

Tartu Ülikool
Loodus- ja täppisteaduste valdkond
Matemaatika ja statistika instituut

Joonas Järve

Hägasate funktsioonide lähendamine

Matemaatika eriala
Bakalaureusetöö (9 EAP)

Juhendaja: dotsent, PhD Urve Kangro

Tartu 2019

Hägusate funktsioonide lähendamine

Bakalaureusetöö

Joonas Järve

Lühikokkuvõte. Bakalaureusetöös anname detailse ülevaate hägusate funktsioonide lähendamisest hägusa Lagrange'i interpolatsioonipolünoomiga ja hägusate splineidega. Muuhulgas tõestame nende meetodite omadusi ning anname ka numbrilise meetodi hägusa lähendi arvutamiseks mõlemal juhul. Töö ning enamik tõestusi põhineb erinevatel varemavaldatud artiklidel, kuid peamiselt toetub O.Kaleva artiklile [1] ja M. Zeinali, S. Shahmoradi ning K. Mirnia artiklile [2].

CERCS teaduseriala: P170 Arvutiteadus, arvutusmeetodid, süsteemid, juhtimine

Märksõnad. Hägusad hulgad, interpoleerimine, arvutusmeetodid, splineid, numbriline lähendamine.

Approximation of fuzzy functions

Bachelor's thesis

Joonas Järve

Abstract. The objective of this bachelor's thesis is to present a detailed overview of the approximation of fuzzy functions by the fuzzy Lagrange polynomial and fuzzy splines. Moreover, we will prove some properties of those methods and provide a numerical method for calculating the fuzzy interpolant. The thesis is based on numerous articles but relies mainly on O.Kaleva's article [1] and M. Zeinali's, S. Shahmoradi's and K. Mirnia's article [2].

CERCS research specialisation: P170 Computer science, numerical analysis, systems, control

Key words. Fuzzy sets, interpolation, numerical methods, splines, numerical approximation.

Sisukord

1	Hägasad arvud ja hägasad funktsioonid	7
2	Probleemist	13
3	Hägas Lagrange'i interpolatsioonipolünoom	15
3.1	Hägas Lagrange'i interpolatsioonipolünoomi definitsioon ja omadused . . .	15
3.2	Pidevus ja siledus	18
3.3	Näide	21
4	Hägas splineidega interpoleerimine	22
4.1	Hägas spline	22
4.2	Hägas lineaarne spline	23
4.2.1	Hägas linearspline	23
4.2.2	Veahinnang	25
4.3	Hägas kuupspline	26
4.3.1	Hägas mittesõlm ehk <i>not a knot</i> spline	27
4.3.2	Hägas täielik spline	31
4.3.3	Hägas naturaalspline	31
4.3.4	Veahinnang	32
4.4	Hägas splinei siledus ja pidevus	32
4.5	Numbriline meetod	32
4.5.1	Lõigatud astmefunktsioonid	34
4.5.2	Momentide meetod	35
4.6	Näited	39
5	Kuupsplineidega kolmnurkarvude interpoleerimise erijuht	43
5.1	Üldist	43
5.2	Erijuht	45
5.3	Näited	48
	Kirjandus	50

6	Lisad	53
6.1	Hägusa Lagrange'i interpolatsioonimeetodi implementatsioon	54
6.2	Hägus kuupsplainidega interpoleerimise implementatsioon	55
6.2.1	Momentide meetod	55
6.2.2	Lõigatud astmefunktsioonid	59
6.3	Kuupsplainidega lähendamise erijuhu implementatsioon	61

Sissejuhatus

Hägusaid hulki tutvustas esimesena L. A. Zadeh 1965. aastal oma artiklis [3]. Hägusad hulgad, erinevalt tavalistest hulkadest, ei näita ainult ranget 0 ja 1 hulka kuuluvust, vaid lubab hulka kuuluda ka näiteks poolenisti. Selline omadus muudab hägusad hulgad kasulikuks vahendiks, et kirjeldada hägusaid mõisteid nagu „pikkade meeste hulk“ või „noorte inimeste hulk“ [3]. Näiteks „loomade hulka“ kuuluvad kindlasti koerad ja kassid ning kindlasti ei kuulu kivid, kuid seevastu bakterite kuuluvus ei ole nii selge – seetõttu ongi matemaatilistes süsteemides hägusate mõistete kirjeldamiseks hea kasutada hägusaid hulki [3]. Hägusatele hulkadele on aina enam rakendusi leitud ning nende teooriat palju edasi arendatud. Siin töös keskendume hägusale interpolatsioonile. Paljude ülesannete, näiteks diferentsiaal- ja integraalvõrrandite ligikaudse lahendamise meetodid tuginevad funktsioonide lähendamisele lihtsamate funktsioonidega, näiteks polünoomidega või splineidega. Kui ülesandes esinevad hägusad funktsioonid, siis on vaja meetodeid hägusate funktsioonide lähendamiseks. Hägusate funktsioonide lähendamisega on mitmeid probleeme, kuid peamised küsimused seisnevad selles, kas ka lähend ise on hägus funktsioon, kuidas hinnata lähendi viga ning millised on lähendi omadused.

Töös uurime juhtumit, kus on antud interpolatsioonisõlmed x_0, x_1, \dots, x_n ja neile sõlmedele vastavad hägusad arvud ehk funktsiooni väärtused u_0, u_1, \dots, u_n . Hägusa interpolatsiooni probleemi [4] püstitas esimesena L. A. Zadeh, kes küsis, kas on võimalik konstrueerida nendele andmetele vastav hägus lähend, mis täidab ka teatud sileduse tingimusi. L. A. Zadeh enda sõnastus: *Suppose we are given $n + 1$ points $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, and for each of these points a 'fuzzy value' in \mathbb{R} , rather than a crisp one. Is it then possible to construct some function on \mathbb{R} with range also a collection of 'fuzzy values'; which coincides, on the given $n + 1$ points, with the given 'fuzzy values'; and which fulfills some natural 'smoothness' condition?*[4, lk 33]

Selle bakalaureusetöö eesmärk on anda ülevaade põhilistest väljatöötatud hägusate funktsioonide ja andmete lähendamismeetoditest, mis säilitavad hägususe, ning nende omadustest. Samuti implementeerime erinevad kirjeldatud meetodid, mida ei ole siiani kahjuks artiklites pikalt kajastatud. See töö on peamiselt referatiivne, kirjeldades juba teiste autorite poolt välja mõeldud meetodeid.

Töö koosneb viiest peatükist. Esimeses peatükis defineerime vajaminevad mõisted ning tutvustame lühidalt hägusaid arve ja hulki ning nendega seotud mõisteid, mis pärinevad peamiselt raamatust [5].

