

TARTU RIIKLIK ÜLIKOOI

E. REIMERS

MATEMAATILISE
FÜÜSIKA
VÖRRANDID

TARTU 1960

2067

19A 200

TARTU RIIKLIK ÜLIKOOI
MATEMAATILISE ANALÜÜSI KATEEDER

P. Kand.
26. IX 61.

E. REIMERS

MATEMAATILISE
FÜÜSIKA
VÖRRANDID

TARTU 1960

Тартуский государственный университет
г. Тарту, ул. Юликооли, 18
Э. Реймерс
Уравнения математической физики
на эстонском языке

2
TARTU ÜLIKOOLI
RAAMATUKOGU
134200

Vastutav toimetaja G. Kangro
Korrektor E. Oja

=====

TRÜ Rotaprint 1960. Trükipoognaid 7.
Tir. 400 eks. MB 07043. Tell. nr. 432.

Hind rbl. ~~2.40~~
1961.a. ~~rbl. 0.24~~

2-kr.

SISSEJUHATUS.

Matemaatilise füüsika võrrandite kursus on loomulikult jätkuks diferentsiaalvõrrandite kursusele. Tema aineks on mitmesuguseid loodusnähtusi kirjeldavate diferentsiaal-, integraal- ja funktsionaalvõrrandite uurimine ja lahendamine.

Matemaatilise füüsika võrrandite teooria on väga ulatuslik. Käesolevas kursuses käsitleme vaid valitud osi sellest teooriast vastavalt kehtivale programmile matemaatika osakonnas III kursuse üliõpilaste jaoks. Raskemad ja üldhariduslikust seisukohast vähem olulised teoreemide tõestused on välja jäetud. Eriti on käesolevate loengute kirjutamisel silmas peetud iseseisvalt õppijaid. Lugeja peab tundma harilike diferentsiaalvõrrandite teooriat ülikooli kursuse ulatuses, eriti aga oskama harilike diferentsiaalvõrrandite süsteemide lahendamist.

Harilike diferentsiaalvõrrandite kursuses vaadeldakse võrrandeid kujuga

$$(1) \quad F(x, u, u', \dots, u^{(n)}) = 0,$$

kus x on sõltumatu muutuja, $u = u(x)$ on otsitav funktsioon ja $u', \dots, u^{(n)}$ on viimase tuletised kuni järguni n .

Võrrandi (1) lahend sõltub üldiselt rääkides n suvalisest konstandist, s.o.

$$(2) \quad u = u(x, c_1, c_2, \dots, c_n),$$

kus c_1, \dots, c_n on suvalised. Viimaste määramiseks antakse ette veel nn. algtingimused, mida peavad rahuldama otsitav funktsioon u ja tema tuletised kuni järguni $n-1$.

Lahend (2) kujutab endast geomeetriliselt kõveraid xu -tasandil, mida nimetatakse antud diferentsiaalvõrrandi (1) integraalkõveraiks.

Matemaatilise füüsika võrrandite teoorias vaadeldakse aga võrrandeid, mis sisaldavad otsitava mitme muutuja funktsiooni osatuletisi. Seda laadi võrrandite lahendamise juurde jõutakse mitmesuguste loodusnähtuste matemaatilisel uurimisel, kus nähtuse käik kirjeldub mitme muutuja funktsiooni abil.

Matemaatilise füüsika võrrandid jaotatakse järkudesse.

Esimest järku võrrand sisaldab esimest järku osatuletisi. Erijuhul, kui lahend on kahe muutuja funktsioon, võib selle võrrandi üles kirjutada kujul

$$(3) \quad F(x, y, u, u_x, u_y) = 0,$$

kus x, y on sõltumatud muutujad, $u = u(x, y)$ on otsitav funktsioon ning u_x ja u_y on tema osatuletised sõltumatute muutujate järgi. Seega kujutab vaadeldav võrrand funktsionaalset seost viie suuruse x, y, u, u_x, u_y vahel.

Teist järku võrrand sisaldab esimest ja teist järku osatuletisi. Erijuhul, kui lahend on kahe muutuja funktsioon, võib selle võrrandi üles kirjutada kujul

$$(4) \quad F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0,$$

kus x, y on sõltumatud muutujad, $u = u(x, y)$ on otsitav funktsioon ja ülejäänud suurused on tema osatuletised sõltumatute muutujate järgi.

Analoogiliselt defineeritakse ka kõrgemat järku võrrandid, kuid käesolevas kursuses piirdume vaid esimest ja teist järku võrranditega.

Võrrandite (3) ja (4) lahendid $u = u(x, y)$ tähendavad geomeetriliselt pindu ruumis (x, y, u) . Selliseid pindu nimetatakse vastavalt võrrandite (3) ja (4) integraalpindadeks. Siin ja allpool kõikjal on meil alati eeldatud, et neid integraalpindu saab esitada ilmutatud kujul, s.t. kujul

$$u = u(x,y).$$

Nagu harilike diferentsiaalvõrrandite korral, nii ka osatuletistega võrrandite ei ole lahend üheselt määratud. Siin sõltub lahend koguni suvalistest funktsioonidest. Näiteks, kui võrrandis

$$u_y = 0$$

on lahendiks funktsioon $u = u(x,y)$, siis see esitub kujul

$$u = f(x),$$

kus $f(x)$ on suvaline funktsioon. Selleks, et lahend oleks üheselt määratud, antakse ka siin ette teatavaid täiendavaid tingimusi, mille loomus määratakse tavaliselt vastava võrrandi füüsikalise sisu poolt.

Osatuletistega võrrandid peale jaotamist järkudesse liigitatakse veel võrrandi kuju järgi. Nii esinevad lineaarsed, kvaasilineaarsed ja mittelineaarsed võrrandid. Osatuletistega võrrandit nimetatakse lineaarseks, kui ta on lineaarne võrrandis esineva otsitava funktsiooni ja tema osatuletiste suhtes, s.t. kui ta on esimese astme võrrand nende suhtes. Kui võrrand on lineaarne vaid kõrgeimat järku esinevate osatuletiste suhtes, siis nimetatakse teda kvaasilineaarseks. Muudel juhtudel nimetatakse võrrandit mittelineaarseks.

Kirjutame nüüd võrrandid (3) ja (4) üldkujul välja vastavalt sellisele liigitusele.

Esimest järku lineaarne võrrand:

$$au_x + bu_y + cu + d = 0,$$

kus a, b, c, d on x, y funktsioonid;

Esimest järku kvaasilineaarne võrrand:

$$au_x + bu_y + c = 0,$$

kus a, b, c on x, y, u funktsioonid;

Teist järku lineaarne võrrand:

$$au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu + g = 0,$$

kus a, b, \dots, g on x, y funktsioonid;

Teist järku kvaasilineaarne võrrand:

$$au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} + F(x,y,u,u_x,u_y) = 0,$$

kus a, b, c on x, y, u, u_x, u_y funktsioonid.

Allpool teist järku võrrandis kordaja b liikme u_{xy} juures kirjutame kujul $2b$. See võimaldab võrrandi teisendamisel saadud avaldisi lihtsamalt üles kirjutada. Samuti hakka-
me esimest järku esatuletisi u_x ja u_y tähistama lihtsuse mõttes tähtedega p ja q , s.t.

$$p = u_x, \quad q = u_y.$$

I. ESIMEST JÄRKU OSATU-
LETISTEGA VÖRRANDID.

§ 1. Kahe sõltumatu muutujaga kvaasilineaarsed
võrrandid.

Olgu meil antud kahe sõltumatu muutujaga esimest järku kvaasilineaarne osatuletistega võrrand

$$(1) \quad ap + bq = c,$$

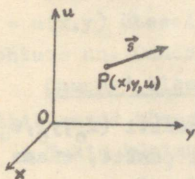
kus $a = a(x,y,u)$, $b = b(x,y,u)$, $c = c(x,y,u)$.

Käesolevas paragrahvis me seame selle võrrandi tarvis Cauchy' ülesande ja uurime selle ülesande lahendamisega seoses olevaid küsimusi, mida illustreerime ühe näitega.

Uurime võrrandit (1) lähemalt. Selleks võtame vaatluse alla ruumi (x,y,u) (vt. joonis 1). Võtame selles ruumis punkti $P(x,y,u)$ ja määrame seal suuna vektoriga

$$\vec{s} = (a,b,c),$$

kus a, b, c on võrrandist (1) ja nende väärtused on võetud punktis P .



Joonis 1.

Määrame sel viisil suuna ruumis (x, y, u) igas punktis. Nii saame ruumis teatava suundade välja. See suundade väli määrab joonte parve, millel puutujate suunad igas punktis langevad ühte välja suunaga selles punktis.

Koostame diferentsiaalvõrrandite süsteemi selle joonte parve parameetriseliste võrrandite leidmiseks. Kirjutame need võrrandid kujul

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad u = u(s),$$

kus võrrandite paremad pooled sõltuvad veel kolmest konstandist, mida me ei märgi. Teatavasti vektor

$$\vec{m} = \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{du}{ds} \right)$$

on iga s korral joonepuutuja suunaga. Meil on otsitavatel joontel puutuja suunaga vektor $\vec{s} = (a, b, c)$. Seepärast olgu

$$\frac{dx}{ds} = a, \quad \frac{dy}{ds} = b, \quad \frac{du}{ds} = c,$$

ehk teisiti kirjutades

$$(4) \quad \frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{du}{c} = ds.$$

Saime harilike diferentsiaalvõrrandite süsteemi kolmest võrrandist, mis kujutavad seost otsitavate joonte diferentsiaalide vahel.

Süsteemi (4) integreerimisel saame kolm parameetri s funktsiooni

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad u = u(s),$$

kusjuures igaüks neist funktsioonidest sõltub veel kolmest integreerimiskonstandist. Need kolm funktsiooni kujutavadki otsitava parve jooni vaadeldavas ruumis (x, y, u) . Ühe joone s.t. süsteemi (2) ühe integraalkõvera saame, kui fikseerime integreerimiskonstandid algtingimuste abil. Nimelt loeme, et $s = 0$ korral on $x = x_0$, $y = y_0$, $u = u_0$. Siis võime süsteemi (2) lahendi üles kirjutada kujul

$$(3) \quad \begin{cases} x = x(s, x_0, y_0, u_0), \\ y = y(s, x_0, y_0, u_0), \\ u = y(s, x_0, y_0, u_0). \end{cases}$$

Integraalköver (3) läbib, nagu näha, ruumi punkti (x_0, y_0, u_0) . Muutes algtingimusi, s.t. võttes ruumi teisi punkte, saame kõik parve jooned.

Vaatame nüüd, millises seoses on leitud joonte parv võrrandi (1) integraalpinnaga $u = u(x, y)$. Leiame selle integraalpinna normaali \vec{n} . Kui pind on antud kujul $\varphi(x, y, u) = 0$, siis tema normaaliks punktis $P(x, y, u)$ on vektor

$$\vec{n} = (\varphi_x, \varphi_y, \varphi_u),$$

kus tuletiste $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_u$ väärtused on võetud punktis P . Käesoleval juhul on

$$\varphi(x, y, u) = u(x, y) - u = 0,$$

kust $\varphi_x = u_x$, $\varphi_y = u_y$ ja $\varphi_u = -1$. Seega on integraalpinna $u = u(x, y)$ normaaliks vektor

$$\vec{n} = (p, q, -1).$$

Kirjutame võrrandi (1) üles kujul

$$(4) \quad ap + bq + c(-1) = 0,$$

siis näeme, et ta kujutab endast suunavektorite $\vec{s} = (a, b, c)$ ja pinna normaalide $\vec{n} = (p, q, -1)$ ristseisu tunnust. Seega asetseb suundade väli me integraalpinnaal. Järelikult asetsevad süsteemi (2) poolt määratud jooned otsitava integraalpinnaal $u = u(x, y)$ ja katavad seda.

Nimetame süsteemi (2) karakteristlikuks süsteemiks võrrandile (1) ja tema poolt määratud jooni viimase karakteristlikuks.

Nüüd võime öelda, et kui mingi pind $u = u(x, y)$ on moodustatud võrrandi (1) karakteristikuteest, siis on täidetud ristseisu tingimus (4) ja järelikult vaadeldav pind $u = u(x, y)$ on võrrandi (1) integraalpinna. Seega, teades võrrandi (1) karakteristikuid, me saame moodustada võrrandi (1) integraalpinna.

Selleks, et määrata võrrandi (1) integraalpinna $u = u(x,y)$ üheselt, antakse veel juurde lisatingimusi. Siin kohtume nn. Cauchy' ülesandega.

Cauchy' ülesanne. Leida võrrandi (1) integraalpinna, mis läbib antud kõverat g .

Tekib küsimus, kas selline ülesanne on alati lahendatav. Selgitame seda, laskumata üksikasjalisse tõestusse.

Vaatleme esialgu juhtu, kus kõver g ei ole karakteristik. Olgu P kõvera g mingi punkt. Leiame võrrandi (1) karakteristikud, s.t. lahendame süsteemi (2), ja valime saadud karakteristikute seast sellise, mis läbib punkti P . See karakteristik on üheselt määratud, sest igat punkti läbib vaid üks karakteristik. Määrame kirjeldatud viisil kõvera g igale punktile teda läbiva karakteristiku. Tulemuseks saame terve parve karakteristikuid, mis moodustavad pinna, ja see ongi siis võrrandi (1) integraalpinna, mis rahuldab Cauchy' ülesande tingimusi ja on üheselt määratud.

Kui kõver g on ise karakteristik, siis eespool kirjeldatud viisil integraalpinna moodustada ei saa. Näiteks, kui võtaksime sel kõveral g mingi punkti P ja otsiksime karakteristikute seast välja sellise, mis läbib seda punkti, siis saame sama kõvera g . Osutub, et sel korral on Cauchy' ülesandel lõpmatu palju lahendeid. See nähtub järgmisest. Võtame mingi kõvera g' , mis läbib kõverat g . Kõver g' pole karakteristik (sest igat punkti läbib vaid üks karakteristik) ja seepärast saab läbi tema iga punkti tõmmata eespool kirjeldatud viisil karakteristiku (üks nendest on siis ka g). Need karakteristikud moodustavad integraalpinna, mis rahuldab Cauchy' ülesande tingimusi. Kuna aga kõver g' on vabalt valitav, siis on selge, et Cauchy' ülesandel on antud juhul lõpmatu palju lahendeid.

Võib muidugi juhtuda, et Cauchy' ülesandel üldse ei ole lahendit. See leiab aset siis, kui kõverat g läbivad karakteristikud ei moodusta lähemas ümbruses pinna, millel oleks ilmutatud kujul võrrand $u = u(x,y)$ ja vajalikke pidevaid tuletisi. Näiteks, selline olukord esineb siis, kui karak-

teristikud on paralleelsed u -teljega.

Näitame nüüd, kuidas karakteristikute moodustada integraalpind, mis rahuldaks Cauchy' ülesande tingimusi. Olgu kõvera g võrrand antud parameetrilisel kujul

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad u = f_3(t).$$

Valime karakteristikute (3) algtingimused järgmiselt:

$$(5) \quad x_0 = f_1(t), \quad y_0 = f_2(t), \quad u_0 = f_3(t).$$

Kuna karakteristikud (3) läbivad punkte (x_0, y_0, u_0) , siis valiku (5) tõttu on need kõvera g punktid. Seega saame sel korral vaid need karakteristikud, mis läbivad kõverat g . Paigutades nüüd algtingimused (5) võrrandisse (3), saame

$$x = x(s, t), \quad y = y(s, t), \quad u = u(s, t),$$

ja need võrrandid kujutavadki kõverat g läbiva võrrandi (1) integraalpinna parameetrilisi võrrandeid.

Allpool paragrahvis 3 üldistame sellise integraalpinna leidmise võtte mittelineaarse võrrandi jaoks.

Näide. Leida võrrandi $xp + yq - 2u = 0$ integraalpind läbi kõvera $x = t, \quad y = t^2, \quad u = t^3$.

Lahendus. Moodustame karakteristikliku süsteemi (2), saame

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{du}{2u} = ds.$$

Seda süsteemi lahendades saame

$$x = C_1 e^s, \quad y = C_2 e^s, \quad u = C_3 e^{2s}.$$

Määrame konstandid algtingimuste abil. Olgu $s = 0$ korral $x = x_0, \quad y = y_0, \quad u = u_0$, siis

$$C_1 = x_0, \quad C_2 = y_0, \quad C_3 = u_0,$$

ja seega

$$x = x_0 e^s, \quad y = y_0 e^s, \quad u = u_0 e^{2s}.$$

Valime nüüd algtingimused vastavalt võrdustele (5), saame

$$x_0 = t, \quad y_0 = t^2, \quad u_0 = t^3.$$

Seega on otsitava integraalpinna võrrand parameetrilisel kujul

$$x = te^s, \quad y = t^2e^s, \quad u = t^3e^{2s}.$$

Elimineerides neist võrrandeist parameetrid s ja t , saame otsitava integraalpinna ilmutatud võrrandi

$$u = xy.$$

§ 2. Kahe sõltumatu muutujaga mittelineaarsed võrrandid.

Olgu meil antud kahe sõltumatu muutujaga esimest järku mittelineaarne võrrand

$$(1) \quad F(x, y, u, p, q) = 0,$$

kus x, y on sõltumatud muutujad, $u = u(x, y)$ on otsitav funktsioon, $p = u_x$ ja $q = u_y$.

Käesolevas paragrahvis tuletame karakteristikliku süsteemi võrrandile (1) ning anname võrrandi jaoks karakteristikute mõiste.

Uurime lähemalt antud võrrandi (1) geomeetrilist tähendust ruumis (x, y, u) . Selle ruumi igas fikseeritud punktis $P(x, y, u)$ kujutab võrrand (1) endast seost suuruste p ja q vahel. Võime seepärast lugeda q muutuja p funktsiooniks, s.o. $q = q(p)$, ehk parameetrilisel kujul

$$p = p(s), \quad q = q(s).$$

Vektor $\vec{n} = (p, q, -1)$, nagu eelmises paragrahvis nägime, on integraalpinna $u = u(x, y)$ normaaliks punktis $P(x, y, u)$. Seega kujutab endast võrrand (1) igas fikseeritud punktis $P(x, y, u)$ seost normaali \vec{n} koordinaatide vahel. Kõigi selliste normaalide hulk, mille koordinaadid p ja q rahuldavad võrrandit (1), moodustab koonuse tipuga punktis P . Seega näeme, et igat punkti P läbib lõpmata palju võrrandi (1) integraalpindu.

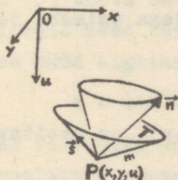
Vaatleme nende integraalpindade puutetasandite hulka antud punktis $P(x, y, u)$. Igaüks neist on risti ühe normaaliga $\vec{n} = (p, q, -1)$. Selliste puutetasandite võrrandid võime üles

kirjutada kujul

$$(2) \quad p(s)(X-x) + q(s)(Y-y) - (U-u) = 0,$$

kus x, y, u on punkti P koordinaadid ja X, Y, U on puute-
tasandi jooksvad koordinaadid. Andes parameetrile s mitme-
suguseid väärtusi, saame kõik puutetasandid, mis läbivad punkti P .

Nende puutetasandite mähispind kujutab endast ka koonust, mida nimetame koonuseks T (vt. joonis 2).



Tasandid (2) puudutavad seega koonust T mööda tema moodustajaid m .

Leiame moodustajate m sihivektorid \vec{s} , mida allpool läheb vaja. Leiame kõigepealt koonuse T võrrandi. Selleks diferentseerime võrrandit (2) parameetri s järgi, saame

$$(3) \quad \frac{dp}{ds}(X-x) + \frac{dq}{ds}(Y-y) = 0.$$

Joonis 2.

Võrrandid (2) ja (3) kokku annavadki koonuse T võrrandi. Kuna (2) ja (3) on tasandite võrrandid ja moodustajate m punktid peavad neid rahuldama, siis on moodustajad m nende tasandite lõikejooned.

Asendame võrrandis (3) tundmatud suurused $\frac{dp}{ds}$ ja $\frac{dq}{ds}$. Selleks diferentseerime võrrandit (1) parameetri s järgi, saame

$$F_p \frac{dp}{ds} + F_q \frac{dq}{ds} = 0.$$

Viimasest võrdusest (oletades, et F_p ja F_q ei ole korraga võrdsed nulliga) avaldame kas $\frac{dp}{ds}$ või $\frac{dq}{ds}$ ja paigutame selle võrrandisse (3), siis saame viimase üles kirjutada kujul

$$(3') \quad F_q(X-x) - F_p(Y-y) = 0.$$

Nüüd võime öelda, et moodustajad m on tasandite (2) ja (3') lõikejooned. Nende tasandite normaalideks on vastavalt vektorid $\vec{n} = (p, q, -1)$ ja $\vec{n}_1 = (F_q, -F_p, 0)$. Moodustajate sihivektoriteks on nendega risti olevad vektorid, s.t. vektorid

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}.$$

Seega

$$\vec{s} = (F_p, F_q, pF_p + qF_q).$$

Iga selline vektor \vec{s} asetseb igas antud punktis $P(x,y,u)$ ühe integraalpinna puutetasandil, mis läbib seda punkti, määrates integraalpinna ühe puutuja suuna.

Kvaasilineaarse võrrandi korral saime otsitava integraalpinna katta karakteristikutega. Näitame, et kui meil on teada võrrandi (1) integraalpinna, siis saab teda ka katta teatavate joontega, milliseid ka siin nimetatakse karakteristikuks.

Olgu meil antud võrrandi (1) mingi integraalpinna $u = u(x,y)$. Võtame sel punkti $P(x,y,u)$ ja selles puutetasandil. Sellel puutetasandil asetseb koonuse T üks moodustaja m oma sihivektoriga \vec{s} , mis määrab suuna selles punktis P . Kordame sama mõttekäiku antud pinna iga punkti korral. Tulemuseks saame sel integraalpinnal suundade välja. See suundade väli määrab jällegi joonte parve, mis katab kogu pinda. Neid jooni nimetatakse antud integraalpinna $u = u(x,y)$ karakteristikuks.

Koostame diferentsiaalvõrrandite süsteemi nende karakteristikute leidmiseks. See tuleb täiesti analoogiliselt kvaasilineaarsele võrrandile järgmine:

$$(4) \quad \frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = \frac{du}{pF_p + qF_q} = ds,$$

kus nimetajas on pinnal $u = u(x,y)$ oleva suundade välja sihivektorite \vec{s} koordinaadid.

Süsteemi (4) integreerimisel on vaja teada p ja q väärtusi, kuid need võime arvutada antud integraalpinna võrrandist $u = u(x,y)$. Seepärast võib ka suurused F_p ja F_q lugeda vaid x,y,u funktsioonideks. Neil eeldustel on süsteem (4) integreeritav.

Süsteemi (4) integreerimine annabki meile antud integraalpinnal asetsevate karakteristikute parve. Kui võtame

võrrandi (1) mõne teise integraalpinna, siis sellel saame ka samal viisil moodustada suundade välja ning leida tema karakteristikud süsteemi (4) integreerimisel, kasutades jällegi antud pinda p ja q määramiseks. Seega sõltub süsteemi (4) integreerimine integraalpinnast $u = u(x,y)$ ja iga kord annab sellele pinnale vastavad karakteristikud.

Katsume süsteemi (4) nii täiendada uute võrranditega, et tema integreerimine ei sõltuks integraalpinnast $u = u(x,y)$. Selleks leiame puuduvad võrrandid p ja q jaoks, mis asendaksid pinda $u = u(x,y)$.

Diferentseerime suurusi p ja q parameetri s järgi, saame

$$\frac{dp}{ds} = p_x \frac{dx}{ds} + p_y \frac{dy}{ds},$$

$$\frac{dq}{ds} = q_x \frac{dx}{ds} + q_y \frac{dy}{ds}.$$

Eeldame nüüd veel, et $u = u(x,y)$ omab kuni teise järguni pidevaid osatuletisi, siis

$$p_y = u_{xy} = u_{yx} = q_x.$$

Edasi näeme süsteemist (4), et

$$\frac{dx}{ds} = F_p, \quad \frac{dy}{ds} = F_q.$$

Seega

$$(5) \quad \frac{dp}{ds} = p_x F_p + q_x F_q, \quad \frac{dq}{ds} = p_y F_p + q_y F_q.$$

Diferentseerime nüüd võrrandit (1) x ja y järgi, saame

$$(6) \quad \begin{cases} F_x + F_u p + F_p p_x + F_q q_x = 0, \\ F_y + F_u q + F_p p_y + F_q q_y = 0. \end{cases}$$

Võrdustest (5) ja (6) saame, et

$$\frac{dp}{ds} = -(F_x + F_u p), \quad \frac{dq}{ds} = -(F_y + F_u q).$$

Lisades need kaks viimast võrrandit p ja q kohta süsteemile (4), saame süsteemi

$$(7) \quad \frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = \frac{du}{pF_p + qF_q} = \frac{-dp}{F_x + F_u p} = \frac{-dq}{F_y + F_u q} = ds.$$

Tulemuseks on meil viiest võrrandist koosnev harilike diferentsiaalvõrrandite süsteem. Süsteemi (7) nimetatakse võrrandi (1) karakteristlikuks süsteemiks.

Süsteemi (7) integreerimisel saame 5 parameetri s funktsiooni:

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad u = u(s), \quad p = p(s), \quad q = q(s),$$

kusjuures igaüks neist funktsioonidest sõltub veel viiest integreerimiskonstandist. Kolm esimest funktsiooni määravad jooni ruumis, mis ongi võrrandi (1) integraalpindade karakteristikud. Ühe karakteristikuga saame, kui fikseerime konstandid algtingimuste abil. Nimelt loeme, et $s=0$ korral on $x = x_0$, $y = y_0$, $u = u_0$, $p = p_0$, $q = q_0$. Algtingimused peavad muidugi olema nii valitud, et võrrand (1) on rahuldatud, s.t. et kehtib

$$F(x_0, y_0, u_0; p_0, q_0) = 0.$$

Nüüd võime anda karakteristikute definitsiooni süsteemi (7) kaudu: karakteristikliku süsteemi (7) poolt määratud jooni, mille algtingimused rahuldavad võrrandit (1), nimetatakse karakteristikuiks võrrandile (1).

Süsteem (7) määrab seega võrrandi (1) kõigil integraalpindadel olevad karakteristikud. Juhul, kui integraalpind on antud, siis süsteemi lahendamiseks vajalikud p ja q võime leida selle pinna võrrandi diferentseerimisel. Seega tuleb sel korral lahendada vaid süsteem (4), mis annab siis vaadeldaval pinnal olevad karakteristikud.

§ 3. Cauchy' karakteristikute meetod.

Selles paragrahvis vaatleme võrrandi

$$(1) \quad F(x, y, u, p, q) = 0$$

lahendamist Cauchy' karakteristikute meetodil.

Moodustame võrrandile (1) karakteristikliku süsteemi

$$(2) \quad \frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = \frac{du}{pF_p + qF_q} = \frac{-dp}{F_x + F_u p} = \frac{-dq}{F_y + F_u q} = ds.$$

ja leiame karakteristikud võrrandile (1). Selleks integreerime süsteemi (2) algtingimustel, et $s = 0$ korral $x = x_0$, $y = y_0$, $u = u_0$, $p = p_0$, $q = q_0$, kusjuures

$$(3) \quad F(x_0, y_0, u_0, p_0, q_0) = 0.$$

Olgu süsteemi (2) lahendus avaldatud parameetri s ja algtingimuste kaudu järgmiselt:

$$(4) \quad \begin{cases} x = x(s, x_0, y_0, u_0, p_0, q_0), \\ y = y(s, x_0, y_0, u_0, p_0, q_0), \\ u = u(s, x_0, y_0, u_0, p_0, q_0), \\ p = p(s, x_0, y_0, u_0, p_0, q_0), \\ q = q(s, x_0, y_0, u_0, p_0, q_0). \end{cases}$$

Näitame, et süsteemist (4) saab koostada integraalpinna võrrandile (1). Süsteem (4) annab meile kõik võimalikud karakteristikud, mis läbivad punkti (x_0, y_0, u_0) . Muutes punkti (x_0, y_0, u_0) (samuti suurusi p_0 ja q_0), saame kõik võimalikud karakteristikud. Integraalpinna koostamiseks tuleb nende seast välja valida üks sobiv perekond karakteristikuid. Selleks valime algtingimused ühe parameetri t funktsioonideks, st. olgu

$$(5) \quad x_0 = x_0(t), \quad y_0 = y_0(t), \quad u_0 = u_0(t), \quad p_0 = p_0(t), \quad q_0 = q_0(t).$$

Muidugi peavad funktsioonid (5) iga t korral rahuldama tingimust (3).

