

EESTI NSV HARIDUSMINISTEERIUM

# MATEMAATIKA

IX KLASSILE

(KATSEÕPIK)

II OSA

TALLINN 1962

A-24898

EESTI NSV HARIDUSMINISTEERIUM

M A T E M A A T I K A

IX KLASSILE

/KATSEPIK/

II OSA

Autorid O. Prints, H. Roos, G. Rosenberg, A. Vihman

Toimetanud A. Telgmaa

Tallinn 1962

2

Tartu Riikliku Ülikooli  
Raamatukogu  
54952

ARHIIVKOGU

## S I S U K O R D

### V. Trigonomeetrilised funktsioonid

§ 38. Teravnurga ühe trigonomeetrilise funktsiooni järgi sama nurga teiste funktsioonide leidmine	5
§ 39. Teravnurga trigonomeetriliste funktsioonide vahelised seosed .....	7
§ 40. Negatiivne nurk .....	17
§ 41. Nurk, mille absoluutväärtus ületab täispöörde ..	20
§ 42. Nurga mõõduühikud .....	25
§ 43. Mistahes suurusega nurga trigonomeetrilised funktsioonid .....	29
§ 44. Põhiseoste kehtivus mistahes nurga trigonomeetriliste funktsioonide puhul .....	32
§ 45. Trigonomeetriliste funktsioonide väärtused lõikude mõõtarvudena .....	35
§ 46. Taandamisvalemid .....	38
§ 47. Trigonomeetriliste funktsioonide graafikud .....	46
§ 48. Trigonomeetriliste funktsioonide perioodilisus..	51
§ 49. Kahe nurga summa ja vahe siinus, koosinus ja tangens .....	58
§ 50. Kahekordse nurga ja poolnurga siinus, koosinus ja tangens .....	63

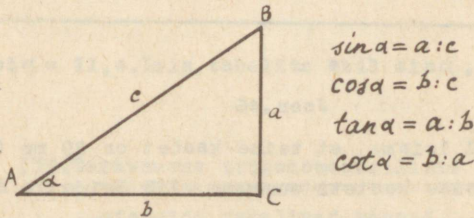
§ 51. Nurga leidmine antud trigonomeetrilise funktsiooni väärtuse järgi .....	67
§ 52. Trigonomeetriliste võrrandite lahendamise näiteid .....	78

#### VI. K ü m n e n d l o g a r i t m i d

§ 53. Kümne astmed .....	93
§ 54. Kümnenndlogaritmi definitsioon .....	94
§ 55. Korrutise, jagatise, astme ja juure logaritmid..	96
§ 56. Avaldise logaritmi .....	98
§ 57. Kümnenndlogaritmi omadused .....	99
§ 58. Logaritmid tabelid .....	101
§ 59. Arvu leidmine tema kümnenndlogaritmi järgi .....	105
§ 60. Tehted poolnegatiivsete arvudega .....	108
§ 61. Arvutamine kümnenndlogaritmid abil .....	112
§ 62. Funktsiooni skaala mõiste .....	117
§ 63. Logaritmiline skaala .....	118
§ 64. Arvutuslükati ehitus. Lükati põhiskaalad D ja C	120
§ 65. Korrutamise lükati skaalade D ja C abil .....	124
§ 66. Jagamine lükati skaalade D ja C abil .....	128
§ 67. Protsentülesannete lahendamine lükatiga .....	131
§ 68. Võrde lahendamine lükatiga .....	132
§ 69. Mõnede murdude arvutamine lükatiga .....	136
§ 70. Lükati skaalad A ja B .....	137
§ 71. Ruutude ja ruutjuurte leidmine lükatiga .....	140
§ 72. Kuupide ja kuupjuurte leidmine lükatiga .....	144
Ülesandeid IX klassi kursuse kordamiseks .....	148

V. TRIGONOMEETRILISED FUNKTSIOONID.

§38. Teravnurga ühe trigonomeetrilise funktsiooni järgi sama nurga teiste funktsioonide leidmine.



Joon. 45

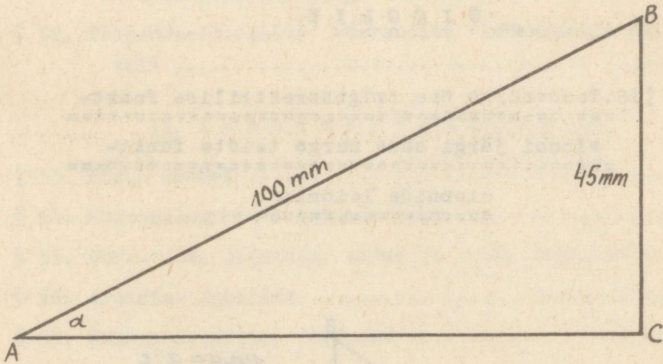
Teravnurga iga trigonomeetrilise funktsiooni järgi saab ehitada selle nurga, ehitades täisnurkse kolmnurga, milles vastavate külgede suhe on võrdne antud funktsiooni väärtusega. Saadud kolmnurgast võib nüüd leida vaadeldava nurga ülejäänud kolme funktsiooni väärtused.

Lahendame näitena ülesande:

$\sin \alpha = 0,45$ . Leia  $\cos \alpha$ ,  $\tan \alpha$  ja  $\cot \alpha$ .

Lahendus.  $\sin \alpha = 0,45 = 45 : 100$ .

Ehitame täisnurkse kolmnurga, milles üks kaatet on 45 mm ja hüpotenuus on 100 mm (joon.46).



Joon.46

Mõõtmisel leiame, et teine kaatet on 89 mm (olgu märgitud, et teise kaateti suuruse võib leida ka arvutamise teel, rakendades Pütagorase teoreemi). Edasi saame, et

$$\cos \alpha = 89 : 100 = 0,89;$$

$$\tan \alpha = 45 : 89 = 0,51;$$

$$\cot \alpha = 89 : 45 = 1,98;$$

Sellest näeme, et kui teravnurga trigonomeetrilistest funktsioonidest üks on antud, siis kõigi teiste funktsioonide väärtusi saab selle antud väärtuse järgi leida.

Kui on kasutada nurgafunktsioonide tabelid, siis saab antud nurgafunktsiooni väärtuse järgi leida sama nurga ülejäänud kolm funktsiooni ka tabelite abil, leides esmalt antud funktsiooni väärtuse järgi nurga suuruse.

#### Ülesanded.

136.  $\sin \alpha = \frac{2}{3}$ . Leia graafiliselt  $\cos \alpha$ ,  $\tan \alpha$  ja  $\cot \alpha$ .

137.  $\cos \alpha = 0,75$ . Leia graafiliselt  $\sin \alpha$ ,  $\tan \alpha$  ja  $\cot \alpha$ .
138.  $\tan \alpha = 1,5$ . Leia graafiliselt  $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$  ja  $\cot \alpha$ .
139.  $\cot \alpha = 2$ . Leia graafiliselt  $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$  ja  $\tan \alpha$ .
140.  $\sin \alpha = 0,53$ . Leia tabelite abil  $\cos \alpha$ ,  $\tan \alpha$  ja  $\cot \alpha$ .
141.  $\cos \alpha = 0,07$ . Leia tabelite abil  $\sin \alpha$ ,  $\tan \alpha$  ja  $\cot \alpha$ .
142.  $\tan \alpha = 0,344$ . Leia tabelite abil  $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$  ja  $\cot \alpha$ .
143.  $\cot \alpha = 11,4$ . Leia tabelite abil  $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$  ja  $\tan \alpha$ .

§39. Teravnurga trigonomeetriliste funktsioonide vahelised seosed.

Nurgafunktsiooni antud väärtuse järgi saab sama nurga ülejäänud kolme funktsiooni väärtusi leida ka arvutamise teel, kasutades valemeid, mis väljendavad nurgafunktsioonide vahelisi seoseid.

Ühe ja sama teravnurga siinuse ja koosinuse vahelist seost väljendava valemi saame tuletada kasutades Pütagorase teoreemi (joon.45):

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Jagades selle võrduse mõlemad pooled  $c^2$ -ga, saame

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2}$$

ehk

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$$

ehk

$$(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1,$$

mida kirjutatakse tavaliselt nõnda:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Ühe ja sama nurga siinuse ja koosinuse ruutude summa on 1.

See seos võimaldab  $\sin\alpha$  väljendada  $\cos\alpha$  kaudu ja ümberpöörduvalt:

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha}$$

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha}$$

Tuletame seose ühe ja sama nurga siinuse, koosinuse ja tangensi vahel.

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

ja

$$\cos\alpha = \frac{b}{c},$$

seega

$$\frac{a}{c} : \frac{b}{c} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad \text{ehk} \quad \frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \text{millest}$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

Teravnurga tangens võrdub selle nurga siinuse ja koosinuse jagatisega.

Ühe ja sama nurga tangensi ja kootangensi vahelise seose tuletamiseks paneme tähele, et

9

$$\tan \alpha = \frac{a}{b}$$

ja

$$\cot \alpha = \frac{b}{a};$$

seega

$$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$$

Ühe ja sama nurga tangensi ja kootangensi korrutis on 1.

Võrdusest  $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$  saame

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$$

ja

$$\tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha}.$$

Nurga kootangens on sama nurga tangensi pöördväärtus.

Samal viisil näeme, et nurga tangens on selle nurga kootangensi pöördväärtus.

Seoseid, mida väljendavad valemid

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1;$$

$$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1;$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

nimetatakse trigonomeetriliste funktsioonide vahelisteks p õ h i s e o s t e k s, sest need seoses võimaldavadki ühe nurgafunktsiooni järgi arvutada ülejäänud kolme funktsiooni.

Seda selgitavad järgmised näited.

Näide 1. On teada, et  $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ . Arvuta

1)  $\cos \alpha$ ; 2)  $\tan \alpha$ ; 3)  $\cot \alpha$ .

Lahendus. Asendades võrduses

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$$

$\sin \alpha$  antud väärtusega, saame

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{25}{169}} = \frac{12}{13}.$$

2) Kasutades võrdust

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

ning asendades seal  $\sin \alpha$  ja  $\cos \alpha$  nende väärtustega, saame

$$\tan \alpha = \frac{5}{13} : \frac{12}{13} = \frac{5}{12}.$$

3) Et nurga kootangens on sama nurga tangensi pöördväärtus, siis

$$\cot \alpha = \frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}.$$

Näide 2. Avalda  $\tan \alpha$  kaudu 1)  $\sin \alpha$ ; 2)  $\cos \alpha$ .

Lahendus. 1) Jagades võrduse

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

mõlemad pooled  $\sin^2 \alpha$ -ga, saame

$$1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

ehk

$$1 + \frac{1}{\tan^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \quad \text{ehk} \quad \frac{1 + \tan^2 \alpha}{\tan^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha},$$

millest

$$\sin^2 \alpha = \frac{\tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$$

Siit saame

$$\sin \alpha = \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}$$

$$2) \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha.$$

Sellest

$$\cos \alpha = \frac{\sin \alpha}{\tan \alpha}.$$

Arvestades, et  $\sin \alpha = \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}$ ,

saame

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}.$$

Näide 3. Avalda  $\cot \alpha$  kaudu 1)  $\sin \alpha$ ; 2)  $\cos \alpha$ .

Lahendus. 1)  $\sin \alpha = \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} = \frac{\frac{1}{\cot \alpha}}{\sqrt{1 + \frac{1}{\cot^2 \alpha}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 \alpha}};$

seega

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 \alpha}}$$

$$2) \cos \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\cot^2 \alpha}}} = \frac{\cot \alpha}{\sqrt{1 + \cot^2 \alpha}};$$

seega

$$\cos \alpha = \frac{\cot \alpha}{\sqrt{1 + \cot^2 \alpha}}.$$

Näide 4. Avalda mrd

$$\frac{\frac{\sin \alpha \cos \alpha}{2}}{\cos \alpha - \sin \alpha}$$

funktsiooni  $\tan \alpha$  kaudu.

Lahendus. Jagades antud murru lugeja ja nimetaja avaldisega  $\cos^2 \alpha$ , saame

$$\frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \frac{\tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}.$$

Ülesanded.

144. Avalda mrd  $\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}$  funktsiooni  $\tan \alpha$  kaudu.

145. Väljenda vahe  $\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$  funktsiooni  $\sin \alpha$  kaudu.

146. Avalda summa  $\tan \alpha + \cot \alpha$  funktsioonide  $\sin \alpha$  ja  $\cos \alpha$  kaudu.

147. Väljenda  $\tan \alpha$  kaudu avaldis

$$\frac{1}{\sin^2 \alpha + \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha}.$$

Näide 5. Arvuta avaldise

$$\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}$$

väärtus, teades, et  $\tan \alpha = \frac{1}{2}$ .

Lahendus. Jagades antud avaldise lugeja ja nimetaja arvuga  $\cos \alpha$  ning asendades seejärel saadud avaldises  $\tan \alpha$  ta antud väärtusega  $\frac{1}{2}$ , saame:

$$\begin{aligned} \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} &= \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha}}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{\tan \alpha + 1}{\tan \alpha - 1} = \\ &= \frac{\frac{1}{2} + 1}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{2\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 5. \end{aligned}$$

### Ülesanded.

148. Arvuta avaldise

$$\frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}$$

väärtus, teades, et  $\tan \alpha = \frac{5}{4}$ .

149. Arvuta avaldise

$$\frac{4 \sin \alpha - 2 \cos \alpha}{5 \cos \alpha + 3 \sin \alpha}$$

väärtus, teades, et  $\tan \alpha = 2$ .

150. On teada, et  $\tan \alpha + \cot \alpha = 10$ . Arvuta avaldise  $\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha$  väärtus.

151. Arvuta  $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$  väärtus, kui on teada, et  $\sin \alpha + \cos \alpha = 1,2$ .

Näide 6. Lihtsusta avaldist

$$\frac{\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} .$$

Lahendus.

$$\begin{aligned} \frac{\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} &= \frac{(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \\ &= \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \frac{(\cos \alpha + \sin \alpha)(\cos \alpha - \sin \alpha)}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \\ &= \cos \alpha + \sin \alpha . \end{aligned}$$

Kespool saadud valemid nurga ühe funktsiooni avaldamiseks sama nurga teise funktsiooni kaudu on kokkuvõtlikult esitatud järgmises tabelis.

	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\tan \alpha$	$\cot \alpha$
$\sin \alpha =$	-	$\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$	$\frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}$	$\frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 \alpha}}$
$\cos \alpha =$	$\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$	-	$\frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}$	$\frac{\cot \alpha}{\sqrt{1 + \cot^2 \alpha}}$
$\tan \alpha =$	$\frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}$	$\frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha}$	-	$\frac{1}{\cot \alpha}$
$\cot \alpha =$	$\frac{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha}$	$\frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}$	$\frac{1}{\tan \alpha}$	-

Need valemid hõlbustavad arutusi ning kergendavad avaldiste lihtsustamist ja mõnede võrduste õigsuse tõestamist.

Ülesanded.

152. Lihtsusta avaldised

- 1)  $\sin \alpha \cot \alpha + \cos \alpha$ ;
- 2)  $1 + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ ;
- 3)  $(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha)$ ;
- 4)  $2 - \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$ ;
- 5)  $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2$ ;
- 6)  $\cos \alpha \cdot \tan \alpha$ ;
- 7)  $\cot \alpha \cdot \sin \alpha$ ;
- 8)  $\sin \alpha : \tan \alpha$ ;
- 9)  $\frac{1 - \sin^2 \alpha}{1 - \cos^2 \alpha}$ ;
- 10)  $\frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha}$ ;
- 11)  $\sin^4 \alpha + 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha$ ;
- 12)  $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha + \cos^2 \alpha$ ;

Näide 7. Tõesta, et

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} - \frac{1}{\cot^2 \alpha} = 1.$$

Lahendus. Tõestamiseks teisendame antud võrduse vasakut poolt.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos^2 \alpha} - \frac{1}{\cot^2 \alpha} &= \frac{1}{\cos^2 \alpha} - \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} - \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \\ &= \frac{1 - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = 1. \end{aligned}$$

Näide 8. Tõesta samasus

$$\tan^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \tan^2 \alpha \sin^2 \alpha.$$

Lahendus.

$$\begin{aligned} \tan^2 \alpha - \sin^2 \alpha &= \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - \sin^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \\ &= \frac{\sin^2 \alpha (1 - \cos^2 \alpha)}{\cos^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \tan^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha. \end{aligned}$$

Märkus: Mõnikord osutub samasuse tõestamisel otsustavaks teisendada võrduse mõlemat poolt.

Ülesanded.

153. Tõesta järgmised samasused:

$$1) \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha;$$

$$2) \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha - \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 0;$$

$$3) \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha};$$

$$4) \frac{\sin^2 \alpha}{1 + \cos \alpha} = 1 - \cos \alpha;$$

$$5) \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} + \frac{1}{1 + \cot^2 \alpha} = 1;$$

$$6) \cot \alpha + \cos \alpha = \frac{\cot^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{\cot \alpha - \cos \alpha};$$

$$7) 1 - \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \tan \alpha = \cos^2 \alpha;$$

$$8) \sin^4 \alpha \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^4 \alpha = \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha;$$

$$9) \sin^2 \alpha \cdot (1 + \cot^2 \alpha) = 1;$$

$$10) \tan \alpha \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sin \alpha.$$

Ülesandeid kordamiseks.

$$154. \text{ Esita vahe } \frac{\sqrt{3}}{2} - 1$$

a) kahe nurga siinuste vahena;

b) kahe nurga koosinuste vahena.

155. Esita summa  $1 + \sqrt{3}$ .

a) kahe nurga tangensite summana;

b) kahe nurga kootangensite summana.

156. Esita summa  $1 + \frac{1}{2}$  a) kahe nurga siinuste summana;

b) kahe nurga koosinuste summana.

157. Arvuta peast a)  $\tan 57^\circ \cdot \tan 33^\circ$ ;

b)  $\frac{\sin 36^\circ}{\cos 54^\circ}$ .

158. Arvuta: 1)  $\sin 45^\circ - \cos 60^\circ$ ; 6)  $\sin 0^\circ - \tan 0^\circ$ ;

2)  $\sin 60^\circ - \cos 45^\circ$ ; 7)  $\sin 30^\circ + \tan 45^\circ$ ;

3)  $\cos 30^\circ - \cos 45^\circ$ ; 8)  $\cos 60^\circ - \cot 45^\circ$ ;

4)  $\tan 45^\circ - \cot 45^\circ$ ; 9)  $\cos 0^\circ - \sin 0^\circ$ ;

5)  $\tan 45^\circ - \cos 0^\circ$ ; 10)  $\sin 90^\circ - \cos 0^\circ$ ;

159. Arvuta  $60^\circ$ -se ja  $30^\circ$ -se nurkade siinuste suhe.

160. Leia  $45^\circ$ -se nurga ja  $60^\circ$ -se nurga koosinuste suhe.

161. Arvuta avaldise

$$\frac{\sin \alpha}{\tan \alpha - \sin(75^\circ - \alpha)}$$

väärtus, teades, et  $\alpha = 45^\circ$ .

162. Mast on toestatud vaieritega, millede pikkused on  $l_1$  m ja mis maapinnaga moodustavad nurga  $60^\circ$ . Kui kõrgel maapinnast on vaierid masti külge kinnitatud?

163. Jõud  $l_0$  kg on lahutatud kaheks komponentjõuks, millede suunad on teineteisega risti, kusjuures ühe komponendi suund moodustab antud jõu suunaga nurga  $30^\circ$ . Arvuta komponentide suurused.

164. Pääike on silmapäirilt  $30^\circ$  kõrgusel. Kase varju pikkus on sel ajal 50 m. Kui kõrge on kask?

165. Maa sisse püsti löödud teiba kõrgus maapinnast on 3 m ja ta heidab 5 m pikkuse varju. Kui kõrgel on pääike?

166. Lihtsusta avaldised:

$$1) \cos^4 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha ;$$

$$2) \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} ;$$

$$3) \sin \alpha \cos \alpha (\tan \alpha + \cot \alpha).$$

167. Tõesta samasused:

$$1) \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} ;$$

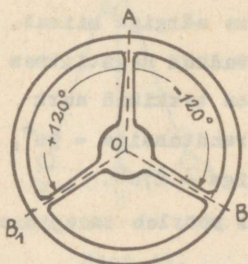
$$2) \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} .$$

§40. Negatiivne nurk.

=====

Auto rooliratast saab pöörata kahes teineteisele vastupidises suunas. Kui rooliratast pööratakse kellaosuti liikumise suunas, näiteks nii, et kodar OA läheb esendisse

OB (joon.47), siis auto esirattad pöörduvad paremale. Rooliratta pööramisel kellaosuti liikumisele vastupidises suunas, näiteks nii, et kodar OA läheb esendisse  $OB_1$ , esirattad pöörduvad vasakule. Loeme ühe pöörlemise suuna p o s i t i i v-



Joon.47

s e k s, teise n e g a t i i v s e k s.

Vankri vasakpoolsete rataste mutrid keeratakse kinni, pöörates neid positiivses suunas, parempoolsete rataste mutrite kinnikeeramiseks tuleb neid pöörata negatiivses suunas. Kella osutid pöörlevad negatiivses suunas.

Positiivseks pöörlemise suunaks loetakse seda suunda, mis on vastupidine kellaosutite pöörlemise suunale.

Igapäevases kõnekeeles nimetatakse pöörlemist positiivses suunas pöörlemiseks v a s t u p ä e v a ning pöörlemist negatiivses suunas pöörlemiseks p ä r i p ä e v a.

Kui on teada, et auto rooliratast pöörati nurga võrra  $120^\circ$ , siis ei ole veel teada, kas kodar OA (joon. 47) läks asendisse OB või asendisse  $OB_1$ , ehk teisiti öeldes, ei ole teada kas sellel pöörlemisel tekkis nurk AOB või nurk  $AOB_1$ .

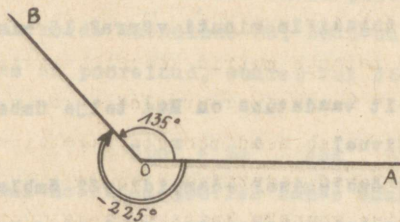
Pöörlemisel tekkinud nurk on siis määratud, kui on antud pöörde suurus ja pöörlemise suund.

Pöörlemisel tekkinud nurga loeme positiivseks, kui pöörlemine toimub positiivses suunas ja negatiivseks, kui pöörlemine toimub negatiivses suunas.

Negatiivse nurga määramise kirjutame märgiga miinus. Näiteks, kui kodar OA (joon. 47) on jõudnud negatiivses suunas pööreldes asendisse OB, siis on tekkinud nurk  $-120^\circ$ ; kella minutiosuti pöördub veerandtunniga  $-90^\circ$ , poole tunniga  $-180^\circ$ , kolmveerandtunniga  $-270^\circ$ .

Vaatleme nurka, mis tekib, kui kiir pöörleb tasapinnal oma otspunkti O ümber (joon. 48).

Kui kiir on pöörlemisel jõudnud asendist OA asendisse



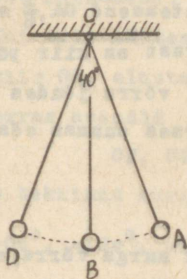
Joon.48

OB, siis on tekkinud nurk AOB. Nurga haara OA, millest kiir alustas pöörlemist, nimetatakse alghaaraks ja haara OB, millel kiire pöörlemine lõppes, nimetatakse lõpphaaraks. Nurga tähistamisel kolme tähe abil kirjutatakse esikohale täht, mis asub alghaara juures. Joonisel 48 kujutatud nurka AOB võib mõista kahte viisi, kas positiivse nurgana  $135^\circ$  või negatiivse nurgana  $-225^\circ$ . Nagu näeme, nende nurkade absoluutväärtuste summa on  $360^\circ$ . Kahte viisi arusaamise vältimiseks on kokku lepitud, et sümbolid

$$\angle AOB, \alpha, \beta, \gamma, \dots$$

tähendavad positiivseid nurki, kui teisiti pole öeldud.

### Ülesanded.



Joon.49.

168. Millega võrdub nurk (joonisel 49), mille pendel teeb võnkumisel

- asendist OD asendisse OA?
- asendist OA asendisse OD?

169. Missuguse nurga võrra pöörduv kella minutiosuti 5 minutiga? 20 minutiga? 45 minutiga?

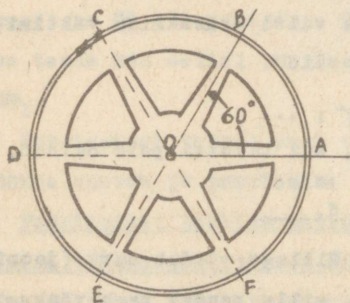
170. Missuguse nurga võrra peab pöörama kella minuti-  
osutit, et liikata kella tagasi 10 minuti võrra? 15 minuti  
võrra? 30 minuti võrra?

171. Kummalt pooluselt vaadatuna on Maa telje ümber  
pöörlemise suund positiivne?

172. Kummal juhul, kas õblemisel edaspidi või õblemi-  
sel tagaspidi, on õblemisemasina hooratta pöörlemise suund  
negatiivne, kui masinale vaadatakse hooratta poolsest ot-  
sast?

§41. Nurg, mille absoluutväärtus  
=====

ületab täispöörde.  
=====



Joon. 50

Kui hooratas pöörleb positiivses suunas edasi  
ja kiir OA läbib järjekorras asendid

OC, OB, OE, OF, OA,

siis öeldakse, et hooratas on pöörelnud nurga võrra, mil-  
le suurus on vastavalt

$120^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $240^\circ$ ,  $300^\circ$ ,  $360^\circ$ .

Paistku meile diiselmoo-  
teri hooratta pöörlemine  
positiivses suunas ja toi-  
mugu see kiirusega 1 täis-  
pööre sekundis (joon. 50).

Olgu kodarad tähistava  
kiire lähteasend OA,  $\frac{1}{6}$  se-  
kundi pärast on kiir pööre-  
dunud  $60^\circ$  võrra jõudes asen-

Hooratta samas suunas edasi pöörlemisel kiir OA jõuab teist korda asendisse OB. Nüüd on nurk, mille võrra hooratas on pöörelnud, suurem kui  $360^\circ$ . Üeldakse, et see nurk on

$$360^\circ + 60^\circ \text{ ehk } 420^\circ.$$

Kui hooratas pöörleb samas suunas edasi, lähib kiir OA teist korda oma lähteasendi ning jõuab kolmandat korda asendisse OB. Sel korral üeldakse, et tekkinud nurga suurus on

$$60^\circ + 2 \cdot 360^\circ \text{ ehk } 780^\circ,$$

Hooratta pöörlemise jätkumisel samas suunas kiir OA jõuab asendisse OB

$$3., 4., 5., \dots, k.$$

korda. Tekkinud nurkade suurused on siis vastavalt

$$60^\circ + 3 \cdot 360^\circ, 60^\circ + 4 \cdot 360^\circ, 60^\circ + 5 \cdot 360^\circ, \\ \dots, 60^\circ + k \cdot 360^\circ.$$

Siin  $k$  tähendab positiivset täisarvu.

Nurga mõistet sel viisil laiendades, s.o. kasutades nurka pöörde mõõduna, võib kõnelda kuitahes suurtest positiivsetest nurkadest.

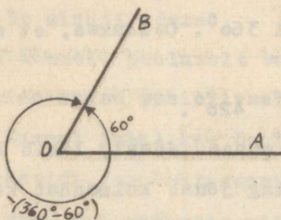
Kui meie näites hooratas pöörleb negatiivses suunas, nii et kiir OA, alustades pöörlemist lähteasendist, läbib järjekorras asendid

$$OF, OE, OD, OC, OB, OA, OF, OE,$$

siis tekkinud nurga suurus on vastavalt

$$-60^\circ, -120^\circ, -180^\circ, -240^\circ, -300^\circ, -360^\circ, -420^\circ, -480^\circ.$$

Kui kiir OA (jeon.51) pööreldes negatiivses suunas, jõuab esimest korda asendini OB, siis tekib negatiivne nurk,



Joon. 51

mille absoluutväärtus on  $360^{\circ} - 60^{\circ}$ ; seega selle nurga suurus on

$$-(360^{\circ} - 60^{\circ}) = 60^{\circ} - 360^{\circ}.$$

Kui kiire OA pöörlemise jätkumisel samas suunas ta läbib asendit OB

2., 3., 4., ..., k.

korda, siis vastavad nurgad

on

$$60^{\circ} - 2 \cdot 360^{\circ}, 60^{\circ} - 3 \cdot 360^{\circ}, 60^{\circ} - 4 \cdot 360^{\circ}, \dots, \\ 60^{\circ} - k \cdot 360^{\circ}.$$

Seega kõik positiivsed kui ka negatiivsed nurgad, mille alghaaraks on kiir OA ja lõpphaaraks on kiir OB, on väljendatavad ühise valemiga

$$60^{\circ} + k \cdot 360^{\circ},$$

kus k on mistahes täisarv.

Üldiselt: iga nurga x saab avaldada kujul

$$x = \alpha + k \cdot 360^{\circ},$$

kus k on täisarv ja  $\alpha$  on  $360^{\circ}$ -st väiksem positiivne nurk.

Näited.

$$1. 5764^{\circ} = 4^{\circ} + 16 \cdot 360^{\circ}$$

$$2. 6038^{\circ} = 278^{\circ} + 16 \cdot 360^{\circ} \text{ ehk}$$

$$6038^{\circ} = -82^{\circ} + 17 \cdot 360^{\circ}.$$

$$3. -1000^{\circ} = 80^{\circ} - 3 \cdot 360^{\circ}.$$

Ülesanded.

173. Lihvimisketta äärel asuv punkt liigub kiirusega

900 m/sec. Ketta läbimõõt on 4 dm. Kui suure nurga võrra pöörduv ketta raadius sekundis?

174. Elektrimootori rihmaratas teeb 900 pööret minutis. Mitme kraadi võrra pöörduv rihmaratta raadius sekundis?

175. Väljenda järgmised nurgad kujul

$$\alpha + n \cdot 360^\circ,$$

kus  $0 < \alpha < 360^\circ$ ,

- 1)  $1117^\circ$ ; 2)  $1940^\circ$ ; 3)  $2720^\circ$ ; 4)  $1030^\circ$ .

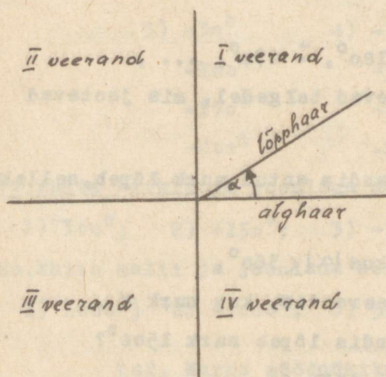
176. Väljenda järgmised nurgad kujul

$$\alpha + n \cdot 360^\circ,$$

kus  $-180 < \alpha < 180^\circ$  ehk  $|\alpha| < 180^\circ$ .

- 1)  $1420^\circ$ ; 2)  $1770^\circ$ ; 3)  $2020^\circ$ ; 4)  $-2400^\circ$ .

Jaotame tasapinna koordinaattelgedega neljaks veerandiks, mida nimetatakse positiivse pöörlemise suuna järjekorras esimeseks, teiseks, kolmandaks ja neljandaks veerandiks.



Joon. 52

Paigutame vaadeldava nurga teljestikku nõnda, et ta tipp asub nullpunktis ja alghaar asub abstsisside positiivsel poolteljel. Nurga lõpphaar asub siis sõltuvalt nurga suurusest kas mõnel poolteljel või tasapinna esimeses, teises, kolmandas või neljandas veeran-

dis (joon.52).

Nurkasid nimetatakse esimese, teise, kolmanda ja neljanda veerandi nurkadeks vastavalt sellele, mitmendas veerandis asetseb nurga lõpphaar, sõltumata sellest, mis suunas pööreldes ta sellesse asendisse on jõudnud.