Teises lühikeses peatükis toome kontranäite, mis näitab, et üldjuhul ei kandu lähendamismeetodid lihtsalt üle.

Kolmandas peatükis kirjeldame hägusat Lagrange'i interpolatsioonipolünoomi ning tõestame tema omadusi ning toome näiteid.

Neljandas peatükis kirjeldame hägusat splineidega interpoleerimist ning uurime täpsemalt hägusat lineaar- ja kuupsplineidega lähendamist. Lisaks anname hägusate lineaarsplineidega lähendamise veahinnangu ning hägusate kuupsplineidega lähendamisel ülevaate rajatingimustest. Viimaks toome ära ka praktilised numbrilised meetodid hägusate kuupsplineidega lähendamiseks. Nii kolmas kui ka neljas peatükk põhinevad peamiselt O.Kaleva artiklil [1].

Viiendas peatükis kirjeldame hägusate kolmnurkarvude interpoleerimist kuupsplineidega. Täpsemalt uurime artikli [2] eeskujul erijuhtu, kus üldtuntud lähendamismeetodit saab kergelt rakendada ka hägusate andmete korral.

1. Hägusad arvud ja hägusad funktsioonid

Selles peatükis defineerime hägusad hulgad, arvud ja funktsioonid. Lisaks anname väikese ülevaate hägusate arvude aritmeetikast. Peame nentima, et kuna antud teemal tuntud eestikeelne kirjandus puudub, siis paljud töös kasutatavad mõisted on tõlgitud ja kohandatud inglise keelest.

Alustame hägusa hulga definitsioonist, mis pärineb raamatust [5], kuid on algselt defineeritud artiklis [3].

Definitsioon 1.1. [3] Olgu X mingi hulk. Kujutust

$$A: X \rightarrow [0, 1]$$

nimetatakse *hägusaks hulgaks* (*fuzzy set*), kus $A(x)$ näitab $x \in X$ kuuluvuse astet hägusasse hulka A . Hulga X kõiki hägusaid alamhulki tähistame $F(X)$.

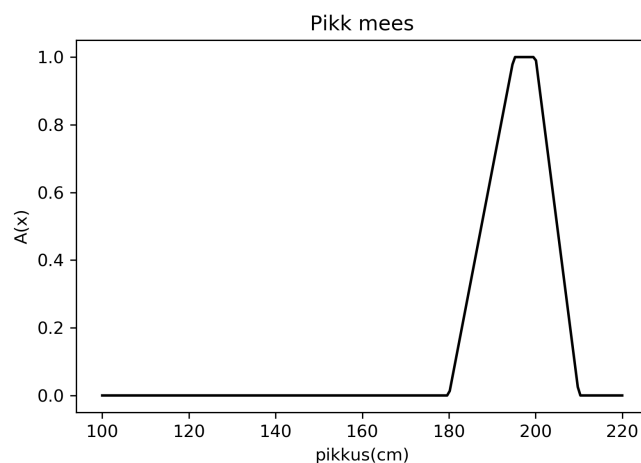
Toome siinjuures ka ühe näite, et hägusa hulga mõistest tekiks parem arusaam.

Näide 1.1. *Kuna hägusaid hulki on hea kasutada erinevate sõnade ja väljendite korral, mis ei kategoriseeri objekte täpselt, siis siin näites kirjeldame sõna „pikk“, mehe pikkuse suhtes, hägusa hulga abil. Märgime siin, et eristame ka mõistet „väga pikk“ mispärast kestab mõiste „pikk“ vaid kuni 210 cm.*

Loome hägusa hulga $A: [180, 210] \rightarrow [0, 1]$, mille korral

$$A(x) = \begin{cases} \frac{x - 180}{15}, & \text{kui } 180 \leq x < 195 \\ 1, & \text{kui } 195 \leq x \leq 200 \\ \frac{210 - x}{10}, & \text{kui } 200 < x \leq 210 \\ 0, & \text{muul juhul} \end{cases}$$

Hulk A on esitatud ka joonisel 1.1.



Joonis 1.1: Joonisel on kujutatud mõiste "pikk mees" hägusa hulgana.

Edasi vaatame hägusa hulga abimõisteid.

Definitsioon 1.2. [5] Olgu

$$A: X \rightarrow [0, 1]$$

hägus hulk. Hägusa hulga A tasemehulkadeks (*level sets*) nimetatakse hulki

$$A_\alpha = \{x \in X \mid A(x) \geq \alpha\},$$

kus $0 < \alpha \leq 1$. Hägusa hulga A tuumaks nimetatakse tema tasemehulka kui $\alpha = 1$. Hulka

$$\text{supp}A = \text{cl}\{x \in X \mid A(x) > 0\}$$

nimetatakse hägusa hulga kandjaks (*support*), kus *cl* tähistab hulga sulundit.

Järgmisena defineerime hägusad arvud ja toome ühe lihtsa näite.

Definitsioon 1.3. [5] Kujutust (hägusat hulka) $u: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ nimetatakse hägusaks arvuks (*fuzzy number*), kui ta rahuldab järgmisi tingimusi:

- u on normaalne ehk $\exists x_0 : u(x_0) = 1$,
- u on hägusalt kumer (*fuzzy convex*) ehk $u(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \min\{u(x), u(y)\}, \forall \lambda \in [0, 1], x, y \in \mathbb{R}$,
- u on hulgal \mathbb{R} ülalt poolpidev (*upper semicontinuous*) ehk $\forall x_0 \in \mathbb{R} \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow u(x) - u(x_0) < \epsilon$,

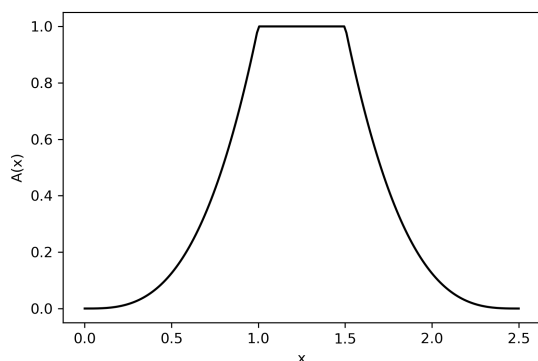
- kujutusel u on *kompaktne kandja* (*compactly supported*).

Kõikide hägusate arvude hulka tähistatakse \mathbb{R}_F .

