integreerimiskonstant.

Olgu esialgu A väärtus valitud juhuslikult. Pöörates siis x -telge teatava nurga α võrra, muudame ka A sama suuruse α võrra, sest Θ muutub pööramise tagajärjel α võrra, kuid summa $\Theta + A$

jääb endiseks, sest q pööramise tagajärjel ei muutu. See kaalutus näitab, et x -telje pööramisega saame esialgset A väärtust meelevaldselt suurendada või vähendada. Teiste sõnadega, telje pööramisega saab anda konstandile A meelevaldse soovitava väärtuse igal juhul. Pöörame telge niipalju, et saaksime $A = -\frac{\pi}{2}$; siis

$$\sin(\theta + A) = \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\theta.$$

Ülalleitud seos omab siis kuju:

$$-q\sqrt{k^2 + 2EF^2}\cos\theta = kq - F^2.$$

Pärast lahendamist q suhtes see võrrand annab:

$$q = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos\theta},$$

kus on tarvitatud lühendeid

$$\frac{F^2}{k} = p$$

$$\sqrt{1 + 2\frac{EF^2}{k^2}} = \varepsilon.$$

Leitud tulemus näitab, et trajektooriks on koonuslõige, fookusega gravitatsioonivälja tsentris O , fokaallaiusega $2p$ ja numbrilise ekstsentrilisusega ε . Juhul $\varepsilon < 1$ on tegemist ellipsiga (erijuhul $\varepsilon = 0$ ringiga), juhul $\varepsilon = 1$ see koonuslõige muutub parabooliks, juhul $\varepsilon > 1$ hüperbooliks.

Siin toodud integrimiskäigus jätsime tähele panemata, et ruutjuurel tuleks arvestada kahe erineva märgi võimalust. Tulemus on siiski õige, kuid selles täiesti korrektselt veenduda saaks vaid teatavate lisakaalutluste najal, millel meie siin ei peatu.

Nagu näeme, väljendab tulemus Kepleri esimest seadust planeetide liikumise kohta.

Kepleri teine seadus pole midagi muud, kui samuti meie poolt juba kasutatud pindalalause.

Kepleri kolmanda seaduse tõestamiseks jääb meil teostada veel üks integrimine, nimelt määrata seos polaarnurga θ ja aja t vahel.

Asetades teise võrrandisse (85) ρ avaldise Θ kaudu, saame:

$$\frac{\rho^2 d\Theta}{(1 + \varepsilon \cos \Theta)^2} = F dt.$$

Parempoolse osa integraaliks on siin $Ft + B$, kus B on uus ja viimane inteegrimiskonstant. Vasakpoolse osa integraaliks on

$$\frac{2\rho^2}{1 - \varepsilon^2} \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \arctan \left(\sqrt{\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon}} \tan \frac{\Theta}{2} \right) - \frac{\varepsilon \tan \frac{\Theta}{2}}{1 + \varepsilon + (1 - \varepsilon) \tan^2 \frac{\Theta}{2}} \right],$$

milles lugeja võib kõige lihtsamalt veenduda diferentsimise teel. See võrdlemisi komplitseeritud avaldis peab järelikult võrduma avaldisega $Ft + B$; seos Θ ja t vahel on seega leitud. Lugesed alghetkeks $t_0 = 0$ seda silmapilku, kus $\Theta = 0$, näeme kergesti, et siis tuleb võtta $B = 0$.

Määrame elliptilise trajektoori puhul ($\varepsilon < 1$) ringkäigu aja T , s. t. ajavahemiku, mille jooksul Θ muutub algväärtusest 0 väärtuseni 2π .

Selle aja vältel $\tan \frac{\Theta}{2}$ kulgeb esialgu positiivseid väärtusi, alates nullist kuni $+\infty$; edaspidisel Θ kasvamisel π -st kuni 2π -ni $\tan \frac{\Theta}{2}$ kulgeb negatiivseid väärtusi, alates $-\infty$ kuni nulli. Sama protsessi vältel $\arctan \left(\sqrt{\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon}} \tan \frac{\Theta}{2} \right)$ esimesel faasil muutub väärtusest 0 väärtuseni $\frac{\pi}{2}$; teisel faasil sama \arctan kasvab väärtusest $\frac{\pi}{2}$ edasi väärtuseni π . See kaalutus näitab, et $\Theta = 2\pi$ puhul, kus $t = T$, \arctan väärtuseks on π . Et teine liidetav ülaltoodud avaldise püstsulgudes $\Theta = 2\pi$ puhul muutub nulliks, siis järgneb seega, arvesse võttes $B = 0$:

$$\frac{2\rho^2\pi}{(1 - \varepsilon^2) \sqrt{1 - \varepsilon^2}} = FT.$$

Sellelega on ringkäigu aeg T määratud ρ , ε , F kaudu. Seost saab aga veel lihtsustada, kasutades ellipsi suurt pooltelge a :

Kohal, kus $\Theta = 0$ või 2π , järgneb trajektoori võrrandist

$$\rho(1 + \varepsilon) = p.$$

Teiselt poolt, ellipsi põhiomaduste kohaselt (vt. 51. joonis), sealsamas

$$Q = a - \varepsilon a = a(1 - \varepsilon).$$

Järelikult

$$a(1 - \varepsilon)(1 + \varepsilon) = a(1 - \varepsilon^2) = p,$$

ehk

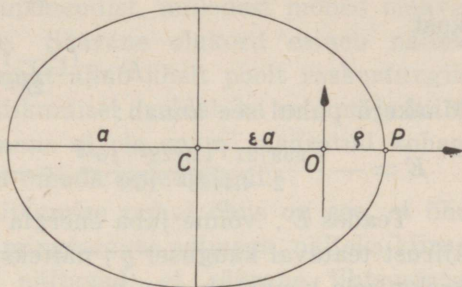
$$1 - \varepsilon^2 = \frac{p}{a}.$$

Et aga p tähendas $\frac{F^2}{k}$, siis järgneb

$$1 - \varepsilon^2 = \frac{F^2}{ka}.$$

Asetades neid suurusi varemleitud seosesse, mis määras T , saame:

$$\frac{2F^4\pi}{k^2\left(\frac{F^2}{ka}\right)^{1,5}} = FT.$$



51. joonis.

Järelikult

$$T = \frac{2\pi a^{1,5}}{\sqrt{k}}.$$

Seega ringkäigu aja ruut on võrdeline suure pooltelje kuubiga. See ongi Kepleri kolmas seadus.

Praeguleitud T avaldis võimaldab määrata väljaintensiivsust k vaadeldud T ja mõõdetud a kaudu palju täpsemalt, kui seda lubab seos $k = \varkappa m_1$, kus nii \varkappa kui ka m_1 on teada vaid õige jämedalt.

Maakera puhul on näiteks vaatluste najal selgunud:

$$a = 1,4945 \cdot 10^{13} \text{ [cm]}, T = 365,26 \text{ päeva} = 3,1558 \cdot 10^7 \text{ [sec]}.$$

Järelikult Päikese gravitatsiooniväljas

$$k = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2} = \frac{4\pi^2 \cdot 1,4945^3 \cdot 10^{39}}{3,1558^2 \cdot 10^{14}} = 1,3232 \cdot 10^{26} \text{ [cm}^3 \text{ sec}^{-2}\text{]}.$$

Pinnakonstandi F Maakera puhul määrab seos

$$F^2 = kp = ka(1 - \varepsilon^2).$$

Et Maakera puhul $\varepsilon = 0,0167$, siis järelikult

$$F = \sqrt{ka(1 - \varepsilon^2)} = \sqrt{1,3232 \cdot 10^{26} \cdot 1,4945 \cdot 10^{13} \cdot 0,999721} \\ = 4,4463 \cdot 10^{19} \text{ [cm}^2 \text{ sec}^{-1}\text{]} .$$

On F leitud, siis energiakonstant E on määratud seosega

$$1 + 2E \frac{F^2}{k^2} = \varepsilon^2 ,$$

kust

$$E = \frac{(\varepsilon^2 - 1)k^2}{2F^2} .$$

Maakera puhul see annab:

$$E = - \frac{0,999721 \cdot 1,3232^2 \cdot 10^{52}}{2 \cdot 4,4463^2 \cdot 10^{38}} = - 4,4265 \cdot 10^{12} \text{ [cm}^2 \text{ sec}^{-2}\text{]} .$$

Teades E , võime juba energia jäävuse lause põhjal määrata kiirust teataval kaugusel q , näiteks keskmist kiirust v_k vastavalt keskmisele kaugusele $q = a$:

$$v_k^2 = 2 \left(E + \frac{k}{a} \right) .$$

Maakera puhul järgneb:

$$v_k = \sqrt{2 \left[-4,4265 \cdot 10^{12} + \frac{1,3232 \cdot 10^{26}}{1,4945 \cdot 10^{13}} \right]} = 2,976 \cdot 10^6 \text{ [cm sec}^{-1}\text{]} .$$

Maakera keskmine kiirus orbiidil peab seega olema umbes 29,8 kilomeetrit sekundis.

M ä r k u s: Käesolevas paragraafis lühidalt arendatud planeetide liikumise teooria põhineb kahel lihtsustaval oletusel:

1) On oletatud, et Päike ise oma relatiivselt suure massi tõttu püsib paigal, s. t. ei allu sugugi planeedi poolt tekitatud gravitatsioonitungile; täpsemal arvestamisel tuleb aga silmas pidada ka väikest Päikese nihkumist planeedi mõjul, mis annab väikese muutuse ringkäigu ajas T , kus avaldab mõju planeedi ja Päikese masside suhe.

2) On oletatud, et tegemist on ainult ühe planeediga, s. t. et Päikese gravitatsiooniväli pole häiritud teiste planeetide gravitatsiooniväljast; tegelikult on säärane häire aga olemas ja trajektorid seetõttu polegi eksaktsed ellipsid. Probleemi, kus arvestatakse n keha vastastikust gravitatsiooni, tuntakse mehaanikas n -keha probleemi nime all. Juba $n = 3$ puhul tekivad selle prob-

leemi lahenduse otsimisel väga olulised matemaatilised raskused, milledest seni pole täiel määral üle saadud („kolme keha probleem“).

§ 26. Mürsu lend õhus.

Võib juhtuda, et materiaalsele punktile M mõjuv resultant-tung \mathfrak{F} koosneb mitmest komponendist, milledest mõned omavad potentsiaali, teised aga mitte. Säärane olukord esineb näiteks alati siis, kui materiaalne punkt allub ühelt poolt raskustungile, teiselt poolt aga selle punkti liikumisel avaldab ka veel mõju kiirusest sõltuv õhutakistus: viimane ei ole enam määratud kohaga (x, y, z) ja seetõttu ei saa omada potentsiaali.

Üks tavaline hüpotees liikumise puhul õhus on see, et õhutakistus on võrdeline kiiruse mingisuguse astmega, näiteks kiiruse ruuduga. Kuigi kogemused näitavad, et säärane lihtsustatud hüpotees tõelisuses ei pea täieliku täpsusega paika, võib teda ikkagi pidada üsna heaks lähenduses tegelikule olukorrale ning määrata tema najal näiteks mürskude trajektoore tavaliselt vastu võetava täpsusega.

Arvesse võttes, et õhutakistus on kiirusele vastassuunaline, s. t. igatahes mõjub trajektoori puutuja sihis, on otstarbekohane mürsu trajektoori probleemi käsitlemisel lähtuda resultanttungi projektsioonidest loomulikule saateteljestikule. Olgu resultanttungi \mathfrak{F} projektsioonid puutujale, peanormaalile ja binormaalile vastavalt P_1, P_2, P_3 ; punktikujulisena mõeldud mürsu M mass olgu endiselt m . Kiirenduse \mathfrak{u} projektsioonid loomulikudele saatetelgedele on teatavasti $\dot{v}, \frac{v^2}{\rho_1}, 0$ [§ 5, (15)]. Põhivalemi (57) kohaselt on seega

$$P_1 = m\dot{v}, \quad P_2 = m\frac{v^2}{\rho_1}, \quad P_3 = 0. \quad (86)$$

Need on punkti dünaamika „loomulikud põhivõrrandid“. Neis v tähendab skalaarset kiirust ja peakõverusraadiust kujutab

$$\rho_1 = \left| \frac{ds}{d\tau} \right|,$$

kus ds on trajektoori kaarediferentsiaal ja $d\tau$ puutuja nurgadiferentsiaal.

Mürsule mõjuva raskustungi suurus on mg ; õhutakistuse suurus olgu $mg\mu v^2$, kus μ on mingisugune konstant. Võrdeteguri kujuks valisime siin $mg\mu$ selleks, et pääseda hiljemini üle-
aruste murdavaldiste kirjutamisest.

z -telg olgu suunatud vertikaalselt ülespoole, x - ja y -telg olgu seega võetud horisontaaltasapinnas. Trajektoor peab kindlasti asetsema püsttasapinnas. Tõepoolest, resultanttungi \mathfrak{B} projektsioonideks X ja Y on just õhutakistuse projektsioonid, sest raskustung, olles risti x - ja y -teljega, projektsioone X ja Y ei anna; et aga õhutakistus mõjub trajektoori puutuja sihis, siis need X ja Y peavad olema võrdelised trajektoori puutuja suuna-
koosinustega, tähendab, ka võrdelised suurustega \dot{x} ja \dot{y} . Et aga igatahes, (60) kohaselt,

$$m\ddot{x} = X, \quad m\ddot{y} = Y,$$

seega

$$\frac{\ddot{x}}{\ddot{y}} = \frac{X}{Y} = \frac{\dot{x}}{\dot{y}},$$

järelikult

$$\frac{\ddot{x}}{\dot{x}} = \frac{\ddot{y}}{\dot{y}},$$

siis

$$\frac{d\dot{x}}{\dot{x}} = \frac{d\dot{y}}{\dot{y}}.$$

Integratsioon annab siit

$$\log \dot{x} = \log \dot{y} + \log C \quad \text{ehk} \quad \dot{x} = C\dot{y},$$

kus C on mingi konstant. Korrutades mõlemaid pooli dt -ga, järeldame

$$dx = Cdy,$$

kust veel kord integrides leiame

$$x = Cy + K;$$

K on siin veel üks integrimise konstant. Saadud seos on aga teatava vertikaaltasapinna võrrand, mida liikuva mürsu M koordinaadid x , y , z peavad igal juhul rahuldama, teiste sõnadega, trajektoor asetseb tõesti teatavas vertikaaltasapinnas.

Olgu nüüd teljed x ja z valitud selles trajektoori tasapinnas; alguspunkt O olgu valitud kahuri asukohal, tähendab, seal, kus mürsk asetseb alghetkel $t=0$ (52. joonis). Algkiiruse suurus olgu v_0 ja laskenurk horisontaali suhtes olgu φ_0 . Olgu veel $M1$ ja $M2$ vastavalt puutuja ja normaal (peanormaal) juhuslikul hetkel t ; binormaal ei tule arvesse, sest trajektoor on tasane. φ olgu puutuja kaldenurk x -telje suhtes; see φ osutub negatiiv-

seks, kui liikumise suunas puutuja kaldub horisontaalist allapoole. Nagu joonisest selgub, on siis raskustungi \mathfrak{R} projektsioon puutujale — $mg \sin \varphi$; õhutakistus, mõjudes puutujale vastupidises suunas, annab projektsioonina sellele puutujale — $mg\mu v^2$. Resultanttungi projektsioon puutujale on

järelikult — $mg \sin \varphi - mg\mu v^2$. (86) kohaselt peab see võrdne olema suurusega $m\dot{v}$. Normaali suunale õhutakistus projektsiooni ei anna, küll aga tuleb arvesse raskustungi projektsioon $mg \cos \varphi$. Viimane peab seega (86) kohaselt võrduma suurusega $m \frac{v^2}{\varrho_1}$. Jättes igal pool ühisteguri m ära, saame seega diferentsiaalvõrrandid:

$$\dot{v} = -g\mu v^2 - g \sin \varphi$$

$$\frac{v^2}{\varrho_1} = g \cos \varphi.$$

Nurk kahe lõpmata lähedal asetseva puutuja vahel on ilmsesti $d\varphi$ ning seetõttu kõverusraadius ϱ_1 on tuletise $\frac{ds}{d\varphi}$ absoluutväärtus; et aga ilmsesti lennu kestel, s. t. s kasvamisel, φ järjest kahaneb, siis see tuletis on negatiivne, järelikult

$$\varrho_1 = -\frac{ds}{d\varphi} = -\frac{\dot{s}}{\dot{\varphi}} = -\frac{v}{\dot{\varphi}},$$

seega

$$\frac{v^2}{\varrho_1} = -v\dot{\varphi}.$$

52. joonis.

Niisiis meie diferentsiaalvõrrandite süsteemile võib anda kuju:

$$\dot{v} = -g(\mu v^2 + \sin \varphi) \quad (87)$$

$$v\dot{\varphi} = -g \cos \varphi.$$

Nende kaudu v ja φ on määratud aja t funktsioonidena.

Süsteemi (87) integrimiseks talitame järgmiselt:

Jagamise teel järeldame kõigepealt, silmas pidades, et $\frac{\dot{v}}{\varphi} = \frac{dv}{d\varphi}$:

$$\frac{dv}{v d\varphi} = \tan \varphi + \frac{\mu v^2}{\cos \varphi},$$

ehk

$$\frac{dv}{d\varphi} - v \tan \varphi = \frac{\mu}{\cos \varphi} v^3.$$

See on nn. Bernoulli' võrrand, mis taandub lineaarsele tüübile asetusega $u = v^{-2}$, kus u on otsitav abifunktsioon ajast t .

Siis nimelt on $du = -2v^{-3}dv$, tähendab, $dv = -\frac{1}{2}v^3du$, ning võrrand omab kuju

$$-\frac{1}{2}v^3 \frac{du}{d\varphi} - v \tan \varphi = \frac{\mu}{\cos \varphi} v^3,$$

ehk, pärast jagamist v^3 -ga ja v^{-2} asendamist u -ga, märkide muutmist ja korrutamist 2-ga:

$$\frac{du}{d\varphi} + 2u \tan \varphi = -\frac{2\mu}{\cos \varphi}.$$

See on u suhtes lineaarne võrrand.

Lugeja saab diferentsimise teel kergesti kontrollida, et mainitud lineaarse võrrandi üldlahendiks on

$$u = \cos^2 \varphi \left[A - 2\mu \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\cos^3 \varphi} \right]$$

kus A tähendab meelevaldset konstanti. Kirjutades siin u asemel v^{-2} ja $2 \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\cos^3 \varphi}$ asemel lühendatult J , saame järelikult

$$\frac{1}{v^2} = \cos^2 \varphi [A - \mu J]. \quad (88)$$

Diferentsimise teel on jällegi kerge kontrollida, et

$$J = \frac{\tan \varphi}{\cos \varphi} - \log \tan \left(\frac{\Pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right).$$

Probleemi nõuetele vastava erilahendi saamiseks tuleb võtta algtingimustele $\varphi = \varphi_0$, $v = v_0$ vastav konstandi A väärtus. Avaldis J sõltub φ -st; olgu J_0 selle J väärtus, kui $\varphi = \varphi_0$. Leitud seose põhjal on siis

$$A = \frac{1}{v_0^2 \cos^2 \varphi_0} + \mu J_0.$$

Asetades seda tagasi võrrandisse (88), saamegi nõutava seose v ja φ vahel.

Teisest võrrandist (87) järgneb nüüd edasi

$$dt = -\frac{1}{g} \frac{v}{\cos \varphi} d\varphi,$$

kus v on (88) kohaselt väljendatav φ kaudu. Integrides siin vasakul alghetkest $t = 0$ kuni teatava hetkeni t , paremat kätt aga vastavalt φ algväärtusest φ_0 kuni vastava φ -ni, leiame t sõltuvuse nurgast φ :

$$t = -\frac{1}{g} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{v}{\cos \varphi} d\varphi. \quad (89)$$

Trajektoori leidmiseks jääb veel määrata x ja z sõltuvus samast nurgast φ . Arvesse võttes, et

$$\cos \varphi = \frac{dx}{ds} = \frac{\dot{x}}{s} = \frac{\dot{x}}{v}, \quad \sin \varphi = \frac{dz}{ds} = \frac{\dot{z}}{s} = \frac{\dot{z}}{v},$$

järeldame:

$$dx = v \cos \varphi dt = -\frac{1}{g} v^2 d\varphi$$

$$dz = v \sin \varphi dt = -\frac{1}{g} v^2 \tan \varphi d\varphi.$$

Integrimisel silmas pidades, et alghetkel on $\varphi = \varphi_0$, $x = 0$, $z = 0$, leiame siit:

$$x = -\frac{1}{g} \int_{\varphi_0}^{\varphi} v^2 d\varphi \quad (90)$$

$$z = -\frac{1}{g} \int_{\varphi_0}^{\varphi} v^2 \tan \varphi d\varphi.$$

Need integraalid (90) ei väljendu elementaarsetes funktsioonides; küll aga võib neid igal konkreetsel juhul numbriliselt arvutada küllaldase täpsusega näiteks Simpsoni valemi põhjal

$$\int_a^b f dx = \frac{\delta}{6} [f_1 + 4f_2 + 2f_3 + 4f_4 + 2f_5 + \dots + 4f_{2k} + f_{2k+1}], \quad (91)$$

kus integrimisvahemik a -st b -ni on jaotatud $2k$ võrdseks osaks, nõnda et $\frac{b-a}{2k} = \delta$, ning on arvutatud funktsiooni f väärtused f_1, f_2, \dots jaotuskohtades, nii et $f(a) = f_1, f(a + \delta) = f_2$ jne.

Võttes $\varphi = 0$, jõuame trajektoori kulminatsioonitäpini; et aga $\varphi = 0$ puhul ühtlasi $J = 0$, siis (88) alusel näeme, et $A = v_k^{-2}$, kus v_k tähendab just kiirust kulminatsioonitäpis. Seega on konstandi A füüsikaline tähendus seletatud.

Kahaneb φ järjest, lähenedes oma ilmsesti väikesimale väärtusele $-\frac{\pi}{2}$, siis v^{-2} läheneb piirväärtusele

$$-\mu \lim_{\varphi \rightarrow -\frac{\pi}{2}} J \cos^2 \varphi = \mu \left[\lim_{\varphi \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi \log \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) + 1 \right].$$

L'Hospital'i eeskirja abil saab veenduda, et

$$\lim_{\varphi \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi \log \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) = 0.$$

Järelikult $\varphi \rightarrow -\frac{\pi}{2}$ puhul v^{-2} läheneb piirväärtusele μ , s. t.

$$v \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\mu}}.$$

Sellega on seletatud konstandi μ füüsikaline tähendus. μ sõltub mürsu kujust, tema kaalust, õhu tihedusest ning arvatavasti veel mõningatest teistest asjaoludest.

Näitena vaatleme mürsku kaliibriga 7,5 [cm], kaaluga 7,24 [kg], mis lähtub algkiirusega 530 [m sec⁻¹] väljakahurist laskenurga all $\varphi_0 = 10^\circ$. Krupp'i poolt toimetatud mõõtmised näitavad, et tavalise, nn. „oživaalse“ peaga mürsk sellest kaliibrist kiiruse puhul 530 [m sec⁻¹] allub õhutakistusele 0,93 [kg] põiklöike ruutsentimeetri kohta. Antud juhul põiklöikeks on 44 [cm²].

Võttes arvesse, et mg on mürsu kaal, saame seega meie hüpoteesi najal

$$0,93 \cdot 44 = 7,24\mu \cdot 53\,000^2,$$

kus pikkusühikuna on arvestatud cm. Siit järgneb

$$\mu = 2,06 \cdot 10^{-9} [\text{cm}^{-2} \text{sec}^2].$$

Algväärtusele $\varphi_0 = 10^0$ vastab $J_0 = 0,35448$; neil andmeil selgub

$$A = 1,0973 \cdot 10^{-9} [\text{cm}^{-2} \text{sec}^2].$$

Tabuleerides selle põhjal v^2 , $v^2 \tan \varphi$, $\frac{v}{\cos \varphi}$ ja v näiteks 1^0 tagant, saame säärase tabeli najal Simpson'i valemi kaudu hõlpsasti arvutada ka x , z , t , kuid 2^0 tagant. Tulemused osutuvad järgmisteks:

φ [0]	v^2 [$\text{m}^2 \text{sec}^{-2}$]	$v^2 \tan \varphi$ [$\text{m}^2 \text{sec}^{-2}$]	v [m sec^{-1}]	$v/\cos \varphi$ [m sec^{-1}]	x [m]	z [m]	t [sec]
+ 10	280905	49532	530	538	0	0	0,00
9	231892	36727	482	488			
8	197492	27756	444	449	834	133	1,74
7	171999	21118	415	418			
6	152393	16017	390	393	1449	209	3,23
5	136842	11972	370	371			
4	124218	8687	352	353	1938	252	4,56
3	113783	5963	337	338			
2	105016	3667	324	324	2344	274	5,76
1	97552	1703	312	312			
0	91134	0	302	302	2692	280	6,87
- 1	85556	- 1494	292	293			
- 2	80667	- 2817	284	284	2996	274	7,91
- 3	76353	- 4002	276	277			
- 4	72523	- 5072	269	270	3268	260	8,90
- 5	69101	- 6046	263	264			
- 6	66033	- 6940	257	258	3514	239	9,84
- 7	63267	- 7768	252	253			
- 8	60763	- 8540	246	249	3740	211	10,74
- 9	58491	- 9264	242	245			
- 10	56420	- 9949	238	241	3948	178	11,61
- 11	54529	- 10599	234	238			
- 12	52639	- 11189	229	235	4142	141	12,46
- 13	51210	- 11823	226	232			
- 14	49749	- 12404	223	230	4324	99	13,28
- 15	48404	- 12970	220	228			
- 16	47162	- 13524	217	226	4497	52	14,09
- 17	46016	- 14068	214	224			
- 18	44957	- 14607	212	223	4660	2	14,89
- 19	43978	- 15143	210	222			
- 20	43071	- 15677	208	221	4817	- 51	15,68

See tabel näitab, et arvutatud ulatuses kiirus järjest kahaneb, langedes isegi väärtuseni 208 [m sec⁻¹]. Et aga teiselt poolt kiiruse piirväärtuseks on $\frac{1}{\sqrt{\mu}}$, mis annab 220 [m sec⁻¹], siis selgub, et kiirus peab saavutama miinimumi väljaspool tabeli piire ning siis hakkab tõusma, lähenedes piirväärtusele juba alt-poolt.

Interpoleerides tabeli andmeid leiame, et lennukaugus D horisontaalses suunas on 4667 [m], lennuaeg T vastavalt 14,93 [sec]; kõrgus H kulminatsioonis on, nagu tabelist otseselt nähtub, 280 [m]. Heli kataks vahemaa $D = 4667$ ajaga 14,0 sekundit; pauk jõuaks seega tabamiskohale umbes 1 sekund enne mürsku. Tabamisnurk on umbes -18° . Lugejale olgu soovitatud trajektoori väljajoonestamine tabeli andmete järgi.

On $\mu = 0$, siis õhutakistus puudub, järelikult peab trajektoor siis olema parabolne. See selgub ka leitud üldvalemeist, kui neis asendada $\mu = 0$. Kõigepealt on siis $A = \frac{1}{v_0^2 \cos^2 \varphi_0}$ ning seetõttu (88) järgi $v \cos \varphi = v_0 \cos \varphi_0$, järelikult

$$v = \frac{v_0 \cos \varphi_0}{\cos \varphi},$$

seega (89) ja (90) kohaselt

$$t = -\frac{1}{g} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{v_0 \cos \varphi_0}{\cos^2 \varphi} d\varphi = \frac{v_0 \cos \varphi_0}{g} (\tan \varphi_0 - \tan \varphi)$$

$$x = -\frac{1}{g} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{v_0^2 \cos^2 \varphi_0}{\cos^2 \varphi} d\varphi = \frac{v_0^2 \cos^2 \varphi_0}{g} (\tan \varphi_0 - \tan \varphi)$$

$$z = -\frac{1}{g} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{v_0^2 \cos^2 \varphi_0}{\cos^2 \varphi} \tan \varphi d\varphi = \frac{v_0^2 \cos^2 \varphi_0}{2g} (\tan^2 \varphi_0 - \tan^2 \varphi).$$

z avaldisest järgneb, et $z = 0$, kui $\varphi = \pm \varphi_0$; võttes $\varphi = -\varphi_0$ avaldises x , saame lennukauguse D paraboolse trajektoori puhul:

$$D = \frac{2v_0^2 \cos^2 \varphi_0 \tan \varphi_0}{g} = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\varphi_0.$$

Sama $\varphi = -\varphi_0$ asetamine avaldisse t annab lennuaja T :

$$T = \frac{2v_0 \cos \varphi_0}{g} \tan \varphi_0 = \frac{2v_0}{g} \sin \varphi_0 .$$

Kulminatsioonitäpi kõrgus H järgneb avaldisest z , kui võtta $\varphi = 0$:

$$H = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \varphi_0 .$$

Andmeil $\varphi_0 = 10^\circ$, $v_0 = 530$ [m sec⁻¹] järgneks seega paraboolse trajektoori puhul

$$D = 9793 \text{ [m]}, \quad T = 18,76 \text{ [sec]}, \quad H = 432 \text{ [m]} .$$

Võrdlus varemleituga näitab, et võrdlemisi väike $\mu = 2,06 \cdot 10^{-9}$ [cm⁻² sec²] vähendab lennukaugust antud juhul umbes 50% võrra, lennuaega umbes 25% võrra ja kulminatsioonikõrgust umbes 35% võrra.

M ä r k u s: Uuema aja teoreetilised ja katselised uurimised näitavad, et tegelik õhutakistuse seadus erineb ülalkasutatud hüpoteesist esijoones selle poolest, et μ omakorda pole konstantne, vaid sõltub jagatisest $\frac{v}{a}$, kus a tähendab helikiirust õhus. Seejuures on oluline, kas v ületab helikiirust, või aga, vastupidiselt, on helikiirusest väiksem. Kuigi meie poolt siin määratud trajektoor seega ei saa olla eksaktselt õige, tuleb ta siiski õigele trajektoorige võrdlemisi lähedale, — igatahes palju lähemale kui parabool. Ballistika probleemides mängib peale selle veel tähtsat osa mürsu rotatsioon ümber telje; selle asjaolu tõttu eriti trajektoor ei jää enam tasaseks kõveraks, vaid näitab „derivatsiooni“, s. t. kõrvalekaldumist vertikaaltasapinnast ühele või teisele poole, vastavalt mürsu rotatsiooni suunale.

§ 27. Elektroni liikumine magnetilises väljas.

Näitena olukorrast, kus tungi kandesirge ei ühti sirgega, mis ühendab tungi allikat materiaalse punktiga M , millele tung on rakendatud, käsitleme elektroni liikumist magnetilises väljas.

Olgu magnetiline väli esile kutsutud üksiku, koordinaatide alguses O asetseva põhjapooluse poolt; magnetilised tungjooned väljuvad siis kohast O radiaalselt. Väljatugevus, s. o. magnetiline tung, mis mõjub antud kohas üksikule seal paigutatud ühik-

poolusele, olgu \mathfrak{H} ; selle \mathfrak{H} projektsioonideks olgu X, Y, Z . \mathfrak{H} suurust võib mõõta gaussides, kusjuures 1 gauss iseloomustab säärast väljatugevust, mille puhul ühikpoolusele mõjuva tungi suuruseks osutub parajasti 1 düün.

Et \mathfrak{H} on suunatud radiaalselt O -st eemale ning on ühtlasi pöördvõrdeline kauguse ϱ ruuduga kohast O , siis $|\mathfrak{H}| = \frac{k}{\varrho^2}$, kus konstant k näitab, mitu korda välja tekitav poolus kohas O on ühikpoolusest tugevam. Seejuures siis

$$X = \frac{k}{\varrho^2} \cdot \frac{x}{\varrho}, \quad Y = \frac{k}{\varrho^2} \cdot \frac{y}{\varrho}, \quad Z = \frac{k}{\varrho^2} \cdot \frac{z}{\varrho}.$$

Kui elektroni laengut e mõõta elektromagnetilistes ühikutes ja selle elektroni kiirusvektoriks on \mathbf{v} , siis magnetivälja tõttu elektronile osutub rakendatuks tung \mathfrak{F} , mis on vektori $e\mathbf{v}$ vektoriaalne korrutis vektoriga \mathfrak{H} :

$$\mathfrak{F} = e\mathbf{v} \times \mathfrak{H}.$$

Seejuures $|\mathfrak{F}|$ tuleb düünides, kui $|\mathbf{v}| = v$ on määratud ühikuis [cm sec⁻¹].

Vektor \mathfrak{F} on igatahes risti \mathbf{v} ja \mathfrak{H} ühistasapinnaga. Et elektroni laeng on negatiivne, siis valemeis tuleb järjekindlalt võtta $e = -1,59 \cdot 10^{-20}$. Olgu veel meelde tuletatud, et elektroni mass $m = 9 \cdot 10^{-28}$ [g].

(59) kohaselt elektroni liikumine on siis määratud võrranditega:

$$m\ddot{x} = e \left(\dot{y} \frac{kz}{\varrho^3} - \dot{z} \frac{ky}{\varrho^3} \right) = \frac{ek}{\varrho^3} (\dot{y}z - \dot{z}y)$$

$$m\ddot{y} = \dots \dots \dots = \frac{ek}{\varrho^3} (\dot{z}x - \dot{x}z)$$

$$m\ddot{z} = \dots \dots \dots = \frac{ek}{\varrho^3} (\dot{x}y - \dot{y}x).$$

Võttes arvesse, et

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{ds} \frac{ds}{dt} = v \frac{dx}{ds}, \quad \dot{y} = v \frac{dy}{ds}, \quad \dot{z} = v \frac{dz}{ds},$$

ning et

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d\dot{x}}{ds} \frac{ds}{dt} = v \frac{d\dot{x}}{ds} = v \frac{d \left(v \frac{dx}{ds} \right)}{ds} = v^2 \frac{d^2x}{ds^2} + v \frac{dx}{ds} \frac{dv}{ds} \quad \text{jne.,}$$

leiame, taandades ühisteguriga v :

$$\frac{mv}{ek} \frac{d^2x}{ds^2} + \frac{m}{ek} \frac{dx}{ds} \frac{dv}{ds} = \frac{1}{\varrho^3} \left(z \frac{dy}{ds} - y \frac{dz}{ds} \right) \text{ jne.}$$

Hoo lause põhjal hoog $\frac{1}{2} mv^2$ kasvab tungi \mathfrak{B} poolt tehtud töö võrra; et aga antud juhul \mathfrak{B} on alaliselt risti kiirusvektoriga \mathbf{v} , s. t. risti elektroni nihkumise suunaga, siis on töö alaliselt null, — tähendab, hoog ei saa muutuda. Sellest järgneb, et ka kiiruse suurus v ei saa muutuda. Seega v on konstantne ja $dv = 0$; liikmed, kus esineb $\frac{dv}{ds}$, langevad järelikult võrranditest välja. Tähistades veel $\frac{mv}{ek}$ lühendatult sümboliga μ , jõuame võrrand-süsteemi juurde

$$\begin{aligned} \mu \frac{d^2x}{ds^2} &= \frac{1}{\varrho^3} \left(z \frac{dy}{ds} - y \frac{dz}{ds} \right) \\ \mu \frac{d^2y}{ds^2} &= \frac{1}{\varrho^3} \left(x \frac{dz}{ds} - z \frac{dx}{ds} \right) \\ \mu \frac{d^2z}{ds^2} &= \frac{1}{\varrho^3} \left(y \frac{dx}{ds} - x \frac{dy}{ds} \right). \end{aligned} \quad (92)$$

Kombineerides 2 esimest võrrandit (92), järeldame:

$$\begin{aligned} \mu \left(x \frac{d^2y}{ds^2} - y \frac{d^2x}{ds^2} \right) &= \frac{1}{\varrho^3} \left[x^2 \frac{dz}{ds} - xz \frac{dx}{ds} - yz \frac{dy}{ds} + y^2 \frac{dz}{ds} \right] \\ &= \frac{1}{\varrho^3} \left[(x^2 + y^2 + z^2) \frac{dz}{ds} - z \left(x \frac{dx}{ds} + y \frac{dy}{ds} + z \frac{dz}{ds} \right) \right]. \end{aligned}$$

Et aga

$$x^2 + y^2 + z^2 = \varrho^2, \quad x \frac{dx}{ds} + y \frac{dy}{ds} + z \frac{dz}{ds} = \varrho \frac{d\varrho}{ds},$$

siis järgneb edasi:

$$\mu \left(x \frac{d^2y}{ds^2} - y \frac{d^2x}{ds^2} \right) = \frac{1}{\varrho} \frac{dz}{ds} - \frac{z}{\varrho^2} \frac{d\varrho}{ds} = \frac{\varrho \frac{dz}{ds} - z \frac{d\varrho}{ds}}{\varrho^2} = \frac{d}{ds} \left(\frac{z}{\varrho} \right).$$

Vasakpoolne avaldis on, nagu kerge kontrollida,

$$\mu \frac{d}{ds} \left(x \frac{dy}{ds} - y \frac{dx}{ds} \right).$$

Integrides mõlemal pooltel ning tähistades integrimiskonstanti sümboliga C , järeldame seetõttu:

$$\mu \left(x \frac{dy}{ds} - y \frac{dx}{ds} \right) = \frac{z}{\varrho} + C.$$

Talitades analoogiliselt võrranditega (92) teistes kombinatsioonides, saame veel

$$\mu \left(y \frac{dz}{ds} - z \frac{dy}{ds} \right) = \frac{x}{\rho} + A$$

$$\mu \left(z \frac{dx}{ds} - x \frac{dz}{ds} \right) = \frac{y}{\rho} + B,$$

kus A ja B on samuti integrimiskonstandid.

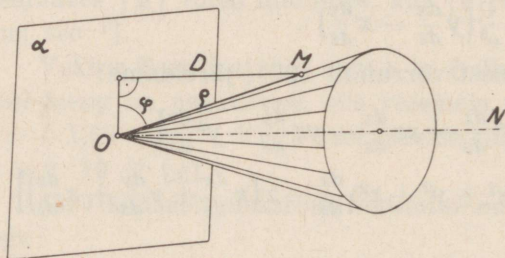
Korrutades leitud 3 võrrandit vastavalt z , x ja y -ga ning liites, mille tagajärjel vasakpoolne summa muutub nulliks, leiame siit:

$$0 = \frac{z^2 + x^2 + y^2}{\rho} + Cz + Ax + By,$$

ehk

$$x^2 + y^2 + z^2 = (Ax + By + Cz)^2.$$

See teise järgu homogeenne võrrand vastab teise järgu koonusele tipuga algpunktis O . Elektroni trajektor peab asetsema sel koonusel.



53. joonis.

On kerge veenduda, et tegemist on just ringkoonusega. Selleks vaatleme tasapinda α , mis läbib O ja mille võrrandiks on

$$Ax + By + Cz = 0$$

(53. joonis). Projekttime koonuse moodustajal asetseva punkti M : (x, y, z) sellele tasapinnale α ; projektsiooniks olgu M' . Pikkus $MM' = D$ on teatavasti määratud valemiga

$$D = \frac{|Ax + By + Cz|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Samal ajal pikkus $OM = \rho$. Koonuse võrrandist järgneb

$$\frac{|Ax + By + Cz|}{\rho} = +1,$$

teiste sõnadega,

$$\frac{D\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}{\varrho} = +1,$$

ehk

$$\tan \varphi = \frac{D}{\varrho} = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \text{konstant.}$$

Järelikult moodustajate kaldenurk tasapinna α suhtes on kõikidel moodustajatel sama; see näitabki, et tegemist on sümmeetrilise ringkoonusega, mille telg ON on tasapinna α normaaliks.

Et v on konstantne, tähendab, $v = 0$, siis elektroni puutekiirendus kaob ning jääb üle vaid normaalkiirendus. Tung \mathfrak{P} on seega kogu aeg suunatud trajektoori peanormaali suunas. Teiselt poolt aga on, nagu varemini selgus, tung \mathfrak{P} alati risti sihiga (moodustajaga) OM ja ühtlasi ka risti \mathfrak{v} ehk ds sihiga; et ds langeb koonuse pinnale, siis järgneb, et \mathfrak{P} langeb koonuse normaali kohas M . Niisiis trajektoori kooldumise tasapind sisaldab alati koonuse normaali vastavas kohas.