Paigutame algtingimused (5) lahendisse (4), saame

$$(6) \quad x = x(s, t), \quad y = y(s, t), \quad u = u(s, t),$$

$$(7) \quad p = p(s, t), \quad q = q(s, t).$$

Siin on võrrandid (6) teatava pinna parameetrilised võrrandid ruumis (x, y, u) .

Näitame nüüd, et pind (6) kujutabki teatavatel eeldustel võrrandi (1) integraalpinda. Kõigepealt on muidugi selge, et (6) ja (7) koos rahuldavad võrrandit (1), sest nad saime ju süsteemist (4), mille lahendid, karakteristikud, asetse-

vad integraalpindadel, s.t. rahuldavad võrrandid (1). Kogu küsimus on selles, kas võrrandite (7) poolt määratud funktsioonid p ja q on pinna $u = u(x,y)$ osatuletisteks x ja y järgi.

Olgu determinant

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_s & y_s \\ x_t & y_t \end{vmatrix} \neq 0$$

vaadeldava piirkonna igas punktis. Siis võime pinna võrrandi (6) kirjutada ilmutatud kujul $u = u(x,y)$. Diferentseerime saadud võrrandit $u = u(x,y)$ s ja t järgi, saame

$$(8) \quad \frac{\partial u}{\partial s} = p \frac{\partial x}{\partial s} + q \frac{\partial y}{\partial s},$$

$$(9) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = p \frac{\partial x}{\partial t} + q \frac{\partial y}{\partial t}.$$

Seega peavad osatuletised p ja q rahuldama võrrandeid (8) ja (9). Kuna meil $\Delta \neq 0$, siis võime väita ka vastupidi (ühese lahenduvuse tõttu), et kui p ja q rahuldavad võrrandeid (8) ja (9), siis on nad pinna $u = u(x,y)$ osatuletisteks x ja y järgi. Paigutame nüüd p ja q avaldised (7) võrranditesse (8) ja (9) ning uurime saadud võrduste kehtivust.

Osutub, et (8) kehtib alati, kuna ta on järelduseks süsteemi (2) kolmest esimesest võrrandist, s.t. võrrandeist

$$\frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = \frac{du}{pF_p + qF_q} = ds,$$

millest saame, et

$$\frac{pdx}{pF_p} = \frac{qdy}{qF_q} = \frac{du}{pF_p + qF_q} = \frac{pdx + qdy}{pF_p + qF_q},$$

kust

$$du = pdx + qdy.$$

Kuna mööda karakteristikuid, kus $t = \text{const}$, kehtib

$$dx = \frac{\partial x}{\partial s} ds \quad dy = \frac{\partial y}{\partial s} ds \quad du = \frac{\partial u}{\partial s} ds,$$

siis saame

$$\frac{\partial u}{\partial s} ds = p \frac{\partial x}{\partial s} ds + q \frac{\partial y}{\partial s} ds,$$

mis ütlebki, et (8) kehtib.

Vaatleme nüüd, millal kehtib võrdus (9). Selleks tuleb näidata, millistel tingimustel

$$L = \frac{\partial u}{\partial t} - p \frac{\partial x}{\partial t} - q \frac{\partial y}{\partial t}$$

on indentselt võrdne nulliga.

Diferentseerime avaldist L s järgi, saame

$$\frac{\partial L}{\partial s} = \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial s} - p \frac{\partial^2 x}{\partial t \partial s} - q \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial s} - \frac{\partial p}{\partial s} \frac{\partial x}{\partial t} - \frac{\partial q}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial t}.$$

Diferentseerime võrdust (8) t järgi (võrduse (8) kehtivust juba nägime), viies seal kõik liikmed vasakule poole, siis

$$0 = \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial t} - p \frac{\partial^2 x}{\partial s \partial t} - q \frac{\partial^2 y}{\partial s \partial t} - \frac{\partial p}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial s} - \frac{\partial q}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial s}.$$

Lahutame selle võrduse eelmisest (eeldades osatuletiste pidevust, mille tõttu tuletise võtmise järjekord pole oluline). Saame

$$\frac{\partial L}{\partial s} = \frac{\partial p}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial q}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial s} - \frac{\partial p}{\partial s} \frac{\partial x}{\partial t} - \frac{\partial q}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial t}.$$

Asendame siin suurused $\frac{\partial x}{\partial s}$, $\frac{\partial y}{\partial s}$, $\frac{\partial p}{\partial s}$, $\frac{\partial q}{\partial s}$ nende avaldistega süsteemist (2), saame

$$\frac{\partial L}{\partial s} = \frac{\partial p}{\partial t} F_p + \frac{\partial q}{\partial t} F_q + (F_x + F_u p) \frac{\partial x}{\partial t} + (F_y + F_u q) \frac{\partial y}{\partial t}.$$

Diferentseerime nüüd võrrandit (1) t järgi (võrrandit (1) võime kasutada, sest teda rahuldavad p ja q avaldised (7) koos võrdustega (6)), saame

$$0 = F_x \frac{\partial x}{\partial t} + F_y \frac{\partial y}{\partial t} + F_u \frac{\partial u}{\partial t} + F_p \frac{\partial p}{\partial t} + F_q \frac{\partial q}{\partial t}.$$

Lahutame selle võrduse eelmisest, siis

$$\frac{\partial L}{\partial s} = F_u p \frac{\partial x}{\partial t} + F_u q \frac{\partial y}{\partial t} - F_u \frac{\partial u}{\partial t}$$

ehk

$$\frac{\partial L}{\partial s} = F_u (p \frac{\partial x}{\partial t} + q \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t}).$$

Seega

$$\frac{\partial L}{\partial s} = -F_u L.$$

Saadud võrrand kujutab muutuja s suhtes (lugedes $t = \text{const}$) harilikku diferentsiaalvõrrandit, kus otsitav on funktsioon $L = L(s)$. Integreerimiseks kirjutame võrrandi kujul

$$\frac{1}{L} \frac{\partial L}{\partial s} = -F_u \text{ ehk } \frac{\partial}{\partial s}(\ln L) = -F_u,$$

kust on näha, et $\ln L$ on funktsiooni $-F_u$ algfunktsioon muutuja s suhtes. Seega

$$-\int_0^s F_u ds = \ln |L(s)| \Big|_0^s = \ln |L(s)| - \ln |L(0)|,$$

kust

$$L(s) = L(0)e^{-\int_0^s F_u ds}.$$

Siit näeme $L(s) = 0$ siis ja ainult siis, kui $L(0) = 0$, s.t. kui

$$(10) \quad \frac{\partial u_0}{\partial t} - p_0 \frac{\partial x_0}{\partial t} - q_0 \frac{\partial y_0}{\partial t} = 0.$$

Seega peavad algtingimused rahuldama peale tingimuse (3) veel tingimust (10).

Sõnastame nüüd Cauchy' ülesande, mis oli antud paragrahvis 1, käesoleva juhu jaoks: leida võrrandi (1) integraalpind, mis läbib antud kõverat g .

Kuidas integraalpinda võrrandile (1) leida, nägime juba eelpool. Küsimus on selles, kuidas nende seast saada just sellist, mis läbib kõverat g .

Olgu kõvera g võrrand antud parameetrilisel kujul

$$x = f_1(t), y = f_2(t), u = f_3(t).$$

Valime funktsioonidest (5) kolm esimest järgmiselt:

$$(11) \quad x_0 = f_1(t), y_0 = f_2(t), u_0 = f_3(t).$$

Võrrandi (1) karakteristikud läbisid punkte (x_0, y_0, u_0) ja vaku (11) tõttu on need punktid kõvera g punktideks. Seega algtingimuste (11) korral saame vaid need võrrandi (1) karakteristikud, mis läbivad kõverat g .

Ülejäänud kaks funktsiooni $p_0(t)$ ja $q_0(t)$ määrame tingimustest (3) ja (10), mida algtingimused peavad rahuldama,

kusjuures seal x_0, y_0, u_0 asendame võrdustega (11). Nii jääb kaks võrrandit kahe tundmatuga. Paigutades leitud algtingimused süsteemi (4) esimesse kolme võrrandisse, saame võrrandi (1) integraalpinna parameetrilised võrrandid (6). See pind läbib parajasti kõverat g , sest ta koosneb karakteristikute test, mis lõikavad kõverat g .

Märkus. Cauchy' karakteristikute meetod on rakendatav erijuhuna muidugi ka kvaasilineaarsete võrrandite korral, mida vaatlesime paragrahvis 1, sest kusagil me ei nõudnud, et võrrand oleks tingimata mittelineaarne.

Kvaasilineaarse võrrandi korral esitub võrrand (1) kujul

$$F = ap + bq - c = 0,$$

kus a, b, c on x, y, u funktsioonid.

Selle võrrandi karakteristikute leidmiseks on küllalt võtta süsteemist (2) kolm esimest võrrandit

$$\frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = \frac{du}{pF_p + qF_q} = ds,$$

sest nüüd

$$F_p = a, F_q = b, pF_p + qF_q = c,$$

ja me saame

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{du}{c} = ds,$$

mis on kvaasilineaarse võrrandi karakteristiklik süsteem, nagu paragrahvis 1 nägime.

Käesolevas peatükis tegime Cauchy' meetodi vaatlemisel mitmesuguseid eeldusi, mille kehtivust me ei uurinud. Cauchy' meetodi üksikasjalik käsitus leidub Smirnovi õpikus IV köites lk. 329.

Näide. Leida võrrandi

$$F = p^2 - q^2 - 2u = 0$$

integraalpinde läbi kõvera $x = 0, u = (1 + y)^2$.

Lahendus: Kasutame Cauchy' karakteristikute meetodit.

Koostame karakteristikliku süsteemi (2). Selleks arvutame vajalikud tuletised:

$$F_p = 2p, F_q = -2q, F_u = -2, F_x = 0, F_y = 0,$$

ja paigutame süsteemi (2). Korrutame seal lugejad kahega ja tähistame siis suhte ds abil, saame

$$\frac{dx}{p} = \frac{dy}{-q} = \frac{du}{p^2 - q^2} = \frac{-dp}{-p} = \frac{-dq}{-q} = ds.$$

Integreerime saadud süsteemi, alustades viimasest kahest võrrandist, mis on iseseisvalt integreeritavad. Saame

$$\frac{dp}{p} = ds, \ln|p| = s + \ln|C_1|, |p| = |C_1|e^s.$$

Analoogiliselt saame $|q| = |C_2|e^s$. Olgu nüüd $s = 0$ korral $p = p_0$ ja $q = q_0$, siis $C_1 = p_0$, $C_2 = q_0$ ja me saame lõplikult

$$p = p_0 e^s, q = q_0 e^s.$$

Integreerime nüüd ülejäänud võrrandid

$$dx = p_0 e^s ds, dy = -q_0 e^s ds, du = (p_0^2 - q_0^2) e^{2s} ds.$$

Saame

$$x = p_0 e^s + C_3, y = -q_0 e^s + C_4, u = \frac{1}{2}(p_0^2 - q_0^2) e^{2s} + C_5.$$

Olgu $s = 0$ korral $x = x_0$, $y = y_0$, $u = u_0$, siis saame, arvestades, et lähtevõrrandi järgi $p_0^2 - q_0^2 = 2u_0$,

$$C_3 = x_0 - p_0, C_4 = y_0 + q_0, C_5 = 0.$$

Järelikult

$$\begin{cases} x = x_0 + p_0(e^s - 1), \\ y = y_0 - q_0(e^s - 1), \\ u = u_0 e^{2s}. \end{cases}$$

Saadud tulemus vastab süsteemile (4).

Esitame nüüd antud kõvera võrrandid parameetrilisel kujul:

$$x = 0, y = t - 1, u = t^2.$$

Valime vastavalt võrdustele (11)

$$x_0 = 0, y_0 = t - 1, u_0 = t^2.$$

Ülejäänud algtingimused leiame tingimustest (3) ja (10), saame

$$p_0^2 - q_0^2 - 2t^2 = 0.$$

$$2t - q_0 = 0,$$

kust $q_0 = 2t$ ja $p_0 = \pm\sqrt{6}t$.

Seega tuleb edasi vaadelda kahte juhtumit.

1) Olgu $p_0 = \sqrt{6}t$, $q_0 = 2t$.

Paigutame saadud algtingimused leitud x, y, u avaldistesse, saame pinna võrrandi

$$\begin{cases} x = \sqrt{6}t(e^s - 1), \\ y = t - 1 - 2t(e^s - 1), \\ u = t^2 e^{2s}, \end{cases}$$

mis ongi otsitav integraalpinna läbi antud kõvera (kui $s = 0$, siis saame kõvera punktid).

Elimineerime parameetrid s ja t , saame:

$$\frac{x}{\sqrt{6}} = te^s - t, te^s = \frac{x}{\sqrt{6}} + t,$$

$$y = t - 1 - 2\frac{x}{\sqrt{6}}, \text{ sest } t(e^s - 1) = \frac{x}{\sqrt{6}}, t = y + 1 + 2\frac{x}{\sqrt{6}}.$$

Seega

$$\sqrt{u} = te^s = \frac{x}{\sqrt{6}} + t = \frac{x}{\sqrt{6}} + y + 1 + \frac{2x}{\sqrt{6}},$$

ehk

$$\sqrt{u} = \sqrt{\frac{3}{2}}x + y + 1,$$

kust saame ülesande lahendi leida ilmutatud kujul. Kuid me ülesandel on veel teine lahend, mille saame järgmiselt.

2) Olgu $p_0 = -\sqrt{6}t$, $q_0 = 2t$, siis analoogiliselt eelmisele juhule saame

$$\begin{cases} x = -\sqrt{6}t(e^s-1), \\ y = t - 1 - 2t(e^s-1), \\ u = t^2 e^{2s}, \end{cases}$$

Need võrrandid kujutavad ka me võrrandi integraalpinda, mis läbib antud kõverat.

Elimineerides parameetrid s ja t , saame

$$\sqrt{u} = y + 1 - \sqrt{\frac{5}{2}}x.$$

Elimineerides ka p ja q avaldistest parameetrid s ja t , näeme, et p ja q on antud pinna võrrandi osatuletisteks.

II. TEIST JÄRKU OSATULETIS - TEGA VÖRRANDID.

§ 1. Kahe sõltumatu muutujaga võrrandite liigitus.

Olgu antud kahe muutujaga teist järku kvaasilineaarne võrrand

$$(1) \quad au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0,$$

kus a, b, c on x, y funktsioonid.

Käesolevas paragrahvis uurime seda võrrandit (1) lähemalt, et selgitada tema lihtsustamise võimalusi.

Valime x ja y asemele uued muutujad ja järgmiselt:

$$(2) \quad \xi = \psi(x, y), \quad \eta = \varphi(x, y),$$

kus olgu

$$\begin{vmatrix} \varphi_x & \psi_x \\ \varphi_y & \psi_y \end{vmatrix} \neq 0$$

vaadeldava piirkonna igas punktis (funktsioonid φ ja ψ on siis teineteisest sõltumatud). Veel eeldame, et funktsioonid φ ja ψ omavad esimest ja teist järku pidevaid osatuletisi, siis saab võrdustest (2) avaldada x, y muutujate ξ, η funktsioonidena, kusjuures need funktsioonid on pidevad ja omavad kuni teise järguni pidevaid osatuletisi.

Pärast muutuja vahetust on otsitav funktsioon u ξ, η funktsioon. ξ ja η omakorda (2) järgi on x, y funktsioonid. See asjaolu võimaldab kohe leida asendamiseks vajalikud osatuletised:

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x, \quad u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y,$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} \xi_x^2 + 2u_{\xi\eta} \xi_x \eta_x + u_{\eta\eta} \eta_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx},$$

$$u_{xy} = u_{\xi\xi} \xi_x \xi_y + u_{\xi\eta} (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + u_{\eta\eta} \eta_x \eta_y + u_\xi \xi_{xy} + u_\eta \eta_{xy},$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi} \xi_y^2 + 2u_{\xi\eta} \xi_y \eta_y + u_{\eta\eta} \eta_y^2 + u_\xi \xi_{yy} + u_\eta \eta_{yy}.$$

Asetame saadud osatuletised võrdusesse (1), saame teisendatud võrrandi kujul

$$(3) \quad a_1 u_{\xi\xi} + 2b_1 u_{\xi\eta} + c_1 u_{\eta\eta} + F_1(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) = 0,$$

kus

$$(4) \quad \begin{cases} a_1 = a \xi_x^2 + 2b \xi_x \xi_y + c \xi_y^2, \\ b_1 = a \xi_x \eta_x + b (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + c \xi_y \eta_y, \\ c_1 = a \eta_x^2 + 2b \eta_x \eta_y + c \eta_y^2. \end{cases}$$

Selleks, et lihtsustada võrrandit (1), tuleb muutuja vahetus nii valida, et teisendatud võrrandis (3) mõni kordaja tuleks võrdne nulliga. Näiteks selleks, et a_1 ja c_1 oleksid võrdsed nulliga, tuleb muutujad (2) nii valida, et oleks

$$a \xi_x^2 + 2b \xi_x \xi_y + c \xi_y^2 = 0,$$

$$a \eta_x^2 + 2b \eta_x \eta_y + c \eta_y^2 = 0.$$

Küsimus on selles, kuidas leida sobivad uued muutujad ξ, η , et viimased tingimused oleksid täidetud. Siit on näha, et see küsimus on seotud järgmise osatuletistega võrrandi lahendamisega:

$$(5) \quad az^2_x + 2bz_xz_y + cz^2_y = 0.$$

Tõepoolest, kui $z = \varphi(x, y)$ on võrrandi (5) mingi erilahend, siis võttes $\xi = \varphi(x, y)$, saame $a_1 = 0$. Analoogiliselt, kui $z = \psi(x, y)$ on võrrandi (5) mingi teine erilahend, siis $\eta = \psi(x, y)$ korral saame $c_1 = 0$.

Seega osutuvad muutuja vahetuseks sobivateks funktsioonideks φ ja ψ võrrandi (5) sõltumatud erilahendid. Võrrandi (5) erilahendite leidmine pole aga alati lihtne ja seepärast vaadeldakse selle võrrandi asemel järgmist harilikku diferentsiaalvõrrandit (mille lahendamine on märksa lihtsam):

$$(6) \quad a dy^2 - 2b dy dx + c dx^2 = 0.$$

Seose võrrandite (5) ja (6) vahel annab järgmine teoreem, kus C on konstant.

Teoreem. Olgu funktsioon $\varphi(x, y)$ pidev koos oma osatuletistega kuni teise järguni, kusjuures φ_x ja φ_y ei saa korraga nulliks vaadeldavas piirkonnas.

Kui $z = \varphi(x, y)$ on võrrandi (5) mingi erilahend, siis $\varphi(x, y) = C$ on võrrandi (6) üldintegraal, ja vastupidi, kui $\varphi(x, y) = C$ on võrrandi (6) üldintegraal, siis $z = \varphi(x, y)$ rahuldab võrrandit (5), s.t. on tema mingi lahend.

Tõestus. Olgu $z = \varphi(x, y)$ võrrandi (5) mingi erilahend, siis

$$a\varphi_x^2 + 2b\varphi_x\varphi_y + c\varphi_y^2 = 0$$

on samasus, s.t. kehtib iga x, y korral, kus lahend $z = \varphi(x, y)$ on määratud. Vaatleme piirkonda, kus $\varphi_y \neq 0$, siis võime selle samasuse kirjutada kujul

$$a\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2 - 2b\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right) + c = 0.$$

(Piirkonnas, kus võib $\varphi_y = 0$, on $\varphi_x \neq 0$ ja seepärast on seal käsitlus täiesti analoogiline sümmeetria tõttu.)

Avaldame seosest $\varphi(x,y) = C$ funktsiooni y , saame

$$y = f(x,C).$$

Selleks, et $\varphi(x,y) = C$ oleks võrrandi (6) üldintegraal, tuleb näidata, et $y = f(x,C)$ rahuldab võrrandit (6). Arvutame selleks tuletise $\frac{dy}{dx}$, saame

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\varphi_x}{\varphi_y}.$$

Viimase võrduse paremal poolel asendame y tema avaldisega $y = f(x,C)$. Võime kirjutada

$$(7) \quad a\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2b\frac{dy}{dx} + c = a\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right) - 2b\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right) + c = 0,$$

kust näeme, et $y = f(x,C)$ rahuldab võrrandit (6). Tähendab, et $\varphi(x,y) = C$ on võrrandi (6) üldintegraal.

Näitame nüüd vastupidi. Olgu $\varphi(x,y) = C$ võrrandi (6) üldintegraal. Avaldame üldintegraalist funktsiooni y , saame $y = f(x,C)$. Selle kõvera $y = f(x,C)$ igas punktis kehtib võrdus (7). Valime konstandi C nii, et kõver $y = f(x,C)$ läbiks parajasti punkti (x_0, y_0) . Võrdusest (7) näeme siis, et selles punktis (x_0, y_0)

$$a\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2 - 2b\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right) + c = 0$$

ehk

$$a\varphi_x^2 + 2b\varphi_x\varphi_y + c\varphi_y^2 = 0.$$

Kuna punkt (x_0, y_0) on vabalt valitav, siis viimane võrdus on samasus vaadeldavas piirkonnas. Järelikult funktsioon $\varphi(x,y)$ rahuldab võrrandit (5), s.t. $z = \varphi(x,y)$ on tema lahend.

Sellega on teoreem tõestatud.

Nagu tõestatud teoreemist näha on, võime funktsioonid φ ja ψ , mis on vajalikud võrrandi (1) lihtsustamisel muutuja vahetuse (2) abil, saada võrrandi (6) integreerimisel. Üksikasjalikult vaatleme seda küsimust järgmises paragrahvis.

Võrrandit (6) nimetatakse karakteristlikuks võrrandiks võrrandile (1) ja tema integraale võrrandi (1) karakteristlikuks. Karakteristikud kujutavad endast seega kõveraid xy -tasandil.

Karakteristlik võrrand (6) laguneb kaheks võrrandiks. Se-
da näeme kohe, kui anname talle kuju

$$a\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2b\frac{dy}{dx} + c = 0,$$

kust

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b + \sqrt{b^2 - ac}}{a},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b - \sqrt{b^2 - ac}}{a}.$$

Kumbki võrrandeist määrab ühe parve karakteristikuid.
Nii et võrrandi (6) integreerimisel saame kaks parve karakter-
istikuid.

On näha, et võrrandite integreerimine sõltub oluli-
selt juurealuse avaldise märgist, nimelt $b^2 - ac$ märgist olene-
valt võivad karakteristikud olla kas reaalsed erinevad, reaalsed
ühete langevad, või imaginaarsed erinevad. See asjaolu võe-
takse aluseks võrrandite (1) tüüpidesse jaotamisel.

Kui võrrandi (1) jaoks mingis piirkonnas kehtib

- 1) $b^2 - ac > 0$, siis nimetatakse teda hüperboolseks,
- 2) $b^2 - ac < 0$ korral elliptiliseks,
- 3) $b^2 - ac = 0$ korral paraboolseks

selles piirkonnas.

Kuna a, b, c on x, y funktsioonid, siis võib juhtuda, et
üks ja seesama võrrand on ühes piirkonnas ühte tüüpi, teises
aga teist tüüpi.

Tähtis on teada, et muutuja vahetus ei muuda võrrandi
tüüpi. Nimelt kehtib vanade kordajate a, b, c ja uute kordajate
 a_1, b_1, c_1 vahel seos

$$b_1^2 - a_1c_1 = (b^2 - ac)(\varphi_x\psi_y - \varphi_y\psi_x)^2.$$

(Kontrollida!). Uutele muutujatele ξ, η seatud tingimuste ko-
haselt on aga $\varphi_x\psi_y - \varphi_y\psi_x \neq 0$ igas vaadeldavas punktis, järe-
likult on avaldisel $b_1^2 - a_1c_1$ alati avaldisega $b^2 - ac$ ühesugune
märk või mõlemad on korraga võrdsed nulliga.

Märkus. Enam kui kahe sõltumatu muutujaga teist järku
võrrandite liigitus tugineb ruutvormide teooriale.

Olgu antud n sõltumatu muutujaga kvaasilineaarne teist

järku võrrand kujul

$$(7) \sum_{i,k=1}^n a_{ik} u_{x_i x_k} + P(x_1, \dots, x_n, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}) = 0,$$

kus $a_{ik} = a_{ki}$ on sõltumatute muutujate x_1, \dots, x_n funktsioonid ja $u_{x_i x_k}$ on otsitava funktsiooni u pidevad osatuletised. Fikseerime kordajate a_{ik} väärtused mingis punktis $P(x_1, \dots, x_n)$ ja moodustame ruutvormi

$$\sum_{i,k=1}^n a_{ik} \xi_i \xi_k.$$

Anneme sellele ruutvormile regulaarse lineaarteisendusega kanoonilise kuju

$$\sum_{i=1}^n b_i \xi_i^2$$

Ruutvormide inertsiiseaduse järgi positiivsete, negatiivsete ja nulliga võrduvate kordajate b_i arv on invariantne regulaarse lineaarteisenduse suhtes ja see asjaolu võetakse aluseks võrrandite (7) liigitamisel. Kui kõik $b_i > 0$ või kõik $b_i < 0$, siis nimetatakse võrrandit (7) elliptiliseks punktis P. Kui kõik $b_i \neq 0$ ja on ühesuguse märgiga peale ühe kordaja, mis on vastasmärgiga, siis nimetatakse võrrandit (7) hüperboolseks punktis P. Kui kasvõi üks b_i on võrdne nulliga, siis nimetatakse võrrandit (7) paraboolseks punktis P. Ülejäänud juhtudel nimetatakse võrrandit (7) ultrahüperboolseks punktis P. Muutes punkti P, saame kätte piirkonnad, kus võrrand (7) säilitab liiki.

Vaadeldava küsimuse üksikasjalikumat käsitlust vt. Smirnovi õpikust (IV köide lk. 387).

§ 2. Kahe sõltumatu muutujaga võrrandite kanooniline kuju.

Olgu antud võrrand

$$(1) \quad a u_{xx} + 2b u_{xy} + c u_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0,$$

kus a, b, c on x, y funktsioonid.

Käesolevas paragrahvis anname ja põhjendame eeskirja, kuidas võrrandile (1) anda lihtsaim nn. kanooniline kuju.

Selleks teostame võrrandis (1) muutuja vahetuse, minnes muutujatelt x, y muutujatele ξ, η seostega

$$(2) \quad \begin{cases} \xi = \varphi(x, y), \\ \eta = \psi(x, y), \end{cases} \quad \left(\text{kus } \begin{vmatrix} \varphi_x & \psi_x \\ \varphi_y & \psi_y \end{vmatrix} \neq 0 \text{ igas punktis} \right)$$

Tulemuseks saame võrrandi

$$(3) \quad a_1 u_{\xi\xi} + 2b_1 u_{\xi\eta} + c_1 u_{\eta\eta} + F_1(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) = 0,$$

kus

$$(4) \quad \begin{cases} a_1 = a \xi_x^2 + 2b \xi_x \xi_y + c \xi_y^2, \\ b_1 = a \xi_x \eta_x + b(\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + c \xi_y \eta_y, \\ c_1 = a \eta_x^2 + 2b \eta_x \eta_y + c \eta_y^2. \end{cases}$$

Edasi leiame võrrandi (1) karakteristikud. Selleks lahendame karakteristikliku võrrandi

$$(5) \quad a dy^2 - 2b dy dx - c dx^2 = 0.$$

Saame

$$a \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - 2b \frac{dy}{dx} + c = 0$$

ja siit

$$(6) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{b + \sqrt{b^2 - ac}}{a}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{b - \sqrt{b^2 - ac}}{a}.$$

Viimaste võrrandite integreerimine annab 2 parve ehk 2 perekonda karakteristikuid.