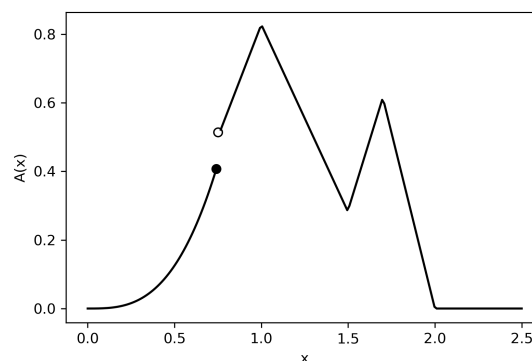
Näide 1.2. Toome järgnevalt ühe näite B.Bede raamatust [5]
Olgu meil hägus hulk

$$u(x) = \begin{cases} 0, & \text{kui } x < 0 \\ x^3, & \text{kui } 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & \text{kui } 1 \leq x \leq 1.5 \\ (2.5 - x)^3, & \text{kui } 1.5 \leq x \leq 2.5 \\ 0, & \text{kui } x > 2.5 \end{cases}$$

Hulk $u(x)$ on hägus arv ning esitatud joonisel 1.2(a). Samuti toome joonisel 1.2(b) ära ka hägusa hulga, mis pole hägus arv, sest ta pole ülalt poolpidev, ei saavuta väärtust 1 ega ole hägusalt kumer.



(a) Hägus arv.



(b) Hägus hulk, mis pole hägus arv.

Joonis 1.2: Joonisel 1.2(a) on kujutatud näite 1.2 hägus arv $u(x)$ ning joonisel 1.2(b) on kujutatud hägus hulk, mis pole hägus arv.

Abimõisted kanduvad üle ka hägusatele arvudele ning defineeritakse järgmiselt.

Definitsioon 1.4. [5] Olgu $0 < r \leq 1$, siis hulka

$$u_r = \{x \in \mathbb{R} \mid u(x) \geq r\}$$

nimetatakse hägusa arvu u *r-tasemehulgaks* (*r-level set*). Hulka u_1 nimetatakse *tuumaks* (*core*) ja hulka

$$u_0 = cl\{x \in \mathbb{R} \mid u(x) > 0\}$$

hägusa arvu u *kandjaks* (*support*).

Järgnev teoreem annab hea ülevaate, millised näevad välja hägusa arvu r -tasemehulgad kujutatuna intervallidena. Teoreem on tõestatud raamatus [5].

Teoreem 1.1. [5] *Kui $u \in \mathbb{R}_F$ on hägus arv ja u_r on tema r -tasemehulk, siis kehtivad järgmised väited:*

- Iga $r \in [0, 1]$ korral u_r on kinnine intervall $u_r = [u_r^-, u_r^+]$.
- Kui $0 \leq r_1 \leq r_2 \leq 1$, siis $u_{r_2} \subseteq u_{r_1}$.

Defineerime hägusa L-R arvu, mis on hägusa arvu tähtis erijuht.

Definitsioon 1.5. [5] Olgu $L, R: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ paremalt pidevad, kasvavad ning tingimusi $L(0) = R(0) = 0, L(1) = R(1) = 1$ täitvad funktsioonid. Olgu meil ka reaalarvud $a_0^- \leq a_1^- \leq a_1^+ \leq a_0^+$. Hägusat arvu $u: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ nimetatakse *hägusaks L-R arvuks (L-R fuzzy number)*, kui

$$u(x) = \begin{cases} 0, & \text{kui } x < a_0^- \\ L\left(\frac{x - a_0^-}{a_1^- - a_0^-}\right), & \text{kui } a_0^- \leq x < a_1^- \\ 1, & \text{kui } a_1^- \leq x < a_1^+ \\ R\left(\frac{a_0^+ - x}{a_0^+ - a_1^+}\right), & \text{kui } a_1^+ \leq x < a_0^+ \\ 0, & \text{kui } x \geq a_0^+ \end{cases}$$

Kasutatakse ka tähistust $u = (a_0^-, a_1^-, a_1^+, a_0^+)$. Juhul, kui $a_0^- = a_1^-$ ja $a_1^+ = a_0^+$, siis saame intervallarvu.

Kui hägusal L-R arvul on parem ja vasak funktsioon lineaarne, siis saame kaks lihtsamat alamjuhtu.

Definitsioon 1.6. [5] *Hägus trapetsarv (trapezoidal fuzzy number) u esitub kui nelik $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$, kus $a \leq b \leq c \leq d$ ning*

$$u(x) = \begin{cases} 0, & \text{kui } x < a \\ \frac{x - a}{b - a}, & \text{kui } a \leq x < b \\ 1, & \text{kui } b \leq x \leq c \\ \frac{d - x}{d - c}, & \text{kui } c < x \leq d \\ 0, & \text{kui } x > d. \end{cases}$$

Trapetsarvu u r -taseme otspunktid avalduvad vastavalt

$$u_r^- = a + r(b - a)$$

$$u_r^+ = d - r(d - c)$$

Kui $a = b$ ja $c = d$, siis saame intervallarvu.

Juhul, kui trapetsarvu nelikus $b = c$, siis kutsutakse teda *hägusaks kolmnurkarvuks* (*triangular fuzzy number*) ning ta esitub kolmikuna $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, kus $a \leq b \leq c$. Kui kolmnurkarvu korral $a = b = c$, siis saame reaalarvu.

Defineerime ka peamised tehted hägusate arvudega.

Definitsioon 1.7. [5] Kahe hägusa arvu u, v *summa* $u + v$ on defineeritud iga $r \in [0, 1]$ korral ehk tasemekaupa järgmiselt

$$(u + v)_r = \{x + y \mid x \in u_r, y \in v_r\} = u_r + v_r.$$

Tasemel r on liitmine taseme otspunktide kaudu järgmine

$$(u + v)_r = [u_r^- + v_r^-, u_r^+ + v_r^+],$$

kus $+$ ja $-$ tähistavad vastavalt taseme r otspunkte.

Definitsioon 1.8. [5] Hägusa arvu u *korrumine skalaariga* $\lambda \in \mathbb{R}$ on defineeritud iga $r \in [0, 1]$ korral tasemekaupa järgmiselt

$$(\lambda u)_r = \{\lambda x \mid x \in u_r\} = \lambda u_r.$$

Tasemel r on skalaariga korrumine taseme otspunktide kaudu järgmine

$$\lambda u_r = [\min\{\lambda u_r^-, \lambda u_r^+\}, \max\{\lambda u_r^-, \lambda u_r^+\}],$$

kus $+$ ja $-$ tähistavad vastavalt taseme r otspunkte.

Definitsioon 1.9. [5] Kahe hägusa arvu u, v *korrumine* $u \cdot v$ on defineeritud iga $r \in [0, 1]$ korral tasemekaupa järgmiselt

$$(u \cdot v)_r = \{x \cdot y \mid x \in u_r, y \in v_r\}$$

Tasemel r on kahe hägusa arvu korrumine taseme otspunktide kaudu järgmine

$$(u \cdot v)_r^- = \min\{u_r^- v_r^-, u_r^- v_r^+, u_r^+ v_r^-, u_r^+ v_r^+\},$$

$$(u \cdot v)_r^+ = \max\{u_r^- v_r^-, u_r^- v_r^+, u_r^+ v_r^-, u_r^+ v_r^+\},$$

kus $+$ ja $-$ tähistavad vastavalt taseme r otspunkte.