Seega positiivsed teravnurgad on esimese veerandi nurgad; positiivsed nürinurgad on teise veerandi nurgad; nurk, mis on suurem kui  $180^\circ$  ja väiksem kui  $270^\circ$ , on kolmanda veerandi nurk; nurk, mis on suurem kui  $270^\circ$  ja väiksem kui  $360^\circ$ , on neljanda veerandi nurk.

Negatiivne teravnurk on neljanda veerandi nurk, negatiivne nürinurk on kolmanda veerandi nurk jne.

On ilmne, et kui  $\alpha$  on esimese, teise, kolmanda või neljanda veerandi nurk, siis on seda ka vastavalt nurk

$$\alpha + n \cdot 360^\circ,$$

kus  $n$  on mistahes täisarv.

Veeranditesse kuuluvateks ei loeta nurki, mis on täisnurga kordsed:

$$0^\circ, \pm 90^\circ, \pm 180^\circ, \pm 270^\circ, \dots,$$

sest nende lõpphaarad asetsevad telgedel, mis jaotavad tasapinna veeranditeks.

Et leida, mitmendas veerandis antud nurk lõpeb, selleks tuleb ta avaldada kujul

$$\alpha + n \cdot 360^\circ, \text{ kus } |\alpha| < 360^\circ.$$

Antud nurk lõpeb samas veerandis, kus nurk  $\alpha$ .

Näide 1. Mitmendas veerandis lõpeb nurk  $1500^\circ$ ?

Lahendus:  $1500 : 360 = 4$ , jääk  $60$ .

$$1500^\circ = 60^\circ + 4 \cdot 360^\circ.$$

Nurk  $1500^\circ$  on esimese veerandi nurk.

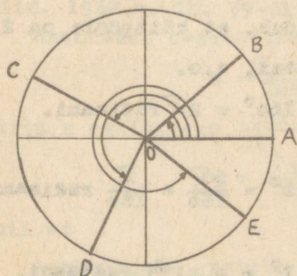
Näide 2. Mitmendast veerandis lõpeb nurk  $-800^\circ$ ?

Lahendus.  $-800^\circ = -80^\circ - 2 \cdot 360^\circ.$

Nurk  $-800^\circ$  lõpeb neljandas veerandis.

Ülesanded.

177. Mitmendasse veerandisse kuulub joonisel 53



Joon. 53

1)  $\angle AOB$ ?    2)  $\angle AOC$ ?

3)  $\angle AOD$ ?    4)  $\angle AOE$ ?

178. Mis veeranditesse

kuuluvad järgmised nurgad:

1)  $405^\circ$     2)  $200^\circ$

$600^\circ$      $300^\circ$

$840^\circ$      $700^\circ$

$250^\circ$      $950^\circ$

3)  $-30^\circ$     4)  $-370^\circ$

$-100^\circ$      $-500^\circ$

$-170^\circ$      $-600^\circ$

$-400^\circ$      $-800^\circ$

179. Ehita sirgli ja joonlaua abil nurgad

1)  $300^\circ$ ;    2)  $-150^\circ$ ;    3)  $-135^\circ$ ;    4)  $840^\circ$ .

180. Ehita malli ja joonlaua abil nurgad

1)  $1000^\circ$ ;    2)  $-1000^\circ$ ;    3)  $500^\circ$ ;    4)  $-500^\circ$ .

§42. Nurga mõõtmisehikud.

=====

1. Kraad.

Kõige rohkem levinud nurga mõõtmisehik on nurgakraad,

mis on  $\frac{1}{90}$  täisnurgast ehk  $\frac{1}{360}$  täispöördest; ta sümboliks on  $1^\circ$ .

$$1^\circ = 60',$$

$$1' = 60''.$$

Maamõõtjad kasutavad praktilistel nurga mõõtmistel peaaegu eranditult kraadimõõtu.

## 2. Radiaan.

Radiaan on kesknurk, millele vastava kaare pikkus on võrdne raadiuse pikkusega (joon.54).

Sellest definitsioonist järeldub, et täispööre on  $2\pi$  radiaani, s.o.

$$360^\circ = 2\pi \text{ radiaani.}$$

Siit

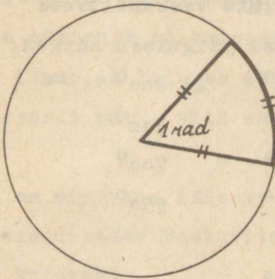
$$1^\circ = \frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180} \text{ radiaani,}$$

ehk

$$1^\circ = 0,0175 \text{ radiaani.}$$

Et

$$2\pi \text{ radiaani} = 360^\circ,$$



Joon.54

siis

$$1 \text{ radiaan} = \frac{360}{2\pi} = \frac{180}{\pi} \text{ kraadi}$$

ehk

$$1 \text{ radiaan} = 180 \cdot \frac{1}{\pi} = 180 \cdot 0,3185 = 57,2958^\circ,$$

ehk

$$\underline{1 \text{ radiaan} = 57^\circ 17' 45''}.$$

Üldiselt, kui mingi nurga suurus kraadimõõdus on  $n$  ja radiaanmõõdus  $x$ , siis

$$\frac{x}{2\pi} = \frac{n}{360} \quad \text{ehk} \quad \frac{x}{\pi} = \frac{n}{180},$$

millest

$$x = \frac{\pi n}{180}$$

ja

$$n = \frac{180x}{\pi}$$

Kraadimõõdus antud nurga suuruse ümberarvutamiseks radiaanideks ja ümberpöördult kasutatakse sellekohaseid tabeleid. (V.M. Bradis, Neljakohalised matemaatilised tabelid, 1962.a. lk. 59-61 (vene k.)).

Asendades n-kraadise kaare pikkuse arvutamise valemis

$$s = \frac{\pi r}{180} \cdot n$$

arvu n avaldisega  $\frac{180x}{\pi}$ , saame

$$s = \frac{\pi r}{180} \cdot \frac{180x}{\pi} = rx,$$

nii et

kesknurgale vastava kaare pikkus võrdub kaare raadiuse ja kesknurga radiaanmõõdu korrutisega.

Asendades ringi sektori pindala valemis

$$S = \frac{s \cdot r}{2}$$

arvu s avaldisega  $rx$ , saame

$$S = \frac{r^2 x}{2}.$$

Seega

sektori pindala võrdub tema nurga radiaanmõõdu ja raadiuse ruudu poole korrutisega.

M ä r k u s. Nimetuse radiaan lühendiks on rad, kuid see nimetus jäetakse tavaliselt kirjutamata,

Nurga mõõt arv radiaanmõdus antakse sageli arvu  $\pi$  abil.

Näiteks selle asemel, et titelda "nurk, mille suurus on 1,2 radiaani või  $\frac{\pi}{2}$  radiaani, öeldakse "nurk 1,2" või nurk  $\frac{\pi}{2}$ ."

### Näited

1. Mitu radiaani on  $40^\circ$ ?

Lahendus.  $x = \frac{\pi \cdot 40}{180} = \frac{2\pi}{9} \approx 0,6981.$

Vastus.  $40^\circ$  on  $\frac{2\pi}{9}$  ehk 0,6981 radiaani.

2. Avalda võrdkõlgse kolmnurga nurga suurus radiaanides.

Lahendus.  $x = \frac{\pi \cdot 60}{180} = \frac{\pi}{3}.$

Vastus. Võrdkõlgse kolmnurga nurk on  $\frac{\pi}{3}$  radiaani.

3. Avalda 1,5 rad kraadimõdus.

Lahendus.  $n = \frac{180 \cdot 1,5}{\pi} = \frac{270}{\pi} = 270 \cdot \frac{1}{\pi} = 270 \cdot 0,3185 =$   
 $= 89,13^\circ = 89^\circ 7' 48''.$

Vastus. 1,5 rad on  $89^\circ 7' 48''.$

4. Avalda kraadimõdus järgmised radiaanmõdus antud

nurgad:

$$\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}, 2\pi.$$

Anna vastus tabeli kujul.

Lahendus.  $n = \frac{180 \cdot \frac{\pi}{4}}{\pi} = \frac{180}{4} = 45$  (kraadi), jne.

$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\pi$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	$2\pi$
$45^\circ$	$90^\circ$	$135^\circ$	$180^\circ$	$225^\circ$	$270^\circ$	$315^\circ$	$360^\circ$

Ülesanded.

181. Avalda radiaanmõõdus:

- 1)  $50^\circ$ ; 2)  $32,56^\circ$ ; 3)  $114^\circ 36'$

182. Avalda 1 radiaan

- 1) minutites; 2) sekundites.

183. Avalda kraadimõõdus

- 1) 2 rad; 2) 3 rad; 3) 1,7 rad; 4) 2,15 rad.

184. Avalda radiaanmõõdus alljärgnevad kraadimõõdus antud nurgad:

- $30^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $120^\circ$ ,  $150^\circ$ ,  $210^\circ$ ,  $240^\circ$ .

Anna vastus tabeli kujul. Radiaanmõõdud kirjuta  $\pi$  abil.

185. Millega võrdub iga alljärgneva funktsiooni väärtus:

1) $\sin 0$	2) $\tan \frac{\pi}{6}$	3) $\tan \frac{\pi}{4}$	4) $\tan \frac{\pi}{3}$
$\cos 0$	$\cot \frac{\pi}{6}$	$\cot \frac{\pi}{4}$	$\cot \frac{\pi}{3}$
$\sin \frac{\pi}{6}$	$\sin \frac{\pi}{4}$	$\sin \frac{\pi}{3}$	$\sin \frac{\pi}{2}$
$\cos \frac{\pi}{6}$	$\cos \frac{\pi}{4}$	$\cos \frac{\pi}{3}$	$\cos \frac{\pi}{2}$

186. Ülivõimsa elektrimootori ajamixatas teeb 12000 pöõret minutis.

Väljenda selle ratta nurkkiirus  $\frac{\text{rad}}{\text{sek}}$  -tes.

187. Lihvimisketta nurkkiirus on 4500 radiaani sekundis.

Mitu pöõret teeb lihvimisketas minutis?

188. Elektrigeneraatori ankru nurkkiirus on 50 radiaani sekundis. Mitu pöõret teeb ankur minutis?

§43. Mistahes suurusega nurga trigonomeetrilised  
=====

funktsioonid.  
=====

Te ravnurga trigonomeetrilised funktsioonid defineeriti

täismurkse kolmnurga abil, mistõttu nende rakendusvald piirdub täisnurksete kolmnurkade lahendamiseга. Kaldnurksete kolmnurkade lahendamine teravnurga trigonomeetriliste funktsioonide rakendamisega saab toimuda ainult nii, et need kujundid jaotatakse täisnurkseteks kolmnurkadeks.

Olles nurga mõistet laiendamad kuitahes suurte absoluutväärtustega, positiivsetele ja negatiivsetele nurkadele, tõuseb küsimus, kas on võimalik ka trigonomeetriliste funktsioonide mõistet laiendada ja vaadelda mistahes nurga trigonomeetrilisi funktsioone. See on võimalik. Selleks tuleb trigonomeetrilistele funktsioonidele anda uued definitsioonid. Seda ei saa teha täismurkse kolmnurga abil, sest täismurkse kolmnurga nurgad ei üla ta  $90^\circ$ .

Et defineerida trigonomeetrilisi funktsioone mistahes nurga puhul, selleks võib toimida järgmiselt.

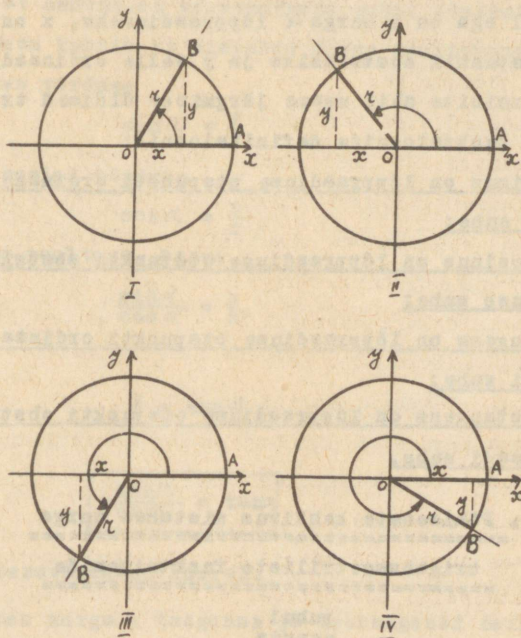
Olgu antud mistahes positiivne nurk  $\angle AOB = \alpha$ , mis ei ole täismurga kordne. Selle lõpphaara asetsemiseks on neli võimalust: ta asetseb kas esimeses, teises, kolmandas või neljandas veerandis.

Joonestame nurga  $\angle AOB$  kõigil neljal juhul, võttes alghaaraks absteisside positiivse pooltelje (joon. 55, I, II, III, IV).

Valime nurga  $\angle AOB$  lõpphaaral mingi punkti B, tähistame selle punkti koordinaate tähtedega x ja y ning lõikm OB tühaga r, kusjuures  $r > 0$ .

Lõpphaara pöörlemisel punkt B joonestab ringjoone, mille keskpunktiks on nurga tipp O ja raadius on r. Nimetame seda ringjoont trigonomeetriliseks ringjooneks. Olgu nur-

ga  $\alpha$  alghaaral asetsev raadius OA. Nüüd võime nurka vaadelda trigonomeetrilise ringjoone raadiuste OA ja OB vahelise nurgana. Nimetame nurga alghaaral asetsevat raadiust nurga **a l g r a a d i u s e k s** ja lõpphaaral asetsevat raadiust **l õ p p r a a d i u s e k s**.



Joon.55

Täisnurkse kolmnurga abil antud trigonomeetriliste funktsioonide definitsioonide kohaselt saame juhtumil I, et

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{y}{r} & \tan \alpha &= \frac{y}{x} \\ \cos \alpha &= \frac{x}{r} & \cot \alpha &= \frac{x}{y} \end{aligned}$$

Ülejäänud juhtumitel defineerime trigonomeetrilised funktsioonid nende samade võrdustega.

Joonisel 55-I näeme, et lõigud  $x$  ja  $y$  on nurga  $\alpha$  lähiskaatetiks ja vastaskaatetiks ning lõik  $r$  on hüpotenuusiks, kuid nad ei ole seda enam kolmel ülejäänud juhul. Kõigil neljal juhul aga on  $r$  nurga  $\alpha$  lõppraadiuseks,  $x$  on lõppraadiuse otspunkti abstsissiks ja  $y$  selle ordinaadiks.

Nende terminite abil saame järgmised üldised trigonomeetriliste funktsioonide definitsioonid:

nurga siinus on lõppraadiuse otspunkti ordinaadi ja raadiuse suhe;

nurga koosinus on lõppraadiuse otspunkti abstsissi ja raadiuse suhe;

nurga tangens on lõppraadiuse otspunkti ordinaadi ja abstsissi suhe;

nurga kootangens on lõppraadiuse otspunkti abstsissi ja ordinaadi suhe.

§44. Põhiseoste kehtivus mistahes nurga  
 =====  
 trigonomeetriliste funktsioonide  
 =====  
 puhul.  
 =====

Lõppegu nurk  $\alpha$  mistahes veerandis, igal juhul on ta lõppraadiuse  $r$  otspunkti koordinaatide  $x$  ja  $y$  ning raadiuse  $r$  vahel kehtiv seos  $x^2 + y^2 = r^2$ , millest

$$\frac{y^2}{r^2} + \frac{x^2}{r^2} = 1$$

ehk

$$\left(\frac{y}{r}\right)^2 + \left(\frac{x}{r}\right)^2 = 1$$

ehk mistahes suurusega nurga siinuse ja koosinuse definitsiooni põhjal:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Sellest nähtub, et teravnurkade puhul tõestatud esimene põhiseos kehtib ka mistahes nurga funktsioonide korral.

Jagades võrduse

$$\sin \alpha = \frac{y}{r}$$

mõlemad pooled võrduse :

$$\cos \alpha = \frac{x}{r}$$

Vastavate pooltega, saame

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{y}{x},$$

Et

$$\frac{y}{x} = \tan \alpha,$$

siis

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha$$

nagu on teravnurgagi korral.

Mistahes nurga  $\alpha$  tangensi ja kootangensi definitsiooni järgi

$$\tan \alpha = \frac{y}{x},$$

$$\cot \alpha = \frac{x}{y}.$$

Korrutades viimaste võrduste vastavad pooled, saame nagu teravnurgagi korral, et

$$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$$

Seega kõik kolm põhiseost jäävad kehtima mistahes nurga puhul, välja arvatud see juhtum, mil nurk  $\alpha$  on täisnurga kordne.

Ilmselt jäävad siis kehtima mistahes nurga puhul ka kõik need seosed, mis järelduvad põhiseostest (vt. tabel §39).

### Ülesanded.

189. Arvuta peast

$$1) \sin^2 500^\circ + \cos^2 500^\circ$$

$$2) \sin^2 400^\circ + \sin 300^\circ + \cos^2 400^\circ$$

$$3) \tan 700^\circ \cdot \cot 700^\circ$$

$$4) \tan 850^\circ \cdot \cot 850^\circ - \cos 60^\circ.$$

$$5) \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 1$$

$$6) 2 - \sin^2 210^\circ - \cos^2 210^\circ$$

Nurga kootangens on tangensi pöördväärtus:

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}.$$

Nurga siinuse pöördväärtust nimetatakse koseekantsiks ja tähistatakse sümboliga  $\operatorname{cosec} \alpha$ , seega

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}.$$

Nurga koosinuse pöördväärtust nimetatakse seeekantsiks ja tähistatakse sümboliga  $\operatorname{sec} \alpha$ , nii et

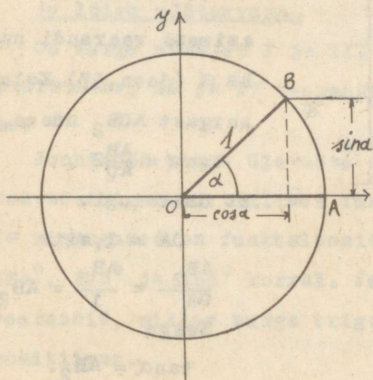
$$\operatorname{sec} \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}.$$

Õppides tundma nurga siinust, koosinust ja tangensit, ei ole vajadust eraldi uurida nende pöördväärtusi, see pärast me edaspidi sellest loobume.

### §45. Trigonomeetriliste funktsioonide väärtused

lõikude mõõtarvudena.

Ringi, mille raadius on võrdne ühe pikkustühikuga, nimetatakse ühikringiks. Jooniseilt 56 näeme, et



Joonis 56

ühikringis nurga siinus võrdub lõppraadiuse otspunkti ordinaatiga mõõtarvuga ja koosinus võrdub sama punkti abstsissi mõõtarvuga.

Sellest ilmneb ka, et sõltuvalt sellest, missuguse märgiga on nurga lõppraadiuse otspunkti abstsiss ja or-

dinaat, on nurga vastav trigonomeetriline funktsioon kas positiivne või negatiivne (kui ta nullist erineb). Nii on nurga siinus I ja II veerandis positiivne, III ja IV veerandis negatiivne; koosinus on positiivne I ja IV veerandis, II ja III veerandis aga negatiivne;

Et saada lõiku, mille mõõtarv võrdub nurga tangensiga, selleks kasutame tangensitelge, s.o. ühikringi puutujat algradiuse otspunktist A (joon.57). Tangensitelje positiivseks suunaks loeme y-telje positiivse suuna.

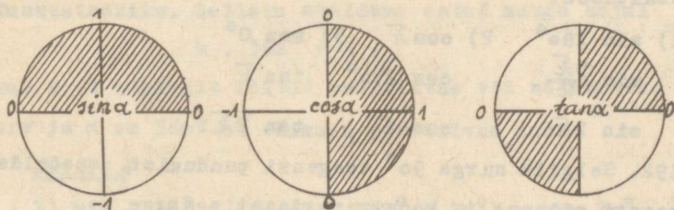


tiivne.

Kui nurk lõpeks kolmandas või neljandas veerandis, siis jõuaksime samasuguse arutlusega tulemusele, et ühikringis nurga tangens võrdub nurga haarade vahelise tangenstelje lõigu või alghaara ja lõpphaara üle keskpunkti võetud pikenduse vahelise tangenstelje lõigu mõõtarvuga.

On kerge näha, et I ja III veerandi nurga tangens on positiivne, II ja IV veerandi nurga tangens on negatiivne.

Joonis 58 annab ülevaate sellest, missugust märki omavad trigonomeetrilised funktsioonid igas veerandis ja missugused on funktsioonide väärtused nurkade  $0^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $270^\circ$  ja  $360^\circ$  korral. Joonisel on viirutatud need veerandid, milles nurga trigonomeetiline funktsioon on positiivne.



Joon. 58

Tangenstelje lõigu ei ole olemas, kui nurk on  $90^\circ$  või  $270^\circ$ , sest neil juhtudel nurga lõpphaara pikendus ei lõika puutajat, vaid on sellega paralleelne.

Kui nurkadel  $90^\circ$  ja  $270^\circ$  tangens puudub, võime siiski jooniselt 57 näha, missugune on nurga tangens siis,

kui nurk veidi erineb  $90^\circ$ -st ja kui ta veidi erineb  $270^\circ$ -st.

Kui nurk on veidi väiksem  $90^\circ$ -st, siis nurga tangens on väga suur positiivne arv; kui nurk on veidi suurem  $90^\circ$ -st, siis nurga tangens on väga suure absoluutväärtusega negatiivne arv.

Milline on nurga tangens, kui nurk on veidi väiksem (suurem)  $270^\circ$ -st?

### Ü l e s a n d e d.

190. Ehita sirkli ja joonlaua abil allpool antud nurk  $\alpha$ , ning seejärel lõikudena  $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$ ,  $\tan \alpha$ . Leia saadud jooniselt nende funktsioonide väärtused.

1)  $\alpha = 135^\circ$ ; 2)  $\alpha = 210^\circ$ ; 3)  $\alpha = 285^\circ$ .

191. Leia allpool antud trigonomeetriliste funktsioonide väärtused.

1)  $\sin 180^\circ$  2)  $\cos \pi$  3)  $\tan 0^\circ$

$\sin \frac{3\pi}{2}$   $\cos 270^\circ$   $\tan \pi$

$\sin 2\pi$   $\cos 2\pi$   $\tan 2\pi$ .

192. Selgita nurga  $90^\circ$  tangensi puudumist, vaadeldes tangensit siinuse ja koosinuse jagatisena.

193. Selgita nurga  $0^\circ$  kootangensi puudumist, vaadeldes kootangensit tangensit pöördväärtusena.

### §46. Taandamisvalemid.

=====

Üldtest trigonomeetriliste funktsioonide definitsioonidest järeldub, et nurga trigonomeetriliste funktsiooni-

de väärtused ei sõltu raadiuse pikkusest ja on määratud selle nurga lõpphaara asendiga, sõltumata sellest, mitme täispöörde järel või mis suunas pöörlemisel ta sellesse asendisse jõudis. Kui nurk kasvab või kahaneb täispöörde või täispöörde kordse võrra, siis lõpphaar tuleb endisse asendisse. Seega

trigonomeetrilise funktsiooni väärtus ei muutu nurga kasvamisel või kahanemisel täispöörde või selle kordse võrra.

Sümbolites:

$$\sin(\alpha + k \cdot 360^\circ) = \sin \alpha \text{ ehk } \sin(\alpha + 2\pi k) = \sin \alpha;$$

$$\cos(\alpha + k \cdot 360^\circ) = \cos \alpha \text{ ehk } \cos(\alpha + 2\pi k) = \cos \alpha;$$

$$\tan(\alpha + k \cdot 360^\circ) = \tan \alpha \text{ ehk } \tan(\alpha + 2\pi k) = \tan \alpha;$$

kus  $k$  on mistahes täisarv.

Need valemid võimaldavad mistahes nurga trigonomeetrilise funktsiooni t a a n d a d a  $360^\circ$ -st väiksema nurga funktsiooniks. Selleks avaldame antud nurga kujul

$$k \cdot 360^\circ + \alpha,$$

kus  $k$  on sobivalt leitud positiivne või negatiivne täisarv ja  $\alpha$  on  $360^\circ$ -st väiksem positiivne nurk.

Näited.

$$1) \sin 2530^\circ = \sin(7 \cdot 360^\circ + 10^\circ) = \sin 10^\circ$$

$$2) \tan(-1095^\circ) = \tan(-4 \cdot 360^\circ + 345^\circ) = \tan 345^\circ$$

Ülesanded.

194. Avalda alljärgnevad funktsioonid  $360^\circ$ -st väiksema nurga funktsioonidena.

$$1) \sin 395^\circ; 2) \cos 695^\circ; 3) \tan 1956^\circ; 4) \sin(-2785^\circ);$$

$$5) \cos(-73^\circ).$$

195. Avalda  $\sin 90^\circ 36^\circ$ -st väiksema nurga koosinuse kaudu.

196. Avalda  $\cos 100^\circ 36^\circ$ -st väiksema nurga siinuse kaudu.

197. Avalda  $\tan 40^\circ 36^\circ$ -st väiksema nurga siinuse kaudu.

198. Avalda  $\tan 60^\circ 36^\circ$ -st väiksema nurga koosinuse kaudu.

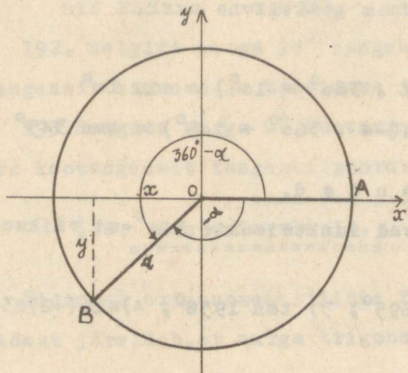
199. Lihtsusta avaldised:

$$1) \frac{1 - \sin^2 200^\circ}{1 - \cos^2 200^\circ}; \quad 2) \frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta};$$

$$3) \sin 210^\circ \cot 210^\circ; \quad 4) \cos 370^\circ \cdot \tan 370^\circ.$$

Võimalus mistahes nurga funktsiooni taandada  $360^\circ$ -st väiksema nurga funktsiooniks vabastab meid  $360^\circ$ -st suuremate nurkade funktsioonide uurimisest.

Vaadeldes eraldi negatiivse nurga funktsioon e (joon. 59), saame:



$$\sin(-\alpha) = \frac{y}{r},$$

$$\cos(-\alpha) = \frac{x}{r},$$

$$\tan(-\alpha) = \frac{y}{x},$$

Needsamad jagatised aga väljendavad tihltlasi positiivse nurga ( $360^\circ - \alpha$ ) funktsioone. Seega

Joon. 59

$$\sin(-\alpha) = \sin(360^\circ - \alpha) \text{ ehk } \sin(-\alpha) = \sin(2\pi - \alpha);$$

$$\cos(-\alpha) = \cos(360^\circ - \alpha) \text{ ehk } \cos(-\alpha) = \cos(2\pi - \alpha);$$

$$\tan(-\alpha) = \tan(360^\circ - \alpha) \text{ ehk } \tan(-\alpha) = \tan(2\pi - \alpha);$$

### Näide.

$$\sin(-310^\circ) = \sin(360^\circ - 310^\circ) = \sin 50^\circ$$

Eelpool nägime, et kõikide negatiivsete nurkade ja kõikide  $360^\circ$ -st suuremate nurkade funktsioone saab avaldada  $360^\circ$ -st väiksemate positiivsete nurkade funktsioonide kaudu, ehk nagu öeldakse, saab taandada  $360^\circ$ -st väiksemate positiivsete nurkade funktsioonideks. Nüüd näitame, et viimaseid saab taandada positiivsete teravnurkade funktsioonideks.

Paneme tähele, et kui  $\alpha$  on teravnurk, siis teise veerandi nurga võib kirjutada kujul  $180^\circ - \alpha$ , kolmanda veerandi nurga võib kirjutada kujul  $180^\circ + \alpha$  ja nurga, mis lõpeb neljandas veerandis, kujul  $360^\circ - \alpha$ .

### Näiteks

$$\text{teise veerandi nurk } 160^\circ = 180^\circ - 20^\circ;$$

$$\text{kolmanda veerandi nurk } 240^\circ = 180^\circ + 60^\circ;$$

$$\text{neljanda veerandi nurk } 345^\circ = 360^\circ - 15^\circ.$$

Seetõttu esimesse veerandisse mitte kuuluva nurga funktsiooni taandamiseks teravnurga funktsioonile piisab, kui leiame taandamisvalemid nurkade  $180^\circ - \alpha$ ,  $180^\circ + \alpha$  ja  $360^\circ - \alpha$  funktsioonide jaoks.

Nurga  $180^\circ - \alpha$  funktsioonide taandamisvalemite leidmiseks ehitame ühikringis teravnurga  $\alpha$  ja nurga  $180^\circ - \alpha$  (joon. 60). Jooniselt näeme, et

$$\sin \alpha = \frac{y_1}{r} = \frac{y_1}{1} = y_1 \text{ ja } \sin(180^\circ - \alpha) = \frac{y_2}{1} = y_2,$$

$$\cos \alpha = \frac{x_1}{r} = \frac{x_1}{1} = x_1 \text{ ja } \cos(180^\circ - \alpha) = \frac{x_2}{1} = x_2.$$

Täisnurksetes kolmnurkades  $B_1OB$  ja  $C_1OC$  on

$$OB = OC,$$

$$\angle B_1OB = \angle C_1OC.$$

Seega

$$\triangle B_1OB = \triangle C_1OC,$$

millest järeldub, et

$$y_2 = y_1$$

ja  $x_2 = -x_1$  ( $x_1$  ja  $x_2$  on vastandsuunalised).

Nüüd saame, et

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha;$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha;$$

$$\tan(180^\circ - \alpha) = \frac{\sin(180^\circ - \alpha)}{\cos(180^\circ - \alpha)} = \frac{\sin \alpha}{-\cos \alpha} = -\tan \alpha.$$

Nüüd teise veerandi nurkade trigonomeetriliste funktsioonide taandamisel rakendame valemid

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha;$$

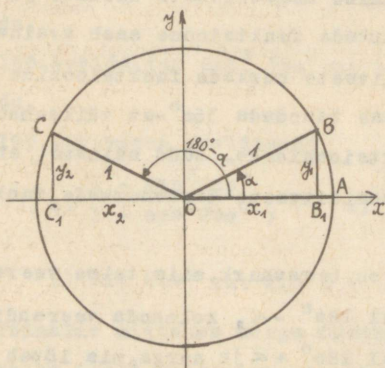
$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha;$$

$$\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha.$$

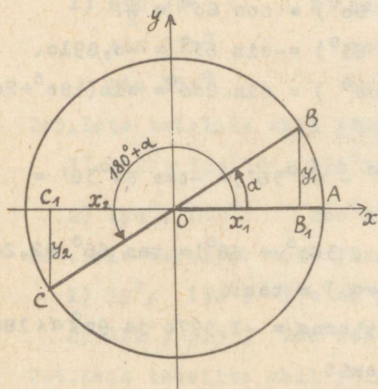
Nurga  $180^\circ + \alpha$  funktsioonide taandamisvalemite saamiseks ehitame ühikringis nurgad  $\alpha$  ja  $180^\circ + \alpha$  (joon. 61).