Edasi vaatleme võrrandi (1) lihtsustamist tüüpide järgi.

1) Hüperboolse võrrandi kanooniline kuju.

Sel korral $b^2 - ac > 0$ igas vaadeldavas punktis. Olgu võrrandite (6) üldintegraalid vastavalt

$$\varphi(x, y) = C \quad \text{ja} \quad \psi(x, y) = C',$$

mis kujutavad kahte parve reaalseid erinevaid karakteristikiid.

Valime uued muutujad ξ ja η järgmiselt:

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y).$$

Näitame, et nende muutujate korral kehtib muutujaile seatud tingimus

$$\begin{vmatrix} \varphi_x & \psi_x \\ \varphi_y & \psi_y \end{vmatrix} \neq 0$$

igas vaadeldavas punktis. Funktsioonide $\varphi(x, y) = C$ ja $\psi(x, y) = C'$ tuletised on vastavalt

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\varphi_x}{\varphi_y} \quad \text{ja} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\psi_x}{\psi_y}.$$

Paigutades need võrrandisse (6), saame

$$-\frac{\varphi_x}{\varphi_y} = \frac{b + \sqrt{b^2 - ac}}{a}, \quad -\frac{\psi_x}{\psi_y} = \frac{b - \sqrt{b^2 - ac}}{a}.$$

Kuna käesoleval korral $b^2 - ac > 0$ igas punktis, siis igas punktis

$$\frac{\varphi_x}{\varphi_y} \neq \frac{\psi_x}{\psi_y},$$

kust järeldubki vajalik tingimus.

Belmises paragrahvis 1 tõestatud teoreemi põhjal osutuvad leitud funktsioonid ξ ja η võrrandi

$$az_x^2 + 2bz_x z_y + cz_y^2 = 0$$

lahendeiks. Viimase lahendid muudavad, nagu näha avaldistest (4), kordajad a_1 ja c_1 võrdseks nulliga. Seega esitub võrrand (3) kujul

$$2b_1 u_{\xi\eta} + F_1 = 0.$$

Viimases $b_1 \neq 0$ igas vaadeldavas punktis, sest $b_1^2 = b_1^2 - a_1 c_1 > 0$.

Jagades viimase võrduse mõlemad pooled suurusega $2b_1$, saame lõplikult

$$u_{\xi\eta} = \phi, \text{ kus } \phi = -\frac{F_1}{2b_1}.$$

Saadud võrrandit nimetatakse hüperboolse võrrandi I kanooniliseks kujuks.

Teostame nüüd saadud võrrandis veel kord muutuja vahetuse, valides

$$\alpha = \frac{\xi + \eta}{2}, \quad \beta = \frac{\xi - \eta}{2}.$$

Siis

$$u_{\xi} = u_{\alpha} \frac{1}{2} + u_{\beta} \frac{1}{2}$$

ja

$$4u_{\xi\eta} = u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta}.$$

Seega

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = 4\phi$$

ehk

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = \phi_1, \text{ kus } \phi_1 = 4\phi.$$

Saadud võrrandit nimetatakse hüperboolse võrrandi II kanooniliseks kujuks.

2) Elliptilise võrrandi kanooniline kuju.

Sel korral $b^2 - ac < 0$ igas vaadeldavas punktis ja võrrandid (6) kujutavad endast kaaskompleksearve. Kirjutame võrrandid (6) kujul

$$(7) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{b + i\sqrt{ac-b^2}}{a}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{b - i\sqrt{ac-b^2}}{a}.$$

Integreerime harilikul viisil esimese võrrandi, saame tema kompleksse integraali $\psi(x,y) = C$. Olgu $\psi(x,y)$ funktsiooni $\psi(x,y)$ kaaskompleks, siis $\psi(x,y) = C$ osutub teise võrrandi (7) üldintegraaliks (ükeikasjalikumalt põhjendust vt. Tihhonov-Samarski õpikust lk. 17, kus on antud ka vajalikud tingimused kordajate a, b, c kohta).

Valime uued muutujad ξ, η samal viisil nagu hüperboolse võrrandi korral:

$$\xi = \psi(x,y), \quad \eta = \overline{\psi(x,y)}.$$

Siis täiesti analoogiliselt, nagu hüperboolse võrrandi korral, saame $a_1 = c_1 = 0$ ja me võrrand (3) esitub kujul

$$2b_1 u_{\xi\eta} + F_1 = 0$$

ehk

$$u_{\xi\eta} = \phi, \quad \text{kus } \phi = \frac{F_1}{2b_1}.$$

Seega saame elliptilisele võrrandile anda sama kuju, mis saime hüperboolse võrrandi korral, kuid selle erinevusega, et nüüd muutujad ξ, η on komplekssed muutujad. Selleks, et lahata saada nendest komplekssetest muutujatest, teostame veel kord muutuja vahetuse. Valime

$$\alpha = \frac{\xi + \eta}{2}, \quad \beta = \frac{\xi - \eta}{2i}.$$

Siin α ja β tulevad juba reaalsed muutujad, sest ξ ja η on kaaskompleksid.

Arvutame vajalikud tuletised:

$$u_{\xi} = u_{\alpha} \frac{1}{2} + u_{\beta} \frac{1}{2i},$$

$$u_{\xi\eta} = u_{\alpha\alpha} \frac{1}{4} + u_{\beta\beta} \frac{1}{4},$$

kust

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = 4u_{\xi\eta} = 4\phi,$$

ehk

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = \phi_1 \quad (\phi_1 = 4\phi).$$

Saadud võrrandit nimetatakse elliptilise võrrandi kanooniliseks kujuks.

3) Paraboolse võrrandi kanooniline kuju.

Sel korral $b^2 - ac = 0$ igas vaadeldavas punktis. Võrrandid (6) langevad käesoleval korral ühte ja nende integreerimisel saame ühe parve karakteristikuid (tegelikult 2 kokkulangevat parve). Olgu võrrandite (6) ühine üldintegraal $(x, y) = C$.

Valime uued muutujad ξ ja η järgmiselt:

$$\xi = \psi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y),$$

kus $\psi(x, y)$ on suvaline funktsioon, mis rahuldab tingimust (

Käesoleval juhul nagu eespoolgi osutub

$$a_1 = 0.$$

Kuna muutuja vahetus ei muuda võrrandi tüüpi, siis ka pärast muutuja vahetust $b_1^2 - a_1 c_1 = 0$. Kuna $a_1 = 0$, siis ka $b_1 = 0$ ja võrrand (3) esitub kujul

$$c_1 u_{\eta\eta} + F_1 = 0$$

ehk

$$u_{\eta\eta} = \phi, \text{ kus } \phi = -\frac{F_1}{c_1}.$$

Saadud võrrandit nimetatakse paraboolse võrrandi kanooniliseks kujuks.

Märkus. Hüperboolse ja elliptilise võrrandi korral me tegime järjest 2 muutuja vahetust. Praktilisel võrrandite lihtsustamisel ühendatakse need mõlemad muutuja vahetused, s.t. läheme kohe muutujailt x, y korral muutujaile α, β . Hüperboolse võrrandi korral teostame seda muidugi juhul, kui tahame kätte saada kohe võrrandi teist kanoonilist kuju.

Näide. Anda võrrandile $x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} = 0$ kanooniline kuju.

Määrame võrrandi tüübi: $a = x^2$, $b = 0$, $c = -y^2$,
 $b^2 - ac = x^2 y^2 \geq 0$. Seega on võrrand hüperboolne kõikjal peale x - ja y -telje, kus ta on paraboolne. Leiame kanoonilise kuju hüperboolsuse piirkonnas.

Koostame karakteristikliku võrrandi: $x^2 dy^2 - y^2 dx^2 = 0$,
kust

$$xdy + ydx = 0, \quad xdy - ydx = 0.$$

Integreerides need võrrandid, saame nende üldintegraalid kujul

$$xy = C, \quad \frac{y}{x} = C'.$$

Juteks muutujateks ξ, η tuleb järelikult võtta

$$\xi = xy, \quad \eta = \frac{y}{x}.$$

Leiame vajalikud osatuletised:

$$\begin{aligned}
 u_x &= u_{\xi} \xi_x + u_{\eta} \eta_x = u_{\xi} y - u_{\eta} \frac{y}{x^2}, \\
 u_y &= u_{\xi} \xi_y + u_{\eta} \eta_y = u_{\xi} x + u_{\eta} \frac{1}{x}, \\
 u_{xx} &= u_{\xi\xi} y^2 - u_{\xi\eta} \frac{y^2}{x^2} - u_{\eta\xi} \frac{y^2}{x^2} + u_{\eta\eta} \frac{y^2}{x^4} + 2u_{\eta\xi} \frac{y}{x^3}, \\
 u_{yy} &= u_{\xi\xi} x^2 + u_{\xi\eta} + u_{\eta\xi} + u_{\eta\eta} \frac{1}{x^2}.
 \end{aligned}$$

Asetame leitud osatuletised antud võrrandisse, saame

$$-4y^2 u_{\xi\eta} + 2 \frac{y}{x} u_{\eta} = 0.$$

Seega $2xy u_{\xi\eta} - u_{\eta} = 0$. Kuna $xy = \xi$, siis $2\xi u_{\xi\eta} - u_{\eta} = 0$ ja lõplikult $\xi \neq 0$ tõttu

$$u_{\xi\eta} = \frac{u_{\eta}}{2\xi}.$$

Tulemuseks saime võrrandi I kanoonilise kuju.

Leiame nüüd võrrandi teise kanoonilise kuju. Selleks teostame veel kord muutuja vahetuse, valides

$$\alpha = \frac{\xi + \eta}{2}, \quad \beta = \frac{\xi - \eta}{2}.$$

Arvutades vajalikud osatuletised, saame

$$u_{\eta} = u_{\alpha} \frac{1}{2} - u_{\beta} \frac{1}{2},$$

$$u_{\xi\eta} = u_{\eta\xi} = u_{\alpha\alpha} \frac{1}{4} - u_{\beta\beta} \frac{1}{4}.$$

Paigutame viimased võrrandi I kanoonilisse kujusse, siis

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = \frac{u_{\alpha} - u_{\beta}}{\alpha + \beta},$$

mis ongi antud võrrandi II kanooniline kuju,

Paraboolsuse piirkonnas omandab me võrrand ise kanoonilise kuju. Näiteks x -teljel, kus $y = 0$, on $x^2 u_{xx} = 0$ ja siit $u_{xx} = 0$. Analoogiliselt on ka y -teljel, kus saame $u_{yy} = 0$. Koordinaatide alguspunktis loeme $u_{xx} = u_{yy} = 0$, selleks et osatuletised oleksid pidevad funktsioonid.

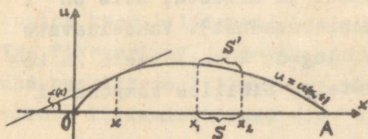
Hüperboolsed võrrandid esinevad mitmesuguste võnkumisprotsessidega seotud loodusnähtuste matemaatilisel uurimisel. Nii taanduvad hüperboolsete võrrandite vaatlemisele füüsikalised ülesanded, mis on seotud keelte, varraste ja plaatide võnkumisega, elektriliste võnkumistega, samuti ka hääle ja elektromagneetilise lainetuse levimisega.

Käesolevas peatükis vaatleme peamiselt küsimusi, mis on seotud keele võnkumisega. Siin kohtume lihtsaima hüperboolse võrrandiga $u_{xx} - u_{yy} = 0$.

§ 1. Vabalt võnkuva keele võrrandi tuletamine.

Tuletame vabalt võnkuva keele võrrandi väikeste ristvõngete jaoks.

Vaatleme keelt kui peenikest painduvat elastset niiti, mis on tõmmatud tugevasti pingule kahe punkti O ja A vahele (vt. joonis 3). Punktid O ja A võivad asetseda ka lõpmata kaugel. Sel korral on tegemist lõpmatu keelega. Keele tasakaaluasend langegu ühte x -teljega. Pingetungi suurus olgu T .



Joonis 3.

Oletame, et keel viidi tasakaaluasendist välja ja lasti lahti. Selle tagajärjel hakkab ta vabalt võnkuma oma tasakaaluasendi ümber. Igal ajamomendil t kujutab keel endast mingit kõverat xu -tasandil (vt. joonis 3). Võnkumise korral muutub keele kuju koos ajaga, järelikult muutub ka funktsioon, mis teda esitab. Seejärel funktsioon, mis määrab keele kuju igal vaadeldaval ajamomendil, on kahe muutuva funktsioon, nimelt koha x ja aja t funktsioon. Tähistame seda funktsiooni $u = u(x, t)$ abil.

kaesolevas paragrahvis leiame võrrandi, mida funktsioon $u = u(x, t)$ peab rahuldama ja mille integreerimisel võime ta leida. Sellist võrrandit nimetataksegi vabalt võnkuva keele võrrandiks.

Vaatleme nii väikesi võnkumisi, et igas punktis x (vt. joonis 3) on keele puutuja tõusunurga tangens $\tan\alpha(x)$ nii väike, et võime arvestamata jätta tema ruudu, s.o. suuruse $\tan^2\alpha(x)$. Kuna aga $\tan\alpha(x) = u_x$, siis me eeldus lubab suurusi u_x^2 mitte arvestada, s.t. lugeda, et $u_x^2 = 0$.

Tasakaaluasendist väljaviimisel pikeneb keel (elastsuse tõttu tasakaaluasendisse tagasiminekul omandab ta jälle endise pikkuse). Leiame pikenemise suuruse keele osal punktide x_1 ja x_2 vahel. Selleks arvutame kaare pikkuse S' (vt. joonis 3), siis saame

$$S' = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + u_x^2} dx = \int_{x_1}^{x_2} dx = S.$$

Tõendab vaadeldavate väikeste võngete korral ei tule keele pikenemist arvestada.

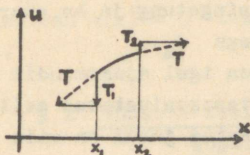
Meil on keel pingule tõmmatud kahe punkti vahel. Järelilikult mõjub keele igas punktis pingetung suurusega T . Et keel on eeldatud painduvana (s.t. ei osuta vastupanu painetele), siis on pingetung suunatud igas punktis mööda keele puutujat. Kuna meie keele pikenemist ei arvesta, siis on T konstantne aja t suhtes (vt. Hooke seadust). Vaadeldavate väikeste võngete korral tuleb T lugeda konstantseks ka ko-
ha x suhtes, sest pingetungi x -telje sihilise komponendi suurus $T(x)$ kohal x on

$$T(x) = T \cos\alpha(x) = T \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2\alpha(x)}} = T.$$

Vaatleme nüüd keele võnkumise protsessi mingil ajamendil t . Võtame vaatluse alla osa keelest, mis on punktide x_1 ja x_2 vahel.

Selle keele osa otspunktides mõjub pingetung suurusega T (vt. joonis 4).

Leiame nüüd u -telje sihis mõjuvate tungide suurused,



Joonis 4.

$$T_u = T_1 + T_2 = T [\sin\alpha(x_2) - \sin\alpha(x_1)] .$$

Võime kirjutada

$$\sin\alpha(x) = \frac{\tan\alpha(x)}{\sqrt{1+\tan^2\alpha(x)}} = u_x ,$$

kuna meil $\tan^2\alpha(x) = 0$. Seega

$$T_u = T(u_x \Big|_{x=x_2} - u_x \Big|_{x=x_1}) = T \int_{x_1}^{x_2} u_{xx} dx .$$

Peale selle tungi mõjub vaadeldavale keele osale u-telje sihis veel inertstung. Katsume leida selle suuruse J_u . Füüsika kursusest on teada, et kui keha mass on m ja keha kiirendus on w , siis inertstungi suurus on $-mw$. Keele võnkumise korral liiguvad keele punktid erineva kiirendusega. Iga fikseeritud x korral määrab funktsioon $u = u(x,t)$ keele ühe punktikese liikumistee. Sel korral annab u_t selle punktikese liikumiskiiruse ning u_{tt} tema kiirenduse.

Olgu keele lineaarne tihedus (s.o. mass ühe pikkusühiku kohta) $\rho = \text{const}$, siis elemendi, mille pikkus on dx , mass on ρdx ja temale mõjuks inertstung suurusega

$$-u_{tt}\rho dx .$$

Järelikult on vaadeldavale keele osale mõjuva inertstungi suurus

$$J_u = - \int_{x_1}^{x_2} u_{tt}\rho dx .$$

Seega siis mõjuvad u-telje sihis vaadeldavale keele osale 2 tungi, ühe neist kutsub esile pingetung ja on suurusega T_u ning teine on inertstung suurusega J_u .

D'Alembert'i printsipi järgi on igal ajamomendil materiaalsele punktile rakendatud tung tasakaalustatud sellele punktile mõjuva inertstungi poolt. Antud juhul on siis

$$T_u + J_u = 0$$

ehk

$$T \int_{x_1}^x u_{xx} dx - \rho \int_{x_1}^x u_{tt} dx = 0.$$

Seega kehtib iga t korral võrdus

$$\int_{x_1}^x (T u_{xx} - \rho u_{tt}) dx = 0.$$

Meil olid x_1, x_2 vabalt võetud. Tähendab viimane tingimus peab kehtima iga x_1 ja x_2 korral. See on võimalik siis ja ainult siis, kui integraalilune funktsioon on võrdne nulliga iga x korral (põhjendada!). Seega

$$T u_{xx} - \rho u_{tt} = 0$$

iga x ja t korral.

Olgu $\frac{T}{\rho} = a^2$, siis võime kirjutada

$$(1) \quad u_{xx} = \frac{1}{a^2} u_{tt},$$

mis ongi vabalt võnkuva keele võrrand väikeste ristvõngete jaoks, kus $a^2 = \frac{T}{\rho} = \text{const}$, T on keelele mõjuva pingetungi suurus ja ρ keele lineaarne tihedus.

Võrrandit (1) tundsid juba Bernoulli, D'Alembert ja Euler (XVIII sajand).

Võtame võrrandis (1) ette muutuja vahetuse $y = at$, siis $u_{tt} = u_{yy} a^2$ ning me saame

$$u_{xx} - u_{yy} = 0,$$

kus $y = at$. Seega saame keele võrrandi kanoonilises kujus. Näeme, et vabalt võnkuva keele võrrand on teist järku lineaarne osatuletistega võrrand ja on, nagu näha, kõige lihtsam hüperboolne võrrand.

Olgu märgitud, et suurte võnkumiste vaatlemisel, kus eeldust $\tan^2 \alpha(x) = 0$ teha ei saa, tuleb võrrand mittelineaarne.

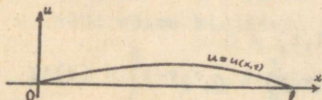
§ 2. Võnkuva keele võrrandi lahendi ainsus
lõpliku keele jaoks.

Eelmises paragrahvis tuletasime võnkuva keele jaoks võrrandi

$$(1) \quad u_{xx} = \frac{1}{a} z^u u_{tt},$$

mida pidi rahuldama keele võnkumise protsessi kirjeldav funktsioon $u = u(x, t)$.

Võrrand (1) kui osatuletistega võrrand ei ole üheselt lahenduv. Selleks, et tema lahend oleks üheselt määratud, tuleb lisaks võtta veel täiendavaid tingimusi, mille iseloom tuleb muidugi määrata vastava füüsikalise probleemi sisu poolt. Olgu märgitud, et vaid võrrandi ühese lahenduvuse korral võime väita, et saadud lahend on just see otsitav keele võnkumise protsessi kirjeldav funktsioon, mis pidi rahuldama seda võrrandit. Vaatleme, milliseid tingimusi on võnkuva keele korral otstarbekohane juurde võtta ühese lahendavuse saamiseks.



Joonis 5.

Olgu keel, mille pikkus on 1, kinnitatud oma otspunktidega x -teljele, nagu näha joonisel 5. Vaadeldaval juhul peavad ilmselt kehtima järgmised tingimused võrrandi (1) lahendi $u = u(x, t)$ jaoks:

$$(2) \quad u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0.$$

Tingimusi (2) nimetatakse rajatingimusteks. Rajatingimusi võib ka teisiti määrata. Näiteks võivad võnkumise ajal keele otspunktid ka üles-alla liikuda jne.

Rajatingimused veel ei määra võrrandi (1) lahendit üheselt. Selgub, et veel on tähtis, kuidas asetseb keel võnkumisprotsessi algmomendil $t = 0$ ja milline kiirus oli siis

keele punktidel. Eelmises paragrahvis nägime, et kiirused määras funktsioon $u_t(x,t)$. Seega saame tingimused:

$$(3) \quad u(x,0) = \varphi_1(x) \quad u_t(x,0) = \varphi_2(x),$$

kus funktsioon $\varphi_1(x)$ määrab keele kuju ja $\varphi_2(x)$ keele punktide liikumise kiiruse ajamomendil $t = 0$. Tingimusi (3) nimetatakse algtingimusteks.

Tavaliselt määratakse alg- ja rajatingimused katseliselt, s.t. suurused l , $\varphi_1(x)$ ja $\varphi_2(x)$ määratakse mõõtmise teel.

Osutub, et lisatingimused (2) ja (3) määravad võrrandi (1) lahendi juba üheselt. Nimelt kehtib

Ainsuse teoreem. Võib eksisteerida vaid üks võrrandi (1) lahend $u = u(x,t)$, mis rahuldab rajatingimusi (2) ja algtingimusi (3).

Tõestus. Oletame, et vaadeldavatel tingimustel on võrrandil (1) kaks lahendit $u_1(x,t)$ ja $u_2(x,t)$, mis rahuldavad tingimusi (2) ja (3). Vaatleme nende lahendite vahet

$$v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t).$$

$v(x,t)$ ka rahuldab võrrandit (1), s.t. kehtib

$$(4) \quad v_{xx} = \frac{1}{a} v_{tt},$$

(sest u_1 ja u_2 rahuldavad). Samuti rahuldab ta järgmisi tingimusi:

$$(5) \quad v(0,t) = 0, \quad v(l,t) = 0$$

$$(6) \quad v(x,t) = 0, \quad v_t(x,0) = 0,$$

sest u_1 ja u_2 mõlemad rahuldavad tingimusi (2) ja (3).

Näitame, et $v(x,t) \equiv 0$, millest järelduks, et $u_1(x,t) \equiv u_2(x,t)$, s.t. lahendid langevad ühte, millega olekski teoreem tõestatud.

Kõige lihtsam tõestus on järgmine. $v(x,t)$ on võrrandi (4) lahend, mis täidab rajatingimusi (5) ja algtingimusi (6). Võnkumise algmomendil tingimuse (6) järgi on keel tasakaaluasendis ja keele punktide liikumiskiirused on võrdsed nulliga. Tegelikku võnkumist niisugustel algtingimustel tekkida ei saa.

Sellist triviaalset juhtu kirjeldab ainult funktsioon $v(x,t) \equiv 0$.

Esitatud tõestus on aga õige ainult siis, kui võrrandil (4) tingimustel (5) ja (6) on olemas vaid võnkumisprotsessi kirjeldavad lahendid. Seepärast esitame veel teise range tõestuse.

Vaatleme integraali^{*}

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[(v_x)^2 + \frac{1}{a^2} (v_t)^2 \right] dx.$$

Näitame, et $E(t) = 0$. Selleks näitame kõigepealt, et $E(t) = \text{const}$, s.t., et tuletis t järgi $E'(t) = 0$.

Diferentseerime $E(t)$ avaldist t järgi (võime diferentseerida integraali märgi all, sest funktsioonil $v(x,t)$ on teist järku pidevad osatuletised, kuna $u_1(x,t)$ ja $u_2(x,t)$ omavad neid). Saame

$$E'(t) = \int_0^1 (v_x v_{xt} + \frac{1}{a^2} v_t v_{tt}) dx.$$

Integreerime selle integraali esimest osa ositi, siis saame

$$\int_0^1 v_x v_{xt} dx = v_x v_t \Big|_0^1 - \int_0^1 v_t v_{xx} dx = - \int_0^1 v_t v_{xx} dx,$$

sest tingimuste (5) tõttu $v_t(0,t) = 0$ ja $v_t(1,t) = 0$.

Nüüd võime kirjutada

$$E'(t) = \int_0^1 \left(-v_t v_{xx} + \frac{1}{a^2} v_t v_{tt} \right) dx = - \int_0^1 v_t \left(v_{xx} - \frac{1}{a^2} v_{tt} \right) dx = 0$$

tingimuse (4) põhjal. Seega $E(t) = \text{const}$.

Näitame nüüd, et $E(t) = 0$. Selleks võtame $E(t)$ avaldises $t = 0$, saame

$$E(0) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[(v_x)^2 + \frac{1}{a^2} (v_t)^2 \right]_{t=0} dx = 0$$

^{*} See integraal on seotud võnkuva keele energia avaldisega. Nimelt $TE(t)$ annab võnkuva keele kogu energia s.t. kinetilise ja potentsiaalse energia summa. Energia avaldise kasutatakse väga sageli matemaatilise füüsika võrrandite lahendamise näitamisel.

tingimuste (6) tõttu, sest $v_t(x,0) = 0$ ja $v(x,0) = 0$, kust ka $v_x(x,0) = 0$.

Seega $E(t) = \text{const.}$ ja $E(0) = 0$, mille tõttu $E(t) = 0$ iga t korral. Järelikult meil on

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[(v_x)^2 + \frac{1}{a^2} (v_t)^2 \right] dx = 0.$$

Kuna integraali all on kõik liikmed mittenegatiivsed, siis peab

$$v_x(x,t) = 0, \quad v_t(x,t) = 0.$$

Viimastest omakorda järeldub, et

$$v(x,t) = \text{const} = c_0.$$

Aga tingimuste (6) järgi $v(x,0) = 0$, siis peab $c_0 = 0$. Seega meil on $v(x,t) = 0$, mida oligi tarvis tõestada.

Nii siis antud tingimustel (2) ja (3) ei saa olla keele võrrandil (1) üle ühe lahendi. Kuid selle ühe lahendi olemasolu küsimus jäi ikka veel lahtiseks.

Osutub, et vaadeldaval juhul on võrrandil (1) lahend olemas ja seda näeme järgmises paragrahvis keele võrrandi tegeliku lahendamise teel.

Veel on tähtis uurida võrrandi lahendi sõltuvust raja- ja algtingimustest.

Õeldakse, et võrrandi (1) lahend on pidevas sõltuvuses raja- ja algtingimustest, kui kuitahes vähesel alg- ja raja-tingimuste muutmisel muutub võrrandi lahend ka kuitahes vähe.

Sellise pideva sõltuvuse olemasolu on väga tähtis, kui arvestada seda, et raja- ja algtingimused saame tavaliselt mõõtmise teel, mille tõttu nad on ligikaudsed s.t. erinevad täpsetest raja- ja algtingimustest. Kui lahendil pidevat sõltuvust raja- ja algtingimustest ei oleks, siis meil poleks mingit usaldust lahendi vastu, sest viimane võib oluliselt erineda lahendist täpsete raja- ja algtingimuste korral.

Keele võrrandi (1) lahend on pidevas sõltuvuses rajatingimustest (2) ja algtingimustest (3) (vt. põhjendust Petrovski õpikust lk. 106). Sel puhul öeldakse, et keele võrrandi lahend on stabiilne.

§ 3. Võnkuva keele võrrandi lahendamine

Fourier' meetodil.