Siin töös kasutame hägusa funktsiooni definitsiooni, kus lähtehulgaks on reaalarvude hulk. Mõningates allikates nimetatakse neid ka *hägustavateks funktsioonideks* (*fuzzifying functions*).

Definitsioon 1.10. [6] *Hägusaks funktsiooniks (fuzzy function)* nimetatakse funktsiooni $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_F$, kus $[a, b] \subset \mathbb{R}$. *Tasemefunktsioonidena* saame kirjutada nii:

$$f(x)_r = [f(x)_r^-, f(x)_r^+],$$

kus $f(x)_r^-, f(x)_r^+ : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ja $r \in [0, 1]$.

Toome ka ühe lihtsa näite.

Näide 1.3.

$$f(x) = u \cdot x^2,$$

kus $u = (0, 1, 2)$ on hägus kolmnurkarv ja $x \in [1, 5]$.

Hägusate arvude vahelise kauguse kirjeldamiseks kasutatakse Hausdorffi kaugust.

Definitsioon 1.11. [6] *Hausdorffi kaugus* $D : \mathbb{R}_F \times \mathbb{R}_F \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ kahe hägusa arvu $u_r = [u_r^-, u_r^+]$ ja $v_r = [v_r^-, v_r^+]$ vahel on

$$D(u, v) = \sup_{r \in [0, 1]} \max\{|u_r^- - v_r^-|, |u_r^+ - v_r^+|\}.$$

Loomulikult on vaja defineerida ka hägusa funktsiooni piirväärtus ja pidevus.

Definitsioon 1.12. [6] Olgu meil hägus funktsioon $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_F$ ja $x_0 \in [a, b]$. Me ütleme, et $L \in \mathbb{R}_F$ on funktsiooni f *piirväärtus* kohal x_0 , kui

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in [a, b]: 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow D(f(x), L) < \epsilon,$$

mida tähistame nii

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L.$$

Me ütleme, et hägus funktsioon f on pidev punktis x_0 , kui

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

ning f on *hägusalt pidev* lõigus $[a, b]$, kui f on pidev iga $x_0 \in (a, b)$ korral ja ühepoolselt pidev punktides a ja b .

Tasub märkida, et artiklis [7] on tõestatud, et funktsioon f on hägusalt pidev lõigus $[a, b]$ parajasti siis, kui $f(x)_r^-, f(x)_r^+$ on pidevad lõigus $[a, b]$ ühtlaselt $r \in [0, 1]$ suhtes.

Lõpuks toome ära ka tähtsa definitsiooni, mis lubab mittehägusaid funktsioone hägusateks laiendada. Definitsioon pärineb raamatust [5], kuid on algupäraselt antud artiklis [8].

Definitsioon 1.13. [8] (*Zadeh's extension principle*) Olgu meil antud funktsioon $f : X \rightarrow Y$, kus X ja Y on mittehägusad hulgad, siis saab f laiendada hägusaks funktsiooniks $F : F(X) \rightarrow F(Y)$, kus $u \in F(X)$ ja $v \in F(Y)$, nii, et $v = F(u)$. Kusjuures

$$v(y) = \begin{cases} \sup\{u(x) : x \in X, f(x) = y\}, & \text{kui } f^{-1}(y) \neq \emptyset, \\ 0, & \text{muul juhul.} \end{cases}$$

2. Probleemist

Peamised hägusate funktsioonide interpolatsiooni murekohad, millega me siin töös tegeleme, seisnevad selles, kas ka interpolant ise on hägus funktsioon ja milline on interpolandi viga ning omadused.

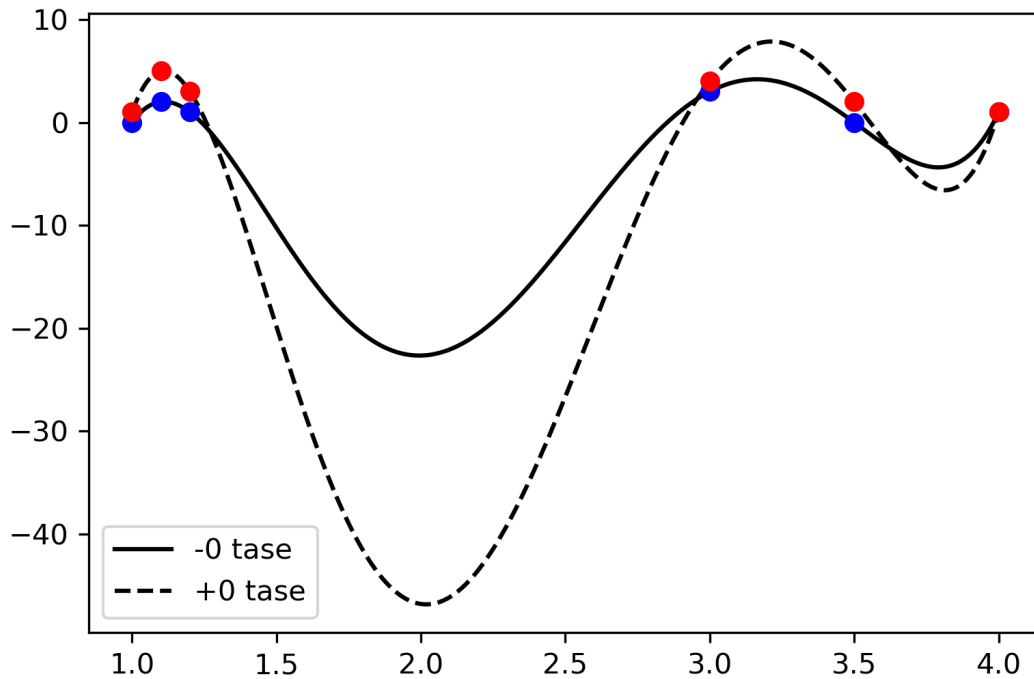
Järgnevates peatükkides uurime interpolatsioonimeetodeid hägusate funktsioonide lähendamiseks, kus olgu antud interpolatsioonisõlmed x_0, x_1, \dots, x_n ja neile sõlmedele vastavad hägusad arvud ehk funktsiooni väärtused u_0, u_1, \dots, u_n .

Toome esmalt kontranäite, et üldiselt ei saa probleemi lahendada lihtsalt eraldi interpoleerides läbi hägusate arvude r -tasemete otspunktide. Täpsemalt, loome igal tasemel kaks interpolanti, mis interpoleerivad sõlmedes x_0, x_1, \dots, x_n vastavalt läbi $u_{0,r}^+, u_{1,r}^+, \dots, u_{n,r}^+$ ja $u_{0,r}^-, u_{1,r}^-, \dots, u_{n,r}^-$. Sellisel juhul pole tulemus alati hägus ja lähendite vahel võivad tekkida lõikumised.