Pinnal asetsevat kõverjoont, mille kooldumistasapind alaliselt sisaldab pinna normaali vastavas kohas, kutsutakse selle pinna geodeetiliseks jooneks. Geodeetilise joone tähtsaks omaduseks on asjaolu, et ta näitab lühima ühendustee lähedal-asetsevate punktide vahel pinda mööda. Elektroni trajektoor on vastava ringkoonuse geodeetiline joon; koonuse tipp asetseb magnetivälja tekitavas pooluses. Et koonuse geodeetiline joon, tehes keerdusid koonuse ümber, ühes suunas esialgu läheneb koonuse tipule, pärast aga jälle sümmeetriliselt kaugeneb, siis sobiva kiiruse suuna puhul elektron nagu neelatakse magnetpooluse poole, siis aga nagu reflekteeritakse sealt.

Asetseb magnetpoolus lõpmata kaugel, siis on magnetiväli homogeenne, vektor \mathfrak{S} osutub konstantseks, koonus muutub ringsilindriks ja trajektooriks osutub ringsilindri geodeetiline joon, s. t. kruvijoone. Määrame selle kruvijoone raadiuse ja sammude, lähtudes otseselt vastavaist diferentsiaalvõrrandest.

Asetsegu elektron alghetkel $t = 0$ koordinaatide alguses O . Olgu veel z -telg võetud konstantse \mathfrak{H} -vektori suunas, — siis $X = 0$, $Y = 0$, $Z = |\mathfrak{H}|$. Kirjutades tungi \mathfrak{F} projektsioone $m\ddot{x}$, $m\ddot{y}$, $m\ddot{z}$ vektorite e_x ja \mathfrak{H} vektoriaalse korrutisena, saame nüüd:

$$m\ddot{x} = eyZ, \quad m\ddot{y} = -exZ, \quad m\ddot{z} = 0,$$

kus $Z = |\mathfrak{H}|$ on konstantne. Viimane võrrand näitab, et z on konstantne. See z on kiiruse v projektsioon magnetivälja tungjoonte suunale, määrates seega kiiruse komponendi paralleelselt magnetiliste tungjoontega; selle asjaolu esiletõstmiseks tähistame z teise sümboliga $v_{||}$.

Et teiselt poolt, nagu varemini nägime, ka $v = |v|$ peab

jääma konstantseks, siis ka kiiruse v projektsioon v_{\perp} risti magnetiliste tungjoonte suunaga peab jääma konstantseks, sest (54. joonis)

$$v^2 = v_{||}^2 + v_{\perp}^2.$$

v_{\perp} määrab kiiruskomponendi suuruse risti tungjoontega; ilmsesti on

$$v_{\perp}^2 = x^2 + y^2.$$

Tähistame lühenduseks kaare s järgi võetud tuletisi

kriipsude abil, nii et $x' = \frac{dx}{ds}$ jne. Nagu varemini nägime, on $\ddot{x} = v^2 x''$, $\ddot{y} = v^2 y''$ jne. Kaks esimest diferentsiaalvõrrandit antud juhul omavad siis kuju:

$$mv^2 x'' = ey'Z, \quad mv^2 y'' = -ex'Z.$$

Siin konstant Z tähendab sisuliselt sedasama, mis varemini k , nimelt magnetivälja intensiivsust. Tähistades seetõttu $\frac{mv}{eZ}$ endiselt sümboliga μ , järel dame

$$\mu x'' = y', \quad \mu y'' = -x'.$$

Neist võrrandeist järgneb

$$\mu(xy'' - yx'') = -xx' - yy'.$$

Et aga

$$xy'' - yx'' = \frac{d}{ds}(xy' - yx'), \quad -xx' - yy' = -\frac{1}{2} \frac{d}{ds}(x^2 + y^2),$$

siis integrimisel järgneb:

$$\mu(xy' - yx') = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2) + C.$$

Et alghetkel oli võetud $x = 0$, $y = 0$, siis integrimiskonstant C siin peab aga muutuma nulliks.

Edasi on otstarbekohane üle minna polaarkoordinaatidele ρ , Θ seoste

$$x = \rho \cos \Theta, \quad y = \rho \sin \Theta$$

$$x' = \rho' \cos \Theta - \rho \sin \Theta \cdot \Theta', \quad y' = \rho' \sin \Theta + \rho \cos \Theta \cdot \Theta'$$

abil, milledest järgneb

$$xy' - yx' = \rho^2 \Theta', \quad x^2 + y^2 = \rho^2.$$

Asendades seda ning võttes arvesse, et $C = 0$, leiame:

$$\mu \rho^2 \Theta' = -\frac{1}{2} \rho^2, \quad \Theta' = -\frac{1}{2\mu},$$

kust integrimisega järgneb

$$\Theta = -\frac{1}{2\mu} s + C_1.$$

Ka seda teist integrimiskonstanti C_1 saab asendada nulliga, kui kaarepikkust s lugeda alghetkest $t = 0$ alates ja seejuures anda x -teljele säärane suund, et sel kohal oleks $\Theta = 0$. Niisiis

$$\Theta = -\frac{1}{2\mu} s.$$

Diferentsides x' väljendust polaarkoordinaatides veel kord s järgi ning kasutades seejuures $\Theta' = -\frac{1}{2\mu}$, leiame:

$$x'' = \rho'' \cos \Theta + \frac{1}{2\mu} \rho' \sin \Theta + \frac{1}{2\mu} (\rho' \sin \Theta - \frac{1}{2\mu} \rho \cos \Theta),$$

ehk

$$\mu x'' = \mu \rho'' \cos \Theta + \rho' \sin \Theta - \frac{1}{4\mu} \rho \cos \Theta.$$

Võrrutades seda diferentsiaalvõrrandite põhjal y' -ga, saame

$$\mu \varrho'' \cos \Theta + \varrho' \sin \Theta - \frac{1}{4\mu} \varrho \cos \Theta = \varrho' \sin \Theta - \frac{1}{2\mu} \varrho \cos \Theta,$$

s. t.

$$\varrho'' = -\frac{1}{4\mu^2} \varrho.$$

Praegu saadud teise järgu diferentsiaalvõrrandi üldlahendiks on

$$\varrho = A \sin\left(\frac{1}{2\mu} s + B\right),$$

nagu on kerge kontrollida diferentsimise teel. Et alghetkel pidi olema $s = 0$, $\varrho = 0$, siis antud juhul võib võtta $B = 0$; jääb veel määrata integrimiskonstandi A väärtus. Selleks võtame arvesse, et $B = 0$ puhul

$$x = \varrho \cos \Theta = A \sin \frac{1}{2\mu} s \cdot \cos \frac{1}{2\mu} s = \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{\mu} s$$

$$y = \varrho \sin \Theta = -A \sin \frac{1}{2\mu} s \sin \frac{1}{2\mu} s = -A \sin^2 \frac{1}{2\mu} s \\ = \frac{1}{2} A (\cos \frac{1}{\mu} s - 1),$$

kust järgneb:

$$\dot{x} = \frac{A}{2\mu} \dot{s} \cos \frac{1}{\mu} s, \quad \dot{y} = -\frac{A}{2\mu} \dot{s} \sin \frac{1}{\mu} s.$$

Et aga $\dot{s} = v$, siis sellest omakorda järgneb:

$$v_{\perp}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \frac{A^2}{4\mu^2} v^2, \quad v_{\perp} = \frac{Av}{2\mu}.$$

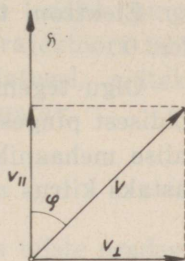
Seega

$$A = 2\mu \frac{v_{\perp}}{v}.$$

Toetudes veel v konstantsusele, võime s asemel kirjutada vt ja sellega

$$\varrho = 2\mu \frac{v_{\perp}}{v} \sin \frac{v}{2\mu} t.$$

Teades juba, et elektroni trajektooriks on kruvijoon ring-silindril, mille moodustajateks on magnetivälja tungjooned, mille telg järelikult on paralleelne z -teljega, näeme, et vastava ringsilindri läbimõõduks on parajasti $2\mu \frac{v_{\perp}}{v}$, sest see kujutab q maksimaalset väärtust silindri teljega risti minevas x - y -tasapinnas ja silinder läbib koordinaatide alguse O , kus $q = 0$.



55. joonis.

55. joonis näitab, et $\frac{v_{\perp}}{v}$ kujutab $\sin \varphi$, kus φ on elektroni kiirusvektori kalle magnetivälja tungjoonte sihi suhtes. Seega trajektoori kandva ringsilindri raadiuseks R on

$$R = |\mu \sin \varphi|.$$

Et koordinaatide algus O ei asetse mitte silindri teljel, vaid silindril endal, siis kruvijoon on ühe keeru teinud parajasti siis, kui Θ on kasvanud π võrra. Vastav aeg T on seega määratud nõudega

$$\frac{v}{2\mu} T = \pi,$$

kust

$$T = \frac{2\mu\pi}{v}.$$

Kruvijoone samm H on seega

$$H = |v_{\parallel} T| = |2\mu\pi \frac{v_{\parallel}}{v}| = |2\mu\pi \cos \varphi|.$$

On φ seevõrra väike, et $\cos \varphi \approx 1$, siis $H \approx |2\mu\pi|$, sõltumata φ -st. See näitab, et sama φ väärtusega, tähendab, sama kiirusega v elektronid, mis väljusid koordinaatide algusest O samaaegselt, kohtuvad uuesti kaugusel $|2\mu\pi|$ kohast O , kui arvestada vaid neid elektrone, millel kiiruse suund vähe erines magnetiliste tungjoonte suunast (vastavate kruvijoonte raadiused on ikkagi tunduvalt erinevad!). Magnetivälja abil osutub seega võimalikuks kitsaid elektronikimpe koondada analoogiliselt sel-

lega, nagu optiliste läätsede abil saab koondada kitsaid valguskiirte kimpe.

Elektroni trajektoor muutub ringiks, kui $\varphi = 90^\circ$, sest siis $H = 0$.

Olgu tegemist elektroniga, mille kiirus on tingitud 100 000-voldisest pingest; magnetivälja tugevus olgu 1000 gaussi. Klassikalise mehaanika valemite alusel (§ 24, näide 4) sellele pingele vastaks kiirus $v = 1,88 \cdot 10^{10}$ [cm sec⁻¹]. Selle najal leiaksime

$$\mu = \frac{9 \cdot 10^{-28} \cdot 1,88 \cdot 10^{10}}{-1,59 \cdot 10^{-20} \cdot 1000} = -1,06.$$

On veel

$$\varphi = 10^\circ, \quad \sin \varphi = 0,17, \quad \cos \varphi = 0,98,$$

siis

$$R = 1,06 \cdot 0,17 = 0,18 \text{ [cm]}$$

$$H = 2 \cdot 1,06 \cdot 3,14 \cdot 0,98 = 6,5 \text{ [cm]}.$$

On aga $\varphi = 90^\circ$, siis trajektoor muutuks ringiks läbimõõduga 2,1 [cm].

Meie juhtisime § 24 lõpus tähelepanu sellele, et relativistliku mehaanika alusel arvatud elektronide kiirused osutuvad väiksemaiks kui klassikalise mehaanika valemite najal määratud kiirused. Relativistlikult arvatud μ oleks seega väiksem kui 1,06 absoluutväärtuse poolest. Vastavad arvutused näitavad nimelt, et 100 000-voldine pinge annab elektronile Einsteini kohaselt vaid kiiruse $v = 1,65 \cdot 10^{10}$ [cm sec⁻¹], millele vastaks $\mu = -0,93$. Teiselt poolt tuleks aga Einsteini järgi R arvutamisel veel μ puhul

üks parandustegur $\left[1 - \frac{v^2}{c^2}\right]^{-0,5}$ juurde, kus $c = 3 \cdot 10^{10}$ [cm sec⁻¹]

tähendab valguskiirust. Antud juhul selle parandusteguri väärtus on 1,20, nii et lõppude lõpuks relativistlikul alusel määratud μ oleks $-1,11$, seega endisest suurem. $\varphi = 90^\circ$ puhul Einsteini järgi tuleks järelikult ringi läbimõõduna 2,2 [cm]. Säärase suurusega erinevused on juba katseliselt kontrollitavad; tõepoolest räägivadki eksaktsed mõõtmised kõikidel juhtudel relativistliku mehaanika kasuks.

On magnetiväli õige nõrk, nagu näiteks Maakera enda magnetiväli, mille tugevus meie laiustes on umbes 0,2 gaussi, siis μ läheb õige suureks. 0,2 gaussile vastab endise pinge 100 000 voldi puhul $\mu = -5300$; ringikujulise trajektoori läbimõõt oleks seega juba 106 meetrit. Väikesel ulatusel, näiteks fotoplaadil, säärane väike kõverus pole üldse märgatav.

§ 28. Võnked.

Mehhanismides esinevad sageli üksikosad, mis teiste osadega on elastselt seotud nõnda, et nad püüavad säilitada teatava tasakaaluasendi ja hakkavad võnkuma, niipea kui neid mingi juhusliku häire mõjul on viidud sellest tasakaaluasendist välja. Lihtsa näite pakub tavaline kruvijooneetaoline vedru, mida tehnikas sageli ebatäpselt kutsutakse spiraalvedruks: säärane vedru püüab säilitada kindla pikkuse, arendades elastset vastupanu nii tõmbele kui ka survele; iseloomustavaks on vedru puhul just see, et tekkiv elastsustung on võrdeline suurusega, mille võrra vedru pikkust on vägivaldselt muudetud, kusjuures see elastsustung on suunatud nõnda, et ta püüab vedru normaalpikkust jalule seada.

Piirdudes vaid vedru otspunkti vaatlusega, saame kujutelmata materiaalsest punktist, millele mõjub elastsustung \mathfrak{F} sääraselt, et \mathfrak{F} on alati suunatud selle materiaalse punkti tasakaaluasendi poole ja ühtlasi \mathfrak{F} suurus on võrdeline hetkelise asendi kaugusega q sellest tasakaalu asendist.

Loobudes nüüd elastsustungi realiseerivast vedrust, piirdume ainuüksi sellele tungile alluva üksiku punkti vaatlemisega. Olgu tasakaaluasendiks valitud koordinaatide algus O . Olgu m endiselt kõnealuse materiaalse punkti M mass ja olgu elastsustungi võrdetegur tähistatud $m\omega^2$. On (x, y, z) punkti M hetkeline asukoht, siis elastsustungi suunakoosinusteks on vastavalt $-\frac{x}{q}$, $-\frac{y}{q}$, $-\frac{z}{q}$. Järelikult elastsustungi \mathfrak{F} projektsioonid X, Y, Z on

$$X = -m\omega^2 q \frac{x}{q} = -m\omega^2 x, \quad Y = -m\omega^2 y, \quad Z = -m\omega^2 z.$$

Põhivõrrandid (60) omavad seega, pärast ühisteguri m kõrvaldamist, antud juhul kuju

$$\ddot{x} = -\omega^2 x, \quad \ddot{y} = -\omega^2 y, \quad \ddot{z} = -\omega^2 z. \quad (93)$$

Diferentsimise teel on kerge kontrollida, et võrrandite (93) üldlahend kõlab

$$\begin{aligned} x &= A_1 \sin \omega t + B_1 \cos \omega t \\ y &= A_2 \sin \omega t + B_2 \cos \omega t \\ z &= A_3 \sin \omega t + B_3 \cos \omega t, \end{aligned} \quad (94)$$

kus $A_1, B_1, A_2, \dots, B_3$ ongi 6 meelevaldset konstanti.

Et tungiväli on tsentraalne, siis trajektoor on igatahes tasapinnaline ja trajektoori tasapind sisaldab O . Valides x - ja y -telje trajektoori tasapinnas, peame saama $z = 0$ iga t puhul, mis siis nõuab $A_3 = 0, B_3 = 0$.

Jättes lugeja enda hooleks veenduda, et üldjuhul trajektooriks on ellips tsentriga kohas O , peatume erijuhul, kus trajektoor ise läbib punkti O . Olgu selle O läbimise hetk valitud alghetkeks $t = 0$. Võrrandeist (94) järgneb siis:

$$\begin{aligned} 0 &= A_1 \sin 0 + B_1 \cos 0 = B_1 \\ 0 &= A_2 \sin 0 + B_2 \cos 0 = B_2. \end{aligned}$$

Seega sel erijuhul, kus trajektoor ikkagi asetseb x - y -tasapinnas,

$$x = A_1 \sin \omega t, \quad y = A_2 \sin \omega t,$$

millest $\sin \omega t$ elimineerides järeldame:

$$y = \frac{A_2}{A_1} x.$$

Tulemus näitab, et trajektoor on sirgjooneline, läbides O . Valides trajektoori kandesirge x -teljeks, peame saama $y = 0$ iga t puhul, mis nõuab $A_2 = 0$. Punkti M asukoht on siis määratud juba võrrandiga

$$x = A_1 \sin \omega t \quad (95)$$

üksinda.

Konstandi A_1 väärtust võrrandis (95) saame määrata teades, kus M asetseb teataval hetkel t . Veel õpetlikum on aga A_1 määramine algkiiruse v_0 kaudu, mida M omab alghetkel $t = 0$, s. t. tasakaaluasendis O . Et nimelt ühedimensioonilises käsitluses x kujutab just märgiga varustatud kiiruse suurust v , siis diferentsides (95) võime kirjutada

$$v = A_1 \omega \cos \omega t,$$

järelikult

$$v_0 = A_1 \omega \cos 0 = A_1 \omega$$

ehk

$$A_1 = \frac{v_0}{\omega}. \quad (96)$$

(95) näitab, et x muutub ajaga t perioodiliselt: on t kasvanud säärase T võrra, et

$$\omega(t + T) = \omega t + 2\pi,$$

s. t. et

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad (97)$$

siis x omab endist väärtust, järelikult on M jõudnud endisele kohale. M asukohad korduvad seega ikka uuesti ajavahemiku T möödumisel. Niisiis materiaalne punkt M võngub tasakaaluasendist ühele ja teisele poole; T kutsutakse võnkeperioodiks. Ajaühiku vältel leiab aset just $\frac{1}{T}$ täisvõnget. Seda arvu $\frac{1}{T}$, mis näitab seega „võnkesagedust“, tähistame sümboliga ν . (97) kohaselt

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi}, \quad \text{seega } \omega = 2\pi\nu. \quad (98)$$

Konstant ω on järelikult sagedusest ν parajasti 2π korda suurem. Elektrotehnikas, kus esinevad analoogilised võnkeprobleemid, kuigi mitte materiaalsete punktide, vaid võnkuvate elektrivoolude (vahelduvvoolude) puhul, ω kutsutakse „ringsageduseks“.

Kasutades leitud tulemusi, võib (96) kirjutada mitmel erineval viisil, näiteks:

$$x = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t = \frac{v_0 T}{2\pi} \sin \frac{2\pi t}{T} = A_1 \sin \frac{2\pi t}{T}. \quad (99)$$

Konstant A_1 määrab võnkuva punkti M suurima „elongatsiooni“ tasakaaluasendist, — seda A_1 kutsutakse võnke „amplituudiks“. Kujutades diagrammil elongatsiooni x sõltuvust ajast t , saame siinuskõvera. Võnkeid, millede diagramm näitab siinuskõverat, ükskõik, kas normaalses või aga t -sihis nihutatud asendis, kutsutakse „harmoonilisteks“ (funktsioone siinust ja koosinust kutsutakse ka „harmoonilisteks“ funktsioonideks). Elastsustungist esilekutsutud võnkumine osutub harmooniliseks, niipea kui see elastsustung on täpselt võrdeline elongatsiooni suurusega, nagu meil oligi algusest peale oletatud. Võnkeaeg T ei sõltu siis amplituudist, s. t. T ei sõltu ka algkiirusest v_0 ; säärastel juhtudel öeldakse, et võnkumised on „tautokroonsed“.

Võnkepilt muutub, kui kõrvuti elastsustungiga on mõjumas veel mingi takistus, mis püüab tekkinud võnkeid summutada. Tegelikus olukorras on säärane summutustung eranditult olemas.

Vaatleme lähemalt summutatud võngete pilti erioletusel, et summutustung on võrdeline materiaalse punkti M hetkelise kiirusega v , olles seejuures suunatud kiirusvektorile vastupidiselt. Piirdume seejuures veel ühedimensioonilise võnkumisega sirgel trajektoiril.

Valides endiselt trajektooriks just x -telje ja tasakaaluasendiks koordinaatide alguse O , saame $v = \dot{x}$ ja summutustungina — $2pm\dot{x}$, kusjuures on juba arvestatud selle tungi suund (projektsiooni märk); võrdetegurile on siin antud kuju $2pm$ selleks, et hiljemini saada lihtsustatud avaldisi. Põhivõrrand kõlaks seega, kui jälle ühistegur m kõrvaldada,

$$\ddot{x} = -\omega^2 x - 2p\dot{x}$$

ehk

$$\ddot{x} + 2p\dot{x} + \omega^2 x = 0. \quad (100)$$

See on teise järgu lineaarne homogeenne diferentsiaalvõrrand konstantsete kordajatega $2p$, ω^2 . Piirdume juhuga, kus „summutustegur“ p on väiksem kui „elastsustegur“ ω , s. t. kus

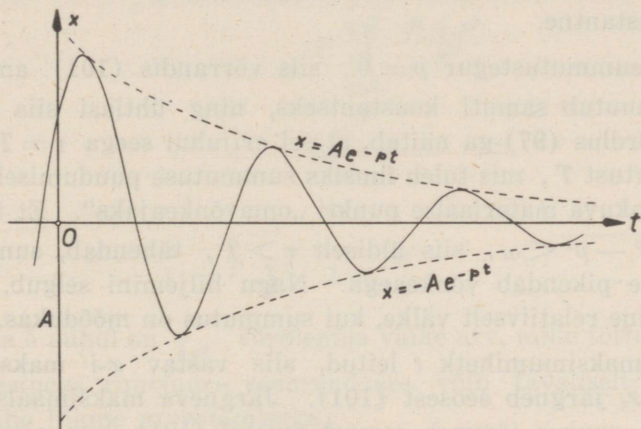
$$\omega^2 - p^2 = A^2 > 0.$$

Säärase diferentsiaalvõrrandi üldlahendi leidmist võimaldavad teatavad võtted, millede selgitamisel me siin ei peatu. Diferentsides võib aga lugeja kergesti veenduda, et võrrandi (100) üldlahendiks on parajasti

$$x = Ae^{-pt} \sin(\Delta t + \alpha), \quad \Delta = \sqrt{\omega^2 - p^2}; \quad (101)$$

A ja α on 2 meelevaldset konstanti.

Kujutades x sõltuvust muutujast t diagrammil (56. joonis),



56. joonis.

saame siinuskõvera asümptootiliselt kahaneva amplituudiga Ae^{-pt} : tekkiv sinusoidaalne võnkumine „kustub“ aja jooksul.

Otsides x ekstreemumi kohti, diferentsime (101) ja võrrutame tulemuse nulliga. See annab:

$$Ae^{-pt} [-p \sin(\Delta t + \alpha) + \Delta \cos(\Delta t + \alpha)] = 0.$$

Et Ae^{-pt} alati erineb nullist, kui ainult A ise pole just null, siis ekstreemumi kohal peab olema avaldis püstsulgudes võrdne nulliga, s. t. ekstreemumid esinevad siis ja ainult siis, kui

$$\tan(\Delta t + \alpha) = \frac{\Delta}{p}.$$

On mingil hetkel t selle nõude kohaselt maksimum saavutatud, siis järgmine maksimum saabub hetkel $t + \tau$, kusjuures

$$\tau = \frac{2\pi}{\Delta}, \quad (102)$$

sest siis kasvab tangensi argument just 2π võrra ning tangens ise jääb endiseks. Kasvab argument vaid π võrra, siis tangens jääb küll samuti endiseks, kuid maksimumi asemele tuleb miinimum (vt. 56. joonis). Ajavahemik τ kahe teineteisele järgneva maksimumi vahel, nagu (102) näitab, ei sõltu t enda väärtusest: τ on konstantne.

On summutustegur $p = 0$, siis võrrandis (101) amplituud Ae^{-pt} muutub samuti konstantseks, ning ühtlasi siis $\Delta = \omega$. (102) võrdlus (97)-ga näitab, et sel erijuhul seega $\tau = T$. Seda τ eriväärtust T , mis tuleb ilmsiks summutuse puudumisel, kutsutakse võnkuva materiaalse punkti „omavõnkeajaks“. Et üldjuhul $\Delta = \sqrt{\omega^2 - p^2} < \omega$, siis üldiselt $\tau > T$, tähendab, summutuse esinemine pikendab võnkeaga. Nagu hiljemini selgub, on see pikenemine relatiivselt väike, kui summutus on mõõdukas.

On maksimumihetk t leitud, siis vastav x -i maksimaalne väärtus x_t järgneb seosest (101). Järgneva maksimaalse väärtuse $x_{t+\tau}$ suurus järgneb samast seosest (101), kus aga nüüd t asemel tuleb võtta $t + \tau$. Et seejuures siinuse väärtus jääb ilmsesti endiseks, siis järeldame:

$$\frac{x_t}{x_{t+\tau}} = \frac{A e^{-pt}}{A e^{-p(t+\tau)}} = e^{p\tau},$$

seega

$$p\tau = \log \frac{x_t}{x_{t+\tau}}. \quad (103)$$

Kahe naabermaksimumi x_t , $x_{t+\tau}$ jagatise loomulikku logaritmi kutsutakse summutuse logaritmiliseks dekrementiks ja tähistatakse tavaliselt sümboliga δ . Niisiis:

$$\delta = p\tau = \frac{2\pi p}{\Delta}. \quad (104)$$

Summutus on seda tugevam, mida suurem on δ . Puudub summutus, siis maksimaalsed elongatsioonid on omavahel võrdsed, seega nende jagatis on 1 ning $\delta = \log 1$ on siis null.

τ väljendub T ja δ kaudu. Tõepoolest, moodustades avaldise

$$T^2 \left(1 + \frac{\delta^2}{4\pi^2} \right),$$

näeme, et see võrdub

$$\begin{aligned} \frac{4\pi^2}{\omega^2} \left(1 + \frac{\delta^2}{4\pi^2} \right) &= \frac{4\pi^2}{\omega^2} \left(1 + \frac{p^2}{\Delta^2} \right) \\ &= \frac{4\pi^2}{\omega^2} \cdot \frac{\Delta^2 + p^2}{\Delta^2} \\ &= \frac{4\pi^2}{\Delta^2} \\ &= \tau^2. \end{aligned}$$

Seega

$$\tau = T \sqrt{1 + \frac{\delta^2}{4\pi^2}}. \quad (105)$$

Mõõduka δ puhul on $\frac{\delta^2}{4\pi^2}$ võrdlemisi väike arv, mille tõttu valemis (105) esineva ruutjuure reaarenduses võib tavaliselt piirduda juba kahe liikme arvestamisega:

$$\tau \approx T \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\delta^2}{4\pi^2} \right). \quad (105a)$$

See näitabki, et tegelik võnkeaeg τ õige vähe erineb omavõnkeajast T .

Peatume veel võnkuva materiaalse punkti energia küsimuse juures.

Et elastsustungi projektsioon x -teljele on $-m\omega^2 x$, siis sellele vastab potentsiaal $\Pi = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$. Summutustungil puudub potentsiaal; kui aga summutust pole olemas, siis peab kehtima energia jäävuse lause:

$$\frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 = \text{konstant},$$

teiste sõnadega,

$$v^2 + \omega^2 x^2 = \text{konstant.}$$

Tasakaaluasendis $x = 0$, $v = v_0$; järelikult

$$v^2 + \omega^2 x^2 = v_0^2.$$

Koguenergia on seega võrdeline v_0^2 -ga, — et aga (96) põhjal v , ise omakorda võrdeline on amplituudiga, siis järgneb, et **koguenergia on võrdeline amplituudi ruuduga.**

Amplituudi kahanemine summutatud võngete puhul on tunnuseks sellele, et energia järk-järgult väheneb, tänu summutustungi poolt kogu aeg tehtavale negatiivsele tööle. Energia tagavara antud hetkel t võib ikkagi lugeda proportsionaalseks hetkelise amplituudi Ae^{-pt} ruuduga. τ võrra erinevatel hetkedel energia tagavarade suhet näitab seega arv $e^{2p\tau}$, tähendab, selle suhte logaritm on 2δ . Kui võnkeid registreeritakse kõrva abil helina, siis subjektiivselt konstateeritud helitugevuste suhe, nagu katsed kinnitavad, ei vasta mitte energia suhtele, vaid just energiatega suhte logaritmile (nn. Weber-Fechner'i seadus), teiste sõnadega, kõrv registreerib otseselt just 2δ .

Tundub kõrvale näiteks, et helihargi poolt antud põhitoon sagedusega $\nu = 435$ hertsi (Hz) nõrgeneb 3 sekundiga poole võrra (ν hertsi tähendab ν võnget sekundis), siis tuleb järeldada, et antud juhul

$$3 \cdot 435 \cdot 2\delta = 2,$$

sest ühelt poolt nõrgenemist ühe võnke vältel mõõdab arv 2δ ja 3 sekundi jooksul on toimunud $3 \cdot 435$ võnget, — teiselt poolt subjektiivse nõrgenemise suurust kogu kolmesekundilises intervallis määrab vahekord $2 : 1$. Seega

$$\delta = 7,7 \cdot 10^{-4}.$$

Et $\tau = \frac{1}{435}$ [sec], siis järelikult

$$p = \frac{\delta}{\tau} = \frac{435}{3 \cdot 435} = 0,333.$$

Edasi on

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\delta^2}{4\pi^2} = \frac{7,7^2 \cdot 10^{-8}}{8\pi^2} = 7,5 \cdot 10^{-9}.$$

Seose (105a) põhjal järgneb siit

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{\tau} (1 + 7,5 \cdot 10^{-9}).$$

See näitab, et omavõnkesagedus $\frac{1}{T}$ erineb tegelikust sagedusest $\frac{1}{\tau}$ vaid $435 \cdot 7,5 \cdot 10^{-9} = 3,3 \cdot 10^{-6}$ võrra; täiesti küllaldase täpsusega võib seega võtta omavõnkesageduse asemel samuti 435 [Hz].

(97) põhjal järgneb siis:

$$\omega^2 = \frac{4\pi^2}{T^2} = 4\pi^2 \cdot 435^2 = 7,47 \cdot 10^6,$$

ning vastav võnkevõrrand kõlaks:

$$\ddot{x} + 0,67\dot{x} + 7,47 \cdot 10^6 x = 0.$$

§ 29. Sundvõnked.

Mehhanismides esinevad sageli juhud, kus materiaalne punkt M , alludes elastsustungile \mathfrak{P} ja summutustungile \mathfrak{R} , peale selle veel allub väljast pärinevale kolmandale, perioodiliselt muutuvale tungile \mathfrak{G} . Perioodiliselt muutuv tung \mathfrak{G} paneb sel korral punkti M sunniviisiliselt võnkuma, sundides punktile ühtlasi peale just tungi \mathfrak{G} võnkeperioodi. Vastavaid M võnkumisi kutsutakse „sundvõngeteks“.

Vaatleme sundvõnkeid lihtsustaval erijuhul, kus trajektoor jällegi on sirgjooneline, asetstes x -teljel, ja tung \mathfrak{G} ise muutub sinusoidaalselt. Trajektoori sirgjoonelisus nõuab, et \mathfrak{G} kandesirgeks oleks sama sirge (x -telg); \mathfrak{G} projekteerub sellele sirgele siis loomulikus suuruses, — olgu see \mathfrak{G} projektsioon $mE \sin \tilde{\omega}t$, kus E ja $\tilde{\omega}$ on konstandid, mida tohib oletada positiivsetena. Et tungidele \mathfrak{P} ja \mathfrak{R} lisandub veel tung \mathfrak{G} , siis põhivõrrand antud juhul kõlab:

$$m\ddot{x} = -m\omega^2 x - 2p m\dot{x} + mE \sin \tilde{\omega}t,$$

ehk

$$\ddot{x} + 2p\dot{x} + \omega^2 x = E \sin \tilde{\omega}t. \quad (106)$$

See on teise järgu lineaarne mittehomogeenne diferentsiaalvõrrand konstantsete kordajatega.

Ilmsesti (101) ei sobi võrrandi (106) lahendusena. Küll aga peab (106) omama erilahendit (s. t. lahendit, kus konstantid pole enam meelevaldsed)

$$x = a \sin (\tilde{\omega} t - \varphi), \quad (107)$$

kus a ja φ sõltuvad p , ω , $\tilde{\omega}$ ja E väärtusest. Selles veendume asetuse kaudu: on (107) diferentsiaalvõrrandi (106) lahendiks, siis peab olema

$$\begin{aligned} -a\tilde{\omega}^2 \sin (\tilde{\omega} t - \varphi) + 2pa\tilde{\omega} \cos (\tilde{\omega} t - \varphi) + a\omega^2 \sin (\tilde{\omega} t - \varphi) = \\ = E \sin \tilde{\omega} t. \end{aligned}$$

Arendades $\sin (\tilde{\omega} t - \varphi)$ ja $\cos (\tilde{\omega} t - \varphi)$ trigonomeetriliste valemite järgi ning korraldades tulemusi $\sin \tilde{\omega} t$ ja $\cos \tilde{\omega} t$ kaupa, järeldame siit:

$$\begin{aligned} (-a\tilde{\omega}^2 \cos \varphi + 2pa\tilde{\omega} \sin \varphi + a\omega^2 \cos \varphi) \sin \tilde{\omega} t + \\ + (+a\tilde{\omega}^2 \sin \varphi + 2pa\tilde{\omega} \cos \varphi - a\omega^2 \sin \varphi) \cos \tilde{\omega} t = E \sin \tilde{\omega} t. \end{aligned}$$

See nõue omakorda on ilmsesti rahuldatud iga t puhul, niipea kui

$$\begin{aligned} -a\tilde{\omega}^2 \cos \varphi + 2pa\tilde{\omega} \sin \varphi + a\omega^2 \cos \varphi = E \\ + a\tilde{\omega}^2 \sin \varphi + 2pa\tilde{\omega} \cos \varphi - a\omega^2 \sin \varphi = 0, \end{aligned}$$

mis annabki 2 võrrandit kahe tundmatu a ja φ määramiseks.

Korrutades esimest avaldisega $\sin \varphi$, teist avaldisega $\cos \varphi$ ning liites, järeldame:

$$2pa\tilde{\omega} = E \sin \varphi.$$

Korrutades aga esimest avaldisega $+\cos \varphi$, teist avaldisega $-\sin \varphi$ ning jällegi liites, järeldame:

$$-a\tilde{\omega}^2 + a\omega^2 = E \cos \varphi.$$

Ruutides mõlemaid tulemusi ning liites veel kord, saame:

$$a^2(\omega^2 - \tilde{\omega}^2)^2 + 4p^2a^2\tilde{\omega}^2 = E^2,$$

s. t.

$$a = \frac{E}{\sqrt{(\omega^2 - \tilde{\omega}^2)^2 + 4p^2\tilde{\omega}^2}}, \quad (108)$$

millega a on leitud. Teiselt poolt, jagades $E \sin \varphi$ ja $E \cos \varphi$, leiame

$$\tan \varphi = \frac{2p\tilde{\omega}}{\omega^2 - \tilde{\omega}^2}, \quad (109)$$

millega ka φ on määratud 0 ja π piirides.

Mõistes nüüd a ja φ all valemitega (108) ja (109) määratud suurusi, vaatleme funktsiooni

$$x = Ae^{-pt} \sin(\Delta t + \alpha) + a \sin(\tilde{\omega}t - \varphi), \quad (110)$$

kus endiselt

$$\Delta = \sqrt{\omega^2 - p^2}$$

ja A ning α on kaks meelevaldset konstanti. See funktsioon annabki diferentsiaalvõrrandi (106) üldlahendi. Tõepoolest, esiteks see funktsioon sisaldab üldlahendile vajaliku meelevaldsete konstantide arvu, teiseks (110) asetamine võrrandi (106) vasakule poole peab andma esimese liidetava osas nulli (§ 28), teise liidetava osas aga, nagu praegu just nägime, $E \sin \tilde{\omega}t$, millega (106) osutubki rahuldatuks.

Üldlahendiga (110) ongi määratud sundvõngete üldpilt. Kui veel silmas pidada, et teguri e^{-pt} esinemise tõttu üldlahendi esimene liidetav t kasvamisel peab kiiresti kahanema, siis järgneb, et küllalt suure t puhul esimese liidetava mõju tegelikult üldse kaob ning jääb üle vaid teine liidetav. Seega küllaldase aja möödumisel sundvõngete pilt ei erine enam nimetamisväärset erilahendist (107): esimene liidetav tähendab vaid kiiresti kustuvat häiret sundvõngete (107) alghetkil. On see häire praktiliselt täiesti kadunud, siis öeldakse, et sundvõnked on „stabiliseerunud“.

(110) näitab, et stabiliseerunud sundvõngete periood ühtib neid pealesundiva tungi \mathfrak{G} võnkeperioodiga. Stabiliseerunud sundvõngete x - t -diagrammiks on siinuskõver konstantse amplituudiga a . (108) näitab, et a on seda suurem, mida väiksem on $(\omega^2 - \tilde{\omega}^2)^2$, s. t. mida vähem tungi \mathfrak{G} ringsagedus $\tilde{\omega}$ erineb punkti M omaringagedusest ω .

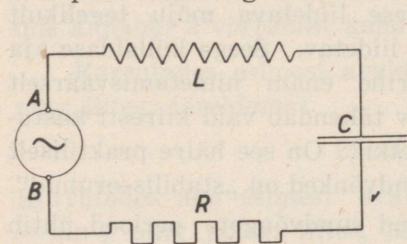
On $\tilde{\omega} = \omega$, tähendab, on mõlemad sagedused omavahel võrdsed, siis räägitakse resonantsist. Amplituud a on siis

$\frac{E}{2p\tilde{\omega}}$, mis väikese summutusteguri p puhul võib osutada vägagi suureks, teoreetiliselt isegi lõpmata suureks, kui $p = 0$. Ehitiste juures, näiteks sildade puhul, võib resonants seetõttu ohustada kogu ehitise stabiilsust. Sildadel on olnud juhtumeid, kus sõdurite taktsammus ülemarssimise tagajärjel on tekkinud resonants ja selle järel silla kokkuvarisemine. Veduri masina käigu ja rööbaste tõugete rütm võib samuti teatava sõidukiiruse puhul anda resonantsi veduri kui mehhanismi omavõnkesagedusega ning sel teel põhjustada rongiõnnetust. Ületab veduri kiirus kriitilise resonantsi koha, siis oht väheneb, kuigi kiirus kasvab.

Konstandi φ tähendust saab selgitada diagrammil, kui kujutada nii tungi \mathcal{E} kui ka elongatsiooni x sõltuvust ajast t : mõlemal juhul esinevad ühe ja sama lainepikkusega siinuskõverad, kuid ajatelge pidi need kõverad näitavad faaside diferentsi φ võrra: elongatsiooni x faas jääb φ võrra tungi \mathcal{E} faasist maha. „Faasinihke“ φ suurust määrab valem (109); see φ on alla 90° , kui $\omega > \tilde{\omega}$, ja üle 90° , kui $\omega < \tilde{\omega}$. Resonantsi juhul on faasinihke suurus just 90° . Puudub summutus, siis on faasinihke kas 0 või 180° , — nimelt 0 , kui $\omega > \tilde{\omega}$, ja 180° , kui $\omega < \tilde{\omega}$.