Arutledes samal viisil nagu eelmisel korral, saame:

$$\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha;$$

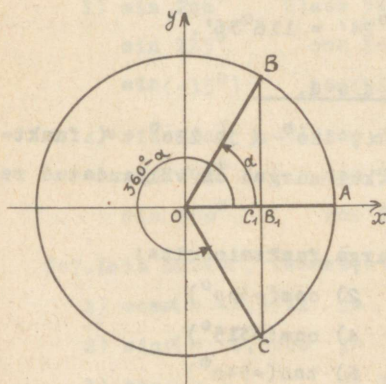


Joon. 60



Joon. 61

tähelepanud asjaolu, et nurga  $(-\alpha)$  funktsioonid on samasid nurga  $360^\circ - \alpha$  funktsioonidega, saame



Joon. 62

nimeliseks funktsiooniks; märk sõltub sellest, mis veerandis nurk lõpeb.

$$\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos\alpha;$$

$$\tan(180^\circ + \alpha) = \tan\alpha;$$

Toimides analoogiliselt kahe eelmise juhtumiga

(Joon. 62), saame neljanda

veerandi nurga  $360^\circ - \alpha$

funktsioonide jaoks järg-

mised taandamisvalemid:

$$\sin(360^\circ - \alpha) = -\sin\alpha;$$

$$\cos(360^\circ - \alpha) = \cos\alpha;$$

$$\tan(360^\circ - \alpha) = -\tan\alpha;$$

Arvestades viimaseid

taandamisvalemid ja varem

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha;$$

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha;$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha;$$

Taandamisvalemid on

kerge meeles pidada, pan-

nes tähele, et

nurga  $180^\circ - \alpha$ ,

$180^\circ + \alpha$  kui ka

$360^\circ - \alpha$  funktsioon

taandub nurga  $\alpha$  sama-

Näited.

1.  $\cos 300^\circ = \cos(360^\circ - 60^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ .

2.  $\sin 243^\circ = \sin(180^\circ + 63^\circ) = -\sin 63^\circ = -0,8910$ .

3.  $\sin 560^\circ = \sin(360^\circ + 200^\circ) = \sin 200^\circ = \sin(180^\circ + 20^\circ) = -\sin 20^\circ = -0,3420$ .

4.  $\tan 275^\circ 24' = \tan(360^\circ - 84^\circ 36') = -\tan 84^\circ 36' = -10,58$ .

5.  $\tan (+2094^\circ) = \tan(-6 \cdot 360^\circ + 66^\circ) = \tan 66^\circ = 2,2460$ .

6.  $\tan(\sqrt{x} + \alpha) = \tan(\sqrt{x} + \alpha) = \tan \alpha$ .

7. Leia nurk  $\alpha$ , teades, et  $\tan \alpha = -1,9970$  ja  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ .

Lahendus. Kasutades valemit

$$\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha,$$

saame

$$\tan(180^\circ - \alpha) = 1,9970.$$

Tabelist leiame

$$180^\circ - \alpha = 63^\circ 24',$$

$$\alpha = 180^\circ - 63^\circ 24' = 116^\circ 36'.$$

Ülesanded.

20. Kirjuta nurkade  $90^\circ - \alpha$ ,  $180^\circ - \alpha$  ja  $180^\circ + \alpha$  funktsioonide taandamisvalemid, kui nurgad on väljendatud radiaanides.

21. Avalda positiivse nurga funktsioonina:

1)  $\sin(-300^\circ)$

2)  $\cos(-300^\circ)$

3)  $\sin(-330^\circ)$

4)  $\cos(-315^\circ)$

5)  $\tan(-315^\circ)$

6)  $\tan(-340^\circ)$

202. Arvuta peast

1) $\sin 120^\circ$	2) $\cos 315^\circ$	3) $\tan 135^\circ$
$\sin 210^\circ$	$\cos 225^\circ$	$\tan 225^\circ$
$\sin 315^\circ$	$\cos 150^\circ$	$\tan 330^\circ$

203. Leia tabelite abil järgmiste nurkade siinused:

1)  $112^\circ$ ;  $164^\circ 36'$ ;  $178^\circ 18'$ ;  $115^\circ 30'$ .

2)  $196^\circ$ ;  $212^\circ$ ;  $200^\circ 24'$ ;  $308^\circ 12'$ .

204. Leia tabelite abil järgmiste nurkade koosinused:

1)  $99^\circ$ ;  $152^\circ$ ;  $170^\circ 42'$ ;  $100^\circ 50'$ .

2)  $112^\circ$ ;  $315^\circ$ ;  $200^\circ 24'$ ;  $308^\circ 12'$ .

205. Leia tabelite abil järgmiste nurkade tangensid:

1)  $114^\circ$ ;  $152^\circ$ ;  $160^\circ 06'$ ;  $259^\circ 18'$ ;

2)  $196^\circ$ ;  $293^\circ$ ;  $272^\circ 18'$ ;  $342^\circ 40'$ .

206. Taanda järgmised funktsioonid positiivsete teravnurkade funktsioonideks:

1) $\sin 200^\circ$	2) $\cos 310^\circ$	3) $\tan 192^\circ$
$\sin 115^\circ$	$\cos 164^\circ$	$\tan(-200^\circ)$
$\sin(-15^\circ)$	$\cos(-60^\circ)$	$\tan(-282^\circ)$

4) $\sin 460^\circ$	5) $\cos 540^\circ$	6) $\tan 499^\circ$
$\sin 693^\circ$	$\cos 982^\circ$	$\tan 654^\circ$
$\sin 850^\circ$	$\cos 754^\circ$	$\tan 815^\circ$

207. Leia nurk  $\alpha$ , teades, et

1)  $\cos \alpha = -0,9311$  ja  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ ;

2)  $\sin \alpha = 0,5000$  ja  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ ;

3)  $\tan \alpha = 1$  ja  $180^\circ < \alpha < 270^\circ$ .

208. Taanda järgmised funktsioonid nurga  $\alpha$  funktsioo-

nideks:

$$\begin{array}{ll} 1) \sin(\pi + \alpha) & 2) \tan(\pi - \alpha) \\ \sin(2\pi - \alpha) & \tan(2\pi - \alpha) \\ \sin(3\pi + \alpha) & \tan(2\pi + \alpha) \end{array}$$

209. Kontrolli järgmiste võrduste õigsus:

$$1) \frac{\sin(180^\circ + \alpha)}{\cos(360^\circ + \alpha)} + \frac{\sin(360^\circ - \alpha)}{\cos(180^\circ - \alpha)} = 0;$$

$$2) \frac{\sin(540^\circ - x) \cos(x - 180^\circ)}{\tan(900^\circ - x)} = \cos^2 x;$$

$$3) \sin(\alpha - 30^\circ) + \sin(\alpha + 150^\circ) = 0;$$

$$4) \tan(45^\circ + \alpha) = \cot(45^\circ - \alpha);$$

$$5) \cos(45^\circ - \alpha) = \sin(45^\circ + \alpha);$$

$$6) \cos(45^\circ + \alpha) = \sin(45^\circ - \alpha).$$

210. Lihtsusta avaldised:

$$1) \sin 49^\circ + \sin(-49^\circ) + \cos 25^\circ - \cos(-25^\circ);$$

$$2) \cos 33^\circ - \cos 17^\circ - \cos(-33^\circ) - \sin 40^\circ + \\ + \cos(-17^\circ) - \sin(-40^\circ);$$

$$3) \sin(\pi - \alpha) - \cos\left(-\frac{\pi}{2} - \alpha\right);$$

$$4) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \cos(\pi - \alpha) - \tan(\alpha - \pi) - \\ - \tan(2\pi - \alpha).$$

§47. Trigonomeetriliste funktsioonide  
=====

graafikud.

=====

Kujutame graafiliselt funktsiooni

$$y = \sin x$$

vahemikus

$$0 \leq x \leq 3\pi$$

Joonestame ühikringis nurgad, näiteks, iga  $\frac{\pi}{8}$  rad ehk iga  $22\frac{1}{2}^\circ$  tagant ning lõigud, mis kujutavad nende nurkade siinuste väärtusi, siinjuures võtame telgedel ühikuks ühikringi raadiuse. Abstsisssteljel ehk nurgateljel on siis nurga  $360^\circ$  ehk  $2\pi$  radiaani kujutuseks lõik pikkusega 6,28 ja nurga  $\frac{\pi}{8}$  kujutuseks lõik pikkusega ligikaudu 0,4 ühikut (joon.63). Joonisel on nurkade lõppraadiuste otspunktid ja neile nurkadele vastavate graafiku punktid märgitud numbritega 1, 2, 3, ...

Nurga siinuse graafikut võime jätkata nii positiivsete kui ka negatiivsete nurkade suunas kui tahes kaugemale, saades lõpmatu lainelise kõverjoone, mida nimetatakse **s i n u s o i d i k s**.

**Funktsiooni**

$$y = \cos x$$

graafiku võib ehitada samal viisil, nagu siinuse graafiku, võttes nüüd graafiku punkti ehitamisel ordinaadiks lõigu, mille mõõtjarv on võrdne vastava nurga koosinusega.

Nurga koosinuse graafiku võib ehitada ka järjmiselt. Arvestades valemuid

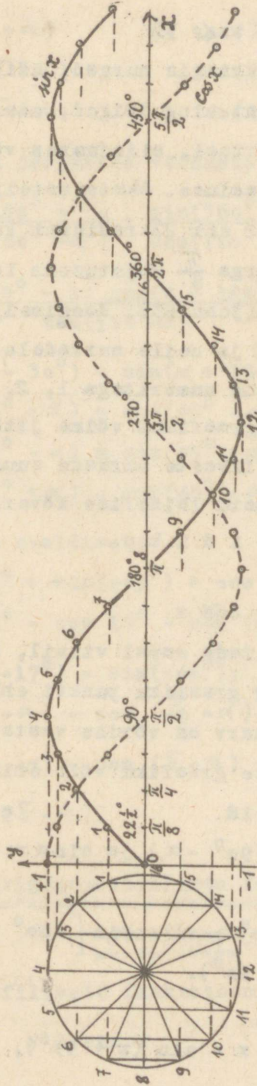
$$\cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha) \text{ ja } \sin \alpha = \sin(180^\circ - \alpha)$$

saame:

$$\begin{aligned} \cos x &= \sin(90^\circ - x) = \sin[180^\circ - (90^\circ - x)] = \\ &= \sin(x + 90^\circ). \end{aligned}$$

Seega

$$\cos x = \sin(x + 90^\circ),$$



Jeon. 63

millest nähtub, et  $\cos x$  graafiku saamiseks tuleb teljestik, milles on ehitatud  $\sin x$  graafik, nihutada  $x$ -telje suunas nõnda, et teljestiku algus läheb punkti  $x = 90^\circ$ , ehk, teisiti öeldes,  $\cos x$  graafiku saame, kui  $\sin x$  graafikut nihutame  $x$ -telje negatiivses suunas lõigu võrra, mis vastab  $90^\circ$ -le. Joonisel 63 on koosinuse graafik joonistatud punktiirjoonega.

### Ülesanded.

211. Otsusta joonise 63 abil:

1) Kuidas muutub nurga siinus, kui nurk kasvab  $0^\circ$ -st  $90^\circ$ -ni;  $90^\circ$ -st  $270^\circ$ -ni;  $270^\circ$ -st  $450^\circ$ -ni;  $450^\circ$ -st  $540^\circ$ -ni?

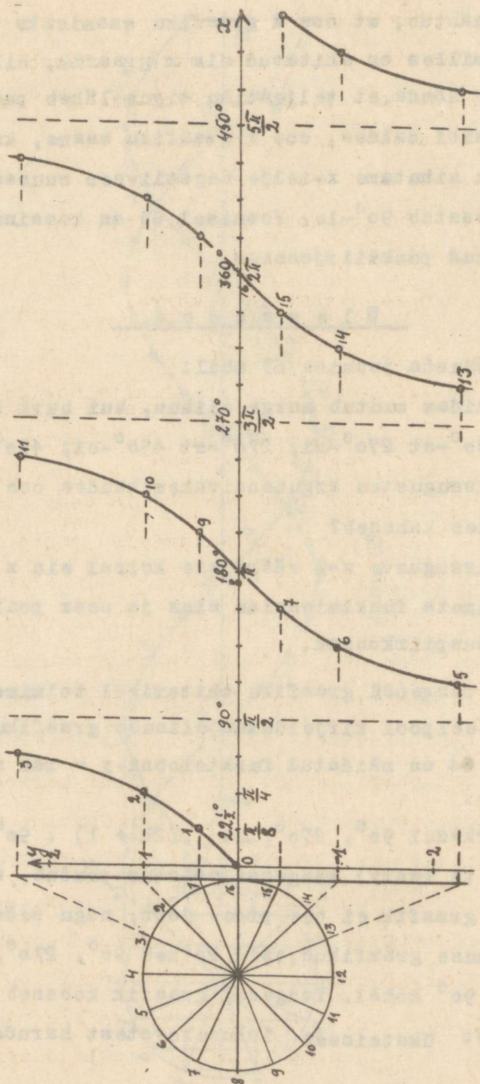
2) Missugustes argumentivahemikkudes  $\cos x$  kasvab, missugustes kahaneb?

3) Missuguste  $x$ -i väärtuste korral  $\sin x = \cos x$ ?

4) Nimeta funktsioonide  $\sin x$  ja  $\cos x$  positiivsus- ja negatiivsuspiirkonnad.

Nurga tangensi graafiku ehitamisel toimime samal viisil nagu eelpool kirjeldatud siinuse graafiku ehitamisel. Joonisel 64 on näidatud funktsiooni  $y = \tan x$  graafiku ehitamine.

Et nurkadel  $90^\circ$ ,  $270^\circ$ , ...,  $(2k + 1) \cdot 90^\circ$  (kus  $k$  on mistahes täisarv) tangensi väärtus puudub, siis nurga tangensi graafik ei ole pidev joon, nagu seda on siinuse ja koosinuse graafikud, vaid katkeb  $90^\circ$ ,  $270^\circ$ , ...,  $(2k + 1) 90^\circ$  kohal. Tangensi graafik koosneb seetõttu üksikutest üksksteisest lahusolevatest harudest.



June, 64

Ülesanded.

212. Kuidas muutub  $\tan x$ , kui nurk  $x$  kasvab

$0^\circ$ -st  $90^\circ$ -ni,  $90^\circ$ -st  $270^\circ$ -ni,  $270^\circ$ -st  $450^\circ$ -ni?

213. Kas leidub niisugune vahemik, milles nurga kasvamisel tangens kahaneb?

214. Nimeta funktsiooni  $\tan x$  positiivsus- ja negatiivsuspiirkonnad.

215. Missuguste  $x$  väärtuste korral

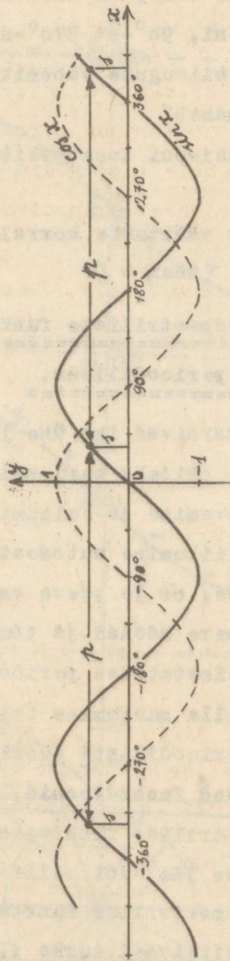
$$\tan x = 0?$$

§48. Trigonomeetriliste funktsioonide

=====  
perioodilisus.  
=====

On nähtusi, mis korduvad iga ühe ja sama pikkusega ajavahemiku tagant, näiteks aurumasina töötamisel auru jaotuskarbi klapi avamine ja sulgumine, kella pendli võnkumine, tšukuri liikumine automootoris, planeedi tiirlemine ümber päikese, öö ja päeva vaheldumine, aastaaegade vaheldumine, mere mõõnad ja tõusud, pulsilöögid jne. Sääraseid nähtusi nimetatakse perioodilisteks.

On funktsioone, mille muutumine toimub perioodiliselt. Kõige lihtsamate perioodiliste funktsioonide näideteks on trigonomeetrilised funktsioonid. Me nägime eespool, et ühegi trigonomeetrilise funktsiooni väärtus ei muutu, kui nurka muudetakse  $360^\circ$  või selle kordse võrra. Otsime nüüd iga trigonomeetrilise funktsiooni jaoks niisugust väikseimat positiivset nurka  $p$ , mille puhul nurga  $x$  iga väärtuse korral nurga  $x + p$  funktsioonon võrdne



June. 65

TRU ROANOKOLOGA

nurga  $x$  samanimelise funktsiooniga (joon.65). Niisugust nurka  $p$  nimetatakse uuritava funktsiooni perioodiks.

Teeme esmalt kindlaks, kui suur on nurga siinuse periood ehk teisiti öeldes, kui suur on väikseim positiivne nurk  $p$ , et iga  $x$  väärtuse korral oleks

$$\sin(x + p) = \sin x.$$

Tõestame, et siinuse perioodiks ei või olla  $360^\circ$ -st väiksem nurk.

Tõestame vastuväiteliselt. Oletame, et leidub niisugune nurk  $\beta$ , et

$$0 < \beta < 360^\circ,$$

mille puhul igauguse  $x$  väärtuse korral

$$\sin(x + \beta) = \sin x.$$

See võrdus peaks nüüd kehtima igauguse  $x$  väärtuse korral, näiteks ka sel korral, kui

$$x = 90^\circ.$$

Sel korral oletatav võrdus võtab kuju

$$\sin(90^\circ + \beta) = \sin 90^\circ$$

ehk

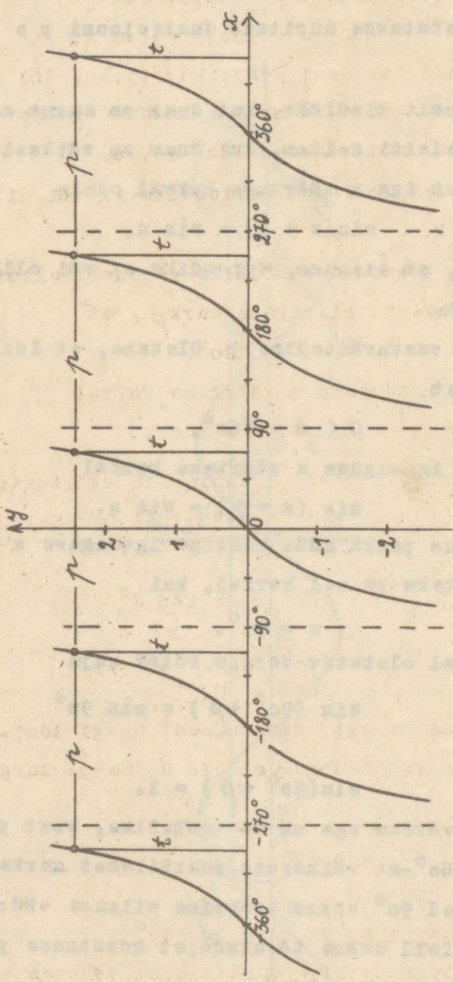
$$\sin(90^\circ + \beta) = 1.$$

Viimane võrdus aga on vastuoluline, sest pole olemas niisugust  $360^\circ$ -st väiksemat positiivset nurka  $\beta$ , mille suurendamisel  $90^\circ$  võrra saaksime siinuse väärtuseks 1.

Samal viisil saame tõestada, et koosinuse periood ei saa olla väiksem kui  $360^\circ$ .

Seega

nurga siinuse ja koosinuse periood on  $360^\circ$ .



Jeen. 66

Taandamisvalemiteest on teada, et

$$\tan(x + 180^\circ) = \tan x.$$

Vaaldeldes tangensi graafikut (joon. 66) näeme, et tõe poolest tangensi väärtus  $t$  kordub iga kord siis, kui nurk suureneb või väheneb  $180^\circ$  võrra.

Tõestame, et tangensi perioodiks ei või olla  $180^\circ$ -st väiksem nurk.

Kasutame tõestamiseks jälle vastuvõtelist viisi. Oletame, et on olemas niisugune nurk  $\beta$ , et

$$0^\circ < \beta < 180^\circ,$$

mille puhul igasuguse  $x$  väärtuse korral

$$\tan(x + \beta) = \tan x.$$

Et siin  $x$  võib omada igasuguseid väärtusi, mille puhul tangens on olemas, siis ka väärtust  $0^\circ$ . Sel korral võrdus saab kuju

$$\tan(0^\circ + \beta) = \tan 0^\circ$$

ehk

$$\tan \beta = 0.$$

See võrdus on aga võimatu, sest ühegi  $180^\circ$ -st väiksema positiivse nurga tangens ei ole 0. Seega nurga tangensi korral

$$p = 180^\circ.$$

Seega

nurga tangensi periood on  $180^\circ$ .

Et trigonomeetrilise funktsiooni väärtus ei muutu, kui nurka suurendatakse või vähendatakse perioodi võrra, siis

$$\sin(\alpha + k \cdot 360^\circ) = \sin \alpha$$

$$\cos(\alpha + k \cdot 360^\circ) = \cos \alpha$$

$$\tan(\alpha + k \cdot 180^\circ) = \tan \alpha,$$

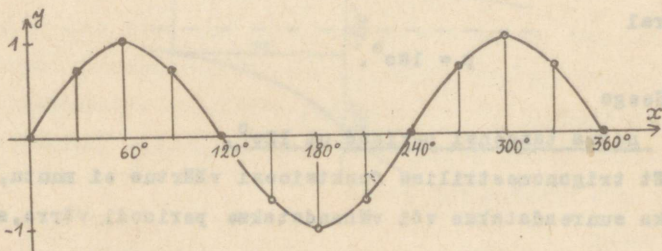
kus  $k$  on mistahes täisarv.

**Näide.** Kujuta funktsioon  $y = \sin 1,5x$  graafiliselt ja selgita saadud joonise abil funktsiooni perioodilisust. Kui pikk on periood?

**Laendus.** Koostame  $x$  ja  $y$  vastavate väärtuste tabeli võttes  $x$  väärtused vahemikust  $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$  iga  $30^\circ$  ta-  
gant.

$x$	$0^\circ$	$30^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$120^\circ$	$150^\circ$	$180^\circ$	$210^\circ$	$240^\circ$	$270^\circ$	$300^\circ$	$330^\circ$	$360^\circ$
$1,5x$	$0^\circ$	$45^\circ$	$90^\circ$	$135^\circ$	$180^\circ$	$225^\circ$	$270^\circ$	$315^\circ$	$360^\circ$	$405^\circ$	$450^\circ$	$495^\circ$	$540^\circ$
$y$	$0$	$0,5$	$1$	$0,5$	$0$	$-0,5$	$-1$	$-0,5$	$0$	$0,5$	$1$	$0,5$	$0$

Valime ühikuka telgedel lõigu pikkusega 2 cm. Kujuta-  
gu ühiklõik nurgateljel nurka 1 radiaan, s.o. ligikaudu  
 $60^\circ$ . (joon.67).

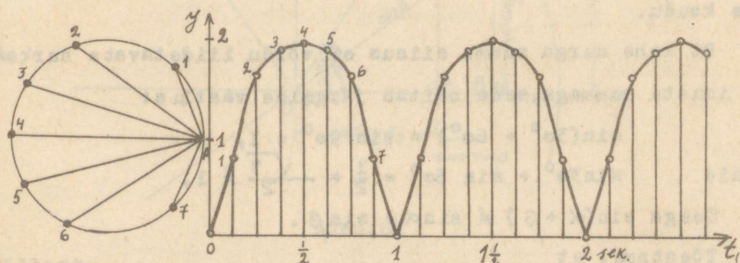


Joon.67

Jooniselt näeme, et antud funktsioon on perioodiline, perioodi pikkus on  $240^\circ$  ehk  $\frac{4\pi}{3}$  radiaani.

Ülesanded.

216. Joonisel 68 on kujutatud kõõlu pikkuse muutumine,



Joon. 68

kui kõõlu üks otspunkt A seisab paigal ja teine otspunkt liigub ringjoonel, tehes ühe tiiru 1 sekundi vältel. Kas kõõlu pikkuse muutumine on perioodiline? Kui on, siis kui pikk on periood?

217. Kujuta allpool antud funktsioonid graafiliselt ja selgita saadud joonise abil funktsiooni perioodilisust. Kui pikk on periood?

1)  $y = \sin 2x$ ;      2)  $y = \sin 3x$

3)  $y = \sin \frac{x}{2}$ ;      4)  $y = \sin \frac{x}{3}$

218. Kujuta funktsioon graafiliselt ja selgita saadud joonise abil, kas funktsioon on perioodiline. Kui on, siis kui pikk on periood?

1)  $y = 1 + \sin x$ ;      2)  $y = \sin x + \cos x$ .

3)  $y = 2 \sin x$ ;      4)  $y = 3 \cos x$ .

§49. Kahe nurga summa ja vahe siinus, koosinus  
 =====  
 ja tangens.  
 =====

Kui tahame näiteks  $30^\circ$ -se ja  $45^\circ$ -se nurkade funktsioonide järgi arvutada  $75^\circ$ -se nurga siinust, siis peame oskama avaldada  $\sin(30^\circ + 45^\circ)$  liidetavate nurkade funktsiooni-  
 de kaudu.

Et kahe nurga summa siinus ei võrdu liidetavate nurkade siinuste summaga, seda näitab järgmine vaatlus:

$$\sin(30^\circ + 60^\circ) = \sin 90^\circ = 1,$$

$$\text{kuid } \sin 30^\circ + \sin 60^\circ = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \neq 1.$$

Seega  $\sin(\alpha + \beta) \neq \sin \alpha + \sin \beta$ .

Tõestame, et

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta.$$

Joonisel 69 on nurga  $\alpha$  alghaaraks OB ja lõpphaaraks OD; viimane on tihlasi nurga  $\beta$  alghaaraks. Nurga  $\beta$  lõpphaaraks on OE.

Nurga  $\beta$  lõppraadiuse otspunktist E tõmbame lõigu ED risti sirgega OD ja EA risti teljega OB.

Punktist D tõmbame DC risti EA-ga ja DB risti OB-ga. Siis on teljestikus xy.

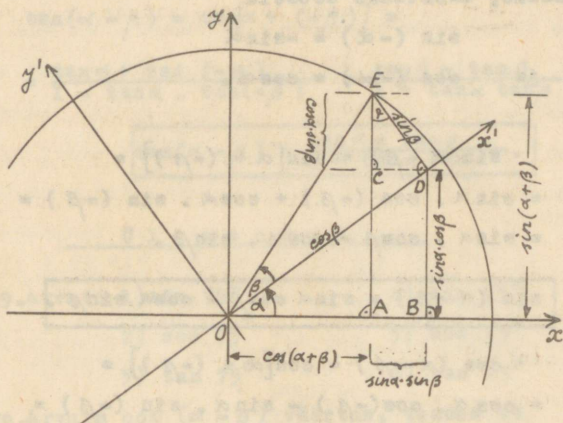
$$\sin(\alpha + \beta) = AE = EC + CA = EC + DB;$$

teljestikus  $x'y'$  ( $x'$ -teljeks on võetud nurga  $\beta$  alghaar OD) on

$$ED = \sin \beta,$$

$$OD = \cos \beta;$$

kolmnurgas ECD on  $\angle CED = \alpha$  ja  $\frac{EC}{ED} = \cos \alpha$  ehk  $\frac{EC}{\sin \beta} = \cos \alpha$ ,



Joon.69

millest

$$EC = \cos \alpha \cdot \sin \beta ;$$

samuti kolmnurgas OBD on

$$DB = \sin \alpha \cos \beta .$$

Seega tõesti

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta .$$

Joonise 69 abil saame tuletada ka valemi  $\cos(\alpha + \beta)$  avaldamiseks nurkade  $\alpha$  ja  $\beta$  funktsioonide kaudu.

$$\cos(\alpha + \beta) = OA = OB - AB = OB - CD .$$

Kolmnurgas ODB on

$$OB = \cos \alpha \cdot \cos \beta ;$$

kolmnurgas CED on

$$CD = \sin \alpha \cdot \sin \beta .$$

Seega

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta .$$

Valemid kahe nurga vahe siinuse ja koosinuse teisenda-

mise ks saame, kasutades seoseid

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$

$$\text{ja } \cos(-\alpha) = \cos\alpha.$$

Saame:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha - \beta) &= \sin[\alpha + (-\beta)] = \\ &= \sin\alpha \cdot \cos(-\beta) + \cos\alpha \cdot \sin(-\beta) = \\ &= \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta. \end{aligned}$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta.$$

$$\begin{aligned} \cos(\alpha - \beta) &= \cos[\alpha + (-\beta)] = \\ &= \cos\alpha \cdot \cos(-\beta) - \sin\alpha \cdot \sin(-\beta) = \\ &= \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta. \end{aligned}$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$$

Selpool tuletatud valemite abil saame ka valemid  $\tan(\alpha + \beta)$  ja  $\tan(\alpha - \beta)$  teisendamiseks.

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta}{\cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta}.$$

Jagades viimase murru lugejat ja nimetajat avaldisega  $\cos\alpha \cos\beta$ , saame lihtsama avaldise:

$$\begin{aligned} \tan(\alpha + \beta) &= \frac{\frac{\sin\alpha \cos\beta}{\cos\alpha \cos\beta} + \frac{\cos\alpha \sin\beta}{\cos\alpha \cos\beta}}{\frac{\cos\alpha \cos\beta}{\cos\alpha \cos\beta} - \frac{\sin\alpha \sin\beta}{\cos\alpha \cos\beta}} = \\ &= \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \tan\beta}. \end{aligned}$$

Niisiis

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \tan\beta}.$$

Kasutades seost

$$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha,$$

saame

$$\begin{aligned}\tan(\alpha - \beta) &= \tan[\alpha + (-\beta)] = \\ &= \frac{\tan\alpha + \tan(-\beta)}{1 - \tan\alpha \cdot \tan(-\beta)} = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \tan\beta}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \tan\beta} .}$$

Ülesanded.

219. Arvuta 1)  $\sin 75^\circ$                       4)  $\sin 15^\circ$   
                   2)  $\cos 75^\circ$                         5)  $\cos 15^\circ$   
                   3)  $\tan 75^\circ$                          6)  $\tan 15^\circ$

220. Arvuta  $\cos(\alpha - \beta)$  väärtus, teades et

$$\sin\alpha = \frac{3}{5} \text{ ja } \cos\beta = \frac{5}{13} \text{ ja et } \alpha \text{ ja } \beta \text{ on teravnurgad.}$$

221. Arvuta  $\sin(\alpha + \beta)$  väärtus, teades et  $\alpha$  ja  $\beta$  on teravnurgad ning  $\sin\alpha = \frac{3}{5}$  ja  $\sin\beta = \frac{12}{13}$ .

222. Arvuta  $\cos(\alpha + \beta)$ , teades et  $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ ,  $\sin\beta = \frac{1}{3}$  ja  $\alpha$  ja  $\beta$  on teravnurgad.

223. Arvuta  $\cos(\alpha - \beta)$ , kui  $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ ,  $\cos\beta = \frac{1}{4}$  ning  $\alpha$  ja  $\beta$  on teravnurgad.

224. Arvuta  $\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin\alpha}$ , kui  $\alpha$  ja  $\beta$  on teravnurgad ning  $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$  ja  $\cos\beta = \frac{2}{3}$ .

225. Näita, et  $\sin(45^\circ + x) + \cos(45^\circ + x) = \sqrt{2} \cdot \cos x$ .

226. Näita, et  $\sin(45^\circ + x) + \cos(45^\circ + x) = \sqrt{2} \cdot \cos x$ .

227. Kolmnurgas kahe teravnurga koosinused on vastavalt  $\frac{15}{17}$  ja  $\frac{9}{41}$ . Arvuta antud nurkadega mitte kõrvuti astseva välisnurga siinus.

228. Kolmnurgas kahe teravnurga siinused on vastavalt  $\frac{7}{25}$  ja  $\frac{4}{5}$ . Arvuta kolmanda nurga koosinus.

229. Kolmnurga ABC sees olevast punktist O on küljed AB, AC ja BC näha nürinurkade all. Teades, et  $\sin AOB = \frac{1}{\sqrt{3}}$  ja  $\cos BOC = -\frac{1}{5}$ , arvuta  $\sin AOC$ .