Näide 2.1. *Näide, kus tulemus ei ole hägus, on järgmine. Olgu meil antud hägusad arvud 0 -taseme otspunktide kaudu:*

i	0	1	2	3	4	5
x_i	1	1.1	1.2	3	3.5	4
$u_{i,0}^+$	1	5	3	4	2	1
$u_{i,0}^-$	0	2	1	3	0	1

mis annavad Lagrange'i interpolatsioonipolünoomiga otspunktide kaudu interpoleerides joonise 2.1.



Joonis 2.1: Joonisel on näites 2.1 toodud andmetele vastav lähend, mis ei ole hägus. Punased ja sinised täpid tähistavad interpolatsioonitingimusi.

Seega, üldiselt peame lähenema teisiti. Järgnevalt uurime, millal saame kasutada ülal kirjeldatud meetodit ilma probleemideta ning samuti proovime erinevaid tuntud lähendamismeetodeid üldistada hägusate andmete tarvis. Lisaks uurime, millised omadused on nende meetodite abil saadud tulemustel.

3. Hägus Lagrange'i interpolatsioonipolünoom

Selles peatükis defineerime hägusa Lagrange'i interpolatsioonipolünoomi ja tõestame tema kohta ka mõned tulemused. Samuti anname eeskirja interpolandi arvutamiseks numbriliselt ning toome peatüki lõpus ka näite.

3.1 Hägusa Lagrange'i interpolatsioonipolünoomi definitsioon ja omadused

Olgu antud sõlmed x_0, x_1, \dots, x_n ja neile sõlmedele vastavad hägusad arvud ehk funktsiooni väärtused u_0, u_1, \dots, u_n . Definitsioon 1.13 võimaldab meil Lagrange'i interpolatsiooni polünoomi jätkamist hägusale juhule. R.Lowen töötas välja sellise polünoomi $p(x)$ oma artiklis [4] ning O.Kaleva andis sellele tasemelise kuju $p(x)_r$ [1], mida kasutame järgnevalt ka meie.

$$p(x)_r = \{y \in \mathbb{R} \mid y = p_{d_0, \dots, d_n}(x), d_i \in u_{i,r}\},$$

kus $p_{d_0, \dots, d_n}(x)$ on Lagrange'i polünoom, mis interpoleerib sõlmedele x_0, \dots, x_n vastavaid väärtusi d_0, \dots, d_n . Sellest hulgast võime mõelda ka kui kõikvõimalike interpolatsioonipolünoomide hulgast, mis interpoleerivad läbi antud intervallide punktide.

Tähistame Lagrange'i fundamentaalpolünoome järgnevalt:

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Seega, hägus Lagrange'i interpolatsioonipolünoom näeb tasemeti välja selline:

$$p(x)_r = \sum_{i=0}^n L_i(x) \cdot u_{i,r}$$

ning üldkujul:

$$p(x) = \sum_{i=0}^n L_i(x) \cdot u_i$$

On selge, et hägus Lagrange'i interpolatsioonipolünoom täidab sõlmedes interpolatsioonitingimusi, sest $L_i(x_j)$ on ikka $i = j$ korral 1 ja muul juhul 0, mis annabki sõlmes x_i meile polünoomi väärtuseks u_i mis tahes $i = 0, \dots, n$ korral.

Nüüd uurime, kas interpolatsioonipolünoom on ise ka hägus funktsioon.

Lause 3.1. *Hägus Lagrange'i interpolatsioonipolünoom on hägus funktsioon ehk $\forall x \in [a, b] : p(x) \in \mathbb{R}_F$, kus $[a, b]$ on $p(x)$ määramispiirkond.*

Tõestus. Kuna $L_i(x)$ on iga x korral reaalarv ehk skalaar ja hägusate arvude hulk skalaariga korrutamise suhtes on kinnine, siis $L_i(x) \cdot u_i$ on samuti hägus arv. Samuti, kuna hägusate arvude summa on hägus arv, siis on ka $\sum_{i=0}^n L_i(x) \cdot u_i$ hägus arv. Seega on polünoomi väärtused määramispiirkonnas tõepoolest alati hägusad arvud. \square

Märgime, et lühend len tähistab intervalli pikkust. Järgmise teoreemi tõestamiseks on meil vaja veel ühte tulemust.

Lause 3.2. *Intervallide liitmine ei vähenda intervalli pikkust.*

Tõestus. Olgu meil intervallid $x = [x_1, x_2]$ ja $y = [y_1, y_2]$, siis $len(x) = x_2 - x_1 \geq 0$ ja $len(y) = y_2 - y_1 \geq 0$. Kuna $x + y = [x_1 + y_1, x_2 + y_2]$ ja $len(x + y) = (x_2 + y_2) - (x_1 + y_1) = (x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = len(x) + len(y)$. Seega $len(x + y) \geq \max\{len(x), len(y)\}$ \square

Nüüd tõestame teoreemi mis näitab, kuidas käituvad interpolatsioonipolünoomi r -taseme intervallid. Teeme seda O.Kaleva eeskujul [1], kuid parandades tema pisivead.

Teoreem 3.1. [1] *Kui $x \in (x_i, x_{i+1})$, siis iga $r \in [0, 1]$ korral*

$$len(p(x)_r) \geq \min\{len(p(x_i)_r), len(p(x_{i+1})_r)\}.$$

Teoreem 3.1 ütleb, et interpolatsioonipolünoomi r -taseme intervalli laius ei ole üheski interpolatsioonisõlmede vahelises intervallis väiksem kui vähim interpolatsioonipolünoomi r -taseme laius vastava intervalli otspunktides.

Tõestus. Paneme tähele, et interpolatsioonipolünoomi tasemelise definitsiooni ja lause 3.2 tõttu kehtib:

$$len(p(x)_r) = len\left(\sum_{i=0}^n L_i(x) \cdot u_{i,r}\right) \geq len\left(\sum_{j=i}^{i+1} L_j(x) \cdot u_{j,r}\right)$$

Veelgi enam, saame kirjutada:

$$\text{len}\left(\sum_{j=i}^{i+1} L_j(x) \cdot u_{j,r}\right) \geq \min\{\text{len}(u_{i,r}), \text{len}(u_{i+1,r})\} \sum_{j=i}^{i+1} |L_j(x)|$$

Jääb veel näidata, et kehtib võrratus:

$$\min\{\text{len}(u_{i,r}), \text{len}(u_{i+1,r})\} \sum_{j=i}^{i+1} |L_j(x)| \geq \min\{\text{len}(u_{i,r}), \text{len}(u_{i+1,r})\},$$

sest

$$\min\{\text{len}(u_{i,r}), \text{len}(u_{i+1,r})\} = \min\{\text{len}(p(x_i)_r), \text{len}(p(x_{i+1})_r)\}.$$

Selleks peame näitama, et $L_i(x) + L_{i+1}(x) \geq 1 \quad \forall x \in (x_i, x_{i+1})$.