Resonantsi nähtus mängib tähtsat osa elektrotehnikas. Kuigi seal pole enam tegemist materiaalse punkti võnkumisega (kui

loobuda võnkumise elektroni kujutelmast), jääb matemaatiline alus vahelduvvoolude käsitlemisel täiesti analoogiliseks praegukäsiteldud materiaalse punkti võnkumise teooriaga. Selle põhjuseks on asjaolu, et nii elongatsioon x kui ka voolutugevus on sirgel joonel loka-



57. joonis.

liseeritud vektorid: võnkevõrrand haarab vektori võnkumise seadust.

Olgu (57. joonis) tegemist vooluahelaga, kus esinevad induktatsioon L , mahtuvus C ja oomiline takistus R . Olgu selle ahela kohtade A ja B vahel generaatori abil või kuidagi teisiti tekitatud

vahelduv elektriline pinge — $E_0 \cos \tilde{\omega} t$. Olgu J selle tagajärjel ahelas tekkinud muutlik voolutugevus. Elektriõpetusest tuntud seaduste koosseis kuulub siis A - B -vaheline pinge järgmiselt:

- 1) induktiivse takistuse võitmiseks kuulub pinge osa $L\dot{J}$;
- 2) oomilise takistuse võitmiseks kuulub pinge osa RJ ;
- 3) mahtuvustakistuse võitmiseks kuulub pinge osa $\frac{1}{C} \int J dt$.

Seega:

$$L\dot{J} + RJ + \frac{1}{C} \int J dt = -E_0 \cos \tilde{\omega} t .$$

Diferentsides aja t järgi ning jagades veel L -ga, järeldame:

$$\ddot{J} + \frac{R}{L} \dot{J} + \frac{1}{LC} J = + \frac{E_0 \tilde{\omega}}{L} \sin \tilde{\omega} t . \quad (111)$$

See võrrand erineb varemini käsitletud võnkevõrrandist (106) ainult tähistuste poolest. Tehes vastavaid muudatusi sümbolites, võime järelikult varemini leitud tulemustest otseselt saada käesoleva probleemi lahenduse. Vajalikud muudatused on järgmised:

$$\begin{aligned} x \text{ asemele astub } J ; \\ p \text{ asemele astub } \frac{R}{2L} ; \\ \omega \text{ asemele astub } \frac{1}{\sqrt{LC}} ; \\ E \text{ asemele astub } \frac{E_0 \tilde{\omega}}{L} . \end{aligned}$$

Selle najal selgub valemite (108)—(110) põhjal, et stabiliseerunud voolu puhul

$$J = J_0 \sin (\tilde{\omega} t - \varphi) ,$$

kusjuures

$$\begin{aligned} J_0 &= \frac{E_0 \tilde{\omega}}{L \sqrt{\left(\frac{1}{LC} - \tilde{\omega}^2\right)^2 + \frac{R^2}{L^2} \tilde{\omega}^2}} = \frac{E}{\sqrt{R^2 + L^2 \tilde{\omega}^2 \left(\frac{1}{LC \tilde{\omega}^2} - 1\right)^2}} \\ \tan \varphi &= \frac{R \tilde{\omega}}{L \left(\frac{1}{LC} - \tilde{\omega}^2\right)} = \frac{R}{L \tilde{\omega} \left(\frac{1}{LC \tilde{\omega}^2} - 1\right)} . \end{aligned}$$

Resonants tekib, kui $\tilde{\omega} = \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$; see avaldis kujutab ahela omaringisagedust. Reguleerides kondensaatorit, s. t. muutes C , saab ahelat häälestada resonantsi pealesurutud ringsagedusega $\tilde{\omega}$.

Olgu näiteks vaja ahelat häälestada Türi saatja lainele 731 [kHz] (üks kiloherts, kHz, tähendab 1000 võnget sekundis); olgu seejuures induksioon L saavutatud pooliga, mille pikkus l on 3 [cm], läbimõõt $d = 6$ [cm] ja mis sisaldab $w = 50$ keerdu. Tabelitest (näiteks Jahnke-Emde, Funktionentafeln, II tr., lk. 153) leiame sel puhul, kus $\frac{l}{d} = 0,5$:

$$\frac{4\pi L}{\Pi w^2 d} = 10,373, \text{ kusjuures } \Pi = 1,256 \cdot 10^{-8}.$$

Seega säärase pooli induksioon L on

$$L = \frac{10,373 \cdot 1,256 \cdot 10^{-8} \cdot 50^2 \cdot 6}{4} = 1,56 \cdot 10^{-4} \text{ [henri]}.$$

Soovides saada võnkesagedust $7,31 \cdot 10^5$ [sec⁻¹], peame valima C nõnda, et

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{\omega}{2\pi} = \nu = 7,31 \cdot 10^5,$$

kust

$$C = \frac{1}{4\pi^2 \cdot 1,56 \cdot 10^{-4} \cdot 7,31^2 \cdot 10^{10}} = 3,04 \cdot 10^{-10} \text{ [farad]}.$$

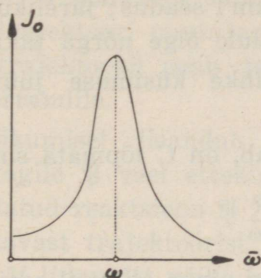
Selle mahtuvuse väljendamiseks tavalistes ühikutes [cm] peame saadud arvu veel korrutama üleminekuteguriga $9 \cdot 10^{11}$, mis annab

$$C = 274 \text{ [cm]}.$$

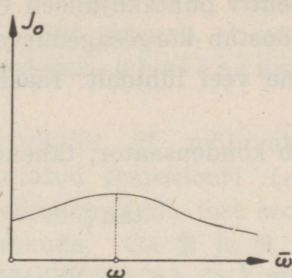
Diagrammi, mis näitab üldjuhul J_0 sõltuvust $\tilde{\omega}$ -st, kutsutakse resonantskõveraks; selle resonantskõvera maksimum tuleb kohas $\tilde{\omega} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Ahel on hästi selektiivne, kui resonantskõvera maksimaalne väärtus $\frac{E_0}{R}$ esineb hästi teraval kujul; selleks ahela oomiline takistus peab olema väike, — vastasel korral ka nullist erinev suurus $L^2 \tilde{\omega}^2 \left(\frac{1}{LC\tilde{\omega}^2} - 1 \right)^2$ ei avalda suurt mõju R^2 -ga võrreldes ning resonantskõver osutuks seetõttu lamedaks

(joonised 58-a ja 58-b). Nagu näha, mängib oomiline takistus analoogilist osa elektrotehnika küsimustes, nagu summutustung puhtmehaaniliste võngete probleemides.

Puudub ahelas kondensaator, siis tuleb seda kujutella nõnda, et kondensaatori plaatide vahe on kahanenud nullini, mille taga-



58-a joonis.



58-b joonis.

järjel C on läinud lõpmata suureks. Ülalantud seosed näitavad, et säärasel korral

$$J_0 = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + L^2\tilde{\omega}^2}}.$$

Siin nimetajas esinevat suurust $\sqrt{R^2 + L^2\tilde{\omega}^2}$ kutsutakse elektrotehnikas ahela „impedantsiks“ ringsageduse $\tilde{\omega}$ puhul. On erijuhul $\tilde{\omega} = 0$, s. t. on rakendatud välispinge konstantne, siis $J = J_0 = \frac{E_0}{R}$ on samuti konstantne, ning vool, nagu näha, allub puhtakujuliselt Ohm'i seadusele.

On $\tilde{\omega}$ väga suur, siis juba mõõduka L puhul J_0 osutub õige väikeseks, s. t. induktiivsus moodustab suure takistuse kõrge-sagedusvoolule.

On kondensaator ikkagi olemas, s. t. on C lõplik ja seejuures $\tilde{\omega} > 0$, siis J_0 on nullist suurem, s. t. kondensaator ei moodusta ületamatut takistust vahelduvvoolule. Teissugune on aga olukord, kui on tegemist alalise pingega $\tilde{\omega} = 0$: silmas pidades nimelt, et

$$L^2\tilde{\omega}^2 \left(\frac{1}{LC\tilde{\omega}^2} - 1 \right)^2 = \frac{1}{C^2\tilde{\omega}^2} - \frac{2L}{C} + L^2\tilde{\omega}^2,$$

selgub, et lõpliku C ja $\tilde{\omega} = 0$ puhul avaldise J_0 nimetaja osutub lõpmata suureks, seega $J_0 = 0$. Kondensaator moodustab järelikult ülepääsematu takistuse alalisvoolule.

Puudub ahelas induktsioon L , on aga kondensaator olemas, siis samad kaalutlused näitavad, et väga suure sageduse puhul on jällegi kehtiv puhtakujuliselt Ohm'i seadus; järelikult kondensaator moodustab kõrgesagedusvoolule õige nõrga takistuse.

Peatume veel lühidalt faasinihke küsimuse juures voolu ahelas.

Puudub kondensaator, tähendab, on C lõpmata suur, siis

$$\tan \varphi = -\frac{R}{L\tilde{\omega}},$$

järelikult siis $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$. Vahelduv pinge oli meil seejuures võetud kujul $-E_0 \cos \tilde{\omega}t = E_0 \sin(\tilde{\omega}t - \frac{\pi}{2})$, vool $J = J_0 \sin(\tilde{\omega}t - \varphi)$. See näitab, et antud olukorras voolu faas jääb pinge faasist maha. On R kaduvalt väike, siis mahajäämine moodustab just 90° .

Puudub induktsioon L , on aga kondensaator olemas, siis

$$\tan \varphi = RC\tilde{\omega},$$

järelikult $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$; voolufaas, nagu näha, jõuab siis pingefaasist ette. On R kaduvalt väike, siis ettejõudmine moodustab parajasti 90° .

Kõik siintoodud kaalutlused käivad stabiliseerunud vahelduvvoolu kohta, mille saavutamiseks tuleb mõni aeg oodata, et ahela omavõngetest tingitud häire kaotaks mõju. Väikese p , s. t. õige suure L puhul võib selleks kuluda isegi mõni minut aega.

§ 30. Matemaatiline pendel.

Mehhanismi kuuluv materiaalne punkt M võib mehhanismis valitsevate seoste tõttu sunnitud olla jääma kindlale etteantud trajektoorile, näiteks sirgele või ringi kaarele. Liigub näiteks

rong rööbastel, siis selle rongiga lahutamatuult seotud materiaalse punkti M trajektoor on rööbastiku kujuga ette kirjutatud. Mehaanikas räägitakse säärastel kordadel „sundliikumisest etteantud trajektoiril“.

Sundliikumisel etteantud trajektoiril jääb lahtiseks vaid kiirusvektori \mathbf{v} skalaarne suurus v , sest selle vektori siht on määratud trajektoori puutujaga. Siit järgneb, et sundliikumine etteantud trajektoiril peab taanduma üheleainsale diferentsiaalvõrrandile.

Sundliikumisel lisandub punktile M mõjuvate tungide resultanttungile \mathfrak{F} veel ettekirjutatud trajektoori (rööbastiku) poolt avaldatud reaktsioon \mathfrak{R} ; viimane tagab just seda, et M ei saaks nõutavast trajektooriga lahkuda. On \mathfrak{F} ja \mathfrak{R} igas kohas teada, siis M liikumist võiks ka käsitada $v a b a n a$, s. t. \mathfrak{F} ja \mathfrak{R} koosmõjul toimuvana, ilma erilise eeskirjata trajektoori kohta.

On M seos trajektooriga teostatud hõõrdumisvabalt, siis reaktsioon \mathfrak{R} peab igal hetkel mõjuma risti trajektooriga: ainult siis nimelt on garanteeritud, et reaktsiooni võitmiseks ei kulu tööd, s. t. ei teki hõõrdumist.

Piirdudes selle kitsendava oletusega, näeme kohe, et ainsaks vajalikuks diferentsiaalvõrrandiks osutub hoolause (76):

$$d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = Xdx + Ydy + Zdz,$$

kus X, Y, Z on \mathfrak{F} projektsioonid, dx, dy, dz on elementaarnihke ds projektsioonid, $Xdx + Ydy + Zdz$ seega kujutab tungide poolt elementaarnihke puhul tehtud tööd, sest reaktsioontungi \mathfrak{R} töö on null.

Trajektoor peab olema antud oma võrrandiga. Valides seda võrrandit parameetrilisel kujul mingi sobiva parameetri λ kaudu

$$x = x(\lambda), \quad y = y(\lambda), \quad z = z(\lambda), \quad (112)$$

saame ka dx, dy, dz väljendada λ ja $d\lambda$ kaudu. Sõltub siis veel \mathfrak{F} vaid kohast, s. t. λ -st, siis ka X, Y, Z on väljendatavad sama λ kaudu ning hoolause annab diferentsiaalvõrrandi, mis

määrab v sõltuvuse parameetrist λ . Sellega olekski v trajektoori igas kohas määratav ja probleem osutuks lahendatuks.

Asi lihtsustub veelgi, kui tungil \mathfrak{F} leidub potentsiaal Π , sest siis

$$\frac{1}{2} mv^2 + \Pi = \text{konstant}$$

energia jäävuse lause põhjal, millega v sõltuvus kohast on otseselt leitud.

Sundliikumise näite pakub nn. matemaatiline pendel ehk lihtpendel. Selle all mõistetakse mehhanismi, kus materiaalne punkt M , olles sunnitud kogu aeg jääma vertikaaltasapinnas asetsevale ringile raadiusega l , allub ainuüksi raskustungile; l kutsutakse pendli „pikkuseks“.

Asetsegu vertikaalring (trajektoor) x - z -tasapinnas, koordinaatide algus O selle ringi tsentris ja olgu seejuures z -telg suunatud vertikaalselt alla poole. Siis

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = mg, \\ \Pi = -mgz.$$

Energia jäävuse lause annab

$$\frac{1}{2} mv^2 = mgz = C.$$

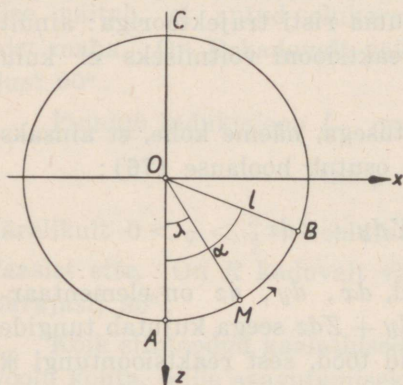
Konstandi C väärtust määrab kiirus v_0 ja potentsiaal $\Pi_0 = -mgl$ trajektoori madalaimas kohas A (59. joonis).

Jagades veel ühisteguriga m , saame seega:

$$\frac{1}{2} v^2 - gz = \frac{1}{2} v_0^2 - gl,$$

kust

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2g(l - z)}. \quad (113)$$



59. joonis.

Olgu parameetriks λ valitud tsentrinurk \widehat{AOM} . Trajektoori võrrandiks on siis

$$x = l \sin \lambda, \quad z = l \cos \lambda.$$

(113) võimaldab määrata λ sõltuvust ajast t . Tõepoolest:

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = (\dot{\lambda} l \cos \lambda)^2 + (-\dot{\lambda} l \sin \lambda)^2 = \dot{\lambda}^2 l^2,$$

tähendab, kui v lugeda positiivseks kasvava λ suunas,

$$v = \dot{\lambda} l.$$

Asetus võrrandisse (113) annab seega

$$\begin{aligned} \dot{\lambda} l &= \sqrt{v_0^2 - 2gl(1 - \cos \lambda)} \\ &= \sqrt{v_0^2 - 4gl \sin^2 \frac{\lambda}{2}} \\ &= 2\sqrt{gl} \sqrt{\frac{v_0^2}{4gl} - \sin^2 \frac{\lambda}{2}}. \end{aligned}$$

Piirdume juhuga, kus M mingisugusel kõrgusel $z = h$ jääb hetkeks seisma; sel hetkel on siis $\dot{\lambda} = 0$. Tähistagu α vastava λ väärtust. Tulemus näitab, et siis

$$\frac{v_0^2}{4gl} = \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Niisiis:

$$\dot{\lambda} l = 2\sqrt{gl} \sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\lambda}{2}},$$

ehk

$$\frac{d\left(\frac{\lambda}{2}\right)}{\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\lambda}{2}}} = \sqrt{\frac{g}{l}} dt.$$

See diferentsiaalvõrrand määrabki seose λ ja t vahel. Muutujad on selles võrrandis juba eraldatud. Vasaku poole integraal ei väljendu aga mitte tavaliste elementaarsete funktsioonide kaudu, vaid kujutab nn. „elliptilist“ integraali. Elliptiliste integraalide numbrilised väärtused on, nagu paljude teistegi funktsioonide väärtused, juba ammu tabuleeritud. Jääb vaid anda siin esine-

vale elliptilisele integraalile säärane väliskuju, et valmisolevaid tabelleid saaks kasutada. See toimub antud juhul ülemineku abil uuele muutujale u seose

$$\sin \frac{\lambda}{2} = u \sin \frac{\alpha}{2}$$

kaudu. Tähistades veel lühenduseks $\sin \frac{\alpha}{2}$ sümboliga k , s. t. kirjutades

$$\sin \frac{\lambda}{2} = ku,$$

leiame:

$$\cos \frac{\lambda}{2} d\left(\frac{\lambda}{2}\right) = kdu, \quad d\left(\frac{\lambda}{2}\right) = \frac{kdu}{\cos \frac{\lambda}{2}} = \frac{kdu}{\sqrt{1-k^2u^2}},$$

$$\frac{d\left(\frac{\lambda}{2}\right)}{\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\lambda}{2}}} = \frac{kdu}{\sqrt{1-k^2u^2}\sqrt{k^2-k^2u^2}} = \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}.$$

Asetades seda ülalleitud diferentsiaalvõrrandisse ning integreerides eeldusel, et hetkel $t = 0$ just $\lambda = 0$, s. t. $u = 0$, saame:

$$\sqrt{\frac{g}{l}} t = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}. \quad (114)$$

Siin paremat kätt esinevat integraali kutsutakse Legendre'i järgi „esimest liiki“ elliptiliseks integraaliks. Tema numbrilisi väärtusi üksikute k ja u väärtuste puhul võib leida näiteks Jahnke-Emde teoses Funktionentafeln (II trükk), lk. 134—139, kusjuures seal kasutatud tavaline tähistusviis on selgitatud kaastekstis lk. 124.

(114) kohaselt t sõltub integraali ülemraja väärtusest u ; ümberpöörduvalt see ülemraja väärtus u sõltub ajast t , kujutades seega teatava funktsiooni t -st, nimelt elliptilise integraali pöördfunktsiooni. Pealiskaudse kujutelma sellest pöördfunktsioonist annab juba erijuht, kus $k = 0$, — siis, nagu lugeja võib ise kergesti veenduda, integraal polegi enam elliptiline, vaid osutub lihtsalt funktsiooniks $\arcsin u$; on aga see võrdne avaldisega $\sqrt{\frac{g}{l}} t$, siis pöördfunktsioon u on $\sin \sqrt{\frac{g}{l}} t$. Üldjuhul, kus k erineb

nullist, vastavat pöördfunktsiooni kutsutakse „elliptiliseks siinuseks“ ja tähistatakse sümboliga sn . Järelikult üldjuhul

$$u = sn \sqrt{\frac{g}{l}} t,$$

millest u tähenduse põhjal järgneb:

$$\sin \frac{\lambda}{2} = k sn \sqrt{\frac{g}{l}} t. \quad (115)$$

Tuleb silmas pidada, et sümboli sn tähendus ise sõltub konstandi k väärtusest; k kutsutakse selle „elliptilise funktsiooni“ mooduliks. $k = 0$ puhul, nagu juba öeldud, elliptiline siinus muutub tavaliseks siinuseks.

Maksimaalne lubatav u väärtus integraalis (114) on $u = 1$, sest selle ületamisel ruutjuure all tekiks negatiivne suurus. Kuid $u = 1$ tähendab, et $\lambda = \alpha$. Vastav t määrab seega aja, mida M vajab madalaimast kohast A kõrgeimasse kohta B jõudmiseks. Sümmeetriast järgneb, et niisama palju aega kulub uueks tagasi jõudmiseks madalaimasse kohta A . Sellele järgneks siis veel niisama pikk võnge A -st teisele poole. Pendli ühe täisvõnke aeg T on siis neljakordne sellest ajast, mis vajalik otse A -st B -sse jõudmisel. Seega (114) kohaselt:

$$T = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}.$$

Siin integraali väärtus sõltub ainuüksi veel k väärtusest. Säärast elliptilist integraali ülemrajaga 1 kutsutakse „täielikuks“ elliptiliseks integraaliks ja tähistatakse tavaliselt sümboliga K ; selle K numbrilisi väärtusi lugeja võib leida tabuleerituina näiteks Jahnke-Emde tabelleis lk. 150. On eriti $k = 0$, siis $K = \text{arc sin } 1 = \frac{\pi}{2} = 1,5708$. Üldjuhul on pendli täisvõnkeaeg

$$T = 4K \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (116)$$

õige väikese k puhul, s. t. õige väikese α puhul, K erineb õige vähe piirväärtusest $\frac{\pi}{2}$. Järelikult väga nõrga võnkeamplituudi puhul

$$T \approx 4 \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (117)$$

See ligikaudne vönkeaja väljendus antakse tavaliselt elementaarsetes füüsikakursustes; tuletamise lähtekohaks on siis enamasti asjaolu, et õige väikese α puhul vastavat trajektoori kaart võib lugeda sirgeks.

On $\alpha = 10^\circ$, siis $k = \sin 5^\circ$; Jahnke-Emde tabel näitab, et sel korral $K = 1,5738$. Järelikult

$$T = 4 \cdot 1,5738 \sqrt{\frac{l}{g}} = 6,2952 \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Ligikaudne valem (117) annaks aga pisut väiksema väärtuse

$$T = 2 \cdot 3,1416 \sqrt{\frac{l}{g}} = 6,2832 \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

K sõltuvus k -st selgub reaks arendamisel:

$$\begin{aligned} \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} &= \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} (1-k^2u^2)^{-0,5} = \\ &= \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \left[1 + \frac{1}{2} k^2 u^2 + \frac{3}{8} k^4 u^4 + \dots \right], \end{aligned}$$

järelikult

$$K = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{k^2 u^2 du}{\sqrt{1-u^2}} + \frac{3}{8} \int_0^1 \frac{k^4 u^4 du}{\sqrt{1-u^2}} + \dots$$

Kõik siin esinevad integraalid väljenduvad elementaarsete funktsioonide kaudu; lugejale olgu soovitatud neid integraale arvutada. Tulemus kõlab:

$$K = \frac{\pi}{2} + \frac{k^2}{4} \frac{\pi}{2} + \frac{9k^4}{64} \frac{\pi}{2} + \dots = \frac{\pi}{2} \left[1 + \frac{1}{4} k^2 + \frac{9}{64} k^4 + \dots \right]$$

Mitte liiga suure α puhul võib piirduda siin kahe esimese liikmega. Kui veel arvesse võtta, et samal eeldusel $k = \sin \frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha}{2}$, siis järgneb:

$$T \approx 4 \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{1}{4} \frac{\alpha^2}{4} \right) \sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{\alpha^2}{16} \right). \quad (118)$$

See valem on märgatavalt täpsem valemist (117), andes näiteks $\alpha = 10^0 = 0,1745$ (absoluutmõõdus!) puhul

$$\alpha^2 = 0,0305, \frac{\alpha^2}{16} = 0,0019, T = 2\pi \cdot 1,0019 \sqrt{\frac{l}{g}} = 6,2951 \sqrt{\frac{l}{g}},$$

mis on heas kokkukõlas varemini tabeli põhjal leitud tulemusega.

§ 31. Täiendavaid märkusi pendli kohta.

Et sobiva konstruktsiooniga pendel võib võnkuda õige kaua, võimaldades seega õige suurt võngete hulga loendamist, siis võib vaatluste najal T määrata õige täpselt. See omakorda võimaldab tuntud T ja l põhjal õige täpselt g määramist valemi (116) põhjal. Neil kaalutlusil pendel kujundab õige täpse aparatuuri Maakeri raskusvälja uurimiseks.

Pendlit, mille poolvõnkeajaks $\frac{T}{2}$ väga väikese amplituudi α juures on 1 sekund, kutsutakse sekundipendliks. Sekundipendli pikkus oleneb raskuskiirendusest g , s. t. kohast maapinnal. Lõpmata väikese α puhul eksaktne valem (117)

$$\frac{T}{2} = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

annab sekundipendli pikkusena, kus $\frac{T}{2} = 1$:

$$l = \frac{g}{\pi^2}.$$

Võttes näiteks $g = 981$ [cm sec⁻²], saame

$$l = \frac{981}{\pi^2} = 99,40$$
 [cm].

Ümmarguselt on seega sekundipendli pikkus 1 meeter.

Tegelik (füüsiline) pendel koosneb mitte ühestainsast, vaid paljudest materiaaletest punktidest, mis koos moodustavad horisontaaltelje ümber raskustungi mõjul võnkuvat kindla keha. Säärase füüsilise pendli võnkeaja T määramine taandub teatava matemaatilise pendli võnkeaja määramisele; seda küsimust selgitame üksikasjaliselt hiljemini (§ 38).

Matemaatilise pendli elongatsioon λ muutub küll perioodiliselt ajaga t , kuid mitte täpselt sinusoidaalselt, vaid keerulisema seaduse järgi, nagu (115) näitab. Pendli võnked ei ole seega enam „harmoonilised“, vaid kuuluvad „pseudoharmooniliste“ võngete liiki.

Matemaatilise pendli võnkeaeg T sõltub amplituudist α , pikenedes amplituudi kasvamisega. K reaks arendamisest nähtub, et $\alpha \rightarrow \pi$ puhul, tähendab, $k \rightarrow \sin \frac{\pi}{2} = 1$ puhul, K kasvab piiramalt: vastav rida osutub nimelt hajuvaks, niipea kui $k = 1$. Valemist (116) järgneb seega, et ka T läheb piiramata suureks, niipea kui $\alpha \rightarrow \pi$. Olgu juhitud tähelepanu paradoksaalsena tunduvale asjaolule: andes madalaimas kohas A (59. joonis) pendlile säärase kiiruse tagavara v_0 , et ta sellega parajasti saaks jõuda trajektoori kõrgeima kohani C , peaksime ootama lõpmata kaua, enne kui M sinna kohta C tõepoolest jõuaks. Paradoks kaob, kui arvesse võtta, et M lähenemine kohale C saab toimuda, nagu valemid näitavad, vaid asümptootiliselt, kusjuures ka kiirus vähe- neb asümptootiliselt nullini.

Peatume veel reaktsioontungi \mathfrak{R} küsimuse juures matemaatilise pendli puhul.

On punkti M seos tsentriga O realiseeritud niidi abil, siis sellisest seosest tingitud reaktsioon saab olla vaid ühepoolne, takistades nimelt M eemaldumist tsentrist O , mitte aga M lähenemist sellele tsentrile. Teatavas olukorras on seega mõeldav M mahahüppamine ettenähtud ringikujuliselt trajektooriga, tsentrile lähenemise suunas. Määrame selle mahahüppamise koha.

MO on trajektoori peanormaal; reaktsioon \mathfrak{R} on tundmatu. Loomulikude liikumisvõrrandite [§ 26, valem (26)] kohaselt peab reaktsiooni \mathfrak{R} ja raskustungi \mathfrak{P} summa $\mathfrak{R} + \mathfrak{P}$ projektsioon peanormaalile alati andma $\frac{mv^2}{l}$, sest l on antud juhul trajektoori kõverusraadius. Olles risti trajektooriga, projekteerub \mathfrak{R} peanormaalile loomulikus suuruses R , kusjuures $R > 0$, kui reaktsioon on suunatud tsentri O poole, vastasel korral aga $R < 0$.

Raskustungi \mathfrak{R} projektsiooniks peanormaali suunale MO on $-mg \cos \lambda$ (60. joonis). Niisiis

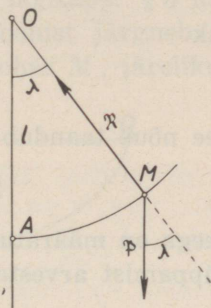
$$R - mg \cos \lambda = \frac{mv^2}{l}.$$

Kuid

$$v^2 = v_0^2 - 2g(l - z),$$

järelikult

$$\begin{aligned} R &= mg \cos \lambda + \frac{m}{l} [v_0^2 - 2g(l - z)] \\ &= mg \frac{z}{l} + \frac{m}{l} v_0^2 - 2gm + 2mg \frac{z}{l} \\ &= \frac{m}{l} (3gz + v_0^2 - 2gl). \end{aligned}$$



60. joonis.

(113) näitab aga, et $v_0^2 - 2gl = -2gh$,

kui h tähendab seda z väärtust, kus M kaotab kogu oma kiiruse v . Järelikult

$$R = \frac{mg}{l} (3z - 2h). \quad (119)$$

Igal juhul on aga $z \geq h$. Seni kui h on positiivne, s. t. seni kui $\alpha < \frac{\pi}{2}$, jääb (119) kohaselt R alati positiivseks ning mahahüppamist trajektoorilt ei saa üldse tulla. Teissugune on olukord, kui h osutub negatiivseks, tähendab, kui $\alpha > \frac{\pi}{2}$: siis juba R muutub nulliks kohal, kus

$$3z - 2h = 0, \quad z = \frac{2}{3}h, \quad (120)$$

ning muutub negatiivseks, niipea kui z veelgi väheneb; trajektoorigilt mahahüppamine toimub siis nõudega (120) määratud kohas. Pärast mahahüppamist M liigub paraboolsel trajektoorigil seni kui niit seda lubab (61. joonis). Parabooli lagitäpp asetseb kõrgusel $z = h$.

Siiski on mõeldav, et mahahüppamist üldse ei tule, kuigi $h < 0$, — nimelt siis, kui $\frac{2}{3}h < -l$. Siis M jookseb trajektoorigil ühes suunas ringi ja võnkumisest kui niisugusest ei saa üldse rääkida.

Et mahahüppamine aset leiaks, peaks järelikut olema

$$-\frac{3}{2}l < h < 0$$

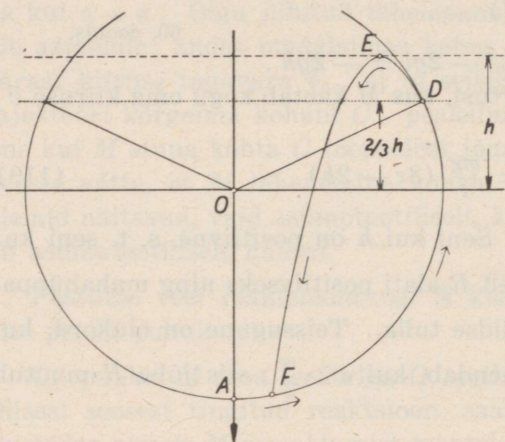
ehk

$$-\frac{3}{2}l < l - \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g} < 0.$$

See nõue taandub kujule:

$$2lg < v_0^2 < 5lg. \quad (121)$$

Seega on määratud, missuguste algkiiruste puhul on vaja mahahüppamist arvestada.



61. joonis.

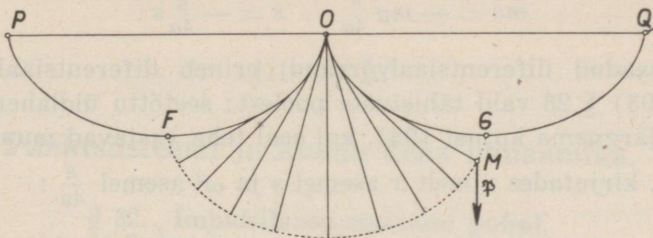
Kui M seos tsentriga O on teostatud mitte niidi, vaid kindla varda abil, või ka näiteks sel teel, et M on sunnitud liikuma ringiks keeratud kindlas torus, siis reaktsioon on kahepoolne ja mahahüppamist trajektoorigilt siis muidugi üldse ei saa olla.

Pendli võnkeaja T sõltuvust amplituudist a saab kõrvaldada, võttes

trajektoorigiks mitte ringi, vaid tsükloidi. Nagu juba Huygens näitas, võib säärast „tsükloidaalset pendlit“ konstrueerida õige lihtsalt, toetudes tõsiasi jale, et tsükloidi evoluudiviks on samaugune tsükloid teises asendis. Olgu $PFOGQ$ (62. joonis) evoluudivi osa mängiv tsükloid ja niidi OM pikkus seejuures võrdne evoluudivi poolkaarega OG . Siis niidi otsupunkti M trajektoorigiks on just too tsükloid FMG , mille evoluudiviks on $PFOGQ$. Evoluuti tuleb kujutella kindlast materjalist valmistatud šabloonina, mis reguleerib niidi OM kuju; niidi OM pikkus l on $4a$, kus a tähendab tsükloidi moodustamiseks kasutatud veereva ringi raadiust.

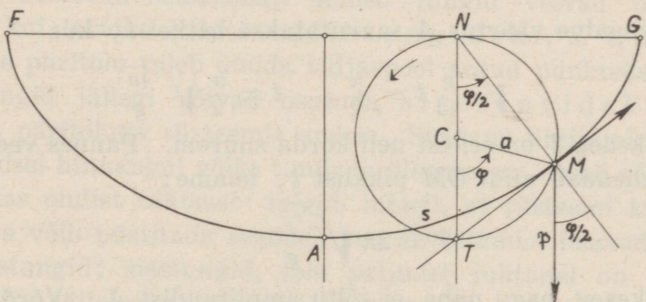
Tsükloidaalse pendli „tautokroonus“, s. t. võnkeaja sõltumatus amplituudist selgub järgnevalt kaalutlusil (63. joonis):

Olgu A punkti M tsükloidaalse trajektoori lagitapp. § 3 näites 3 selgitatud tsükloidi puutuja konstruktsioonist järgneb, et joonisel näitab just TM trajektoori puutujat kohas M , järelikult



62. joonis.

on MN trajektoori normaaliks. Tsükloidi kaare FAM pikkus on $4a(1 - \cos \frac{\pi + \varphi}{2})$, nagu järgneb sama § 3 näitest, kui arvesse võtta, et seal t tähendas just nurga suurust, mille võrra veerev



63. joonis.

ratas algasendist F alates on jõudnud pöörduda, — 63. joonise tähistuses see nurk on parajasti $\pi + \varphi$. Kaare FA pikkus on $4a$; järelikult kaare AM pikkus on $4a \cos \frac{\pi + \varphi}{2}$, tähendab, $4a \sin \frac{\varphi}{2}$. Et aga, nagu joonisest näha, TM pikkuseks on $2a \sin \frac{\varphi}{2}$, siis järeldub, et kaare AM pikkus s on pikkuse TM kahekordne. Liiku-

mise loomulikud põhivõrrandid ütlevad, et tungide projektsioonide summa puutujale on $m\dot{v}$ ehk $m\ddot{s}$. Trajektoori reaktsioon \mathfrak{R} puutujale seejuures projektsiooni ei anna, nii et jääb vaid raskustungi \mathfrak{B} projektsioon $-mg \sin \frac{\varphi}{2}$ ehk $-mg \frac{s}{4a}$. Seega:

$$m\ddot{s} = -mg \frac{s}{4a}, \quad \ddot{s} = -\frac{g}{4a} s.$$

Praegusaadud diferentsiaalvõrrand erineb diferentsiaalvõrranditest (93) § 28 vaid tähistuste poolest; seetõttu üldlahend peab samuti järgnema kujust (94), kui seal teha vastavad muudatused tähistes, kirjutades nimelt x asemel s ja ω^2 asemel $\frac{g}{4a}$:

$$s = A \sin \sqrt{\frac{g}{4a}} t + B \cos \sqrt{\frac{g}{4a}} t.$$

Seda on ka kerge otseselt kontrollida diferentsimise teel. Kui veel valida ajalugemise algus $t=0$ nõnda, et siis ka $s=0$, siis konstant B peab osutama nulliks, ja seega

$$s = A \sin \sqrt{\frac{g}{4a}} t.$$

s maksimaalne väärtus A saavutatakse hetkel t , kus

$$\sqrt{\frac{g}{4a}} t = \frac{\pi}{2}, \quad t = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{4a}{g}}.$$

Täisvõnkeaeg T on sellest neli korda suurem. Pannes veel tähele, et $4a$ tähendab niidi OM pikkust l , leiame:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (122)$$

See võnkeaeg, nagu näha, ei sõltu amplituudist A . Võrdlus valemiga (117) näitab, et matemaatilise pendli puhul vaid ligikaudu kehtiv seos muutub eksaktseks, niipea kui on tegemist tsükloidaalse pendliga.

III O S A.

Punktsüsteemi ja kindla keha dünaamika.

§ 32. Impulsilause süsteemi puhul.

Kui on tegemist mitte enam üksiku isoleeritud materiaalse punktiga, vaid terve punktsüsteemiga M_1, M_2, \dots vastavalt massidega m_1, m_2, \dots , siis ikkagi igaüks neist punktidest peab alluma punkti dünaamika põhivõrrandeile. Uue asjaoluna tuleb aga nüüd juurde tungide liigitamine nende päritolu järgi: kõnealuse süsteemi seisukohalt mõned tungid võivad osutada süsteemi kui terviku suhtes välistungideks, s. t. sääras- teks, mille päritolu tuleb otsida väljaspool antud punktsüsteemi; teised tungid jällegi võivad osutada sisetungideks, s. t. tungideks päritoluga süsteemis endas. Säärane liigitamine, mis pealiskaudsel hinnangul võiks tunduda ülealusena, omab süsteemi dünaamikas olulist tähtsust: selgub nimelt, et süsteemi kui ter- viku kohta võib püstitada seadusi, kus arvestamist leiavad ainu- üksi välistungid; sisetungid, mis paljudel juhtudel on täiesti tundmatud (näiteks sel korral, kui süsteem moodustab kindla keha), võivad seega jääda kõrvale.

Süsteemi mõne üksiku punkti juures rakendatud välistungid liituvad seal üheks resultanttungiks, mida tähistame sümboliga $\mathfrak{P}^{(e)}$ (mõeldud on sõnale *exterior* — väline). Samuti liituvad üheks resultanttungiks süsteemi sama punkti juures rakendatud sisetungid; seda resultanttungi tähistame $\mathfrak{P}^{(i)}$ (*interior* — sees- mine). $\mathfrak{P}^{(e)}$ projektsioonid olgu $X^{(e)}, Y^{(e)}, Z^{(e)}$, analoogiliselt $\mathfrak{P}^{(i)}$ projektsioonid olgu $X^{(i)}, Y^{(i)}, Z^{(i)}$. Vastav materiaalne

punkt liigub $\mathfrak{P}^{(e)}$ ja $\mathfrak{P}^{(i)}$ koosmõjul, järelkult määravad selle punkti liikumist (60) kohaselt põhivõrrandid

$$m\ddot{x} = X^{(e)} + X^{(i)}, \quad m\ddot{y} = Y^{(e)} + Y^{(i)}, \quad m\ddot{z} = Z^{(e)} + Z^{(i)}. \quad (123)$$

Kirjutades säärased võrrandid (123) süsteemi iga punkti kohta eraldi ning liites nad siis vastavalt, järeldame:

$$\Sigma m\ddot{x} = \Sigma X^{(e)} + \Sigma X^{(i)}, \quad \Sigma m\ddot{y} = \Sigma Y^{(e)} + \Sigma Y^{(i)}, \quad \Sigma m\ddot{z} = \Sigma Z^{(e)} + \Sigma Z^{(i)},$$

kus summeerimise indeksid 1, 2, ..., mis peaksid endastmõistetavalt esinema kõikide m , x , y , z , X , Y , Z juures, on lihtsuse mõttes jäänud märkimata. Nüüd võtame aga veel arvesse, et reaktsiooni seaduse põhjal igale teatavas punktis konstateeritud sisetungile peab vastama sama süsteemi mõnes teises punktis niisama suur, kuid vastassuunaline sisetung. Seetõttu kõik $X^{(i)}$ peavad tingimata jagunema võrdseteks, kuid vastasmärkidega paarideks, mille tagajärjel peab tingimata olema kõikide $X^{(i)}$ summa võrdne nulliga. Samal kaalutlusel peavad kaduma ka $Y^{(i)}$ summa ja $Z^{(i)}$ summa:

$$\Sigma X^{(i)} = 0, \quad \Sigma Y^{(i)} = 0, \quad \Sigma Z^{(i)} = 0. \quad (124)$$

Järelikult süsteemi puhul peab alati olema

$$\Sigma m\ddot{x} = \Sigma X^{(e)}, \quad \Sigma m\ddot{y} = \Sigma Y^{(e)}, \quad \Sigma m\ddot{z} = \Sigma Z^{(e)}, \quad (125)$$

kus paremat kätt esinevad ainult välistungid. Viimased ei tarvitse hävida, sest välitungi esilekutsuv materiaalne punkt ise ei kuulu enam süsteemi punktide hulka, seega tema juures esinev reaktsioonitõug ei tule summeerimisel arvesse.