230. Lihtsusta avaldised:

$$1) \sin(\alpha + 30^\circ) - \sin(\alpha - 30^\circ);$$

$$2) \cos(\alpha + 45^\circ) - \cos(\alpha - 45^\circ);$$

231. Arvuta:

$$1) \sin 20^\circ \cos 40^\circ + \cos 20^\circ \sin 40^\circ;$$

$$2) \cos 47^\circ \cos 17^\circ + \sin 47^\circ \sin 17^\circ;$$

$$3) \frac{\tan 70^\circ - \tan 40^\circ}{1 + \tan 70^\circ \tan 40^\circ};$$

$$4) \frac{\tan 70^\circ + \tan 80^\circ}{1 - \tan 70^\circ \tan 80^\circ};$$

$$5) \frac{\tan \frac{\alpha}{2} + \tan \frac{5\alpha}{2}}{1 - \tan \frac{\alpha}{2} \tan \frac{5\alpha}{2}}, \text{ kui } \alpha = 15^\circ;$$

$$6) \sin 60^\circ \cos 30^\circ - \cos 60^\circ \sin 30^\circ;$$

232. Lihtsusta avaldised:

$$1) \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ;$$

$$2) \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6}.$$

233. On teada, et  $\alpha$  ja  $\beta$  on teravnurgad ja et  $\tan \alpha = \frac{3}{4}$  ning  $\tan \beta = \frac{1}{7}$ .

Tõesta, et  $\alpha + \beta = 45^\circ$ .

234. Tõesta, et

$$1) \tan 2^\circ + \tan 12^\circ = \frac{\sin 14^\circ}{\cos 2^\circ \cdot \cos 12^\circ};$$

$$2) \frac{\sin 5^\circ}{\sin 15^\circ} = \frac{\tan 10^\circ - \tan 5^\circ}{\tan 10^\circ + \tan 5^\circ}.$$

235. Lihtsusta avaldised:

$$1) \sin 10^\circ \cos 50^\circ + \cos 10^\circ \sin 50^\circ;$$

$$2) \cos \frac{3\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8} + \sin \frac{3\pi}{8} \sin \frac{\pi}{8} .$$

236. Kahe nurga tangensite summa on 2, kuid nende nurkade summa tangens on 4.

Leia nende nurkade tangensite korrutis.

237. Kahe nurga summa koosinus on 0,3 ja nende nurkade vahe koosinus on 0,8.

Leia nende nurkade siinuste korrutis.

§50. Kahekordse nurga ja poolnurga siinus, koosinus  
 =====  
 ja tangens.  
 =====

Valemid kahekordse nurga siinuse, koosinuse ja tangensi avaldamiseks ühekordse nurga funktsioonide kaudu saame, kui kahe nurga summa siinuse, koosinuse ja tangensi valemite võtame liidetavad nurgad teineteisega võrdseks.

Võttes  $\beta = \alpha$ , saame

$$\sin(\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha = \sin\alpha \cos\alpha + \cos\alpha \sin\alpha = 2\sin\alpha \cos\alpha .$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha$$

$$\cos(\alpha + \alpha) = \cos 2\alpha = \cos\alpha \cdot \cos\alpha - \sin\alpha \sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha .$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\tan(\alpha + \alpha) = \tan 2\alpha = \frac{\tan\alpha + \tan\alpha}{1 - \tan\alpha \cdot \tan\alpha} = \frac{2 \tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha} .$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$$

Valemid poolnurga siinuse ja koosinuse avaldamiseks antud nurga funktsioonide kaudu saame järgmiselt.

Esiteks kasutame põhiseost

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1 \dots\dots\dots (1)$$

Teiseks asendame kahekordse nurga koosinuse valemis nurga  $\alpha$  nurgaga  $\frac{\alpha}{2}$ , saame

$$\cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}, \text{ ehk,}$$

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \cos \alpha \dots\dots (2)$$

Lahutades nüüd võrduse (1) pooltest võrduse (2) vastavad pooled, saame

$$2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - \cos \alpha, \dots\dots\dots (3)$$

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2} .$$

Sellest saamegi poolnurga siinuse valemi:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

Liites võrduste (1) ja (2) vastavad pooled, saame

$$2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1 + \cos \alpha, \dots\dots\dots (4)$$

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2},$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

Et tangens on siinuse ja koosinuse jagatis, siis

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \sin \frac{\alpha}{2} : \cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} : \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

ehk

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$$

Märgi poolnurga valemities oleva radikaali ees määrab muidugi see, mis veerandis nurk  $\frac{\alpha}{2}$  lõpeb.

Poolnurga tangensi saab nurga siinuse ja koosinuse kau-

du avaldada ka r a t s i o n a a l s e l t (s.o. radikaalivabalt):

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} ;$$

korrutades viimase murru lugejat ja nimetajat avaldisega  $2 \cos \frac{\alpha}{2}$  ning arvestades vördust (4), saame

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

Korrutades vörduse

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

parema poole lugejat ja nimetajat avaldisega  $1 - \cos \alpha$ , saame pärast taandamist

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} .$$

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

Kahekordse nurga ja poolnurga siinuse, koosinuse ja tangensi valemeid kasutame avaldiste teisendamisel ja mõne nurga funktsiooni väärtuse arvutamisel.

Näide 1. Vördhaarse kolmnurga alsnurga siinus on  $\frac{5}{13}$ .

Leia tipunurga siinus ja koosinus.

Lahendus. Tähistame alusnurga tähega  $\alpha$  ja tipunurga tähega  $\beta$ ; siis

$$\beta = 180^\circ - 2\alpha$$

ja

$$\sin \beta = \sin (180^\circ - 2\alpha) = \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha ;$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} = \frac{12}{13}.$$

$$\text{Seega } \sin \beta = 2 \cdot \frac{5}{13} \cdot \frac{12}{13} = \frac{120}{169};$$

$$\begin{aligned} \cos \beta &= \cos(180^\circ - 2\alpha) = -\cos 2\alpha = \\ &= -(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = \left(\frac{5}{13}\right)^2 - \left(\frac{12}{13}\right)^2 = -\frac{119}{169}. \end{aligned}$$

Näide 2. Arvuta  $\tan 22\frac{1}{2}^\circ$ .

Lahendus. Võttes valemis

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

$\alpha = 45^\circ$ , saame

$$\tan 22\frac{1}{2}^\circ = \frac{\sin 45^\circ}{1 + \cos 45^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2} - 1 = 0,414.$$

### Ülesanded.

238. Rombi külje ja diagonaali vahelise nurga siinus on 0,2. Leia rombi nurkade koosinused.

239. Võrdhaarse kolmnurga alusnurga koosinus on  $\frac{3}{4}$ . Leia tipunurga koosinus.

240. Ringjoone veerandis väiksemale kaarele toetuva kesknurga koosinus on  $\frac{1}{9}$ . Leia samale kaarele toetuva piirde nurga siinus, koosinus ja tangens.

241. Kontrolli võrdust

$$\sin 35^\circ \sin 55^\circ = \frac{1}{2} \cos 20^\circ.$$

242. Avalda x-i ja y-i vaheline seos, milles ei esine nurka  $\alpha$ :

$$1) \begin{cases} x = \sin \alpha + \cos \alpha \\ y = \sin 2\alpha \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x = \sin \alpha \\ y = \cos 2\alpha \end{cases}$$

243. On teada, et  $\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{2}{5}$ . Leia  $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$  ja

$\tan \alpha$  .

244. Lihtsusta avaldised:

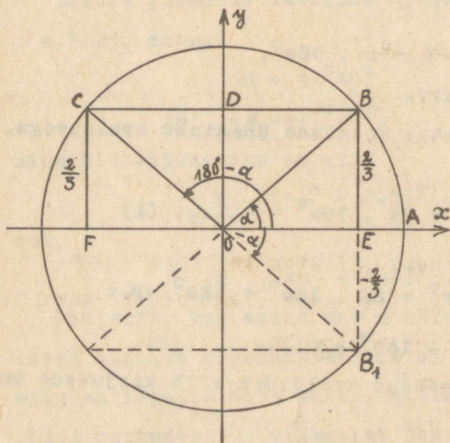
- 1)  $2 \sin 40^\circ \cos 50^\circ$ ;
- 2)  $(\sin 10^\circ + \sin 80^\circ) \cdot (\cos 80^\circ - \cos 10^\circ)$ ;
- 3)  $\sin (60^\circ + \alpha) \cos (60^\circ - \alpha) - \cos (60^\circ + \alpha) \sin (60^\circ - \alpha)$ .

§51. Nurga leidmine antud trigonomeetrilise  
=====  
funktsiooni väärtuse järgi.  
=====

1) Nurga leidmine antud siinuse järgi.

Olgu lahendada

ülesanne: konstrueerida nurk, mille siinus on  $\frac{2}{3}$ . Selle ülesande lahendamiseks jaotame ühikringjoone raadiuse (joon.70) kolmeks võrdseks osaks ning võtame siis y-teljel lõigu  $OD = \frac{2}{3} r$ . Punktist D joonestame x-teljega paralleelse sirge CB.



joon.70

Nurk  $AOB = \alpha$  ongi nurk, mille siinus on  $\frac{2}{3}$  .

Kuid kõikidel nurkadel, mille lõppraadiuse otspunkt asub punktis B, on siinuse väärtus  $\frac{2}{3}$ . Seetõttu meie ülesande tingimust rahuldavad nurgad

$\alpha, \alpha \pm 360^\circ, \alpha \pm 2 \cdot 360^\circ, \alpha \pm 3 \cdot 360^\circ, \dots, \alpha \pm n \cdot 360^\circ$ , mis järeldub ka sellest, et siinus on perioodiline funktsioon perioodiga  $360^\circ$ .

Peale nurga  $\text{AOB} = \alpha$  (joon. 70) leidub ka teises veerandis nurk, mille siinus on  $\frac{2}{3}$ ; selleks on nurk  $\text{AOC} = 180^\circ - \alpha$ .

Meie tlesande tingimust rahuldavad siis veel nurgad  $180^\circ - \alpha, 180^\circ - \alpha \pm 360^\circ, 180^\circ - \alpha \pm 2 \cdot 360^\circ, \dots, 180^\circ - \alpha \pm n \cdot 360^\circ$ .

Seega on lõpmata hulk nurki, mille siinus on  $\frac{2}{3}$ . Neid nurki väljendavad avaldised

$$\alpha + n \cdot 360^\circ$$

ja

$$180^\circ - \alpha + n \cdot 360^\circ,$$

kus  $n$  on mistahes täisarv.

Neid kaht avaldist saab asendada üheainsa avaldisega, pannes tähele, et

$$\alpha + n \cdot 360^\circ = 2n \cdot 180^\circ + \alpha \dots (1)$$

ja

$$\begin{aligned} 180^\circ - \alpha + n \cdot 360^\circ &= 2n \cdot 180^\circ + 180^\circ - \alpha = \\ &= (2n + 1) \cdot 180^\circ - \alpha \dots (2) \end{aligned}$$

Need teisendamisel saadud avaldised võib kirjutada ühe avaldisena

$$k \cdot 180^\circ + (-1)^k \cdot \alpha, \dots (3)$$

kus  $k$  on mistahes täisarv.

Tõesti, kui avaldises (3)  $k$  on paarisarv  $2n$ , siis saame avaldise (1), kui  $k$  on paaritu arv  $2n + 1$ , siis saame avaldise (2).

Niisiis võrdsete siinustega nurkade üldavaldiseks on

$$k \cdot 180^\circ + (-1)^k \cdot \alpha,$$

nii et

$$\sin \alpha = \sin [k \cdot 180^\circ + (-1)^k \cdot \alpha],$$

kus  $k$  on mistahes täisarv.

Antud siinus võib olla ka negatiivne arv, näiteks  $-\frac{2}{3}$ . Sel korral üheks nurgaks, mis ülesande tingimust rahuldab, on negatiivne nurk  $\text{AOB}_1 = -\alpha$  (vt. joon. 70).

Eelmise arutluse eeskujul leiame üldavaldise kõikidele nurkadele, mille siinus on  $-\frac{2}{3}$ :

$$k \cdot 180^\circ + (-1)^k \cdot (-\alpha).$$

Leides siinuste tabelist nurga, mille siinus on  $\frac{2}{3} \approx 0,6667$ , saame:

$$\alpha = 41^\circ 49'$$

$$\text{ja } -\alpha = -41^\circ 49',$$

ning üldavaldisteks on siis

$$k \cdot 180^\circ + (-1)^k \cdot (-41^\circ 49')$$

ehk

$$k \cdot 180^\circ - (-1)^k \cdot 41^\circ 49'.$$

Üldiselt, kui antud arv  $m$  täidab tingimust, et  $|m| \leq 1$  (sest siinuse absoluutväärtus ei või olla 1-st suurem), siis on lõpmata hulk nurki, mille siinus on  $m$ . Kuid üks neist nurkadest on vähikseima absoluutväärtusega.

Nagu jooniselt 70 näha, see vähikseima absoluutväärtusega nurk leidub vahemikus  $-90^\circ$  kuni  $90^\circ$  (need kaasa arvatud).

Näiteks vähikseima absoluutväärtusega nurk

$$\alpha = 30^\circ, \text{ kui } \sin \alpha = \frac{1}{2};$$

$$\alpha = -30^\circ, \text{ kui } \sin \alpha = -\frac{1}{2};$$

$$\alpha = 60^\circ, \text{ kui } \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\alpha = -45^\circ, \text{ kui } \sin \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\alpha = 0^\circ, \text{ kui } \sin \alpha = 0.$$

Vähikseima absoluutväärtusega nurgale, mille siinus on  $m$ , on antud nimetus arkussinus  $m$  ja teda tähistatakse sümboliga

$$\arcsin m.$$

Seega

arcsin  $m$  on vähikseima absoluutväärtusega nurk, mille siinus on  $m$ .

Sümbolites:

$$\sin(\arcsin m) = m \text{ ja } -90^\circ \leq \arcsin m \leq 90^\circ.$$

Näiteks

$$\arcsin \frac{1}{2} = 30^\circ = \frac{\pi}{6};$$

$$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -45^\circ = -\frac{\pi}{4};$$

$$\arcsin(-1) = -90^\circ = -\frac{\pi}{2};$$

$$\arcsin 0 = 0^\circ.$$

Kui  $0 < m \leq 1$ , siis leiame nurga arcsin  $m$  otse siinuste tabelist, näiteks  $\arcsin 0,667 = 41^\circ 49'$ .

Kui  $-1 \leq m < 0$ , siis avaldame antud arkussinuse positiivse arvu arkussinuse kaudu.

Näitame joon. 70 varal, et

$$\arcsin(-m) = -\arcsin m.$$

Jooniselt 70 näeme, et nurk, mille siinus on  $\frac{2}{3}$ , on  $\angle AOB$ , ja nurk, mille siinus on  $-\frac{2}{3}$ , on  $\angle AOB_1$  kusjuures

$$\angle AOB_1 = -\angle AOB,$$

$$\text{s.t. } \arcsin\left(-\frac{2}{3}\right) = -\arcsin\frac{2}{3},$$

ehk üldiselt

$$\underline{\arcsin(-m) = -\arcsin m.}$$

Nüüd saame kõikide nurkade, mille siinus on  $m$ , üldavaldiseks

$$k \cdot 180^\circ + (-1)^k \cdot \arcsin m$$

ehk, radiaanides

$$k \cdot \pi + (-1)^k \cdot \arcsin m$$

Näide 1. Leia nurk, mille siinus on  $0,83$ .

Lahendus. Nende nurkade üldavaldis on

$$k \cdot 180^\circ + (-1)^k \cdot \arcsin 0,83.$$

Tabelist leiame, et  $\arcsin 0,83 = 56^\circ 06'$ . Seega otsitavate nurkade üldavaldis on

$$k \cdot 180^\circ + (-1)^k \cdot 56^\circ 06'.$$

Näide 2. Leia nurk, mille siinus on  $-0,3535$ .

Lahendus.  $\arcsin(-0,3535) = -\arcsin 0,3535 = -20^\circ 42'$ .

Otsitavate nurkade üldavaldis on

$$k \cdot 180^\circ + (-1)^k \cdot (-20^\circ 42').$$

Ü l e s a n d e d.

245. Selgita, mida tähendavad sümboolid

$$1) \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad 2) \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad 3) \arcsin(-0,75)$$

246. Konstrueeri nurk ja leia nende väärtused

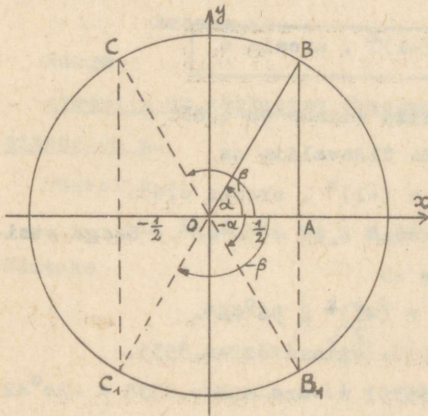
$$1) \arcsin 0,8; \quad 2) \arcsin\left(-\frac{3}{4}\right); \quad 3) \arcsin \frac{3}{5}$$

247. Anna üldavaldis nurkadele, mille siinus on

1) 0,3156; 2) 0,0087; 3) -0,4051

2) Nurga leidmise antud koosinuse järgi.

Et ehitada nurka, mille koosinus on näiteks  $\frac{1}{2}$ , selleks ehitame ühikringjoonel punkti (joon.71), mille abstsiss on  $\frac{1}{2}$ , poolitades abstsissiteljel asuva raadiuse. Otsistavaks nurgaks on  $\angle AOB = \alpha$ . Koosinuse perioodilisuse tõttu rahuldavad meie ülesande tingimust ka nurgad



Joon.71

soluutväärtused võrdsed.

Seega ülesande tingimust täidavad veel kõik nurgad kujuga

$$n \cdot 360^\circ - \alpha.$$

Avaldisi

$$n \cdot 360^\circ + \alpha$$

ja

$$n \cdot 360^\circ + \alpha,$$

kus  $n$  on mistahes täisarv.

Jooniselt 71 näeme, et leidub veel nurki, mille koosinus on  $\frac{1}{2}$ . Üheks niisuguseks nurgaks on negatiivne teravnurk

$$\angle AOB_1 = -\alpha,$$

sest kolmnurkade  $AOB$  ja  $AOB_1$  võrdsuse tõttu on nurkade  $AOB$  ja  $AOB_1$  absoluutväärtused võrdsed.

saab väljendada ühe avaldise abil

$$n \cdot 360^\circ \pm \alpha.$$

See on üldavaldis nurkadele, millede koosinus on  $\frac{1}{2}$ .

Antud juhul  $\alpha = 60^\circ$ .

Seega üldavaldiseks kõikidele nurkadele, mille koosinus on  $\frac{1}{2}$ , on

$$n \cdot 360^\circ \pm 60^\circ.$$

Antud koosinus, mille järgi nõutakse nurga ehitamist, võib olla ka negatiivne, näiteks  $-\frac{1}{2}$ . Sel korral otsitavad nurgad on  $\angle AOC = \beta$  ja  $\angle AOC_1 = -\beta$  ja seega kõik nurgad, mida väljendab avaldis

$$n \cdot 360^\circ \pm \beta.$$

Üldiselt, kui antud koosinuse väärtus  $m$  on vahemikust

$$-1 \leq m \leq 1,$$

ehk lühemalt  $|m| \leq 1$  (koosinuse absoluutväärtus ei saa olla suurem kui 1), siis niisuguse koosinusega nurki on lõpmatu hulk. Kõiki neid nurki saab avaldada ühe nurga kaudu. Selleks nurgaks kasutame nüüd väikseimat positiivset nurka, millele koosinus on  $m$ . Selleks nurgaks ei kõlba nüüd väikseima absoluutväärtusega nurk, nagu antud siinuse korral, sest kui  $|m| < 1$ , siis igale  $m$  väärtusele vastab kaks nurka, mille absoluutväärtused on võrdsed, näiteks kui  $m = \frac{1}{2}$ , siis need nurgad on  $60^\circ$  ja  $-60^\circ$ .

Kui  $m > 0$ , siis väikseim positiivne nurk on esimesest veerandist, kui  $m < 0$ , siis teisest veerandist. Seega üld-

diselt antud  $m$  korral väikseim positiivne nurk on vahemikust  $0^\circ$  kuni  $180^\circ$ , need kaasa arvatud.

Seda väikseimat positiivset nurka nimetatakse arvu  $m$  arkuskosinuseks ja tähistatakse sümboliga arccos  $m$ .

Seega

arccos  $m$  on väikseim positiivne nurk, mille kosinus on  $m$ .

Seesama definitsioon sümbolites

$$\cos(\arccos m) = m \text{ ja } 0^\circ \ll \arccos m \ll 180^\circ.$$

Näiteks

$$\arccos \frac{1}{2} = 60^\circ = \frac{\pi}{3}; \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = 45^\circ = \frac{\pi}{4};$$

$$\arccos 1 = 0^\circ = 0; \arccos 0 = 90^\circ = \frac{\pi}{2}.$$

Selgitame joonise 71 varal, et kehtib valem

$$\arccos(-m) = 180^\circ - \arccos m.$$

Jooniselt 71 näeme, et väikseim positiivne nurk, mille kosinus on  $-\frac{1}{2}$ , on  $\angle AOC$ , seega  $\arccos(-\frac{1}{2}) = \angle AOC$ ; väikseim positiivne nurk, mille kosinus on  $\frac{1}{2}$ , on  $\angle AOB$ , nii et  $\arccos \frac{1}{2} = \angle AOB$ .

Kuid  $\angle AOC = 180^\circ - \angle AOB$ , niisiis

$$\arccos(-\frac{1}{2}) = 180^\circ - \arccos \frac{1}{2}.$$

Kui arvu  $\frac{1}{2}$  asemel võtta üldiselt arv  $m$ , saamegi

$$\underline{\arccos(-m) = 180^\circ - \arccos m.}$$

Positiivse  $m$  korral leiame arccos  $m$  väärtuse otse kosinuste tabelist, negatiivse arvu  $m$  arkuskosinuse avaldamise positiivse arvu arkuskosinuse kaudu, kasutades viimast valemit.

Näiteks

$$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = 180^\circ - \arccos \frac{1}{2} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ = \frac{2\pi}{3};$$

$$\arccos(-1) = 180^\circ - \arccos 1 = 180^\circ = \pi;$$

$$\arccos(-0,4955) = 180^\circ - \arccos 0,4955 = 180^\circ - 60^\circ 18' = 119^\circ 42'.$$

Nüüd võime nurga, mille koosinus on  $m$ , üldavaldise kirjutada kujul

$$n \cdot 360^\circ \pm \arccos m$$

kus  $n$  on mistahes täisarv.

### Ülesanded.

248. Selgita, mida tähendavad sümboolid

1)  $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$ ; 2)  $\arccos \frac{2}{3}$ ; 3)  $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ;

4)  $\arccos 0,9673$ ; 5)  $\arccos (-0,4848)$

ja leia nende väärtused.

249. Konstrueeri nurk

1)  $\arccos \frac{3}{4}$ ; 2)  $\arccos (-0,25)$ .

250. Anna üldavaldis nurkadele, mille koosinus on

1)  $0,4$ ; 2)  $-\frac{5}{7}$ ; 3)  $0,8616$ ; 4)  $-0,342$ .

3) Nurga leidmine antud tangensi järgi.

Et iga arv  $m$  võib olla tangensi väärtuseks, siis iga-  
le etteantud tangensi väärtusele leidub vastav nurk  $\alpha$ .

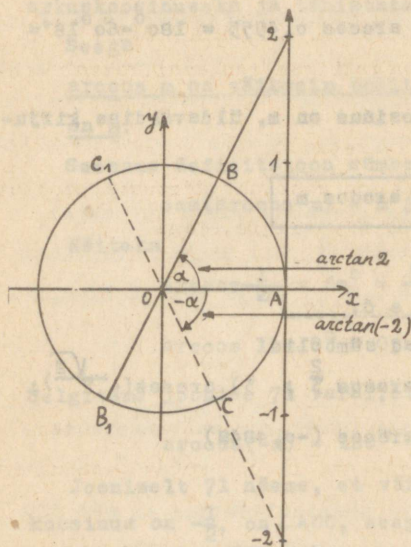
Kui on leitud üks nurk  $\alpha$ , mille tangens on  $m$ , siis selle tõttu, et tangens on perioodiline funktsioon perioodiga  $180^\circ$ , rahuldavad ülesande nõuet ka nurgad

$$\alpha \pm 180^\circ, \alpha \pm 2 \cdot 180^\circ, \alpha \pm 3 \cdot 180^\circ, \dots$$

ehk üldiselt nurgad

$$\alpha + n \cdot 180^\circ,$$

kus  $n$  on mistahes täisarv.



Joon.72

nurga kaudu. Selleks kasutame väikseima absoluutväärtusega nurka. Kui etteantud tangens on  $-2$ , siis vastavaks väiksema absoluutväärtusega nurgaks on negatiivne nurk  $AOG$ . Niisiis väikseima absoluutväärtusega nurk, mille tangens on  $m$ , leidub vahemikust  $-90^\circ$ -st kuni  $90^\circ$ -ni, need välja arvatud, sest neil nurkadel tangensid puuduvad. Seda väikseima absoluutväärtusega nurka nimetatakse arvu  $m$  arkustangensiks ja tähistatakse sümboliga  $\arctan m$ .

Nurga konstrueerimiseks, mille tangens on näiteks  $2$ , paigutame tangensiteljele (joon.72) lõigu pikkusega  $2$  ja ühendame selle otspunkti ühikringi keskpunktiga. Nagu jooniselt 72 näeme, vastavad tangensi väärtusele  $2$  nurga lõpphaara kaks asendit  $OB$  ja  $OB_1$ . Nurgad  $AOB$  ja  $AOB_1$  erinevad teineteisest  $180^\circ$  või selle kordse võrra, s.o. tangensi perioodi võrra. Seetõttu saab üldavaldise kõikide nurkade jaoks, mille tangens on  $2$ , anda ühe

Seega

arctan m on väikseima absoluutväärtusega nurk, mille tangens on m.

Seesama definitsioon sümbolites:

$$\underline{\tan(\arctan m) = m \text{ ja } -90^\circ < \arctan m < 90^\circ,}$$

Jooniselt 72 näeme, et negatiivse tangensi korral kehtib valem

$$\arctan(-2) = -\arctan 2.$$

Tõesti, nurgad AOB ja AOC on absoluutväärtuste poolest võrdsed, kuid teine neist on negatiivne, seega

$$\angle AOC = -\angle AOB, \text{ s.o.}$$

$$\arctan(-2) = -\arctan 2,$$

ehk üldiselt

$$\underline{\arctan(-m) = -\arctan m.}$$

Positiivse m korral leiame nurga arctan m otse tangensite tabelist, negatiivse m korral kasutame saadud valemit.

Nüüd saame anda üldavaldise nurkadele, mille tangens on m. Selleks üldavaldiseks on

$$\boxed{n \cdot 180^\circ + \arctan m},$$

kus n on mistahes täisarv.

Näited.

$$1) \text{ Kui } \tan \alpha = 1, \text{ siis } \alpha = n \cdot 180^\circ + \arctan 1 = \\ = n \cdot 180^\circ + 45^\circ = n \cdot \overline{\pi} + \frac{\overline{\pi}}{4}.$$

$$2) \text{ Nurk, mille tangens on } -2, \text{ väljendub valemiga} \\ n \cdot 180^\circ + \arctan(-2) = n \cdot 180^\circ - \arctan 2 = \\ = n \cdot 180^\circ - 63^\circ 26'.$$

- 3) Üldavaldis nurkadele, mille tangens on  $-\sqrt{3}$ , on  
 $n \cdot 180^\circ + \arctan(-\sqrt{3}) = n \cdot 180^\circ - \arctan \sqrt{3} =$   
 $= n \cdot 180^\circ - 60^\circ = n\pi - \frac{\pi}{3}.$

Ü l e s a n d e d.

251. Selgita sümboli tähendus ja leia ta väärtus:

- 1)  $\arctan 2,5$ ; 2)  $\arctan(-3)$ ; 3)  $\arctan \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

252. Konstrueeri nurk:

- 1)  $\arctan 3$ ; 2)  $\arctan(-3)$ ; 3)  $\arctan 1,5$ .

253. Anna üldavaldis nurkadele, mille tangens on

- 1) 2; 2)  $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ ; 3)  $\sqrt{2}$ ; 4) -1.

254. Arvuta:

- 1)  $\arctan 1 + \arctan \sqrt{3}$ ; 2)  $\arccos 1 + 2 \arcsin \frac{1}{2}$ ;  
 3)  $\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3}$ ; 4)  $8 \arctan \frac{3}{4} + \arctan \frac{1}{7}$ ;  
 5)  $\arctan 1 - \frac{\pi}{4}$ ; 6)  $\sin(\arcsin \frac{1}{2} + \arccos \frac{1}{2})$ ;  
 7)  $\sin(\arcsin 0,5)$ ; 8)  $\tan(\arctan 1,3)$ .

§52. Trigonomeetriliste võrrandite lahenda-

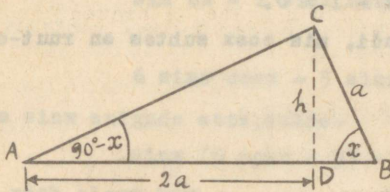
mise näiteid.

On ülesandeid, mille lahendamine viib niisuguse võrrandi lahendamisele, milles otsitav esineb trigonomeetrilise funktsiooni argumentis.

Näide 1. Täisnurkses kolmnurgas on ühe kaateti projektsioon hüpotenuusil kaks korda pikem kui teine kaatet. Arvuta selle kolmnurga nurgad.

Lahendamisel saame kolmnurgast ADC (joon.73)

$$h = 2a \tan(99^\circ - x)$$



Joon.73

Trigonomeetriliseks võrrandiks nimetatakse niisugust võrrandit, milles tundmatu esineb mingi trigonomeetrilise funktsiooni argumentis.

Tundmatu  $x$  väljendab trigonomeetrilises võrrandis tavaliselt nurga suurust kraadides või radiaanides, mõnikord, sõltuvalt ülesande tingimustest, aga ka abstraktselt arvu, nagu näiteks võrrandis

$$x + \sin x = \frac{1}{2}.$$

Siin  $\sin x$  tähendab  $x$ -radiaanise nurga siinust, näiteks  $\sin 2,6 = \sin 148^{\circ}58' = \sin 31^{\circ}02' = 0,5155$ .

Trigonomeetrilise võrrandi lahendamisel püüame võrrandit nii teisendada, et ta sisaldaks ainult üht trigonomeetrilist funktsiooni, näiteks ainult funktsiooni  $\sin x$ . Ülal- saadud võrrandit

$$\sin x = 2 \tan(90^{\circ} - x) \text{ ehk } \sin x = 2 \cot x$$

on kerge teisendada niisuguseks, et ta sisaldab ainult funktsiooni  $\cos x$ :

$$\sin x = 2 \cdot \frac{\cos x}{\sin x},$$

$$\sin^2 x = 2 \cos x,$$

$$1 - \cos^2 x = 2 \cos x,$$

ja kolmnurgast BDC

$$h = a \sin x.$$

Seega saame võrrandi

$$a \sin x = 2 a \tan(90^{\circ} - x)$$

ehk

$$\sin x = 2 \tan(90^{\circ} - x)$$

See on trigonomeetriline võrrand.

$$\cos^2 x + 2\cos x - 1 = 0.$$

Lahendades selle võrrandi, mis  $\cos x$  suhtes on ruutvõrrand, leiame

$$\cos x = 0,414$$

ja

$$\cos x = -2,414.$$

Saadud kahest uuest võrrandist teisel ilmselt lahend puudub, sest pole olemas nurka, mille koosinus on  $-2,414$ . Seega jääb nüüd lahendada lihtne võrrand

$$\cos x = 0,414.$$

Et otsitav nurk on täismurkse kolmnurga nurk, siis meie ülesande ainsaks lahendiks on

$$x = \arccos 0,414 = 65^{\circ}33'.$$

Kolmnurga teine teravnurk on

$$90^{\circ} - 65^{\circ}33' = 24^{\circ}27'.$$

Näide 2. Kolmnurga üks nurk on teisest kaks korda suurem ja nende nurkade siinuste suhe on  $\frac{5}{3}$ . Leia kolmnurga nurgad.