Paneme tähele, et $L_i(x) + L_{i+1}(x)$ on maksimaalselt n astme polünoom, mille väärtus on 1, kui $x = x_i$ või $x = x_{i+1}$ ning muudes sõlmedes 0.

Oletame vastuväiteliselt, et $\exists x \in (x_i, x_{i+1}): L_i(x) + L_{i+1}(x) < 1$. Olgu $0 < i < n$. See- ga, oleks ta tuletisel lõigus (x_{i-1}, x_{i+2}) vähemalt kolm nullkohta, sest vahemikus (x_i, x_{i+1}) oleks funktsioonil $L_i(x) + L_{i+1}(x)$ miinimum väiksem ühest, kuid samas $L_i(x) + L_{i+1}(x) = 1$ argumentide x_i ja x_{i+1} korral, mis annavad vähemalt ühe ekstreemumi kummagisse pool- lõiku $(x_{i-1}, x_i]$ ja $[x_{i+1}, x_{i+2})$. Lisaks on tal Rolle'i teoreemi tõttu ka igas lõigus (x_j, x_{j+1}) tuletisel nullkoht, kus $0 \leq j \leq i - 2$ ja $i + 2 \leq j \leq n$ ehk kokku $n - 3$ nullkohta. Seega on ta tuletisel kokku kogu piirkonnas vähemalt n nullkohta, mis on vastuolus sellega, et n astme polünoomi tuletisel on maksimaalselt $n - 1$ nullkohta.

Juhul, kui $i = 0$, saame teha analoogiliselt. Oletades samuti, et $\exists x \in (x_0, x_1): L_0(x) + L_1(x) < 1$, siis saame ta tuletisel lõigus (x_0, x_2) vähemalt kaks nullkohta ning mujal $n - 2$ nullkohta. See annab taaskord kokku vähemalt n nullkohta, mis viib sama vastuoluni. Juhu $i = n$ tõestus on analoogne juhuga $i = 0$.

□

Nagu on välja pakkunud O.Kaleva [1], siis võime hägusast interpolatsiooniülesandest mõelda kui optimeerimisülesandest. Tähistame interpolatsioonipunktid $u_{i,r} = [a_{i,r}, b_{i,r}]$, kus $a_{i,r}$ ja $b_{i,r}$ on vastavalt u_i r-taseme alumine ja ülemine otspunkt.

Esmalt vaatleme $p(x)_r^+$ leidmist optimeerimisülesandena.

$$\max\{p_{d_0, \dots, d_n}(x) \mid a_{i,r} \leq d_i \leq b_{i,r}, \quad i = 0, \dots, n\}. \quad (3.1)$$

Selleks, et antud tingimustel $p_{d_0, \dots, d_n}(x)$ tuleks maksimaalne, siis peab tulema $\sum_{i=0}^n L_i(x) \cdot d_i$ maksimaalne. Kuna $d_i \in [a_{i,r}, b_{i,r}]$, siis peaksime valima alati sealt hulgast otspunkti, mis

annab $L_i(x)$ 'ga korrutades suurima arvu. Kuna $L_i(x)$ võib olla ka negatiivne, siis peame mõnikord valima ka alumise otspunkti ehk tulemus oleks selline:

$$d_i = \begin{cases} a_{i,r} & \text{kui } L_i(x) < 0 \\ b_{i,r} & \text{kui } L_i(x) \geq 0 \end{cases}$$

Analoogiliselt saame, et $p(x)_r^-$ leidmine on minimiseerimisülesanne, mille lahendus on järgmine:

$$d_i = \begin{cases} a_{i,r} & \text{kui } L_i(x) \geq 0 \\ b_{i,r} & \text{kui } L_i(x) < 0 \end{cases}$$

Selle põhjal ja [9] eeskujul saame kirjutada ka:

$$p(x)_r^- = \sum_{L_i(x) \geq 0} a_{i,r} \cdot L_i(x) + \sum_{L_i(x) < 0} b_{i,r} \cdot L_i(x), \quad (3.2)$$

$$p(x)_r^+ = \sum_{L_i(x) \geq 0} b_{i,r} \cdot L_i(x) + \sum_{L_i(x) < 0} a_{i,r} \cdot L_i(x). \quad (3.3)$$

Selline tulemus on kooskõlas ka hägusa arvu korrutamisega skalaariga ning seetõttu on numbriliselt lihtne realiseerida.

3.2 Pidevus ja siledus

Järgmisena näitame, et hägus Lagrange'i interpolatsioonipolünoom on hägusalt pidev.

Lause 3.3. *Hägus Lagrange'i interpolatsioonipolünoom on hägusalt pidev.*

Tõestus. Olgu

$$p(x) = \sum_{i=0}^n L_i(x) \cdot u_i$$

Lagrange'i interpolatsioonipolünoom. Hägusa pidevuse saame sellest, et hägus arv korda mittehägus pidev funktsioon ehk meie puhul $L_i(x) \cdot u_i$ on hägusalt pidev ning hägusalt pidevate funktsioonide summa on hägusalt pidev. Mõlema omaduse tõestused on lihtsad, niisiis anname siinjuures vaid teise omaduse tõestuse.

Teise omaduse tõestuses kasutama Hausdorffi kauguse omadust artiklist [2]

$$D(\mu + v, u + e) \leq D(\mu, u) + D(v, e), \text{ kus } \mu, u, v, e \in \mathbb{R}_F.$$

Olgu meil kaks hägusat funktsiooni $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_F$ hägusalt pidevad punktis $x_0 \in [a, b]$. Fikseerime $\epsilon > 0$. Kuna funktsioonid f, g on pidevad punktis x_0 , siis

$$\exists \delta_1 > 0 \forall x \in [a, b]: 0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow D(f(x), f(x_0)) < \frac{\epsilon}{2},$$

$$\exists \delta_2 > 0 \forall x \in [a, b]: 0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow D(g(x), g(x_0)) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Olgu $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ ja $|x - x_0| < \delta$, siis Hausdorffi kauguse omaduse tõttu saame

$$D(f(x) + g(x), f(x_0) + g(x_0)) \leq D(f(x), f(x_0)) + D(g(x), g(x_0)) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Sellega oleme näidanud, et hägusalt pidevate funktsioonide summa on hägusalt pidev. \square

Hägusa Lagrange'i interpolatsioonipolünoomi hägus pidevus on põhjalikult ning teisest vaatevinklist tõestatud ka R.Loweni artiklis [4]. Seal tõestab ta hägusa Lagrange'i interpolatsiooniteoreemi, mis ütlebki muuhulgas, et hägus Lagrange'i interpolatsioonipolünoom on pidev Hausdorffi meetrika suhtes.