Võrrandeist (125) saab teha tähtsa järelduse süsteemi massikeskme liikumise kohta. Teatavasti massikeskme koordinaadid ξ , η , ζ on määratud valemitega

$$\xi = \frac{\Sigma mx}{\Sigma m}, \quad \eta = \frac{\Sigma my}{\Sigma m}, \quad \zeta = \frac{\Sigma mz}{\Sigma m},$$

milledest kahekordsel diferentsimisel t järgi järeldub, silmas pidades masside m konstantsust:

$$\ddot{\xi} = \frac{\Sigma m\ddot{x}}{\Sigma m}, \quad \ddot{\eta} = \frac{\Sigma m\ddot{y}}{\Sigma m}, \quad \ddot{\zeta} = \frac{\Sigma m\ddot{z}}{\Sigma m}. \quad (126)$$

Siin Σm tähendab süsteemi kogumassi, mida tähistame lühendatult sümboliga μ . Toetudes (126)-le, võime (125) kirjutada kujul:

$$\mu \ddot{\xi} = \Sigma X^{(e)}, \quad \mu \ddot{\eta} = \Sigma Y^{(e)}, \quad \mu \ddot{z} = \Sigma Z^{(e)}. \quad (127)$$

Võrreldes seda punkti dünaamika põhivõrranditega (60), saame järgmise tulemuse:

Süsteemi massikese liigub nõnda, nagu oleks sinna koondatud süsteemi kogumass ja ühtlasi seal rakendatud kõik üldse süsteemi üksikkohtades esinevad välistungid.

Seda lauset kutsutakse süsteemi dünaamikas „massikeskme lauseks“. Ta näitab, et kuigi kujutelm üksikust materiaalsest punktist moodustab looduses mitterealiseeritud fiktsiooni, ometi punkti dünaamika omab reaalselt tähendust, olles rakendatav süsteemi massikeskme liikumise uurimisele.

On eriti $\Sigma X^{(e)} = 0$, $\Sigma Y^{(e)} = 0$, $\Sigma Z^{(e)} = 0$, s. t. kaob välistungidest koosneva tungikompleksi üldine resultant, siis massikese (126) põhjal peab liikuma nagu materiaalne punkt, millele tungid üldse ei mõju, tähendab, massikese liigub siis sirgel joonel ühtlase kiirusega. Välistungide kompleksi üldise resultandi kadumine võib esineda näiteks kas sel kujul, et välistunge üldse ei ole, või näiteks sel kujul, et välistungide kompleks taandub tungipaarile.

Päikesesüsteemi võib lugeda süsteemiks, kus välistungid üldse puuduvad, sest kinnistähed, mis vahest võiksid tulla arvesse välistungide tekitajaina, asetsevad päikesesüsteemist väga suures kauguses. See näitab, et päikesesüsteemi massikese peab liikuma maailmaruumis ühtlase kiirusega sirges joones.

On välistungideks konstantse suurusega paralleeltungid, siis massikese liigub parabolil; lõhkeb näiteks lendav mürisk kildudeks, siis kildude massikese jätkab teekonda parabooli mööda, kui õhutakistus ei tule arvesse.

Elav organism saab omavoliliste liigutuste kaudu mõjustada enda massikeskme liikumist ainult siis, kui organismil on kontakt välisesemetega, mille najal saaksid tekkida välistungid; lihaste

kontraktsiooniga saavutatud tungid organismi üksikosade vahel tähendavad vaid sisetunge, mis massikeskme liikumist ei saa mõjustada. Olukord muutub, kui see organism asetseb takistavas keskkonnas, näiteks õhus või vees: sisetungidega tekitatud kehaosade relatiivse asendi muutus võib siis mõjustada keskkonna takistuse suurust ja suunda ja sel teel mõjustada ka massikeskme trajektoori.

Ideaalselt siledale horisontaaltasapinnale toetuv inimene ei saaks alustada edasiliikumist rõhtsihis, sest välistungidena ainuüksi arvesse tulevad raskus ja pinna vertikaalsed normaalreaktsioonid ei oma horisontaalprojektsioone ega saa seega mõjustada massikeskme liikumist horisontaalses sihis; küll aga on võimalik säärasel siledal pinnal püsti tõusta pärast kukkumist. Kui kõndimine karedal pinnal on võimalik, siis just tänu sellele, et kare pind on suuteline arendama kaldreaktsioone, mis annavad massikeskme juures tungi komponente rõhtsihis.

$m\dot{x}$ kujutab üksiku materiaalse punkti impulsi $m\mathbf{v}$ projektsiooni x -suunale. Süsteemi kõikide üksikpunktide impulssvektorite kompleks annab üldise resultandina vektori, mille projektsioonideks on vastavalt $\Sigma m\dot{x}$, $\Sigma m\dot{y}$, $\Sigma m\dot{z}$; seda vektorit kutsutakse süsteemi impulsiks. Arvesse võttes, et $\Sigma m\ddot{x} = \frac{d}{dt} \Sigma m\dot{x}$ jne., võime võrranditele (124) anda kuju

$$\frac{d}{dt} \Sigma m\dot{x} = \Sigma X^{(e)}, \quad \frac{d}{dt} \Sigma m\dot{y} = \Sigma Y^{(e)}, \quad \frac{d}{dt} \Sigma m\dot{z} = \Sigma Z^{(e)}, \quad (128)$$

millest nähtub, et **süsteemi impulsi tuletis võrdub välistungide kompleksi üldise resultandiga**. Seda teoreemi kutsutakse süsteemi impulsilauseks. Kirjutades (128) kujul

$$\frac{d}{dt} \mu \dot{\xi} = \Sigma X^{(e)}, \quad \frac{d}{dt} \mu \dot{\eta} = \Sigma Y^{(e)}, \quad \frac{d}{dt} \mu \dot{\zeta} = \Sigma Z^{(e)},$$

kus ξ , η , ζ on jällegi massikeskme koordinaadid ja μ on süsteemi kogumass, näeme, et süsteemi impulss pole midagi muud, kui süsteemi massikeskme impulss, eeldusel, et see massikese kannab süsteemi kogumassi. Impulsilause (128) tegelikult kõneleb massikeskme impulsist; sisuliselt ta ühtib massikeskme lausega.

Puuduvad välistungid üldse, siis süsteemi impulss (128) põhjal peab jääma konstantseks. On näiteks vabalt horisontaal-pinnale paigutatud kahurist tehtud lask horisontaalses sihis, siis süsteemi kahur + mürsk impulss, mis enne lasku oli null, sest kiirusi ei olnud, peab ka pärast lasku osutama nulliks; et aga mürsk on omandanud kiiruse, seega impulsi, siis kahur ise peab omama impulssi vastupidises suunas, s. t. kiirust vastu-pidises suunas mürsu impulsi kompenseerimiseks. See seletabki kahuri nn. taandumist laskmisel.

Kahuri taandumiskiirust v saab ligikaudu määrata järgmisil kaalutlusil: olgu M taanduva kahuri mass, m — mürsu mass, V — mürsu kiirus. Siis süsteemi impulsilause põhjal

$$Mv + mV = 0,$$

kusjuures skalaarsed kiirused v ja V on muidugi mõeldud märki-dega varustatuina; järelikult

$$v = - \frac{m}{M} V.$$

Siin $\frac{m}{M}$ on võrdlemisi väike, mille tõttu ka v on V -ga võrreldes väike. Täpsemal arvestusel tuleks silmas pidada veel püssirohu põlemisel tekkivate gaaside kiirust ja massi.

Moodsates kahurites taandub vaid kahuriraud, kuna lafett jääb paigale. Taandumist pidurdatakse viskoosse vedeliku abil (õli, glütseriin) kompressoris; samasse kompressorisse veel paigutatud terasvedrud aitavad taandumise pidurdamisele kaasa ja ühtlasi seavad kahuriraua pärast taandumist endisse asendisse automaatselt tagasi. Säärases olukorras M tähendab vaid kahuri-raua massi.

§ 33. Impulssmomendi lause ja pindala lause süsteemi puhul.

Kui piirduda oletusega, et tung ja reaktsioontung alati lan-gevad ühisele kandesirgele (vt. § 19), siis ka süsteemi sisetun-gide momendid mistahes kohas O peavad osutama paarikaupa

võrdseiks ja vastassuunalisiks ning seetõttu kogusummas süsteemis hävima.

Moodustades võrrandite (123) põhjal tuntud viisil momentide võrrandid

$$m(x\ddot{y} - y\ddot{x}) = (xY^{(e)} - yX^{(e)}) + (xY^{(i)} - yX^{(i)})$$

. ,

järeldame seega, summeerides viimaseid üle terve punktsüsteemi:

$$\Sigma m(x\ddot{y} - y\ddot{x}) = \Sigma (xY^{(e)} - yX^{(e)})$$

. ,

sest $\Sigma (xY^{(i)} - yX^{(i)}) = 0$ jne. Tähele pannes veel, et

$$x\ddot{y} - y\ddot{x} = \frac{d}{dt} (xy - yx)$$

. ,

jõuame tulemuseni:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Sigma m(yz - zy) &= \Sigma (yZ^{(e)} - zY^{(e)}) \\ \frac{d}{dt} \Sigma m(zx - xz) &= \Sigma (zX^{(e)} - xZ^{(e)}) \\ \frac{d}{dt} \Sigma m(xy - yx) &= \Sigma (xY^{(e)} - yX^{(e)}) . \end{aligned} \quad (129)$$

Siin $m(xy - yx)$ jne. tähendavad süsteemi üksiku materiaalse punkti impulssmomenti projektsioone. $\Sigma m(xy - yx)$, ... on järelikult impulsvektoritest koosneva kompleksi resulteeruva momendi projektsioonid. Seda resulteeruvat momenti kutsutakse süsteemi impulssmomentiks. Valemite kohaselt on seejuures kõik momendid võetud koordinaatide alguses O , — seejuures tuleb aga silmas pida, et alguse O valik on meelevaldne. (129) väljendab impulssmomentide lause süsteemi puhul:

Süsteemi impulssmomentide tuletis meelevaldses kohas O ühtib süsteemi juures esinevatest kõikidest välisjõududest koosneva kompleksi resulteeruva momendiga samas kohas.

Kaob erijuhul välisjõudude resulteeruv moment mõnes kohas, kas või näiteks selle tagajärjel, et välisjõude üldse pole olemas,

siis süsteemi impulssmoment selles kohas (129) alusel peab olema konstantne. Kaob välistungide resulteeruv moment ainult mõne telje suhtes, siis samadest valemitest (129) järgneb, et süsteemi impulssmomenti komponent seda telge pidi püsib konstantsena. Säärasel korral saab jällegi püstitada pindala lause, nagu üksikpunktigi puhul. On nimelt näiteks välistungide resulteeruv moment z -telje suhtes null ja seetõttu

$$\Sigma m(xy - yx) = C,$$

teiste sõnadega,

$$\Sigma m(xdy - ydx) = Cdt,$$

siis võtame arvesse, et $x dy - y dx$ näitab kahekordset elementaar-pindala $2dS$, mille alguspunktist O väljuv vastava materiaalse punkti raadiusvektor ajavahemikus dt katab (§ 22). Seega siis

$$\Sigma mdS = \frac{C}{2} dt,$$

ehk

$$\Sigma mS = \frac{C}{2} t + B.$$

Kui alustada kõikide pindalade S lugemist hetkel $t = 0$ nõnda, et sel alghetkel ka iga S loeb nulliks, siis konstant B peab olema samuti null. Kirjutades veel $\frac{C}{2}$ asemele A , leiame järelkult

$$\Sigma mS = At. \quad (130)$$

Siin on pindalad S arvestatud märkidega, vastavalt raadiusvektorite pöörlemissuundadele ümber z -telje. Summeerimisel üksikud pindalad S tuleb arvestada „kaalutult“, kusjuures seda „kaalu“ määrab vastava punkti mass m . (130) väljendab pindala lauset süsteemi puhul:

Kaob välistungide resulteeruv moment mõne telje suhtes, siis selle teljega risti asetsevas tasapinnas raadiusvektorite poolt kaetud kaalutud pindalade summa muutub proportsionaalselt ajaga.

Puuduvad välistungid üldse, siis nende resulteeruv moment on null igas kohas ja iga telje suhtes. Sel korral peab pindala-

lause järelikult kehtima igas tasapinnas ja iga selles tasapinnas meelevaldselt valitud raadiusvektorite ühise algpunkti O suhtes. Säärane olukord valitseb näiteks päikesesüsteemis, kus kinnistähedest tingitud välistungid saavad olla vaid kaduvalt väikesed.

Konstanti A valemis (130) kutsutakse pindala konstandiks. Puuduvad välistungid üldse, siis sõltub A veel tasapinna valikust. Teatavas tasapinnas see A omab maksimaalset väärtust, — vastavat tasapinda kutsutakse „pindalade maksimumi tasapinnaks“. Päikesesüsteemis näiteks võib seda pindalade maksimumi tasapinda määrata astronoomiliste vaatluste najal ja sel teel määrata maailmaruumis sobivat tasapinda planeetide käigu kirjeldamiseks.

Pindala lauset võib eksperimentaalselt demonstreerida pöördtoolil, s. t. peaaegu hõõrdumiseta vertikaaltelje ümber pöörleval alusel. Istub inimene säärasel pöördtoolil esialgu rahulikult, mille tõttu siis A peab osutama nulliks, pärast aga hakkab tegema kehaosadega pöördeliigutusi, siis tekivad vastu tahtmist automaatselt teiste kehaosade kompenseerivad pöördeliigutused vastupidises suunas, nii et A ja ühes sellega ΣmS jäävad ikkagi nulliks. Välistungidena tulevad siin arvesse vaid raskustungid, mis aga, olles paralleelsed vertikaalse pöördeteljega, selle telje suhtes momenti ei saa anda, nii et pindala lause rõhttasapinnas peab kehtima. Ekslik oleks arvata, et pöördtoolil üldse pole võimalik kehaasendit tervikuna pöörata: andes raske eseme paremast käest seljataga vasakusse kätte ja siis jälle vasakust käest paremasse, kuid nüüd eestpoolt, paneme selle eseme nagu roteeruma tunniosuti suunas; kompensatsiooniks suurema massiga kogukeha aeglaselt roteerub vastassuunas. Toimingu katkestamisel keha jääb peatuma, kuid nüüd juba uues asendis algasendiga võrreldes.

Tähelepanuväärse järelduse impulssmomendi lausest üldkujul saame sel korral, kui süsteem koosneb lõpmata paljudest materiaalistest punktidest, mis omavahel on liitunud kogusummas kindlaks kehaks. Olgu see keha kinnitatud mõne telje, näiteks z -telje külge, nõnda, et tema ainus liikumisvabadus seisab veel roteerumises selle telje ümber. Olgu keha mingisugustes punkti-

des rakendatud teatavad välistungid; lisaks neile tuleb arvestada välistungide hulka veel kinnistatud telje poolt kehale arendatud reaktsioone. Välistungide resulleeruva momendi määramisel mainitud telje suhtes telje reaktsioonid aga tähtsust ei oma, sest, olles igatahes rakendatud telje kohtadel, need reaktsioonid momente telje suhtes ei anna ja seega ei muuda ülejäänud tungide resulleeruvat momenti. Sel põhjusel võime praegusel korral piirduda otseselt rakendatud välistungidega $(X^{(e)}, Y^{(e)}, Z^{(e)})$, jättes reaktsioonid kõrvale. Et nüüd keha saab vaid roteeruda, siis üksikpunktide kiirusi määrab ühine nurkkiirus ω . Üksiku punkti kiirusvektor \mathbf{v} omab suurust ωr , kui r tähendab selle punkti kaugust teljest; ühtlasi on r kiirusvektori \mathbf{v} momendi arvutamisel esineva öla pikkus; võttes veel arvesse, et \mathbf{v} on risti teljega, järeldame kohe, et impulsi $m\mathbf{v}$ momendi suurus telje suhtes on $m\omega r \cdot r = m\omega r^2$. Kogukeha impulssmoment on üksikpunktide impulssmomentide summa, seega $\Sigma m\omega r^2$ ehk $\omega \Sigma m r^2$, sest ω on kõikidel punktidel sama. Siin esinev summa $\Sigma m r^2$ (täpsemini integraal, sest üksikpunktide massid on lõpmata väikesed ja seejuures on punkte lõpmata palju, — vt. § 35) sõltub ainult telje asendist keha suhtes, keha kujust ja masside jaotusest temas, mitte aga ajast t ; seda summat kutsutakse keha inertsmomendiks vastava telje suhtes ja tähistatakse tavaliselt lühendatult sümboliga J . On kinnistatud telg valitud just z -teljeks, siis kolmandast valemist (129) järgneb

$$\frac{d}{dt} (\omega \Sigma m r^2) = \Sigma (xY^{(e)} - yX^{(e)})$$

ehk, teiste sõnadega,

$$J\dot{\omega} = \Sigma (xY^{(e)} - yX^{(e)}) . \quad (131)$$

Siin $\dot{\omega}$ tähendab nurkkiiruse tuletist, seega $n u r k k i i r e n d u s t$. Välistungide resulleeruv moment telje suhtes on seega võrdeline nurkkiirusega, mida keha omab roteerumisel mainitud telje ümber; võrdeteguriks on seejuures keha inertsmoment mainitud telje suhtes.

Kaob välistungide moment telje suhtes, siis (131) kohaselt peab olema $\dot{\omega} = 0$, tähendab, nurkkiirus ω peab jääma konstant-

seks: keha rotatsioon peab siis olema ühtlane. See tõsiasi pakub teatava analoogia inertsiseadusele: vaba keha liikumine on ühtlane, seni kui puuduvad välistungid; teljega seotud keha rotatsioon on ühtlane, seni kui puudub välistungide moment selle telje suhtes.

Inertsmomendi mõiste mängib tähtsat osa kindla keha mehaanikas. Näiteks nurkkiirusega ω roteeruva kindla keha hoog väljendub kujul $\frac{1}{2}J\omega^2$. Tõepoolest, üksikpunkti hoog on $\frac{1}{2}mv^2$ ehk $\frac{1}{2}m\omega^2r^2$, kui r on vastava punkti kaugus rotatsiooniteljest. Kogu keha hoog on seega

$$\sum \frac{1}{2}m\omega^2r^2 = \frac{1}{2}\omega^2\sum mr^2 = \frac{1}{2}J\omega^2.$$

Paistab silma, et rotatsioonidesse puutuvas küsimusis inertsmoment J mängib seega analoogilist osa, nagu muidu keha mass; keha kiiruse v asemel esineb rotatsiooni küsimustes nurkkiirus ω .

§ 34. Massikeskmed.

Nagu ülalpool selgus, omab punktsüsteemi dünaamikas tähtsust süsteemi massikeskme asukoht. On süsteemi moodustavate materiaalseste punktide hulk lõplik, siis massikeskme koordinaatide arvutamine on võrdlemisi lihtne. Komplikatsioonid kerkivad aga kindlate kehade puhul, kus üksikpunktide arv on lõpmata suur, — selle küsimuse juures tuleb siin veidi peatuda.

Lahutame mõttes keha lõpmata väikesteks ruumielementideks dV koordinaattasapindadega paralleelsete lõpmata lähedaste tasapindade abil; säärase ruumielemendi ruumala dV on siis $dx dy dz$. Tähendab siis veel ρ keha aine tihedust vastava ruumielemendi kohas, siis selles ruumielemendis peituv lõpmata väike mass dm on ρdV ehk $\rho dx dy dz$. On keha homogeenne, siis on ρ konstantne, — üldjuhul võib aga ρ osutada koha (x, y, z) funktsiooniks.

Lõpliku punktide hulga massikeskme koordinaadid ξ, η, ζ on teatavasti määratud valemitega

$$\xi = \frac{\sum mx}{\sum m}, \dots$$

On punkte (ruumielemente) lõpmata palju, selle eest aga mass igas üksikus säärases punktis lõpmata väike ja nimelt dm , siis Σmx asemel tuleks kirjutada $\Sigma x dm$ ja summa peaks haarama lõpmata suure liidetavate hulga. Säärast summat võib teatavasti käsitleda lõpliku liidetavate hulga summeerimise piirtulemusena ja sellekohaselt tähistada määratud integraali sümboli abil. Pidades integraali puhul rajade olemasolu endastmõistetavaks ning jättes neid seetõttu kirjutamata, peaksime seega $\Sigma x dm$ asemel kirjutama $\int x dm$. Tegelikult esineb siin üldjuhul kolmekordne integraal, sest $dm = \rho dx dy dz$, järelikult

$$\int x dm = \int x \rho dV = \iiint x \rho dx dy dz.$$

Samad kaalutlused näitavad, et nimetajas esineva Σm asemel tuleks lõpmata paljude punktide puhul kirjutada

$$\int dm = \int \rho dV = \iiint \rho dx dy dz.$$

Niisiis kindla keha puhul massikeskme koordinaatide arvutamise eeskirjad kõlavad:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{\int \rho x dV}{\int \rho dV} = \frac{\iiint \rho x dx dy dz}{\iiint \rho dx dy dz} \\ \eta &= \frac{\int \rho y dV}{\int \rho dV} = \frac{\iiint \rho y dx dy dz}{\iiint \rho dx dy dz} \\ \zeta &= \frac{\int \rho z dV}{\int \rho dV} = \frac{\iiint \rho z dx dy dz}{\iiint \rho dx dy dz} \end{aligned} \quad (132)$$

Tähtsal erijuhul, kus keha on homogeenne, tihedust ρ kui konstanti võib integraalide märkide ette tuua ja siis murde ρ -ga taandada. Säärasel korral seega

$$\xi = \frac{\iiint x dx dy dz}{\iiint dx dy dz}, \dots,$$

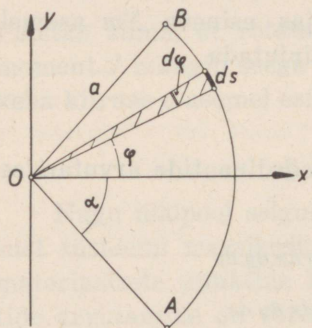
mida võib ka lühendatult kirjutada

$$\xi = \frac{\int x dV}{V}, \quad \eta = \frac{\int y dV}{V}, \quad \zeta = \frac{\int z dV}{V}, \quad (133)$$

sest $\iiint dx dy dz$ pole midagi muud, kui keha koguruumala V .

Üldjuhul tuleb neis valemeis arvutada kolmikintegraale, niipea kui on tegemist tšepoolest kolmedimensioonilise kehaga. Osaval ruumielementide dV valikul, mis ei tarvitse olla tingimata risttahukakujulised $dx dy dz$, saab aga sageli vajalikku arvutus-tööd teostada üheainsa eksplitsiitse integrimise kaudu.

Ühedimensiooniliste (joonetaoliste) kehade puhul on juba loomuse poolest tegemist ainult üheainsa integrimisega; kahe-dimensiooniliste (pinnataoliste) kehade puhul igatahes piisab kahest integri-misest. Selgitust rakendatavate eri-võtete kohta annavad alljärgnevad näited.



64. joonis.

1. näide: Ringi kaare massikesse. Olgu kaar paigutatud x -telje suhtes sümmeetrilisse asendisse ja ringi tsentriks võetud koordinaatide algus O (64. joonis); ringi raadius olgu a .

Kaare „ruumalaelemendiks“ dV on antud ühedimensioonilisel juhul lihtsalt kaare pikkuselement ds , mida omakorda võib väljendada kujul $ad\varphi$. Integrimist võib seega teostada muutuja φ järgi, mille rajadeks on $-a$ ja $+a$, kui kaare avaused on $2a$. Leiame:

$$\xi = \frac{\int_{-a}^{+a} a \cos \varphi \cdot a d\varphi}{2aa} = \frac{a^2}{2aa} \int_{-a}^{+a} \cos \varphi d\varphi = \frac{a \sin a}{a}$$

$$\eta = \frac{\int_{-a}^{+a} a \sin \varphi \cdot a d\varphi}{2aa} = \frac{a^2}{2aa} \int_{-a}^{+a} \sin \varphi d\varphi = 0,$$

sest antud juhul

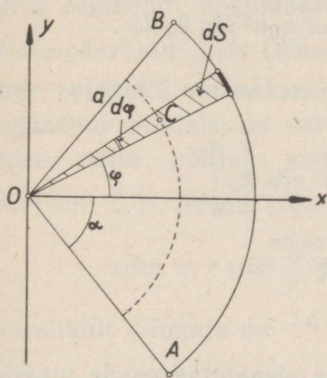
$$x = a \cos \varphi, \quad y = a \sin \varphi, \quad V = 2a\alpha \quad (\text{kaare kogupikkus}).$$

Et siin η peab olema null, järgneb juba sümmeetriale rajatud kaalutlusist. Toetumine sümmeetriale vabastab ka paljudel teistel juhtudel integrimise vajadusest.

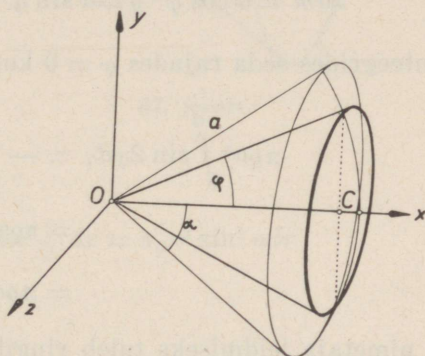
On tegemist poolringiga, s. t. kui $a = \frac{\pi}{2}$, siis

$$\xi = \frac{2a}{\pi} \approx \frac{2}{3} a.$$

2. näide: Ringi sektori massikese. Sümmeetriast (65. joonis) järgneb, et $\eta = 0$. Arvutada jääb vaid ξ . Jaotame täis-



65. joonis.



66. joonis.

sektori ABO lõpmata väikesteks osasektoriteks dS ; iga säärane osasektor dS moodustab lõpmata väikese kolmnurga, mille massi võib lugeda koondatuks selle dS massikeskmesse C , mis teatavasti asetseb kaugusel $\frac{2}{3}a$ tipust O . Osade massikeskmed C moodustavad koos ringi kaare, mille raadiuseks on $\frac{2}{3}a$; selle ringi kaare massikese ongi sektori massikese. 1. näite tulemuse põhjal on seega

$$\xi = \frac{2a \sin \alpha}{3\alpha}.$$

Osutub sektor poolringiks, siis $\xi = \frac{4a}{3\pi} \approx \frac{4}{9}a$.

3. näide: Sfääripinna segmendi massikese. Et siin jutt on vaid pinnatükist, siis küsimus on jällegi kahedimensiooniline. Määrata jääb vaid ξ , sest sümmeetria põhjal (66. joonis) $\eta = 0$, $\zeta = 0$.

Ühistipuga O koonuste abil lõikame segmendi pinna ringitaolisteks elementideks. Iga säärase ringitaolise osa massikese langeb ringi keskkoha C , kus $x = a \cos \varphi$, kui 2φ on vastava koonuse avanurk. Kohta C võib massikeskme arvutamiseks koondada vastava ringitaolise tüki massi, mis on $\rho 2\pi a \sin \varphi \cdot a d\varphi$ ($a \sin \varphi$ on selle tüki raadius ja $a d\varphi$ on ringi „laius“). C puhul on seega

$$x dm = a \cos \varphi \cdot \rho 2\pi a \sin \varphi \cdot a d\varphi = \pi \rho a^3 \sin 2\varphi d\varphi.$$

Integrides seda rajades $\varphi = 0$ kuni $\varphi = \alpha$, saame ξ lugeja:

$$\begin{aligned} \pi \rho a^3 \int_0^{\alpha} \sin 2\varphi d\varphi &= -\frac{1}{2} \pi \rho a^3 \cos 2\varphi \Big|_0^{\alpha} \\ &= \pi \rho a^3 \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \\ &= \pi \rho a^3 \sin^2 \alpha. \end{aligned}$$

ξ nimetaja leidmiseks tuleb ringitaoliste elementaarosade massid summeerida, mis annab

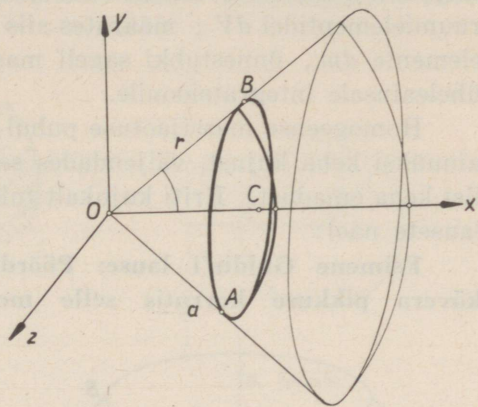
$$2\pi a^2 \rho \int_0^{\alpha} \sin \varphi d\varphi = 2\pi a^2 \rho (1 - \cos \alpha) = 4\pi a^2 \rho \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Jagades leiame ξ :

$$\xi = \frac{\pi \rho a^3 \sin^2 \alpha}{4\pi a^2 \rho \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = a \cos^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Muutub segment poolsfääriks, siis $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \cos^2 \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$, järelikult $\xi = \frac{a}{2}$: poolsfääri pinna massikese asetseb tsentrist poole raadiuse kaugusel.

4. näide: Kera sektori massikese. Jällegi on $\eta = 0$, $\zeta = 0$ (67. joonis). Valime ruumielementideks dV segmendi-taolisi kihte AB abisfääridel, millede raadius r muutub nullist a -ni; säärase segmendi paksus olgu dr . Eelmise näite põhjal säärase segmendi massikese C asetseb kohas, kus $x = r \cos^2 \frac{\alpha}{2}$. Sinna kohta C võib koondada vastava segmendi kogumassi $dm = \rho 4\pi r^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} dr$ (tihedus \times pind \times paksus; segmendi pindala on eelmise näite põhjal just $4\pi r^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$). Seega kohas C



67. joonis.

$$x dm = r \cos^2 \frac{\alpha}{2} \rho 4\pi r^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} dr = \pi \rho r^3 \sin^2 \alpha dr.$$

Järelikult ξ lugeja on

$$\int_0^a \pi r^3 \rho \sin^2 \alpha dr = \pi \rho \sin^2 \alpha \frac{a^4}{4}.$$

Sektori kogumassina leiame

$$\int_0^a \rho 4\pi r^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} dr = 4\pi \rho \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{a^3}{3}.$$

Jagamisel järeneb:

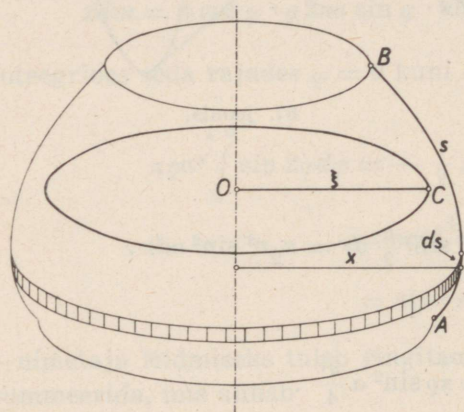
$$\xi = \frac{\pi \rho \sin^2 \alpha a^4 \cdot 3}{4 \cdot 4\pi \rho \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cdot a^3} = \frac{3}{4} a \cos^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Massiivse poolkera massikese näiteks asetseb seega $\frac{3}{8} a$ kaugusel kera tsentrist.

Kasutades näidetes 1—4 saadud tulemusi ning toetudes ühtlasi sümmeetriast tingitud kaalutlusile, saab paljudel juhtudel hõlpsasti määrata massikeskmete asukohti sobivalt valitud kujuga ruumielementidel dV ; määrates siis veel sinna koondatud massielemente dm , õnnestubki sageli massikeskme otsimist taandada üheleainsale integratsioonile.

Homogeense massijaotuse puhul massikeskme asukoht sõltub ainuüksi keha kujust, väljendades seega teatavat puhtgeomeetrist keha omadust. Eriti kujukalt tuleb see nähtavale nn. Guldin'i lausete näol:

Esimene Guldin'i lause: Pöördkeha pindala on meridiaankõvera pikkuse korrutis selle meridiaankõvera massikeskme poolt kujundatud ringjoone pikkusega.



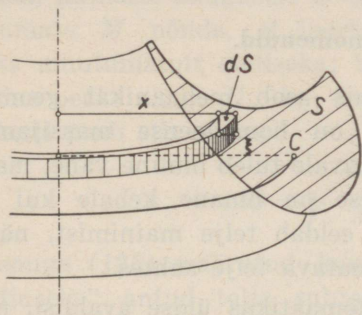
68. joonis.

Tõepoolest (68. joonis) meridiaankõvera kaareelement ds katab roteerumisel pindala $2\pi x ds$, seega pöördkeha kogupindala on $2\pi \int x ds$. Kuid joone puhul on $\int x ds = \xi s$, kus ξ on joone massikeskme x -väärtus ja s on joone kogupikkus. Järelikult pindala on $2\pi \xi s$, nagu teoreem väidabki.

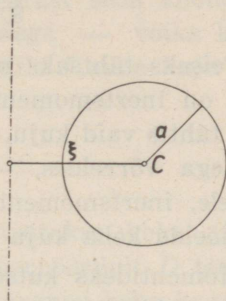
Teine Guldin'i lause: Pöördkeha ruumala on ühepoolse põiklõike pindala korrutis selle põiklõike massikeskme poolt kujundatud ringjoone pikkusega.

Tõepoolest (69. joonis), põiklõike pinnaelement dS annab roteerudes ruumala elemendina dV suuruse $2\pi x dS$ (peene traadi ruumala on traadi pikkuse korrutis põiklõikega!). Pöördkeha koguruumala on seega $2\pi \int x dS$. Et aga pinna puhul $\int x dS = \xi S$, kus ξ on massikeskme x -väärtus ja S on kogupindala, siis järelikult pöördkeha koguruumala on $2\pi \xi S$, nagu teoreem väidabki.

Guldin'i lausete põhjal saab hõlpsasti määrata pöördkehade pind- ja ruumalad, kui nõutavad massikeskmed on tuntud. Nii näiteks tooruse (ringi roteerumisest ümber ekstsentriliselt aset-



69. joonis.



70. joonis.

seva telje tekitatud pöördkeha, vt. 70. joonis) pindala peab olema $2\pi\xi \cdot 2\pi a = 4\pi^2 a\xi$; sama tooruse ruumala on

$$2\pi\xi \cdot \pi a^2 = 2\pi^2 a^2 \xi.$$

On ümberpöördult ette teada pöördkeha pind- või ruumala, siis samade Guldin'i lausete põhjal saab määrata teatavad massikeskmed. Roteerub näiteks poolellips pooltelgedega a ja b (71. joonis), siis tekib pöördellipsoid ruumalaga $\frac{4}{3} \pi a^2 b$. Et ühtlasi poolellipsi pindalaks on $\frac{1}{2} \pi ab$, siis teise Guldin'i lause põhjal

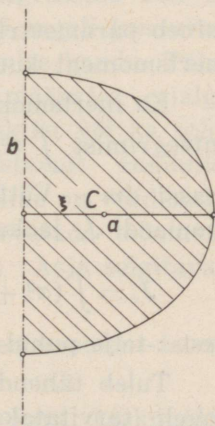
$$\frac{4}{3} \pi a^2 b = 2\pi\xi \frac{1}{2} \pi ab,$$

kust järgneb

$$\xi = \frac{4a}{3\pi},$$

sõltumatult b väärtusest, kui ainult $b \neq 0$.

Ka sel erijuhul, kui ellips on muutunud ringiks, peab see resultaat olema õige, — seda nägime aga juba varemini (2. näide).



71. joonis.

Rakendades esimest Guldin'i lauset roteeruva poolringil, leiame jällegi juba varemini teisiti saadud resultaadi 180°-se ringikaare massikeskme kohta.

§ 35. Inertsmomendid.

Teiseks tähtsaks mõisteks, mis seob mehaanikat geomeetriaga, on inertsmoment: ka siin on homogeenise massijaotuse puhul tähtis vaid kuju, kuigi nähtavale tuleb oluline vahe, massikeskmelega võrreldes, — massikese on omane kehale kui niisugusele, inertsmoment seevastu eeldab telje mainimist, näidates niiõelda keha kuju omadust teatava telje suhtes.

Momentideks kutsutakse matemaatikas üldse avaldise, mille tüüp on $\Sigma \lambda^k p(\lambda)$, kus λ on teatav parameeter ja $p(\lambda)$ on sellest parameetrist sõltuv mingi suurus. Konstandiga k on määratud momendi järk: on $k = 1$, siis räägitakse „esimese järgu“ ehk „lineaarsest“ momendist, on $k = 2$, siis on tegemist „teise järgu“ ehk „ruudulise“ momendiga jne. Inertsmomendi puhul, mille definitsiooniks on

$$J = \Sigma mr^2,$$

esineb parameetri λ osas r (kaugus teljest); et siin $k = 2$, siis inertsmoment kuulub ruuduliste momentide hulka.

Ka inertsmomendi puhul summeerimise all tuleb mõista õieti integrimist $\int r^2 \rho dV$, kus ρdV tähendab ruumielemendi dV massi dm . Võttes $dV = dx dy dz$ saame seega näiteks inertsmomendi J_z jaoks, mis on mõeldud z -telje suhtes:

$$J_z = \int (x^2 + y^2) \rho dV = \int \int \int (x^2 + y^2) \rho dx dy dz, \quad (134)$$

sest z -telje puhul on $r^2 = x^2 + y^2$.

Tuleb tähendada, et siiski valemite tuletamisel mehaanikas sageli tarvitatakse inertsmomendi puhul (samuti ka massikeskme puhul) integraali märgi asemel summa märki. See tavaliselt ei tee halba, kui ainult silmas pidada, et tegelikult summeerimise asemel on mõeldud integrimist, s. t. summa piirväärtust.

Kui keha koosneks vaid ühestainsast punktist, mille mass on M ja mis asetseb kaugusel D teljest, siis inertsmomentiks oleks lihtsalt MD^2 . On aga tegemist tõelise kehaga, siis võiks ikkagi küsida, millisele kaugusele D teljest tuleks koondada selle keha kogumass M nõnda, et inertsmoment pärast seda koondamist jääks muutumatult endiseks; teiste sõnadega — võiks küsida, milline peaks olema D , kui inertsmomentile J anda kuju MD^2 . Ilmselt peab siis olema

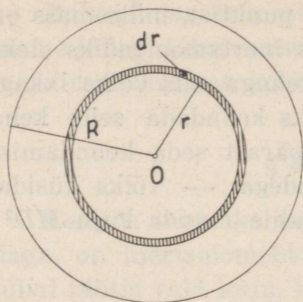
$$D = \sqrt{\frac{J}{M}}. \quad (135)$$

Valemiga (135) määratud kaugust D kutsutakse keha „inertsraadiuseks“ antud telje suhtes. On ümberpöörduvalt D teada ja ühtlasi teada geomeetrisest kaalutlusist järgnev keha kogumass, siis on kohe arvutatav ka inertsmoment. Homogeensel juhul, kus tihedus ρ on konstantne, ei sõltu inertsraadius D enam tihedusest, sest ρ langeb siis jagatise $\frac{J}{M}$ lugejast ja nimetajast välja. Seega D iseloomustab keha asendit telje suhtes puhtgeomeetriselt, sõltumatult ainest, millest keha on tegelikult valmistatud.

Inertsmomentide arvutamine kordsete integraalide abil on muidugi raskepärane toiming, mida saab jällegi sageli tunduvalt lihtsustada ruumielementidele sobiva kuju andmise kaudu. Tähtsust omab aga veel üks teine kunstlik võte: määrates esialgu kaugusi mitte teljest, vaid sobivalt valitud punktist või ka sobivalt valitud tasapinnast ja moodustades vastavalt ruudulisi momente, võime saada avaldise, millede arvutamine on võrdlemisi lihtne; neist avaldistest saab pärast juba arvutada nõutavat inertsmomenti telje suhtes puhtalgebralisel teel. Asja selgitavad järgmised näited.