Fourier' meetod on üks kõige tuntum meetod osatuletistega võrrandite lahendamisel. Käesolevas paragrahvis vaatleme selle meetodi kasutamist võnkuva keele võrrandi jaoks püstitatava ülesande lahendamisel.

Keel olgu jällegi oma otspunktidega kinnitatud x -teljel. Keele pikkus olgu 1 (vt. joonis 5).

Ülesanne. Leida keele võrrandi

$$(1) \quad u_{xx} = \frac{1}{a^2} u_{tt}$$

mittetriviaalne lahend $u = u(x, t)$, mis rahuldaks rajatingimusi

$$(2) \quad u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0$$

ja algtingimusi

$$(3) \quad u(x, 0) = \varphi_1(x), \quad u_t(x, 0) = \varphi_2(x).$$

Sõnastatud ülesannet nimetatakse sageli segaülesandeks võnkuva keele jaoks (sest esinevad korruga nii raja- kui ka algtingimused).

Ülesande lahendus. Kasutame Fourier' meetodit. Meetod seisneb selles, et me püüame kõigepealt leida vaadeldavale ülesandele erilahendid $u(x, t)$, mis on kahe teguri korrutis, kusjuures üks tegur on vaid x -i ja teine vaid t funktsioon, s.t.

$$(4) \quad u(x, t) = X(x) T(t).$$

Neist erilahenditest koostame seejärel lahendi ülesandele, s.t. lahendi, mis rahuldab

- 1° võrrandit (1),
- 2° rajatingimusi (2),
- 3° algtingimusi (3).

Vaatleme neid küsimusi antud järjekorras.

- 1°. Võrrandi (1) rahuldamine. Selleks arvutame $u(x, t)$

avaldisest (4) vajalikud osatuletised

$$u_{xx} = X''(x)T(t), \quad u_{tt} = X(x)T''(t)$$

ja paigutame need võrrandisse (1), siis

$$X''T = \frac{1}{a^2}XT''.$$

Jagame mõlemad võrduse pooled suurusega XT , saame

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{a^2} \frac{T''}{T} = c = \text{const}.$$

Suhte koefitsientide järeldub sellest, et vaadeldav võrdus peab kehtima iga x ja t korral, kuid siin on vasak pool vaid x -i funktsioon, parem pool aga vaid t funktsioon. Näiteks fikseerime x -i, siis on võrduse vasak pool konstantne ja parem pool peab iga t korral olema konstantne. Viimasest võrdusest saame 2 järgmist võrrandit:

$$(5) \quad X'' - cX = 0, \quad T'' - ca^2T = 0.$$

Need on harilikud diferentsiaalvõrrandid. Kui valime tegurid $X(x)$ ja $T(t)$ nende võrrandite lahenditena, siis erilahend $u(x,t) = XT$ rahuldab võrrandit (1).

2^o. Rajatingimuste (2) rahuldamine. Saadud diferentsiaalvõrrandis võib konstant c omada väärtusi $c > 0$, $c = 0$ ja $c < 0$. Vaadeldaval juhul osutuvad konstandi väärtused $c > 0$ ja $c = 0$ mitesobivaiks, sest siis $X(x) = 0$ ja ülesande lahend tuleb triviaalne. Näitame seda.

Rajatingimuste (2) rahuldamiseks peavad kehtima tingimused

$$u(0,t) = X(0)T(t) = 0,$$

$$u(1,t) = X(1)T(t) = 0.$$

Kuna üldiselt $T(t) \neq 0$, siis peab kehtima

$$X(0) = 0 \quad \text{ja} \quad X(1) = 0.$$

1) Olgu $c > 0$, s.t. olgu $c = \lambda^2$, siis võrrand (5) esitub kujul $X'' - \lambda^2 X = 0$ ning tema lahend kujul

$$X(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x}.$$

Selleks et rahuldada rajatingimusi, peab

$$X(0) = C_1 + C_2 = 0,$$

$$X(1) = C_1 e^{\lambda 1} + C_2 e^{-\lambda 1} = 0.$$

Esimesest võrdusest saame, et $C_2 = -C_1$ ja paigutades selle teise võrdusse, saame

$$C_1 e^{\lambda 1} = C_1 e^{-\lambda 1}.$$

Kuna $1 \neq 0$, $\lambda \neq 0$, siis $e^{\lambda 1} \neq e^{-\lambda 1}$. Järelikult peab $C_1 = 0$, ja siit siis ka $C_2 = 0$. Seega $X(x) = 0$, mille tõttu $u(x,t) = XT = 0$ ja saame triviaalse lahendi.

2) Olgu $c = 0$, siis võrrand $X'' - cX = 0$ esitab kujul $X'' = 0$, mille üldlahend on

$$X(x) = C_1 x + C_2.$$

Rajatingimuste rahuldamiseks peab kehtima

$$X(0) = C_2 = 0, \quad X(1) = C_1 1 + C_2 = 0.$$

Kuna $1 \neq 0$, siis $C_1 = C_2 = 0$ ja saame jälle triviaalse lahendi $u(x,t) = 0$.

Järelikult peab olema $c < 0$ ja me võime tähistada $c = -\lambda^2$ ja võrrandid (5) esitavad kujul

$$(6) \quad X'' + \lambda^2 X = 0,$$

$$(7) \quad T'' + \lambda^2 a^2 T = 0.$$

Võrrandi (6) üldlahend on

$$X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x$$

ja (7) üldlahend on

$$T(t) = A \cos a \lambda t + B \sin a \lambda t.$$

Rajatingimuste rahuldamiseks peab kehtima

$$X(0) = C_1 = 0$$

$$X(1) = C_1 \cos \lambda 1 + C_2 \sin \lambda 1 = 0.$$

Seega $C_1 = 0$, ning siis $X(0) = 0$ ja $X(1) = C_2 \sin \lambda 1 = 0$. Viimase rahuldamiseks ei tohi võtta $C_2 = 0$, sest siis tuleb triviaalne lahend. Võtame $C_2 = 1$ ja valime λ nii, et oleks

$\sin \lambda l = 0$. Selleks tuleb võtta $\lambda l = n\pi$ ($n = 1, 2, \dots$), kust $\lambda = \frac{n\pi}{l}$. Seega saame

$$X(x) = \sin \frac{n\pi}{l} x.$$

Selline $X(x)$ rahuldab tingimusi $X(0) = 0$ ja $X(l) = 0$.

Kuna tegur $X(x)$ osutub λ valiku tõttu sõltuvaks n -ist, siis märgime seda indeksina juurde:

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi}{l} x,$$

ja

$$T_n(t) = A_n \cos \frac{an\pi}{l} t + B_n \sin \frac{an\pi}{l} t.$$

Seega erilahend $u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$ esitub nüüd kujul

$$(8) \quad u_n(x, t) = \sin \frac{n\pi}{l} x (A_n \cos \frac{an\pi}{l} t + B_n \sin \frac{an\pi}{l} t).$$

Selline erilahend $u_n(x, t)$ rahuldab iga n korral võrrandit

(1) ja rajatingimusi (2).

3° Algtingimuste (3) rahuldamine. Katsume algtingimusi (3) rahuldada erilahendite (8) abil. Siis peab kehtima

$$u_n(x, 0) A_n \sin \frac{n\pi}{l} x = \varphi_1(x),$$

$$[u_n(x, 0)]_t = \dots = \varphi_2(x).$$

Kuna aga funktsioonid $\varphi_1(x)$ ja $\varphi_2(x)$ on antud, siis viimased võrdused on rahuldatud vaid juhuslikul kokkulangemisel. Seega tuleb lugeda, et erilahendid $u_n(x, t)$ ei sobi üksikult algtingimuste rahuldamiseks.

Võtame erilahendite (8) summa

$$(9) \quad u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t).$$

Siin eeldame, et see rida ise ja temast 2 korda liikmeti diferentseerimisel nii x -i kui ka t järgi saadud read on ühtlaselt koonduvad piirkonnas $0 \leq x \leq l$, $0 \leq t < \infty$. Sel korral on $u(x, t)$ ise ja tema osatuletised kuni teise järguni pidevad funktsioonid x, t suhtes (miks?).

Osutub, et nii määratud funktsiooni $u(x, t)$ abil saab ülesande algtingimusi (3) rahuldada küllaltki avaratel eeldustel.

Kõigepealt $u(x,t)$ rahuldab võrrandit (1), sest iga erilahend $u_n(x,t)$ rahuldab viimast ja rida (9) võib liikmeti diferentseerida. Saame

$$u_{xx} - \frac{1}{a^2} u_{tt} = \sum_{n=1}^{\infty} \left([u_n(x,t)]_{xx} - \frac{1}{a^2} [u_n(x,t)]_{tt} \right) = 0,$$

sest selles reas on iga liidetav võrdne nulliga.

Funktsioon $u(x,t)$ rahuldab ka rajatingimusi (2), sest iga $u_n(x,t)$ rahuldab neid. Seega saame

$$u(0,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(0,t) = 0, \quad u(1,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(1,t) = 0.$$

Näitame nüüd, et funktsiooni $u(x,t)$ abil saab ka algtingimusi rahuldada. Meil on

$$(10) \quad u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\tilde{\eta}}{l} x \left(A_n \cos \frac{an\tilde{\eta}}{l} t + B_n \sin \frac{an\tilde{\eta}}{l} t \right)$$

Võtame $t = 0$, siis peab kehtima

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\tilde{\eta}}{l} x = \varphi_1(x).$$

Selle tingimuse rahuldamiseks tuleb oletada, et $\varphi_1(x)$ on esitatav lõigul $[0, l]$ siinuste rea kaudu. Sellise eelduse võime teha, sest see on küllalt avar.

Vaatleme nüüd teise algtingimuse rahuldamist. Diferentseerime rida (10) liikmeti t järgi, saame

$$u_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\tilde{\eta}}{l} x \left(-A_n \frac{an\tilde{\eta}}{l} \sin \frac{an\tilde{\eta}}{l} t + B_n \frac{an\tilde{\eta}}{l} \cos \frac{an\tilde{\eta}}{l} t \right),$$

ja võtame $t = 0$, siis peab kehtima

$$u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{an\tilde{\eta}}{l} \sin \frac{n\tilde{\eta}}{l} x = \varphi_2(x).$$

Selle tingimuse rahuldamiseks tuleb oletada, et $\varphi_2(x)$ on esitatav lõigul $[0, l]$ siinuste rea kaudu. Jääb vaid suurused B_n nii valida, et $B_n \frac{an\tilde{\eta}}{l}$ oleksid parajasti vastava arendise kordajad.

Nii siis funktsioon $u(x,t)$, mis on antud avaldisega (10), on ülesande lahendiks, kui need eeldused, mis me tegime rea koonduvuse ja funktsioonide $\varphi_1(x)$ ja $\varphi_2(x)$ kohta, on täidetud.

Osutub, et nad on täidetud, kui oletada, et $\varphi_1(x)$ ja $\varphi_2(x)$ omavad kuni 4-järguni (incl.) pidevaid tuletisi lõigul $[0,1]$, kusjuures $\varphi_1(x)$ ja $\varphi_2(x)$ ise ja nende teist järku tuletised saavad nulliks lõigu $[0,1]$ otspunktides.

Nagu näeme, on eeldused funktsioonide $\varphi_1(x)$ ja $\varphi_2(x)$ kohta küllalt ranged ja sageli pole need eeldused vaadeldavas ülesandes täidetud. Sel korral otsitakse ülesandele liigikaudset lahendit, mis erineks täpsest lahendist küllalt vähe. Seda saavutatakse sel teel, et funktsioonid $\varphi_1(x)$ ja $\varphi_2(x)$ asendatakse väga lähedaste funktsioonidega, kus vajalikud eeldused tuletiste kohta on juba täidetud. Saadav ülesande lahend erineb siis ka vähe täpsest lahendist pideva sõltuvuse tõttu algingimustest..

Paragrahvis 2 nägime, et ülesande lahend on üheselt määratud, siis siin Fourier' meetodiga saadud lahend ongi ainuke võimalik me ülesandele. Sellega on ühtlasi ka Fourier' meetodi kasutamine antud juhul õigustatud.

Märkus. Ülesande jaoks defineerisime me erilahendi kujul $u(x,t) = X(x)T(t)$. Tegur $X(x)$ tuli määrata võrrandist

$$X'' - cX = 0$$

ja ta pidi rahuldama rajatingimusi $X(0) = 0$, $X(1) = 0$. Peale selle pidi $X(x)$ olema mittetriviaalne. Me näitasime, et selliseid tingimusi täitva lahendi $X(x)$ saame $c < 0$ korral. Sisuliselt oli meil tegemist järgmise ülesandega:

Rajaülesanne. Leida sellised c väärtused, mil võrrandil

$$X'' - cX = 0$$

on mittetriviaalseid lahendeid $X(x)$, mis rahuldaksid rajatingimusi $X(0) = X(1) = 0$.

Selliseid c väärtusi nimetatakse antud rajaülesande omaväärtusteks ja vastavaid mittetriviaalseid lahendeid omafunktsioonideks. Viimast ülesannet nimetatakse "omaväärtus-ülesandeks", sageli ka "Strum-Lioville'i ülesandeks."

Me lahendasime defineeritud omaväärtusülesande ja leid-
sime, et omaväärtusteks on arvud

$$c_n = \frac{n^2 \pi^2}{1^2} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

ja omafunktsioonideks on

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi}{1} x \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Omaväärtusülesannet defineeritakse ka palju üldisemalt
(vt. Petrovski õpikut lk. 152). Samuti saab Fourier' meetodit
kasutada paljude üldiste hüperboolsete võrrandite korral (vt.
Petrovski õpik lk. 150).

§ 4. Võnkuva keele võrrandi lahendi füüsikaline interpretatsioon.

Elmises paragrahvis me lahendasime järgmise ülesande
lõpliku keele jaoks.

Leida keele võrrandi

$$(1) \quad u_{xx} = \frac{1}{a^2} u_{tt}$$

mittetriviaalne lahend $u = u(x, t)$, mis rahuldaks rajatingi-
musi

$$(2) \quad u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0$$

ja algingimusi

$$u(x, 0) = \varphi_1(x), \quad u_t(x, 0) = \varphi_2(x).$$

Ainsuse teoreem (§ 2) näitas meile, et sel ülesandel
võib olla vaid üks lahend ja see esitub, nagu nägime (teata-
vail täiendavail eeldusil funktsioonide φ_1 ja φ_2 kohta) kujul

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t),$$

kus $u_n(x, t)$ on erilahendid ja avalduvad kujul

$$u_n(x, t) = \sin \frac{n\pi}{1} x \left(A_n \cos \frac{an\pi}{1} t + B_n \sin \frac{an\pi}{1} t \right).$$

Lahend $u(x, t)$ rahuldab me ülesande kõiki tingimusi, kuid
erilahendid $u_n(x, t)$ ei allunud algingimustele (3) ses mõttes,

et neid ei saa nii sobitada, et algtingimused oleksid rahuldatud, välja arvatud muidugi see juhtum, kus algtingimused osutuvad automaatselt täidetuks ja see leiab aset, nagu kerge kontrollida, parajasti siis, kui

$$\varphi_1(x) = A_n \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad \varphi_2(x) = B_n \frac{\sin \frac{n\pi}{l} x}{\sin \frac{n\pi}{l} x}.$$

Sel korral rahuldab erilahend $u_n(x, t)$ ülesande kõiki tingimusi. Seega siis iga erilahend $u_n(x, t)$ on ülesande lahendiks teatavate kindlate algtingimuste korral.

Uurime nüüd lähemalt, mida ülesande lahend endast füüsiliselt kujutab. Teame juba, et ta kirjeldab keele võnkumise protsessi, jääb seepärast vaid selgitada selle protsessi füüsikaline pilt.

Anname kõigepealt erilahendele $u_n(x, t)$ teise uurimiseks sobivama kuju. Olgu

$$\alpha_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2},$$

siis võime kirjutada

$$u_n(x, t) = \alpha_n \sin \frac{n\pi}{l} x \left(\frac{A_n}{\alpha_n} \cos \frac{an\pi}{l} t + \frac{B_n}{\alpha_n} \sin \frac{an\pi}{l} t \right).$$

Valime nurga t_n nii, et kehtiks

$$\frac{A_n}{\alpha_n} = \sin \frac{an\pi}{l} t_n, \quad \frac{B_n}{\alpha_n} = \cos \frac{an\pi}{l} t_n.$$

Selline nurk t_n leidub, sest

$$\left(\frac{A_n}{\alpha_n} \right)^2 + \left(\frac{B_n}{\alpha_n} \right)^2 = 1.$$

Seega saame

$$(4) \quad u_n(x, t) = \alpha_n \sin \frac{n\pi}{l} x \sin \frac{an\pi}{l} (t + t_n).$$

Oletame nüüd, et algtingimused (3) on sellised, et erilahend (4) osutub ülesande lahendiks. Vaatleme, missugust võnkumisprotsessi ta kirjeldab.

Võtame vaatluse alla keele ühe punkti kohal x_0 . Olgu

$$\beta_n(x_0) = \alpha_n \sin \frac{n\pi}{l} x_0,$$

siis võime kirjutada

$$(5) \quad u_n(x_0, t) = \beta_n(x_0) \sin \frac{an\pi}{l} (t + t_n).$$

Tulemus kujutab endast siinusfunktsiooni aja t suhtes. Kuna siinusfunktsioon on perioodiline, siis (5) annab meile seaduse, kuidas võngub keele punkt x_0 oma tasakaaluasendi suhtes, s.o. x -telje suhtes.

Suurust $\beta_n(x_0)$ nimetatakse võnkumise amplituudiks punktis x_0 . Tema tähendus on järgmine: $\beta_n(x_0)$ annab meile maksimaalse kauguse tasakaaluasendist, mille saavutab võnkumisel keele punkt x_0 . See on näha avaldisest (5), kus $u_n(x_0, t)$ maksimaalne ja minimaalne väärtus on sellistel t väärtustel, mil

$$\sin \frac{an\pi}{l} (t + t_n) = \pm 1,$$

ja siis on

$$u_n(x_0, t) = \pm \beta_n(x_0).$$

Igal keele punktil on muidugi oma amplituud, mis, nagu näha $\beta_n(x_0)$ avaldisest, võib muutuda 0-st kuni α_n . Seega annab α_n keele tasakaaluasendist maksimaalse kauguse, mida võivad keele punktid võnkumisel saavutada.

Suurusel t_n on ka kindel tähendus. Ta määrab keele punkti x_0 asukoha võnkumise algmomendil $t = 0$, sest siis on

$$u_n(x_0, 0) = \beta_n(x_0) \sin \frac{an\pi}{l} t_n.$$

Suurust t_n nimetatakse seepärast ka algfaasiks ehk algnihkeks.

Avaldisest (5) näeme, et punkti x_0 võnkesagedus (s.o. ajaühikus sooritatud võngete arv) ja amplituud sõltuvad veel n -st. Mida suurem on n , seda suurema võnkesagedusega keele punktikeste võnkumisi kirjeldab erilahend (5), sest n suurenemisel siinusfunktsiooni

$$\sin \frac{an\pi}{l} (t + t_n)$$

periood lüheneb. Samasugune sõltuvus on ka erilahendis olevast suurusest a . Kuna $a = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$, siis näeme, et mida tugevamini on keel pingule tõmmatud, seda kiiremini ta võngub ja et keele lineaarse tiheduse suurenemisel aeglustub keele võnkumine.

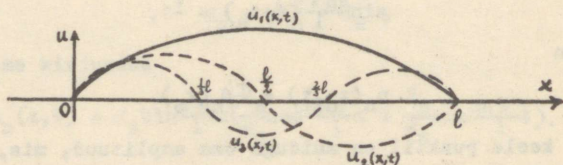
Järelikult kirjeldavad erilahendid $u_n(x,t)$ iga n korral keele punktikeste igasuguse sagedusega võnkumisi.

Fikseerime nüüd ajamomendi t ja vaatleme, missuguse kuju annab erilahend (4) keelele vaadeldaval xu -tasandil. Selleks kirjutame erilahendi (4) üles kujul

$$(6) \quad u_n(x,t) = c_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x,$$

kus
$$c_n(t) = \alpha_n \sin \frac{an\pi}{l} (t+t_n).$$

Näeme, et igal ajamomendil t kujutavad erilahendid (6) endast sinusoidaalseid kõveraid (vt. joonis 6).



Joonis 6.

Ajamomendi t muutumisel muutub erilahendis (6) vaid kordaja $c_n(t)$, mille tõttu keel kas kaugeneb või läheneb x -teljele. Neil ajamomentidel t , mil $c_n(t) = 0$, on keel kogu ulatuses x -teljel. Keele need punktid x , kus $\sin \frac{n\pi}{l} x = 0$, on alati, nagu võrdusest (6) näha, tasakaaluasendis, s.t. keele kogu võnkumise jooksul on nad paigal x -teljel. Näiteks, $n = 3$ korral on sellisteks punktideks $x = 0, \frac{1}{3}l, \frac{2}{3}l, l$ (vt. joonis 6). Seda laadi võnkumisi nimetatakse seisvaks laineks. Neid punkte, mis võnkumise ajal seisavad paigal, nimetatakse seisva laine sõlmedeks ($n = 3$ korral on siis sõlmedeks punktid $x = 0, \frac{1}{3}l, \frac{2}{3}l$ ja l).

Seega saavad erilahendid $u_n(x,t)$ kujutada vaid seisvaid laineid ja seepärast nad ei allugi algtingimustele. Ai-

nult selliste algtingimuste korral, mis põhjustavad seisvaid laineid, võib erilahend $u_n(x,t)$ kirjeldada keele võnkumisprotsessi.

Keele võnkumist me tajume helina, mis levib edasi õhusakeste kaudu. Olenevalt võnkumise sagedusest saame kas kõrgema või madalama heli. Kõige väiksema võnkesagedusega seisvaid laineid kirjeldab erilahend $u_n(x,t)$, kui $n = 1$. Siis tekitab keel kõige madalama heli nn. põhitooni. Kõrgemad helid saame, kui $n > 1$, ja neid nimetatakse ülemtoonideks. Põhi- ja ülemtone kokku nimetatakse lihtsateks toonideks. Lihtsa tooni tugevus sõltub keele võnkeamplituudist.

Algtingimuste olemasolu korral kirjeldas keele võnkumise käiku funktsioon

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t),$$

mis kujutab endast erilahendite summat. Kuna iga erilahend $u_n(x,t)$ tekitab seisva laine, siis kujutab algtingimuste olemasolul keele võnkumine endast seisvate lainete summat. See tähendab seda, et keele mistahes võnkumist saab lahutada seisvateks laineteks.

Algtingimuste olemasolu korral tekitab keele võnkumine samuti heli ja see, nagu näha, kujutab liitheli, s.t. heli, mis tekib põhi- ja ülemtone liitumisel. Tähendab, iga heli, mida tekitab keel, saab lahutada lihtsateks toonideks.

Kõiki neid küsimusi, mis on seotud heliga, uurib eriline teadusharu akustika. Seal lahutatakse heli lihtsateks toonideks eriliste seadmete nn. resonaatorite abil. Meil siin saadud tulemused on suurepärases kooskõlas selliste katselisel teel saadud tulemustega.

Akustikas esineb mõiste heli tämber, mida iseloomustab põhi- ja ülemtoneide vahekord ja ka nende tugevus helis. Kandes selle mõiste üle teoreetilistele tulemustele, võime öelda, et algtingimused mõjustavad heli tämbrit, s.t., et keele poolt tekitatud heli tämber sõltub sellest, kuidas keel hakkas võnkuma. Siinjuures tuleb märkida, et keele võnkumisel hõõrdumise tõttu väheneb algtingimuste mõju ajajooksul ja seetõttu

muutub tekkiva heli tämber, lähenedes mingile lihtsale toonile.

Märgime lõpuks veel, et kuna me ülesande lahend oli üheselt määratud, siis eespool antud lahendi interpretatsioon on täielik, s.t. ta haarab kõik lahendid.

§ 5. Cauchy' ülesanne lõpmatu keele jaoks.

Käesolevas paragrahvis püstitame nn. Cauchy' ülesande lõpmatu keele jaoks, lahendame selle ja näitame lahendi ainust.

Vaadeldav keel olgu paigutatud xu -tasandil x -teljele, mis on keele tasakaaluasendiks.

Lõpmatu keele võnkumisprotsessi kirjeldab kahe muutuja funktsioon $u = u(x,t)$, mille väärtused määravad xu -tasandil kohal x võetud keelepunktikese asukoha ajamomendil t . Keele võnkumisprotsessi käik siin, nagu lõpliku keele korralgi, oleb sellest, kuidas asetses keel protsessi algmomendil $t = 0$ ja millised olid siis keele punktikeste liikumiskiirused u -telje sihis. Siit näeme, et funktsiooni $u(x,t)$ üheseks määramiseks tuleb ette anda algtingimused. Käesoleval korral aga rajatingimusi ei ole, sest keel on lõputu.

Seega oleme jõudnud järgmise ülesande juurde.

Ülesanne. Leida keele võrrandi

$$(1) \quad u_{xx} = \frac{1}{a^2} u_{tt}$$

lahend $u = u(x,t)$ ($-\infty < x < +\infty$), mis rahuldaks algtingimusi

$$(2) \quad u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x)$$

($-\infty < x < +\infty$).

Seda ülesannet nimetataksegi Cauchy' ülesandeks lõpmatu keele jaoks. (Siin nimetatakse üldiselt rajatingimusteta ülesandeid Cauchy' ülesanneteks.)

Selle ülesande lahendamiseks kirjutame võrrandi (1) üles kujul

$$(3) \quad u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$$

ja anname talle I kanoonilise kuju. Selleks integreerime tema karakteristliku võrrandi

$$dx^2 - a^2 dt^2 = 0.$$

Viimane laguneb kohe kaheks võrrandiks:

$$dx + adt = 0, \quad dx - adt = 0$$

ning üldintegraalideks on

$$x + at = C, \quad x - at = C'.$$

Uuteks muutujateks ξ ja η tuleb seega valida

$$\xi = x + at, \quad \eta = x - at.$$

Arvutades nüüd vajalikud tuletised

$$u_x = u_\xi + u_\eta, \quad u_t = a(u_\xi - u_\eta),$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta},$$

$$u_{tt} = (u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta})a^2,$$

näeme, et võrrand (3) esitub kujul

$$(4) \quad u_{\xi\eta} = 0.$$

Saadud võrrandi (4) jaoks on aga kerge leida tema üldintegraali. Leiame selle. Kuna otsitav on funktsioon

$u = u(\xi, \eta)$, siis integreerides võrrandit (4) η järgi, saame

$$u_\xi = g(\xi),$$

kus $g(\xi)$ on mingi ξ funktsioon. Integreerides viimast võrrandit nüüd ξ järgi, saame

$$u = \int g(\xi) d\xi + f_2(\eta).$$

Olgu $f_1(\xi) = \int g(\xi) d\xi$, siis

$$(5) \quad u = f_1(\xi) + f_2(\eta),$$

kus $f_1(\xi)$ ja $f_2(\eta)$ on ainult ξ ja η funktsioonid. Seega toob võrrandi (4) intregreerimine meid funktsiooni (5) juurde. On kerge näha ka vastupidi: millised ka diferentseeruvad funktsioonid f_1 ja f_2 ei oleks, ikka rahuldab funktsioon (5) võrrandit (4). Seega kujutab valem (5) endast võrrandi

(4) üldintegraali. Minnes nüüd tagasi vanadele muutujatele x, y näeme, et funktsioon

$$(6) \quad u(x, t) = f_1(x+at) + f_2(x-at)$$

on võrrandi (3) üldintegraaliks.

Näitame nüüd, et funktsioonide f_1 ja f_2 teatava sobiva valiku korral rahuldab valem (6) algtingimusi (2) ja osutub seega ülesande lahendiks.