Järgmise lause tõestamiseks vajame tulemust Lagrange'i fundamentaalpolünoomi kohta.

Lemma 3.1. [1] *Lagrange'i fundamentaalpolünoomi märk käitub iga $x \in (x_j, x_{j+1})$ korral järgnevalt*

$$\text{sign}(L_i(x)) = \begin{cases} (-1)^{i-j-1} & \text{kui } 0 \leq j \leq i-1 \\ (-1)^{j-i} & \text{kui } i \leq j \leq n-1 \end{cases}$$

On selge, et kuna $L_i(x)$ omab ühekordseid nullkohti punktides

$$x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n,$$

siis on tal igas vahemikus (x_j, x_{j+1}) sama märk ja märk vahetub igas intervallis, välja arvatud kui $j = i-1, i$. Vahemikus (x_{i-1}, x_{i+1}) on $L_i(x)$ märk sama, sest punktis x_i ei leidu nullkohta vaid seal $L_i(x_i) = 1$; seal vahemikus on märk $+$. Siinjuures saab leida ka märgid teistes intervallides ning veenduda lemmas 3.1.

Oleme nüüdseks näinud, et Lagrange'i interpolant on hägusalt pidev. Kuid kuidas on lood tema tuletisega r -tasemekaupa?

Lause 3.4. [9] *Olgu $p(x)_r = [p(x)_r^-, p(x)_r^+]$ r -taseme hägus polünoom. Mittehägusate funktsioonide $p(x)_r^-$ ja $p(x)_r^+$ esimesed tuletised ei ole üldiselt interpolatsioonisõlmedes pidevad.*

Tõestus. Lodwick'i tõestus artiklis [9] ei olnud piisavalt veenev, seepärast anname siin natuke erineva tõestuse.

Esmalt anname funktsioonile $p(x)_r^-$ esituse 3.2 eeskujul analoogse, kuid erineva kuju:

$$p(x)_r^- = \sum_{i=0}^n \left[\frac{a_{i,r} + b_{i,r}}{2} \cdot L_i(x) + \frac{a_{i,r} - b_{i,r}}{2} \cdot |L_i(x)| \right],$$

kus $u_{i,r} = [a_{i,r}, b_{i,r}]$.

Nüüd võtame tuletise funktsioonist $p(x)_r^-$, kui x pole interpolatsioonisõlm

$$p'(x)_r^- = \sum_{i=0}^n \left[\frac{a_{i,r} + b_{i,r}}{2} \cdot L'_i(x) + \frac{a_{i,r} - b_{i,r}}{2} \cdot |L_i(x)|' \right].$$

Paneme tähele, et $|L_i(x)|' = \text{sign}(L_i(x)) \cdot L'_i(x)$. Võtame $p'(x)_r^-$ vasakpoolse ja parempoolse piirväärtuse vastavalt $x \rightarrow x_k^-$ ja $x \rightarrow x_k^+$, kus x_k on suvaline sõlm

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_k^-} p'(x)_r^- &= \sum_{i=0}^n \left[\frac{a_{i,r} + b_{i,r}}{2} \cdot L'_i(x_k^-) + \frac{a_{i,r} - b_{i,r}}{2} \cdot |L_i(x_k^-)|' \right], \\ \lim_{x \rightarrow x_k^+} p'(x)_r^- &= \sum_{i=0}^n \left[\frac{a_{i,r} + b_{i,r}}{2} \cdot L'_i(x_k^+) + \frac{a_{i,r} - b_{i,r}}{2} \cdot |L_i(x_k^+)|' \right]. \end{aligned}$$

Nüüd, kuna $L'_i(x_k^+) = L'_i(x_k)$ ja $L'_i(x_k^-) = L'_i(x_k)$, siis

$$p'(x_k^+)_r^- - p'(x_k^-)_r^- = \sum_{i=0}^n \left[\frac{a_{i,r} - b_{i,r}}{2} \cdot (|L_i(x_k^+)|' - |L_i(x_k^-)|') \right].$$

Näeme, et

$$|L_i(x_k^+)|' - |L_i(x_k^-)|' = \text{sign}(L_i(x_k^+))L'_i(x_k) - \text{sign}(L_i(x_k^-))L'_i(x_k)$$

ning kuna märgid on erinevad iga $i \neq k$ korral, siis

$$|L_i(x_k^+)|' - |L_i(x_k^-)|' = 2|L'_i(x_k)|, \quad \text{iga } i \neq k \text{ korral.}$$

Seega saame edasi

$$p'(x_k^+)_r^- - p'(x_k^-)_r^- = \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n (a_{i,r} - b_{i,r}) \cdot |L'_i(x_k)|.$$

Kuna $L'_i(x_k) \neq 0$, kui $i \neq k$, siis saame, et $p'(x_k^+)_r^- - p'(x_k^-)_r^- \geq 0$, kus võrdus realiseerub, kui tegu on mittehägusate andmetega. Niisiis tuletis ei ole üldiselt pidev.

Analoogiliselt saab tõestada ka $p(x)_r^+$ tuletise mittepidevuse. □

Tuletise mittepidevust illustreerivad teravad nukid interpolatsioonisõlmedes.