1. näide: Massiivse homogeense kera inertsmoment tsentrist läbimineva telje suhtes.

Otsime kõigepealt ruudulise momendi J_0 kera keskpunkti suhtes (72. joonis). Selleks jaotame kera sfäärilisteks kontsentrilisteks kihtideks raadiustega r ja paksusega dr , kusjuures r muutub nullist kera raadiuseni R . Üksiku säärase kihi puhul



72. joonis.

r^2 on konstantne; kihi mass on $\rho 4\pi r^2 dr$ (tihedus \times pindala \times paksus). Seega üksikihile J_0 avaldises vastab liidetav $r^2 dm = r^2 \rho 4\pi r^2 dr = \rho 4\pi r^4 dr$ ja seetõttu

$$J_0 = \int_0^R \rho 4\pi r^4 dr = \frac{4}{5} \pi \rho R^5.$$

Et aga

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

ning seepärast

$$J_0 = \Sigma m(x^2 + y^2 + z^2) = \Sigma m x^2 + \Sigma m y^2 + \Sigma m z^2,$$

ja pealegi kera täieliku sümmeetria tõttu avaldised $\Sigma m x^2$, $\Sigma m y^2$, $\Sigma m z^2$ ei saa olla omavahel erinevad, siis

$$\Sigma m x^2 = \frac{1}{3} J_0.$$

Sellest omakorda järgneb, et kera inertsmoment J tsentraalse telje suhtes, milleks jällegi kera sümmeetria tõttu on lubatav valida näiteks z -telge, peab olema

$$J = \Sigma m(x^2 + y^2) = 2\Sigma m x^2 = \frac{2}{3} J_0 = \frac{8}{15} \pi \rho R^5.$$

Silmas pidades, et $\frac{4}{3} \pi \rho R^3$ on kera kogumass M , võime tulemuse kirjutada kujul

$$J = M \cdot \frac{2}{5} R^2,$$

kust nähtub, et inertsraadius D antud juhul peab olema

$$D = R \sqrt{0,4} \approx 0,63R.$$

2. näide: Massiivse homogeense ellipsoidi inertsmoment peatelje suhtes.

Ellipsoidi pinna võrrandiks olgu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Arvutame kõigepealt ruudulise momendi, võttes arvesse vaid kausi x tasapinnast y - z ; seda ruudulist momenti tähistame sümbooliga J_{yz} . Lõikame ellipsoidi elliptilisteks kihtideks paralleelselt y - z -tasapinnaga; kihi kaugus sellest tasapinnast on x , kihi pak-sus dx ; kihi kontuurjoone võrrand konstantse x -i puhul on

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{a^2 - x^2}{a^2}$$

ehk

$$y^2 \frac{a^2}{b^2(a^2 - x^2)} + z^2 \frac{a^2}{c^2(a^2 - x^2)} = 1.$$

Sellest nähtub, et kihi elliptilise kontuuri pooltelgedeks on

$$\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \quad \text{ja} \quad \frac{c}{a} \sqrt{a^2 - x^2},$$

ning kihi pindala on seega

$$\pi \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \frac{c}{a} \sqrt{a^2 - x^2} = \pi \frac{bc}{a^2} (a^2 - x^2).$$

Järelikult kihile langev massiosa dm (erikaal \times pindala \times pak-sus) on

$$dm = \rho \pi \frac{bc}{a^2} (a^2 - x^2) dx.$$

Et kihi kõikides kohtades kaugus y - z -tasapinnast on sama x , siis

$$\begin{aligned} J_{yz} &= \Sigma x^2 dm = \int_{-a}^{+a} x^2 \pi \rho \frac{bc}{a^2} (a^2 - x^2) dx \\ &= \pi \rho \frac{bc}{a^2} \left(a^2 \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_{-a}^{+a} \\ &= \frac{4}{15} \pi \rho bca^3. \end{aligned}$$

Ruuduline moment J_{zx} vastavalt kaugustele y tasapinnast z - x järgneb siit lihtsa tähistuste muutmise teel:

$$J_{zx} = \Sigma y^2 dm = \frac{4}{15} \pi \rho cab^3.$$

Ellipsoidi inertsmoment J_z z -telje suhtes on aga ruuduliste momentide J_{yz} ja J_{zx} summa:

$$\begin{aligned} J_z &= \Sigma(x^2 + y^2)dm = \Sigma x^2 dm + \Sigma y^2 dm = J_{yz} + J_{zx} = \\ &= \frac{4}{15} \pi \rho abc (a^2 + b^2) \\ &= \frac{4}{3} \pi \rho abc \frac{a^2 + b^2}{5} \\ &= M \frac{a^2 + b^2}{5}, \end{aligned}$$

kus M tähendab massiivse ellipsoidi massi. See tulemus näitab, et ellipsoidi inertsraadius D z -telje suhtes on

$$D = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{5}}.$$

Inertsraadiused teiste peatelgedes suhtes järgnevad siit tähtede ümberpaigutamise teel. Erijuhul $a = b = R$ saame $D = R\sqrt{0,4}$, nagu keragi puhul. See näitab, et pöördellipsoidi inertsraadius pöördetelje suhtes ei sõltu selle pöördetelje pikkusest.

3. näide: Ringi pindala inertsmoment telje suhtes, mis läbib tsentri ja on risti ringi tasapinnaga.

Siin saame nõutava inertsmomenti otseselt, jagades antud ringi pinna kontsentrilisteks ringribadeks raadiusega r ja laiusega dr . Üksiku ringriba mass dm on $\rho 2\pi r dr$, kus ρ on „pindtihedus“. On R antud ringi raadius, siis

$$J = \int_0^R r^2 \rho 2\pi r dr = 2\pi \rho \frac{R^4}{4} = \pi \rho R^2 \frac{R^2}{2} = M \frac{R^2}{2},$$

kust

$$D = \frac{R}{\sqrt{2}}.$$

4. näide: Sirglõigu inertsmoment telje suhtes, mis, olles risti sirglõiguga, läbib viimase keskkoha.

Sirglõik langegu x -teljele; teljeks, mille suhtes inertsmoment J on otsitud, olgu z -telg; sirglõigu pikkus olgu L . Sirglõigu element on siis dx ja sellele langeb massiosa $dm = \rho dx$, kus ρ on „joontihedus“. Järelikult

$$J = \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} x^2 \rho dx = 2\rho \frac{L^3}{3 \cdot 8} = \rho L \frac{L^2}{12},$$

kust

$$D = \frac{L}{2\sqrt{3}}.$$

5. näide: Ellipsi pinna inertsmoment peatelje suhtes. Ellipsi võrrandiks olgu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

otsitud olgu inertsmoment J_y y -telje suhtes. Jaotame ellipsi ribadeks paralleelselt x -teljega. On y riba kaugus x -teljest ja dy riba laius, siis ribale langeb massiosa $dm = \rho 2x dy$, kus riba pikkust $2x$ saab määrata ellipsi võrrandi põhjal:

$$2x = 2 \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2}.$$

Üksikriba kui sirglõigu inertsraadius eelmise näite põhjal on $\frac{x}{\sqrt{3}}$, seega üksikriba inertsmoment y -telje suhtes on

$$2 \rho x dy \cdot \frac{x^2}{3} = \frac{2}{3} \rho x^3 dy.$$

Summeerides neid ribade inertsmomente, saamegi koguellipsi inertsmomendi y -telje suhtes:

$$J_y = \int_{-b}^{+b} \frac{2}{3} \rho x^3 dy = \frac{2}{3} \rho \frac{a^3}{b^3} \int_{-b}^{+b} (b^2 - y^2)^{3/2} dy.$$

Vajalik integrimine teostub kõige hõlpsamini, kui üle minna uuele integrimismuutujale φ asetuse $y = b \sin \varphi$ kaudu, mis annab

$$dy = b \cos \varphi d\varphi, \quad b^2 - y^2 = b^2 \cos^2 \varphi,$$

kusjuures integrimisrajadeks selle uue muutuja puhul on nüüd $-\frac{\pi}{2}$ ja $+\frac{\pi}{2}$. Seega

$$\begin{aligned} J_y &= \frac{2}{3} \rho \frac{a^3}{b^3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} b^4 \cos^4 \varphi d\varphi \\ &= \frac{2}{3} \rho a^3 b \cdot \frac{1}{8} [3\varphi + 2 \sin 2\varphi + \frac{1}{4} \sin 4\varphi] \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{12} \rho a^3 b 3\pi \\ &= \pi a b \rho \frac{a^2}{4}. \end{aligned}$$

Sellest nähtub, et antud juhul

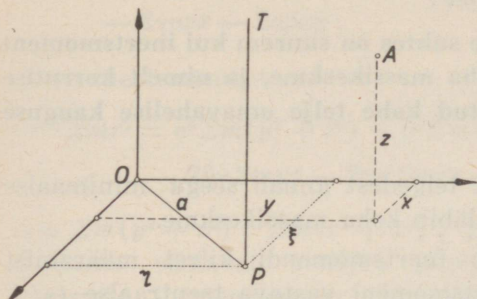
$$D = \frac{a}{2}.$$

See inertsraadius on sõltumatu pooltelje b pikkusest ja tulemus on järelikult kehtiv ka ringi kohta.

M ä r k u s: Näidetes 2 ja 5, kus leitud inertsraadiused on sõltumatud pooltelgedest c ja b vastavalt, tulemusi siiski ei saa rakendada erijuhtudel $c=0$ või $b=0$ vastavalt, kus ellipsoid kõduneb ellipsiks või ellips kõduneb sirglõiguks. Lugeja veendugu selles ja tehku endale selgeks selle esimesel pilgul üllatava tõsiasja põhjus.

§ 36. Inertsellipsoid.

Nagu juba tähendatud, inertsmomenti suurus sõltub telje asendist keha suhtes. Selgitame kõigepealt, mil määral inertsmoment muutub telje rööplükke puhul.



73. joonis.

Olgu koordinaadistiku algus O paigutatud keha massikeskmesse C ja olgu telg PT , mille suhtes inertsmoment on võetud, paralleelne z -teljega (73. joonis). Inertsmoment telje PT suhtes olgu tähistatud J_P ja inertsmoment z -telje

suhtes olgu J_C . Punkti P koordinaadid olgu $\xi, \eta, 0$.

On keha mingi punkti A koordinaadid x, y, z , siis võib kõrvuti veel vaadelda sama A koordinaate x', y', z' uue teljestiku suhtes, kus z -telje aset täidab PT , teiste koordinaattelgedes suunad aga on jäänud muutumatuks. Teatavasti on siis

$$x' = x - \xi, \quad y' = y - \eta.$$

Kolmas koordinaat z meid antud juhul ei huvita. Ilmselt on

$$J_C = \sum m(x^2 + y^2), \quad J_P = \sum m(x'^2 + y'^2).$$

Järelikult:

$$\begin{aligned} J_P &= \sum m[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2] \\ &= \sum m(x^2 + y^2) + \sum m(\xi^2 + \eta^2) - 2\sum mx\xi - 2\sum my\eta \\ &= J_C + (\xi^2 + \eta^2)\sum m - 2\xi\sum mx - 2\eta\sum my. \end{aligned}$$

Siin $\xi^2 + \eta^2$ näitab PT ja z -telje vahelise kauguse $\overline{OP} = a$ ruudu a^2 . Peale selle on $\sum mx$ ja $\sum my$ kindlasti nullid, sest need summad esinevad massikeskme koordinaatide avaldiste lugejais

ja need massikeskme koordinaadid on nullid, sest C asetseb kohas O . Σm on keha kogumass M . Niisiis tulemus näitab, et

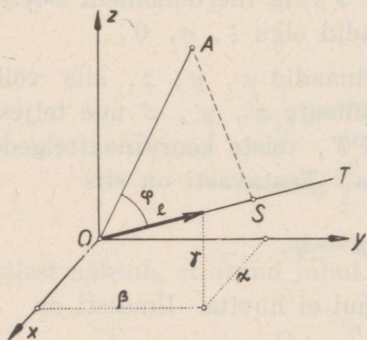
$$J_P = J_C + Ma^2. \quad (136)$$

Sõnastatult kõlaks vastav lause:

Inertsmoment mingi telje suhtes on suurem kui inertsmoment paralleeltelje suhtes läbi keha massikeskme, ja nimelt korrutise võrra keha massist ja mainitud kahe telje omavahelise kauguse ruudust.

Kõikidest samasihilistest telgedest annab seega minimaalse inertsmomendi see telg, mis läbib keha massikeskme.

Valem (136) võimaldab inertsmomendi kiiret määramist kõigil neil juhtudel, kus inertsmoment vastava tsentraalse (s. t. massikeset läbiva) telje suhtes on juba tuntud.



74. joonis.

Selgitame nüüd veel, kuidas muutub inertsmoment telje sihi muutumisel.

Olgu koht O valitud meelevaldselt ja läbi O pandud samuti meelevaldne telg OT , mille suuna-koosinused olgu α , β , γ (tähisted l , m , n ei sobi, sest m tähendab juba massi!). Olgu A koordinaatidega x , y , z keha mingi meelevaldne punkt (74. joonis).

Inertsmomendi J arvutamiseks telje OT suhtes peame tundma punktide A kaugusi $\overline{AS} = r$ teljest OT . Ilmseti on

$$r^2 = \overline{OA}^2 - \overline{OS}^2 = x^2 + y^2 + z^2 - \overline{OS}^2.$$

Siin \overline{OS} , olles vektori \overrightarrow{OA} projektsioon suunale OT , peab suuruse poolest võrduma vektori \overrightarrow{OA} ja OT pidi suunatud ühikvektori skalaarse korrutisega (vt. § 9), seega

$$\overline{OS}^2 = (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2.$$

Silmas pidades veel, et suunakoosinuste ruutude summa $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ võrdub ühikuga, võime ülaltoodu põhjal kirjutada:

$$\begin{aligned} r^2 &= (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(x^2 + y^2 + z^2) - (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 \\ &= \alpha^2(y^2 + z^2) + \beta^2(z^2 + x^2) + \gamma^2(x^2 + y^2) - 2\beta\gamma yz - \\ &\quad - 2\gamma\alpha zx - 2\alpha\beta xy. \end{aligned}$$

Seega inertsmoment

$$\begin{aligned} J = \Sigma mr^2 &= \alpha^2 \Sigma m(y^2 + z^2) + \beta^2 \Sigma m(z^2 + x^2) + \gamma^2 \Sigma m(x^2 + y^2) + \\ &\quad - 2\beta\gamma \Sigma myz - 2\gamma\alpha \Sigma mzx - 2\alpha\beta \Sigma mxy. \end{aligned}$$

Siin $\Sigma m(y^2 + z^2)$, $\Sigma m(z^2 + x^2)$, $\Sigma m(x^2 + y^2)$ kujutavad inerts-momente vastavalt x -telje, y -telje, z -telje suhtes; tähistame viimaseid inerts-momente sümbolitega J_x , J_y , J_z . Summad Σmyz , Σmzx , Σmxy on omaette suurused, mis samuti kuuluvad ruuduliste momentide liiki; neid suursi kutsutakse „inerts-korrutisteks“, vahel ka „tsentrifugaalmomentideks“. Tähistame neid suursi vastavalt sümbolitega J_{yz} , J_{zx} , J_{xy} . On keha asend x - y - z -koordinaadistiku suhtes fikseeritud, siis koos suurust J_x , J_y , J_z , J_{yz} , J_{zx} , J_{xy} kujutavad suunakoosinustest α , β , γ sõltumatuid konstante, ning

$$J = J_x \alpha^2 + J_y \beta^2 + J_z \gamma^2 - 2J_{yz} \beta \gamma - 2J_{zx} \gamma \alpha - 2J_{xy} \alpha \beta. \quad (137)$$

Kujutelgem teljel OT kahel pool kohast O kaks punkti, millele mõlemate kaugused O -st oleksid võrdsed suurusega $\frac{1}{\sqrt{J}}$, mis väärtus muidugi sõltub telje OT sihist. Olgu x_i , y_i , z_i nende punktide koordinaadid; telje OT sihi muutumisel muutuvad ka need koordinaadid x_i , y_i , z_i . On kerge näha, et

$$x_i = \frac{\pm 1}{\sqrt{J}} \alpha, \quad y_i = \frac{\pm 1}{\sqrt{J}} \beta, \quad z_i = \frac{\pm 1}{\sqrt{J}} \gamma,$$

kusjuures ühe punkti puhul kehtivad ülemised märgid, teise punkti puhul alumised. Igal juhul on seega

$$\begin{aligned} x_i^2 &= \frac{1}{J} \alpha^2, & y_i^2 &= \frac{1}{J} \beta^2, & z_i^2 &= \frac{1}{J} \gamma^2, \\ y_i z_i &= \frac{1}{J} \beta \gamma, & z_i x_i &= \frac{1}{J} \gamma \alpha, & x_i y_i &= \frac{1}{J} \alpha \beta. \end{aligned}$$

Jagades võrrandi (137) mõlemaid pooli suurusega J , leiame seetõttu:

$$1 = J_x x_i^2 + J_y y_i^2 + J_z z_i^2 - 2J_{yz} y_i x_i - 2J_{zx} z_i x_i - 2J_{xy} x_i y_i. \quad (138)$$

Saadud võrrand (138) määrab mainitud punktide (x_i, y_i, z_i) asukohti muutuvate α, β, γ , s. t. muutuva telje OT sihi puhul: mistahes α, β, γ juures võrrand (138) peab ikkagi olema rahuldatud. Punktid (x_i, y_i, z_i) täidavad, nagu sellest näha, teatava teise järgu pinna. See pind on ellipsoid, sest J on igatahes positiivne ja nullist erinev, seetõttu x_i, y_i, z_i peavad asetsema kõik lõplikul kaugusel kohast O ; ainus teise järgu pind, mille kõik punktid asetsevad lõplikul kaugusel, on aga ellipsoid. Kõrvale on jäetud seejuures ainus mõeldav erand, kus keha ise on kõdunenud sirglõiguks, mis langeb just teatavale OT sirgele, — siis vastav J muutuks nulliks; see erandjuht ei paku aga huvi. Kõikide võimalikkude telgede OT lõikepunkt O on ellipsoidi (138) keskpunktiks.

Ellipsoidi (138) kutsutakse Poinso't järgi „inertsellipsoidiks“ kohas O .

Teatavasti saab alati, koordinaattelgi tarvilikul viisil pöörates, ellipsoidi võrrandile anda nn. kanooniline kuju, kus liikmed korrutistega yz, zx, xy puuduvad. Rakendades seda ellipsoidi (138) puhul, järeldame, et leiduvad alati sääraseid teljestiku $x-y-z$ -suunad, et inertsikorrutised J_{yz}, J_{zx}, J_{xy} osutuvad nulliks, s. t. et

$$\Sigma myz = 0, \quad \Sigma mzx = 0, \quad \Sigma mxy = 0. \quad (139)$$

Säärase koordinaadistiku valiku puhul inertsellipsoidi võrrand omab kuju

$$J_x x_i^2 + J_y y_i^2 + J_z z_i^2 = 1. \quad (140)$$

Koordinaattelgedeks on siis just inertsellipsoidi peateljed; vastavad inertsellipsoidi pooltelgede suurused on siis

$$\frac{1}{\sqrt{J_x}}, \quad \frac{1}{\sqrt{J_y}}, \quad \frac{1}{\sqrt{J_z}}.$$

Eeldusel (139) määratud väärtusi J_x , J_y , J_z kutsutakse „peainertsmomentideks“ kohas O . On need 3 peainertsmomenti teada, siis on nendega määratud kogu inertsellipsoid kohas O , sest kolme poolteljega on ellipsoid määratud. Inertsmoment O läbiva telje suhtes, mille suunakoosinused inertsellipsoidi peatelgede suhtes on α , β , γ , on (137) kohaselt arvutatav eeskirja alusel

$$J = J_x\alpha^2 + J_y\beta^2 + J_z\gamma^2, \quad (141)$$

kus J_x , J_y , J_z tähendavad peainertsmomente kohas O .

Inertsellipsoidi peatelgi kutsutakse „inertsiooni peatelgedeks“ kohas O .

On kohaks O valitud keha massikeske C , siis kutsutakse vastavat inertsellipsoidi „tsentraalseks“ inertsellipsoidiks. On tsentraalne inertsellipsoid leitud, siis inertsmomendi arvutamiseks mistahes telje puhul võib juba toetuda valemile (136).

Erandjuhtudel võib inertsellipsoid osutada pöördellipsoidiks — siis leidub tal ühes teatavas tasapinnas lõpmata palju peatelgi. Veel kitsamal erandjuhul võib inertsellipsoid osutada sfääriks, kus iga telg on peatelg.

Üldjuhul leidub seega kohas O alati vaid kolm inertsiooni peatelge ja vastavad peainertsmomendid on siis kindlasti omavahel suuruse poolest erinevad. Erandjuhtudel võib leiduda tasapind läbi O , kus kõik sinna langevad teljed annavad võrdseid inertsmomente; iga säärane telg on siis inertsiooni peateljeks. Veel kitsama erandi moodustab juht, kus üldse kõik teljed läbi O annavad võrdseid inertsmomente, — sel korral iga telg läbi O on inertsiooni peateljeks.

On inertsiooni peatelgi vaid 3, siis need peateljed on kindlasti omavahel paarikaupa risti.

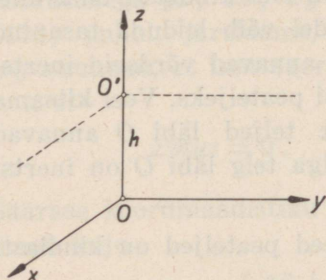
Inertsiooni peatelgi saab paljudel juhtudel kohe ära tunda sümmeetriale rajatud kaalutlustel. On nimelt näiteks x - y -tasapind keha sümmeetriatasapinnaks, siis keha punktile (x, y, z) vastab sümmeetriline punkt $(x, y, -z)$ ja seetõttu Σmyz ning ka Σmzx muutuvad nulliks, sest neis summades esinevad siis

vastamisi hävivad liikmepaarid $+myz$ ja $-myz$ (esimeses summas) ja samuti hävivad paarid $+mzx$ ja $-mzx$ (teises summas). Seega antud olukorras ellipsoidi (138) võrrandis jääb peale puhtruuduliste liikmete veel ainult liige korrutisega $x_i y_i$, millest omakorda järgneb, et see ellipsoid ise asetseb sümmeetriliselt x - y -tasapinna suhtes; siis aga selle x - y -tasapinnaga risti olev z -siht peab olema ellipsoidi ühe peatelje sihiks. Järelikult kehtib lause:

Kui kehal leidub sümmeetriatasapind, siis selle tasapinna mistahes kohas O üks inertsia peatelgedest on selle tasapinnaga risti. Ülejäänud 2 inertsia peatelge asetsevad seega sümmeetriatasapinnas endas.

Leidub kehal veel teine sümmeetriatasapind, siis mõlema tasapinna ühine sirge peab olema igas oma kohas O kindlasti peateljeks, milles lugeja veendugu ise, toetudes praegutõestatud lausele.

Olgu veel tähendatud, et sirge, mis osutub inertsia peateljeks selle sirge mõnes kohas O , ei tarvitse üldjuhul enam olla inertsia peateljeks sama sirge mõnes teises kohas O' . Kui aga sirge on peateljeks ka kohas O' , siis sama sirge on peateljeks samuti igas meelevaldses kolmandas oma kohas O'' ning ühtlasi see sirge peab siis läbima keha massikeskme C .



75. joonis.

Tõepoolest, olgu see sirge võetud z -teljeks ja O koordinaatide algseks (75. joonis). Punkti O' koordinaadid, kus see z -telg samuti osutub inertsia peateljeks, olgu $0, 0, h$. On z -telg kohas O peateljeks, siis peavad inertsellipsoidi võrrandis (138) kaduma liikmed, kus esinevad korrutised

yz ja zx , sest tasapind xy peab siis olema ellipsoidi sümmeetriatasapinnaks. Järelikult peab siis olema

$$\sum myz = 0, \quad \sum mzx = 0.$$

Kandes rööplükkega koordinaatide alguspunkti kohta O' , mis toiming vastab z asendamisele väärtusega $z - h$, leiame samadel kaalutlustel, kui z -telg on ka kohas O' peateljeks,

$$\Sigma my(z - h) = 0, \quad \Sigma m(z - h)x = 0,$$

s. t.

$$\Sigma myz - \Sigma myh = 0, \quad \Sigma mzx - \Sigma mhx = 0.$$

Varemleitu põhjal see tähendaks

$$\Sigma myh = 0, \quad \Sigma mhx = 0,$$

ehk

$$\Sigma my = 0, \quad \Sigma mx = 0,$$

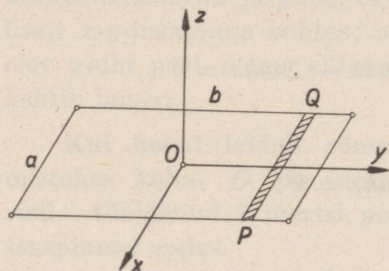
sest nullist erinev ühistegur h on kõrvaldatav. Praegusaadud avaldised Σmy ja Σmx esinevad aga massikeskme koordinaatide lugejatena; nende muutumine nulliks tähendab, et massikeskme C koordinaadid ξ , η peavad olema nullid, — teiste sõnadega, z -telg peab antud olukorras läbima massikeskme C . Läbib aga nüüd z -telg massikeskme C ja on peale selle veel $\Sigma myz = 0$ ja $\Sigma mzx = 0$, siis $\Sigma my(z - h) = 0$ ja $\Sigma m(z - h)x = 0$ i g a h puhul, järelikult osutub z -telg siis inertsii peateljeks mistahes oma kohas. Väide on seega täies ulatuses tõestatud. Pealegi on selgunud veel pöördlause: massikeskmest läbiminev telg on inertsii peateljeks i g a s oma kohas, niipea kui ta on peateljeks ühesainsas meelevaldses oma kohas.

Massikeskmest läbiminevat peatelge nimetame „tsentraalseks“ peateljeks. Tõestatud laused võib siis sõnastada järgmiselt:

Peatelg on igas kohas peateljeks siis ja ainult siis, kui ta on tsentraalne.

Inertsellipsoidi määramise näitena käsitleme massiivse homogeense risttahuka tsentraalse inertsellipsoidi küsimust. Sümmeetriast järgneb, et inertsii peateljed on paralleelsed selle risttahuka servadega; viimaste pikkused olgu a , b , c ; nad vastaku koordinaattelgedele x , y , z sihtidele praeguloendatud järjekorras.

J_z määramiseks lõikame mõttes risttahuka kihtideks põigiti z -teljega. Üksik säärane kiht moodustab ristküliku, mille inertsmoment ilmsesti ei sõltu kõrgusest x - y -tasapinna suhtes; asja lihtsustamiseks võime seega seda ristkülikut paigutada just x - y -tasapinnasse (76. joonis). Lõikame selle ristküliku edasi veel ribadeks risti y -teljega. Üksik-riiba PQ inertsmoment telje suhtes, mis on ribaga risti ja läbib riba keskkoha, on § 35



76. joonis.

neljanda näite põhjal $\frac{a^2}{12} dm$, kui dm on riba mass. Sel puhul ilmsesti $dm = \rho a dy dz$. z -telje suhtes on riba inertsmoment

(136) põhjal $y^2 dm$ võrra suurem. Järelikult üksikriiba inertsmoment z -telje suhtes on

$$\left(\frac{a^2}{12} + y^2\right) \rho a dy dz.$$

Ristküliku inertsmoment on seega

$$\begin{aligned} dz \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \left(\frac{a^2}{12} + y^2\right) \rho a dy &= \rho a \left(\frac{a^2}{12} y + \frac{y^3}{3}\right) \Big|_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} dz \\ &= \rho a \left(\frac{a^2 b}{12} + \frac{b^3}{12}\right) dz \\ &= \rho \frac{ab}{12} (a^2 + b^2) dz. \end{aligned}$$

Kogu risttahuka inertsmoment J_z on seetõttu

$$J_z = \int_{-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}} \rho \frac{ab}{12} (a^2 + b^2) dz = \rho \frac{abc}{12} (a^2 + b^2) = M \frac{a^2 + b^2}{12},$$

kus M tähendab risttahuka massi.

Tähtede ümberpaigutuse teel järgnevad teised peainerts-
momentid:

$$J_x = M \frac{b^2 + c^2}{12}, \quad J_y = M \frac{c^2 + a^2}{12}.$$

Taandades ühisteguriga M ja korrutades 12-ga, võime järelikult
otsitava inertsellipsoidi võrrandile anda kuju:

$$(b^2 + c^2)x_i^2 + (c^2 + a^2)y_i^2 + (a^2 + b^2)z_i^2 = \frac{12}{M}.$$

On erijuhul $a = b$, siis tekib pöördellipsoid. On aga tege-
mist kuubiga $a = b = c$, siis tsentraalne inertsellipsoid osutub
sfääriks

$$x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 = \frac{6}{a^2 M}.$$

Viimasest nähtub, et massiivse kuubi inertsmomentid mistahes
tsentraalse telje suhtes on omavahel võrdsed, nimelt on siis

$$J = M \frac{a^2}{6}, \quad D = \frac{a}{\sqrt{6}}.$$

On erijuhul $c = 0$, siis risttahukas muutub plaadiks x - y -
tasapinnas ning siis

$$J_x = M \frac{b^2}{12}, \quad J_y = M \frac{a^2}{12}, \quad J_z = M \frac{a^2 + b^2}{12}.$$

Sel erakordsel erijuhul seega

$$J_z = J_x + J_y,$$

s. t. üks peainertsmomentidest võrdub teise kahe peainerts-
momenti summaga. On kerge veenduda, et ühegi keha puhul
peainertsmoment ei saa ületada kahe teise peainerts-
momenti summat. Tõepoolest, definitsiooni kohaselt

$$J_x = \sum m(y^2 + z^2), \quad J_y = \sum m(z^2 + x^2), \quad J_z = \sum m(x^2 + y^2),$$

järelikult:

$$J_x + J_y = \sum m(x^2 + y^2 + 2z^2) \geq \sum m(x^2 + y^2) = J_z.$$

Sellega ongi väide tõestatud, sest inertsii peateljed on igatahes
vastastikusel ristseisus.

Inertsellipsoidi pooltelgi ei tohi seega üsna meelevaldselt ette anda, vaid tuleb silmas pidada nõuet

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq \frac{1}{c^2},$$

kui

$$a = \frac{1}{\sqrt{J_x}}, \quad b = \frac{1}{\sqrt{J_y}}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{J_z}}$$

peavad olema inertsellipsoidi poolteljed. Võttes näiteks pöördellipsoidi $a = b$, saame tingimuse

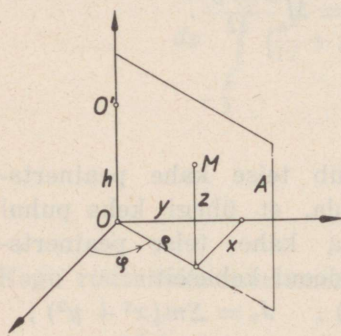
$$\frac{2}{a^2} \geq \frac{1}{c^2}, \quad \frac{c}{a} \geq \frac{1}{\sqrt{2}},$$

mis paneb tõkke selle pöördellipsoidi lapikusele.

§ 37. Teljel roteeruv kindel keha.

Olgu kindel keha seotud z -teljega nõnda, et kehale jääb ainult selle telje ümber roteerumise vabadus, mitte aga telge pidi libisemise võimalus. § 7 kohaselt on säärasel kehal üksainus liikumisvabaduse aste, s. t. keha asendit määrab juba üksainus parameeter. Selleks parameetriks võib valida nurka φ ,

mille võrra z -teljest läbiminev kehaga seotud mingi tasapind A on oma algasendiga võrreldes pöördunud; tasapinna algasendiks võib seejuures alati veel valida seda asendit, kus A ühtib x - z -tasapinnaga (77. joonis). On φ aja t funktsioonina leitud, siis on keha asend igal hetkel t määratud. See ainus funktsioon $\varphi(t)$ peab ilmsesti määratud olema juba üheainsa diferentsiaalvõrrandiga. (21) kohaselt (§ 7)



77. joonis.

nurkkiirus ω on siis $\dot{\varphi}$, järelikut nurkkiirendus $\dot{\omega}$ on $\ddot{\varphi}$.

Kehale mõjuvad teatavad otseselt rakendatud välistungid, millede projektsioone tähistame endisel viisil sümbolitega $X^{(e)}$,

$Y^{(e)}$, $Z^{(e)}$. Peale selle mõjuvad kehale veel kinnitustelje poolt avaldatud reaktsioonid. Et z -telje kinnitamist võib saavutada kahe selle telje punkti O ja O' kinnitamisega, siis võib piirduda just reaktsioonidega $\mathfrak{R}: (X, Y, Z)$ ja $\mathfrak{R}': (X', Y', Z')$, mis tekivad neis kahes kinnituskohas vastavalt. Olgu O võetud koordinaatide alguseks ja olgu O' koordinaatideks arvud $0, 0, h$. Kuigi reaktsioonid on tundmatud, võib põhimõtteliselt keha käsitleda täiesti vabana, s. t. teljega mitte eriti seotuna, kui kehale mõjuvate välistungide hulka kuuluvateks lugeda ka veel neid reaktsioontunge \mathfrak{R} ja \mathfrak{R}' . Vajaliku diferentsiaalvõrrandi funktsiooni φ määramiseks annab seos (131) § 33, kui seal esinev nurkkiirendus ω asendada võrdse suurusega $\ddot{\varphi}$. Selles seoses esineb paremat kätt välistungide resulteeruv moment z -telje suhtes. Et aga antud juhul samuti välistungide hulka loetud reaktsioonid \mathfrak{R} ja \mathfrak{R}' momente ei anna, sest nende rakenduspunktid O ja O' asetsevad z -teljel endal, siis resulteeruva momendi saamiseks piisab juba ainuüksi otseselt rakendatud välistungide ($X^{(e)}$, $Y^{(e)}$, $Z^{(e)}$) arvestamisest. Niisiis diferentsiaalvõrrand kõlaks:

$$J\ddot{\varphi} = \Sigma(xY^{(e)} - yX^{(e)}), \quad (142)$$

kus x , y tähendavad välistungide ($X^{(e)}$, $Y^{(e)}$, $Z^{(e)}$) rakenduspunktide koordinaate.

Konkreetsena käsitleme järgmises paragraafis erijuhtu, kus z -telg on horisontaalne ja otseselt rakendatud välistungid on keha üksikosade raskused. Praegu aga peatume ainult reaktsioonide \mathfrak{R} ja \mathfrak{R}' määramise juures üldjuhul. Et diferentsiaalvõrrandis (142) neist reaktsioonidest pole juttu, siis ilmsesti reaktsioonide määramiseks tuleb kasutada teisi võrrandeid.

Olgu x , y , z kehaga lahutamatu seotud mingi materiaalse punkti M koordinaadid. x ja y muutuvad siis aja jooksul, z aga peab jääma konstantseks, sest keha saab vaid roteeruda z -telje ümber. 77. joonise kohaselt on

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi,$$

kus ka ρ kindla M puhul osutub konstantseks. Diferentsides järeldame:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\rho\dot{\varphi} \sin \varphi = -\omega\rho \sin \varphi = -\omega y \\ \dot{y} &= +\rho\dot{\varphi} \cos \varphi = +\omega\rho \cos \varphi = +\omega x \\ \dot{z} &= 0,\end{aligned}$$

seega

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -\omega\dot{y} - \dot{\omega}y = -\omega^2x - \dot{\omega}y \\ \ddot{y} &= +\omega\dot{x} + \dot{\omega}x = -\omega^2y + \dot{\omega}x \\ \ddot{z} &= 0.\end{aligned}$$

Et kindel keha roteerub tervikuna, siis siin ω ja $\dot{\omega}$ ei sõltu punkti M erivalikust. Seetõttu, kui m tähendab kohas M asetsevat massi,

$$\begin{aligned}\Sigma m\ddot{x} &= -\omega^2\Sigma mx - \dot{\omega}\Sigma my \\ \Sigma m\ddot{y} &= -\omega^2\Sigma my + \dot{\omega}\Sigma mx \\ \Sigma m\ddot{z} &= 0 \\ \Sigma m(y\ddot{z} - z\ddot{y}) &= +\omega^2\Sigma myz - \dot{\omega}\Sigma mzx \\ \Sigma m(z\ddot{x} - x\ddot{z}) &= -\omega^2\Sigma mzx - \dot{\omega}\Sigma myz \\ \Sigma m(x\ddot{y} - y\ddot{x}) &= \dot{\omega}\Sigma m(x^2 + y^2) = \dot{\omega}J.\end{aligned}$$

Impulsilause ja impulssmomendi lause põhjal järeldame seega:

$$\begin{aligned}X + X' + \Sigma X^{(e)} &= -\omega^2\Sigma mx - \dot{\omega}\Sigma my \\ Y + Y' + \Sigma Y^{(e)} &= -\omega^2\Sigma my + \dot{\omega}\Sigma mx \\ Z + Z' + \Sigma Z^{(e)} &= 0 \\ -hY' + \Sigma(yZ^{(e)} - zY^{(e)}) &= +\omega^2\Sigma myz - \dot{\omega}\Sigma mzx \\ +hX' + \Sigma(zX^{(e)} - xZ^{(e)}) &= -\omega^2\Sigma mzx - \dot{\omega}\Sigma myz \\ \Sigma(xY^{(e)} - yX^{(e)}) &= \dot{\omega}J,\end{aligned}\tag{143}$$

sest \mathfrak{H} moment koordinaattelgede suhtes kaob üldse ja \mathfrak{H}' momendid x , y , z telje suhtes on vastavalt $-hY'$, $+hX'$ ja 0 .

Viimane võrrandeist (143) ühtib liikumist määrava võrrandiga (142). Viis esimest võrrandit (143) annavad 5 tingimust kuue tundmatu X , Y , Z , X' , Y' , Z' jaoks. Esimesest, tei-

sest, neljandast ja viiendast saab määrata X , Y , X' , Y' ; kolmandast võrrandist saab seepeale veel määrata vaid summa $Z + Z'$, kuna Z ja Z' eraldi jäävad määramatuiks, analoogiliselt vastava probleemiga staatikast.

Neli võrrandit (143) sisaldavad paremat kätt liikme teguriga ω^2 ; et viimane suurus ühes nurkkiirusega kiiresti kasvab, siis nähtub, et üldjuhul reaktsioonide X , Y , X' , Y' peavad kiiresti kasvama koos nurkkiirusega ω .

Erijuhul, kus $\Sigma mzx = 0$, $\Sigma myz = 0$, s. t. kus rotatsioonitelg osutub peateeljeks, muutuvad neljanda ja viienda võrrandi (143) paremad pooled nulliks. On seejuures välisungid ($X^{(e)}$, $Y^{(e)}$, $Z^{(e)}$) ka veel säärased, et nende resulteruv moment rotatsioonitelje suhtes kaob, siis järgneb $X' = 0$, $Y' = 0$. Z' määramatuse tõttu võib eeldada $Z' = 0$, millest siis järgneb, et

juhul, kui rotatsiooniteljeks on inertsi peatelg kinnitatud kohas O , ja otseselt rakendatud välisungid selle telje suhtes momenti ei anna, selle telje teistes punktides O' ei teki ka mingit reaktsiooni.

Kirjeldataud olukorras säärane rotatsioonitelg püsib seega liikumatult juba ainuüksi koha O kinnitamisel. Sel põhjusel inertsi peatelgi kutsutakse ka „püsivateks“ rotatsioonitelgedeks.