Algtingimuste (2) rahuldamiseks peab kehtima

$$u(x, 0) = f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x),$$

$$u_t(x, 0) = af_1'(x) - af_2'(x) = \psi(x).$$

Integreerides viimase võrduse, saame

$$f_1(x) - f_2(x) = \frac{1}{a} \int_{x_0}^x \psi(\alpha) d\alpha + C,$$

kus x_0 ja C on konstandid. Võrdustest

$$f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x),$$

$$f_1(x) - f_2(x) = \frac{1}{a} \int_{x_0}^x \psi(\alpha) d\alpha + C$$

saame, et

$$(7) \quad \begin{cases} f_1(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(\alpha) d\alpha + \frac{C}{2}, \\ f_2(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(\alpha) d\alpha - \frac{C}{2}. \end{cases}$$

Seega oleme avaldanud funktsioonid f_1 ja f_2 antud

funktsioonide φ ja ψ kaudu. Algtingimused (2) osutuvad rahuldatuks, kui võrrandi (1) üldintegraalis (6) funktsioonid f_1 ja f_2 valida vastavalt võrdustele (7). Paigutame nüüd võrdused (7) üldintegraali (6), saame

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \left[\int_{x_0}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha - \int_{x_0}^{x-at} \psi(\alpha) d\alpha \right]$$

ehk

$$(8) \quad u(x,t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha.$$

Saadud valemit (8) nimetatakse D'Alembert'i valemiks ja see on ülesande lahendiks, kui eeldada, et $\varphi(x)$ on 2 korda diferentseeruv ja ψ üks kord diferentseeruv. Valem (8) näitab ühtlasi, et ülesanne on üheselt lahenduv, sest kui oletada, et on olemas veel teine lahend $u_1(x,t)$, siis see, nagu eelnevatest mõttekäikudest näha on, esitub ka kujul (8) ja langeb seega lahendiga $u(x,t)$ kokku.

Näitame veel, et me ülesande lahend (8) on pidevas sõltuvuses algtingimustest (2). Vaatleme ülesande lahendit ajavahemikus $0 \leq t \leq T$. Olgu $\bar{u}(x,t)$ ülesande lahendiks järgmiste algtingimuste korral:

$$\bar{u}(x,0) = \bar{\varphi}(x), \quad \bar{u}_t(x,0) = \bar{\psi}(x),$$

kus funktsioonid $\bar{\varphi}$ ja $\bar{\psi}$ olgu sellised, et antud $\epsilon > 0$ korral oleks

$$|\varphi - \bar{\varphi}| < \epsilon, \quad |\psi - \bar{\psi}| < \epsilon.$$

Valemi (8) põhjal on siis

$$|u(x,t) - \bar{u}(x,t)| < \epsilon \left(1 + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} d\alpha \right) = \epsilon(1+t).$$

Seega

$$|u(x,t) - \bar{u}(x,t)| < \epsilon(1+T).$$

Siit näeme, et kui uued algtingimused vane erinevad vanadest, s.t. kui $\epsilon > 0$ on küllalt väike, siis ka vastavate lahendite vahe on väike.

Sel puhul öeldakse, et antud ülesande lahend (8) on stabiilne ehk vaadeldav ülesanne on korrektselt seatud.

§ 6. Lainete levimine lõpmatul keelel.

Eelmises paragrahvis me saime võrrandile

$$u_{xx} = \frac{1}{a^2} u_{tt}$$

algtingimustel

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x)$$

üheselt määratud lahendi kujul

$$(1) \quad u(x, t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha.$$

Käesolevas paragrahvis uurime lähemalt lahendi (1) füüsikalist tähendust. Me teame juba, et (1) kirjeldab lõpmatu keele võnkumisprotsessi. Jääb seega vaid selgitada selle protsessi füüsikaline pilt.

1) Vaatleme esialgu lihtsustatud juhtu, kus $\psi(x) = 0$ kõikjal. Funktsioon (1) esitub siis kujul

$$(2) \quad u(x, t) = \frac{1}{2} [\varphi(x+at) + \varphi(x-at)].$$

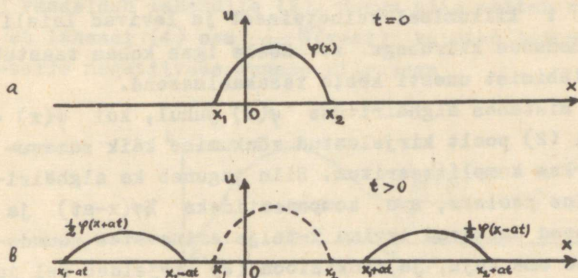
Kui $t = 0$, siis $u(x, 0) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2}\varphi(x) = \varphi(x)$. Oletame lihtsuseks, et $\varphi(x)$ on nullist erinev vaid lõigul $[x_1, x_2]$. Kokku on meil algmomendi $t = 0$ jaoks järgmine olukord: keele tasakaal on häiritud vaid lõigul $[x_1, x_2]$ ja keele punktikeste kiirused u -telje sihis on võrdsed nulliga (vt. joonis 7a).

Vaatleme nüüd olukorda järgneva ajamomendi $t > 0$ korral, s.o. kui võnkumise protsess on alanud. Avaldises (2) peab teine liidetav $\frac{1}{2}\varphi(x-at)$ olema endiselt lõigul

$$x_1 \leq x - at \leq x_2$$

nullist erinev, kuid see lõik x -i suhtes on

$$x_1 + at \leq x \leq x_2 + at.$$



Joonis 7.

Seega $\varphi(x-at)$ on nullist erinev lõigul $[x_1+at, x_2+at]$. Siit näeme, et alghäirituse osa, mis on määratud funktsiooniga $\frac{1}{2}\varphi(x)$ ja mis asetses lõigul $[x_1, x_2]$, on edasi liikunud x -telje positiivses suunas (vt. joonis 7b) ja häiritus ise on säilitanud oma kuju (sest $\frac{1}{2}\varphi(x)$ ise ei muutu).

Selleks, et sellist keele häirituse $\frac{1}{2}\varphi(x-at)$ levimist piltlikumalt ette kujutada, vaatleme koordinaatide süsteemi, mis liigub x -telje positiivses suunas nii, et tema koordinaatide alguspunkt on alati punktis $\xi = at$. Selles liikuvast koordinaatide süsteemis näeme häiritust muutumatuna. Kuna see koordinaatide süsteem liigub paigaloleva koordinaatide süsteemi suhtes kiirusega $\xi'_t = a$, siis häirituse $\frac{1}{2}\varphi(x-at)$ levimiskiirus x -telje positiivses suunas on a .

Täiesti analoogiliselt võib näidata, et funktsioon $\frac{1}{2}\varphi(x+at)$ kujutab keele alghäirituse ülejäänud osa $\frac{1}{2}\varphi(x)$ levimist x -telje negatiivses suunas kiirusega $-a$.

Üldiselt nimetatakse selliseid liikuvaid häiritusi lõpmatul keelel laineteks. Funktsiooni $\frac{1}{2}\varphi(x-at)$ poolt antud lainet nimetatakse seejuures otselaineks ja teist, $\frac{1}{2}\varphi(x+at)$

poolt antud lainet, pöördlaineks. Nagu nägime, säilitavad nii otselaine kui ka pöördlaine levimisel oma kuju. Funktsioon (2) annab meile seega otse- ja pöördlaine levimise eeskirja. Algul, s.o. ajamomendil $t = 0$ asetsevad need mõlemad lained üksteise peal kokku liidetuna (vt. joonis 4a), kuid siis eralduvad aja t liikumisel teineteisest ja levivad laiali x -telje erisuundades kiirusega a . Keele igas kohas taastub pärast laine läbimist uuesti keele tasakaaluasend.

Üldjuhul mistahes alghäirituse $\varphi(x)$ puhul, kui $\psi(x) = 0$, on funktsiooni (2) poolt kirjeldatud võnkumise kõik samasugune, kuid märksa komplitseeritum. Siin jaguneb ka alghäiritus kui alglaone pooleks, s.o. komponentideks $\frac{1}{2}\varphi(x-at)$ ja $\frac{1}{2}\varphi(x+at)$ ja need hakkavad levima x -telje erinevates suundades, säilitades oma kuju, ja funktsioon (2) kirjeldab sel juhul liitlaine levimist, mis tekib nende kahe erisuunas leviva muutumatu profiiliga lainetuse liitumisel.

2) Vaatleme siin juhtu, kus alghäiritus $\varphi(x) = 0$ kõikjal. Siis (1) esitub kujul

$$(3) \quad u(x,t) = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha.$$

Olgu $\psi(x)$ nullist erinev vaid lõigul $[x_1, x_2]$. Seega on meil ajamomendi $t = 0$ jaoks järgmine olukord: keelele puudub alghäiritus, s.t. keel on tasakaaluasendis, ja keele punktikestele on antud algkiirused lõigul $[x_1, x_2]$ ehk, nagu öeldakse: keelele on antud lõigul $[x_1, x_2]$ algimpulss $\psi(x)$.

Vaatleme funktsiooni ψ järgmist algfunktsiooni

$$\Psi(x) = \int_{x_1}^x \psi(\alpha) d\alpha,$$

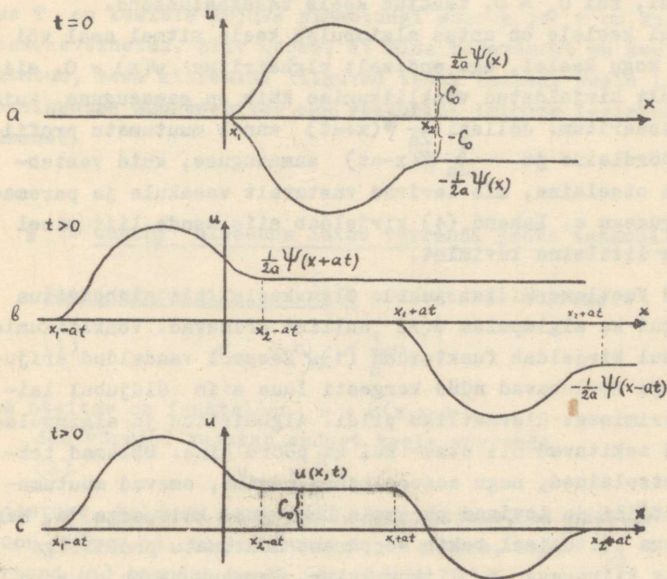
kusjuures $x \leq x_1$ korral olgu $\Psi(x) = 0$. Näeme ühtlasi, et kui $x \geq x_2$, siis

$$\Psi(x) = \int_{x_1}^{x_2} \psi(\alpha) d\alpha = C_0 = \text{const.}$$

Seega lahend (3) esitub kujul

$$(4) \quad u(x,t) = \frac{1}{2a} [\psi'(x+at) - \psi'(x-at)].$$

Lahend (4) on oma kujult täiesti analoogiline eespool juhul 1) vaadeldud lahendile (2). Seega siin näitab sama mõttekäik, et lahendi (4) osa $\frac{1}{2a} \psi'(x+at)$ kujutab lainet, mis levib x -telje negatiivses suunas kiirusega



Joonis 8.

-a, ja osa $-\frac{1}{2a} \psi'(x-at)$ lainet, mis levib x -telje positiivses suunas kiirusega a . Seega tekitab keelele antud algimpulss ka otselaine ja pöördlaine ja need erinevad teineteisest alati vaid märgi poolest. Joonisel 8a on näidatud otse- ja pöördlaine algseis $t = 0$ korral. Nagu näeme, kustu-

tavad nad teineteist ja seepärast on keel tasakaaluasendis ($u(x,0) = 0$). Joonisel 8b on kujutatud otse- ja pöördlaine asend järgneval ajamomendil $t > 0$. Näeme, et nad on nihkunud üksteise suhtes, säilitades oma kuju. Lahend (4) annab otse- ja pöördlaine liitumisel tekkiva laine ja selle profiil on kujutatud joonisel 8c. Nagu näeme, lakkab keele neis punktides, mida otse- ja pöördlaine on juba läbinud, liikumine, kuid keel ei lähe üldiselt rääkides tasakaaluasendisse tagasi, vaid säilitab nn. jääknihke, mille suurus on C_0 . Ainult erijuhul, kui $C_0 = 0$, taastub keele tasakaaluasend.

Kui keelele on antud algimpulss keele mitmel osal või koguni kogu keelele, aga endiselt alghäiritus $\varphi(x) = 0$, siis (4) poolt kirjeldatud võnkliikumise käik on samasugune, kuid komplitseeritum. Jällegi $\frac{1}{2a}\psi(x+at)$ annab muutumatu profiiliga pöördlaine ja $-\frac{1}{2a}\psi(x-at)$ samasuguse, kuid vastasmärgiga otselaine, mis levivad vastavalt vasakule ja paremale kiirusega a . Lahend (4) kirjeldab siis nende liitumisel tekkiva liitlaine levimist.

3) Vaatleme üldist juhtu. Olgu keelel nii alghäiritus $\varphi(x)$ kui ka algimpulss $\psi(x)$ nullist erinevad. Võnkliikumisel juhul kirjeldab funktsioon (1). Eespool vaadeldud erijuhud 1) ja 2) lubavad nüüd kergesti luua siin üldjuhul lainete levimisest ülevaatliku pildi. Alghäiritus ja algimpulss mõlemad tekitavad nii otse- kui ka pöördlaine. Mõlemad tekkinud otselained, nagu eespool juba nägime, omavad muutumatut profiili ja levivad paremale ühesuguse kiirusega a . Nende mõlema liitumisel tekib seepärast muutumatu profiiliga paremale kiirusega a liikuv laine. Samasugune on olukord mõlema pöördlaine levimisel. Nende liitumisel tekib muutumatu profiiliga laine, mis liigub vasakule kiirusega $-a$. Keele võnkliikumine, mida meie näeksime, tekib nende kahe muutumatu profiiliga erisuunas liikuva laine liitumisel.

Igapäevasest elust me teame, et küllalt pikal keelel saab tekitada laine nii, et ta levib ainult ühes suunas, kuna teises suunas liikuvat lainet ei teki. Selline olukord on võimalik ka vaadeldaval lõpmatul keelel. Näiteks võime lõp-

matul keelel tekitada ainult otseaine. Selleks on tarvis, et alghäirituse ja algimpulsi poolt tekitatud pöördlained erineksid üksteisest vaid märgi poolest. Sel korral nad kustutavad teineteist ja vasakule liikuvat lainet ei teki. Kuna aga algimpulsi poolt tekitatud otse- ja pöördlaine on alati erinevate märkidega, siis otselained ei kustu. Nii tekib ainult paremale liikuv laine.

Keele võrrandi tuletamisel saime, et

$$a = \sqrt{\frac{T}{\rho}},$$

kus T on keelele mõjuva pingetungi suurus ja ρ on keele lineaarne tihedus. Siit näeme, et mida tugevamini on keel pingutatud, seda kiiremini liiguvad temal lained. Keele lineaarse tiheduse suurenemisel aga vastupidi lainete levimiskiirus väheneb.

§ 7. Cauchy' ülesanne laine võrrandi jaoks tasandil.

Laine võrrandiks tasandil nimetatakse võrrandit

$$(1) \quad u_{xx} + u_{yy} = \frac{1}{a^2} u_{tt},$$

kus otsitav on funktsioon $u = u(x, y, t)$.

See võrrand kujutab endast keele võrrandi

$$(2) \quad u_{xx} = \frac{1}{a^2} u_{tt}$$

üldistust. Viimase saame siit, kui oletame, et otsitav funktsioon $u(x, y, t)$ on konstantne y suhtes, siis $u_{yy} = 0$ ja võrrand (1) taandub keele võrrandiks (2).

Teostame võrrandis (1) muutuja vahetuse $z = at$, siis saame

$$u_{xx} + u_{yy} - u_{zz} = 0,$$

kust on näha, et laine võrrand tasandil on lineaarne teist järku hüperboolne võrrand.

Võrrandi (1) juurde võib jõuda õhukese membraani vaba-õnnumiste vaatlemisel. Sel korral kujutab otsitav funktsi-

oon $u = u(x, y, t)$ ruumis (x, y, u) võnkuva membraani punkti (x, y) asukohta ajamomendil t (vt. Sobolevi õpik lk. 14).

Võrrandile (1) seatakse järgmine Cauchy' ülesanne.

Ülesanne. Leida võrrandi (1) mittetriviaalne lahend $u = u(x, y, t)$, mis rahuldab algtingimusi

$$(3) \quad u(x, y, 0) = \varphi(x, y), \quad u_t(x, y, 0) = \psi(x, y).$$

Siin ülesandes eeldame, et $\varphi(x, y)$ omab kuni kolmanda järguni ja $\psi(x, y)$ kuni teise järguni pidevaid osatuletisi. Siis on vaadeldaval ülesandel olemas ainus lahend (vt. Smirnovi õpiku II köites lk. 531) ja see esitub kujul

$$(4) \quad u(x, y, t) = \frac{\partial}{\partial t} u^\varphi(x, y, t) + u^\psi(x, y, t),$$

kus

$$(5) \quad u^\varphi(x, y, t) = \frac{1}{2\pi a} \iint_{D(at)} \frac{\varphi(\alpha, \beta) d\alpha d\beta}{\sqrt{(at)^2 - (\alpha-x)^2 - (\beta-y)^2}},$$

$$(6) \quad u^\psi(x, y, t) = \frac{1}{2\pi a} \iint_{D(at)} \frac{\psi(\alpha, \beta) d\alpha d\beta}{\sqrt{(at)^2 - (\alpha-x)^2 - (\beta-y)^2}},$$

Siin $D(at)$ tähendab piirkonda, mis on piiratud ringjoonega $(\alpha-x)^2 + (\beta-y)^2 = (at)^2$, mille keskpunkt on punktis (x, y) .

Valemit (4) nimetatakse Poissoni valemiks.

Vahetu kontrollimine näitab, et funktsioonid (5) ja (6) ja ka nende tuletised u_t^φ ja u_t^ψ rahuldavad võrrandit (1). (Vt. Petrovski õpik lk. 101.) Seega rahuldab Poissoni valem laine võrrandit (1). Näitame, et ta rahuldab ka algtingimusi (3). Selleks teostame muutuja vahetuse, minnes muutujatelt α, β muutujatele ξ, η järgmiste valemite abil:

$$\alpha = x + \xi at, \quad \beta = y + \eta at.$$

Piirkond $D(at)$ muutub piirkonnaks $D(1)$, mis on piiratud ringjoonega $\xi^2 + \eta^2 = 1$, ja me saame

$$(7) \quad u^\varphi(x, y, t) = \frac{t}{2\pi} \iint_{D(1)} \frac{\varphi(x+\xi at, y+\eta at) d\xi d\eta}{\sqrt{1-\xi^2-\eta^2}},$$

$$(8) \quad u^\psi(x, y, t) = \frac{t}{2\pi} \iint_{D(1)} \frac{\psi(x+\xi at, y+\eta at)}{\sqrt{1-\xi^2-\eta^2}} d\xi d\eta.$$

Arvutame u^ψ tuletise t järgi, kasutades selleks avaldist (7):

$$(9) \quad u_t^\psi = \frac{u^\psi}{t} + \frac{at}{2\pi} \iint_{D(1)} \frac{\xi\psi_x + \eta\psi_y}{\sqrt{1-\xi^2-\eta^2}} d\xi d\eta.$$

Võttes nüüd lahendis (4) $t = 0$, saame, arvestades võrdusi (8) ja (9)

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y) \frac{1}{2\pi} \iint_{D(1)} \frac{d\xi d\eta}{\sqrt{1-\xi^2-\eta^2}} = \varphi(x, y),$$

sest

$$\frac{1}{2\pi} \iint_{D(1)} \frac{d\xi d\eta}{\sqrt{1-\xi^2-\eta^2}} = 1.$$

Teise algtingimuse rahuldamiseks arvutame valemist (4) osatuletise t järgi, saame

$$u_t = u_{tt}^\psi + u_t^\psi.$$

Et u^ψ on võrrandi (1) lahendiks, siis võime kirjutada

$$u_t = a^2(u_{xx}^\psi + u_{yy}^\psi) + u_t^\psi.$$

Osatuletise u_t^ψ arvutame võrdusest (8), saame (vt. võrdus (9))

$$u_t^\psi = \frac{u^\psi}{t} + \frac{at}{2\pi} \iint_{D(1)} \frac{\xi\psi_x + \eta\psi_y}{\sqrt{1-\xi^2-\eta^2}} d\xi d\eta.$$

Kui nüüd $t = 0$, siis (8) järgi $u_t^\psi(x, y, 0) = \psi(x, y)$.

Kuna võrduse (7) põhjal $u^\psi(x, y, 0) = 0$, siis $t = 0$ korral ka $u_{xx}^\psi + u_{yy}^\psi = 0$ ja me saame

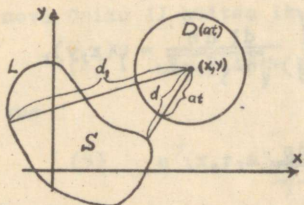
$$u_t(x, y, 0) = \psi(x, y).$$

Seega on ka teine algtingimus rahuldatud.

Funktsioon (4) kirjeldab lainete levimist ruumis (x, y, u) , kui loeme, et $u = u(x, y, t)$ väärtused kujutavad endast xy -tasandil oleva punkti (x, y) nihke suurust u -telje sihis. Saadav pilt on analoogiline keele võnkumisel kirjeldatud lainete

pliiduga, kuid siin on üksikasjaline analüüs väga komplitseeritud. Vaatleme seepärast lihtsustatud olukorda, mis võimaldab saada ülevaate ka üldisest pildist.

Olgu funktsioon (x,y) , mis kujutab alghäiritust, ja funktsioon $\varphi(x,y)$, mis kujutab algimpulssi, nullist erinevad vaid piirkonnas S , mis on piiratud joonega L . Asetegu punkt (x,y) väljaspool seda piirkonda S kaugusel d (vt. joonis 9). Funktsioonis (4) moodustab integreerimispiirkonna ring $D(at)$ keskpunktiga punktis (x,y) . Ringi $D(at)$



Joonis 9.

raadius on at ja see kasvab aja t suurenemisel. Neil ajamomentidel, mil veel $at < d$, s.t. kui $t < \frac{d}{a}$, ei ole ringil $D(at)$ ja piirkonnal S ühiseid punkte. Seepärast ringis $D(at)$ on $\varphi(x,y)$ ja $\psi(x,y)$ kõikjal võrdsed nulliga ja valemist (4) saame $u(x,y,t) = 0$, mis ütleb, et ajamomentidel $t < \frac{d}{a}$ on punkt (x,y) tasakaaluasendis, s.t. püsib paigal

xy-tasandil. Punkti (x,y) selline tasakaal kestab kuni ajamomendini $t = \frac{d}{a}$, sest siis on piirkond $D(at)$ suurenenud nii palju, et ta puudutab piirkonda S . Õeldakse sel puhul, et punkti (x,y) jõudis laine esikülg. Suurematel ajamomentidel, s.o. $t > \frac{d}{a}$ korral on piirkondadel $D(at)$ ja S juba ühiseid osi ja seepärast annab funktsioon (4) üldiselt rääkides nullist erinevaid $u(x,y,t)$ väärtusi. Õeldakse, et punkti (x,y) tasakaal on häiritud, seejuures punkt ise liigub u-telje sihis saadava u väärtuse võrra. Selline liikumine kestab kuni ajamomendini $t = \frac{d_1}{a}$, mil $D(at)$ haarab endasse kogu piirkonna S (vt. joonis 9, kus d_1 tähendab punkti (x,y) suurimat kaugust piirkonna S punktidest). Sel puhul õeldakse, et punkti (x,y) jõudis laine tagakülg.

Aja t edasisel suurenemisel on raadius $at > d_1$ ja piirkond $D(at)$ sisaldab endas tervikuna piirkonna S . Siis

u^{ψ} ja u^{ψ} avaldistes (5) ja (6) tuleb integreerida lihtsalt üle piirkonna S , kuna $\varphi(x,y)$ ja $\psi(x,y)$ on antud juhul väljaspool piirkonda S võrdsed nulliga. Siit näeme, et pärast laine tagakülje läbimist, s.o. $t > \frac{d_1}{a}$ korral ei ole punkti (x,y) asukoht enam mõjustatud $\varphi(x,y)$ ja $\psi(x,y)$ uute väärtuste poolt, kuid punkt (x,y) ei lähe tasakaaluasendisse, vaid jätkab liikumist, kuna avaldistes (5) ja (6) sisalduvad integraalilused funktsioonid suurust $(at)^2$. Seetõttu muutuvad aja t edasisel suurenemisel $u(x,y,t)$ väärtused vaadeldavas punktis (x,y) . Öeldakse sel puhul, et pärast laine tagakülje läbimist leiab aset lainete difusiooninähe.

Meenutame, et lõpmatu keele korral samasuguse alghäirituse ja algimpulsi puhul lakkas liikumine igas punktis pärast laine (tagakülje) läbimist, kuid punktid ise ei läinud tasakaaluasendisse tagasi, vaid säilitasid nn. jääknihke. Seda viimast nähet nimetatakse ka siin lainete difusiooniks. Siin on difusioon püsiv, kuna jääknihke suurus ei olene ajast t .

Meil ei ole praegusel vaadeldaval ruumilisel juhul aga difusioon püsiv. Seda näeme sellest, et avaldistes (5) ja (6) asetseb suurus $(at)^2$ nimetajas. Seetõttu vaadeldavate $\varphi(x,y)$ ja $\psi(x,y)$ puhul läheneb funktsioon (4) nullile aja t tõkestamatul suurenemisel. Järelikult vaadeldavas punktis (x,y) pärast laine tagakülje läbimist väheneb liikumine järjest, kuni lõpuks punkt (x,y) rahuneb oma tasakaaluasendis xy -tasandil.

Me viisime arutelu lainetuse kohta läbi ühe punkti (x,y) jaoks. Kujutame nüüd ette terviklikult tekkinud lainetuse pilti. Näeme, et aja t suurenemisel hakkab alghäirituspiirkond laienema, s.t. lainetus tekib järjest kaugemates punktides. Tekivad nn. silindrilised lained, mis levivad radiaalselt alghäirituspiirkonnast eemale kiirusega a . Pärast silindrilise laine läbimist hakkavad punktid rahunema ja lõpuks lakkab liikumine praktiliselt, kuna meil iga fikseeritud x,y korral läheneb $u(x,y,t)$ nullile aja t suurenemisel. Edasi leviv silindriline laine ise aga ei kustu, nagu see on näha avaldisest (4). Väga sarnase pildi lainetusest saame, visates kivi vaikselt veepinnale. Siin tekkinud silindrilised lained

levivad igas suunas radiaalselt laiali. Kuid siin leviv lainetus kustub pikkamisi hõõrdumise tõttu, mida laine võrrandi (2) tuletamisel ei ole arvestatud.

Valides mitmesugusel viisil alghäirituse $\varphi(x,y)$ ja algimpulsi $\psi(x,y)$, võime saada väga imelikke pilte lainetusest.

Algtingimustes (3) oli meil eeldatud, et funktsioonid $\varphi(x,y)$ ja $\psi(x,y)$ omavad pidevaid osatuletisi kuni kolmanda ja teise järguni vastavalt. Kui need eeldused ei ole täidetud, siis asendame funktsioonid $\varphi(x,y)$ ja $\psi(x,y)$ selliste ligikaudsetega, kus need eeldused on juba täidetud. See lahendit (4) oluliselt ei mõjusta, kuna me ülesande lahend, nagu kerge näidata on, on pidevas sõltuvuses algtingimustest. Tõestada võib seda analoogilisel viisil nagu lõpma tu keele korral.

Märgime lõpuks veel, et Poissoni valemist (4), kui $u(x,y,t)$ ei sõltu y -st, järeldub D'Alembert'i valem, mis oli paragrahvis 5 (vt. Petrovski õpik lk. 105).