Olgu üks nurk  $x$  kraadi, siis teine on  $2x$  kraadi. Ülesande tingimustele vastavalt saame võrrandi

$$\frac{\sin 2x}{\sin x} = \frac{5}{3},$$

ehk

$$3 \sin 2x = 5 \sin x.$$

Selle võrrandi vasakus pooles on siinuse argumentiks  $2x$ , paremas pooles aga  $x$ . Teisendame võrrandi nii, et ta sisaldaks ainult ühe ja sama argumenti funktsioone, kasutades selleks valemit

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x.$$

Saame

$$6 \sin x \cos x - 5 \sin x = 0.$$

Tuues  $\sin x$  sulgude ette, saame

$$\sin x (6 \cos x - 5) = 0.$$

Nüüd peab olema kas

$$\sin x = 0$$

või

$$6 \cos x - 5 = 0,$$

millest

$$\cos x = \frac{5}{6}.$$

Näeme, et ka selle ülesande lahendamisel saadud võrrand taandus lihtsatele võrranditele.

$$\sin x = 0 \text{ ja } \cos x = \frac{5}{6}.$$

Neist esimene võrrand meie ülesande lahendit ei anna, sest kolmnurga nurk ei saa olla  $0^\circ$  ega  $180^\circ$ .

Teisest võrrandist saame

$$x = \arccos \frac{5}{6} = \arccos 0,8333 = 33^\circ 33'.$$

Teine nurk on

$$2x = 67^\circ 06'$$

ja kolmas nurk on

$$180^\circ - (33^\circ 33' + 67^\circ 06') = 79^\circ 21'.$$

Eelpool antud ülesannete lahendamisel saadud võrrandite lahendamiskäigust nähtub, et trigonomeetrilise võrrandi lahendamise üldplaan on järgmine:

1) antud võrrand teisendatakse niisuguseks, mis sisaldab ainult ühe argumendi üht ja sama funktsiooni;

2) saadud võrrand taandatakse üheks või mitmeks trigo-

nomeetriliseks põhivõrrandiks;

3) lahendatakse saadud trigonomeetrilised põhivõrrandid.

Trigonomeetrilised põhivõrrandid.

Võrrandeid

$$\sin x = m,$$

$$\cos x = m,$$

$$\tan x = m,$$

nimetatakse trigonomeetrilisteks põhivõrranditeks.

1. Võrrandi  $\sin x = m$  lahendamise.

Selle võrrandi lahendamise võimalus sõltub arvust  $m$ .  
Vaatleme kõiki võimalikke juhtumeid.

a) Kui  $|m| > 1$ , s.o.  $m > 1$  või  $m < -1$ , siis lahend puudub, sest ei ole olemas nurka, mille siinus on suurem kui 1, või väiksem kui -1.

b) Kui  $m = 1$ , siis võrrandi üheks lahendiks on  $90^\circ$ . Siinuse perioodilisuse tõttu rahuldavad võrrandit ka nurgad

$$90^\circ + 360^\circ = 5 \cdot 90^\circ,$$

$$90^\circ + 2 \cdot 360^\circ = 9 \cdot 90^\circ,$$

$$90^\circ + 3 \cdot 360^\circ = 13 \cdot 90^\circ,$$

.....

$$90^\circ + n \cdot 4 \cdot 90^\circ = (4n + 1) \cdot 90^\circ.$$

Seega võrrandi  $\sin x = 1$  üldlahend on  $x = (4n + 1) \cdot 90^\circ$ , kus  $n$  on mistahes täisarv. Andes  $n$ -le täisarvulisi väärtusi ... -1, 0, 1, 2, ..., saame võrrandi erilahendid  $-3 \cdot 90^\circ = 270^\circ$ ;  $90^\circ$ ;  $5 \cdot 90^\circ = 450^\circ$ ;  $9 \cdot 90^\circ = 810^\circ$ , ... Erilahendit  $\arcsin 1 = 90^\circ$  nimetatakse ka peal-

h e n d i k s. Seega juhul kui  $m = 1$  on võrrandil lõpmata hulk lahendeid.

c) Kui  $|m| < 1$ , s.e. kui  $-1 < m < 1$ , siis võrrandil on lõpmata hulk lahendeid. Kendeks on nimelt kõik nurgad, mille siinus on  $m$ . Seega üldlahend on

$$x = n \cdot 180^\circ + (-1)^n \cdot \arcsin m,$$

kus  $n$  on mistahes täisarv.

Pealahendiks on  $\arcsin m$ .

Näiteks võrrandi

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

üldlahend on

$$x = n \cdot 180^\circ + (-1)^n \cdot 45^\circ$$

ja pealahend on  $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = 45^\circ$ .

d) Kui  $m = -1$ , siis üheks lahendiks on  $-90^\circ$  ja perioodilisuse tõttu on lahenditeks ka nurgad

$$-90^\circ + 4 \cdot 90^\circ = 3 \cdot 90^\circ; 7 \cdot 90^\circ; 11 \cdot 90^\circ; \dots,$$

$$(4n - 1) \cdot 90^\circ.$$

Seega üldlahendiks on

$$x = (4n - 1) \cdot 90^\circ,$$

kus  $n$  on mistahes täisarv.

### Ü l e s a n d e d.

255. Lahenda võrrandid

$$1) \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad 2) \sin x = 0$$

$$3) \sin x = 0,849; \quad 4) \sin x = -\frac{2}{5}.$$

2. V ò r r a n d i e s s  $x = m$  l a h e n d a m i n e.

a) Kui  $|m| > 1$ , siis lahend puudub.

b) Kui  $m = 1$ , siis üldlahend on

$$x = n \cdot 360^\circ,$$

kus  $n$  on mistahes täisarv.

c) Kui  $|m| < 1$ , s.o. kui  $-1 < m < 1$ , siis üldlahend on

$$x = n \cdot 360^\circ \pm \arccos m.$$

d) Kui  $m = -1$ , siis üldlahendiks on

$$x = n \cdot 360^\circ \pm 180^\circ$$

ehk

$$x = (2n \pm 1) \cdot 180^\circ,$$

kus  $n$  on mistahes täisarv.

Seega juhtudel, kui  $m$  on vahemikust

$$-1 \leq m \leq 1,$$

on võrrandil  $\cos x = m$  lõpmata hulk lahendeid.

### Ülesanded.

256. Lahenda võrrandid

$$1) \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad 2) \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$3) \cos x = \frac{1}{2}; \quad 4) \cos x = 0,9646.$$

$$5) \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad 6) \cos x = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

3. Võrrandi  $\tan x = m$  lahendamise.

Et iga arv  $m$  võib olla tangensi väärtuseks, siis iga-suguse  $m$  korral on võrrandil  $\tan x = m$  lahendid olemas; lahenditeks on nimelt kõik nurgad, mille tangens on  $m$ .

Seega

võrrandi  $\tan x = m$  üldlahend on

$$x = n \cdot 180^\circ + \arctan m.$$

Ü l e s a n d e d.

257. Lahenda võrrandid

1)  $\tan x = 1$ ;

2)  $\tan x = 3$ ;

3)  $\tan x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ;

Võrrandid, mis otseselt taanduvad põhivõrranditeks.

Siia kuuluvad võrrandid, mille vasak pool on trigonomeetiline funktsioon mingist  $x$ -i funktsioonist ja parem pool on antud arv. Niisugused on näiteks võrrandid

1)  $\sin 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ;

2)  $\cos(2x + \frac{\pi}{3}) = 0$ ;

3)  $\tan 4x = 1$ .

Selliste võrrandite lahendamisel vaatleme vasakus pool esineva trigonomeetrilise funktsiooni argumenti abitundmatuna, siis antud võrrand on abitundmatu suhtes põhivõrrand. Näiteks võrrand

$$\sin 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

on  $3x$  suhtes põhivõrrand; võrrand

$$\cos(2x + \frac{\pi}{3}) = 0$$

on seda

$$2x + \frac{\pi}{3} \text{ suhtes ja võrrand}$$

$$\tan 4x = 1$$

on seda

$$4x \text{ suhtes.}$$

Niisuguste võrrandite lahendamisel lahendame esmalt põhivõrrandi abitundmatu suhtes ning seejärel leiame otsitava leitud abitundmatu väärtuste järgi.

Näide 1.  $\sin 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

$$3x = n \cdot 180^\circ + (-1)^n \cdot \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ehk}$$

$$3x = n \cdot 180^\circ + (-1)^n \cdot 60^\circ.$$

Seeglest võrrandist leiame nüüd  $x$ :

$$x = n \cdot 60^\circ + (-1)^n \cdot 20^\circ.$$

Kui saadud üldlahendi kirjutame kahe valemi abil, siis saame lihtsamad avaldised ja ka lahendite kontrollimine on siis kergem.

1) Võttes  $n = 2k$ , saame

$$x_1 = 2k \cdot 60^\circ + 20^\circ = 6k \cdot 20^\circ + 20^\circ = (6k + 1) \cdot 20^\circ;$$

2) Võttes  $n = 2k + 1$ , saame

$$x_2 = (2k + 1) \cdot 60^\circ - 20^\circ = (6k + 3) \cdot 20^\circ - 20^\circ = (6k + 2) \cdot 20^\circ$$

Kontrollime lahendeid.

$$1) \sin 3x = \sin [3 \cdot (6k + 1) \cdot 20^\circ] = \sin [(6k + 1) \cdot 60^\circ] = \\ = \sin (k \cdot 360^\circ + 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$2) \sin 3x = \sin [3 \cdot (6k + 2) \cdot 20^\circ] = \sin [(6k + 2) \cdot 60^\circ] = \\ = \sin (k \cdot 360^\circ + 120^\circ) = \sin 120^\circ = \sin (180^\circ - 120^\circ) = \\ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Mõlemad lahendiseeriad rahuldavad võrrandit.

Näide 2.  $\cos(2x + \frac{\pi}{3}) = 0.$

$$2x + \frac{\pi}{3} = n \cdot 2\pi + \frac{\pi}{2};$$

$$2x = n \cdot 2\pi - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2};$$

$$x = n\pi - \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}.$$

Selle üldlahendi võib kirjutada kahe nurkadeseeriana;

$$x_1 = n\pi - \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = n\pi + \frac{\pi}{12};$$

$$x_2 = n\pi - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} = n\pi - \frac{5\pi}{12}.$$

Kontroll. 1)  $\cos(2x + \frac{\pi}{3}) = \cos [2(n\pi + \frac{\pi}{12}) + \frac{\pi}{3}] = \\ = \cos (n \cdot 2\pi + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}) = \cos \frac{\pi}{2} = 0;$

$$2) \cos \left[ 2(n\pi - \frac{5\pi}{12}) + \frac{\pi}{3} \right] = \cos (n \cdot 2\pi - \frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{3}) = \\ = \cos (-\frac{\pi}{2}) = 0.$$

Mõlemad lahendiseeriad rahuldavad võrrandit.

### Ülesanded.

258. Lahenda võrrandid ja kontrolli lahendid:

$$1) \tan 4x = 1; \quad 2) 3\cos\frac{x-45^\circ}{2} = 2.$$

$$3) \tan 2x = -1; \quad 4) \sin(3x - \frac{\pi}{3}) = 0.$$

Võrrandid, mille vasak pool on korrutis ja parem pool on null.

Olgu lahendada võrrand

$$\sin 2x \cdot \cos 3x = 0.$$

See võrrand on rahuldatud, kui vasaku poole esimene tegur on null ja ka siis, kui teine tegur on null. Seega saame kaks võrrandit

$$\sin 2x = 0 \text{ ja } \cos 3x = 0.$$

Nende lahendamisel saame:

$$2x = n \cdot 180^\circ; \quad 3x = n \cdot 360^\circ \pm 90^\circ;$$

$$x_1 = n \cdot 90^\circ \quad x = n \cdot 120^\circ \pm 30^\circ \text{ ehk}$$

$$x_2 = n \cdot 120^\circ + 30^\circ = (4n + 1) \cdot 30^\circ;$$

$$x_3 = n \cdot 120^\circ - 30^\circ = (4n - 1) \cdot 30^\circ.$$

Kontroll näitab, et kõik kolm lahendiseeriat rahuldavad antud võrrandit.

Kui korrutises üks tegureist võrdub nulliga, siis ei saa aga alati ütelda, et ka korrutis võrdub nulliga. Seda ei saa ütelda siis, kui ühe teguri nulliga võrdumise puhul mõni ülejäänud tegureist kaotab arvu tähenduse. Näiteks kui võrrandis

$$\tan x \cdot \left(1 - \frac{1}{\sin x}\right) = 0$$

$$\tan x = 0$$

ehk

$$x = n \cdot 180^\circ,$$

siis teine tegur kaotab arvu mõtte, sest kui

$$x = n \cdot 180^\circ,$$

siis

$\sin x = 0$  ja murrul  $\frac{1}{\sin x}$  puudub arvu tähendus. Kui selle võrrandi vasakus pooles teine tegur

$$1 - \frac{1}{\sin x} = 0$$

ehk

$$\sin x = 1,$$

millest

$$x = n \cdot 180^\circ + (-1)^n \cdot 90^\circ,$$

siis esimesel teguril puudub arvu tähendus.

Niisiis, kui korrutises üks tegureist võrdub nulliga ja teised tegurid sel puhul omavad arvu tähendust, siis korrutis võrdub nulliga.

Siit saame juhise:

Selleks et lahendada võrrandit, mille vasak pool on korrutis ja parem pool on null, võrrutame nulliga iga teguri eraldi, lahendame saadud võrrandid ja kõrvaldame lahendite hulgast need, mille puhul mõnel teguritest puudub arvu tähendus.

Näidel.  $\sin 2x \cdot \tan x = 0$

$$\sin 2x = 0;$$

$$\tan x = 0;$$

$$2x = n \cdot 180^\circ;$$

$$x_2 = n \cdot 180^\circ.$$

$$x_1 = n \cdot 90^\circ.$$

Lahenditeseeria  $x_2$  rahuldab võrrandit, kuna sel korral vasaku poole mõlemal teguril on arvu tš hendus. Kuid see-  
ria  $x_1$  ei ole võrrandi lahendiks paaritu arvulise  $n$  korral,  
sest  $\tan(n \cdot 90^\circ)$  ei oma siis arvu tähendust; paarisarvu-  
lise  $n$  korral annab see seeria samad lahendid, mis seeria  
 $x_2$ .

Seega ainsaks lahendiks on

$$x = n \cdot 180^\circ.$$

Kui võrrandi parem pool on null ja vasak pool ei ole  
korrutis, kuid on korrutiseks teisendatav, siis teeme seda  
ning lahendame edasi, nagu eelpool kirjeldatud.

Näide 2.  $1 + \sin x + \cos 3x + \sin x \cos 3x = 0.$

Lahutades vasaku poole tegureiks, saame

$$1 + \sin x + \cos 3x (1 + \sin x) = 0;$$

$$(1 + \sin x)(1 + \cos 3x) = 0.$$

Edasi saame:

$$1 + \sin x = 0;$$

$$1 + \cos 3x = 0;$$

$$\sin x = -1;$$

$$\cos 3x = -1;$$

$$x_1 = (4n - 1) \cdot 90^\circ$$

$$3x = n \cdot 360^\circ \pm 180^\circ;$$

$$x = n \cdot 120^\circ \pm 60^\circ;$$

$$x = (2n \pm 1) 60^\circ.$$

Et seeria  $(2n - 1)60^\circ$  on samane seeriaga  $(2n + 1)60^\circ$ ,  
siis

$$x_2 = (2n + 1) 60^\circ.$$

Mõlemad seeriad rahuldavad võrrandit.

Ülesanded.

259. Jaota täisnurk kahe ossa nii, et nende osade siinuste suhe oleks  $1 : \sqrt{3}$ .

260. Lahenda võrrandid:

$$1) 2 \sin x - 1 = 0; \quad 2) \sin 6x = 0,5$$

261. Lahenda võrrandid:

$$1) 2 \cos(2x - 60^\circ) + 1 = 0; \quad 2) 3 \tan^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1;$$

$$3) \cos x \sin x - 0,25 = 0; \quad 4) \sin(x + 40^\circ) = 1.$$

262. Lahenda võrrandid:

$$1) (2 \tan x - 1)(\tan x + 1) = 0;$$

$$2) (2 \sin x - 1)(\sin x + 1) = 0;$$

263. Lahenda võrrandid:

$$1) \tan^2 x - \tan x = 0; \quad 2) 2 \sin^2 x = \sin x;$$

$$3) \tan^3 x = 3 \tan x; \quad 4) \sin 2x - \cos x = 0.$$

264. Lahenda võrrandid:

$$1) \sin 2x = \sin(x - 90^\circ); \quad 2) \cos 4x + \cos x = 0;$$

$$3) \sin^2 4x - \sin 4x \sin 2x = 0$$

265. Täisnurkse kolmnurga nurkade siinused moodustavad geomeetrilise progressiooni.

Leia kolmnurga nurgad.

266. Täisnurkse kolmnurga poolnurkade tangensid moodustavad aritmeetilise progressiooni. Leia kolmnurga nurgad.

267. Täisnurkse kolmnurga tipust hüpotenuusile tõmmatud kõrgus on võrdne hüpotenuusil asuvate kaatetite projektsioonide vahega. Leia kolmnurga nurgad.

268. Lahenda võrrandid:

$$1) 3 \sin x = 2 \cos^2 x;$$

$$2) \tan x + 3 \cot x = 4;$$

- 3)  $\cos^2 x + 3 \sin^2 x = 2$ ; 4)  $\cos^2 x + \cos 2x = \frac{1}{2}$ ;  
 5)  $3 \cos^2 x - \sin^2 x + 3 \cos x = 0$ ; 6)  $2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1 = 0$ ;  
 7)  $\cos 2x + \cos x = 0$ .

269. Arvuta võrdhaarse kolmnurga nurgad, kui alusnurga siinus võrdub tipunurga kahekordse siinusega.

270. Lahenda võrrandid:

- 1)  $\sin x = 2 \cos x$ ; 2)  $\sin^2 3x = 3 \cos^2 3x$ ;  
 3)  $\sin 3x = \cos 3x$ .

271. Täienurkses kolmnurgas on üks külg kahe teise külje geomeetriline keskmine. Kui suurel on selle kolmnurga teravnurgad?

272. Ruudusse on sissejoonestatud teine ruut. Arvuta ruutude külgede vaheline väiksem nurk, teades, et ruutude pindalade suhe on 1,5.

273. Lahenda võrrandid:

- 1)  $\cos^2 x = 0,25$ ; 2)  $\cos(2x + 45^\circ) = 0$   
 3)  $(4 \sin x - 1)(2 \sin x + 1) = 0$ ; 4)  $\sin 2x + \sin x = 0$ ;  
 5)  $\sin^2 2x = \cos^2 x$ ; 6)  $\cos 2x + \cos x = 0$ ;  
 7)  $\cos 3x = \cos(60^\circ - x)$ ; 8)  $\sin 4x = \sin 2x$ ;  
 9)  $\sin^2 x + \cos 2x = \frac{3}{4}$ ; 10)  $\cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x = 0$ ;  
 11)  $\frac{2 \sin x \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{\cos x}{\sin x}$ ; 12)  $6 \sin^2 x - 4 \sin x \cos x = 1$ ;  
 13)  $\sin^3 x + \cos^3 x = 0$ .

Üleandeid kordamiseks.

274. Lihtsustada avaldist  $\sin^4 \alpha + 2 \cos^2 \alpha - \cos^4 \alpha$

275. Tõesta, et  $\sin x \cdot \cot x = \cos x$

276. Tõesta, et  $\cos x \cdot \sin x \cdot \tan x = 1 - \cos^2 x$

277. Tõesta, et  $\frac{\cos(90^\circ - x)}{\cos x} = \tan x$

278. Lihtsusta avaldist  $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha$

279. Lihtsusta:  $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha$

280. Tõesta, et  $\cos^3 x + \sin^3 x = (\cos x + \sin x)(1 - \sin x \cos x)$

281. Tõesta, et  $\cos^3 x - \sin^3 x = (\cos x - \sin x)(1 + \sin x \cos x)$

282. Tõesta, et  $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x$

283. Teades, et  $\sin x = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ , avalda  $\tan x + \cot x$  a ja b kaudu.

284. Avalda x kaudu avaldis  $\frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\sin \alpha - \sin \beta}$ , teades, et  $\tan \alpha = x$  ja  $\tan \beta = \frac{1}{x}$ .

285. Kolmnurgas ABC  $\sin B = \frac{1}{3}$  ja  $\sin C = \frac{1}{2}$ . Leia  $\sin A$ .

286. Rõõpkülikus ABCD  $\sin B = \frac{3}{5}$  ja  $\sin C = \frac{1}{4}$ .

Leia suhe AB : BC.

287. Kuidas saab funktsiooni  $y = \sin x$  graafikust funktsiooni  $y = |\sin x|$  graafiku? Kas viimane on perioodiline funktsioon? Kui suur on periood?

288. Joonesta funktsiooni  $y = |\cos x|$  graafik.

289. Arvuta peast

1)  $\sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} \cos \pi$       2)  $\cos \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{6} \tan \frac{\pi}{3}$  ;

3)  $\tan 60^\circ \sin 90^\circ$ ;      4)  $\cos \frac{\pi}{6} \tan \frac{\pi}{4} \sin \pi$  ;

5)  $\cot \frac{\pi}{6} \sin \frac{\pi}{3}$ ;      6)  $\sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{2} \tan \frac{\pi}{3}$  ;

7)  $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ;

8)  $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + 2 \arccos(-1)$ .

## VI. K Ü M N E N D L O G A R I T M I D.

## §53. Kümne astmed.

=====

Täisarvulise astendajaga kümne astmed on järgüthikud:  
 $10^1 = 10$ ,  $10^2 = 100$ ,  $10^3 = 1000$  jne;  $10^0 = 1$ ,  $10^{-1} = 0,1$ ,  
 $10^{-2} = 0,01$  jne.

Kasutades ruutjuure ja kuupjuure tabeleid, saame leida ka mõnede murruliste astendajatega kümne astmete ligikaudseid väärtusi.

$$\text{Näiteks: } 10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10} = 3,162,$$

$$10^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{10^2} = 4,642.$$

Mõnikord on otstarbekas järgüthikuid kirjutada kümne astmetena: looooo asemel on lihtsam kirjutada  $10^6$ ; o,ooooo asemel  $10^{-5}$  jne.

Leia eeskiri, mille järgi saab järgüthikut ümber kirjutada kümne astmena.

Arvu, mis pole järgüthik, näiteks 2, saab ka esitada kümne astmena. Selleks peame lahendama võrrandi

$$10^x = 2.$$

Uurides selle võrrandi lahendit, selgub, et  $x$  ei saa olla täisarv, sest täisarvulise astendajaga kümne aste on järgüthik;  $x$  ei saa olla ka murr, sest siis peaks olema  $10^{\frac{m}{n}} = 2$  ( $m$  ja  $n$  on täisarvud).

Astendades võrduse mõlemad pooled arvuga  $n$ , tekib võrdus

$$10^m = 2^n,$$

mis on vastuoluline, sest  $10^m$  on järguühik, aga  $2^n$  pole järguühik. Seega saab võrrandi lahendiks olla ainult irratsionaalarv, mida on võimalik leida ligikaudu mistahes täpsusega.

Näiteks on võrrandi  $10^x = 2$  ligikaudne lahend  $x \approx 0,3$ ; ehk täpsemalt  $x \approx 0,3010$ .

Üldiselt pole võimalik võrrandit kujus

$$10^x = a$$

lahendada meile tuntud matemaatiliste operatsioonide abil. Et niisugust võrrandit lahendada, peame tutvuma uue matemaatilise mõistega.

### Ü l e s a n d e d .

290. Leia tabelite abil  $10^{\frac{1}{4}}$ ,  $10^{\frac{3}{4}}$ ,  $10^{-\frac{1}{2}}$ ,  $10^{-\frac{3}{2}}$ ,  $10^{\frac{1}{3}}$ ,  $10^{-\frac{4}{3}}$ .

### §54. Kümneendlogaritmi definitsioon.

=====

Võrrandi

$$10^x = a$$

lahendit  $x$  nimetatakse arvu  $a$  kümneendlogaritmiks ja tähistatakse sümboliga

$$\log a.$$

Seega on arvu kümneendlogaritm astenda ja, millega kümme astendades saame antud arvu.

Näiteks:  $\log 100 = 2$ , sest  $10^2 = 100$ ;

$\log 0,1 = -1$ , sest  $10^{-1} = 0,1$ ;

$\log 2 = 0,3010$ , sest  $10^{0,3010} = 2$  (vt. § 1).

Üldiselt

$$\underline{\log a = b, \text{ kui } 10^b = a.}$$

Et arvu  $a$  kümnenndlogaritm, lühidalt  $\log a$ , tähendab astendajat, millega arvu  $10$  astendades saame arvu  $a$ , siis peab kehtima samasus

$$\underline{10^{\log a} = a.}$$

Näiteks

$$10^{\log 100} = 100;$$

$$10^{\log 0,1} = 0,1;$$

$$10^{\log 2} = 2 \text{ jne.}$$

Märkus: Negatiivsetel arvudel ja arvul  $0$  puudub kümnenndlogaritm, sest ei ole olemas arvu, millega kümnet astendades saaksime negatiivse arvu või arvu null.

### Ülesanded.

291. Leia järgmised kümnenndlogaritmid:

$$\log 10000, \log 1000, \log 10, \log 1, \log 0,1,$$

$$\log 0,01, \log 0,001.$$

292. Koosta eeskiri, mille järgi saab leida kümnenndlogaritmi järgühtikutest.

293. Kasutades samasust  $10^{\log a} = a$ , arvuta:

$$10^{\log 2}, 10^{\log 7}, 10^{\log 1}, 10^{\log 2,5}.$$

294. Kirjuta järgmised arvud kümne astmetena:

$$3, 5, 0,7, b, x, ab, \frac{a}{b}.$$

295. Teisendades antud astmed astmete korrutiseks, leia:

$$10^{\log 2 + \log 3}, 10^{\log 4 + \log 3}, 10^{\log 5 + \log 2},$$

$$10^{\log 3 + \log 5 + \log 2}, 10^1 + \log 3.$$

296. Teisendades antud astmed astmete jagatiseks, leia:

$$10^{\log 6 - \log 2}, \quad 10^{\log 12 - \log 4}, \quad 10^{\log 8 - \log 4}, \\ 10^2 \cdot \log 5, \quad 10^{\log 8 - \log 2 - \log 2}.$$

297. Teisendades antud astmed astme astmeks, leia:

$$10^2 \cdot \log 5, \quad 10^3 \cdot \log 3, \quad 10^{-2} \cdot \log 4, \\ 10^{\frac{1}{2}} \cdot \log 4.$$

§55. Korrutise, jagatise, astme ja juure logaritmi.

Kümnenlogaritmi definitsiooni põhjal

$$10^{\log a} = a,$$

$$10^{\log b} = b.$$

Korrutades nende vorduste vastavad pooled, saame

$$10^{\log a} \cdot 10^{\log b} = a \cdot b$$

ehk

$$10^{\log a + \log b} = a \cdot b.$$

Kümnenlogaritmi definitsiooni põhjal järeldub siit, et

$$\log ab = \log a + \log b,$$

sest arvu 10 tuleb astendada summaga  $\log a + \log b$ , et

saada  $ab$ . Niisiis

korrutise logaritmi vordub tegurite logaritmade summaga.

Astendades vorduse

$$10^{\log a} = a$$

molemaid pooli arvuga  $r$ , saame

$$(10^{\log a})^r = a^r$$

ehk

$$10^{r \log a} = a^r,$$

millest jällegi kümnenlogaritmi definitsiooni põhjal järe-

reldub, et

$$\log a^x = x \log a,$$

Seega

astme logaritm võrdub astmealuse logaritmi ja asten-  
daja korrutisega.

Neist kahest teoreemist järeldub;

1)  $\log \frac{a}{b} = \log(a \cdot b^{-1}) = \log a + \log b^{-1} = \log a - \log b,$   
s.o.

jagatise logaritm võrdub jagatava ja jagaja logaritmi-  
de vahega.

$$2) \log \sqrt[n]{a} = \log a^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \log a = \frac{\log a}{n},$$

s.o.

juure logaritm võrdub juuritava logaritmi ja juurija  
jagatisega.

Teades, et  $\log 2 = 0,3010$  ja  $\log 3 = 0,4771$ , saame lei-  
da ttestatud teoreeme rakendades  $\log 6$ ;  $\log 1,5$ ;  $\log 4$ ;  
 $\log 8$ ;  $\log 32$ ;  $\log 3$  jne.

$$\log 6 = \log (2 \cdot 3) = \log 2 + \log 3 = 0,3010 + 0,4771 =$$

$$= 0,7781.$$

$$\log 1,5 = \log (3:2) = \log 3 - \log 2 = 0,4771 - 0,3010 =$$

$$= 0,1761.$$

$$\log 8 = \log 2^3 = 3 \log 2 = 3 \cdot 0,3010 = 0,9030.$$

$$\log \sqrt{3} = \frac{1}{2} \log 3 = 0,4771 : 2 = 0,2386.$$

### Ü l e s a n d e d.

298. Teades, et  $\log 2 = 0,3010$ ,  $\log 3 = 0,4771$ ,  $\log 5 =$   
 $= 0,6990$  ja  $\log 7 = 0,8451$ , arvuta:

1)  $\log 14$ ;  $\log 35$ ;  $\log 1,4$ ;  $\log 0,4$ ;  $\log 25$ ;

$$2) \log_7^7; \log 125; \log^3 \sqrt[3]{7}; \log 5^4.$$

### §56. Avaldise logaritmi.

=====

Rakendades teoreeme korrutise, jagatise, astme ja juure logaritmi kohta, saame leida üksiliikmete logaritme.

Näide 1.  $\log \frac{ab}{c} = \log ab - \log c = \log a + \log b - \log c$

Näide 2.  $\log \frac{a^3 \sqrt[3]{c}}{b^2 d} = \log a^3 \sqrt[3]{c} - \log b^2 d =$   
 $= \log a + \log \sqrt[3]{c} - (\log b^2 + \log d) =$   
 $= \log a + \frac{1}{3} \log c - (2 \log b + \log d) =$   
 $= \log a + \frac{1}{3} \log c - 2 \log b - \log d.$

Murdavaldise logaritmi leidmine muutub lihtsamaks, kui murdavaldise esitada täisarvavaldisena kasutades negatiivseid astendajaid. Ka juuri on soovitatav kirjutada murrulise astendajaga astmetena.

Sellisel toimides on

$$\log \frac{a^3 \sqrt[3]{c}}{b^2 d} = \log a^3 c^{\frac{1}{3}} b^{-2} d^{-1} =$$

$$= 3 \log a + \frac{1}{3} \log c - 2 \log b - \log d.$$

Kui avaldises esineb summa või vahe, peame silmas pidama, et summat või vahet ei tohi liikmeti logaritmidada.

Näide 3.  $\log \frac{a+b}{c} = \log(a+b) - \log c,$

(mitte:  $\log \frac{a+b}{c} = \log a + \log b - \log c$ ).

Näide 4.  $\log \frac{d^2 \sqrt{c}}{f(a+b)} = \log d^2 c^{\frac{1}{2}} f^{-1} (a+b)^{-1} =$

$$= 2 \log d + \frac{1}{2} \log c - \log f - \log(a+b).$$

Ülesanded.

299. Leia järgmiste avaldiste logaritmid.

- 1)  $abc$ ; 2)  $a^2x$ ; 3)  $\frac{2a}{b}$ ; 4)  $\frac{0,7a^2}{b}$ ; 5)  $\frac{a+b}{c^2}$ ;  
 6)  $a\sqrt[3]{b^2}$ ; 7)  $\sqrt{\frac{1}{xy}}$ ; 8)  $\sqrt{\frac{a}{b}}$ ; 9)  $\frac{(a-b)^2}{c}$ ; 10)  $\frac{(a+b)d}{(a-b)c}$ ;  
 11)  $a\sqrt{b}$ ; 12)  $\frac{a^2b}{c^4}$ ; 13)  $\frac{d^2fc}{h\sqrt{g}}$ ; 14)  $\frac{10\sqrt{a^2-b^2}}{a^2b^2}$ ;  
 15)  $g\sqrt{(e+f)\sqrt{h}}$ ; 16)  $\sqrt{\frac{x\sqrt{y}}{z}}$ ; 17)  $\frac{a^{-1}b^{\frac{1}{2}}}{c}$ ; 18)  $\frac{a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{2}{5}}}{c^{-1}d}$ ;  
 19)  $\frac{x\sqrt[5]{y}}{\frac{a+b}{c}}$ .