On aga peale selle ka veel $\Sigma mx = 0$, $\Sigma my = 0$, s. t. on mainitud inertsi peatelg ühtlasi tsentraalne, seega peatelg igas oma kohas, siis ka esimese ja teise võrrandi (143) paremad pooled muutuvad nulliks. Puuduvad sel korral veel välisungid ($X^{(e)}$, $Y^{(e)}$, $Z^{(e)}$) üldse (sel korral kaob endastmõistetavalt ka nende välisungide resulteruv moment), siis ka X ja Y osutuvad nulliks, ning kolmas võrrand näitab, et ka Z peab olema null, kui Z' , nagu varemini oletatud, on null. Seega kaob siis ka reaktsioon kohas O , tähendab, telg ei avalda üldse mingit reaktsiooni kehale. Et ka kuuenda võrrandi parem pool muutub sel juhul nulliks, siis järgneb sealt, et keha nurkkiirus ω jääb konstantseks. Seega:

Juhul, kui rotatsiooniteljeks on tsentraalne inertsi peatelg ja kui seejuures välisungid üldse puuduvad, keha jätkab alustatud

rotatsiooni konstantse nurkkiirusega, ilma et telg üldse avaldaks mingisugust reaktsiooni.

Säärane tsentraalne peatelg püsib järelikult antud olukorras täiesti vabalt, s. t. ilma toetuseta; sel põhjusel tsentraalseid inertsi peatelgi kutsutakse ka „vabadeks“ rotatsioonitelgedeks.

Olgu tähendatud, et reaktsioonid tekivad ka välistungide täielikul puudumisel, niipea kui rotatsioonitelg pole tsentraalne; see järgneb otseselt võrrandeist (143).

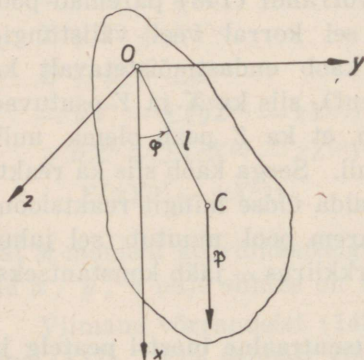
Toodud kaalutlusil tuleb näiteks hoorataste puhul hoolitseda telje täpse tsentreerimise eest, vastasel korral tuleb arvestada võimsate reaktsioonide tekkimist suuremate nurkkiiruste puhul, mille tagajärjel überpöörduvalt ka ratas hakkab tugevasti kõigutama teljelaagreid, nii et kiire rotatsiooni juures kogu seadeldis satub hädaohtu.

§ 38. Füüsiline pendel.

Füüsilise pendli all mõistetakse meelevaldse kujuga kindlat keha, mis, olles seotud horisontaalse rotatsiooniteljega, liigub ainuüksi raskustungi mõjul.

Olgu füüsilise pendli puhul horisontaalne rotatsioonitelg jällegi valitud z -teljeks. Olgu keha massikeske C ja koordinaatide algus O valitud nõnda, et C langeks x - y -tasapinnale. x -telg olgu

suunatud vertikaalselt allapoole (78. joonis). Kindla keha üksikpunktide raskused paralleeltungidena liituvad keha koguraskuseks \mathfrak{F} , mida võib kujutella rakendatuna massikeskmes C ; selle \mathfrak{F} projektsioonideks on $X = mg$, $Y = 0$, $Z = 0$, kui m tähendab keha kogumassi. On veel sümboliga l tähistatud pikkus OC rotatsiooniteljest kuni massikeskmeni, siis \mathfrak{F} moment selle rotatsiooni-



78. joonis.

telje suhtes on $mgl \sin \varphi$ ja diferentsiaalvõrrand (142), mis määrab keha liikumist, antud olukorras omab kuju:

$$J\ddot{\varphi} = mgl \sin \varphi. \quad (144)$$

Pendli puhul kutsutakse rotatsioonitelge ka „toetusteljeks“. Koosneb keha vaid ühestainsast materiaalsest punktist O' , mille kaugus toetusteljest olgu tähistatud sümboliga l' , siis see l' on ühtlasi inertsraadiuseks toetustelje suhtes ning inertsmomendiks on seega ml'^2 ; säärane ühepunktiline keha kujutaks matemaatilist pendlit pikkusega l' . (144) asemel tuleks siis

$$ml'^2\ddot{\varphi} = mgl' \sin \varphi,$$

ehk

$$\ddot{\varphi} = \frac{g}{l'} \sin \varphi.$$

Võrreldes seda seosest (144) üldjuhul järgneva võrrandiga

$$\ddot{\varphi} = \frac{mgl}{J} \sin \varphi,$$

näeme, et vahe seisab vaid koefitsiendis $\sin \varphi$ juures. On need koefitsiendid võrdsed, s. t. on

$$\frac{g}{l'} = \frac{mgl}{J}, \quad (145)$$

siis võrrandid on täiesti samad ja seega ka nende lahendid samad, niisiis ka neist lahenditest järgnevad täisvõnkeajad T samad.

Pikkust l' , mis tuleks anda matemaatilisele pendlile, et teatava füüsilise pendli täisvõnkeage võrduks matemaatilise pendli võnkeajaga, kutsutakse selle füüsilise pendli „taandatud pikkuseks“. On D füüsilise pendli inertsraadius toetustelje suhtes, seega $J = mD^2$, siis tingimuses (145) m ja g langevad välja ja l' osutub määratuks l ja D kaudu; tingimusele võib siis nimelt anda kuju:

$$l' = D^2. \quad (146)$$

Olgu k sama keha inertsraadius telje suhtes, mis läbib massikeset C , olles seejuures paralleelne pendli toetusteljega. (136) põhjal on siis

$$mD^2 = mk^2 + ml^2,$$

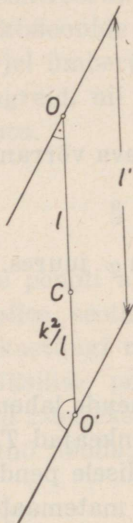
seega

$$D^2 = k^2 + l^2.$$

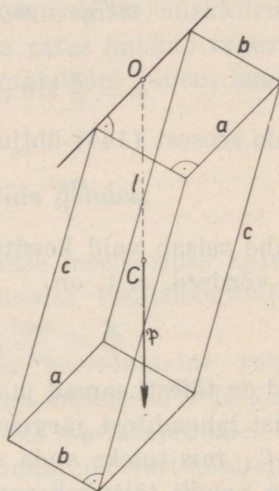
Asetades seda seosesse (146), leiame

$$l' = l^2 + k^2, \quad l' = l + \frac{k^2}{l}. \quad (147)$$

See näitab, et füüsilise pendli taandatud pikkus alati ületab massikeskme kauguse toetusteljest (79. joonis). Määrates (147) abil l' , saame juba § 30 tuletatud valemite põhjal määrata pendli võnkumise, eriti ka tema võnkeaja T .



79. joonis.



80. joonis.

Näide: Massiivne risttahukas pikkusega c ja teiste servadega a , b , võngub serva a kui toetustelje ümber (80. joonis). Määrata T , võttes $a = 3$ [cm], $b = 1$ [cm], $c = 100$ [cm], $g = 981$ [cm sec⁻²].

Antud juhul $l = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + c^2}$ ning § 36 käsitletud näite põhjal

$$k^2 = \frac{b^2 + c^2}{12}.$$

Järelikult

$$l' = \frac{1}{2} \sqrt{b^2 + c^2} + \frac{1}{6} \sqrt{b^2 + c^2} = \frac{2}{3} \sqrt{b^2 + c^2}.$$

Võttes amplituudi lõpmata väikesena, saame seega (117) alusel:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l'}{g}} = \frac{2\sqrt{2}\pi}{\sqrt{3g}} \sqrt{b^2 + c^2}.$$

Arvuliselt see annab:

$$T = \frac{2\sqrt{2}\pi \sqrt{10001}^4}{\sqrt{2943}} = 1,638 \text{ [sec].}$$

Olgu üldjuhul füüsilise pendli puhul sirge OC pikendatud üle C punktini O' nõnda, et pikkus $\overline{OO'}$ oleks võrdne pendli taandatud pikkusega l' (79. joonis). Läbi O' paralleelselt toetusteljega pandud sirget kutsutakse siis pendli „võnketeljeks“. Toetustelje ja võnketelje vahel valitseb vastastikkus ses mõttes, et juhul, kui endine võnketelg valida uueks toetusteljeks, siis endine toetustelg osutub uueks võnketeljeks. Tõepoolest, uues olukorras taandatud pikkuseks on (147) kohaselt

$$\frac{k^2}{l} + \frac{k^2 l}{k^2} = \frac{k^2}{l} + l = l' = \overline{O'O},$$

sest $\overline{O'C} = \frac{k^2}{l}$ ja see täidab nüüd endise $OC = l$ aset.

Praegutõestatud väide lubab pööramist järgmisel kujul:

Olgu mõne keha puhul leitud 2 paralleelset telge nõnda, et

1) täisvõnkeajad mõlema telje puhul osutuvad omavahel võrdseks;

2) telgede ühistasapind läbib keha massikeskme;

3) see massikese asetseb telgedest erinevatel kaugustel;

siis telgedevaheline kaugus on võrdne pendli taandatud pikkusega.

Seda teoreemi tuntakse Huygens'i lause nime all.

Lause tõestus tugineb jällegi valemile (147). Olgu massikeskme C kaugus esimesest teljest l_1 , teisest teljest l ; võnkeajade, s. t. taandatud pikkuste võrdsusest järgneb

$$l + \frac{k^2}{l} = l_1 + \frac{k^2}{l_1} = l',$$

seega

$$l - l_1 = \frac{k^2(l - l_1)}{ll_1}.$$

Kui nüüd l ja l_1 on omavahel erinevad, tähendab, $l - l_1$ on nullist erinev, siis taandamine ühisteguriga $l - l_1$ on lubatud, millega leiame

$$1 = \frac{k^2}{ll_1}, \quad l_1 = \frac{k^2}{l}$$

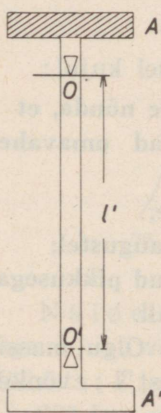
ning

$$l' = l + \frac{k^2}{l} = l + l_1,$$

mis ongi Huygens'i lause väide.

Olgu tähendatud, et massikeskme kauguste erinevus on oluline. Tõepoolest, kui keha on sümmeetrilise kujuga, siis ilmselt võnkeajad peavad olema alati võrdsed, kui ainult teljed asetsevad võrdsetel kaugustel massikeskmest, nii et telgede omavahelisest kaugusest siis ei saa veel teha mingisuguseid järeldusi pendli taandatud pikkuse kohta.

Huygens'i lausele on rajatud geodeetilistes töodes kasutatud *reversioonpendli* idee. Väliselt sümmeetrilise kujuga keha (81. joonis) erineb seesmiselt selle poolest, et üks ots A on massiivne, teine ots A' aga õõnes. Seda õõnsust saab soovitaval määral osaliselt täita, näiteks haavliteradega, reguleerides seda täidet nõnda, et keha võnkeajad ühes asendis O ümber ja pööratud (reverteeritud) asendis O' ümber osutuksid võrdseks; kaugus $\overline{OO'}$ on seejuures peenelt reguleeritav. On võnkeperioodide võrdsus katseliselt saavutatud, siis kaugus $\overline{OO'}$ näitab pendli taandatud pikkust, sest seesmise erinevuse tõttu massikeske C ei asetse keskkohal. Sümmeetriline väliskuju on tarvilik selleks, et võimalikult välja lülitada õhutakistuse mõju erinevust mõlemas asendis.



81. joonis.

On l' täpselt määratud ja T suure võngete arvu najal hoolsalt määratud, siis pendlivallem (118) võimaldab raskuskiirenduse g arvutamist väga suure täpsusega.

Pendlivõngete vaatlusile rajatud mõõtmised kuuluvad üldse täpsemate hulka, mida eksaktteadused tunnevad. Olgu mööda minnes mainitud, et võngete vaatlused pakuvad hõlpsa võimaluse inertsmomentide katseliseks määramiseks: on g tuntud ja T vaatluste najal leitud, siis on taandatud pikkus sellega kaudselt määratud; valemi (145) põhjal saab aga siis juba arvutada inertsmomendi J toetustelje suhtes, mille kaugus l massikeskmest on teada. l peab erinema nullist, vastasel korral osutub l' lõpmata suureks ja sellega ka T lõpmata suureks; tõepoolest, massikeskmes toetatud keha on indiferentses tasakaalus ja pendlina seetõttu üldse ei tule arvesse.

§ 39. Süsteemi energia.

Vaatleme nüüd, millist kuju omab hoolause süsteemi puhul. Seni kui piirduda süsteemi üksikpunkti vaatlusega, peab selle punkti hoo kasv § 23 kohaselt võrduma selle punkti juures rakendatud kõikide, s. t. nii välis- kui sisetungide tööde summaga. Tähendab, kui $(X^{(e)}, Y^{(e)}, Z^{(e)})$ on selles punktis rakendatud välis- tungide resultanttung ja $(X^{(i)}, Y^{(i)}, Z^{(i)})$ samas punktis rakendatud kõikide sisetungide resultanttung:

$$d \frac{mv^2}{2} = [X^{(e)}dx + Y^{(e)}dy + Z^{(e)}dz] + [X^{(i)}dx + Y^{(i)}dy + Z^{(i)}dz].$$

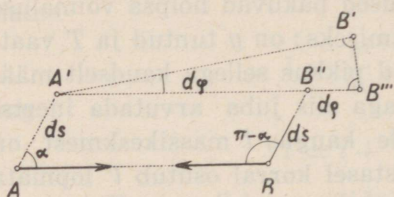
Siin m on selle materiaalse punkti mass, v tema skalaarne kiirus, dx, dy, dz punkti lõpmata väikese nihkevektori projektsioonid.

Süsteemi hoo H all mõistetakse süsteemi üksikpunktide hoo- gude $\frac{mv^2}{2}$ summat. Summeerides praegusaadud võrrandid üle terve süsteemi, leiame:

$$dH = d\Sigma \frac{mv^2}{2} = \Sigma [X^{(e)}dx + Y^{(e)}dy + Z^{(e)}dz] + \Sigma [X^{(i)}dx + Y^{(i)}dy + Z^{(i)}dz]. \quad (148)$$

See ongi hoolause süsteemi puhul: süsteemi hoo kasv võrdub välis- tungide kogutöö ja sisetungide kogutöö summaga.

Tähtis on silmas pidada, et sisetungide kogutöö üldjuhul ei k a o. Erijuhtudel muidugi see sisetungide kogutöö võib ikkagi osutada nulliks. Olukorra paremaks selgitamiseks vaatleme tööd, mis tekib kahe punkti vahel valitsevate sisetungide puhul (82. joonis).



82. joonis.

asendid hetkel $t + dt$. Kujutleme asendit A', B' saavutatuna järk-järgult kolme sammuga: 1) löigu AB rööplükkega asendisse $A'B''$; 2) B'' nihutamiseega sirgel $A'B''$ asendisse B''' nõnda, et $\overline{A'B'''} = \overline{A'B'}$; 3) $A'B'''$ pööramisega lõpmata väikese nurga $d\varphi$ võrra asendisse $A'B'$.

Lõpmata kitsas sarikkolmnurgas $A'B'B'''$ on siis nurgad B' ja B''' juures täisnurgad. On sisetungid A ja B juures vastavalt \mathfrak{F} ja \mathfrak{F}' , kusjuures $|\mathfrak{F}| = |\mathfrak{F}'|$, kuid suund on vastupidine, siis tungi \mathfrak{F} poolt A nihkumisel ds tehtud töö on $|\mathfrak{F}| ds \cos \alpha$. Teise materiaalse punkti juures \mathfrak{F}' poolt tehtud töö vastavalt kolmele sammule on

$$|\mathfrak{F}'| ds \cos(\pi - \alpha) + |\mathfrak{F}'| d\varrho \cos \pi + |\mathfrak{F}'| \cdot \overline{B''B'} \cdot \cos \frac{\pi}{2}$$

ehk

$$-|\mathfrak{F}| ds \cos \alpha - |\mathfrak{F}| d\varrho;$$

\mathfrak{F} ja \mathfrak{F}' kogutöö on järelikult $-|\mathfrak{F}| d\varrho$. Seejuures on eeldatud, et $d\varrho$ on loetud positiivsena, kui A ja B vaheline kaugus ϱ ajavahemikus dt on kasvanud ja sisetungid \mathfrak{F} ja \mathfrak{F}' kujutasid külgetõmmet. Esineb külgetõmbe asemel eemaletõukamine, siis kogutöö on $+|\mathfrak{F}| d\varrho$.

Kindla keha puhul kõik kaugused ϱ on konstandid; sellest nähtub, et kindla keha korral sisetungide kogutöö peab olema null, sest igas paarikombinatsioonis $d\varrho = 0$. Järelikult tuleb kindla keha puhul hoolause sõnastuses piirduda ainult välis-
tungide tööga.

Kui üldjuhul sisetungide kogutöö süsteemis ei kao, siis on ikkagi mõeldav, et see töö $\Sigma[X^{(i)}dx + Y^{(i)}dy + Z^{(i)}dz]$ osutub teatava funktsiooni $-\Pi_i(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots)$ täielikuks diferentsiaaliks, kusjuures $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots$ tähendavad süsteemi üksikute materiaalsete punktide asukohtade koordinaate. Funktsiooni Π_i kutsutakse sel korral süsteemi „potentsiaaliks“ ehk ka „potentsiaalseks energiaks“. Süsteemi, kus leidub potentsiaal Π_i , kutsutakse „konservatiivseks“. Konservatiivse süsteemi puhul hoolauset (148) võib kirjutada kujul

$$dH + d\Pi_i = \Sigma[X^{(e)}dx + Y^{(e)}dy + Z^{(e)}dz], \quad (149)$$

kust integraalsel kujul järgneb:

$$H + \Pi_i = \int \Sigma[X^{(e)}dx + Y^{(e)}dy + Z^{(e)}dz]. \quad (150)$$

H on süsteemi hoog ehk kineetiline energia, Π_i on süsteemi potentsiaalne energia, summa $H + \Pi_i$ on süsteemi koguenergia ehk ka lihtsalt süsteemi energia. (149) näitab, et konservatiivses süsteemis koguenergia muutub ainuüksi välistungide poolt tehtud kogutöö arvel. Erijuhul, kui välistungid puuduvad üldse, kaob elementaartööde summa valemi (149) paremal poolel, tähendab, $d(H + \Pi_i) = 0$ ja seetõttu süsteemi energia peab jääma konstantseks. See ongi energia jäävuse lause konservatiivsete süsteemide kohta.

Potentsiaali olemasolu konservatiivses süsteemis eeldab, et $X^{(i)}, Y^{(i)}, Z^{(i)}$ peavad olema funktsiooni $-\Pi_i$ osatuletised vastava koordinaadi järgi. Näite selleks pakub materiaalsete punktide kogu, millede vahel valitseb gravitatsioon. Olgu säärase süsteemi punktid nummerdatud mingis meelevaldses järjekorras ning vastavate numbrite abil indeksitena eraldatud nende punktide koordinaadid ja massid. Tähendagu veel $q_{\mu\nu}$ kaugust punkti nr. μ ja punkti nr. ν vahel (83. joonis), s. t. olgu

$$q_{\mu\nu}^2 = (x_\mu - x_\nu)^2 + (y_\mu - y_\nu)^2 + (z_\mu - z_\nu)^2.$$

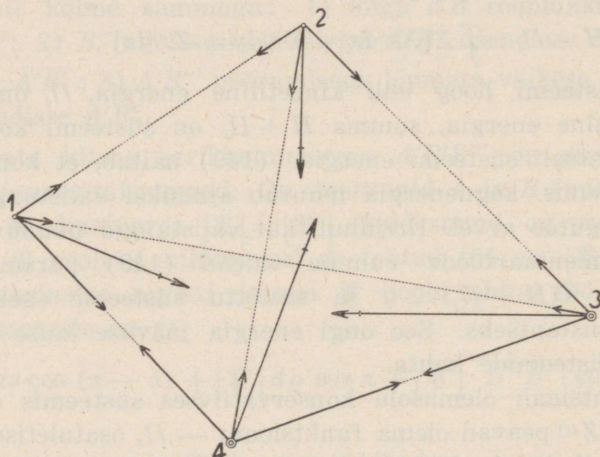
Moodustame funktsiooni

$$\Pi_i = - \sum_{\mu, \nu} \kappa \frac{m_\mu m_\nu}{q_{\mu\nu}} = - \kappa \frac{m_1 m_2}{q_{12}} - \kappa \frac{m_1 m_3}{q_{13}} - \dots - \kappa \frac{m_2 m_3}{q_{23}} - \dots,$$

kus κ tähendab gravitatsioonikonstanti (C-G-S ühikuis $\kappa = 6,685 \cdot 10^{-8}$) ja summa haarab kõik võimalikud punktipaari kombinatsioonid. Siis mistahes kindla μ puhul

$$\frac{\delta \Pi_i}{\delta x_\mu} = + \kappa m_\mu \sum_\nu \frac{m_\nu (x_\mu - x_\nu)}{\varrho_{\mu\nu}^3},$$

kus nüüd μ on konstant ja summeerimine haarab vaid kõiki ν väärtusi, välja arvatud $\nu = \mu$. Lugeja kontrolligu seda diferentsimise tulemust ja veendugu veel selles, et pole oluline, kas $\varrho_{\mu\nu}^2$ avaldises lähtuda kujust $(x_\mu - x_\nu)^2 + \dots$ või aga kujust $(x_\nu - x_\mu)^2 + \dots$.



83. joonis.

Teiselt poolt punkti nr. μ juures punktist nr. ν tingitud gravitatsioonitug Newton'i kohaselt peab omama projektsioone

$$X_{\mu\nu} = \frac{\kappa m_\mu m_\nu}{\varrho_{\mu\nu}^2} \cdot \frac{x_\nu - x_\mu}{\varrho_{\mu\nu}}, \dots$$

Siin teine tegur paremat kätt tähendab vastava tungivektori suunakoosinust. Liites punkti nr. μ juures rakendatud kõik säärased tungid vastavalt kõikidele arvesse tulevatele ν väärtustele, saamegi nr. μ juures mõjuva sisetungi resultandi projekt-

sioonid. On kohe näha, et selle resultandi projektsioonid ongi $-\frac{\partial \Pi_i}{\partial x_\mu}, \dots$. Järelikult antud juhul tõepoolest ülalkirjutatud funktsioon Π_i kujutab just süsteemi potentsiaali.

On kõnealune süsteem välismõjudest täiesti eraldatud, nagu seda näiteks tohib oletada päikesesüsteemi puhul, mis lähematest kinnistähedest asetseb väga suurel kaugusel, siis energia jäävuse lause annab kohe esimese integraali (energia integraali):

$$\sum_{\mu} \frac{m_{\mu} v_{\mu}^2}{2} + \sum_{\mu\nu} \kappa \frac{m_{\mu} m_{\nu}}{r_{\mu\nu}} = C.$$

Peale selle, impulsilause põhjal, peab süsteemi massikese siis liikuma ühtlase kiirusega sirges joones, mis projektsioonides annab veel 3 esimest integraali. Samuti peab kehtima pindalade lause kõigis kolmes koordinaatasapinnas, sest välistungid puuduvad. Seega on võimalik püstitada süsteemi kohta 7 üldist seadust, millede väljendustes juba koordinaatide teised tuletised enam ei esine, vaid esinevad üksnes koordinaadid ise ja nende esimesed tuletised. Kahest punktist koosneva süsteemi puhul („kahe keha probleem“) lahendamist saab kergesti lõpuni viia. Kuid juba kolme punkti puhul („kolme keha probleem“) kerkivad põhimõttelist laadi suured matemaatilised raskused, nagu seda on näidanud sellekohased uurimised.

Süsteemis kehtivaid üldseoseid (energia jäävuse lause, impulsilause kolme koordinaattelje suunas, impulssmomentide lause kolme koordinaattelje suunas) on arvult 7. Neid kombineerides saame vaid näiliselt uusi järeldusi, sisuliselt peituvad need järeldused juba mainitud seitsmes põhilause. Ainult uute integratsioonide abil saaks tungida oluliselt uute asjaolude avastamiseni.

Peatume veel mõningate küsimuste juures, mis on seotud üldjuhul konservatiivse süsteemi energia mõistega.

Potentsiaalset energiat kujutav funktsioon Π_i on määratud vaid teatava konstandini, sest säärane lisakonstant osatuletsi ei mõjusta. Erijuhtudel, kui funktsioonil Π_i leidub miinimum, võib osutada otstarbekohaseks seda lisakonstanti valida nõnda, et

potentsiaali minimaalväärtuseks oleks null. Ülalkäsiteldud näites (gravitatsioonile alluv punktisüsteem) miinimumi ei leidu, sest Π_i võib seal omada kuitahes suuri negatiivseid väärtusi, kui ainult kaugused ρ_{uv} on võetud küllalt väikestena; küll aga leidub siin maksimum, nimelt 0, mis vastab olukorrale, kus kõik punktid on valgunud lõpmatusse laiali.

On potentsiaali miinimumiks valitud null, siis süsteemi koguerenergia $E = H + \Pi_i$ ei saa kunagi olla negatiivne, sest H pole negatiivne. Säärane süsteem kaotab oma koguerenergia täielikult, kui on saavutatud olukord (konfiguratsioon), mis vastab potentsiaali miinimumile $\Pi_i = 0$ ja ühtlasi kõikide punktide kiirused seejuures on nullid. (150) alusel välisungide poolt tehtud kogutöö peab olema negatiivne, kui süsteem on mingist olukorrast, kus E ei olnud null, üle viidud olukorda $E = 0$. Välisungid tekivad väliskehade mõjul; nende väliskehade juures on reaktsiooni seaduse kohaselt rakendatud neile välisungidele vastasuunalised tungid. Kui väliskehad on alalises kontaktis süsteemi punktidega, tehes seega nende nihkumisi kaasa, siis need reaktsioonitungid peavad seal tegema vastasmärgilise, s. t. positiivse töö, s. t.

süsteem kaotab oma energiat, tehes väliskehade juures positiivset tööd, s. t. andes oma energia tagavara väliskehadele üle.

Energia eriliike võib siis (eeldusel, et potentsiaalil leidub miinimum) defineerida järgnevalt:

Süsteemi koguerenergia E võrdub tööga, mida süsteem on suuteline tegema väliskehade juures, kui seejuures süsteemi punktid jõuavad asendisse, kus potentsiaal on minimaalne ja ühtlasi süsteemi kõik punktid kaotavad oma kiirused täielikult.

Süsteemi kineetiline energia H võrdub tööga, mida süsteem on suuteline tegema väliskehade juures, kui töö tegemiseks kasutada vaid süsteemi punktide kiirusi, mitte aga muuta asendit.

Süsteemi potentsiaalenergia Π_i võrdub tööga, mida süsteem on suuteline tegema väliskehade juures, kui töö tegemisel punktide kiirusi säilitada, lasta aga punktide asendit nõnda muuta, et potentsiaal langeks miinimumini.

Välistunge omakorda kutsutakse „ergutavateks“, kui nende mõjul süsteemi koguenergia E kasvab, ning „takistavateks“, kui nende mõjul süsteemi koguenergia kahaneb.

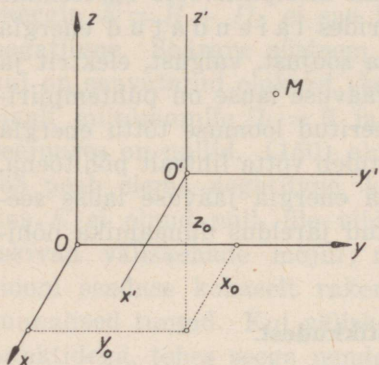
Olgu veel tähendatud, et mittekonserveerivaid süsteeme kutsutakse *dissipatiivseteks*. Dissipatiivse süsteemiga on näiteks alati tegemist juhtudel, kus arvesse tuleb „sisehõõrdumine“. Termodünaamika püstitab ka dissipatiivsete süsteemide kohta energia jäävuse lause, opereerides *laieendatud* energia mõistega, mis haarab energia alla ka soojust, valgust, elektrit ja muud. Säärane üldistatud energia jäävuse lause on puhtempiirilise iseloomuga. Nähtuste komplitseeritud loomuse tõttu energia jäävust dissipatiivsetes süsteemides tuleb võtta lihtsalt põhitõena, aksioomina. Klassikalise mehaanika energia jäävuse lause seevastu on matemaatiliselt dedutseeritud järeldus dünaamika põhi-võrranditest.

§ 40. Inertsteljestikkudest.

Seni on meil kasutamisel olnud dünaamika lausete püstitamisel alati vaid „absoluutselt paigalseisev“ teljestik; hoolause puhul näiteks olid kiirused ja nihked mõeldud ikka absoluutselt paigalseisvate telgede suhtes. Nagu juba varemini mainitud, peitub absoluutse paigalseisu kujutelmas teatav mõtteline raskus, mida saab kõrvaldada vaid siis, kui eksplitsiitselt kokku leppida, missugust teljestikku nimelt tuleb lugeda absoluutselt paigalseisvaks. Lähem süvenemine asjasse selgitab aga, et kujutelm „absoluutsest paigalseisust“ on klassikalises mehaanikas üsna kõrvalise tähtsusega: leidub lõpmata suur hulk üksteise suhtes liikuvaid teljestikke, kus dünaamika seadused osutuvad täpselt samasugusteks, nagu „absoluutselt paigalseisvagi“ teljestiku puhul.

Olgu hetkeks mõni teljestik tunnistatud absoluutselt paigalseisvaks sel põhjusel, et dünaamika üldseadused seal osutuvad paikapidavateks. Olgu peale selle veel antud üks teine teljestik, mis esimese suhtes liigub, kuid ilma rotatsioonita, nii et selle teise teljestiku koordinaatteljed omavad konstantseid suundi paigalseisva koordinaadistiku suhtes. Lihtsuse mõttes tohib siis ikka

veel oletada, et selle teise, liikuva teljestiku koordinaatteljed x' , y' , z' on vastavalt paralleelsed paigalseisva teljestiku koordinaattelgedega x , y , z . Liikuva alguspunkti O' koordinaadid paigalseisvate telgede suhtes olgu x_0 , y_0 , z_0 ; need suurused on aja t funktsioonid. 84. joonise kohaselt on siis kehtivad koordinaatide teisendusvalemid:



84. joonis.

$$x = x' + x_0, \quad y = y' + y_0, \\ z = z' + z_0.$$

Neist järgneb:

$$\ddot{x} = \ddot{x}' + \ddot{x}_0, \quad \ddot{y} = \ddot{y}' + \ddot{y}_0, \\ \ddot{z} = \ddot{z}' + \ddot{z}_0.$$

Kui aga nüüd veel x_0 , y_0 , z_0 peaksid olema aja t lineaarsed funktsioonid

$$x_0 = at + a, \quad y_0 = \beta t + b, \\ z_0 = \gamma t + c,$$

siis teised tuletised \ddot{x}_0 , \ddot{y}_0 , \ddot{z}_0 muutuvad nulliks ja seega

$$\ddot{x} = \ddot{x}', \quad \ddot{y} = \ddot{y}', \quad \ddot{z} = \ddot{z}'. \quad (151)$$

Säärasel korral $\dot{x}_0 = \alpha$, $\dot{y}_0 = \beta$, $\dot{z}_0 = \gamma$ ning O' liigub järelilikult ühtlase kiirusega $v = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$ sirges joones.

On aga (151) täidetud, siis nende põhivõrrandite asemel, mis kehtivad absoluutselt paigalseisvate telgede suhtes,

$$m\ddot{x} = X, \quad m\ddot{y} = Y, \quad m\ddot{z} = Z,$$

võib põhivõrranditena kirjutada ka

$$m\ddot{x}' = X, \quad m\ddot{y}' = Y, \quad m\ddot{z}' = Z,$$

sest mass m jääb endiseks ja tungide projektsioonid X , Y , Z liikuvatele telgedele on samad, mis nad olid paigalseisvatele telgedele (telgede paralleelsuse tõttu). Liikuva süsteemi kiirus v ei avalda seega põhivõrrandite kujule mingit mõju, — endiste

koordinaatide asemel tuleb ainult võtta uued koordinaadid, see on kõik.

On aga dünaamika põhivõrrandid mõlemas teljestikus samad, siis ka kõik neist põhivõrranditest integrimise teel tuletatavad järeldused peavad osutama samasteks, selle ainsa vahega, et endiste koordinaatide asemele tulevad uued koordinaadid ja meelevaldsete integrimiskonstantide väärtused tulevad määramisele igas teljestikus omaette. See tähendab aga, et mõlemas käsitusviisis dünaamika põhiseaduste üldsõnastus peab osutama samaks. Seda tõsiasja kutsutakse klassikalise mehaanika relatiivsuspriprintsipiibiks; teda võib sõnastada ka järgmiselt:

Kõik teljestikud, mis liiguvad absoluutselt paigalseisva suhtes ilma rotatsioonita ühtlase meelevaldse kiirusega sirges joones, on dünaamika seisukohalt samaväärsed.

Iga sellesse liiki kuuluv teljestik liigub aga ka iga teise sama liiki kuuluva teljestiku suhtes rotatsioonivabalt sirges joones ühtlase kiirusega, s. t. translatoorselt ja ühtlase kiirusega. Vaatluste najal, jälgides kehade mehaanilist käitumist, pole seega mingil viisil võimalik otsustada, kas kasutatud teljestik on absoluutselt paigalseisev või aga translatoorselt ühtlase kiirusega liikuv. See näitab aga, et kujutelm absoluutselt paigalseisvast teljestikust osutub mehaanikas õieti ülearuseks, sest säärane teljestik pole mitte millegagi eriti eesõigustatud teiste, translatoorselt ja ühtlase kiirusega liikuvate teljestikkudega võrreldes. Või ka teisiti: iga translatoorselt ühtlase kiirusega liikuv teljestik laseb end kasutada „absoluutselt paigalseisva“ teljestiku osas. Toetudes tõsiasjale, et säärases teljestikus peab inertsi seadus kehtima Newton'i poolt sõnastatud kujul, kutsutakse translatoorselt ja ühtlase kiirusega sirges joones liikuvaid teljestikke uue ajal ka **inertsiaal teljestikkudeks**.

Olukorra õigeaks mõistmiseks tuleb silmas pidada, et samaväärsus tähendab siin ikka vaid üldseaduste, nagu inertsi seaduse, impulsilause, pindalalause, hoolause jne. kehtivust, mitte aga seda, et ka näiteks kiirused peavad olema arvuliselt või suuna poolest samad: meelevaldsete konstantide väärtused võivad olla

vägagi erinevad, mis juba võib mõjustada kiiruste projektsioone ja seega kiiruste suurust ja suunda, rääkimata juba erinevustest koordinaatide eneste numbrilistes väärtustes; ainult kiirused on kõikide võimalikkude inertsiaalsüsteemide puhul alati samad, sest nende avaldistes meelevaldseid konstante veel ei esine.

Klassikalise mehaanika seisukohalt peaks näiteks valgusekiirus kahe erineva inertsiaalsüsteemi puhul olema samuti erinev. Suureks üllatuseks teadlastele oli seetõttu möödunud sajandi viimasel veerandil teostatud sellekohaste katsete negatiivne tulemus: selgus, et valgusekiirus kõikides katsetatud inertsiaalsüsteemides osutus samaks ($c = 3 \cdot 10^{10}$ [cm sec⁻¹]). Selle, klassikalise mehaanika seisukohalt paradoksaalse tulemuse põhjalik matemaatiline uurimine viiski käesoleva sajandi alguses uue, „relativistliku mehaanika“ loomisele. Selgus, et valgusekiiruse c sõltumatus inertsiaalteljestiku valikust (teised kiirused on ikkagi mõjustatud!) tõstab esile elektriliste nähtuste fundamentaalse tähtsuse loodussündmustikus ja nõuab sissejuurdunud põhivaadete põhjalikku revideerimist: ajavahemikud, pikkusvahemikud, massid ja muud mõisted, mida klassikalises Newtoni mehaanikas peetakse koordinaadistikust sõltumatuks, omavad Einsteini relativistliku mehaanika seisukohalt igas koordinaatteljestikus omaette tähendust. Selle tagajärjel üleminek ühest inertsiaalteljestikust teise juurde relativistliku mehaanika alusel peaks toimuma komplitseeritumate valemite põhjal, mida tuntakse „Lorentz'i teisenduse“ nime all; mainitud üleminekuvalemite puhul valgusekiirus c osutub kõikides inertsiaalteljestikkudes üheks ja samaks. Einsteini seisukohalt relatiivsuspriintiip looduses väljendub selles, et ei tohi leiduda ühtki katselist võimalust absoluutse paigalseisu eraldamiseks translatoorsest ühtlasest sirgjoonelisest liikumisest. Eriti peab valgusekiirus juba põhimõtteliselt osutama kõikides inertsiaalteljestikkudes samaks, vastasel korral avaneks just võimalus ühe inertsiaalteljestiku eelistamiseks teistega võrreldes.

Kõik senised kogemused kinnitavad, et uus „relativistlik“ mehaanika haarab loodussündmustikku koguulatuses paremini,

kui seda suudab teha Newtoni klassikaline mehaanika. Valemite kuju poolest on aga Newtoni mehaanika tunduvalt lihtsam ja seetõttu eelistatavam igal pool, kus pole ülemäära suur täpsus nõutav. Inseneriteadustes tuleb praegusel ajal tegelikult arvesse ikkagi vaid klassikaline Newtoni mehaanika.

Olgu siinkohal tähendatud, et nimetus „relativistlik“ mehaanika ei ole päris tabavalt valitud, sest ka Newtoni mehaanika on, mis vähemalt puutub inertsiaalteljestikkudesse, nagu ülal nägime, relativistlik. Vahe seisab peamiselt selles, et mõned mõisted, mis Newtoni järgi peaksid olema absoluutse loomusega, nagu näiteks aeg, mass, osutuvad Einsteini järgi relativiseerituiks; inertsiaalteljestikkude samaväärsus Einsteini uue mehaanika kohaselt haarab ka elektrilisi nähtusi, Newtoni järgi aga mitte.

Kui mõni juhuslikult valitud teljestik näitab inertsiaalteljestiku suhtes rotatsiooni või üldiselt kiirendust, siis see ilmneb Newtoni vaatekohalt selles, et nähtavale tulevad „näilised“ lisatungid (näiteks tsentrifugaaltung). Einsteini üldistatud relatiivsusteooria on ka selles osas uurijate silmaringi tunduvalt laiendanud, näidates tungi mõiste sügava analüüsi najal, et vahetegevmine „näiliste“ ja „reaalsete“ tungide vahel saab olla vaid kunstliku iseloomuga, olles loodusele endale nähtavasti võõras. Tuleb aga tähendada, et süvenemine sellesse „üldistatud“ relatiivsusteooriasse eeldab üsna suuri matemaatilisi eelteadmisi, kuna seevastu aga kitsam relatiivsusteooria, kus kõne alla tuleb vaid inertsiaalteljestikkude samaväärsus, on kättesaadav igale normaalharidusega insenerile.

Piirdudes nende üldlauseliste märkustega, jätame lugeja enda hooleks huvi korral lähemalt tutvuda relativistliku mehaanika süsteemiga erialalise kirjanduse najal.

§ 41. D'Alembert'i printsiip.

Kõrvuti inertsiaalteljestikkudega dünaamikas omavad erilist tähtsust veel teist liiki translatoorselt liikuvad teljestikud. Asja selgitamine toimub kõige hõlpsamini nn. d'Alembert'i printsiibi kaudu.

$$m\ddot{r} = \mathfrak{F}$$

kujul

$$\mathfrak{F} - m\ddot{r} = 0, \quad (152)$$

näeme, et ta väljendab kahe vektori, nimelt \mathfrak{F} ja $-m\ddot{r}$ staatilise tasakaalu tingimust. Seejuures \mathfrak{F} tähendab vastava materiaalse punkti juures „tegelikult“ rakendatud välis- ja sisetungide resultanttungi. Vektorit $-m\ddot{r}$, mis on vastassuunaline selle materiaalse punkti kiirendusvektoriga ja suuruse poolest selle kiirendusvektori m -kordne, kutsutakse vastavas punktis mõjuvaks *inertstungiks*. Klassikalise mehaanika seisukohalt see inertstung kuulub „näiliste“ tungide hulka; tema olemasolu on tingitud puhtkinemaatilisest olukorrast, nimelt materiaalse punkti kiirendusest, — kaob viimane, siis kaob ka inertstung.