Märkus. Laine võrrandiks ruumis nimetatakse võrrandit

$$(10) \quad u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = \frac{1}{a^2} u_{tt},$$

kus otsitav on funktsioon $u = u(x,y,z,t)$. Eespool olnud laine võrrand tasandil ja keele võrrand on võrrandi (10) erijuht. Laine võrrandile (10) seatakse järgmine Cauchy' ülesanne.

Ülesanne. Leida võrrandi (10) mittetriviaalne lahend $u = u(x,y,z,t)$, mis rahuldab algtingimusi

$$u(x,y,z,0) = \varphi(x,y,z), \quad u_t(x,y,z,0) = \psi(x,y,z),$$

kus $\varphi(x,y,z)$ ja $\psi(x,y,z)$ on antud funktsioonid.

Selle ülesande lahendamine toimub täiesti analoogiliselt laine võrrandile tasandil (vt. Petrovski õpik, lk. 104). Ülesandel on ainus lahend, mis osutub pidevalt sõltuvaks algtingimustest ja kujutab lainete levimist neljamõõtmelises ruumis (x,y,z,u) . (vt. Petrovski õpik, lk. 106).

Paraboolsed võrrandid esinevad mitmesuguste soojusjuhtivuse- ja difusiooniprotsessidega seotud loodusnähtuste matemaatilisel uurimisel. Nii taanduvad paraboolsete võrrandite vaatlemisele füüsikalised ülesanded, mis on seotud soojuse levimisega vardas, plaadis ja ruumis ning gaasi difusiooniga mingis poorses keskkonnas.

Käesolevas peatükis vaatleme mõningaid küsimusi, mis on seotud soojuse levimisega lõplikus ja lõpmatus vardas. Siin kohtume lihtsaima paraboolse võrrandiga $u_{xx} - u_y = 0$.

§ 1. Soojusjuhtivuse võrrandi tuletamine.

Olgu antud peenike homogeenne (s.t. ühtlasest ainest) varras, mille ristlõike pindala on $S = \text{const}$. Varras võib olla lõplik või lõpmatu (ka mõlemas suunas). Varras olgu paigutatud x -teljele. Ta olgu hästi peenike, siis võime lugeda ristlõike igas punktis temperatuuri ühesuguseks. Vaatleme juhtu, kus vardas endas soojust ei teki (soojuse teke võib esineda keemiliste reaktsioonide, elektrivoolu, radioaktiivsuse jne. tõttu). Oletame, et varras on isoleeritud ümbritsevast keskkonnast, s.t., et soojuskadusid varda külgede kaudu ei esine.

Kui varda temperatuur ei ole kõikjal ühesugune, siis hakkab soojus levima ehk, nagu öeldakse, voolama kõrgema temperatuuriga kohast madalama temperatuuriga koha poole. Soojuse voolu suuna loetakse positiivseks, kui soojus voolab vardas x -telje positiivses suunas.

Soojuse levimise protsessi vardas saab kirjeldada üldiselt kahe muutuja funktsiooni $u = u(x, t)$ abil, mille väärtused kujutavad varda temperatuuri kohal x ajamomendil t . Meie eesmärgiks on leida võrrand, mida see funktsioon $u = u(x, t)$ peab rahuldama ja mille lahendamisel võime ta leida. Sellist võrrandit nimetatakse soojusjuhtivuse võrrandiks varda tarvis.

Võtame vardast vaatluse alla tema mingi osa (x_1, x_2) ja vaatleme soojuste levimise protsessi selles ajavahemikus (t_1, t_2) . Temperatuuri jaotus selles varda osas ajamomendil t olgu määratud funktsiooniga $u = u(x, t)$.

Katseliselt on kindlaks tehtud, et ajaühiku jooksul (s.t. ajamomendist t kuni ajamomendini $t + 1$) läbi ristlõike S kohal x läbivoolanud soojuste hulk on (Fourier' seadus)

$$Q = -ku_x(x, t)S,$$

kus k on soojusjuhtivuse koefitsient. Järelikult aja dt jooksul läbinud soojuste hulk on

$$dQ = -ku_x(x, t)S dt.$$

Ajavahemiku (t_1, t_2) jooksul läbi vaadeldava ristlõike voolanud soojuste hulk Q on siis

$$Q = - \int_{t_1}^{t_2} kSu_x(x, t) dt.$$

Seega kohti x_1 ja x_2 selles ajavahemikus läbinud soojuste hulgad on vastavalt

$$Q_1 = - \int_{t_1}^{t_2} kSu_x(x_1, t) dt$$

ja

$$Q_2 = - \int_{t_1}^{t_2} kSu_x(x_2, t) dt.$$

Soojustehulgad Q_1 ja Q_2 ei tarvitse võrdsed olla, sest osa soojust võis varda vaadeldavasse osasse jääda. Vardasse jäänud soojustehulk on $Q_1 - Q_2$ ja see kulus varda osa temperatuuri tõstmiseks (Kui $Q_1 - Q_2$ on negatiivne, siis muidugi soojuste äravool oli suurem juurdevoolust ja temperatuuri tõus varda punktides võib olla ka negatiivne.). Oletame, et me varda osas temperatuur tõusis igas punktis x Δu võrra, siis

$$\Delta u = u(t_2, x) - u(t_1, x).$$

Teisest küljest vaatleme, palju on tarvis soojust, et

tõsta varda temperatuuri igas kohas parajasti vaadeldava Δu võrra. Üldiselt on nii, et kui kogu keha temperatuur tõuseb $\Delta u = \text{const.}$ võrra, siis selleks vajalik soojusehulk on

$$Q = cm\Delta u,$$

kus c on soojusmahtuvuse koefitsient ja m on keha mass. Meil on Δu aga sõltuv kohast x . Seepärast vaatleme esialgu varda elemendikest pikkusega dx . Tema ruumala on Sdx ja mass ρSdx , kus $\rho = \text{const.}$ on varda tihedus. Selle osakese temperatuuri tõstmiseks Δu võrra läheb soojust eelmise valemi järgi

$$dQ = c\rho Sdx\Delta u$$

(varda elemendikese ulatuses võime lugeda $\Delta u = \text{const.}$). Varda osa (x_1, x_2) temperatuuri tõstmiseks igas kohas Δu võrra kulub siis soojust

$$\Delta Q = \int_{x_1}^{x_2} c\rho S\Delta u dx.$$

Energia jäävuse seaduse põhjal võime nüüd kirjutada, et

$$Q_1 - Q_2 = \Delta Q.$$

Asendades viimases võrduses soojusehulgad nende eespool saadud integraalavaldistega, saame

$$\int_{t_1}^{t_2} kSu_x(x_2, t) dt - \int_{t_1}^{t_2} kSu_x(x_1, t) dt = \int_{x_1}^{x_2} c\rho S\Delta u dx,$$

ehk

$$\int_{t_1}^{t_2} k[u_x(x_2, t) - u_x(x_1, t)] dt = \int_{x_1}^{x_2} c\rho [u(x, t_2) - u(x, t_1)] dx.$$

Oletame, et otsitav funktsioon $u = u(x, t)$ omab pidevaid osatuletisi x -i järgi kuni teise järguni ja pidevat osatuletist t järgi, siis võime kirjutada

$$u_x(x_2, t) - u_x(x_1, t) = \int_{x_1}^{x_2} u_{xx} dx,$$

$$u(x, t_2) - u(x, t_1) = \int_{t_1}^{t_2} u_t dt$$

Asendades need avaldised viimasesse võrdusesse, saame

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} k u_{xx} dx dt = \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} c\varphi u_t dt dx$$

ehk (integreerimisrajade konstantsuse tõttu)

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} (k u_{xx} - c\varphi u_t) dt dx = 0.$$

Kuna see tingimus peab kehtima iga t_1 , t_2 ja x_1 , x_2 korral, siis integraalialune funktsioon peab võrduma nulliga iga x ja t korral (põhjendada!), seega

$$k u_{xx} - c\varphi u_t = 0$$

iga x, t korral. Mitte suurte temperatuuri kõikumiste korral võime lugeda suurused k, c, φ konstantseiks. Olgu seepärast $a^2 = \frac{k}{c\varphi} = \text{const}$, siis võime kirjutada viimase võrduse ümber kujul

$$(1) \quad u_{xx} = \frac{1}{a^2} u_t.$$

Saadud võrrandit (1) nimetatakse soojusjuhtivuse võrrandiks varas tarvis.

Võtame võrrandis (1) ette muutuja vahetuse $y = a^2 t$, siis $u_t = u_y a^2$ ja me saame

$$(2) \quad u_{xx} - u_y = 0,$$

mis on soojusjuhtivuse võrrandi kanooniline kuju. Nagu näeme, on võrrand (2) teist järku lineaarne osatuletistega võrrand ja on paraboolset tüüpi.

Soojuse levimist võib vaadelda ka plaadis ja üldiselt ruumilises keskkonnas. Soojuse levimise korral õhukeses plaadis on otsitav funktsioon $u = u(x, y, t)$, kus u väärtused tähendavad temperatuuri plaadi punktis (x, y) ajamomendil t .

Soojusjuhtivuse võrrand esitub sel korral kujul

$$(3) \quad u_{xx} + u_{yy} = \frac{1}{a^2} u_t.$$

Võrrandi (3) võime saada täiesti analoogilisel viisil, nagu saime võrrandi (1). Võrrand (3) on paraboolne teist järku liinearne võrrand.

Soojuse levimisel ruumilises keskkonnas on otsitavaks funktsioon $u = u(x, y, z, t)$, mis näitab temperatuuri kohal (x, y, z) ajamomendil t ja soojusjuhtivuse võrrand esitub kujul

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = \frac{1}{a^2} u_t.$$

Soojusjuhtivuse võrrandi lahendit nimetatakse sageli ka temperatuurifunktsiooniks, sest ta määrab temperatuuri mingis kohas mingil ajamomendil.

§ 2. Soojusjuhtivuse võrrandi lahendi ainsus lõpliku varda jaoks.

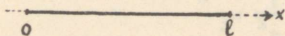
Eelmises paragrahvis me tuletasime võrrandi

$$(1) \quad u_{xx} = \frac{1}{a^2} u_t,$$

mida pidi rahuldama vardas soojuse levimise protsessi kirjeldav funktsioon $u = u(x, t)$.

Käesolevas paragrahvis anname lisatingimused selleks, et võrrandi (1) lahend oleks üheselt määratud lõpliku varda korral. Siis võime väita, et võrrandi (1) lahendamisel saadud funktsioon $u = u(x, t)$ on just see otsitav funktsioon, mis kirjeldab soojuse levimise protsessi vardas.

Levigu meil soojus lõplikus vardas, mille pikkus on l . Varras olgu paigutatud x -teljele nii, nagu näidatud joonisel 10. Soojuse levimisprotsessi vaatlemisel vardas on muidugi tähtis, kuidas oli soojus jaotatud vardas protsessi algmomendil $t = 0$, sest sellest sõltub oluliselt soojuse edasise le-



vimise iseloom. Olgu ajamendil $t = 0$ temperatuuri jaotus vardas antud funktsiooniga $\varphi(x)$ ($0 \leq x \leq l$). Siit saame tingimuse

Joonis 10.

$$(2) \quad u(x, 0) = \varphi(x).$$

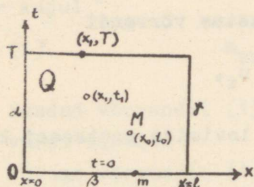
Tingimust (2) nimetatakse algtingimuseks.

Soojuse jaotus vardas protsessi käigus sõltub muudugi ka sellest, kuidas muutub temperatuur varda otspunktides. Siit saame nn. rajatingimused

$$(3) \quad u(0, t) = f_1(t), \quad u(l, t) = f_2(t),$$

kus $f_1(t)$ ja $f_2(t)$ määravad temperatuuri varda otspunktides aja t funktsioonina.

Osutub, et algtingimus (2) ja rajatingimused (3) määravad soojusjuhtivuse võrrandi lahendi juba üheselt. Selle näitamiseks tõestame enne nn. maksimumi- ja miinimumiprintsiibi varda jaoks. Vaatleme võrrandi (1) lahendit piirkonnas $0 \leq x \leq l$, $0 \leq t \leq T$. See piirkond moodustab ristküliku xt -tasandil ja seda tähistame Q abil. Selle ristküliku küljed on siis antud võrranditega $x = 0$, $t = 0$, $x = l$ ja $t = T$ (vt. joonis 11).



Joonis 11.

Maksimumi- ja miinimumiprintsiip.

Soojusjuhtivuse võrrandi (1) iga lahend $u = u(x, t)$, mis on määratud ja pidev ristkülikus Q , omandab maksimaalse ja minimaalse väärtuse ristküliku Q külgedel $t = 0$, $x = 0$ või $x = l$.

Tõestus. Tõestame kõigepealt maksimumi juhtumi. Tähistame tähtedega α, β, γ vastavalt ristküliku külgi $x = 0$, $t = 0$, $x = l$.

Olgu M funktsiooni $u(x, t)$ maksimaalne väärtus ristküliku Q sees ja m $u(x, t)$ maksimaalne väärtus ristküliku

külgedel α, β, γ . Printsiiip väidab, et alati $m \geq M$.

Oletame nüüd vastupidi printsiiibile, et antud $u(x, t)$ korral on $M > m$. Olgu sel funktsioonil $u(x, t)$ maksimaalne väärtus punktis (x_0, t_0) , s.t.

$$M = u(x_0, t_0).$$

Defineerime funktsiooni

$$v(x, t) = u(x, t) + \frac{M - m}{4l^2} (x - x_0)^2.$$

Funktsioon $v(x, t)$ on pidev, sest $u(x, t)$ on seda eelduse järgi. $v(x, t)$ väärtus punktis (x_0, t_0) on

$$v(x_0, t_0) = u(x_0, t_0) = M,$$

aga tema väärtused ristküliku Q külgedel α, β, γ on

$$v(x, t) \leq m + \frac{M - m}{4l^2} l^2 = \frac{1}{4}M + \frac{3}{4}m < \frac{1}{4}M + \frac{3}{4}M = M.$$

Seega ristküliku seesmises punktis (x_0, t_0) on $v(x_0, t_0) = M$, aga ristküliku külgedel α, β, γ $v(x, t) < M$. Järelikult pidevuse tõttu $v(x, t)$ omandab maksimaalse väärtuse kusagil ristküliku seesmises punktis või ülemisel küljel $t = T$. Olgu funktsioonil $v(x, t)$ maksimaalne väärtus punktis (x_1, t_1) . See punkt asetseb siis kas ristküliku Q sees või ülemisel küljel $t = T$.

Kui punkt (x_1, t_1) on ristküliku Q sees, siis selles punktis peab funktsioonil $v(x, t)$ olema maksimum, s.t.

$$v_t = 0, \quad v_{xx} \leq 0.$$

Seega

$$\frac{1}{a^2} v_t - v_{xx} \geq 0.$$

Kui punkt (x_1, t_1) asetseb ristküliku Q ülemisel küljel $t = T$, siis seal $v_t \geq 0$ olenevalt sellest, kas funktsioonil $v(x, t)$ on seal maksimum või ta kasvab piirkonnast Q välja. Ülemisel küljel $t = T$ võime vaadelda funktsiooni $v(x, T)$ kui ühe muutuja funktsiooni. Temal on punktis $x = x_1$

maksimum ja sellepärast seal

$$v_{xx} \leq 0.$$

Seega on sel korral samuti

$$\frac{1}{a^2} v_t - v_{xx} \geq 0.$$

Võrreldes saadud võrratusi omavahel, näeme vastuolu. Sellega on printsiiibi maksimumi juhtum põhjendatud.

Miinumumi juhu põhjendamise taandame maksimumi juhule. Olgu $u(x,t)$ soojusjuhtivuse võrrandi lahendiks, siis $-u(x,t)$ on ka lahend. Neis punktides, kus $u(x,t)$ omandab minimaalse väärtuse, omandab $-u(x,t)$ maksimaalse väärtuse. Sellega taandubki miinumumi juhu põhjendus maksimumi juhule.

Tõestatud printsiiibi füüsikaline sisu on järgmine: soojuse levimise ajal vardas ei saa varda üheski seesmises punktis olla kõrgem ega madalam temperatuur kui oli maksimaalne ja minimaalne temperatuur vardas protsessi alguses ja on varda otspunktides protsessi käigus. Teiste sõnadega: soojus ei saa kuhjuda. Printsiiip kehtib ka ruumilise keskkonna korral. Põhjendus on analoogiline. Tähendab: ka ruumis ei kuhju soojus. Seega näiteks võime väita, et toas ei saa üheski kohas tekkida kõrgem temperatuur, kui on ahju pinna või radiaatori temperatuur, kust tuba saab soojust.

Maksimumi- ja miinumiprintsiiip kehtib muidugi iga ristküliku jaoks, mille küljed on paralleelsed x - ja t -teljega. See on näha sellest, et võrrand (1) ei muutu, kui x asendada muutujaga $x+a$ ja t muutujaga $t+b$.

Tõestatud printsiiip võimaldab näidata, et võrrandil (1) võib antud lisatingimustel (2) ja (3) olla vaid üks lahend.

Oletame vastupidi, et siiski leidub kaks lahendit $u_1(x,t)$ ja $u_2(x,t)$, kusjuures $u_1 \neq u_2$ ning mõlemad rahuldeavad tingimusi (2) ja (3).

Vaatleme vahet

$$v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t).$$

Funktsioon $v(x,t)$ on ka võrrandi (1) lahend ja täidab tingimusi:

$$\text{k\u00fcljel } \alpha \quad v(0,t) = 0,$$

$$\text{" } \beta \quad v(x,0) = 0,$$

$$\text{" } \gamma \quad v(1,t) = 0.$$

Seega k\u00fclgedel α, β, γ on $v(x,t) = 0$. Maksimumi- ja miinimumiprintsiibi p\u00f5hjal on siis kogu ristk\u00fclikus Q $v(x,t) = 0$. Tulemus on vastuolus eeldusega. Seega antud tingimustel ei saa kahte erinevat lahendit v\u00f6rrandil (1) olla.

T\u00f5estatud printsiip v\u00f5imaldab samuti n\u00e4idata, et v\u00f6rrandi lahend on pidevas s\u00f5ltuvuses alg- ja rajatingimustest. Selle n\u00e4itamiseks vaatleme soojusjuhtivuse v\u00f6rrandi mingit teist lahendit $\bar{u}(x,t)$, mis rahuldab algtingimust

$$\bar{u}(x,0) = \bar{\varphi}(x)$$

ja rajatingimusi

$$\bar{u}(0,t) = \bar{F}_1(t), \quad \bar{u}(1,t) = \bar{F}_2(t).$$

Siis rahuldab vahefunktsioon

$$v(x,t) = u(x,t) - \bar{u}(x,t)$$

ka v\u00f6rrandit (1) ja t\u00e4idab tingimusi:

$$\text{k\u00fcljel } \beta \quad v(x,0) = \varphi - \bar{\varphi},$$

$$\text{" } \alpha \quad v(0,t) = f_1 - \bar{F}_1,$$

$$\text{" } \gamma \quad v(1,t) = f_2 - \bar{F}_2.$$

Erinegu n\u00f5ud uued alg- ja rajatingimused endistest v\u00e4hem kui $\varepsilon > 0$, s.t. olgu

$$|\varphi - \bar{\varphi}| < \varepsilon, \quad |f_1 - \bar{F}_1| < \varepsilon, \quad |f_2 - \bar{F}_2| < \varepsilon.$$

Viimastest v\u00f6rdustest j\u00e4reldub siis, et

$$|v(x,0)| < \varepsilon, \quad |v(0,t)| < \varepsilon, \quad |v(1,t)| < \varepsilon.$$

Maksimumi- ja miinimumiprintsiibi j\u00e4rgi on siis k\u00f5ikjal ristk\u00fclikus Q

$$|v(x,t)| < \varepsilon.$$

s.t

$$|u(x,t) - \bar{u}(x,t)| < \varepsilon.$$

Seega: kui alg- ja rajatingimused muutuvad v\u00e4he, muu-

tub ka võrrandi (1) lahend vähe. Üeldakse sel puhul, et võrrandi lahend on stabiilne.

Võrrandi lahendi olemasolu antud lisatingimustel näitame järgmises paragrahvis.

§ 3. Soojuse levimine lõplikus vardas.

Selles paragrahvis lahendame Fourier' meetodiga järgmise ülesande.

Ülesanne. Leida mittetriviaalne lahend $u(x,t)$ võrrandile

$$(1) \quad u_{xx} = \frac{1}{a^2} u_t,$$

mis rahuldab algtingimust

$$(2) \quad u(x,0) = \varphi(x) \quad (0 \leq x \leq 1, \quad 1 = \text{varda pikkus})$$

ja rajatingimusi

$$(3) \quad u(0,t) = 0 \quad u(1,t) = 0.$$

Seega lahendame ülesande soojuse levimise kohta lõplikus vardas eeldusel, et varda otspunktides on temperatuur kogu protsessi jooksul konstantne ja võrdne nulliga. Selle kitsenuse teeme seepärast, et üldiste rajatingimustega ülesande lahendamine osutub väga komplitseerituks, kuna Fourier' meetod on otseselt rakendatav ainult ülesannete puhul, kus on nn. null-rajatingimused, s.o. rajatingimused (3). Antud ülesande lahendus mistahes rajatingimuste puhul leidub Tihhonov-Samarski õpikus.

Vastavalt kasutatavale meetodile leiame algul erilahendid kujul

$$XT = X(x)T(t).$$

Arvutame vajalikud osatuletised ja paigutame võrrandisse (1), siis saame

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{a^2} \frac{T'}{T} = -\lambda^2.$$

Siin tähistame konstantse suhte $-\lambda^2$ abil, sest kui suhe lügeda mittenegatiivseks, siis saame triviaalse lahendi, nagu juba nägime keele võrrandi lahendamisel Fourier' meetodiga. Seega tuleb tegurid X ja T määrata võrrandeist

$$(4) \quad X'' + \lambda^2 X = 0,$$

$$(5) \quad T'' + \lambda^2 a^2 T = 0.$$

Võrrandi (4) integreerimine annab

$$X(x) = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x.$$

Olgu $A = 0$, $B = 1$ ja $\lambda = \frac{n\pi}{l}$, siis tegur $X(x)$ esitub kujul

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi}{l} x.$$

Kuna nüüd $X_n(0) = X_n(l) = 0$, siis rajatingimused (3) on rahuldatud.

Integreerime võrrandi (5) valitud $\lambda = \frac{n\pi}{l}$ korral, siis saame teise teguri $T(t)$ kujul

$$T_n(t) = C_n e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 a^2 t}$$

Seega oleme saanud ülesandele erilahendi kujul

$$u_n(x,t) = C_n e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 a^2 t} \sin \frac{n\pi}{l} x,$$

mis rahuldab võrrandit (1) ja rajatingimusi (3). Algtingimus (2) osutub rahuldatuks, nagu näha vaid kitsal erijuhul, nimelt kui on

$$C_n \sin \frac{n\pi}{l} x = \varphi(x), \quad (0 \leq x \leq l),$$

mistõttu tuleb lugeda, et erilahendid üksikult algtingimuse rahuldamiseks ei sobi.

Moodustame seepärast formaalselt erilahendite summa

$$(6) \quad u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 a^2 t} \sin \frac{n\pi}{l} x.$$

Oletame, et rida (6) ise ja temast 2 korda x -i ja üks kord t järgi liikmeti diferentseerimisel saadud read koonduvad ühtlaselt. Siis võime väita, et $u(x,t)$ ise ning tema osa-

tuletised u_{xx} ja u_t on pidevad funktsioonid, kusjuures $u(x,t)$ rahuldab võrrandit (1) ja rajatingimusi (3), sest reas (6) iga liige rahuldab neid.

Selleks, et funktsioon $u(x,t)$ rahuldaks algtingimust (2), peab kehtima

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi}{l} x = \varphi(x)$$

ja selleks tuleb oletada, et $\varphi(x)$ on lõigul $[0, l]$ esitatav siinusrea kaudu. Sel korral osutuvad suurused C_n Fourier' kordajaks

$$(7) \quad C_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx.$$

Näitame nüüd, et rea (6) ja temast liikmeti diferentseerimisel saadud ridade kohta tehtud eeldused on täidetud. Selleks näitame, et read

$$(8) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n}{\partial t}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n}{\partial x^2}$$

on ühtlaselt koonduvad, kui $0 \leq x \leq l$ ja $t \geq t_0 > 0$, kus t_0 on mingi fikseeritud arv.

Oletame, et algtemperatuur vardas on lõplik, s.t. et $|\varphi(x)| < M$, kus $M = \text{const.}$, siis saame

$$|C_n| \leq \frac{2M}{l} \int_0^l dx = 2M.$$

Olgu $b = \left(\frac{\pi a}{l}\right)^2$. Me võime kirjutada

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial u_n}{\partial t} \right| &= |C_n| \left| \sin \frac{n\pi}{l} x \right| \left| \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 a^2 e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 a^2 t} \right| \leq \\ &\leq 2M b n^2 e^{-bn^2 t} \leq N n^2 e^{-bn^2 t_0}, \end{aligned}$$

kus $N = 2Mb$. Täiesti analoogiliselt leiame, et

$$\left| \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} \right| \leq N' n^2 e^{-bn^2 t_0},$$

kus $N' = \text{const.}$ Seega

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\partial u_n}{\partial t} \right| \leq N \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\partial u_n}{\partial x} \right| \leq N' \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n,$$

kus $\alpha_n = n^2 e^{-bn^2 t_0}$. Rida $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ osutub aga koonduvaks D'Alembert'i tunnusel, sest

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 e^{-b(2n+1)t_0} \right] = 0.$$

Weierstrassi tunnusel on siis read (8) ühtlaselt koonduvad vaadeldavas piirkonnas.

Samal viisil võib näidata, et ka rida (6) ühtlaselt koondub.

Seega, kui $\varphi(x)$ on pidev, ositi sile ja $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, siis funktsioon $\varphi(x)$ on esitatav oma siinusrea kaudu ja funktsioon (6) osutub ülesande lahendiks.

Anneme lahendile (6) integraalkuju. Selleks asendame seal C_n nende integraalavaldistega (7). Saame

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{n\pi}{l} \xi d\xi \right] e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 a^2 t} \sin \frac{n\pi}{l} x =$$

$$= \int_0^l \left[\frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 a^2 t} \sin \frac{n\pi}{l} x \cdot \sin \frac{n\pi}{l} \xi \right] \varphi(\xi) d\xi.$$

Summeerimis- ja integreerimisjärjekorra võisime muuta, sest nurksulgedes olev rida koondub ühtlaselt ξ järgi, kui $t > 0$, mida on kerge samal viisil näidata, nagu eespool ridade (8) korral oli.

Tähistame

$$G(x, \xi, t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 a^2 t} \sin \frac{n\pi}{l} x \cdot \sin \frac{n\pi}{l} \xi.$$

Kasutades saadud funktsiooni $G(x, \xi, t)$, võime lahendi (6) esitada nüüd kujul

$$(8) \quad u(x, t) = \int_0^l G(x, \zeta, t) \varphi(\zeta) d\zeta.$$

Funktsiooni $G(x, \zeta, t)$ nimetatakse hetkelise punkt-soojusallika temperatuuri mõjufunktsiooniks, sest ta kui x -i funktsioon kujutab ajamomendil t sellist temperatuuri jaotust vardas, kus algmomendil $t = 0$ oli temperatuur võrdne nulliga ja siis sel samal momendil punktis $x = \zeta$ hetkeliselt eraldus teatav hulk soojust.