300. Kasutades §55 ülesandes nr.298 antud arvude logaritme, arvuta

- 1)  $\log(2 \cdot 3 \cdot 7)$ ; 2)  $\log \frac{5 \cdot 3}{2}$ ; 3)  $\log(3^2 \cdot \sqrt{5})$ ;  
 4)  $\frac{\log 5 \cdot \sqrt{7}}{3^2}$ ; 5)  $\log \frac{1}{2^5 \cdot \sqrt{3}}$ .

## §57. Kümendlogaritmi omadused.

=====

Rakendades teoreemi korruptise logaritmist (vt. §55)

ja teades, et  $\log 2 = 0,3010$ , saame arvutada  $\log 20$ ;  $\log 200$ ; $\log 2000$ ; ...;  $\log 0,2$ ;  $\log 0,02$ ;  $\log 0,002$  jne. $\log 20 = \log(10 \cdot 2) = \log 10 + \log 2 = 1 + 0,3010 = 1,3010$ ; $\log 200 = \log(100 \cdot 2) = \log 100 + \log 2 = 2 + 0,3010 =$   
 $= 2,3010$  jne. $\log 0,2 = \log(0,1 \cdot 2) = \log 0,1 + \log 2 = -1 + 0,3010$  $= -0,6990$ .

$-0,6990 = -1 + 0,3010$  asemel aga kirjutatakse  $\bar{1},3010$  (loe: üks miinusega koma 3010). Niisugust kümnenndmurd, mille täisosa on negatiivne aga murdosa positiivne, nimetatakse p o o l n e g a t i i v s e k s a r v u k s .

$$\begin{aligned} \log 0,02 &= \log(0,01 \cdot 2) = \log 0,01 + \log 2 = -2 + 0,3010 = \\ &= \bar{2},3010 \text{ jne.} \end{aligned}$$

Teades, et  $\log 3,728 = 0,5714$ , võime samuti leida, et

$$\log 37,28 = 1,5714; \quad \log 0,3728 = \bar{1},5714;$$

$$\log 372,8 = 2,5714; \quad \log 0,03728 = \bar{2},5714;$$

$$\log 3728 = 3,5714; \quad \log 0,003728 = \bar{3},5714$$

$$\log 37280 = 4,5714 \text{ jne.} \quad \text{jne.}$$

Esitatust selgub, et arvu kümnenndlogaritm on kümnenndmurd, mille t ä i s o s a sõltub koma asukohast antud arvus ja alati positiivne m u r d o s a sõltub arvu tüvest. Kümnenndlogaritmi täisosa ja murdosa nimetatakse ka vastavalt karakteristikuks ja mantissiks.

Toodud näidete põhjal võime öelda

1. arvust 1 suurema arvu kümnenndlogaritmi täisosa on positiivne ja võrdub  $(n - 1)$ -ga, kui arvul on  $n$  numbrit koma ees;

2. arvust 1 väiksema arvu kümnenndlogaritmi täisosa on negatiivne ja ta absoluutväärtus võrdub nullide arvuga tüve ees (koma ees seisev null kaasa arvatud).

Näiteks arvu 287,4 kümnenndlogaritmi täisosa peab olema 2, sest koma ees on kolm numbrit. Arvu 0,00047 kümnenndlogaritmi täisosa on  $\bar{4}$ , sest tüve 47 ees seisab neli nulli.

3ol.MÄÄra järgmiste arvude kümnendlogaritmide täisosad:

1) 32,4; 300; 4,576; 6; 0,643; 0,0007;  
1,008; 100.

2) 23000000; 0,0080; 0,001; 682397; 0,00006603;  
1,5788.

### §58. Logaritmide tabelid.

=====

Eespool nägime, et kui

$$x = 100, \text{ siis } \log x = 2;$$

$$x = 1000, \text{ siis } \log x = 3;$$

$$x = 2, \text{ siis } \log x = 0,3010 \text{ jne.}$$

Siit näeme, et kui avaldises

$$\log x$$

vaadelda  $x$ -i muutuva suurusena, siis igale  $x$ -i väärtusele vastab avaldise  $\log x$  kindel väärtus. See aga tähendab, et avaldis  $\log x$  on muutuva suuruse  $x$ -i funktsioon (vt. §2).

Valemi kujul kirjutatakse seda

$$y = \log x,$$

kus  $y$  on funktsioon ja  $x$  on argument. Sellist funktsiooni nimetatakse **l o g a r i t m f u n k t s i o o n i k s**.

Kuna kümnendlogaritme kasutatakse laialdaselt arvutus-töös, siis on töö lihtsustamiseks koostatud kümnendlogaritmide tabelid, mis on tegelikult funktsiooni

$$y = \log x$$

tabeliliseks esituseks. Kuna kümnendlogaritmi täisosa on leitav peast, siis on tabelisse kantud ainult logaritmi-de (funktsiooni väärtuste) murdosad. Vastavalt sellele, mit-me kohaga on murdosa antud, nimetatakse logaritme ja ka

tabeleid kolme-, nelja- jne.kohalisteks.Tabeli valik sõltub arvutustöö täpsusest. Et neljakohalised tabelid on piisavad enamiku igapäevases elus esinevate ülesannete lahendamiseks, siis vaatleme ainult neid.

Koolis kasutatava V.M.Bradise logaritmid tabeli abil saab leida tihmalt nelja tüvenumbriga arvu kümnendlogaritmi murdosa.Kui arvul on rohkem tüvenumbreid,ümardame selle neljale tüvenumbrile.

Näiteks:  $27,4683 \approx 27,47,$

$397732 \approx 397700$  jne.

Selgitame arvu kümnendlogaritmi murdosa leidmist mõne näite varal.

Väljavõtte neljakohaliste logaritmid tabelist.

N	0	1	2	3	4	...	9	1	2	3	4	...	9
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
20	3010	3032	3054	3075	3096			2	4	6	8	...	19
						...	3201	2	4	6	8	...	19
21	3222	3243	3263	3283	3304	...	3404	2	4	6	8	...	18
22	3424	3444	3464	3483	3502	...	3598	2	4	6	8	...	17
23	3617	3636	3655	3674	3692	...	3784	2	4	6	7	...	17
..	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Paranduste tabel

Tabelli esimesse, N-ga tähistatud veergu on trükitud arvu (argumendi) esimene ja teine tüvenumber ja esimesse ritta on trükitud arvu kolmas tüvenumber.Sisenedes arvu kolme esimese tüvenumbri järgi tabelisse, leiame tabeli seest arvu kümnendlogaritmi (funktsiooni) murdosa.

Näiteks arvu 214 logaritmi mardosa on	3304,
arvu 2,32 logaritmi mardosa on	3655,
" 20,4     "-     "-	3096,
" 20,9     "-     "-	3201,
" 22       "-     "-	3424,
" 2        "-     "-	3000 jne.

Kui arvul on neli tšvenumbrit, siis kasutame arvu logaritmi mardosa leidmiseks lineaarset interpolatsiooni (vt. §12).

Näiteks arvu  $x = 2234$  logaritmi mardosa  $y$  leidmisel määrame esmalt antud arvule lähimad kolme tšvenumbriga arvud  $x_1$  ja  $x_2$ , mille vahele antud arv jääb. Antud juhul

$$x_1 = 2230;$$

$$x_2 = 2240.$$

Leiame tabelist arvude  $x_1$  ja  $x_2$  logaritmade mardesad, mida tšhistame vastavalt

$$y_1 = 3483;$$

$$y_2 = 3502.$$

Nüüd kasutame lineaarse interpolatsiooni valemit, mille abil leiame argumendi muudule

$$h = x - x_1 = 4 \text{ (viimase koha tšhikut)}$$

vastava funktsiooni muudu (parandise)  $k$ .

$$k = \frac{3502 - 3483}{2240 - 2230} \cdot 4 \approx 8 \text{ (viimase koha tšhikut)}$$

Tabelist näeme, et argumendi kasvades funktsioon kasvab ehk mida suurem on arv, seda suurem on tema kümnendlogaritm. Seepärast

$$y = y_1 + k = 3483 + 8 = 3491.$$

Arvu 8, mida peame liitma arvu esimese kolme tüvenumbri järgi leitud murdosale, nimetatakse neljanda tüvenumbri paranduseks. Paranduse hõlpsamaks leidmiseks on lisatud logaritmi tabelile nn. paranduste tabel.

Kui oleme leidnud logaritmi murdosa arvu esimese kolme tüvenumbri järgi, siis siirdume samal real paranduste tabelisse, kus on trükitud neljandale tüvenumbrile vastav parandus. Arvu neljas tüvenumber tuleb valida paranduste tabeli kõige esimesest (viimasest) reast.

Näiteks arvu 2234 puhul saame 223 järgi murdosa 3483 ja paranduste tabelis saame 4 järgi paranduse 8 ning arvu 2234 logaritmi murdosa on  $3483 + 8 = 3491$ . Samuti leiame veel, et

arvu 2321 logaritmi murdosa on	3657,
" 2,002	- " - " 3014,
" 0,2199	- " - " 3422,
" 20,43	- " - " 3102,
" 20,94	- " - " 3209 jne.

Arvu kümnendlogaritmi leidmisel leiame tabelite abil kirjeldatud viisil arvu kümnendlogaritmi murdosa; arvu kümnendlogaritmi täisosaga määrame  $\bar{m}$  ast. Sel teel saame näiteks, et

$$\begin{aligned} \log 2234 &= 3,3491, \\ \log 2,002 &= 0,3014, \\ \log 0,02303 &= \bar{2},3623, \\ \log 209,1 &= 2,3203. \end{aligned}$$

Ü l e s a n d e d.

302. Leia alljärgnevate arvude kümnenndlogaritmid.

- 1) 2,55; 67,3; 52; 40; 0,4; 0,0308; 0,01.
- 2) 28,62; 0,5323; 2,646; 705200; 0,004508; 1,006.
- 3) 1,5848; 17523; 832960; 60953; 0,0079527; 1,0008.

§59. Arvu leidmine tema kümnenndlogaritmi

=====

järgi.  
=====

Arvu kümnenndlogaritmi leidmise pöördehteaks on arvu leidmine tema kümnenndlogaritmi järgi, mida nimetatakse **a n t i l o g a r i t m i** leidmiseks.

Vörrandi

$$\log x = a$$

lahendamine nõuab kümne astendamist arvuga a. Selleks võime kasutada logaritmi tabelit, kusjuures otsime antud kümnenndlogaritmi a murdosa tabeli seest ja kui see on leitud, siis saame x-i tüvenumbrid lugeda tabeli äärtelt. Koma asukoha aga määrame kümnenndlogaritmi täisosajärgi.

Näiteks leiame x, kui  $\log x = 1,3464$ .

Leidnud tabeli seest kümnenndlogaritmi murdosa 3464, saame tabeli äärtelt lugeda x-i tüvenumbrid 222. Koma asukoha määrame sellise kaalutlusega, et otsitava x-i kümnenndlogaritmi täisosa oleks 1. See aga saab olla 1 ainult siis, kui x-i täisosas on kaks numbrit. Seega

$$x = 22,2.$$

Leiame veel  $x$ , kui  $\log x = e,3681$ .

Otsides tabeli seest murdosa  $y = 3681$ , ei leia me sel-  
list arvu. Teeme kindlaks, missuguste kõrvutiseisvate ta-  
belliarvude  $y_1$  ja  $y_2$  vahel asub murdosa ja kasutame lineaar-  
set interpolatsioonit. Käesoleval juhul on nendeks tabeli-  
arvudeks

$$y_1 = 3674;$$

$$y_2 = 3692.$$

Nendele arvudele vastavad tabeli äärtelt leitud arvud.

$$x_1 = 2330;$$

$$x_2 = 2340.$$

Funktsiooni muut

$$k = y - y_1 = 7 \text{ (viimase koha ühikut).}$$

Leiame argumenti muudu  $h$

$$h = \frac{2340 - 2330}{3692 - 3674} \cdot 7 \approx 4 \text{ (viimase koha ühikut)}$$

Seega otsitava  $x$  tüvenumbrid on

$$x_2 + h = 2334.$$

Kuna kümneendlogaritmi täisosa on 0, siis peab  $x$ -i täis-  
osa olema üks number ja

$$x = 2,334.$$

Arvu neljanda tüvenumbri leidmist hõlbustab parandus-  
te tabel.

Kui oleme kindlaks teinud, et kümneendlogaritmi mard-  
osa 3681 asub tabeliarvude 3674 ja 3692 vahel, siis mää-  
rame paranduse, mida tuleb liita väiksemale tabeliarvule,  
et saada antud kümneendlogaritmi murdosa. Käesoleval juhul

on see  $3681 - 3674 = 7$ . Siirdudes real, millel seisab väiksem tabeliarv 3674, paranduste tabelisse, otsime sealt 7-ga võrdse või lähima paranduse; selle paranduse veerunumber annabki meile arvu neljanda tüvenumbri 4.

Kümnendlogaritmi järgi arvu leidmist hõlbustab veelgi **a n t i l o g a r i t m i d e t a b e l**.

Väljavõte antilogaritmi tabelist.

m	0	1	2	3	.....	9	1	2	3	...	9
..	...	...	...	...	...	...	..	..	..	...	...
,40	2512	2518	2523	2529	...	2564	1	1	2	...	.5
,41	2570	2576	2582	2588	...	2624	1	1	2	...	5
,42	2630	2636	2642	2649	...	2685	1	1	2	...	6
,43	2692	2698	2704	2710	...	2748	1	1	2	...	6
...	...	...	...	...	...	...	..	..	..	...	...

Selle tabeli esimesse m-ga tähistatud veergu on trükitud arvu kümnendlogaritmi murdosa kaks esimest numbrit ja esimesse ritta kolmas number.

Sisenevad tabelisse kümnendlogaritmi murdosa kolme esimese numbriga järgi, leiame tabelist arvu tüvenumbrid, milledele tuleb veel liita kümnendlogaritmi murdosa neljanda numbriga järgi saadud parandus paranduste tabelist.

Näiteks leiame antilogaritmi tabelite abil  $x$ , kui

$$\log x = 2,4123.$$

Kümnendlogaritmi murdosa esimese kolme numbriga 412 järgi leiame tabeli seest tüvenumbrid 2582. Samal real paranduste tabelist saame kümnendlogaritmi murdosa neljan-

da tšivenumbri 3 järgi paranduse 2. Seega on otsitava  $x$  tšivenumbriid 2584. Määratud kümnendlogaritmi täisosa 2 järgi koma asukohta, saame, et

$$x = 258,4.$$

Samuti leiame veel, et kui

$$\log x = 0,4101, \text{ siis } x = 2,571,$$

$$\log x = \bar{2},4333, \text{ siis } x = 0,02712,$$

$$\log x = 4,4009, \text{ siis } x = 25170,$$

$$\log x = \bar{1},0377, \text{ siis } x = 0,1091,$$

$$\log x = 1,0086, \text{ siis } x = 10,20 \text{ jne.}$$

### Ü l e s a n d e d.

303. Leia  $x$ , kui

$$1) \log x = 2,5478; \log x = \bar{1},8035; \log x = 0,1703.$$

$$2) \log x = \bar{3},3350; \log x = 4,8751; \log x = \bar{2},9317.$$

$$3) \log x = 1,0622; \log x = 0,0096; \log x = \bar{1},0007.$$

$$4) \log x = 5,7762; \log x = \bar{4},6068; \log x = \bar{3},4004.$$

$$5) \log x = 0,0520; \log x = 4,6000; \log x = \bar{2},9746.$$

§60. Tehted poolnegatiivsete arvudega.

=====

Ühest väiksemate positiivsete arvude kümnendlogaritmid on poolnegatiivsed arvud. Niisuguseid arve saab kirjutada negatiivse täisarvu ja positiivse mardosa summana.

Näiteks:

$$\bar{2},7409 = -2 + 0,7409.$$

See summa on negatiivne. Poolnegatiivset arvu saab muuta negatiivseks, kui arvutame negatiivse täisosa ja posi-

tiivse mardosa summa.

Nii on

$$\bar{2},7409 = -2 + 0,7409 = -1,2591,$$

$$\bar{1},7880 = -1 + 0,7880 = -0,2120,$$

$$\bar{3},0336 = -3 + 0,0336 = -2,9664 \text{ jne.}$$

Kui tahame negatiivset arvu teisendada poolnegatiivseks, toimime näiteks nii:

$$\begin{aligned} -1,2591 &= -1 - 0,2591 = (-1 - 1) + (-0,2591 + 1) = \\ &= -2 + 0,7409 = \bar{2},7409. \end{aligned}$$

Siit selgub, et negatiivse arvu teisendamisel poolnegatiivseks, peame tükisaga liitma  $-1$  ja mardosa asemele kirjutama tema tükenduse üheni. Ühildalt kirjutame:

$$-1 + 1$$

$$-1,2591 = \bar{2},7409;$$

$$-1 + 1$$

$$-2,4240 = \bar{3},5760;$$

$$-1 + 1$$

$$-0,6605 = \bar{1},3395 \text{ jne.}$$

### Ü l e s a n d e d.

304. Teisenda alljärgnevad poolnegatiivsed arvud negatiivseteks.

$$1) \bar{1},4462; \bar{2},0738; \bar{5},6804; \bar{1},2480; \bar{3},0073,$$

$$2) \bar{1},0008; \bar{1},6200; \bar{4},7000; \bar{2},2219; \bar{6},3040,$$

$$3) \bar{1},5999; \bar{2},9990; \bar{3},3001; \bar{4},0048; \bar{1},8548.$$

305. Teisenda alljärgnevad negatiivsed arvud poolnegatiivseteks.

$$1) -3,7082; -2,0563; -1,8455; -0,6639; -0,0470,$$

- 2)  $-0,5861$ ;  $-2,0009$ ;  $-4,9991$ ;  $-0,2$ ;  $-5,76$ ,  
 3)  $-3,408$ ;  $-4,4000$ ;  $-0,02$ ;  $-1,0001$ ;  $-4,4739$ .

Poolnegatiivseid arve saab liita ja lahutada nagu küm-  
 nendmarde, kirjutades neid üksteise alla nii, et vastavad  
 järgud seisaksid kohakuti. Siinjuures aga ei tohi unusta-  
 da, et täisosad on negatiivsed!

Näiteks: 1)  $\begin{array}{r} 2,8647 \\ + 1,7438 \\ \hline 2,6085 \end{array}$

Täisosade liitmisel peame silmas, et kümnendike liitmi-  
 sel saime 16 kümnendikku. Siit saame ühe positiivse üheli-  
 se, mille liidame antud täisosadega

$$1 + (-2) + (-1) = -2.$$

$$2) \begin{array}{r} 1,7608 \\ - 2,9462 \\ \hline 0,8146 \end{array}$$

Täisosade lahutamisel peame silmas, et kümnendike lahu-  
 tamiseks oli vähendatavas vaja üks üheline peenestada küm-  
 nendikuks (seda tähistab punkt vähendatava täisosa kohal).  
 Selle tulemusena muutus vähendatava täisosa ühe võrra väik-  
 semaks. Seega pärast kümnendike lahutamist on vähendatava  
 täisosa  $-2$  ja vahe täisosa on

$$-2 - (-2) = 0.$$

$$3) \begin{array}{r} 2,7648 \\ - 4,4766 \\ \hline 2,2882 \end{array}$$

Ü l e s a n d e d.

306. Teosta alljärgnevad tehted.

$$1) \bar{1},7446 + 0,8367 \qquad 2) \bar{4},6385 - \bar{2},8856$$

$$\bar{1},5834 + 0,4293 \qquad \bar{1},9074 + \bar{1},5229$$

$$2,6737 - \bar{1},4636 \qquad 2,1788 - \bar{5},0669$$

$$0,6351 - \bar{2},9442 \qquad \bar{3},4467 - \bar{1},6262.$$

$$3) \bar{1},7735 + \bar{2},6849 + 2,5327$$

$$4,3374 + \bar{5},5228 + \bar{1},5781 + 0,6117$$

$$\bar{3},0805 + \bar{4},5901 + 5,3306 + \bar{2},7717 + 0,4862$$

$$0,8840 + \bar{8},6162 + 4,5287 + \bar{5},5613 + \bar{3},7494$$

Poolnegatiivsete arvude korrutamisel ja jagamisel teisendame need üldjuhul enne negatiivseteks, teotame siis korrutamise või jagamise ja tarbe korral mundame saadud vastuse unesti poolnegatiivseteks.

$$\text{Näiteks: } 1) 1,2 \cdot \bar{3},4675 = 1,2 \cdot (-2,5325) = \\ = -3,0390 = \bar{4},9610.$$

$$2) \bar{2},8896 : 2,4 = -1,1104 : 2,4 = \\ = -0,4627 = \bar{1},5373.$$

Erijuhtudel, kui korrutaja või jagaja on naturaalarv, saab poolnegatiivseid arve korrutada ja jagada negatiivseks teisendamata.

$$\text{Näiteks: } 3 \cdot \bar{4},7708 = \bar{10},3124.$$

Peame silmas, et  $3 \cdot (-4) = -12$  ja 2 meeles annab -10.

Kui negatiivne täisosa jagub jagajaga, saame poolnegatiivset arvu kohe jagada.

$$\text{Näiteks: } \bar{6},4672 : 2 = \bar{3},2336.$$

Kui negatiivne täisosa ei jagu jagajaga, peame kirjutama poolnegatiivse arvu negatiivse täisosa ja positiivse murdosaga summana. Siis täiendame täisosa negatiivse arvuni, mis jagub jagajaga. Täienduse "+" märgiga liidame veel positiivse murdosaga, et summa ei muutuks, ja teostame siis jagamise.

$$\begin{aligned} \text{Näiteks: } \overline{7},6438 : 3 &= (-7 + 0,6438) : 3 = \\ &= (-9 + 2,6438) : 3 = \\ &= -3 + 0,8813 = \overline{3},8813. \end{aligned}$$

Kasutades lühemat kirjutusviisi, saame viimast ülesannet lahendada ka nii:

$$\begin{aligned} &-2 + 2 \\ \overline{7},6438 : 3 &= 3,8813, \end{aligned}$$

kusjuures murdosale kirjutatud positiivset täiendust tuleb mõelda murdosa ette.

### Ülesanded.

307. Teosta alljärgnevad tehted.

- |                                |                            |                            |
|--------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| 1) $2 \cdot \overline{2},1323$ | 2) $\overline{1},5472 : 2$ | 3) $\overline{4},7567 : 6$ |
| 3) $\overline{3},8813$         | $\overline{8},4666 : 2$    | $\overline{14},6735 : 5$   |
| 4) $\overline{1},7633$         | $\overline{4},0833 : 3$    | $\overline{5},1852 : 4$    |
| 7) $\overline{1},8043$         | $\overline{9},4572 : 4$    | $\overline{3},0051 : 3$    |
- 4)  $\overline{1},4766 : 0,2; 2,5 \cdot \overline{1},5825; 7,5 \cdot \overline{3},7604$ .

### §61. Arvutamine kümnenndlogaritmidel abil.

Kümnenndlogaritmidel kasutamine arvutamisel hõlbustab tööd, sest korrutamine taandub liitmisele, jagamine - lahutamisele, astendamise - korrutamisele ja juurimine - jago-

misele. Arvutustulemuste täpsus neljakohalistel murdosadega kümnendlogaritmi kasutamisel ei ületa küll nelja tühenumbrit, kuid tavaliselt on selline täpsus piisav.

Kümnendlogaritmi rakendamist arvutuste teostamisel selgitame mõne konkreetse näite varal.

Näide 1. Leia korrutis

$$x = 29,78 \cdot 6,546.$$

Rakendades teoreemi korrutise logaritmist, saame

$$\log x = \log 29,78 + \log 6,546.$$

Tabelist leiame  $\log 29,78$  ja  $\log 6,546$  väärtused:

$$\log x = 1,4740 + 0,8160 = 2,2900.$$

Antilogaritmi tabelist leiame kümnendlogaritmi murdosa 2900 järgi  $x$ -i tühenumbrid 195. Et karakteristik on 2, siis peab arvu täisosa olema kolmekohaline, seega

$$x = 195.$$

Näide 2. Arvuta:  $x = \frac{763,6 \cdot 0,8445}{42,94 \cdot 2,706}$ .

Kirjutame mardavaldise ümber täisavaldisena

$$x = 763,6 \cdot 0,8445 \cdot 42,94^{-1} \cdot 2,706^{-1}$$

ja logaritmime

$$\log x = \log 763,6 + \log 0,8445 - \log 42,94 - \log 2,706.$$

Kui oleme tabelist leidnud arvude kümnendlogaritmid, saame:

$$\log x = 2,8828 + 1,9266 - 1,6329 - 0,3423 = 0,8342.$$

ja antilogaritmi tabelist leiame, et

$$x = 6,826.$$

Näide 3. Arvuta:

$$x = \frac{0,0874^2 \cdot \sqrt[3]{68150^2}}{1,488^4 \cdot \sqrt{0,00547}}.$$

Kirjutame murdavaldise t mber t hisavaldisena ja juured murruliste astendajatega astmetena, saame

$$x = 0,0874^2 \cdot 68150^{\frac{2}{3}} \cdot 1,488^{-4} \cdot 0,00547^{-\frac{1}{2}}$$

Edasi leiame avaldise logaritmi:

$$\log x = 2\log 0,0874 + \frac{2}{3}\log 68150 - 4\log 1,488 - \frac{1}{2}\log 0,00547$$

Arvutuste k ep rasemaks muutmiseks koostame tabeli.

N	log N	n	n.log N
0,0874	$\bar{2},9415$	2	$\bar{5},8830$
68150	4,8334	$\frac{2}{3}$	3,2223
			1,1053
1,488	0,1726	4	0,6904
0,00547	$\bar{3},7380$	$\frac{1}{2}$	$\bar{2},8690$
			$\bar{1},5594$

$$\log x = 1,5459$$

$$x = \underline{35,15}$$

Tabelis arvutame esiteks positiivsete liikmete summa ja teiseks negatiivsete liikmete summa. Lahitanud positiivsete liikmete summast negatiivsete liikmete summa, saame log x v h rtuse. L puks leiame antilogaritmid tabelitest avaldise x v h rtuse.

####   l e s a n d e d,

Arvuta logaritmid tabelite abil:

$$308. 1) 68,4 \cdot 3,764; \quad 2) 459,2 \cdot 0,08063.$$

$$309. 1) 65410 \cdot 0,01728; \quad 2) 17,66 \cdot 1,8647.$$

$$310. 1) 56397 \cdot 0,8804365; 2) 1,7588 \cdot 0,4294.$$

$$311. 1) \frac{15,3 \cdot 1,206}{44,8} \quad 2) \frac{0,4921 \cdot 75,8}{0,1422}$$

$$312. 1) \frac{4608 \cdot 3}{67,45 \cdot 0,72}; \quad 2) \frac{0,1}{2,66 \cdot 0,3666 \cdot 4}$$

$$313. 1) \frac{1}{24,32 \cdot 0,0092}; \quad 2) \frac{29,61 \cdot 0,0532}{0,8177 \cdot 163,4}$$

$$314. 1) 8,803^5; 0,6146^4; \quad 2) 31,73^{2,2}; 0,562^{0,12}.$$

$$315. 1) \sqrt[3]{5713}; \sqrt[5]{9417}; 2) \sqrt[7]{10}; \sqrt[10]{1000}.$$

$$316. 1) 62,4 \cdot 17,8^2; \quad 2) \frac{0,7324^3}{\sqrt{0,0142}}; \quad 3) 0,158^2 \cdot \sqrt{77,2}.$$

$$317. 1) \frac{14,85 \cdot \sqrt[3]{0,9308}}{5,78^2 \cdot \sqrt{0,126}} \quad 2) \frac{6,85^2 \cdot \sqrt[5]{667,9}}{11,42^3 \cdot \sqrt[4]{0,033}}$$

$$318. 1) \frac{66240 \cdot \sqrt[3]{0,09405 \cdot 1,52^2}}{0,868^3 \cdot \sqrt{226,2 \cdot 0,78}};$$

$$2) \frac{0,004492 \cdot \sqrt[5]{17900^2}}{\sqrt{55,2^4} \cdot 0,00895^3}$$

$$319. 1) \frac{\sqrt[3]{17,96^2 \cdot \sqrt{0,52}}}{42,8}; \quad 2) \frac{\sqrt[4]{0,04671}}{0,0728^3 \cdot \sqrt[2]{0,000496}}$$

320. Leia ringi pindala, kui diameeter on 82,64 cm.

321. Tornil katus on mudukujulise põhjaga korrapärane püramiid. Leia katuse pindala, kui põhiserv on 6,78 m ja külgtahu apoteem on 8,06 m.

322. Koonuse põhja diameeter on 522 mm ja kõrgus on 472 mm. Leia koonuse ruumala.

323. Kera raadius on 8,27 cm, kui suur on selle kera

ruumala?

324. Vagonett sõidab paigalseisust 1 minuti ja 13 sekundi kestel kallakust alla kiirendusega  $14,8 \text{ cm/sec}^2$ . Kui pika tee ta läbib selle ajaga ja milline on ta kiirus tee lõpul?

Kui avaldises esinevad liitmise ja lahutamise tehted, peame need teostama eraldi, sest summat ja vahet ei saa logaritmid.

$$\text{Näide 4. } \frac{16,73}{0,5208} + \frac{6,38^2 \sqrt[3]{42,2}}{44,7}$$

Selle tlesande lahendamisel arvutame esmalt logaritmid abil esimese ja teise liikme eraldi ja siis liidame tulemused.

Teosta nimetatud tehted.

$$\text{Näide 5. } \frac{84,17 \sqrt{36,42^2 - 17,85^2}}{72,63}$$

Selle tlesande lahendamisel arvutame ruutude tabelite abil  $36,42^2 - 17,85^2$ , mille tulemusena saame juba logaritmitava avaldise.

Teosta arvutused.

### Ülesanded.

Arvuta:

$$325. \quad \sqrt[5]{3,442^2 - 0,67888^2}$$

$$326. \quad \sqrt{\frac{848,3}{766,5}} + \sqrt[3]{\frac{42,55^2}{2067}}$$

$$327. \quad \sqrt[3]{\frac{14 + \sqrt{14}}{81 - \sqrt{170}}}$$

$$328. \quad \frac{3,64^3 \sqrt{18,72^2 - 66,4}}{15,52 \sqrt{3,974^2} + 8,693^2}$$

329. Arvuta tlesannete 321 ja 322 andmete põhjal tor-  
ni katusealuse ruumala ja koonuse täispindala.

§62. Funktsiooni skaala mõiste.

=====

Keordinaatteljestikus kujutatakse argumendi ja selle  
vastava funktsiooni väärtusi kahe arvtelje, abstsissitelje  
ja ordinaattelje abil.

On olemas võte argumendi ja funktsiooni vastavate väärtu-  
tuste graafiliseks kujutamiseks ühe arvtelje abil. Selleks  
paigutatakse pärast mõõtühiku valimist arvteljele algus-  
punktist alates lõigud, mille pikkused kujutavad funktsioo-  
ni väärtusi; nende lõikude lõpp-punktide juurde aga kirju-  
tatakse argumendi vastavad väärtused. Funktsiooni väärtu-  
si joonisele ei kirjutata, sest need on lõigu pikkustena  
mõõdetavad. Sel teel saadaksegi pilt nii argumendi kui ka  
funktsiooni vastavatest väärtustest ühel ainsal arvteljel.  
Niisugust arvtelge nimetatakse funktsiooni a s t m i -  
k u k s e h k s k a a l a k s .