(152) väidab, et igal hetkel **tegelikult rakendatud tungid tasakaalustavad inertstungi**. Seda põhimõtet tuntaksegi d'Alembert'i printsibi nime all. Tema võimaldab dünaamika probleeme käsitleda staatikast tuntud tulemuste najal, sest staatika ongi õpetus vektorite tasakaalust. Kirjutades (152) süsteemi kõikide punktide jaoks, saame süsteemi tuntud tasakaalu tingimuse, kusjuures aga tungidena on arvestatud välistungid, sisetungid ja inertstungid. Kõik loogilised järeldused tasakaalu tuntud tingimustest kanduvad seega *eo ipso* üle dünaamikasse, kui kõrvuti teistega arvestada ka inertstunge.

Staatika põhiseoste loogiliseks järelduseks on näiteks teatavasti nõue, et välistungide kompleks peab olema samaväärne nulliga, s. t. kaduma peab selle kompleksi üldine resultant ja ka resulteeruv moment. Antud juhul välistungide hulka tuleb lugeda kõiki tunge, peale sisetungide, — seega ka inertstungid kuuluvad sel puhul välistungide hulka. Üldise resultandi muutumine nulliks tähendab aga, et

$$\Sigma X^{(e)} - \Sigma m\ddot{x} = 0$$

$$\Sigma Y^{(e)} - \Sigma m\ddot{y} = 0$$

$$\Sigma Z^{(e)} - \Sigma m\ddot{z} = 0,$$

mis omakorda annab tuntud viisil impulsilause (massikeskme-
lause).

Resulteeruva momendi kadumine tähendab

$$\Sigma(yZ^{(e)} - zY^{(e)}) - \Sigma(x m\ddot{y} - y m\ddot{x}) = 0$$

$$\Sigma(zX^{(e)} - xZ^{(e)}) - \Sigma(z m\ddot{x} - x m\ddot{z}) = 0$$

$$\Sigma(xY^{(e)} - yX^{(e)}) - \Sigma(x m\ddot{y} - y m\ddot{x}) = 0,$$

mis kergesti taandub impulssmomendi lausele. Seega impulsilause ja impulssmomendilause otseselt on püstitatavad d'Alembert'i printsiibi najal.

Kui süsteemi üksikpunktide vahel valitsevad mingisugused seosed, nagu näiteks erijuhul, kus süsteemi punktid koos moodustavad kindla keha, mille punktidevahelised kaugused on invariantid, siis d'Alembert'i printsiibi rakendamisel tuleb toetuda säärasele järeldusele, kus seosed punktide vahel on juba arvesse võetud. Näiteks on stratikast teada z -telje külge kinnitatud kindla keha tasakaalu tingimus: välistungide resulteeruv moment z -telje suhtes peab olema null. D'Alembert'i printsiibi kasutamisel tuleb seejuures välistungide hulka võtta ka inertstunge. Inertstungide kompleksi resulteeruva momendi määramine võib toimuda järgmisil kaalutlusil: et trajektoorid on ringid ümber z -telje, siis kiirenduste komponendid normaalide sihis langevad nende ringide raadiustele; et viimased lõikavad z -telge, siis need komponendid momente z -telje suhtes ei saa anda. Jäävad ainult puutekiirendustest tingitud inertstungide komponentide momendid. On ω nurkkiirus, m punkti mass, r tema kaugus z -teljest, v tema skalaarne kiirus, siis puutekiirendus on $\dot{v} = r\dot{\omega}$, inertstungi puutekomponent seega $-mr\dot{\omega}$ ja tema moment z -telje suhtes järelikult $-mr^2\dot{\omega}$. Inertstungide resulteeruv moment on seetõttu $-\Sigma mr^2\dot{\omega} = -\dot{\omega}\Sigma mr^2 = -\dot{\omega}J$, kus J tähendab inertsmomenti z -telje suhtes. D'Alembert'i printsiip annab kõige selle tagajärjel tingimuse

$$\Sigma(xY^{(e)} - yX^{(e)}) - \dot{\omega}J = 0,$$

mis peab reguleerima kindla keha roteerumist z -telje ümber.

Sama tingimuse leidsime juba varemini hoopis teisel teel [§ 33, valem (131)].

Kui üldjuhul mingi materiaalne punkt massiga m liigub kõverjoonelisel trajektoorigil, siis tema kiirendus § 5 kohaselt jaguneb normaalkiirenduseks ja puutekiirenduseks; vastavalt sellele inertstung jaguneb komponentideks — $m\mathbf{u}_N$ (normaali sihis, kõveruskeskkohast eemale suunatud) ja — $m\mathbf{u}_T$ (puutuja sihis, kiirendusega vastassuunaline). Esimene neist inertstungide komponentidest leiab dünaamika küsimustes erilist tähelepanu; teda kutsutakse *t s e n t r i f u g a a l t u n g i k s* kitsamas mõttes.

Selle tsentrifugaaltungi suurus on $m \frac{v^2}{\rho}$, kui v on hetkeline kiirus ja ρ on kõverusraadius. Inertstungina tsentrifugaaltung kuulub „näiliste“ tungide hulka; ta on konstateeritav vaid niikaua, kui on olemas „tegelikud“ tungid (tsentripetaaltung), mis kisuvad trajektoori kõveraks. Tegelikult tsentripetaaltungi kadumisel kaob silmapilkselt ka näiline tsentrifugaaltung.

Asja võib kujutella ka nõnda, et tsentripetaaltung mingite mehaaniliste seoste kaudu mõjub liikuvale materiaalsele punktile, sundides teda kõrvale kalduma sirgest joonest; tsentrifugaaltung ilmneb sel puhul punkti poolt seostele avaldatud reaktsioonina. On seos realiseeritud näiteks niidi abil, siis tsentrifugaaltung tõmbab selle niidi pingule; pinge kaob, kui niit katkeb, s. t. kui tsentripetaaltung kaob. On rongi rattad juhitud raudtee käänakul rööbaste kaudu (tsentripetaaltung!), siis rööbastele omakorda mõjub rataste poolt avaldatud reaktsioonina tsentrifugaaltung. Vagunis istuv reisija on seotud raudteega hõõrdetungide abil, mis on rakendatud neis kohtades, kus reisija on vaguniga kontaktis. Käänaku kohal ilmnev tsentrifugaaltung püüab reisijat neist kohtadest ära kiskuda, s. t. seost katkestada.

Praeguvaadeldud inertstung — $m\mathbf{u}_N$ on tsentrifugaaltung kitsamas mõttes. Laiemas mõttes tuleb tsentrifugaaltungi all mõista kogu inertstungi — $m\mathbf{u}$. Veel laiema mõtte omandab tsentrifugaaltung, kui asuda relatiivse liikumise vaatlemisele liikuva teljestiku suhtes.

Coriolis'e lause põhjal (§ 16) absoluutne kiirendus u_a koosneb kolmest komponendist, nimelt kaasaminekukiirendusest u_k , relatiivsest kiirendusest u_r ja Coriolis'e kiirendusest u_C . Korrutades teguriga — m järeldame:

$$-mu_a = -mu_k - mu_r - mu_C.$$

Dünaamika põhivõrrandite järgi on aga $mu_a = \mathfrak{F}$, kui \mathfrak{F} on punktile mõjuvate tegelikkude tungide resultanttung. Selle põhjal järgneb:

$$mu_r = \mathfrak{F} - mu_k - mu_C. \quad (153)$$

Seda seost (153) võib lugeda dünaamika põhivõrrandiks relatiivse liikumise puhul, s. t. juhul, kui teljestik, mille suhtes liikumist jälgitakse, ise liigub mingil meelevaldsel viisil. Nagu nähtub, tuleb säärasel relatiivsel liikumisel arvestada mitte üksnes tegelikkude tungi \mathfrak{F} , vaid veel kaht (näilist) lisatungi — mu_k ja — mu_C . Prantsuse autorid nimetavad neid lisatunge vastavalt „esimeseks“ ja „teiseks“ tsentrifugaaltungiks. Teine tsentrifugaaltung — mu_C (ka „Coriolis'e tung“) tingibki vabal liikumisel maapinna suhtes kõrvalekaldumist paremale poole põhjapoolkeral ja vasakule lõunapoolkeral (§ 17).

Teine tsentrifugaaltung kaob, kui teljestik ei roteeru, s. t. kui teljestik liigub vaid translatoorselt, kuigi võib-olla mitteühtlaselt ja mitte sirges joones. Translatoorselt (rotatsiooni-vabalt) liikuva teljestiku puhul on seega

$$mu_r = \mathfrak{F} - mu_k. \quad (154)$$

Kaasaminekukiirenduse määrab sel juhul liikuva teljestiku mistahes punkti, näiteks tema alguspunkti kiirendus. Liigub see alguspunkt veel ühtlase kiirusega sirges joones, siis $u_k = 0$ ja

$$mu_r = \mathfrak{F}. \quad (155)$$

Siin on aga nüüd juba tegemist inertsiaalsteljestikuga ja (155) kinnitab veel kord eelmise paragraafi tulemusi, mille järgi kõik inertsiaalsteljestikud pidid olema dünaamika seisukohalt samaväärsed.

Liigub teljestiku algus süsteemi mõne punktiga translatoorselt kaasa, siis u_k on just viimase punkti absoluutne kiirendus. Vektor — mu_k valemis (154) on siis mainitud punktis valitsev inertstung paigalseisvaks loetud teljestiku seisukohalt. Liigub näiteks algus ühtlase kiirusega ringjoonel, siis valemis (154) lisatung ühtib, nagu kohe näha, varemini defineeritud tsentrifugaaltungiga kitsamas mõttes.

Olgu veel mainitud, et teine tsentrifugaaltung peab alati osutama nulliks ka siis, kui materiaalse punkti relatiivne kiirus on null, s. t. kui ta püsib liikuva teljestiku suhtes paigal. Säärares olukorras tuleb seega jälle arvesse vaid esimene tsentrifugaaltung.

D'Alembert'i printsiip näitab, et dünaamika käsitlemisel on võimalik lähtuda staatika kujutelmadest. Ümberpöörduvalt on ka võimalik staatika ülesehitamisel lähtuda dünaamika kujutelmadest, nagu seda näitab võimalikkude nihutuste printsiip.

§ 42. Massikeskmega translatoorselt liikuv teljestik.

Olgu süsteemi liikumise jälgimiseks kasutatud translatoorselt liikuv teljestik, mille alguspunkt asetseb kogu aeg süsteemi massikeskmes. Rotatsiooni puudumise tõttu siis Coriolis'e tung ei esine ja relatiivset liikumist säärase $x'-y'-z'$ -teljestiku suhtes määravad põhivõrrandid (154). Kirjutades relatiivse kiirenduse sümboli u' asemel nüüd u' , saame seega

$$mu' = \mathfrak{F} - mu_k. \quad (156)$$

Siin u_k all tuleb mõista meie liikuva teljestiku mingi meelevaldse punkti kiirendust paigalseisvate telgede (inertsiaalteljestiku) suhtes; selleks punktiks võib valida liikuva teljestiku alguspunkti, s. t. süsteemi massikeskme C . Seega u_k tähendab süsteemi massikeskme absoluutset kiirendust.

Impulssmomendi lause selles liikuvast teljestikus erineb, nagu näha, tavalisest impulsilausest inertsiaalteljestikus vaid selle poolest, et välistungide hulka tuleb lugeda ka kõik näilised tungid — mu_k , kusjuures u_k ise on süsteemi kõikides materiaalsetes

punktides sama. Olgu \mathbf{r}' materiaalse punkti kohavektor liikuva teljestiku suhtes. Vektorvõrrandi (156) mõlemaid pooli vektoriaalselt korrutades kohavektoriga \mathbf{r}' ning tulemusi summeerides järeldame:

$$\begin{aligned}\Sigma(\mathbf{r}' \times m\mathbf{u}') &= \Sigma[\mathbf{r}' \times (\mathfrak{P} - m\mathbf{u}_k)] \\ &= \Sigma(\mathbf{r}' \times \mathfrak{P}) - \Sigma(\mathbf{r}' \times m\mathbf{u}_k).\end{aligned}$$

Siin summas $\Sigma(\mathbf{r}' \times \mathfrak{P})$ tulevad teatavasti arvesse vaid välis-
tungid $\mathfrak{P}^{(e)}$, sest sisetungid, olles paarikaupa võrdsed ja vastasuunalised samal kandesirgel, annavad resulteeruva momendi null. Teine liidetav $\Sigma(\mathbf{r}' \times m\mathbf{u}_k)$ kaob, sest

$$\begin{aligned}\Sigma(\mathbf{r}' \times m\mathbf{u}_k) &= \Sigma(m\mathbf{r}' \times \mathbf{u}_k) \\ &= (\Sigma m\mathbf{r}') \times \mathbf{u}_k \\ &= 0 \times \mathbf{u}_k \\ &= 0;\end{aligned}$$

$\Sigma m\mathbf{r}'$ on nimelt null seetõttu, et kohavektorite \mathbf{r}' ühiseks alguseks on süsteemi massikesse ja $\Sigma m\mathbf{r}'$ projektsioonid liikuvatele telgedele on vastavalt $\Sigma m x'$, $\Sigma m y'$, $\Sigma m z'$, tähendab, massikeskme koordinaatide ξ' , η' , ζ' avaldiste lugejad, seega nullid, sest $\xi' = \eta' = \zeta' = 0$.

Niisiis

$$\Sigma(\mathbf{r}' \times m\mathbf{u}') = \Sigma(\mathbf{r}' \times \mathfrak{P}^{(e)}). \quad (157)$$

Siin seisab paremat kätt välis-
tungide kompleksi resulteeruv moment süsteemi massikeskmes. Vasakul pool seisab samas massikeskmes resulteeruva impulssmomendi tuletis, kui impulsid määrata liikuvate telgede suhtes. Tõepoolest, relatiivne impulss \mathfrak{p}' liikuva teljestiku suhtes on $m\mathbf{r}'$, seega relatiivne impulssmoment on $\mathbf{r}' \times m\mathbf{r}'$ ja viimase tuletis on

$$(\ddot{\mathbf{r}}' \times m\mathbf{r}') + (\mathbf{r}' \times m\ddot{\mathbf{r}}') = 0 + (\mathbf{r}' \times m\mathbf{u}').$$

Relatiivne kiirendus \mathbf{u}' on nimelt $\ddot{\mathbf{r}}'$ ning vektorid \mathbf{r}' ja $m\mathbf{r}'$ on omavahel paralleelsed, mille tõttu nende vektoriaalne korrutis peab osutama nulliks.

Seos (157) väljendab seega lauset:

Koos massikeskmega translatoorselt liikuva teljestiku puhul on massikeskmes võetud relatiivse impulssmomendi tuletis võrdne välisrõhete resulteeruva momendiga samas massikeskmes.

Lugejal endal olgu soovitatud selgusele jõuda selle kohta, miks lause ei kehti enam juhul, kui teljestik, mille suhtes relatiivset impulssmomenti määratakse, omab rotatsiooni.

Peatume nüüd hoolause juures relatiivse liikumise puhul sama, koos massikeskmega translatoorselt liikuva teljestiku suhtes.

Korrutades võrrandi (156) mõlemaid pooli skalaarselt relatiivse kiirusvektoriga \mathbf{r}' ja summeerides leiame:

$$\begin{aligned} \Sigma(m\mathbf{u}', \dot{\mathbf{r}}') &= \Sigma(\mathfrak{P}, \dot{\mathbf{r}}') - \Sigma(m\mathbf{u}_k, \dot{\mathbf{r}}') \\ &= \Sigma(\mathfrak{P}, \dot{\mathbf{r}}') - \Sigma(\mathbf{u}_k, m\dot{\mathbf{r}}') \\ &= \Sigma(\mathfrak{P}, \dot{\mathbf{r}}') - (\mathbf{u}_k, \Sigma m\dot{\mathbf{r}}') \\ &= \Sigma(\mathfrak{P}, \dot{\mathbf{r}}') - (\mathbf{u}_k, 0) \\ &= \Sigma(\mathfrak{P}, \dot{\mathbf{r}}') ; \end{aligned}$$

$\Sigma m\dot{\mathbf{r}}'$ on nimelt null, sest, nagu varemini tähendatud, juba $\Sigma m\mathbf{r}' = 0$.

Teiselt poolt on $(m\mathbf{u}', \dot{\mathbf{r}}') = (m\ddot{\mathbf{r}}', \dot{\mathbf{r}}') = m(\dot{\mathbf{r}}', \dot{\mathbf{r}}') = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m(\dot{\mathbf{r}}', \dot{\mathbf{r}}') \right]$. Siin esinev relatiivse kiirusvektori $\dot{\mathbf{r}}'$ skalaarne korrutis iseendaga pole aga teatavasti mitte midagi muud, kui selle relatiivse kiirusvektori $\dot{\mathbf{r}}'$ suuruse ruut, seega v'^2 , kui v' tähendab relatiivse kiiruse suurust. Niisiis $(m\mathbf{u}', \dot{\mathbf{r}}')$ on $\frac{d}{dt} \Sigma \frac{1}{2} mv'^2$, tähendab, süsteemi relatiivse hoo tuletis.

$(\mathfrak{P}, \dot{\mathbf{r}}')$ puhul tuleb tungivektorite \mathfrak{P} all mõista nii välisrõhete $\mathfrak{P}^{(e)}$ kui ka sisetõhete $\mathfrak{P}^{(i)}$. Korrutades veel mõlemal pool skalaariga dt , saame

$$\begin{aligned} d\Sigma \frac{1}{2} mv'^2 &= \Sigma(\mathfrak{P}^{(e)}, \dot{\mathbf{r}}' dt) + \Sigma(\mathfrak{P}^{(i)}, \dot{\mathbf{r}}' dt) \\ &= \Sigma(\mathfrak{P}^{(e)}, d\mathbf{r}') + \Sigma(\mathfrak{P}^{(i)}, d\mathbf{r}'), \end{aligned}$$

sest $\dot{\mathbf{r}}' dt$ on relatiivse kohavektori \mathbf{r}' diferentsiaal $d\mathbf{r}'$, tähendab, vastava punkti lõpmata väikese relatiivse nihkumise vektor. Et aga skalaarsed korrutised tungivektorist ja elementaarnihkumisest tähendavad tungi poolt vastaval nihkumisel tehtud tööd, siis järgneb seega lause:

Koos massikeskme ga translatoorselt liikuva teljestiku puhul on süsteemi relatiivse hoo kasv ikkagi võrdne välis- ja sisetungide poolt relatiivsel nihkumisel tehtud kogutööga.

Mainitud relatiivse liikumise puhul järelikult süsteemi hoolause säilitab sama kuju, nagu inertsiaalsteljestikugi puhul.

Olgu nüüd veel \mathbf{r}_k massikeskme kohavektor paigalseisvate telgede suhtes ja \mathbf{r} süsteemi mingisuguse materiaalse punkti absoluutne kohavektor. Siis (85. joonis)

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_k + \mathbf{r}',$$

järelikult

$$d\mathbf{r}' = d\mathbf{r} - d\mathbf{r}_k.$$

Seetõttu on

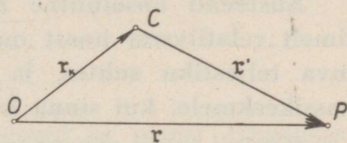
$$\begin{aligned} \Sigma(\mathfrak{F}, d\mathbf{r}') &= \Sigma(\mathfrak{F}, d\mathbf{r}) - \Sigma(\mathfrak{F}, d\mathbf{r}_k) \\ &= d\Sigma \frac{1}{2} m v^2 - \Sigma(\mathfrak{F}, d\mathbf{r}_k), \end{aligned}$$

sest absoluutse hoolause põhjal on $\Sigma(\mathfrak{F}, d\mathbf{r})$ võrdne süsteemi absoluutse hoo $\Sigma \frac{1}{2} m v^2$ diferentsiaaliga. Relatiivse hoolause põhjal on seega:

$$d\Sigma \frac{1}{2} m v'^2 = d\Sigma \frac{1}{2} m v^2 - \Sigma(\mathfrak{F}, d\mathbf{r}_k). \quad (158)$$

Massikeskme lausest (§ 32) on aga teada, et massikese liigub nõnda, nagu oleks sinna koondatud süsteemi kogumass M ja ühtlasi tema juures rakendatud kõik tungid \mathfrak{F} (sisetungid hävivad seejuures küll vastastikku, kuid see pole antud juhul oluline). On V selle massikeskme absoluutse kiiruse suurus, siis punkti dünaamika hoolause põhjal peab olema

$$d\left(\frac{1}{2} M V^2\right) = (\Sigma \mathfrak{F}, d\mathbf{r}_k) = \Sigma(\mathfrak{F}, d\mathbf{r}_k).$$



85. joonis.

Asetades seda seosesse (158) järeldame:

$$d\left[\Sigma \frac{1}{2}mv^2 - \Sigma \frac{1}{2}mv'^2 - \frac{1}{2}MV^2\right] = 0,$$

seega

$$\Sigma \frac{1}{2}mv^2 - \Sigma \frac{1}{2}mv'^2 - \frac{1}{2}MV^2 = K,$$

kus integrimiskonstant K ei saa sõltuda muutujate v , v' , V väärtusist. Selle konstandi suuruse määrab kaalutlus, et juhul $V = 0$ kiiruste liitumise lause põhjal peab olema $v' = v$, millest seega kohe järgneb, et $K = 0$. Niisiis:

$$\Sigma \frac{1}{2}mv^2 = \Sigma \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}MV^2. \quad (159)$$

See valem väljendab nn. König'i lauset:

Süsteemi absoluutne hoog koosneb kahest liituvast osast, nimelt relatiivsest hoost massikeskmega koos translatoorselt liikuva teljestiku suhtes, ja absoluutsest hoost, mis oleks omane massikeskmele, kui sinna koondada süsteemi kogumass.

König'i lause rakendamise näitena käsitleme järgmist probleemi:

Massiivne raske rull raadiusega a veereb kaldtasapinda pidi alla; millise aja t möödumisel on ta jõudnud kaldtasapinda pidi pikkuse s võrra edasi ja kui suur on siis rulli translatoorne kiirus?

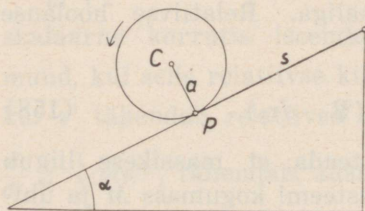
Tasapinna kaldenurk horisondi suhtes olgu α . Rulli inerts-

raadius on $\frac{a}{\sqrt{2}}$, nagu on kerge

leida integrimise teel. Olgu teatavas asendis (86. joonis) rulli massikeske C ära käinud teekonna s kaldpinda pidi, liikumise alg-
hetkest (kus kiirus oli null) arvatu-
na. Olgu sellele asendile vasta-
val silmapilgul t massikeskme
kiiruseks V ja veeremisest tingi-

tud rotatsiooni nurkkiiruseks ω . König'i lause põhjal on siis rulli hoog sel hetkel

$$\frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}M \frac{a^2}{2} \omega^2.$$



86. joonis.

Puudub rulli liikumisel libisemine, siis $V = a\omega$, nagu selgub, kui vaadelda hetkelist poolust P (vt. joonis), mis asetseb kaugusel a kiirust V omavast massikeskmest C . Järelikult rulli koguhoo H on

$$H = \frac{1}{2} Ma^2\omega^2 + \frac{1}{4} Ma^2\omega^2 = \frac{3}{4} Ma^2\omega^2.$$

Rulli raskuse Mg poolt selleks hetkeks tehtud töö on $Mgs \sin \alpha$. Et tegemist on konservatiivse tungiga, siis see töö peabki võrduma hoo H :

$$\frac{3}{4} Ma^2\omega^2 = Mgs \sin \alpha,$$

kust

$$a^2\omega^2 = \frac{4}{3} gs \sin \alpha,$$

ehk

$$V^2 = \frac{4}{3} gs \sin \alpha,$$

sõltumata rulli raadiusest, rulli pikkusest ja massi tihedusest.

Võttes arvesse, et $V = \dot{s}$, leiame siit edasi:

$$dt = \frac{\sqrt{3} ds}{2\sqrt{gs \sin \alpha}},$$

järelikult

$$t = \int_0^s \frac{\sqrt{3} ds}{2\sqrt{gs \sin \alpha}} = \sqrt{3} \sqrt{\frac{s}{g \sin \alpha}}$$

ehk

$$s = \frac{1}{3} gt^2 \sin \alpha.$$

Tulemus näitab, et veeremisel käidud tee on $\frac{2}{3}$ sellest, mis oleks käidud puhtal hõõrdumiseta libisemisel.

Lugeja hooleks jäägu analoogilise probleemi arutamine juhul, kui veerevaks esemeks ei ole enam rull, vaid massiivne kuul.

§ 43. Hõõrdumisega liikumine horisontaalsel laual.

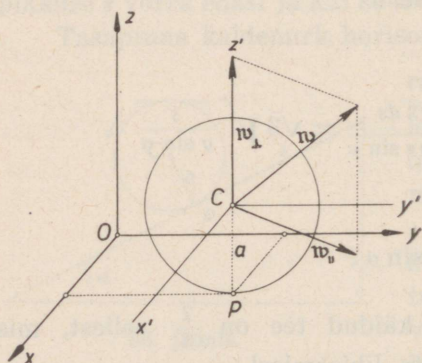
Eelmise paragraafi näites oli hõõrdumine teadlikult jäetud tähele panemata. Sellega on aga seal seotud see mõtteline raskus, et hõõrdumise puudumisel oleks pidanud tekkima õieti libisemine, mitte veeremine. Sellest raskusest võiks üle saada, kujutelles tasapinda ja rulli varustatuna üsna pisikeste, ideaalselt siledate hammastega, mis sunniviisiliselt kindlustaksid veeremist.

Näitena, kuidas arvestada vähemalt libisemisel tekkivat hõõrdetungi, käsitleme nüüd raske kuuli liikumist rõhtsal tasapinnal, võttes arvesse ka libisemise hõõrdeteguri f kuuli ja tasapinna vahel. Konkreetse pildina võiks sel puhul mõelda tõugatud piljardikuulile.

Olgu x - y - z -teljestik paigalseisev ja valitud nõnda, et z -telg on suunatud vertikaalselt ülespoole ning laua tasapind oleks just x - y -tasapinnaks. Massiivse kuuli raadius olgu a , kuuli tsester (massikeske) olgu C , kuuli kontaktikoht tasapinnaga olgu P (87. joonis). Massikeskmega koos translatoorselt liikuv teljestik olgu x' - y' - z' .

Nagu kinemaatikast teada, tuleb kuuli üldisimal liikumisel

arvestada üht rotatsiooni ω ja üht translatsiooni \mathbf{v} . Rotatsioonivektori ω alguspunktiks võib seejuures valida just C , — siis on \mathbf{v} punkti C enda kiirus. Et kuul peab olema alalises kontaktis x - y -tasapinnaga, siis on \mathbf{v} kindlasti paralleelne selle tasapinnaga. On x_0, y_0, a kuuli tsestri C hetkelised koordinaadid, siis \mathbf{v} projektsioonideks (mõlemas tel-



87. joonis.

jestikus) on $\dot{x}_0, \dot{y}_0, 0$. Rotatsiooni ω projektsioonideks olgu p, q, r ning rotatsiooni ω suurus (nurkkiirus) olgu ω .

Rotatsioonivektori ω võime lahutada kaheks komponendiks ω_{\perp} ja ω_{\parallel} , milledest esimene olgu valitud risti x - y -tasapinnaga, teine paralleelne selle tasapinnaga; ω_{\perp} langeb siis z' -teljele, ja ilmsesti peab olema $|\omega_{\perp}| = |\omega| \sin \theta$, $|\omega_{\parallel}| = |\omega| \cos \theta = \sqrt{p^2 + q^2}$. Kuuli üldliikumine koosneb sel korral kolmest elemendist:

- translatoorsest liikumisest v paralleelselt x - y -tasapinnaga;
- roteerumisest ω_{\perp} z' telje ümber, — seda nimetame kuuli „tiirlemiseks“;
- roteerumisest ω_{\parallel} telje ümber, mis on paralleelne x - y -tasapinnaga.

Kuuli mass olgu M . Kuulile mõjuvad järgmised tungid:

- 1) raskustung Mg vertikaalselt allapoole, rakenduskoht C ;
- 2) kaldreaktsiooni normaalkomponent suurusega R_N vertikaalselt ülespoole, rakenduskoht P ;
- 3) kaldreaktsiooni tangentsiaalkomponent (hõõrdetung) projektsioonidega X , Y ja rakenduskoht P ; seda hõõrdetungi loeme vastassuunaliseks kuuli punkti P hetkelise kiirusega.

Massikeskme C kiiruse komponent \dot{z}_0 on alaliselt null, järelikult ka vastav kiirenduse projektsioon \ddot{z}_0 on alaliselt null. Mõjuvate tungide projektsioonid z -teljele annavad summas — $Mg + R_N$. Järelikult, massikeskme lause põhjal,

$$0 = -Mg + R_N, \quad R_N = Mg.$$

Hõõrdetungi suurus on seetõttu $fR_N = fMg$.

Liikuvasteljestikus kehtib impulssmomendilause. Rotatsioonitelje suhtes läbi C impulssmomendi suurus on $J\omega$, kusjuures kuuli tsentraalne inertsmoment $J = \frac{2}{5}Ma^2$. Vektorina on see impulssmoment kera sümmeetria tõttu kindlasti suunatud ω pidi ja nimelt positiivses suunas; selle vektori projektsioon x' -teljele on järelikult $J\omega \cos(\omega, x) = J\omega \frac{p}{\omega} = Jp$. Analoogiliselt on impulssmomendi projektsioonid y' - ja z' -teljele vastavalt Jq ja Jr .

Momendi C kohas annab vaid hõõrdetung ($X, Y, 0$) rakeduskohaga ($0, 0, -a$) liikuvate telgede suhtes. Selle momendi projektsioonid on vastavalt

$$\begin{aligned} 0 \cdot 0 - (-a)Y &= aY, & -aX - 0 \cdot 0 &= -aX, \\ 0 \cdot 0 - 0 \cdot 0 &= 0. \end{aligned}$$

Impulssmomendilause liikuvasteljestikus kõlab seega

$$J\dot{p} = aY, \quad J\dot{q} = -aX, \quad J\dot{r} = 0. \quad (160)$$

Viimane võrrand näitab, et r peab olema konstantne, — tähendab, tiirlemisvektor \mathbf{w}_\perp püsib konstantsena.

Massikeskme lause põhjal on

$$M\ddot{x}_0 = X, \quad M\ddot{y}_0 = Y. \quad (161)$$

Kaks esimest võrrandit (160) annavad, kui neisse veel asetada inertsmomendi avaldis,

$$\frac{2}{5}Ma\dot{p} = Y, \quad \frac{2}{5}Ma\dot{q} = -X.$$

Kasutades veel (161), järeldame siit:

$$\frac{2}{5}a\dot{p} = \ddot{y}_0, \quad \frac{2}{5}a\dot{q} = -\ddot{x}_0,$$

sõltumatult hõõrdetungi kohta tehtavatest hüpoteesidest.

Ühekordsel integrimisel järgneb praegusaadud diferentsiaalvõrranditest:

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 + \frac{2}{5}aq &= A \\ \dot{y}_0 - \frac{2}{5}ap &= B, \end{aligned} \quad (162)$$

kus A ja B on teatavad konstandid.

Vaatleme kuuli punkti Q , mille koordinaatideks liikuvasteljestikus on $x' = 0$, $y' = 0$, $z' = +\frac{2}{5}a$. Kinemaatika seaduste kohaselt selle punkti Q hetkelise kiiruse projektsioonideks on

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 + q\frac{2}{5}a - r \cdot 0 &= \dot{x}_0 + \frac{2}{5}aq = A \\ \dot{y}_0 + r \cdot 0 - p\frac{2}{5}a &= \dot{y}_0 - \frac{2}{5}ap = B \\ \dot{z}_0 + p \cdot 0 - q \cdot 0 &= 0. \end{aligned}$$

See näitab, et konstandid A ja B tähendavad parajasti selle punkti Q kiiruse projektsioonid x' - ja y' -teljele vastavalt, ehk, mis on sama, telgede paralleelsuse tõttu, x - ja y -teljele vastavalt. Punkt Q kuulis endas on muidugi muutlik; igatahes aga järgneb tulemusest (162), et selle hetkelise Q kiirusvektor on konstantne, — selle kiirusvektoriga võib seega iseloomustada kuulile alghetkel antud tõuget, s. t. liikumise algtingimusi.

(162) on sõltumatu hõõrdetungi kohta tehtud hüpoteesidest. Teeme aga nüüd tavalise hüpoteesi, mille järgi hõõrdetung on vastassuunaline kohas P asetseva kuuli punkti kiirusega ning kaob, niipea kui see kiirus osutub nulliks, s. t. niipea kui kuul vaid tiirleb ja veereb, mitte aga enam ei libise.

Punkti P koordinaatideks on $x' = 0$, $y' = 0$, $z' = -a$. Kinemaatika seaduste kohaselt selle punkti P kiiruse projektsioonid on järelikult:

$$\begin{aligned} v_x &= \dot{x}_0 + q(-a) - r \cdot 0 &= \dot{x}_0 - aq \\ v_y &= \dot{y}_0 + r \cdot 0 - p(-a) &= \dot{y}_0 + ap \\ v_z &= \dot{z}_0 + p \cdot 0 - q \cdot 0 &= 0. \end{aligned} \quad (163)$$

Tehtud hüpoteesi najal peab olema

$$\frac{v_x}{v_y} = \frac{X}{Y}.$$

Diferentsides kaks esimest seost (163), järeldame veel:

$$\dot{v}_x = \ddot{x}_0 - a\dot{q}, \quad \dot{v}_y = \ddot{y}_0 + a\dot{p}.$$

Kombineerides seda valemitega (160) ja (161), leiame

$$\begin{aligned} \dot{v}_x &= \frac{X}{M} + a^2 \frac{X}{J} = \frac{X}{M} + a^2 \frac{5X}{2a^2 M} = \frac{7}{2} \frac{X}{M} \\ \dot{v}_y &= \frac{Y}{M} + a^2 \frac{Y}{J} = \frac{Y}{M} + a^2 \frac{5Y}{2a^2 M} = \frac{7}{2} \frac{Y}{M}. \end{aligned} \quad (164)$$

Seega

$$\frac{\dot{v}_x}{\dot{v}_y} = \frac{X}{Y} = \frac{v_x}{v_y},$$

ehk

$$\frac{dv_x}{v_x} = \frac{dv_y}{v_y}.$$

Integratsioon annab siit:

$$\log \frac{v_x}{v_y} = \text{konstant}, \quad \frac{v_x}{v_y} = \frac{X}{Y} = \text{konstant}.$$

Niisiis hõõrdetungi suund x - y -tasapinnal on konstantne; et, nagu varemini selgus, hõõrdetungi suurus on fMg , s. t. samuti konstant, siis järgneb, et hõõrdetungi vektor, niikaua kui ta üldse on olemas, peab tehtud hüpoteesi puhul jääma konstantseks. Hõõrdetung kaob aga, kui kuul enam ei libise, vaid ainult veereb ja tiirleb.

Integrides nüüd (164), arvesse võttes seejuures X ja Y konstantsust, leiame

$$v_x = \frac{7}{2} \frac{X}{M} t + F, \quad v_y = \frac{7}{2} \frac{Y}{M} t + G, \quad (165)$$

kus F ja G on jällegi integrimiskonstandid.

Silmas pidades, et v_x ja X on vastasmärgiga, samuti v_y ja Y on vastasmärgiga, saame seostest (165) välja lugeda, et v_x ja v_y peavad (lineaarselt) kahanema aja t kasvamisel. Kahanemine katkeb aga järsult sel hetkel $t = T$, kus v_x ja v_y on muutunud (tingimata ühekorraga) nulliks, s. t. hetkel T , kus libisemine kaob. Samal hetkel T kaob ka hõõrdetung (X , Y) ning uut libisemist ei saa enam tekkida: kui tekiks üsna väike libisemine (v_x , v_y), siis kohe tekkiv hõõrdetung (X , Y) hävitaks selle jalamaid.

Kuuli liikumisel tuleb vaadelda kaht faasi: 1) $t < T$, 2) $t > T$. Esimese faasi vältel hõõrdetungi konstantsuse tõttu peab massikese C liikuma horisontaalsel paraboolil. Teise faasi vältel massikeskmele C ei mõju enam mingi tung ja massikese seetõttu jätkab juba liikumist sirges joones ühtlase kiirusega (tuleb silmas pidada, et meie teadlikult jätsime arutlusest välja veeremisel ja tiirlemisel tekkiva väikese hõõrdumise!).

Valemeist (162) järgneb, et teisel faasil, kus \dot{x}_0 ja \dot{y}_0 on konstantsed, ka p ja q ning seetõttu ka kogu rotatsioonivektor ω peab jääma konstantseks. Esimesel faasil \dot{x}_0 ja \dot{y}_0 muutuvad, mille

tagajärjel, nagu valemist (162) näha, näiteks x_0 kasvamisel q kahaneb.

Trajektoori paraboolse kaareosa tõttu osava tõuke puhul piljardikuul võib muuta oma liikumissuhti õige tunduvalt liikumise vältel, hakates isegi uuesti lähenema kohale, kus teda tabas tõuge. Olgu mööda minnes mainitud, et analoogilised olukorrad valitsevad juhul, kui roteeruv kuul (tennisball) liigub vabalt õhukistuse ja raskuse koosmõjul. Trajektoor ei asetse siis enam vertikaaltasapinnas, vaid kujutab ruumilist (väänatud) kõverat. See asjaolu omab muuseas tähtsust ballistikas, sest mürsud, lahkudes kahurirauast, omavad suurt rotatsioonikiirust oma telje ümber; derivatsioon ja mürsu telje ligikaudne püsimine trajektoori puutuja läheduses tuleb arvatavasti kirjutada analoogiliste nähtuste arvele.

§ 44. Tõuked; ballistiline pendel.

Dünaamika põhivõrrandid võib impulssvektori \mathfrak{p} kasutamisel kirjutada kujul

$$\dot{\mathfrak{p}} = \mathfrak{F} \quad \text{ehk} \quad d\mathfrak{p} = \mathfrak{F}dt.$$

On siin tungivektor \mathfrak{F} lõplik, nagu tavaliselt, siis impulsi kasv $d\mathfrak{p}$ lõpmata väikese ajavahemiku dt puhul peab osutama samuti lõpmata väikeseks.

Mõeldav on aga ka erandjuhtum, kus \mathfrak{F} on lõpmata suur, nõnda et korrutisvektor $\lim \mathfrak{F} \cdot \Delta t$ osutub lõplikuks, teguri Δt piiramatul vähenemisel. Säärane $\lim \mathfrak{F} \cdot \Delta t$ asendab mõttekohaselt $\mathfrak{F}dt$ ülalantud seoses. Et siis impulsi vastav kasv peab olema juba lõplik suurus, siis tuleb sel puhul seose teisel poolel diferentsiaali $d\mathfrak{p}$ asemel kirjutada impulsi lõplik kasv $\Delta\mathfrak{p}$. Tähistades veel lõplikku vektorit $\lim \mathfrak{F}\Delta t$ uue sümboliga \mathfrak{I} , saame anda põhivõrrandile kuju

$$\Delta\mathfrak{p} = \mathfrak{I}. \quad (166)$$

Füüsikaliselt siin on tegemist olukorraga, kus impulss järsult (hüppeliselt) muutub lõpliku suuruse $\Delta\mathfrak{p}$ võrra lõpmata väikese ajavahemiku dt vältel. Õeldakse siis, et materiaalsele punktile on

mõjunud „tõuge“, mida iseloomustabki vektor \mathfrak{Z} . Tõuke kestus on lõpmata väike; punkti koordinaadid selle kestel ei saa lõpliku suuruse võrra muutuda, nii et võib neid lugeda tõuke kestuse vältel konstantseiks. Samuti on tõuget tekitava tungi \mathfrak{P} suurusjärk ülaltoodu põhjal säärane, et kõik teised tungid (nagu näiteks raskustung) tõukega võrreldes selle tõuke vältel märgatavat mõju punkti liikumisele ei avalda. Tüüpilise näite tõukest pakub tavaline mängupall hetkel, kus ta näiteks põrkab vastu seinat: palli kiirusvektor, tähendab, ka impulssvektor muudab siis järsult oma suunda, saades seinalt tõuke (pall „põrkab seinast tagasi“). Üldiselt tuleb arvestada tõukeid alati siis, kui kaks keha kokku põrkavad. „Tõuge“ ja „põrge“ esinevad seega mehaanikas alati kõrvuti.