Näitame seda. Eraldugu punktis ζ hetkeliselt soojus Q , mis tingib väikeses piirkonnas $x \in (\zeta - \epsilon, \zeta + \epsilon)$ temperatuuri muutuse $\varphi^\epsilon(x) > 0$. $\varphi^\epsilon(x)$ võime väljaspool vaadeldavat piirkonda lugeda võrdseks nulliga. Soojuse levimiskäik vardas kirjeldub siis funktsiooniga

$$u^\epsilon(x, t) = \int_{\zeta - \epsilon}^{\zeta + \epsilon} G(x, \zeta, t) \varphi^\epsilon(\zeta) d\zeta.$$

Et G on pidev funktsioon $t > 0$ korral, siis võime valida ζ_0 nii, et on

$$u^\epsilon(x, t) = G(x, \zeta_0, t) \int_{\zeta - \epsilon}^{\zeta + \epsilon} \varphi^\epsilon(\zeta) d\zeta.$$

Kuna $\varphi^\epsilon(x)$ tähendab temperatuuri muutust varda osas $(\zeta - \epsilon, \zeta + \epsilon)$ siis integraal

$$c_p \int_{\zeta - \epsilon}^{\zeta + \epsilon} \varphi^\epsilon(\zeta) d\zeta,$$

nagu soojusjuhtivuse võrrandi tuletamisel nägime (§1), tähendab temperatuuri muutust põhjustanud soojushulka. Seega

$$Q = c_p \int_{\zeta - \epsilon}^{\zeta + \epsilon} \varphi^\epsilon(\zeta) d\zeta,$$

ja me saame

$$u^\epsilon(x, t) = \frac{Q}{c_p} G(x, \zeta_0, t).$$

lastes nüüd $\epsilon \rightarrow 0$, siis $\zeta_0 \rightarrow \zeta$ ja me võime kirjutada

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} u^\epsilon(x, t) = \frac{Q}{c_p} G(x, \zeta, t),$$

kust näemegi, et $G(x, \xi, t)$ kujutab hetkelise punkt-allika poolt eraldatud soojuste Q mõju iseloomu vardas, kui punkt-allikas ise asetseb punktis $\xi \in (0, 1)$.

Ülesande lahend (8) kujutab endast siis selliste üksiku-te punkt-allikate koosmõju tulemust.

§ 4. Soojusjuhtivuse võrrandi lahendi ainsus
lõpmatu varda jaoks.

Olgu meil antud lõpmatu varras (lõpmatu mõlemas suunas).
Ta asetsegu x -teljel.

Siin huvitab meid küsimus, millistel tingimustel on soojusjuhtivuse võrrandil

$$(1) \quad u_{xx} = \frac{1}{a^2} u_t$$

lahend $u = u(x, t)$ selle lõpmatu varda jaoks üheselt määratud. (Antud juhul $-\infty < x < +\infty$ ja $t \geq 0$.)

Kõigepealt eeldame, et funktsioon $u(x, t)$ on tõkestatud, s.t.

$$(2) \quad |u(x, t)| \leq M.$$

Sellega teeme eelduse, et varda temperatuur on kõikjal lõplik ja ei ületa teatavat suurust M .

Soojuste levimise käigu uurimisel on muidugi ka siin lõpmatu varda korral oluline, kuidas oli temperatuur jaotatud vardas protsessi algmomendil $t = 0$. Olgu temperatuuri jaotus vardas $t = 0$ korral antud funktsiooni $\varphi(x)$ abil. Siit saame algtingimuse

$$(3) \quad u(x, 0) = \varphi(x) \quad (-\infty < x < +\infty).$$

Kuna $u(x, t)$ on tõkestatud, siis on seda ka $\varphi(x)$, s.t.

$$|\varphi(x)| \leq M.$$

Rajatingimusi praegu ei saa olla, sest varras on lõputu. Osutub, et tingimused (2) ja (3) määravad soojusjuhtivuse võrrandi (1) lahendi üheselt. Selle näitamiseks teeme

kõigepealt ühe järelduse maksimumi- ja miinimumiprintsiibist, mille tõestasime paragrahvis 2.

Vaatleme piirkonda Q , kus $|x| \leq 1$, $0 \leq t \leq 1$.

Järeldus. Kui $v(x,t)$ ja $V(x,t)$ on võrrandi (1) lahendid ja kehtib

$$v(x,0) \leq V(x,0), \quad v(\pm 1,t) \leq V(\pm 1,t),$$

siis kõikjal piirkonnas Q

$$v(x,t) \leq V(x,t).$$

Põhjendus. Olgu

$$v_1(x,t) = V(x,t) - v(x,t).$$

$v_1(x,t)$ on ka võrrandi (1) lahend. Eelduse järgi külgedel $t = 0$, $x = \pm 1$ on $v(x,t) \leq V(x,t)$, s.t. seal $v_1(x,t) \geq 0$. Maksimumi- ja miinimumiprintsiibi järgi (kuna see kehtib iga ristikuliku Q korral) on siis kõikjal piirkonnas Q $v_1(x,t) \geq 0$, s.t. kõikjal Q -s on

$$v(x,t) \leq V(x,t),$$

millega järeldus on põhjendatud.

Oletame nüüd, et võrrandil (1) on antud lisatingimustel 2 lahendit $u_1(x,t)$ ja $u_2(x,t)$. Moodustame vahe

$$v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t).$$

Näitame, et $v(x,t) \equiv 0$, mis ütleks, et $u_1 \equiv u_2$ ja see tõestakski lahendi ainsuse.

Funktsioon $v(x,t)$ rahuldab võrrandit (1), on tõkestatud, sest

$$|v(x,t)| \leq |u_1(x,t)| + |u_2(x,t)| \leq 2M,$$

ja rahuldab algtingimust

$$v(x,0) = u_1(x,0) - u_2(x,0) = 0.$$

Olgu $|x| \leq 1$, s.t. vaatleme vaid neid x -i väärtusi, mis on piirkonnas Q .

Moodustame funktsiooni

$$V(x,t) = \frac{4M}{1} \left(\frac{x^2}{2} + a^2 t \right).$$

$V(x,t)$ osutub ka võrrandi (1) lahendiks, sest

$$V_{xx} = \frac{1}{a^2} V_t.$$

Külgedel $t = 0$, $x = \pm 1$ kehtib:

küljel $t = 0$:

$$V(x,0) = \frac{4M}{1^2} \frac{x^2}{2} \geq |v(x,0)| = 0,$$

külgedel $x = \pm 1$: $V(\pm 1,t) \geq \frac{4M}{2} + \frac{4M}{1^2} a^2 t \geq 2M \geq |v(\pm 1,t)|$

Eespool tõestatud järelduse põhjal on siis kõikjal ristkülikus Q

$$V(x,t) \geq |v(x,t)|.$$

Seega on meil võrratus

$$|v(x,t)| \leq \frac{4M}{1^2} \left(\frac{x^2}{2} + a^2 t \right).$$

Olgu x, t fikseeritud ja laseme $1 \rightarrow \infty$, siis viimases võrratuses läheneb parem pool nullile ja me saame antud fikseeritud x, t korral

$$v(x,t) = 0.$$

Kuna x, t võivad suvalised olla, siis ongi näidatud, et $v(x,t) = 0$ iga x, t korral. Seega $u_1 = u_2$, millega lahendi ainsus on näidatud.

Lahendi ainsuse tõestamisel eeldasime, et $|u(x,t)| \leq M$. Osutub, et kui see tõkestatuse nõue ära jätta, siis võrrandi (1) lahend ei ole enam üheselt määratud. Seega tingimus (2) nagu asendaks rajatingimusi, mis esinesid lõpliku varda korral.

Näitame veel, et võrrandi (1) lahend on pidevas sõltuvuses algtingimusest (3). Vaatleme selleks veel teist võrrandi (1) lahendit $\bar{u}(x,t)$, mis rahuldab algtingimust

$$\bar{u}(x,0) = \bar{\varphi}(x).$$

Moodustame vahe

$$v(x,t) = u(x,t) - \bar{u}(x,t),$$

siis

$$v(x,0) = \varphi(x) - \bar{\varphi}(x).$$

Olgu antud $\varepsilon > 0$ korral $|\varphi - \bar{\varphi}| < \varepsilon$, s.t. $|v(x,0)| < \varepsilon$. Moodustame funktsiooni $V(x,t) + \varepsilon$, kus $V(x,t)$ defineerime samasugusena, nagu oli eespool.

Ristküliku Q külgedel $t = 0$, $x = \pm 1$ kehtib

$$V(x,t) + \varepsilon \geq |v(x,t)|$$

(põhjustada üksikasjalikult!). Eespool olnud järelduse põhjal kehtib see võrratus siis kõikjal piirkonnas Q . Seega on meil võrratus

$$|v(x,t)| \leq \frac{4M}{1} \left(\frac{x^2}{2} + a^2 t \right) + \varepsilon.$$

Olgu x, t fikseeritud ja laseme $1 \rightarrow \infty$, siis saame

$$|v(x,t)| < \varepsilon$$

ehk

$$|u(x,t) - \bar{u}(x,t)| < \varepsilon \quad \text{iga } x, t \text{ korral.}$$

Seega, kui algtingimus muutub vähe, siis muutub ka võrrandi lahend vähe, st. et antud tingimustel on soojusjuhtivuse võrrandi lahend stabiilne.

Soojusjuhtivuse võrrandi (1) lahendi olemasolu antud tingimustel näeme järgmises paragrahvis võrrandi tegeliku lahendamise teel.

§ 5. Soojuse levimine lõpmatus vardas.

Soojuse levimise uurimisel lõpmatus vardas me kohtume huvitavate teoreetiliste momentidega. Alljärgnevas käsitleme mõningaid neist. Tüüpiline ülesanne, mis seatakse lõpmatu varda jaoks, on järgmine.

Ülesanne. Leida tõekestatud funktsioon $u(x,t)$ (kus $-\infty < x < +\infty$ ja $t \geq 0$), mis rahuldab soojusjuhtivuse võrrandit

$$(1) \quad u_{xx} = \frac{1}{a^2} u_t, \quad \text{kui } t > 0,$$

ja algtingimust

$$(2) \quad u(x, 0) = \varphi(x) \quad (-\infty < x < +\infty).$$

Sellist ülesannet nimetatakse Cauchy' ülesandeks, sest siin puuduvad rajatingimused. Eelmises paragrahvis nägime, et sellisel ülesandel võib olla vaid üks lahend.

Ülesande lahendamiseks kasutame Fourier' meetodit. Leiame esialgu erilahendid kujul

$$XT = X(x)T(t).$$

Paigutame sellise erilahendi võrrandisse (1), siis

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{a^2} \frac{T'}{T} = c, \quad (c = \text{const}),$$

kust saame tegurite X ja T määramiseks võrrandid

$$(3) \quad X'' - cX = 0,$$

$$(4) \quad T' - ca^2T = 0.$$

Siin jällegi võib olla $c > 0$, $c = 0$ ja $c < 0$. Näitame, et me ülesande füüsikalise sisuga sobivad kokku vaid lahendid, kus $c \leq 0$. Selleks lahendame võrrandi (4), saame

$$T(t) = Ce^{ca^2t}.$$

Kui $c > 0$, siis $t \rightarrow \infty$ korral $T \rightarrow +\infty$, s.t. erilahend $XT \rightarrow +\infty$ ja me jõuaksime vastuollu maksimumi- ja miinimumiprintsiibiga. Seega tuleb võtta $c = -\lambda^2$. Lahendame sel eeldusel võrrandi (3), saame

$$X(x) = A_\lambda \cos \lambda x + B_\lambda \sin \lambda x.$$

Kuna antud ülesandes rajatingimusi pole, siis jääb λ fikseerimata.

Olgu $A_\lambda = \cos \lambda \xi$, $B_\lambda = \sin \lambda \xi$
(siin ξ on mingi nurga väärtus), siis võime kirjutada

$$X(x) = \cos \lambda(x - \xi).$$

Seega saame lõplikult erilahendi kujul
(kus $C = 1$)

$$XT = e^{-\lambda^2 a^2 t} \cos \lambda(x - \xi).$$

See erilahend rahuldab soojusjuhtivuse võrrandit (1) iga λ

ja ζ korral, aga ei rahulda üldiselt algtingimust (2), sest funktsioon $\varphi(x)$ on antud. Algtingimus (2) võib olla rahuldatud vaid juhuslikul kokkulangemisel, s.o. kui

$$\varphi(x) = \cos \lambda(x - \zeta),$$

seega teatava temperatuurijaotuse korral vardas.

Lõpliku varda puhul avaramatel eeldustel algtingimuste rahuldamiseks me moodustasime kõigi erilahendite XT summa, mis oli võimalik λ valiku tõttu sõltuvana indeksist n . Käesoleval juhul pole aga meil λ fikseerimiseks mingit alust. Andes λ -le erinevaid väärtusi $\lambda_1, \lambda_2, \dots$, saaksime ka siin moodustada erilahendite summa. Kuid seda ei ole otstarbekonane teha, sest siis jääks osa erilahendeid arvestamata ja algtingimuse rahuldamiseks tuleks funktsioonile $\varphi(x)$ seada mitmesuguseid lisakitsendusi. Kuna meil erilahendis λ ja ζ võivad olla mistahes, siis on loomulik võtta summa asemel integraal. Sellepärast defineerimegi ülesande lahendi kujul

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\zeta) \int_0^{+\infty} XT \, d\lambda \, d\zeta.$$

Näitame, et selline $u(x, t)$ eksisteerib ja rahuldab võrrandit (1). Selleks näitame kõigepealt, et sisemine integraal

$$\int_0^{+\infty} XT \, d\lambda = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda^2 a^2 t} \cos \lambda(x - \zeta) \, d\lambda$$

eksisteerib. Kasutame siin tuntud integraalvalemit

$$(5) \quad \int_0^{+\infty} e^{-\lambda^2 a^2 t} \cos \lambda \beta \, d\lambda = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} e^{-\frac{\beta^2}{4a^2 t}}$$

(Näidata selle kehtivust!) Valemi (5) abil saame

$$\int_0^{+\infty} XT \, d\lambda = \frac{\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-\zeta)^2}{4a^2 t}}$$

Saadud funktsioon rahuldab võrrandit (1) $t > 0$ korral, sest integraalilaine funktsioon XT rahuldab ja me võime funktsiooni XT pidevuse tõttu diferentseerida x -i ja t järgi

integraali märgi all.

Seega võime kirjutada

$$(6) \quad u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} d\xi.$$

Näitame nüüd, et $u(x,t)$ eksisteerib. Selleks teostame integraalis (6) muutuja vahetuse

$$\xi = x + 2a\sqrt{t}\eta.$$

Siis $d\xi = 2a\sqrt{t}d\eta$ ja me saame

$$(7) \quad u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x + 2a\sqrt{t}\eta) e^{-\eta^2} d\eta.$$

Seega

$$\begin{aligned} |u(x,t)| &\leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x - 2a\sqrt{t}\eta)| e^{-\eta^2} d\eta \leq \\ &\leq M \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2} d\eta = M, \end{aligned}$$

sest

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2} d\eta = 1,$$

mida näeme integraalvalemist (5), võttes seal $\alpha = 1$ ja $\beta = 0$.

Integraalis (6) võime x -i ja t järgi diferentseerida integraali märgi all, sest integraalialune funktsioon on pidev. Kuna viimane rahuldab võrrandit (1), siis rahuldab võrrandit (1) ka $u(x,t)$.

Nüüd on näha, et defineeritud $u(x,t)$ on ülesande lahendiks; ta rahuldab võrrandit (1) ja algtingimust (2), sest $t = 0$ korral, nagu avaldisest (7) näha, saame

$$u(x,0) = \varphi(x) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2} d\eta = \varphi(x).$$

Jääb veel vaid näidata, et saadud lahend $u(x,t)$ läheb pidevalt üle algtingimuseks, s.t. et iga $\varepsilon > 0$ korral leidub kuitahes väike $\delta > 0$, et kehtib

$$I = |u(x,t) - \varphi(x)| < \varepsilon, \text{ kui } t < \delta.$$

Võime kirjutada

$$\begin{aligned} I &= |u(x,t) - u(x,0)| = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} [\varphi(x + 2a\sqrt{t}\eta) - \varphi(x)] e^{-\eta^2} d\eta \right| = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left| \int_{-\infty}^{-N} + \int_{-N}^{+N} + \int_{N}^{+\infty} \right| < \varepsilon, \end{aligned}$$

sest härmised integraalid küllalt suure N korral saavad kuitahes väikesteks $\varphi(x)$ tõkestatuse tõttu, aga keskmise integraali võime teha kuitahes väikeseks sobivalt väikese t valikuga, kuna vahe

$$|\varphi(x + 2a\sqrt{t}\eta) - \varphi(x)|$$

läheneb nullile $t \rightarrow 0$ korral funktsiooni $\varphi(x)$ pidevuse tõttu. Funktsioon $\varphi(x)$ on pidev, sest $u(x,t)$ on pidev ja $u(x,0) = \varphi(x)$.

Sellega oleme antud ülesande täielikult lahendanud. Saadud temperatuuri funktsioon $u(x,t)$ kirjeldab soojuse levimise käiku lõpmatus vardas.

Vaatleme nüüd, kuidas levib soojus lõpmatus vardas. Oletame, et protsessi algmomendil $t = 0$ on temperatuur $\varphi(x)$ kõikjal võrdne nulliga peale vahemiku (α, β) , kus ta olgu positiivne. Siis esitub ülesande lahend (6) kujul

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} d\xi.$$

Olgu nüüd $t > 0$, kuid kuitahes väike ja võtame x hästi suure, s.t. vaatleme varda küllalt kaugelt punkti. Selle punkti jaoks annab viimane valem temperatuuri $u(x,t) > 0$, sest integraali all on positiivne funktsioon. Seega kui protsessi algmomendil $t = 0$ oli varda temperatuur nullist erinev vaid vahemikus (α, β) , siis järgneval ajal, s.o. $t > 0$ korral

varda kuitahes kauges punktis on temperatuur juba nullist erinev. See ütleb sedä, et lõpmatus vardas levib soojus silmapilkselt.

Tulemus on väga kummaline, kuid antud juhul on ta paratamatu. Väga võimalik, et me siin kasutame lõpmatuse mõistet väärtalt või oleme ülesande seadmisel teinud eeldusi, mis tegelikkuses aset ei leia. Üks selline eeldus on võib-olla lõpmatu varras ise.

V. LAPLACE' I VÕRRAND .

Elliptilised võrrandid esinevad mitmesuguste stabiliseerunud protsesside matemaatilisel uurimisel, s.o. protsesside uurimisel, mille iseloom ei sõltu enam ajast. Nii taanduvad elliptiliste võrrandite vaatlemisele füüsikalised ülesanded, mis on seotud elektrostaatiliste, üldiselt potentsiaalide väljadega ja soojuste levimisega statsionaarses soojusväljas.

Käesolevas peatükis vaatleme mõningaid ülesandeid seoses Laplace'i võrrandiga

$$u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

mis on ühtlasi ka lihtsaim elliptiline võrrand.

§ 1. Dirichlet' esimene rajaülesanne.

Käesolevas paragrahvis anname harmooniliste funktsioonide mõiste, defineerime Dirichlet' I rajaülesande ja näitame viimase lahenduvuse ainsust, oletades lahendi olemasolu.

Harmooniliste funktsioonide mõiste on seotud Laplace'i võrrandiga. Laplace'i võrrandiks funktsioonile $u = u(x,y)$ nimetatakse võrrandit

(1)

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

ehk võrrandit

$$\Delta u = 0,$$

kus $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$. Nagu näha, on Laplace'i võrrand teist järku lineaarne osatuletistega võrrand ja on kõige lihtsam elliptiline võrrand.

Nagu juba märgitud, kirjeldavad elliptilised võrrandid mitmesuguste füüsikaliste protsesside stabiliseerunud seisundeid. Vaatleme siin ühte sellist protsessi, mis toob Laplace'i võrrandi juurde.

Eelmises peatükis nägime, et soojuste levimise uurimine õhukeses plaadis toob meid võrrandi

$$(2) \quad u_{xx} + u_{yy} = \frac{1}{a^2} u_t$$

juurde. Siin on otsitavaks temperatuurifunktsioon $u = u(x, y, t)$, mille väärtused näitavad temperatuuri plaadis punktis (x, y) ajamomendil t . Erijuhul võib aga soojuste levimine plaadis saavutada niisuguse seisundi, et plaadi igas punktis on konstantne temperatuur kogu protsessi jooksul. Niisugusel juhul öeldakse, et temperatuuri jaotus plaadis ehk lihtsalt plaadi soojusvähli on statsionaarne. Temperatuurifunktsioon $u = u(x, y, t)$ ei sõltu siis ajast t ja me võime ta kirjutada kujul $u = u(x, y)$. Sel korral $u_t = 0$ ja võrrand (2) muutub Laplace'i võrrandiks (1). Seega, kui temperatuuri jaotus plaadis on statsionaarne, siis temperatuurifunktsioon rahuldab Laplace'i võrrandit. Laplace'i võrrandi lahend osutub, nagu näeme, vaid kohafunktsiooniks.

Anname nüüd harmoonilise funktsiooni mõiste. Olgu xy -tasandil antud mingi lõplik piirkond G , mis on piiratud joonega Γ . Joont Γ nimetatakse piirkonna G rajajooneks. Funktsiooni $u = u(x, y)$ nimetatakse harmooniliseks piirkonnas G , kui ta on selles piirkonnas pidev ja rahuldab Laplace'i võrrandit (1).

Tüüpiliseks ülesandeks elliptiliste võrrandite korral on järgmine ülesanne.

Dirichlet' I rajaülesanne. Olgu piirkonna G rajajoonel määratud funktsioon f , mille väärtused muutuvad pidevalt piki rajajoont (s.t. f olgu pidev rajajoonel). Leida funktsioon $u = u(x,y)$, mis on harmooniline piirkonna G sees ja mis omandab rajajoonel Γ etteantud väärtused f .

Sisuliselt tähendab defineeritud ülesanne seda, et tuleb leida kinnises piirkonnas $\bar{G} = G + \Gamma$ pidev funktsioon $u = u(x,y)$, mis rahuldab selle piirkonna sees Laplace'i võrrandit ja mis rajajoonel Γ langeb ühte seal määratud pideva funktsiooniga f .

Olgu märgitud, et üldiselt elliptiliste võrrandite korral on olulised just pidevad lahendid, sest stabiliseerunud protsessid kirjelduvad selliste lahendite abil. (Vt. lähemalt Petrovski õpikust lk. 209.)

Dirichlet' ülesande füüsikalist sisu võib illustreerida järgmise näitega. Olgu piirkonnaks G xy -tasandil asetsev õhuke ümbritsevast keskkonnast isoleeritud plaat ja funktsioon f määraku temperatuuri selle plaadi servadel. Siis seisneb Dirichlet' ülesanne selles, et leida funktsioon $u=u(x,y)$, mis määraks plaadi seesmistes punktides (x,y) kujuneva temperatuuri jaotuse.

Dirichlet' ülesande lahendi ainsuse näitamiseks tõestame järgmise teoreemi.

Maksimumi- ja minimumiteoreem. Kui harmooniline funktsioon $u = u(x,y)$ on pidev piirkonnas $\bar{G} = G + \Gamma$, siis tema väärtused selle piirkonna sees ei saa olla suuremad maksimaalsest väärtusest rajajoonel Γ ja väiksemad minimaalsest väärtusest rajajoonel Γ .

Tõestus. Olgu funktsiooni $u(x,y)$ maksimaalne väärtus rajajoonel Γ tähistatud tähega m ja piirkonna \bar{G} sees tähega M . Väärtus M olgu punktis (x_0, y_0) , s.t. $M = u(x_0, y_0)$.

Oletame vastuväiteliselt, et siiski $M > m$. Defineerime funktsiooni

$$v(x,y) = u(x,y) + \frac{M-m}{2d^2} \left[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \right],$$

kus d on piirkonna \bar{G} suurim läbimõõt. Piirkonna \bar{G} iga

seesmise punkti (x, y) korral on

$$[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2] < d^2,$$

sest võrratuse vasak pool kujutab endast punkti (x, y) kauguse ruutu piirkonna seesmisest punktist (x_0, y_0) . Funktsioon $v(x, y)$ on pidev, sest $u(x, y)$ on seda eelduse järgi. Piirkonna \bar{G} seesmises punktis (x_0, y_0) on

$$v(x_0, y_0) = u(x_0, y_0) = M.$$

Kui aga punkt (x, y) asetseb rajajoonel, siis seal on

$$v(x, y) \leq m + \frac{M-m}{2} = \frac{M+m}{2} < M.$$

Seega kogu rajajoonel Γ on $v(x, y) < M$, aga ühes seesmises punktis (x_0, y_0) on $v(x_0, y_0) = M$. Kuna funktsioon $v(x, y)$ on pidev, siis peab tal olema maksimum kusagil piirkonna \bar{G} seesmises punktis (x_1, y_1) . Selles punktis on siis $v_{xx} \leq 0$, $v_{yy} \leq 0$, s. t.

$$v_{xx} + v_{yy} \leq 0.$$

Vahetult funktsiooni $v(x, y)$ definitsioonvalemist aga saame

$$v_{xx} + v_{yy} = u_{xx} + u_{yy} + 2 \frac{M-m}{d^2} = 2 \frac{M-m}{d^2},$$

kust $M > m$ tõttu

$$v_{xx} + v_{yy} > 0.$$

Võrreldes seda võrratust eelmisega, näeme vastuolu. Sellega on teoreemi esimene osa, mis käis maksimumi kohta, tõestatud. Rakendades nüüd sama mõttekäiku harmoonilisele funktsioonile $-u(x, y)$, saame miinimumi osa taandada tõestatud maksimumi juhuks. Sellega on teoreem tõestatud.

Nagu näeme, on tõestatud teoreem väga analoogiline eespool olnud maksimumi- ja miinimumiprintsiibiga. Kui arvestada seda, et paljud füüsikalised ülesanded soojusjuhtivuse võrrandi kohta erijuhul taanduvad Laplace'i võrrandi vaatlemisele, siis on selline analoogia arusaadav.

Tõestatud teoreemist järeldub kohe Dirichlet' ülesande lahendi ainsus. Oletame, et ülesandel on siiski 2 lahendit $u_1(x,y)$ ja $u_2(x,y)$. Siis vahe

$$v(x,y) = u_1(x,y) - u_2(x,y)$$

on ka harmooniline funktsioon, kusjuures ta võrdub nulliga rajajoonel Γ , sest seal u_1 ja u_2 väärtused langevad ühte ülesande tingimuste kohaselt. Seega $v(x,y) = 0$ rajajoonel Γ . Tõestatud teoreemi järgi on siis kõikjal piirkonnas \bar{G} $v(x,y) \equiv 0$, s.t. $u_1 \equiv u_2$ ja lahendid langevad ühte.

Näitame veel, et Dirichlet' I rajaülesande lahend $u = u(x,y)$ on pidevas sõltuvuses rajafunktsioonist f . Olgu funktsioon \bar{u} Dirichlet' ülesande lahendiks, mis rajajoonel Γ langeb ühte rajafunktsiooniga \bar{f} . Olgu kõikjal rajajoonel $|f - \bar{f}| < \epsilon$, s.t. rajajoonel Γ olgu $|u - \bar{u}| < \epsilon$. Kuna vahe $u - \bar{u}$ on ka harmooniline funktsioon, siis maksimumi- ja miinimumiteoreemi järgi kõikjal piirkonna \bar{G} sees on

$$|u - \bar{u}| < \epsilon,$$

Seega, kui rajafunktsioon muutub vähe, siis muutub ka Dirichlet' ülesande lahend vähe. Sel puhul öeldakse, et Dirichlet' I rajaülesanne on konkreetselt seatud.

§ 2. Dirichlet' I rajaülesande lahendus ringi jaoks.

Selles paragrahvis lahendame Dirichlet' I rajaülesande juhu jaoks, kui piirkond G kujutab endast ringi R , mille keskpunkt on koordinaatide alguspunktis.

Olgu xy -tasandil asetseva ringi R rajajooneks ringjoon $x^2 + y^2 = a^2$, mille raadius on seega a . Lähme üle polaarkoordinaatidele, võttes polaarteljeks x -telje ja poolseks koordinaatide alguspunkti, saame

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi,$$

kus ρ on polaarraadius ja φ polaarnurk. Siis esitub ringjoone võrrand kujul $\rho = a$. Kinnist ringi R tähistame \bar{R} abil.