Valmistame näitena funktsiooni

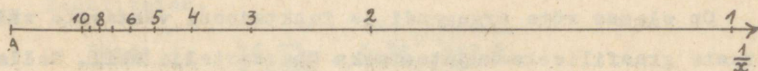
$$y = \frac{1}{x}$$

skaala. Selleks koostame esmalt argumendi ja funktsiooni  
vastavate väärtuste tabeli.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{10}$

Kui valime mõõtühikuks lõigu pikkusega 1 dm, siis argu-  
mendi väärtustele 1, 2, 3 jne. vastavad funktsiooni väärt-

tused võime kujutada lõikudena, mille pikkused on 1 dm, 5 cm, 3,3 cm jne. Paigutame need lõigud arvteljele nii, et kõikide aluspunktid ühtivad teljel võetud kindla punktiga A ning lõpp-punktide juurde kirjutame vastavad argumenti väärtused (jeon. 74).



Jeon. 74

Ülesanded.

330. Valmista skaala, millele on kujutatud funktsiooni  $y = \frac{1}{x}$ -väärtused, mis vastavad  $x$ -i väärtustele, -1, -2, -3, -4, -5, -8; 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

331. Valmista funktsiooni  $y = x^2$  skaala argumenti väärtustel

$$\frac{1}{2}, 1, 1\frac{1}{2}, 2, 2\frac{1}{2}, 3.$$

332. Valmista funktsiooni  $y = \frac{1}{x+1}$  skaala.

§ 63. Logaritmiline skaala.

=====

Valmistades funktsiooni  $y = \log x$  skaala, saame **l o g a r i t m i l i s e s k a a l a**.

Selle skaala ehitamiseks koostame esmalt funktsiooni  $y = \log x$  väärtuste tabeli, ümardades logaritmi väärtused kahe numbrini koma järel.

$x$	$\log x$	$x$	$\log x$	$x$	$\log x$
1	0,00	10	1,00	100	2,00
2	0,30	20	1,30	200	2,30
3	0,48	30	1,48	300	2,48
4	0,60	40	1,60	400	2,60
5	0,70	50	1,70	500	2,70
6	0,78	60	1,78	600	2,78
7	0,85	70	1,85	700	2,85
8	0,90	80	1,90	800	2,90
9	0,95	90	1,95	900	2,95
10	1,00	100	2,00	1000	3,000

Valides logaritmid kujutamisel lõikudena mõõtühikute 1 dm, saame log 2 puhul lõigu pikkusega 3 cm, log 3 puhul 4,8 cm, log 10 puhul 10 cm, log 20 puhul 13 cm, log 30

puhul 14,8 cm jne. Paigutades kõik need lõigud ühisest alguspunktist alates arvtelele ja kirjutades nende lõikude otspunktide juurde vastavad argumendi  $x$  väärtused, saame logaritmilise skaala. See skaala on osade kaupa paigutatud joonisele 75.

Lõika skaala kaks alumist osa mooda punktiirjoont raamatust välja. Kleebi skaalad üksteise otsa, nii et teise osa alguspunkt (10) ühtub esimese osa lõpp-punktiga (10) ja kolmanda osa alguspunkt (100) ühtub teise osa lõpp-punktiga. Sel teel saabki raamatusse kokkuvolditava logaritmilise skaala, kuhu on kantud argumendi väärtused 1, 2, 3, ..., 10, 20, 30, ..., 100, 200, 300, ..., 1000.

Nagu näha, skaala vahemikus 1-st kuni 10-ni on just samasuguse kujuga nagu vahemikus 10-st kuni 100-ni ja vahemikus 100-st kuni 1000-ni, sest logaritmade väärtused teises tulbas erinevad esimese tulba logaritmade vastavatest väärtustest ühe võrra ja kolmanda tulba väärtused - kahe võrra.

Logaritmilist skaalat vahemikus 1-st kuni 10-ni nimetatakse logaritmiliseks põhiskaalaks ja ta kujutab tihlasi ka funktsiooni  $y = \log x$  skaalat vahemikus 10-st kuni 100-ni, 100-st kuni 1000-ni jne.; samuti ka vahemikus 0,1-st kuni 1-ni, 0,01-st kuni 0,1-ni jne. Seetõttu tuleb skaalale märgitud arvude all mõista ainult argumendi  $x$  tütve. Näiteks arv 2 võib tähistada argumendi  $x$  väärtusi ... 0,02; 0,2; 2; 20; 200; ...

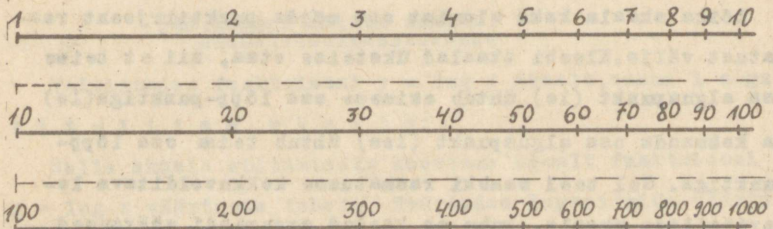
#### §64. Arvutuslõkati ehitus. Lõkati põhiskaalad

=====

D ja C.

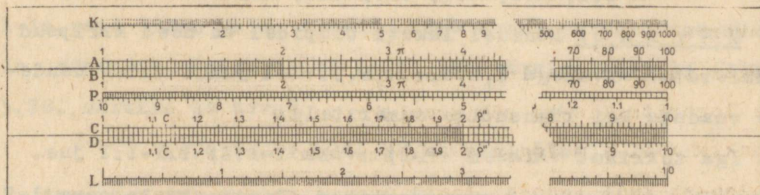
=====

Arvutuslõkati koosneb kolmest osast: korpusest, korpuses



liikuvast keelest ja korpusel liuglevast märkijast.

Korpusele on kantud neli skaalat (joon. 76). Neid nimetatakse järjekorras ülevalt alla: skaala K, skaala A, põhiskaala D ja skaala L.



Joon. 76

Keele esiküljele on kantud kolm skaalat. Neid nimetatakse järjekorras ülevalt alla: skaala B, skaala P ja põhiskaala C.

Keele tagaküljel leiame veel kolm trigonomeetriliste funktsioonide skaalat.

Skaalad K, A, B, P, D ja C on logaritmilised skaalad.

Tutvume esmalt põhiskaalaga D.

Normaallükati põhiskaalal D on funktsiooni  $\log x$  väärtused kujutatud lõikudena, kui mõõtühik on 25 cm. Nende lõikude otspunkte tähistavad kriipsud võimaldavad skaalal märkida ja lugeda kuni kolm tüvenumbrit argumenti  $x$  väärtusest.

Skaala alguskriips on tähistatud arvuga 1 ja lõppkriips arvuga 10. Kogu skaala on jaotatud üheksaks osaks, vastavad jaotuskriipsud on tähistatud suuremas trüki arvudega 2, 3, ..., 8, 9. Nimetame sel teel tekkinud skaala lõike põhikriipsuvahedeks. Vaatame eraldi põhikriipsuvahesid

1-2; 2-3; 3-4; ... .

Põhikriipsuvahe 1-2 on jaotatud kümneks osaks. Vastavad jaotuskriipsud on tähistatud väiksemas trükkis arvudega

1.1; 1.2; 1.3; ...; 1.8; 1.9.

M ä r k u s: Mõnedel lükkati tüüpidel on need kriipsud tähistatud arvudega 1,2,3,...,8,9. Sel juhul tuleb nendele vaadata kui kümnedike numbritele.

Iga tekkinud väiksem kriipsuvahe 1-1.1; 1.1-1.2 jne. on omakorda jaotatud kümneks osaks. Seega skaala osas 1-2 on iga kõige väiksema kriipsuvahe arvuline väärtus 0,01.

Analoogiliselt on põhikriipsuvahe 2-3 jaotatud pikema te kriipsudega kümneks osaks. Siin (ja edaspidi) on aga kümnedike numbrid jäetud kirjutamata. Sellise jaotamise tulemusena tekkinud uued kriipsuvahed on veel jaotatud viieks osaks (mitte kümneks nagu vahemikus 1-2). Seega skaala osas 2-3 vastab igale kõige väiksemale kriipsuvahetele 0,02.

Kuidas on jaotatud põhikriipsuvahe 3-4?

Vaadeldes põhikriipsuvahet 4-5, näeme et seal vastab igale kõige väiksemale kriipsuvahetele 0,05. Sama kehtib ka kõigi järgmiste põhikriipsuvahete kohta. Seega lükkati põhiskaalal on võimalik vahetult märkida vahemikus 1-10 olevaid arve järgmiselt:

vahemikus 1-2 ülimalt iga 0,01 tagant

"- 2-4      "-      0,02    "-

"- 4-10    "-      0,05    "-

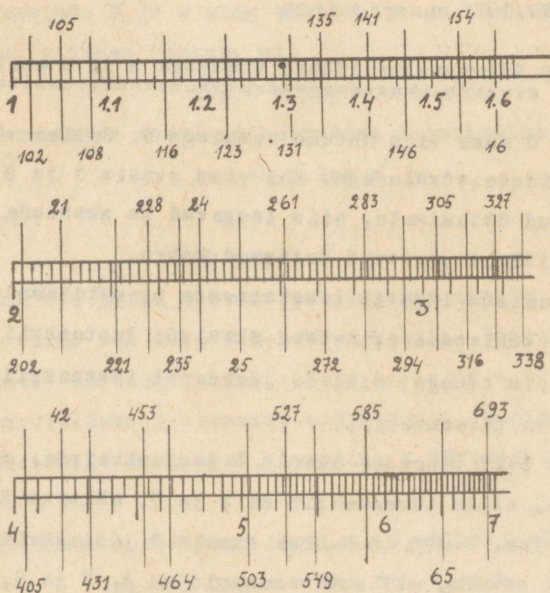
Kui aga vahemikku 2-4 kuuluva arvu sajandike number ei

ole paarisarv või vahemikku 4-le kuuluva arvu sajandike number ei ole 5 (või 0), siis tuleb arv märkida silma jär-  
gi.

Vastavalt logaritmilise skaala ehitusprintsibile (vt. §63) võime kirjeldatud skaalal märkida mitte ainult arve 1-le, vaid tildse kolme tüvenumbriga arve, jättes komatähe-  
le panemata. Seega samal kohal, kus märgime näiteks arvu 5,76, märkime ka arvud

...0,0576; 0,576; 57,6; 576; 5760; ...

Joonisel 77 on näidatud, kuidas tuleb märkida arvu tü-  
venumbreid skaalal D.



Joon.77

Ü l e s a n d e d.

333. Märgi märkijaga joonisel 77 näidatud arvud arvutuslõikati skaalal D.

334. Märgi märkijaga skaalal D järgmised arvud:

1) 7; 80; 0,09; 1,8; 95; 0,24; 680; 0,081;  
79.

2) 137; 197; 25,2; 36,5; 0,765; 92,5; 4,44.

3) 105; 1,07; 20,2; 22; 306; 360; 5,05; 5,5.

4) 245; 0,395; 6,23; 5,08; 77,7; 802; 484;  
9,08.

5) 461; 5,29; 0,888; 17,9; 2,09; 0,101; 927;  
78,1.

§ 65. Korrutamise lõikati skaalade D ja C abil.

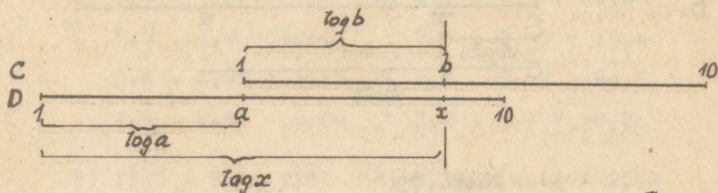
=====

Skaalat C saab viia ühtuma skaalaga D. Selles võib veenduda otsese võrdlusega. Kui viia skaala C ja D esimesed kriipsud ühtumisele, siis langevad ka skaalade C ja D kõik ülejäänud vastavad kriipsud kokku.

Et hõlbustada lõikatil teostatavate operatsioonide kirjeldamist, tähistame erinevate skaalade jaotuskriipsu lühidalt skaala tähega, millele järgnevad jaotuskriipsule vastava arvu täivenumbrid.

Näiteks D-27 tähendab skaala D jaotuskriipsu, mis vastab arvule, mille täivenumbrid on 2 ja 7, näiteks 2,7; 27; 270; 0,27 jne. C-475 tähendab skaala C jaotuskriipsu, mis vastab arvule, mille täivenumbrid on 4, 7 ja 5, näiteks 4,75; 47,5; 0,475 jne.

Selleks, et korrutada arve  $a$  ja  $b$ , paigutame C-l D-a kohale ja märgime märkijaga C-b. Arvude  $a$  ja  $b$  korrutise  $x$  leiame skaalalt D märkija alt.



Joon.78.

Tõestuseks vaatleme joonisel 78 kujutatud logaritmiliste skaalade D ja C ning püstkriipsuga tähistatud märkija seisu, millest nähtub, et

$$\log a + \log b = \log x.$$

Rakendades teoreemi korrutise logaritmist, saame

$$\log ab = \log x,$$

millest

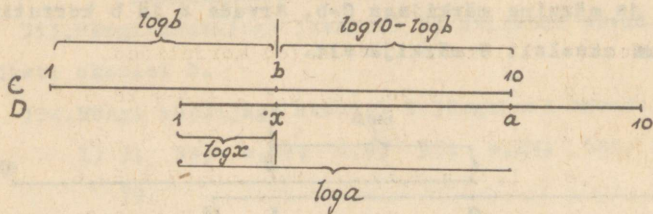
$$ab = x.$$

Kui C-d peaks sattuma väljaspoole skaala D piirkonda, siis viime C-l asemel C-le D-a kohale. Niisugust skaala C otste vahetamist nimetatakse keele ül e l ü k k e k s. Peale ütlelõkke teostamist omab lükati joonisel 79 näidatud seisu ja me leiame korrutise  $x$  tüvenumbrid C-d kohalt skaalal D.

Tõestuseks vaatleme joonist 79, millest nähtub, et

$$\log a = \log x + \log 10 - \log b,$$

millest



Joon. 79

$$\log a + \log b = \log x + \log 10.$$

Rakendades teoreemi korrutise logaritmist, saame

$$\log ab = \log(x.10),$$

kust

$$ab = x.10$$

ja

$$\frac{ab}{10} = x.$$

Nii esimese kui ka teise lükati seisul puhul leiame lükatilt kahe arvu  $a$  ja  $b$  korrutise tüvenumbrid. Koma asukoha aga määrame vastuse ligikaudse hindamise teel.

Näiteks korrutades lükatil

$$2,78 \cdot 1,28,$$

leiame esmalt vastuse kolm tüvenumbrit 356. Koma asukoha määramiseks ümardame  $2,78 \approx 3$  ja  $1,28 \approx 1$ . Et  $3 \cdot 1 = 3$ , siis peab vastus olema

$$3,56.$$

Täpne vastus on 3,5584, mis erineb lükatil saadud vastusest 0,0016 võrra.

Ülesanded.

## 335. Kontrolli lükatiga järgnevad korrutised.

- |                           |                              |
|---------------------------|------------------------------|
| 1) $2,2 \cdot 4,5 = 9,90$ | 2) $6,5 \cdot 4,4 = 28,6$    |
| $3,7 \cdot 1,8 = 6,66$    | $7,8 \cdot 2,05 = 16,0$      |
| $5,8 \cdot 1,23 = 7,13$   | $8,6 \cdot 5,07 = 60,6$      |
| $4,9 \cdot 2,02 = 9,90$   | $3,2 \cdot 5,7 = 18,2$       |
| 3) $13,5 \cdot 28 = 378$  | 4) $3,78 \cdot 0,64 = 2,42$  |
| $256 \cdot 4,7 = 1200$    | $256 \cdot 0,072 = 18,4$     |
| $48,5 \cdot 333 = 16150$  | $80,5 \cdot 0,473 = 38,0$    |
| $208 \cdot 7,2 = 1500$    | $0,082 \cdot 0,407 = 0,0334$ |

## 336. Korruta:

- |                    |                     |
|--------------------|---------------------|
| 1) $3,8 \cdot 1,9$ | 2) $7,8 \cdot 3,4$  |
| $3,08 \cdot 1,9$   | $6,45 \cdot 4,05$   |
| $2,75 \cdot 2,8$   | $8,3 \cdot 2,7$     |
| $1,2 \cdot 5,7$    | $8,03 \cdot 2,7$    |
| 3) $32 \cdot 1,4$  | $7,8 \cdot 0,24$    |
| $2,8 \cdot 308$    | $0,675 \cdot 323$   |
| $11,5 \cdot 66$    | $0,094 \cdot 0,52$  |
| $545 \cdot 37,8$   | $2060 \cdot 0,0132$ |

337. Kolhoosis maksti enne rahalisele töötasule üleminekut naturaaltasu normipõevade eest alljärgneva arvestustabeli järgi, kusjuures ühe normipõeva eest maksti 5,7kg kartuleid ja 3,4 kg teravilja.

## Arvestustabel

Jrk. nr.	Kolhoosniku nimi	Normip. arv	Kartuleid kg	Teravilja kg
1.	Mägi, J.	128		
2.	Jõgi, K.	203		
3.	Mets, M.	171		
4.	Karu, P.	84		
5.	Oja, V.	264		
6.	Meri, J.	193		
KOKKU				

Täida arvestustabeli tühjad lahtrid.

Kuidas tuleb arvutuslühkatiil arvutused teostada, et keele nihkeid oleks võimalikult vähe?

Kuidas saab kontrollida arvutuste õigsust?

§66. Jagamine lühkati skaalade D ja

=====

C abil.

=====

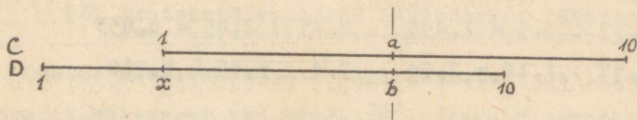
Korrutise  $x \cdot a = b$  leidmisel omab lühkati seisuga nagu joonisel 80 või 81.

Siit järeldame, et jagatise

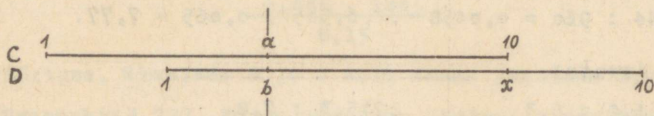
$$x = \frac{b}{a}$$

leidmiseks peame D-b ja C-a viima üksteise kohale ja vastuse lugema skaalalt D C-1 või C-10 kohalt.

Näiteks jagades



Joon.80



Joon.81

$$545 : 13,8,$$

märgime märkijaga D-545 ja viime siis C-138 märkija kriipsu alla. Selliselt toimides satuvad D-545 ja C-138 üksteise kohale ja me saame jagatise täivenumbrid 395 lugeda skaalalt D C-1 kohalt.

Koma asukoha määramiseks ümardame  $545 \approx 500$ ;  $13,8 \approx 10$ , ja jagame  $500 : 10 = 50$ , millest järeldame, et jagatise peab olema kahekohalise täisosaga arv. Seega

$$545 : 13,8 = 39,5.$$

Samuti leiame, et

$$6,85 : 2,77 = 2,47$$

$$1760 : 38 = 46,3,$$

$$0,346 : 6,9 = 0,0502 \text{ jne.}$$

### Ü l e s a n d e d.

338.Kontrolli lükatiga järgmised jagatised:

$$1) 5,3 : 2,9 = 1,825 \quad 2) 4,8 : 7,2 = 0,667$$

$8,8 : 3,7 = 2,38$

$1,06 : 6,8 = 0,156$

$6,55 : 4,5 = 1,455$

$2,43 : 2,85 = 0,853$

$3,07 : 1,16 = 2,64$

$7,4 : 9,05 = 0,818$

3)  $16,7 : 3,06 = 5,46$

4)  $0,81 : 3,72 = 0,218$

$882 : 72 = 12,25$

$62,5 : 0,48 = 130$

$6,3 : 17,8 = 0,354$

$7,7 : 0,0203 = 379$

$44 : 960 = 0,0458$

$0,505 : 0,065 = 7,77.$

339. Arvuta:

1)  $6,9 : 5,3$

2)  $5,3 : 7,8$

$4,75 : 1,92$

$5,53 : 9,55$

$9,6 : 7,85$

$6,73 : 8,9$

$3,78 : 2,04$

$1,17 : 4,07$

3)  $18,3 : 4,7$

4)  $6,42 : 0,87$

$29,3 : 61$

$0,465 : 3,93$

$3,07 : 98$

$0,1095 : 0,082$

$528 : 370$

$333 : 0,71.$

340. Leia voolu tugevused tabelis antud takistustega juhtmetes, kui pinge on 220, 170 ja 32 volti.

Jrk. nr.	Juhtme takistus oomides	Voolu tugevused amprites		
		220 V	170 V	32 V
1.	17			
2.	8,6			
3.	54			
4.	3,8			
5.	0,72			

§ 67. Protsentülesannete lahendamine lükatiga.  
 =====

Osates skaalade D ja C abil korrutada ja jagada, saame lükatil hõlpsasti lahendada ka protsentülesandeid.

Näiteks, et leida, mitu protsenti moodustab arv 0,446 arvust 6,15, peame arvutama murru

$$\frac{0,446 \cdot 100}{6,15}$$

väärtuse. Skaalade D ja C abil saame jagatise 0,446:6,15 ttiivenumbrid 727. Murru väärtuse hindamine aga annab meile tihekohalise täisosaga arvu. Seega arv 0,446 moodustab arvust 6,15, 7,27%.

Kui tahame leida arvu, mis moodustab 22,6% arvust 384, siis peame arvutama murru

$$\frac{384 \cdot 22,6}{100}$$

väärtuse. Lükatilt saame korrutise 384 · 22,6 ttiivenumbrid 867 ja murru väärtuse hindamine annab meile kahekohalise täisosaga arvu. Seega 22,6% arvust 384 on 86,7.

Ü l e s a n d e d .

341. Mitu protsenti moodustavad alljärgnevad arvud  
 32,6-st

15; 6,2; 25,3; 10,8; 0,7; 0,083; 19,5; 96,5.

342. Leida arvust 682

13%; 17,6%; 20,7%; 0,62%; 109%; 424%.

343. Kui suur on arv, kui sellest arvust

7,6% on 3,04; 57% on 28,9; 122% on 44,4?

344. Ekskavaator kaevab tihel päeval 47 jooksvat meetrit kraavi ja täitis päevaplaanist 79%. Järgmisel päeval kaevab ekskavaator 66 jooksvat meetrit kraavi. Mitu protsenti päevaplaanist täitis ekskavaator järgmisel päeval?

345. Filmiilmutaja sisaldab 84% vett, 1,7% metooli, 8,5% naatriumsulfiiti, 0,2% kaaliumbromiidi ja 5,6% naatriumsulfaati. Mitu g igat ainet on tarvis võtta 600 g filmilmutaja valmistamiseks?

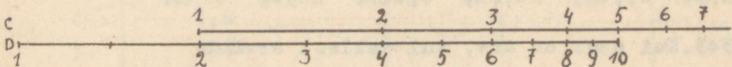
§ 68. Võrde lahendamine lükatiga.

=====

Paragrahvis 66 selgus, et skaalade D ja C kohakuti seisvate arvude jagatis võrdub C-l või C-lo kohal seisva arvuga skaalal D. Seega on tihed ja sama lükatil seisva korral kõik skaalade D ja C kohakuti seisvate arvude jagatiseid võrdseid.

Joonisel 82 näidatud lükatil seisva juures on skaalade D ja C kohakuti seisvate arvude jagatis võrdne kahega. Kui vaadelda skaala C ja D vahelist pilu murrujoonena, arvu skaalal C lugejana ja arvu skaalal D nimetajana (või ka ümberpöörduvalt), siis moodustavad üksteise kohal seisvad arvupaarid võrdseid murde. Nii on joonisel 82 näha, et

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10} .$$



Joon. 82

Kirjeldatud logaritmilise skaala C ja D omadus võimaldab hõlpsasti leida võrde tundmatut liiget.

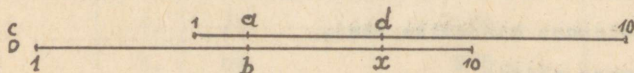
Olgu antud võrre

$$\frac{a}{b} = \frac{d}{x},$$

kus  $x$  on tundmatu.

Kui viime C-a D-b kohale, on kõik skaalade C ja D kohakuti seovatest arvudest moodustatud murrud võrdsed murruga  $\frac{a}{b}$ .

Siit järeldame, et  $d$  ja  $x$  peavad asuma kohakuti, sest ka  $\frac{d}{x}$  võrdub murruga  $\frac{a}{b}$ . Seepärast saame leida  $x$ -i väärtuse C-d järgi skaalal D.

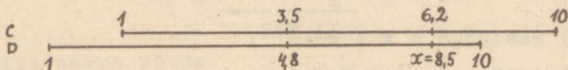


Joon. 83

Joonis 83 näitab, et võrde lahendamisel peame võrde liikmed paigutama skaalale C ja D nii, nagu nad seisavad võrdes.

Näide 1. Leia  $x$  võrdest  $\frac{3,5}{4,8} = \frac{6,2}{x}$ .

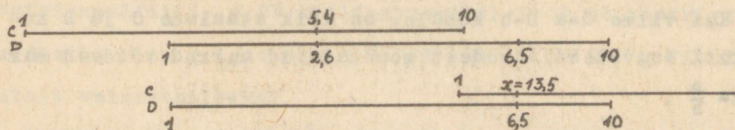
Paigutame skaaladele C ja D võrde liikmed selliselt, nagu on näidatud joonisel 84. Tundmatu asub siis C-62 kohal skaalal D.



Joon.84

Näide 2. Leia  $x$  vürdest  $\frac{5,4}{2,6} = \frac{x}{6,5}$ .

Paigutanud vürde lükatile, tuleks leida  $x$  D-6,5 kohalt skaalal. Kuna see pole võimalik, teostame ülelükke ja määrame nüüd  $x-1$  väärtuse (joon.85).



Joon. 85

Nagu korrutamisel ja jagamisel, opereeritakse ka vürde lahendamisel ainult tüvenumbritega ja koma asukoht määratakse tulemuse hindamise teel.

Viimases näites

$$\frac{5,4}{2,6} = \frac{x}{6,5}$$

on  $x-1$  tüvenumbrid 135. Vaadeldes esimest murdu, näeme et lugeja on umbes 2 korda suurem nimetajast, seega peab ka  $x$  olema ligikaudu kaks korda suurem 6,5-st ja järelikult

$$x = 13,5.$$

### Ülesanded.

346. Leia  $x$  järgnevatest vürretest.

1)  $\frac{3,6}{x} = \frac{14}{25,3}$  ;  $\frac{x}{0,84} = \frac{6,8}{19,4}$ .

2)  $208:83,5 = x : 29,3$

3)  $0,52 : 0,49 = 7,7 : x$

4)  $62 : x = 18,5 : 7,2$

5)  $3380 : 528 = 77 : x$

Eriti tõhusat abi pakub arvutuslõkati võrdelisel jaotamisel, mida illustreerime järgmise näitega.

Reservuaarist, milles on 8370 l vett, juhitakse vesi välja 7 toru kaudu. Leida igast torust läbivoolanud vee hulk, kui torude ristlõigete pindalad on antud alljärgnevas tabelis ja kui kõik torud on samal kõrgusel.

Jrk. nr.	Toru ristlõike pindala $S_i$ cm <sup>2</sup> -tes	Torust läbivoolanud vee hulk $v_i$ liitrites
1.	162	2340
2.	107	1540
3.	84	1210
4.	78	1120
5.	65	936
6.	52	749
7.	33	475
Kokku	581	8370

Torude ristlõike pindala iga 1 cm<sup>2</sup> kohta tuleb  $\frac{8370}{581}$  l vett. Et ülesandes antud tingimustel on torust väljavoolanud vee hulk võrdeline toru ristlõike pindalaga, siis torust, mille ristlõike pindala on  $S_i$  ( $i$  on toru järjekorra number) voolab vett

$$v_i = \frac{8370 \cdot S_i}{581} \text{ l.}$$

Siit saame võrde

$$\frac{581}{8370} = \frac{S_i}{v_i}.$$

Paigutades C-581 D-8370 kohale ja märkides järjest märkijaga skaalal C kõik ristlõigete pindalad  $S_1$ , saame skaalalt D lugeda järjest kõik torudest läbi voolanud veehulgad  $v_1$ , mis on kantud tabelisse.

347. Jaota 23,5 tonni mineraalväetist kolhoosi 5 põllule võrdeliselt tabelis antud põldude suurustega.

Põllu nr.	Põllu suurus ha	Mineraalväetise hulk tonnides
1.	10,6	
2.	8,2	
3.	6,7	
4.	13,4	
5.	5,9	

Kokku

§ 69. Mõnede murdude arvutamine lükatiga.

Murde, mille lugejas olevate tegurite arv võrdub nimetajas olevate tegurite arvuga või on sellest ühe võrra suurem, arvutatakse kõige lihtsamalt nii, et jagamise ja korrutamise tehteid sooritatakse vaheldumisi.

Näide:

$$x = \frac{2,7 \cdot 0,84 \cdot 62}{3,3 \cdot 4,7}$$

Alustame alati jagamisega:

$$2,7 : 3,3 = v_1,$$

$$v_1 \cdot 0,84 = v_2,$$

$$v_2 : 4,7 = v_3,$$

$$v_3 \cdot 62 = x.$$

Niisuguste tehete järjekorra juures on erinevate liiki kati seisude arv minimaalne ja peale selle pole tarvis lugeda ja märkida vahepealseid tulemusi  $v_1, v_2, v_3$ . Kui lõpptulemuse tüvenumbrid 905 on leitud, määrame koma asukohta murru väärtuse hindamise teel, näiteks nii:

$$2,7 : 3,3 \approx 1;$$

$$1 \cdot 0,84 \approx 0,8;$$

$$0,8 \cdot 60 \approx 50;$$

$$50 : 4,7 \approx 10.$$

Seega

$$x = 9,05.$$

Ülesanded.

348. 1)  $\frac{6 \cdot 17,4}{8,5}$ ;      2)  $\frac{72 \cdot 0,34}{6,8}$ .

349. 1)  $\frac{14,6 \cdot 81}{34,2 \cdot 26}$ ;      2)  $\frac{0,55 \cdot 4,3 \cdot 23}{0,08 \cdot 11,2}$ .

350. 1)  $\frac{1,83 \cdot 20,4 \cdot 7,8}{0,4 \cdot 10,5 \cdot 8,9}$ ;      2)  $\frac{93 \cdot 0,58 \cdot 48 \cdot 1,09}{68,5 \cdot 16,2 \cdot 0,26}$ .

§70. Liikati skaalad A ja B.

=====

Logaritmilistel skaaladel A ja B on kujutatud funktsiooni log x väärtused lõikudena, kui mõõtühikuks on 12,5 om, s.o. pool skaala D pikkusest. Nende skaalade jaotuskriipsud tähistavad argumendi x väärtusi vahemikus 1-st kuni 100-ni.

Põhijaotuskriipsud on varustatud arvudega 1,2,3...,10, 11,12,....,100.

Kuna vaadeldava skaala puhul on mõõtühik väiksem kui põhiskaala puhul, siis on muutunud ka kõige väiksemate kriipsuvahede arvulised väärtused suuremaks. Selle tõttu tuleb skaaladel A ja B teostada arvude märkimist ja lugemist silma järgi sagedamini kui põhiskaalal.

Põhikriipsuvahe 1-2 on jaotatud kümneks osaks ja iga osa veel viieks. Seega, kui märgime skaalal A (või B) arve vahemikust 1-st loo-ni, siis on põhikriipsuvahes 1-2 iga kõige väiksema kriipsuvahe arvuline väärtus 0,02.

Analoogiliselt veenduksime, et põhikriipsuvahes 10-20 on väikseima kriipsuvahe arvuline väärtus 0,2.