Kui on tegemist punktisüsteemiga, siis võib tõukeid jällegi liigitada „sisetõugeteks“ ja „välistõugeteks“, vastavalt sellele, kas tõuge on tingitud punktide omavahelistest põrgetest, või aga süsteemi punkti põrkest eseme vastu, mis ei kuulu enam süsteemi hulka. Et tõuked vastavad ikkagi tungidele, kuigi lõpmata suurtele, siis tõugete puhul tuleb samuti lugeda kehtivaks reaktsiooni seadust:

Kui kahe eseme A ja B põrkel ese B tõukab eset A , siis ka A omakorda tõukab eset B , kusjuures mõlemad tõukevektorid on võrdsed ja vastassuunalised, langedes ühisele kandesirgele.

Sisetõugete üldine resultant peab seetõttu kaduma, samuti ka sisetõugete kompleksi resulteeruv moment mistahes kohas.

Lähtudes süsteemi kohta kehtivatest seostest

$$\Delta \mathfrak{p} = \mathfrak{Z}^{(e)} + \mathfrak{Z}^{(i)},$$

ning võttes arvesse, et $\Sigma \Delta \mathfrak{p} = \Delta \Sigma \mathfrak{p}$, järeldame siit tuntud viisil:

$$\Delta \Sigma \mathfrak{p} = \Sigma \mathfrak{Z}^{(e)}. \quad (167)$$

Olgu nüüd veel \mathbf{r} süsteemi mõne materiaalse punkti kohavektor; tõuke lõpmata lühikesel vältel dt see kohavektor, nagu öeldud, püsib konstantsena. Põhivõrrandeist järgneb

$$\Sigma(\mathbf{r} \times \Delta \mathfrak{p}) = \Sigma(\mathbf{r} \times \mathfrak{Z}^{(e)}).$$

Teiselt poolt on \mathbf{r} konstantsuse tõttu

$$\mathbf{r} \times \Delta \mathbf{p} = \mathbf{r} \times (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) = (\mathbf{r} \times \mathbf{p}_2) - (\mathbf{r} \times \mathbf{p}_1) = \Delta(\mathbf{r} \times \mathbf{p}),$$

seega

$$\Sigma(\mathbf{r} \times \Delta \mathbf{p}) = \Sigma \Delta(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \Delta \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{p}).$$

Ülalleitu põhjal järelikult

$$\Delta \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \Sigma(\mathbf{r} \times \mathfrak{I}^{(e)}). \quad (168)$$

(167) kujutab impulsilauseid, (168) aga impulssmomendilauseid tõegete puhul.

Puuduvad välistõukeid üldse, siis (167) ja (168) kohaselt

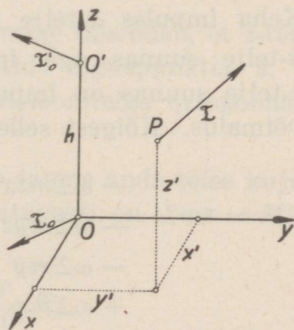
$$\Delta \Sigma \mathbf{p} = 0, \quad \Delta \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = 0.$$

Seega sisetõukeid üksinda ei saa veel muuta ei süsteemi impulssi ega süsteemi impulssmomenti.

Vaatleme veel tõuke mõju kehale, mis on kinnitatud z -telje külge ilma libisemisvõimaluseta. Keha inertsmoment J_z selle telje suhtes olgu MD^2 , kus M on keha mass ja D on inertsraadius. Tõuge \mathfrak{I} projektsioonidega T_x, T_y, T_z olgu rakendatud kohas $P: (x', y', z')$ (88. joonis). Enne liikumatuna eeldatud keha hakkab selle tõuke mõjul roteerima z -telje ümber, saades tõuke tagajärjel nurkkiiruse ω .

Keha impulssmoment z -telje suhtes on $J_z \omega = MD^2 \omega$; see on ühtlasi impulssmomendi kasv tõuke tagajärjel, kui alul keha püsis paigal. Tõuke \mathfrak{I} moment z -telje suhtes on $x'T_y - y'T_x$.

Tõuke \mathfrak{I} mõju avaldub muuseas ka tõugetena teljele neis kohtades O ja O' , kus keha on telje külge kinnistatud; telg omakorda reageerib seejuures vastassuunaliselt võrdsete tõugetega kehale samades kohtades, — nende reaktsioontõugete \mathfrak{I}_O ja $\mathfrak{I}_{O'}$ projektsioonid olgu vastavalt T_{Ox}, T_{Oy}, T_{Oz} ja $T_{O'x}, T_{O'y}, T_{O'z}$. Kolme välistõuke $\mathfrak{I}, \mathfrak{I}_O, \mathfrak{I}_{O'}$ koosarvestamisel keha võib käsitleda juba vabana. Et reaktsioontõukeid \mathfrak{I}_O ja $\mathfrak{I}_{O'}$ momenti z -telje



88. joonis.

suhtes ei saa anda, sest nad on rakendatud z -telje enda kohtades, siis jääb vaid tōuke \mathfrak{Z} moment, ning (168) põhjal peab olema

$$MD^2\omega = x'T_y - y'T_x. \quad (169)$$

See võrrand määrabki ω , s. t. tōuke mõju kehale.

Tundmatuid teljereaktsioone \mathfrak{Z}_O ja $\mathfrak{Z}_{O'}$ määravad impulss-lause ja impulssmomendilause teiste telgede suhtes. Tōugete resulteeruv moment x -telje suhtes on, nagu kerge näha, $y'T_z - z'T_y - hT_{O'y}$, ja resulteeruv moment y -telje suhtes on $z'T_x - x'T_z + hT_{O'x}$, kui h on pikkus $\overline{OO'}$. Teiselt poolt selgus analoogilise küsimuse käsitlemisel § 37, et $\dot{x} = -\omega y$, $\dot{y} = +\omega x$, $\dot{z} = 0$, mille tõttu impulssmoment, seega impulssmomendi kasv pärast tōuget on

$$x\text{-telje suhtes } \Sigma(y\dot{m}z - z\dot{m}y) = -\Sigma m z \omega x = -\omega \Sigma m z x$$

$$y\text{-telje suhtes } \Sigma(z\dot{m}x - x\dot{m}z) = -\Sigma m z \omega y = -\omega \Sigma m y z.$$

Keha impulss x -telje suunas on $\Sigma m \dot{x} = -\Sigma m \omega y = -\omega \Sigma m y$, y -telje suunas aga impulss on $\Sigma m \dot{y} = +\Sigma m \omega x = +\omega \Sigma m x$; z -telje suunas on impulss null, sest kehal on võetud libisemisvõimalus. Kõigest sellest järgneb

$$-\omega \Sigma m z x = y'T_z - z'T_y - h T_{O'y}$$

$$-\omega \Sigma m y z = z'T_x - x'T_z + h T_{O'x}$$

$$-\omega \Sigma m y = T_x + T_{Ox} + T_{O'x} \quad (170)$$

$$+\omega \Sigma m x = T_y + T_{Oy} + T_{O'y}$$

$$0 = T_z + T_{Oz} + T_{O'z}.$$

Neli esimest võrrandit määravad siin T_{Ox} , T_{Oy} , $T_{O'x}$, $T_{O'y}$. Viimane määrab summa $T_{Oz} + T_{O'z}$. Reaktsioontōuked on seega osaliselt määramatud.

Teatavail tingimusil võib saavutada seda, et reaktsioontōuked \mathfrak{Z}_O ja $\mathfrak{Z}_{O'}$ kaoksid üldse. Viimane võrrand (170) näitab kõigepealt, et siis peab olema $T_z = 0$, s. t., et tōukevektor \mathfrak{Z} peab olema risti teljega.

Ilmsesti on siis veel võimalik koordinaadistikku nõnda orienteerida, et tõuge \mathfrak{Z} oleks ühtlasi risti x -teljega, s. t. et ka $T_x = 0$. Siis jääb täita veel nõuded

$$\begin{aligned} -\omega \Sigma mzx &= -z'T_y \\ \Sigma myz &= 0 \\ \Sigma my &= 0 \\ +\omega \Sigma mx &= T_y. \end{aligned} \tag{171}$$

Siin nõuab kolmas võrrand, et keha massikeskme y -koordinaat kaoks. Koos eelmisega see tähendab aga, et tõuge \mathfrak{Z} peab olema risti selle tasapinnaga, mis läbib rotatsioonitelge ja keha massikeset.

Tõstame nüüd veel x - y tasapinna säärasele kõrgusele, et ta sisaldaks tõuke \mathfrak{Z} rakenduspunkti $P : (x', y', z')$, mis tähendab lihtsalt, et me võtame $z' = 0$. Esimene ja teine võrrand (171) nõuavad siis

$$\Sigma mzx = 0, \quad \Sigma myz = 0.$$

§ 36 kohaselt nende inertskorrutiste kadumine tähendab, et z -telg peab olema inertsi peateljeks koordinaatide alguspunktis, s. t. kohas, kus tõuget sisaldav tasapind rotatsioonitelge ortogonaalselt lõikab.

Jääb veel viimane nõue (171), millele saame anda teise kuju, sisse tuues massikeskme abstsissi ξ . Teatavasti on $\Sigma mx = M\xi$. Ühtlasi järgneb võrrandist (169):

$$MD^2\omega = x'T_y, \quad \omega = \frac{x'}{MD^2} T_y.$$

Asetades seda viimasesse võrrandisse (171), saame

$$\frac{x'}{MD^2} T_y M\xi = T_y,$$

järelikult:

$$x'\xi = D^2. \tag{172}$$

Võrdlus valemiga (146) § 38 näitab, et x' , s. o. tõukevektori kandesirge kaugus rotatsiooniteljest, peab võrduma taandatud pendli pikkusega, kui keha käsitada pendlina.

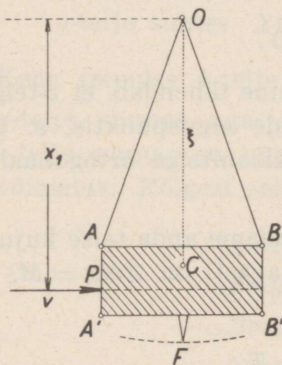
Kokkuvõttes on seega selgunud:

Tõuge ei kandu üle teljele siis ja ainult siis, kui:

- 1) rotatsioonitelg on peateljeks teatavas oma kohas;
- 2) tõuge on suunatud risti tasapinnaga, mis sisaldab telje ja massikeskme;
- 3) tõukevektor asetseb tasapinnas, mis on pandud teljega risti läbi selle koha, kus telg on inertsipeateljeks;
- 4) tõukevektori kandesirge lõikab võnketelge, kui keha rotatsioonitelg on võetud toetusteljeks.

Võnketelje koht, kus tõukevektori kandesirge teda peab lõikama, kannab „tõuke tsentri“ nimetust.

Rakendusena peatume nn. ballistilise pendli teooria juures, mida kasutatakse laskerelvade kuulide kiiruse määramiseks. Ballistilise pendli skeem on kujutatud 89. joonisel: mullaga



89. joonis.

täidetud silinder pikilõikega $ABB'A'$ on varrastega AO ja BO sümmeetriliselt kinnitatud O -st läbimineva horisontaalse telje külge, moodustades seega pendli. Silindriga seotud näitaja F võimaldab määrata selle pendli võnkeamplituudi. Sümmeetria tõttu on pendli toetustelg inertsipeateljeks kohas O . Olgu pendli kogumass M ja inertsiraadius D ; C olgu pendli massikeske ja pikkus $\overline{OC} = \xi$ selle massikeskme kaugus teljest.

Silindri põhja AA' tabagu normaali sihis kuul massiga m ja kiirusega v ; see kuul tungib silindri sisse ja jääb muldtäidises peatuma. On m väike, võrreldes massiga M , siis kuuli paigutamine silindrisse ei muuda nimetamisväärselt massikeskme C asukohta. Aparatuuri püsivuse huvides tuleks teda kuuliga tabada just säärases kohas, et tõuge ei kanduks üle teljele. Kuuli trajektoori kaugust x_1 teljest tuleb selleks määrata valemi (172) alusel.

Enne tabamist (tõuget) süsteemis kuul + pendel liigub vaid kuul, mis annab telje suhtes impulssmomendi mvx_1 . Pärast

tabamist pendel koos kuuliga omab teatavat nurkkiirust ω , millele vastab seega süsteemi impulssmoment $MD^2\omega + mx_1^2\omega$. Et süsteemi seisukohalt siin on tegemist vaid sisetõukega, siis impulssmoment peab jääma muutumatuks, tähendab, peab olema

$$mvx_1 = (MD^2 + mx_1^2)\omega. \quad (173)$$

Raske on otseselt mõõta ω ; küll aga saab hõlpsasti määrata selle ω tagajärjel omandatud amplituudi α ning siis juba arvutada ω , toetudes hoolausele. Hoog alghetkel on nimelt

$$\frac{1}{2}(MD^2 + mx_1^2)\omega^2,$$

eeldusel, et kuul jääb peatuma umbes silindri keskkohas. See hoog tõstab pendli ja kuuli massikeset elongatsiooni a puhul vastavalt

$$\xi - \xi \cos \alpha \quad \text{ja} \quad x_1 - x_1 \cos \alpha$$

võrra (90. joonis), millele vastab töö:

$$\begin{aligned} Mg\xi(1 - \cos \alpha) + mgx_1(1 - \cos \alpha) &= \\ = g(M\xi + mx_1)(1 - \cos \alpha) &= \\ = 2g(M\xi + mx_1) \sin^2 \frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

Et mainitud kõrgusel hoog muutub nulliks, siis

$$\frac{1}{2}(MD^2 + mx_1^2)\omega^2 = 2g(M\xi + mx_1) \sin^2 \frac{\alpha}{2},$$

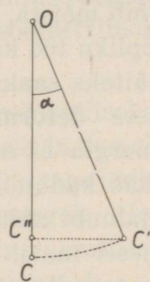
kust järgneb:

$$\omega = 2\sqrt{\frac{g(M\xi + mx_1)}{MD^2 + mx_1^2}} \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Asetades seda võrrandisse (173), kirjutades ühtlasi D^2 asemel veel $x_1\xi$, mis eeldab muidugi, et tabamine toimuks nõutaval kohal, saame

$$\begin{aligned} v &= \frac{2}{mx_1} \sqrt{(Mx_1\xi + mx_1^2)(M\xi + mx_1)g} \sin \frac{\alpha}{2} \\ &= 2\sqrt{\frac{g}{x_1} \frac{M\xi + mx_1}{m}} \sin \frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

Kiirus v on seega võrdeline poolamplituudi $\frac{\alpha}{2}$ siinusega. Tundes M , m , ξ , x_1 ja α , saab määrata v ka absoluutselt.



90. joonis.

On M väga suur võrreldes kuuli massiga m ja on ühtlasi kiirus v mõõdukas, siis a on väike ja $\sin \frac{a}{2}$ seetõttu asendatav suurusega $\frac{a}{2}$. See näitab, et sel korral tohib lugeda kiirust võrdeliseks amplituudiga a .

§ 45. Elastsustungide osa pörgetel; tsentraalne pörge.

Tõugete puhul on, nagu nägime, rahuldatud impulsilause ja impulssmomendilause. Hoolause tavalisel kujul, kus arvestatakse vaid lõplikkude tungide poolt tehtud tööd või lõplikkudest nihest tingitud potentsiaalse energia muutust, ei kehti enam üldjuhul. Seda esimesel pilgul paradoksaalsena tunduvat asjaolu võib mõista, kui võtta arvesse, et lõpmata suured tungid annavad lõpliku töö ka lõpmata väikeste nihutuste puhul, mille tagajärjeks näiteks saaks olla potentsiaalse energia lõplik kasv lõpmata väikese deformatsiooni tagajärjel. Sellele deformatsioonile kuluv energia ei esine tavalises hoolause valemis ning seega näiliselt jääb kadunuks. Uurides tõuget tekitavat kehade pörget niiöelda ajaluubi abil, võiksime pörke puhul ikkagi eraldada 2 faasi: esimesel faasil tekivad kehade deformatsioonid, mis neelavad energiat; sellele võib aga, nagu kogemused näitavad, järgneda teine faas, kus deformatsioonidesse pagenud energia hakkab jälle tagasi tulema ilmsesse kineetilisse kujusse. Kineetilise energia suuremine teisel faasil (esimesel faasil kuhjunud deformatsioonienergia arvel) võib osaliselt väljenduda keha molekulide kiiruste kasvus, mis integraalselt vaatlajale tunduks kehade temperatuuride tõusuna (soojuse juurdevooluna); osaliselt aga võib kineetilise energia kasv teisel faasil tähendada ka seda, et kehad tervikuna saavad kiirust juurde (massikeskmed hakkavad jälle kiiremini liikuma). Viimane osa tagasitulnud hoost võib parimal juhul võrdne olla esimesel faasil kaduma läinud (deformatsioonidesse kuhjunud) hooga, — siis öeldakse, et tegemist on „täielikult elastse“ pörkega. Üldjuhul on teisel faasil hoo näol tagasitulnud energia ikkagi väiksem, — pörge on „pooleldi elastne“. Kadunud

hoog muutub siis soojuseks, aga ka heliks (pauk pörkel!) või muuks energialiigiks. Mõeldav on ka teine äärmus, kus teist faasi üldse pole olemas, s. t. kus tekkinud deformatsioon osutub jäädavaks, — sel korral on tegemist „täiesti mitteelastse“ pörkega. Ka siin tekib üldiselt soojus, heli, aga sageli ka kehade täielik või osaline purunemine.

Elementaarse näitena olgu siin käsitletud kahe translatoorselt liikuva keha tsentraalne pörge, nimelt säärane, kus mõlema keha kiirusvektorid langevad kehade massikeskmeid ühendavale sirgele. Eeldatud on seejuures veel, et ka pörkest tingitud tõukevektorid langevad samale sirgele, ehk, mis tähendab sama, et pörke hetkel kehade ühine puutetasapind oleks risti selle sirgega, andes puutepunkti just sirgel endal. On näiteks mõlemad kehad massiivsed homogeenised kerad, siis mainitud lisatingimus järgneb juba kiirusvektorite tsentraalsuse nõudest puhtgeomeetrilistel kaalutlustel.

Säärase pörke puhul probleem osutub ühedimensiooniliseks: kui kiirusvektorid ja tõukevektorid langevad kõik ühele ja samale sirgele, siis ka impulsi kasv langeb samale sirgele, mille tagajärjel ka kiirusvektorid pärast pörget jäävad sellele kandesirgele. Neil kaalutlusil on võimalik küsimuse käsitlemisel piirduda ruumiliselt selle sirgega (x -teljega) ja kiirusi vaadelda puhtskalaarselt.

Olgu kehade massid vastavalt m_1 ja m_2 ; nende skalaarsed (märkidega võetud) kiirused enne pörget vastavalt v_1 ja v_2 , pärast pörget aga vastavalt v_1' ja v_2' . Mõlemast kehast koosneva süsteemi puhul, kus välistõuked puuduvad, annab impulsilause

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'. \quad (174)$$

Algkiirused v_1, v_2 olgu teada, määrata tuleb lõppkiirused v_1', v_2' . Nende kahe tundmatu määramiseks on järelikult vajalik veel üks võrrand. Selle teise võrrandi püstitamiseks tuleb lähtuda mingisugusest hüpoteesist kehade elastsuse kohta.

I hüpotees: kehad olgu täiesti elastsed, s. t. pörke esimesel faasil kaotatud hoog tulgu teise faasi lõpuks täiel määral

tagasi. Süsteemi hoog enne põrget peab siis võrduma süsteemi hooga pärast põrget, seega:

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2. \quad (175)$$

See ongi siis probleemi lahendamiseks vajalik teine võrrand. Kirjutades (174) ja (175) kujul

$$\begin{aligned} m_1(v_1 - v_1') &= m_2(v_2' - v_2) \\ m_1(v_1^2 - v_1'^2) &= m_2(v_2'^2 - v_2^2), \end{aligned}$$

järeldame jagamise teel:

$$v_1 + v_1' = v_2' + v_2,$$

ehk

$$v_1 - v_2 = v_2' - v_1'. \quad (176)$$

Kehade kiiruste diferents muudab seega põrke tagajärjel vaid märgi.

Määrates nüüd kahest lineaarsest võrrandist (174) ja (176) tundmatud v_1' , v_2' , leiame:

$$v_1' = \frac{m_1 v_1 + 2m_2 v_2 - m_2 v_1}{m_1 + m_2} = v_2 + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)$$

$$v_2' = \frac{m_2 v_2 + 2m_1 v_1 - m_1 v_2}{m_1 + m_2} = v_1 + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2).$$

Erijuhul $m_1 = m_2$ on seega $v_1' = v_2$, $v_2' = v_1$: kehad nagu vahetavad kiirusi. On aga kehade massid erinevad, siis lisaks vahetatud kiirusile tuleb mõlema keha puhul veel üks ja sama

algebraalne suurus $\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)$; see lisand ilmsesti ei muutu indeksite vahetusel.

II hüpotees: kehad olgu täiesti mitteelastsed, s. t. põrke esimeses faasis saavutatud kehade tihe kontakt ja deformatsioon jäägu edaspidi täielikult püsima; põrke teine faas puudub üldse. Saavutatud kontakti püsimine tähendab, et pärast põrget kehad omavad jäädavalt ühist kiirust:

$$v_1' = v_2'. \quad (177)$$

See ongi nüüd teine võrrand, mis koos võrrandiga (174) määrab tekkiva lõppolukorra.

Asetades (177) võrrandisse (174), leiame

$$v_1' = v_2' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}. \quad (178)$$

(178) najal saaksime kergesti arvutada hoo kao suuruse kõnealusel täiesti mitteelastse juhu hüpoteesil. Meie teeme seda aga üldisemal kujul järgneva kolmanda hüpoteesi puhul.

III hüpotees: kehad olgu pooleldi-elastsed, s. t. põrke teises faasis restaureerub osa esimese faasi vältel kadunud hoost. On ilmne, et säärasel kujul probleem on veel määramatu, seni kui pole fikseeritud, milline osa nimelt hoost jääb kadunuks. Võttes arvesse, et esimese hüpoteesi puhul kiiruste diferents absoluutse suuruse poolest püsib, teise hüpoteesi alusel aga põrke tagajärjel muutub nulliks, osutub loomulikuks, käies Newton'i jälgedes, lähtuda sellest, et kolmanda hüpoteesi juures kiiruste diferents peaks moodustama absoluutsuuruse poolest pärast põrget teatava murdosa δ ($0 < \delta < 1$) sellest, mis ta oli enne põrget:

$$v_2' - v_1' = \delta(v_1 - v_2). \quad (179)$$

Erijuhul $\delta = 1$ saaksime jälle esimese hüpoteesi, erijuhul $\delta = 0$ aga teise hüpoteesi.

Etteantud δ väärtuse puhul moodustabki (179) probleemi lahendamiseks vajaliku teise võrrandi, lisaks alati kehtivale võrrandile (174).

Lahendades lineaarsed võrrandid (174) ja (179) tundmatute v_1' , v_2' suhtes, leiame:

$$\begin{aligned} v_1' &= \frac{m_1 v_1 + (1 + \delta)m_2 v_2 - \delta m_2 v_1}{m_1 + m_2} = v_2 + \frac{m_1 - \delta m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2) \\ v_2' &= \frac{m_2 v_2 + (1 + \delta)m_1 v_1 - \delta m_1 v_2}{m_1 + m_2} = v_1 + \frac{m_2 - \delta m_1}{m_1 + m_2} (v_2 - v_1). \end{aligned} \quad (180)$$

On kerge kontrollida, et valemid (180) haaravad erijuhuna ka varemini-leitud tulemusi.

Arvutame nüüd hoo kao suuruse $-\Delta H = \frac{1}{2} [(m_1 v_1'^2 + m_2 v_2'^2) - (m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2)]$, kasutades seejuures hetkeks lühendusi c , α :

$$c = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}, \quad \alpha = \delta \frac{v_2 - v_1}{m_1 + m_2}.$$

Nagu (180) näitab, on siis

$$v_1' = c + m_2 \alpha, \quad v_2' = c - m_1 \alpha.$$

c tähendab ilmsesti ühist lõppkiirust \mathbb{I} hüpoteesi puhul.

Arvutades leiame:

$$\begin{aligned} -\Delta H &= \frac{1}{2} [m_1(c + m_2 \alpha)^2 + m_2(c - m_1 \alpha)^2 - m_1 v_1^2 - m_2 v_2^2] \\ &= \frac{1}{2} [(m_1 + m_2)c^2 + \alpha^2 m_1 m_2 (m_1 + m_2) - m_1 v_1^2 - m_2 v_2^2]. \end{aligned}$$

Asendades siia c^2 ja α^2 väärtused, järeldame:

$$-2 \Delta H = \frac{(m_1 v_1 + m_2 v_2)^2 + \delta^2 (v_2 - v_1)^2 m_1 m_2}{m_1 + m_2} - m_1 v_1^2 - m_2 v_2^2$$

ehk

$$\begin{aligned} -2 \Delta H &= \frac{1}{m_1 + m_2} [m_1^2 v_1^2 + 2m_1 m_2 v_1 v_2 + m_2^2 v_2^2 + \\ &+ \delta^2 (v_2 - v_1)^2 m_1 m_2 - m_1^2 v_1^2 - m_1 m_2 v_1^2 - m_1 m_2 v_2^2 - m_2^2 v_2^2] \\ &= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} [\delta^2 (v_2 - v_1)^2 - (v_2 - v_1)^2]. \end{aligned}$$

Seega lõpuks

$$-\Delta H = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_2 - v_1)^2 (\delta^2 - 1). \quad (181)$$

Nagu siit nähtub, on $-\Delta H$ üldjuhul tõepoolest negatiivne, sest $\delta^2 - 1$ on üldiselt negatiivne; ainult hüpoteesil I on $\delta^2 - 1 = 0$ ja seega $\Delta H = 0$.

Loeme esimese keha algkiiruse v_1 nulliks, — see on alati lubatav, sest tegemist on seejuures vaid inertsteljestiku muutmisega. Teise keha algkiirus v_2 olgu sel puhul tähistatud lihtsalt sümboliga v . (181) omab siis kuju

$$-\Delta H = \frac{m_1 m_2 v^2}{2(m_1 + m_2)} (\delta^2 - 1).$$

Siin esineb tegur $\frac{1}{2} m_2 v^2$, mis kujutab teise keha hoogu enne põrget, mis ongi süsteemi koguhoo enne põrget, sest esimese keha hoog on võetud nullina. Tähistame seega mainitud tegurit sümboliga H . Tulemus omab siis kuju:

$$\begin{aligned} -\Delta H &= \frac{m_1 H}{m_1 + m_2} (\delta^2 - 1) \\ &= \frac{\delta^2 - 1}{1 + \frac{m_2}{m_1}} H. \end{aligned} \quad (182)$$

Kindla δ puhul hoo kadu moodustab seega kindla murdosa alg-
hoost. Osa on seda väiksem, mida suurem on murd $\frac{m_2}{m_1}$; kao
protsent läheneb nullile, kui m_2 (s. t. alguses ainuüksi liikuva
keha mass) piiramatult kasvab, m_1 aga püsib konstantsena. On
teise keha alghoog seejuures konstantne, siis mistahes δ puhul
kineetilise energia kadu piiramatult väheneb selle teise keha massi
piiramatul suurenemisel, eeldusel, et esimese (liikumatu) keha
mass ei muutu.

Seda asjaolu tuleb arvestada näiteks vaiade rammimisel või
ka lihtsalt naelte seina tagumisel vasaraga. On energia, millega
vasar taob, konstantne, siis on kasulik energia kahjuliku kao
võimalikuks vähendamiseks tarvitada võimalikult rasket vasarat.
Vastasel korral on väikese δ juures karta vaia ülemäära suurt
purunemist või vastavalt naela kõverdumist ülemäärase kuume-
nemise tõttu kaotatud hoo arvel.

On δ väga lähedal nullile, s. t. on kehad õige vähesel määral
elastsed, ja on ühtlasi m_2 õige väike massiga m_1 võrreldes, siis,
nagu (182) näitab, $-\Delta H \approx -H$, s. t. rakendatud hoog H
läheb kaotsi peaaegu tervikuna.

Valem (182) annab ka füüsikalise tõlgenduse parameetrile δ :
on $\frac{m_2}{m_1} \approx 0$, siis

$$\delta^2 = \frac{H - \Delta H}{H},$$

teiste sõnadega, δ^2 näitab, milline murdosa rakendatud hoost
säilib pärast põrget, kui põrkava keha mass on väga väike selle
keha massiga võrreldes, mille vastu ta põrkab.

§ 46. Hamilton'i printsiip.

Siinkäsitletud kursuses on lugejat tutvustatud algeliste meetoditega, milledele saab rajada mehaaniliste probleemide uurimist, — neid meetodeid kasutas juba Newton. Lugejale, kes kavatseb tõsisemalt süveneda mehaanika distsipliinidesse, olgu määratud veel alljärgnevad juhtjooned.

On selge, et täisnurksete Cartesius'e koordinaatide kasutamine mehaanika küsimuste käsitlemisel ei tohiks olla põhjaneva tähtsusega distsipliini enda sisu seisukohalt. Kuigi need täisnurksed koordinaadid on enamikul juhtudel analüütiliselt mugavad, peab siiski arvestama tõsiasja, et loodus ise neid koordinaate kui sääraseid ei vaja oma sündmustiku reguleerimiseks: need koordinaadid on vaid matemaatiku poolt kasutatud relvaks, mida võib kõrvale panna, niipea kui tulemus on leitud.

On seega arusaadav püüe vabaneda mehaanika käsitlemisel koordinaatide kitsakujulisest mõistest. Oluline on ju vaid see, et punkti asukoha määramiseks ruumis läheb vaja kolme mõõt- arvu leidmist; kas need 3 arvu näitavad just Cartesius'e koordinaate x , y , z , või aga mingisuguseid teisi mõeldavaid koordinaate, peaks puht-mehaanika seisukohalt olema üsna kõrvalise tähtsusega. Olgu need 3 mingisugusel kokkulepitud meelevaldsel viisil leitud arvu tähistatud q_1 , q_2 , q_3 . Mehaanika probleemide analüütilisel käsitlemisel tuleks siis otsida sääraseid matemaatilisi operatsioone nende kolme q kallal, mis annaksid tulemusena looduses valitsevaid mehaanilisi seadusi igal juhul, sõltumata sellest, milline on nende arvude q erikujuline tähendus. See on tõelise „analüütilise mehaanika“ põhiprobleem, millele olid pühendatud Newtoni järglaste uurimised. Leitud tulemused on seotud esijoones Lagrange'i, Poisson'i, Hamilton'i ja Jacobi' nimedega. Olgu tähendatud, et arvude q tuletised määravad ikkagi kiirust, kuigi mitte nii erikujulisel viisil, nagu tol erijuhul, kus arvud q on x , y , z .

Asjasse süvenemine näitas, et igal juhul on võimalik määrata üht teatavat funktsiooni $L(q_1, q_2, q_3, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, t)$ seits-

mest muutujast q , \dot{q} , t nõnda, et joonintegraal

$$\int_{t_1}^{t_2} L dt$$

omab minimaalset väärtust just siis, kui kõverjoon, mida pidi toimub integrimine, osutub parajasti selleks trajektooriks, mida punkt antud olukorras tõepoolest kujutab, lähtudes kindlast algkohast hetkel t_1 ja jõudes kindlale lõppkohale hetkel t_2 . Funktsiooni L kutsutakse „Lagrange'i funktsiooniks“ ja ülalmainitud integraali „Hamiltoni integraaliks“. Sõnastatud põhimõtet, mille kohaselt materiaalne punkt looduses on sunnitud valima enda trajektooriks just seda kõverat, kus Hamiltoni integraal annab miinimumi, kutsutakse mehaanikas „Hamiltoni printsiibiks“. Teatavail kitsendavil tingimusil kutsutakse mainitud integraali ka „aktsiooniks“ ja räägitakse siis vastavalt „väikesima aktsiooni printsiibist“. Juhime tähelepanu analoogiale geometrias: sirget joont võib defineerida säärasena, kus määratud integraal $\int ds$ (kaare pikkus) osutub miinimumiks.

Uuema aja uurimised on selgitanud, et Lagrange'i funktsiooni seejuures võib valida veel mitmesugusel erineval viisil; sellest valikust sõltub, kas saame sellega haarata liikumist Newtoni või aga näiteks Einsteini seisukohalt. Mõlemal juhul Hamiltoni printsiip on kehtiv, kuid Lagrange'i funktsioon on erinev.

Olgu punkti liikumine tingitud tungivälja potentsiaalset Π . Newtoni mehaanika saamiseks tuleb võtta

$$L = \frac{1}{2} mv^2 - \Pi ,$$

Einsteini relativistliku mehaanika saamiseks aga tuleb võtta

$$L = - mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \Pi ,$$

kus c on valgusekiirus; v on mõlemal juhul q kaudu määratud punkti kiirus, kuna aga Π sõltub vaid kohast q .

Seega, lähtudes Hamiltoni printsiibist, osutub võimalikuks arendada mitmesugused omavahel erinevad mehaanikad, samuti,

nagu osutub võimalikuks arendada mitmesuguseid geomeetriaid, sõltuvuses sellest, kuidas on analüütiliselt defineeritud kaare diferentsiaal ds .

On selge, et sisuliselt Hamiltoni printsiibis peavad juba peituma dünaamika põhivõrrandid; väline vahe seisab selles, et Hamiltoni printsiibi sõnastuses esineb integraal, dünaamika põhivõrrandites aga seevastu diferentsiaalid. Matemaatiliste võtete najal, nn. „variatsioonarvutuse“ kohaselt, on tõepoolest võimalik Hamiltoni printsiipi taandada diferentsiaalvõrranditeks. Need nn. „kanoonilised võrrandid“ (Jacobi) omavad kuju

$$\dot{q}_\nu = \frac{\partial H}{\partial p_\nu}, \quad \dot{p}_\nu = -\frac{\partial H}{\partial q_\nu}, \quad (\nu = 1, 2, 3),$$

kus suurused p on defineeritud seostega

$$p_\nu = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\nu}$$

ja

$$H = p_1 \dot{q}_1 + p_2 \dot{q}_2 + p_3 \dot{q}_3 - L.$$

Olgu näiteks suurused q tavalised Cartesiuse koordinaadid \hat{x} , y , z , seega Newtoni alusel

$$L = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \Pi(x, y, z).$$

Siis

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad p_2 = m\dot{y}, \quad p_3 = m\dot{z},$$

kust nähtub, et arvud p osutuvad sel korral impulsivektori projektsioonideks. Edasi on

$$\begin{aligned} H &= m\dot{x}\dot{x} + m\dot{y}\dot{y} + m\dot{z}\dot{z} - \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \Pi(x, y, z) \\ &= \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \Pi(x, y, z) \\ &= \frac{1}{2m} (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + \Pi(x, y, z). \end{aligned}$$

See näitab, et H on kineetilise ja potentsiaalse energia summa, seega punkti koguenergia (see tähendus on suurusel H meelevaldsete koordinaatide q puhul).

Kanoonilised võrrandid omavad sel korral kuju

$$\dot{x} = \frac{1}{m} p_1, \quad \dot{y} = \frac{1}{m} p_2, \quad \dot{z} = \frac{1}{m} p_3$$

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}, \quad \dot{p}_2 = -\frac{\partial \Pi}{\partial y}, \quad \dot{p}_3 = -\frac{\partial \Pi}{\partial z}.$$

Kolm viimast ongi tavalised dünaamika põhivõrrandid, nagu on kerge näha; kolm esimest kordavad vaid impulsivektori definitsiooni.

Kui oleksime lähtunud Lagrange'i funktsiooni valikust Einsteini mehaanika kohaselt, tarvitades jällegi q osas Cartesiuse koordinaate x, y, z , kirjutades seega

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{c^2}} - \Pi(x, y, z),$$

siis oleksime leidnud

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{m\dot{x}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad p_2 = \frac{m\dot{y}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad p_3 = \frac{m\dot{z}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Need on impulsi projektsioonid relativistlikus mehaanikas.

Koguenergia H avaldis oleks nüüd

$$H = p_1\dot{x} + p_2\dot{y} + p_3\dot{z} - L$$

$$= \frac{mv^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \Pi(x, y, z)$$

$$= \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \Pi(x, y, z).$$

On kerge kontrollida, et suuruste p definitsioonide kohaselt

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = c \sqrt{m^2 c^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2},$$

järelikult:

$$H = c \sqrt{m^2 c^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2} + \Pi(x, y, z).$$

Kanoonilised võrrandid oleksid seega:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{cp_1}{\sqrt{m^2c^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}} = \frac{cp_1\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{mc} = \frac{p_1}{m}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}.$$

$$\dot{y} = \dots = \frac{p_2}{m}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$\dot{z} = \dots = \frac{p_3}{m}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}, \quad \dot{p}_2 = -\frac{\partial \Pi}{\partial y}, \quad \dot{p}_3 = -\frac{\partial \Pi}{\partial z}.$$

Kolm esimest neist võrrandeist kordavad jällegi vaid impulsi definitsiooni, kuna kolm viimast moodustavad dünaamika põhi-võrrandid relativistlikul kujul. Väliselt need võrrandid omavad sama kuju, nagu Newtonilgi, kuid impulss on siin teisiti defineeritud. Olgu aga kohe tähendatud, et tavalistel juhtudel, kus $\frac{v}{c}$ osutub õige väikeseks, vahe peaaegu pole märgatav. Tõepoolest relativistlik p_1 näiteks on siis

$$p_1 = \frac{m\dot{x}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \approx \frac{m\dot{x}}{\sqrt{1-0}} = m\dot{x}.$$

Energia avaldises esineb relativistlikus mehaanikas liidetav

$$\begin{aligned} \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} &= mc^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = mc^2 \left[1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8} \frac{v^4}{c^4} + \dots\right] \\ &= mc^2 + \frac{1}{2} mv^2 + \frac{3}{8} mv^2 \frac{v^2}{c^4} + \dots \\ &\approx mc^2 + \frac{1}{2} mv^2, \end{aligned}$$

sest siin ärajäetud liikmeis esinevad suured nimetajad c^2 , c^4 jne.

Liige $\frac{1}{2}mv^2$ on lihtsalt hoog juba Newtoni mehaanika seisukohalt; lisaks viimasele esineb aga Einsteinil veel õige suur liidetav mc^2 (massi „omaenergia“), mis Newtonil ei leia eraldi

arvestamist. Tuleb aga silmas pidada, et seda liidetavat võiks konstandina liita ka II külge, sest II on ju teatavasti määratud vaid meelevaldse lisakonstandini. Siit selgub, et tegelikult, väikese v puhul, Einsteini energia mõiste ühtib Newtoni energia mõistega.

Piirdume nende lühikeste vihjetega, millede eesmärgiks on vaid juhtida lugeja tähelepanu suunale, milles on toimunud mehaanika distsipliinide arendamine ja süvendamine. Mööda minnes mainiksime veel, et kõige uuemal ajal (alates 1924. aastast) on hakatud arendama mehaanikat hoopis erinevas suunas, kus liikumist seotakse teatavate lainete levimisega. See de Broglie poolt rajatud „lainemehaanika“ näib omandavat järjest kasvavat tähtsust eriti aatomites toimuvate protsesside selgitamisel.

A-1177

1177

Hind 3 krooni