Avaldame Laplace'i võrrandi polaarkoordinaatides, saame

$$(1) \quad \Delta u = u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} u_{\rho} + \frac{1}{\rho^2} u_{\varphi\varphi} = 0,$$

kus $u = u(\rho, \varphi)$. (Põhjendada vordus (1)). Dirichlet' ülesandes loeme rajafunktsiooni f nurga φ funktsiooniks $f(\varphi)$, siis esitub ülesande rajatingimus kujul.

$$(2) \quad u(a, \varphi) = f(\varphi).$$

Nüüd võime sõnastada Dirichlet' I rajaülesande ringi jaoks: leida funktsioon $u = u(\rho, \varphi)$, mis on harmooniline ringi R sees ja rahuldab rajatingimust (2).

Selle ülesande lahendamiseks kasutame Fourier' meetodit, mis tänu polaarkoordinaatidele osutub siin hästi rakendatavaks. Vastavalt meetodile valime esialgu ülesandele erilahendid kujul

$$(3) \quad u(\rho, \varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi),$$

kus R on vaid ρ ja Φ vaid φ funktsioon. Arvutame vajalikud osatuletised ja paigutame võrrandisse (1), saame

$$R''\Phi + \frac{1}{\rho} R'\Phi + \frac{1}{\rho^2} R\Phi'' = 0$$

enk

$$\frac{\Phi''}{\Phi} = -\rho^2 \frac{R''}{R} - \rho \frac{R'}{R} = -\lambda^2.$$

Siin tähistame konstantse suhte $-\lambda^2$ abil, sest see suhe ei saa olla positiivne, kuna siis tuleb erilahend $u(\rho, \varphi)$, mis ei saa rajajoonel omandada pidevalt muutuvaid väärtusi, sest samade punktide $(a, \varphi) = (a, \varphi + 2\pi)$ korral on siis $u(a, \varphi) \neq u(a, \varphi + 2\pi)$ (Näidata sedal)

Seega oleme tegurite R ja Φ määramiseks saanud võrrandid

$$(4) \quad \Phi'' + \lambda^2 \Phi = 0,$$

$$(5) \quad \rho^2 R'' + \rho R' - \lambda^2 R = 0.$$

Võrrandi (4) integreerimisel saame

$$\Phi(\varphi) = A \cos \lambda \varphi + B \sin \lambda \varphi.$$

Kuna meil iga ρ ja φ korral kujutavad punktid (ρ, φ) ja $(\rho, \varphi + 2\pi)$ ühte ja sama punkti, siis funktsiooni $u(\rho, \varphi)$ pidevuse tõttu peab olema

$$u(\rho, \varphi + 2\pi) = u(\rho, \varphi),$$

ehk (3) põhjal on see samaväärne tingimusega

$$\varphi(\varphi + 2\pi) = \varphi(\varphi).$$

Seega $\varphi(\varphi)$ peab olema perioodiline perioodiga 2π . Valime $\lambda = n$ ($n=0, 1, \dots$), siis on see nõue täidetud ja tegur $\varphi(\varphi)$ esitub kujul

$$\varphi_n(\varphi) = A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi.$$

Integreerime nüüd võrrandi (5), võttes seal $\lambda = n$, siis saame

$$\rho^2 R'' + \rho R' - n^2 R = 0.$$

Viimane võrrand kujutab endast Euleri võrrandit ja selle erilahendid esituvad kujul $R = \rho^\lambda$, kus λ tuleb sobivalt määrata. Arvutame tuletised R' ja R'' ning paigutame nad viimati kirjutatud võrrandisse, siis saame pärast lihtsustamist

$$u = \lambda n \quad (n > 0).$$

Seega on võrrandi sõltumatud erilahendid ρ^n ja ρ^{-n} ning üldintegraal esitub kujul

$$R_n(\rho) = C\rho^n + D\rho^{-n}$$

Peame võtma $D = 0$, sest erilahend ρ^{-n} on katkev koordinaatide algpunktis. Olgu veel $C = 1$, siis võime erilahendi (3) kirjutada kujul

$$u_n(\rho, \varphi) = \rho^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi).$$

Saadud erilahend $u_n(\rho, \varphi)$ rahuldab võrrandit (1) ja on pidev, s.t. on harmooniline funktsioon. Rajatingimuse rahuldamiseks need erilahendid $u_n(\rho, \varphi)$ üksikult ei sobi, kuna nad rahuldavad rajatingimust vaid sellisel erijuhul, kui

$$f(\varphi) = a^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi).$$

Võtame erilahendite summa

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(\rho, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi).$$

Oletame, et see rida ise ja temast liikmeti diferentseerimisel 2 korda ρ ja φ järgi saadud read koonduvad ühtlaselt. Siis $u(\rho, \varphi)$ on pidev funktsioon ja rahuldab võrrandit (1) ehk teisiti öeldes $u(\rho, \varphi)$ on siis harmooniline funktsioon.

Rajatingimuse (2) rahuldamiseks peab kehtima tingimus

$$u(a, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) = f(\varphi).$$

Oletame, et $f(\varphi)$ on esitatav oma Fourier' rea kaudu:

$$f(\varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx),$$

kus α_n, β_n on funktsiooni $f(\varphi)$ Fourier' kordajad. Võrreldes mõlemaid ridu, näeme, et rajatingimuse rahuldamiseks tuleb valida

$$A_0 = \frac{\alpha_0}{2}, \quad A_n = \frac{\alpha_n}{a^n}, \quad B_n = \frac{\beta_n}{a^n} \quad (n > 0)$$

ja funktsioon $u(\rho, \varphi)$ tuleb kirjutada kujul

$$(6) \quad u(\rho, \varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{a}\right)^n (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi).$$

Kui nüüd $\rho = a$, siis valemist (6) saame

$$u(a, \varphi) = f(\varphi).$$

Seega osutub tehtud eeldustel funktsioon (6) vaadeldava ülesande lahendiks.

Näitame lõpuks, et kõik tehtud eeldused rea (6) kohta osutuvad täidetuks, kui funktsioon $f(\varphi)$ on pidev ja omab pidevat tuletist.

Olgu $f(\varphi)$ pidev koos oma tuletisega, siis nagu teame, on $f(\varphi)$ esitatav oma Fourier' rea kaudu, kusjuures tema Fourier' rea kordajate α_n, β_n absoluutväärtustest moodustatud rida koondub, s.t.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|\alpha_n| + |\beta_n|) < \infty.$$

Nüüd on kerge veenduda, et rida (6) koondub ühtlaselt ringis \bar{R} . Tõepoolest

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \left| \left(\frac{\rho}{a}\right)^n (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi) \right| \leq \\ & \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{a}\right)^n (|\alpha_n| |\cos n\varphi| + |\beta_n| |\sin n\varphi|) \leq \\ & \leq \sum_{n=1}^{\infty} (|\alpha_n| + |\beta_n|) < \infty. \end{aligned}$$

ja Weierstrassi tunnusel koondub rida (6) ühtlaselt ringis \bar{R} ja seepärast kujutab rea summa $u(\rho, \varphi)$ seal pidevat funktsiooni.

Näitame nüüd, et rida (6) võib liikmeti diferentseerida φ järgi ringi R sees. Diferentseerime näiteks rida (6) liikmeti k korda φ järgi, saame rea

$$(7) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^k}{\partial \varphi^k} u_n(\rho, \varphi).$$

Võime kirjutada, arvestades, et $|\alpha_n| + |\beta_n| < M$,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\partial^k}{\partial \varphi^k} u_n(\rho, \varphi) \right| & \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{a}\right)^{n k} (|\alpha_n| + |\beta_n|) \leq \\ & \leq M \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{a}\right)^n n^k. \end{aligned}$$

Kuid viimane rida koondub D'Alembert'i tunnusel, sest

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{\rho}{a}\right)^{n+1} (n+1)^k}{\left(\frac{\rho}{a}\right)^n n^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\rho}{a} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k = \frac{\rho}{a} < 1.$$

Seega rida (7) koondub siis ühtlaselt ρ ja φ järgi, kui $\rho \leq \rho_0 < a$, kus ρ_0 on ρ mingi fikseeritud väärtus.

Täiesti analoogiliselt võime näidata, et rida (6) võib liikmeti diferentseerida ka ρ järgi kuitahes palju kordi.

Saadud rida osutub ikka ühtlaselt koonduvaks ringi R sees, kus $\rho \leq \rho_0 < a$.

Seega oleme saanud järgmise tulemuse: kui rajafunktsioon $f(\varphi)$ on pidev ja omab pidevat tuletist, siis rida (6) osutub Dirichlet' I rajaülesande lahendiks ringi R jaoks.

Olgu lõpuks märgitud, et funktsiooni $u(\rho, \varphi)$ pidevuse tõttu kehtib ringis \bar{R}

$$\lim_{\rho \rightarrow a} u(\rho, \varphi) = f(\varphi),$$

s.t. ülesande lahend läheb pidevalt üle rajatingimuseks.

§ 3. Poisson'i integraal.

Käesolevas paragrahvis anname Dirichlet' I rajaülesandele ringi jaoks lahendi integraalkujul.

Elmises paragrahvis me saime vaadeldavale ülesandele eeldusel, et rajafunktsioon $f(\varphi)$ on pidev ja omab pidevat tuletist, lahendi kujul

$$(1) \quad u(\rho, \varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{a}\right)^n (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi),$$

kus α_n, β_n on funktsiooni $f(\varphi)$ Fourier' kordajad:

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad (n = 0, 1, \dots),$$

$$\beta_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Rida (1), nagu nägime, koondub ühtlaselt ringis $R(\rho \leq a)$.

Teisendame lahendi (1) integraalkujule. Selleks asendame avaldises (1) suurused α_n, β_n nende integraalavaldistega, saame

$$u(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx + \\ + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{a}\right)^n \int_{-\pi}^{\pi} f(x) (\cos nx \cos n\varphi + \sin nx \sin n\varphi) dx.$$

Vahetame summeerimise ja integreerimise järjekorra, mis on lubatud rea ühtlase koonduvuse tõttu, saame

$$u(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{a}\right)^n \cos n(\varphi - x) \right] dx.$$

Leiame integraali all nurksulgudes oleva rea

$$1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{a}\right)^n \cos n(\varphi - x)$$

summa $P(\rho, \varphi, x)$. Olgu lihtsuseks $\frac{\rho}{a} = t$. Arvestades Euleri valemit

$$2 \cos \alpha = e^{i\alpha} + e^{-i\alpha},$$

võime $\rho < a$ korral kirjutada

$$\begin{aligned} P(\rho, \varphi, x) &= 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} t^n \cos n(\varphi - x) = \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} [t e^{i(\varphi - x)}]^n + \sum_{n=1}^{\infty} [t e^{-i(\varphi - x)}]^n. \end{aligned}$$

Olgu $p = t e^{i(\varphi - x)}$ ja $q = t e^{-i(\varphi - x)}$,

siis $|p| < 1$ ja $|q| < 1$, sest $t < 1$ ja $|e^{i\alpha}| = 1$. Seega

$$\begin{aligned} P(\rho, \varphi, x) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p^n + \sum_{n=1}^{\infty} q^n = \\ &= \frac{1}{1-p} + \frac{1}{1-q} - 1 = \frac{1-pq}{(1-p)(1-q)} = \\ &= \frac{1-t^2}{1-t[e^{i(\varphi - x)} + e^{-i(\varphi - x)}] + t^2}, \end{aligned}$$

kust saame lõpuks, kasutades jälle Euleri valemit, et

$$(2) \quad P(\rho, \varphi, x) = \frac{a^2 - \rho^2}{a^2 - 2\rho a \cos(\varphi - x) + \rho^2}.$$

Seega funktsioon $u(\rho, \varphi)$ esitub kujul

$$u(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{a^2 - \rho^2}{a^2 - 2\rho a \cos(\varphi - x) + \rho^2} dx$$

ehk lühidalt

$$(3) \quad u(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) P(\rho, \varphi, x) dx.$$

Integraali (3) nimetatakse Poissoni integraaliks ja suurst (2) Poissoni tuumaks.

Poissoni integraal $\rho < a$ korral rahuldab Laplace'i võrrandit, sest ta kujutab rea (1) summat, mis rahuldab Laplace'i võrrandit. Kui $\rho = a$, siis (3) kaotab mõtte, kuid iga φ korral Poissoni integraalis

$$\lim_{\rho \rightarrow a} u(\rho, \varphi) = f(\varphi),$$

sest rida (1) oli pidev kinnises ringis \bar{R} .

Seega võime Dirichlet' I rajaülesande lahendi ringi jaoks Poissoni integraali kaudu esitada järgmisel kujul

$$u(\rho, \varphi) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) P(\rho, \varphi, x) dx, & \text{kui } \rho < a, \\ f(\varphi), & \text{kui } \rho = a. \end{cases}$$

Poissoni integraali tuletamisel oli eeldatud, et raja-funktsioon $f(\varphi)$ on pidev ja omab pidevat tuletist. Näitame nüüd, et Poissoni integraal osutub Dirichlet' I rajaülesande lahendiks ringi jaoks ka siis, kui $f(\varphi)$ on vaid pidev.

Olgu $f(\varphi)$ pidev. Meil on vaja näidata, et funktsioon $u(\rho, \varphi)$, mis on antud avaldisega (3),

1) rahuldab Laplace'i võrrandit $\rho < a$ korral,

2) rajajoonel $\rho = a$ on $u(a, \varphi) = f(\varphi)$ ja $\lim_{\rho \rightarrow a} u(\rho, \varphi) =$

$= f(\varphi)$, s.t. $u(\rho, \varphi)$ läheb pidevalt üle rajatingimuseks.

Vaatleme neid küsimusi sellises järjekorras.

1) Poissoni tuum $P(\rho, \varphi, x)$ $\rho < a$ korral rahuldab Laplace'i võrrandit, sest kehtib

$$\Delta P(\rho, \varphi, x) = P_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} P_{\varphi} + \frac{1}{\rho^2} P_{\varphi\varphi} = 0,$$

mida võib vahetu arvutamise teel kontrollida. Võib ka vastuväiteliselt tõestada. Oletame, et $\Delta P(\rho, \varphi, x)$ on mingis punk-

tis (ρ_0, φ_0) nullist erinev. Pidevuse tõttu selle punkti teatavas väikeses ümbruses säilitab $\Delta P(\rho, \varphi, x)$ märki. Valime nüüd pideva ja pidevat tuletist omava rajafunktsiooni $\bar{F}(\varphi)$ nii, et ta on kõikjal võrdne nulliga peale vaadeldava φ_0 ümbruse, kus $\bar{F}(\varphi)$ säilitagu märki. Siis

$$\bar{u}(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{F}(x) P(\rho, \varphi, x) dx$$

on harmooniline funktsioon eelneva põhjal, kuid punktis (ρ_0, φ_0) on

$$\Delta \bar{u}(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{F}(x) \Delta P(\rho, \varphi, x) dx \neq 0,$$

mis näitab vastuolu. Seega peab kõikjal vaadeldava ringi sees olema $\Delta P(\rho, \varphi, x) = 0$. Siit nähtub, et $u(\rho, \varphi)$ rahuldab Laplace'i võrrandit $\rho < a$ korral, sest siis

$$u(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \Delta P(\rho, \varphi, x) dx = 0.$$

2) Valime funktsioonide jada $\{f_k(\varphi)\}$, kus funktsioonid $f_k(\varphi)$ on pidevad ja omavad pidevaid tuletisi. Koondugu jada $\{f_k(\varphi)\}$ ühtlaselt funktsiooniks $f(\varphi)$. Olgu iga $f_k(\varphi)$ Dirichlet' ülesande rajafunktsiooniks ringi R jaoks. Siis võime Dirichlet' ülesande lahendi $u_k(\rho, \varphi)$ kirjutada üles Poissoni integraali abil

$$u_k(\rho, \varphi) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_k(x) P(\rho, \varphi, x) dx, & \text{kui } \rho < a, \\ f_k(\varphi), & \text{kui } \rho = a, \end{cases}$$

kusjuures $u_k(\rho, \varphi)$ on ise pidev kinnises ringis \bar{R} .

Jada $\{f_k(\varphi)\}$ ühtlase koonduvuse tõttu vastavalt igale $\varepsilon > 0$ võime leida $k > K$, et kehtib

$$|f_k(\varphi) - f_{k+p}(\varphi)| < \varepsilon$$

iga $p = 1, 2, \dots$ korral. Seega muutub küllalt suure k korral rajatingimus üleminekul funktsioonilt $f_k(\varphi)$ funktsioonile $f_{k+p}(\varphi)$ absoluutväärtuse poolest vähem kui ε . Kuna aga Dirichlet' ülesande lahend on pidevas sõltuvuses

rajafunktsioonist (vt. §1), siis vastavate lahendite $u_k(\rho, \varphi)$ ja $u_{k+p}(\rho, \varphi)$ korral ka kehtib

$$|u_k(\rho, \varphi) - u_{k+p}(\rho, \varphi)| < \varepsilon,$$

kui $k > K$ iga $p = 1, 2, \dots$ korral kogu vaadeldavas ringis \bar{R} . Viimane võrratus ütleb seda, et jada $\{u_k(\rho, \varphi)\}$ koondub ühtlaselt mingiks funktsiooniks $u(\rho, \varphi)$, s.t.

$$\begin{aligned} u(\rho, \varphi) &= \lim_{k \rightarrow \infty} u_k(\rho, \varphi) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_k(x) P(\rho, \varphi, x) dx. \end{aligned}$$

Jada $\{f_k(\varphi)\}$ ühtlase koonduvuse tõttu võime piirile minna integraali märgi all, saame

$$u(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) P(\rho, \varphi, x) dx,$$

kui $\rho < a$. Seega jada $\{u_k(\rho, \varphi)\}$ piirfunktsioon $u(\rho, \varphi)$ on seesama, mida vaatlesime 1) all. Kuna aga funktsioonid $u_k(\rho, \varphi)$ olid pidevad ringis \bar{R} , siis sama kehtib ka $u(\rho, \varphi)$ kohta. Saame

$$u(a, \varphi) = \lim_{k \rightarrow \infty} u_k(a, \varphi) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(\varphi) = f(\varphi)$$

ja

$$\lim_{\rho \rightarrow a} u(\rho, \varphi) = f(\varphi).$$

Seega vaadeldav $u(\rho, \varphi)$ on pidev ringis \bar{R} , omandab rajajoonel antud väärtused $f(\varphi)$ ja läheb pidevalt üle rajatähtsuseks. Sellega oleme kokku näidanud, et Poissoni integraal (3) mistahes pideva ja perioodilise perioodiga 2π funktsiooni $f(\varphi)$ korral on Dirichlet' I rajaülesande lahendiks ringi R jaoks.

§ 4. Harmoniliste funktsioonide omadused.

Harmoniliste funktsioonide omaduste selgitamisel kasutame järgmist asjaolu: kui funktsioon $u(x,y)$ on harmooniline mingis kinnises ringis \bar{R} , siis võib teda selles ringis esitada Poissoni integraali kaudu. Näitame seda.

Olgu antud mingi ring R , mis on piiratud ringjoonega $\rho = a$. Funktsioon $u(\rho, \varphi)$ olgu harmooniline kinnises ringis \bar{R} . Selle eeldusega osutub $u(\rho, \varphi)$ pidevaks ringis \bar{R} ja järelikult omandab ringjoonel $\rho = a$ teatavad väärtused, mis muutuvad pidevalt piki ringjoont. Võime öelda, et ringjoonel $\rho = a$ on määratud pidev funktsioon $f(\varphi) = u(a, \varphi)$. Seega funktsioon $u(\rho, \varphi)$ on harmooniline ringi R sees ja ringjoonel $\rho = a$ omandab väärtused $f(\varphi)$ ehk teisiti öeldes $u(\rho, \varphi)$ on lahendiks Dirichlet' I rajaülesandele ringi jaoks, kus rajafunktsiooniks on $f(\varphi)$. Eespool nägime, et Dirichlet' ülesande lahend ringi jaoks on üheselt määratud ja esitub Poissoni integraali kaudu. Seepärast võime kirjutada antud juhul $u(\rho, \varphi)$ kohta, et

$$(1) \quad u(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) P(\rho, \varphi, x) dx,$$

kus $f(\varphi) = u(a, \varphi)$, millega on väide põhjendatud.

Tõestame nüüd 2 teoreemi harmooniliste funktsioonide kohta.

Teoreem. Kui funktsioon $u(\rho, \varphi)$ on harmooniline ringi R sees ja on pidev ringis \bar{R} , siis tema väärtus võrdub ringi keskpunktis aritmeetilise keskmisega tema väärtustest ringjoonel $\rho = a$.

Tõestus. Esitame vaadeldava harmoonilise funktsiooni $u(\rho, \varphi)$ Poissoni integraali kaudu ja uurime tema väärtust ringi keskpunktis $(0, \varphi)$. Valemist (1) saame

$$u(0, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) d\varphi,$$

kus $f(\varphi) = u(a, \varphi)$. Meil $f(\varphi)$ on aga perioodiline funktsioon perioodiga 2π , s.t. iga φ korral kehtib $f(\varphi + 2\pi) = f(\varphi)$.

Seepärast võime kirjutada

$$u(0, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi,$$

Teostame viimases integraalis muutuja vahetuse

$$\varphi = \frac{s}{a},$$

kus s on nurgale φ vastava kaare pikkus, saame

$$u(0, \varphi) = \frac{1}{2\pi a} \int_0^{2\pi a} f\left(\frac{s}{a}\right) ds = \frac{1}{2\pi a} \int_0^{2\pi a} u\left(a, \frac{s}{a}\right) ds.$$

Saadud valemit nimetatakse Gaussi aritmeetilise keskmise valemiks ja ta annab vastuse teoreemi väitele. Ühtlasi näeme, missugune tähendus on aritmeetilisel keskmisel.

Olgu nüüd antud xy -tasandil mingi lõplik piirkond G , mis on piiratud rajajoonega Γ .

Harnacki I teoreem. Olgu funktsioonid $u_n(x, y)$ harmoonilised piirkonnas G sees ja pidevad kinnises piirkonnas $\bar{G} = G + \Gamma$. Kui jada $\{u_n(x, y)\}$ koondub ühtlaselt rajajoonel Γ , siis koondub ta ühtlaselt ka piirkonnas G sees, kusjuures piirfunktsioon

$$u(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x, y)$$

on harmooniline piirkonnas G sees.

Tõestus. Eelduse järgi rajajoone Γ iga punkti (x, y) ja mistahes $\varepsilon > 0$ korral on

$$|u_n(x, y) - u_{n+p}(x, y)| < \varepsilon,$$

kui $n > N$, iga $p = 1, 2, \dots$ korral. Vahe $u_n - u_{n+p}$ on harmooniline funktsioon. Seepärast järeldub maksimumi- ja miinimumiteoreemist, et kõikjal piirkonnas \bar{G} on

$$|u_n(x, y) - u_{n+p}(x, y)| < \varepsilon,$$

kui $n > N$, iga $p = 1, 2, \dots$ korral. Viimane võrratus ütleb, et jada $\{u_n(x, y)\}$ koondub ühtlaselt piirkonnas G sees.

Jääb veel näidata, et piirfunktsioon on harmooniline

funktsioon. Võtame piirkonna G sees mingi punkti P ja ümbritseme ta ringiga R , mille raadius olgu a . Ring R asetsegu täiesti piirkonna G sees. Selles ringis R võime harmoonilised funktsioonid $u_n(x, y)$ esitada Poissoni integraali kaudu, saame

$$u_n(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_n(\psi) P(\rho, \varphi, \psi) d\psi,$$

kus paremal ρ, φ tähendavad vaadeldava punkti (x, y) polaarkoordinaate, mis on korraldatud ringis R ja $f_n(\psi)$ kujutab funktsiooni $u_n(x, y)$ väärtusi vaadeldaval ringjoonel $\rho = a$. Lastes $n \rightarrow \infty$ võime piirile minna integraali märgi all, sest jada $f_n(\psi)$ koonduvus on ühtlane. Olgu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\psi) = f(\psi),$$

siis võime kirjutada

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\psi) P(\rho, \varphi, \psi) d\psi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) P(\rho, \varphi, \psi) d\psi, \end{aligned}$$

kust näeme, et $u(x, y)$ on harmooniline ringi R sees.

Samasugust mõttekäiku võime korrata iga ringi korral, mis on võetud piirkonna G sees. Sellest järeldub, et funktsioon $u(x, y)$ on harmooniline kogu piirkonnas G .

Esitame tõestuseta veel järgmised teoreemid.

Harnacki II teoreem. Olgu funktsioonid $u_n(x, y)$ harmoonilised ja mittenegatiivsed piirkonna G sees. Kui jada $\{u_n(x, y)\}$ koondub piirkonna G mingis sisemises punktis, siis koondub ta kõikjal selles piirkonnas harmooniliseks funktsiooniks, kusjuures koonduvus on ühtlane piirkonna G igas kinnises osas.

Liouville'i teoreem. Mittekonstantne funktsioon $u(x, y)$, mis on harmooniline kogu xy -tasandil, ei saa olla tõkestatud ülalt ega altpoolt.

Nende teoreemide tõestused leiduvad Petrovski õpikus lk. 221-224.

K I R J A N D U S .

1. Петровский И.Г., Лекции об уравнениях с частными производными, Москва-Ленинград, 1950.
2. Смирнов В.И., Курс высшей математики, т. II, IV, Москва, 1956.
3. Соболев С.Л., Уравнения математической физики, Москва, 1954.
4. Тихонов А.Н., Самарский А.А., Уравнения математической физики, Москва, 1953.

Ü L E S A N N E T E K O G U D .

1. Будаг Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н., Сборник задач по математической физике, Москва, 1956.
2. Смирнов М.М., Задачи по уравнениям математической физики, Москва, 1957.

S I S U K O R D .

	Lk.
SISSEJUHATUS	3
I. E S I M E S T J Ä R K U O S A T U L E T I S - T E G A V Ö R R A N D I D	6
§1. Kahe sõltumatu muutujaga kvaasilineaarsed võrrandid	6
§2. Kahe sõltumatu muutujaga mittelineaarsed võrrandid	11
§3. Cauchy' karakteristikute meetod	15
I. T E I S T J Ä R K U O S A T U L E T I S T E - G A V Ö R R A N D I D	23
§1. Kahe sõltumatu muutujaga võrrandite liigitus.	23
§2. Kahe sõltumatu muutujaga võrrandite kanooni- line kuju	29
I. L A I N E V Ö R R A N D	35
§1. Vabalt võnkuva keele võrrandi tuletamine.	35
§2. Võnkuva keele võrrandi lahendi ainsus lõpliku keele jaoks	39
§3. Võnkuva keele võrrandi lahendamise Fourier' meetodil	43
§4. Võnkuva keele võrrandi lahendi füüsikaline interpretatsioon	49
§5. Cauchy' ülesanne lõpmatu keele jaoks	54
§6. Lainete levimine lõpmatul keelel	58
§7. Cauchy' ülesanne laine võrrandi jaoks tasandil	63
I. S O O J U S J U H T I V U S E V Ö R R A N D	69
§1. Soojusjuhtivuse võrrandi tuletamine.	69
§2. Soojusjuhtivuse võrrandi lahendi ainsus lõp- liku varda jaoks.	73
§3. Soojuse levimine lõplikus vardas	78
§4. Soojusjuhtivuse võrrandi lahendi ainsus lõp- matu varda jaoks.	83
§5. Soojuse levimine lõpmatus vardas	86

V. LAPLACE'I VÕRRAND	91
§1. Dirichlet' esimene rajaülesanne	91
§2. Dirichlet' I rajaülesande lahendus ringi jaoks	95
§3. Poisson'i integraal	100
§4. Harmooniliste funktsioonide omadused	105
KIRJANDUS	108

2 - krs .

Hind rbl. 2.10

1961.a. - rbl. 0.24

A

23534

194200

TÜ RAAMATUKOGU



1 0300 00367646 9