Näita, et põhikriipsuvahes 2-3 on iga kõige väiksema kriipsuvahe arvuline väärtus 0,05 ja põhikriipsuvahes 20-30 0,5.

Milline on kõige väiksema kriipsuvahe arvuline väärtus skaala teistes põhikriipsuvahedest?

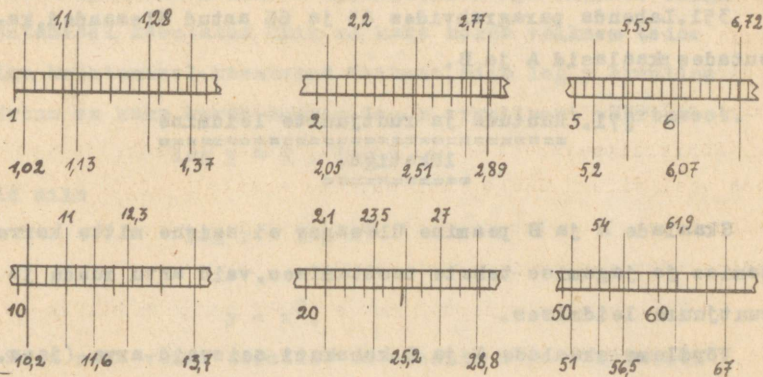
Nii nagu lükkati põhiskaalalgi, opereeritakse ka skaaladel A ja B ainult arvu tüvenumbritega.

Joonisel 86 on näidatud mõne arvu märkimist skaalal A või B.

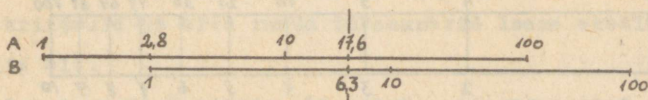
Skaalade A ja B abil saame korrutada, ja jagada nagu skaaladega D ja C.

Näiteks: 1) Korrutades 2,8 · 6,3 viieme B-l A-2,8 kohale ja korrutise 17,6 leiame märkija abil B-6,3 kohalt skaalalt A. (joon. 87).

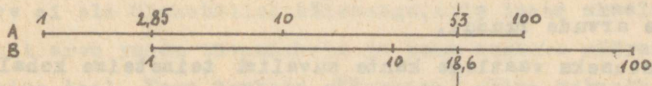
2) Jagades 53 : 18,6 märgime märkijaga A-53. Siis viieme märkija alla B-18,6 ja vastuse 2,85 loeme B-l kohalt skaalal A (joon. 88).



Joon.86



Joon.87



Joon.88

Korrutades või jagades skaalade A ja B abil ja opereerides ainult arvude tävenumbritega, pole oluline, et arvud kuuluksid piirkonda 1-st kuni 100-ni. Ka pole oluline, kas me arvu tävenumbrid märgime skaala esimesel või teiselsel poolel.

Koma asukoha määrame igal juhul hindamise teel.

Ü l e s a n d e d.

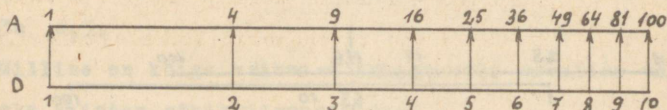
351. Lahenda paragrahvides 65 ja 66 antud tlesanded, kasutades skaalaid A ja B.

§71. Ruutude ja ruutjuurte leidmine  
=====

lõkatiga.  
=====

Skaalade A ja B peamine tlesanne ei seisne mitte korrutamise ja jagamise tehete teostamises, vaid arvu ruudu ja ruutjuure leidmises.

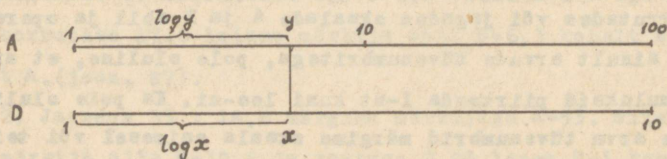
Võrdleme skaalade A ja D kohakuti seisvaid arve (jeon. 89).



Jeon. 89

Võrdlus näitab, et skaala D arvudele vastavad skaalal A nende arvude ruudud.

Töestuseks vaatleme kahte suvalist teineteise kohal asuvat arvu  $y$  ja  $x$  skaalal A ja D (jeon. 9e).



Jeon. 9e

Nende arvude kümnendlogaritmidelle  $\log y$  ja  $\log x$  vastavad lõigud skaaladel on võrdsed. Kuna aga esimese lõigu kujutamisel kasutatud ühik on kaks korda väiksem teise lõigu kujutamisel kasutatud ühikust, siis  $\log y$  arvuline väärtus on kaks korda suurem  $\log x$  arvulisest väärtusest.

$$\log y = 2 \cdot \log x.$$

Kuid siis

$$\log y = \log x^2$$

ja

$$y = x^2.$$

Seda sama võime tõestada ka skaalade B ja C kohakuti seisvate arvude kohta.

Arvu ruudu leidmiseks paigutame märkija skaala D vastavale kriipsule ja arvu ruudu tüvenumbrid loeme skaalalt A märkija alt.

Kui arv on ühekohalise täisosaga, siis arvu runt võib olla ühe- või kahekohalise täisosaga. Kas arvu mut on ühe- või kahekohalise täisosaga, seda näeme otsekohe skaalalt A. Kui arv ei ole ühekohalise täisosaga, siis loeme skaalalt A ainult arvu ruudu tüvenumbrid ja koma asukoha määrame hindamise teel. Koma asukoha määramisel võime rakendada ka runtude tabeli puhul kasutatavat koma nihutamise võtet. Selleks vaatleme arvu esmalt ühekohalise täisosaga arvuna ja leiame selle ruudu. Siis nihutame arvus koma õigele kohale, aga vastuses teostame sama koma nihutamise kaks korda.

Näide 1. Et leida  $354^2$ , leiame esmalt  $3,54^2 = 12,5$ .

Nüüd nihutame arvus koma õigele kohale, s.e. kahe koha võr-

ra paremale. Arvu ruudus aga teostame sama koma nihutuse kaks korda, s.t. nihutame koma paremale nelja koha võrra ja me saame

$$354^2 = 125000.$$

Näide 2. Samuti leiame  $0,208^2$ .

$$208^2 = 4,33,$$

$$0,208^2 = 0,0433$$

Ülesanded.

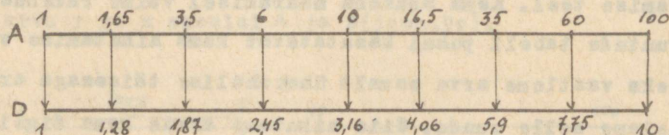
Leia järgmiste arvude ruudud:

352. 4; 7; 10,7; 26; 3,16; 0,41; 50,5; 0,155.

353. 91,3; 88; 8,08; 0,0745; 2380; 667; 6,07; 0,137.

On arusaadav, et kui asetada märkija skaala A mingile arvule, siis peab märkija all skaalal D seisma arv, mis vastab skaala A arvu ruutjuurele. Ruutjuure leidmisel peame skaala A esimese poole arve lugema ühekohalise täisosaga arvudeks, teise poole arve aga kahekohalise täisosaga arvudeks ja skaala D arve ühekohalise täisosaga arvudeks.

Jeenisel 91 on näidatud ruutjuurte leidmine nii ühekohalise kui ka kahekohalise täisosaga arvudest.



Joon.91

Arve, mis pole ühe- või kahekohalise täisosaga, muudame niisugusteks koma nihutamiseks k a h e k o h a kaup ja

leiame siis ruutjuure. Kui ruutjuur on leitud, siis viime arvus koma õigele kohale tagasi, vastuses aga teostame sama koma nihutuse kaks korda vähem.

Näiteks  $\sqrt{360}$  leidmisel nihutame mõttes koma kahe koha võrra vasakule ja leiame  $\sqrt{3,6} = 1,9$ . Siis viime arvus koma õigele kohale, s.o. kaks kohta paremale; vastuses aga teostame sama koma nihutuse kaks korda vähem, s.o. viime koma ühe koha võrra paremale. Seega  $\sqrt{360} = 19$ .

Samuti leiame veel, et  $\sqrt{0,73} = 0,855$ ;  $\sqrt{66000} = 257$ ;

$$\sqrt{1780} = 42,2; \sqrt{0,005} = 0,0707; \sqrt{3850000} = 1960.$$

### Ü l e s a n d e d.

354. Leia ruutjuured järgmistest arvudest:

1) 3,9; 39; 2,02; 202; 115; 0,115; 6000; 0,6.

2) 0,07; 0,7; 440; 82000; 0,0051; 1080; 920000.

355. Lahenda ltkati abil järgmised ülesanded:

1)  $8,4^2 + 6,75^2$ ;    2)  $\sqrt{32,5^2 - 17,6^2}$ ;

3)  $\sqrt{520} + \sqrt{425}$ ;    4)  $\sqrt{\sqrt{0,42} - \sqrt{0,32}}$ .

356. Täisnurkse kolmnurga kaatetid on 425 m ja 380 m.

Leia hüpotenuus.

357. Täisnurkse kolmnurga hüpotenuus on 9,2 cm ja üks kaatet on 7,8 cm. Leia teine kaatet.

358. Võrdhaarse trapetsi lühem alus on 17,6 m, pikem alus on 28 m ja haar on 20,8 m. Leia trapetsi pindala.

359. Võrdhaarse kolmnurga ümbermõõt on 68,6 cm ja haar on 19,2 cm. Leia kolmnurga pindala.

360. Ringile on tihest ja samast punktist tõmmatud puutu- ja ja lõikaja. Lõikaja välisosa pikkus on 4,9 cm ja puutu- ja pikkus on 7,05 cm. Arvuta ringi raadius.

361. Arvuta korrapärase kunsnurga pindala, kui selle kül- je pikkus on 5,6 m.

Ruutude ja ruutjuurte leidmisel võib skaalade A ja D asemel kasutada ka skaalaid B ja C.

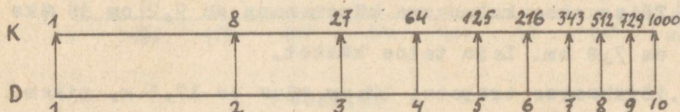
### §72. Kuupide ja kuupjuurte leidmine lükatiga.

Skaala K koosneb kolmest tihepikkusest osast, mille põhi- jaetus kriipsud on tähistatud arvudega 1, 2, 3, ..., 9. Vaadates nendele arvudele kõige vasakpoolsemas osas kui tiheliste numbritele, keskmises osas kui kümnelistele ja kõige parempoolsemas osas kui sajalistele, võime skaalal K märkida arve vahemikus 1-st kuni 1000-ni.

Tee kindlaks kõige väiksema kriipsuvahe arvuline väärtus skaala üksikutes põhikriipsuvahedes.

Arvutamisel opereerime ainult arvu tüvenumbritega.

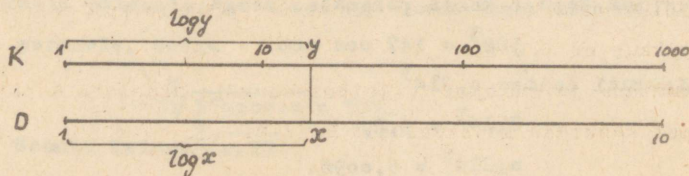
Ühekohalise täisosaga arvu kuubi leidmiseks paigutame märkija skaala D vastavale arvule ja vastuse loeme skaalal K märkija alt (joon. 92).



Joon. 92

Töestuseks vaatleme kahte suvalist kohakuti seisvat

arvu  $y$  ja  $x$  skaalal  $K$  ja skaalal  $D$ . Nende arvude kümne-  
logaritmidele,  $\log y$  ja  $\log x$ , vastavad lõigud skaaladel  
on võrdsed (jeon.93).



Jeon.93

Kuna aga esimese lõigu kujutamisel kasutatud tihik on  
kolm korda väiksem teise lõigu kujutamisel kasutatud tihik-  
ust, siis  $\log y$  arvuline väärtus on kolm korda suurem  
 $\log x$  arvulisest väärtusest;

$$\log y = 3 \log x.$$

Kuid siis

$$\log y = \log x^3$$

ja

$$y = x^3.$$

### Ülesanded.

Leia järgmiste arvude kuubid:

362. 2; 4; 7; 1,5; 2,7; 6,3; 8,3; 4,7; 9,1.

363. 2,66; 1,72; 1,06; 3,72; 3,08; 9,05; 7,75.

364. 3,87; 6,23; 7,07; 8,88; 1,915; 2,05; 4,33.

Kui arvu tõi isosa ei ole tihikohaline, siis teeme ta  
selliseks koma nihutamise teel ja leiame kuubi. Siis vii-  
me arvus koma endisele kohale tagasi, vastuses aga teos-  
tame sama koma nihutuse kolm korda.

Näiteks, et leida  $528^3$ , leiame esmalt  $5,28^3 = 147$ . Nüüd nihutame koma arvus endisele kohale, s.o. 2 kohta paremale. Vastuses peame teostama sama komanihutuse kolm korda, s.t. peame viima koma 6 kohta paremale, seega

$$528^3 = 147\ 000\ 000.$$

Niisamuti leiame  $0,214^3$

$$2,14^3 = 9,8;$$

$$0,214^3 = 0,0098.$$

### Ü l e s a n d e d.

Leia järgmiste arvude kuubid:

$$365. 15,4; 154; 288; 92,5; 0,0444; 0,007; 1729.$$

$$366. 2760; 17,85; 2970; 0,955; 0,3; 0,03; 1040.$$

Kuupjuure leidmisel talitame ümberpöörult, s.t. märgime arvu skaalal K ja loeme vastuse skaalalt D. Kui antud arv on ühe-, kahe- või kolmekohalise täisosaga, kasutame vastavalt esimest, teist või kolmandat skaala K osa. Vastuse saame niisuguse arvu korral alati ühekohalise täisosaga.

$$\text{Näiteks } \sqrt[3]{5,2} = 1,73; \sqrt[3]{29,5} = 3,09; \sqrt[3]{380} = 7,25.$$

### Ü l e s a n d e d.

Leia kuupjuured järgmistest arvudest:

$$367. 5; 50; 500; 325; 17,2; 1,48; 22,6; 10; 100.$$

$$368. 304; 3,4; 25,6; 820; 93,5; 73,3; 1,89; 1,09.$$

Kui arv ei ole ühe-, kahe- või kolmekohalise täisosaga, siis teeme ta kõigepealt selliseks, nihutades koma k o l m e k o h a kaup. Peale juurimist viime koma arvus endisele kohale tagasi, vastuses aga teostame koma sama mi-

hutuse kolm korda vähem.

Näiteks  $\sqrt[3]{37000000}$  arvutamiseks leiame esmalt  $\sqrt[3]{37} = 3,33$ . Siis viime arvus koma endisele kohale, s.o. 6 kohta paremale; vastuses aga peame koma nihutama 2 kohta paremale, seega

$$\sqrt[3]{37000000} = 333.$$

Samuti leiame  $\sqrt[3]{0,27}$

$$\sqrt[3]{270} = 6,46;$$

$$\sqrt[3]{0,27} = 0,646.$$

### Ü l e s a n d e d.

Leia lükatil kuupjuured järgmistest arvudest:

369. 4320; 43200; 0,432; 0,22; 0,2; 10000; 0,01.  
 370. 0,0008; 72000000; 40500; 0,067; 0,129; 0,0125.

Arvuta:

371.  $\sqrt[3]{14,8^2 + 6,7^3}$ ;      2)  $\sqrt[3]{328^2 - 260^2}$ .

372. 1)  $0,47^3 - 0,38^3$ ;      2)  $\sqrt[6]{7600000}$ .

373.  $\sqrt[3]{56^2}$ ;  $\sqrt[3]{455^2}$ ;  $\sqrt[3]{0,79^2}$ ;  $\sqrt[3]{0,006^2}$ .

374.  $\sqrt{6,8^3}$ ;  $\sqrt{380^3}$ ;  $\sqrt{0,157^3}$ ;  $\sqrt{0,026^3}$ .

375. Kuubi ruumala on  $85 \text{ cm}^3$ . Leia kuubi tšhe tahu pindala.

376. Kui suur on kuubi ruumala, kui tahu pindala on  $4,26 \text{ m}^2$ ?

Ülesanded IX klassi kursuse  
korramiseks.

377. Leia järgmiste funktsioonide nullkohad:

- 1)  $y = 2x + 9$ ;      3)  $y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{9}$ ;      5)  $y = \sin 2x$ ;  
2)  $y = -x^2 + x - 12$ ; 4)  $y = 12 - x - 6x^2$ ; 6)  $y = \cos \frac{1}{3}x$ .

378. Leia järgmiste funktsioonide positiivsuspiirkonnad:

- 1)  $y = 3x - 6$ ;      3)  $y = 24 - 17x - 2ex^2$ ;  
2)  $y = x^2 + 5x - 14$ ; 4)  $y = \sin x$ , kui  $0 \leq x \leq 4\pi$ .

379. Leia järgmiste funktsioonide negatiivsuspiirkonnad:

- 1)  $y = -0,3x + 1,5$ ;      3)  $y = 2x^2 + 3x - 2$ ;  
2)  $y = -x^2 - 6x + 16$ ; 4)  $y = \cos x$ , kui  $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ .

380. Leia järgmiste funktsioonide kasvamispiirkonnad:

- 1)  $y = \frac{1}{2}x^2 + 3x + 22$ ; 3)  $y = \tan x$ , kui  $0 \leq x \leq 2\pi$ .  
2)  $y = -x^2 - x + 2$ ; 4)  $y = x^4$ .

381. Leia järgmiste funktsioonide kahanemispiirkonnad:

- 1)  $y = x^2 + 3x - 10$ ; 3)  $y = x^3$ ;  
2)  $y = 2x^2 - 13x + 15$ ; 4)  $y = \sin x$ , kui  $0 \leq x \leq 3\pi$ .

382. Leia kõigi kahekohaliste paarisarvude summa.

383. Leia kõigi paaritute arvude summa 1-st kuni 99-ni.

384. Aritmeetilise progressiooni neljas liige on 10, seitsmes liige 19. Leia progressiooni esimene liige ja vahe.

385. Kaldpinda mööda liikuv keraläbib esimeses sekundis 0,5 m ja igas järgnevas 0,8 m rohkem. Kui pika tee läbib kera 10 sekundiga?

386. Leia progressiooni

log 1; log 10; log 100; log 1000; ...

10. liige

387. Arvuta avaldise

$$\frac{(x^2yz)^3 - (8yz)^2}{4x^3y^2 - 3x^5z^2}$$

väärtus, kui  $x = -2$ ,  $y = 5$  ja  $z = -3$ .

388. Lahenda proovimise teel võrrandi:

1)  $4x^3 - 108 = 0$ ;

2)  $3x^4 - 48 = 0$ .

389. Järjesta suuruse järgi:

1)  $3^9$ ;  $2,1^9$ ;  $10^9$ ;  $(-9)^9$ ;  $0,2^9$ ;  $0,9^9$ ;

$(-0,2)^9$ ;  $(-31)^9$ ;  $(-5)^9$ .

2)  $3^{10}$ ;  $2,1^{10}$ ;  $10^{10}$ ;  $(-9)^{10}$ ;  $0,2^{10}$ ;  $0,9^{10}$ .

$(-0,2)^{10}$ ;  $(-31)^{10}$ ;  $(-5)^{10}$ .

390. Lihtsusta avaldise:

1)  $(-2x^4yz^2)^3$ ;      2)  $\frac{4^3a^4b^5c^2}{4^2a^7b^3c^3}$ ;

3)  $3x^2y^5 \cdot 2x^4y^3 - (2x^3y^4)^2 + \frac{12x^9y^{10}}{3x^5y^2}$ .

391. Järjesta suuruse järgi:

1)  $2^8$ ;  $2^{-8}$ ;  $(-2)^8$ ;  $(-2)^{-8}$ ;  $(\frac{1}{2})^8$ ;  $(\frac{1}{2})^{-8}$ ;  $(-\frac{1}{2})^8$ ;

$(-\frac{1}{2})^{-8}$ .

2)  $3^7$ ;  $3^{-7}$ ;  $(-3)^7$ ;  $(-3)^{-7}$ ;  $(\frac{1}{3})^7$ ;  $(\frac{1}{3})^{-7}$ ;  $(-\frac{1}{3})^7$ ;

$(-\frac{1}{3})^{-7}$ .

3)  $5^9$ ;  $5^{10}$ ;  $(-5)^9$ ;  $(-5)^{10}$ ;  $5^{-9}$ ;  $5^{-10}$ ;  $(-5)^{-9}$ ;  $(-5)^{-10}$ ;

$(-5)^0$ ;  $5^0$ .

392. Missugused järgnevatest arvudest on ratsionaalsed ja missugused irratsionaalsed?

- 1)  $2, 2(3); 0, 12312331233312333312\dots; \frac{2}{3}; 0, 36;$   
 $10, 20220222022220\dots; 0, 6666\dots; \frac{4}{7};$
- 2)  $9^{\frac{1}{2}}; 10^{\frac{1}{2}}; \sqrt[3]{27}; \sqrt{21}; \sqrt{100}; 101^{\frac{1}{5}}; 32^{\frac{1}{5}}; \sqrt[4]{36};$   
 $\sqrt[6]{64}.$

393. Lihtsusta avaldisi:

- 1)  $3x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}};$  4)  $(\frac{x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{5}{6}}}{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{2}{3}}})^{-3};$
- 2)  $x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{4}} : x^{-2\frac{2}{3}}y^{\frac{3}{4}};$  7)  $\sqrt{a^2b^3} \cdot \sqrt[3]{a^2b};$
- 3)  $(x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{5}{6}})^2 \cdot (2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{2}{3}})^{-1};$  8)  $\sqrt[3]{x^2y^4z} : \sqrt[4]{x^3y^2z^3};$
- 4)  $(a^4b^6c)^{\frac{1}{2}} : (a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}c)^2;$  9)  $(\sqrt[3]{x^2y})^4 \cdot (\sqrt{xy})^3;$
- 5)  $[(a^{-\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{6}})^{-\frac{3}{2}}]^4;$  10)  $[(\sqrt{ab^3} \cdot \sqrt[3]{a^2b})^2]^{\frac{1}{3}}.$

394. Järjesaja suuruse järgi:

- 1)  $52^{\frac{1}{2}}; 2^{\frac{1}{2}}; 52^{-\frac{1}{2}}; 2^{-\frac{1}{2}}; (\frac{1}{4})^{\frac{1}{2}}; (\frac{1}{4})^{-\frac{1}{2}}$
- 2)  $3^{\frac{1}{3}}; (-3)^{\frac{1}{3}}; (\frac{1}{3})^{\frac{1}{3}}; (-\frac{1}{3})^{\frac{1}{3}}; 3^{-\frac{1}{3}}; (-3)^{-\frac{1}{3}}; (\frac{1}{3})^{-\frac{1}{3}};$   
 $(-\frac{1}{3})^{-\frac{1}{3}}.$
- 3)  $10^2; 10^{\frac{1}{2}}; 10^{-2}; 10^{-\frac{1}{2}}; 10^0; 10^3; 10^{-3}; 10^{\frac{1}{3}};$   
 $10^{-\frac{1}{3}}.$

395. Kirjuta järgmised murrud kujul, kus nimetaja on ratsionaalne:

- 1)  $\frac{1}{\sqrt{x^2y}};$  3)  $\frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{y}};$
- 2)  $\frac{1}{1 - \sqrt{14}};$  4)  $\frac{2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}}{3a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}};$

$$5) \frac{xy}{x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}};$$

$$6) \frac{(2-a)^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}} - (2-a)^{\frac{1}{2}}}.$$

396. Lahenda järgmised võrrandid:

$$1) 3\sqrt{x} - 75 = 0;$$

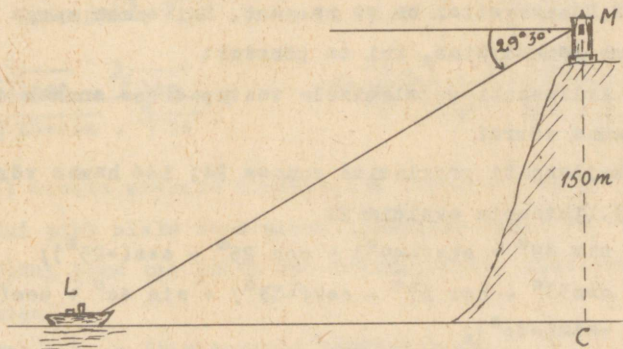
$$4) \sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{x + 1} = 0;$$

$$2) (2-x)^{\frac{1}{2}} - 7 = 0;$$

$$5) (x+2)^{\frac{1}{3}} - 2x^{\frac{1}{3}} = 0.$$

$$3) (2y-1)^{\frac{1}{2}} - y = 0;$$

397. Tuletornist, mis asub 150 m kõrgusel merepinnast,



Joon. 94

paistab laev horisontaaltasapinnast, mis läbib vaatleja silma,  $29^{\circ}30'$  allpool. Kui kaugel on laev rannast (punktist C, joon. 94)?

398. Kahe kontsentrilise ringjoone raadiused on 16 mm ja 28 mm. Kui kaugel nende ringjoonte ühisest keskpunktist paistab suurem ring kaks korda suuremas nurgas, kui väiksem? Kontrolli lahendit andmete ja saadud tulemise järgi tehtud joonise abil.

399. Sarika pikkus maja seinale kohalt katuse harjani on 3,8 m ja katuse kaldenurk on  $35^\circ$ . Leia aampalgi pikkus.

400. On antud lõik  $a$  ja nurk  $\alpha$ . Konstrueeri sirkli ja joonlaua abil lõik:

1)  $a \sin \alpha$ ;      2)  $a \cos \alpha$ .

401. Äratuskella kõlisti osuti on 6 peal. Kui suure nurga võrra peab seda osutit pöörama, et äratuskell kõliseks kell 8, kui kõlisti osutit saab pöörata tuuniesuti pöörlemisele vastupidises suunas?

402. Hammasrattal on 72 hammast. Kui suure nurga võrra pöördub hammasratas, kui ta pöördub:

1) kellaesuti pöörlemisele vastupidises suunas 42;  
300 hamba võrra?

2) kellaesuti pöörlemise suunas 24; 144 hamba võrra?

403. Lihtsusta avaldised:

1)  $\sin 49^\circ + \sin(-49^\circ) + \cos 25^\circ - \cos(-25^\circ)$ ;

2)  $\cos 33^\circ - \cos 17^\circ - \cos(-33^\circ) - \sin 40^\circ + \cos(-17^\circ) - \sin(-40^\circ)$ ;

3)  $\sin(\sqrt{x} - 1) - \cos\left(\frac{\sqrt{x}}{2} - 1\right)$ ;

4)  $\sin\left(\frac{\sqrt{x}}{2} - \alpha\right) - \cos(\sqrt{x} - \alpha)$ .

404. Arvuta järgnevate avaldiste väärtused tabelleid kasutamata:

1)  $\frac{\tan 26^\circ + \tan 19^\circ}{1 - \tan 26^\circ \cdot \tan 19^\circ}$ ;      3)  $\sin 18^\circ \cos 42^\circ + \cos 18^\circ \sin 42^\circ$ ;

2)  $\frac{\tan \frac{\sqrt{x}}{15} + \tan \frac{4\sqrt{x}}{15}}{1 - \tan \frac{\sqrt{x}}{15} \cdot \tan \frac{4\sqrt{x}}{15}}$ ;      4)  $\cos 46^\circ \cos 16^\circ + \sin 46^\circ \sin 16^\circ$ .

405. Avalda nurga  $\alpha$  trigonomeetriliste funktsioonide kaudu:

1)  $\sin 3\alpha$ ;      2)  $\cos 3\alpha$ .

406. Lahenda võrrandid:

1)  $\cos 4x + \cos 2x = 0$ ;

2)  $\tan 2x = \tan x$ .

407. Täismurkses kolmnurgas on üks külilg teise kahe külje geometriline keskmine. Kui suured on selle kolmnurga teravnurgad?

408. Arvuta logaritmid abil:

1)  $\frac{\sqrt{0,06768} \cdot \sqrt{0,001}}{0,004837^3 \cdot \sqrt{10}}$ ;      3)  $\frac{17,62}{4,834^3 \cdot \sqrt{\frac{0,716}{8,53}}}$ ;

2)  $\frac{\sqrt[5]{1000} \cdot \sqrt[3]{100}}{\sqrt{100000} \cdot \sqrt[4]{10}}$ ;      4)  $\frac{\sqrt{0,1} \cdot \sqrt[5]{0,0001}}{\sqrt[3]{0,0001} \cdot \sqrt[4]{0,001}}$ .

5) Arvuta maakera ruumala, kui maakera raadius on 6371 km. Kui pikk oleks sama suure ruumalaga kuubi serv?

6) Kui pika tee läbib Maa aastas, tehes täistüüru ümber Põikesse?

Maa kaugus Põikesest on 149700000 km.

7) Rauast kuup kaaluga 82,7 kg on asetatud rõhtsale lauale. Kui suurt rõhku avaldab kuup lauale? (Raua erikaal on  $7,8 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ ).

8) Vasktraadi keera kaalub 24,67 kg. Mitu meetrit traati on kerast, kui traadi läbimõõt on 1,5 mm? (Vase erikaal on  $8,9 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ ).

9) Kolmnurga külgede pikkused on 283,5 m, 309,2 m ja 346,7 m.

Arvuta kolmnurga pindala.

409. Lahenda arvutuslõtkati abil järgmised võrrandid:

$$1) 0,722 \cdot 268$$

$$14,9 : 0,066$$

$$0,0304 : 9,23$$

$$3,14 \cdot 2030$$

$$3) 0,0288^2$$

$$137^3$$

$$8530^2$$

$$0,046^3$$

$$2) 56,6 \cdot 125,5$$

$$6200 : 19,8$$

$$0,87 : 52,3$$

$$942 : 40,7$$

$$4) \sqrt{108000}$$

$$\sqrt[3]{0,01}$$

$$\sqrt[3]{675000}$$

$$\sqrt{0,00007}$$

$$5) \sqrt[4]{28000}; \sqrt[6]{0,003}$$

6) Leia x:

$$a) x : 232 = 15,6 : 8,7; 59,3 : x = 692 : 7,4.$$

$$b) 19,9 : 0,79 = x : 36,5; 0,0405 : 0,97 = 16,4 : x.$$

$$7) \frac{31,7 \cdot 9,25}{17,2};$$

$$\frac{0,281 \cdot 4,76 \cdot 18,9}{11,8 \cdot 0,647};$$

$$\frac{91,5 \cdot 107 \cdot 3,90}{16,4 \cdot 0,54 \cdot 522};$$

$$\frac{5200 \cdot 249}{3140 \cdot 178}.$$

8) Silikaatkivi standartmõõted on 6 x 12 x 25 cm. Arvuta kivi kaal, kui silikaatkivi erikaal on  $2,1 \frac{g}{cm^3}$ .

9) Ristkülik, mille mõõted on 87,5 m ja 17,2 m, tuleb jaotada sirgetega, mis on paralleelsed lühema küljega, osadeks, mille pindalad suhtuvad nagu 7 : 12 : 17. Leia osade pindalad ja mõõted.

10) Toa põranda mõõted on 4,26 m ja 3,72 m. Mitu 15 cm laiust ja 3,5 m pikkust lauda kuulub selle põranda katmiseks, kui arvestada, et laudade parajaks saagimisel läheb kaduma 6% kogu materjalist.

11) Risttahuka mõõted on 56,7 cm, 67,5 cm ja 31,6 cm. Ar-

vüta risttahuka tahkude diagonaalide pikkused.

12) Lahenda võrrandid

$$a) 2,1x^2 - 4,7x - 5,85 = 0;$$

$$b) 0,2x^2 + 1,82x - 7,87 = 0.$$

Министерство просвещения Эстонской ССР

Математика для 9 класса

(пробный учебник)

II часть

На эстонском языке

Авторы О.Принитс, Х.Рооз, Г.Розенберг, А.Вихман

Редактор А.Тельгмаа

A-24898

TÜ RAAMATUKOGU



1 0300 00418288 9