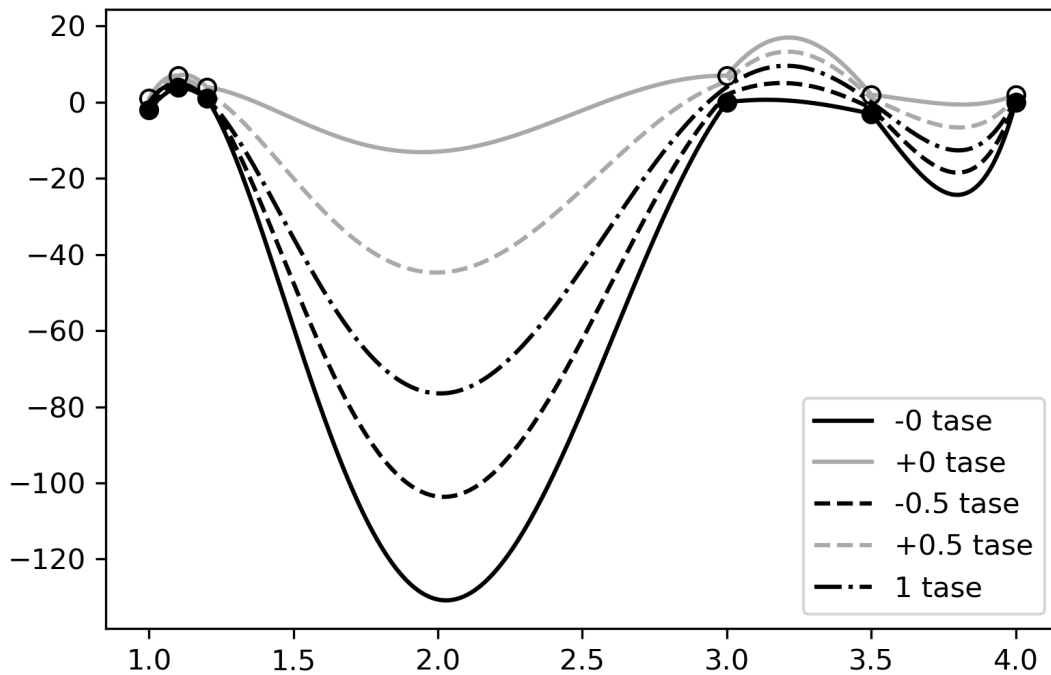
3.3 Näide

Võtame näite andmed artiklist [1], sest see näide on enamikes hägusate funktsioonide interpoleerimise artiklites olnud tema eeskujul võrdluseks antud.

Näide 3.1. *Olgu meil antud hägusad kolmnurkarvud:*

i	0	1	2	3	4	5
x_i	1	1.1	1.2	3	3.5	4
$u_{i,0}^+$	1	7	4	7	2	2
$u_{i,1}$	0	5	1	4	0	1
$u_{i,0}^-$	-2	4	1	0	-3	0

mis annavad joonise 3.1. Nagu jooniselt on näha ei ole tulemus sujuv ning kandja on vahepeal väga lai.



Joonis 3.1: Joonisel on funktsiooni kandja, tuum ja 0.5-tasemed eristatud vastavate joontega. Suured täpid kandjal märgivad interpolatsioonipunkte.

Pythoni kood Lagrange'i meetodi jaoks on olemas lisaalajaotuses 6.1.

4. Hägus splainidega interpoleerimine

Selles peatükis defineerime hägusa splaini ning uurime tema omadusi. Samuti kirjeldame täpsemalt hägusat lineaar- ja kuupsplainidega lähendamist. Lisaks uurime, kuidas mõjutavad hägusat splaini tema rajatingimused. Viimaks toome näiteid ja anname numbrilise meetodi interpolatsiooni rakendamiseks.

4.1 Hägus splain

See alajaotus põhineb peamiselt O. Kaleva artiklil [1].

Definitsioon 4.1. [1] Tähistagu S_l kõigi l järku ja sõlmedega x_0, \dots, x_n splainide hulka. Ehk

1. olgu $s \in S_l$, siis $s \in C^{l-1}[x_0, x_n]$
2. splain s on l järku polünoom igas intervallis $[x_i, x_{i+1}]$ iga $i = 0, \dots, n - 1$ korral.

Nii nagu andsime hägusa Lagrange'i interpolatsioonipolünoomi definitsiooni, anname ka nüüd hägusa splaini definitsiooni.

Definitsioon 4.2. [1] Tähistame hägusat splaini (*fuzzy spline*) $fs(x)$ ning defineerime l järku hägusa splaini tasemekaupa järgmiselt:

$$fs(x)_r = \{y \in \mathbb{R} \mid y = s_{d_0, \dots, d_n}(x), d_i \in u_{i,r}\},$$

kus $s_{d_0, \dots, d_n}(x) \in S_l$ on splain, mis interpoleerib sõlmedele x_0, \dots, x_n vastavaid väärtusi d_0, \dots, d_n .

Moodustame splainid $s_i \in S_l$ nii, et sõlmede x_0, \dots, x_n korral $s_i(x_i) = 1$ ja $s_i(x_j) = 0$, kui $i \neq j$. Sellisel juhul saame hägusa splaini avaldada väga mugavalt:

$$fs(x) = \sum_{i=0}^n s_i(x) \cdot u_i$$

ning tasemekaupa:

$$fs(x)_r = \sum_{i=0}^n s_i(x) \cdot u_{i,r}$$

Samuti on selge, et hägus splain täidab sõlmedes interpolatsioonitingimusi, sest $s_i(x_j)$ on $i = j$ korral 1 ja muul juhul 0, mis annabki sõlmes x_i meile polünoomi väärtuseks u_i mis tahes $i = 0, \dots, n$ korral.

Nii nagu kehtis hägusa Lagrange'i interpolandi korral lause 3.1, kehtib ka hägusa splaini korral analoogiline lause.

Lause 4.1. *Hägus splain on hägus funktsioon ehk $\forall x \in [a, b] : fs(x) \in \mathbb{R}_F$, kus $[a, b]$ on $fs(x)$ määramispiirkond.*

Tõestus. Analoogiline lause 3.1 tõestusele. □

Edaspidi keskendumine hägusale lineaar- ja kuupsplainile, kuna neid kasutatakse enim ning neid on ka kõige rohkem uuritud.

4.2 Hägus lineaarne splain

4.2.1 Hägus linearsplain

Vaatleme juhtu kui $l = 1$ ehk hägusat linearsplaini. Defineerime baassplainid nii:

$$s_i(x) = \begin{cases} \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}, & \text{kui } x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0 & \text{muul juhul} \end{cases}$$

$$s_{i+1}(x) = \begin{cases} \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}, & \text{kui } x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0, & \text{muul juhul} \end{cases}$$

iga $i = 0, \dots, n - 1$ korral. Niimoodi defineeritud splainid rahuldavad tingimusi, et sõlmede x_0, \dots, x_n korral $s_i(x_i) = 1$ ja $s_i(x_j) = 0$, kui $i \neq j$.

Saame tükiti lineaarse hägusa interpolandi [1]:

$$fs(x) = s_i(x) \cdot u_i + s_{i+1}(x) \cdot u_{i+1} = \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} u_i + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} u_{i+1}, \text{ kui } x \in [x_i, x_{i+1}].$$

Kuna $s_i(x) \geq 0$ iga $x \in [x_i, x_{i+1}]$ ja $i = 0, \dots, n$ korral, siis on selge, et $fs(x)_r = [fs(x)_r^-, fs(x)_r^+]$ leidmiseks saame minimiseerides ja maksimeerides kasutada vastavalt interpolatsioonipunktide r taseme alumisi ja ülemisi otspunkte, kus $u_{i,r} = [a_{i,r}, b_{i,r}]$. Kui $x \in [x_i, x_{i+1}]$, saame

$$fs(x)_r^- = s_i(x) \cdot a_{i,r} + s_{i+1}(x) \cdot a_{i+1,r},$$

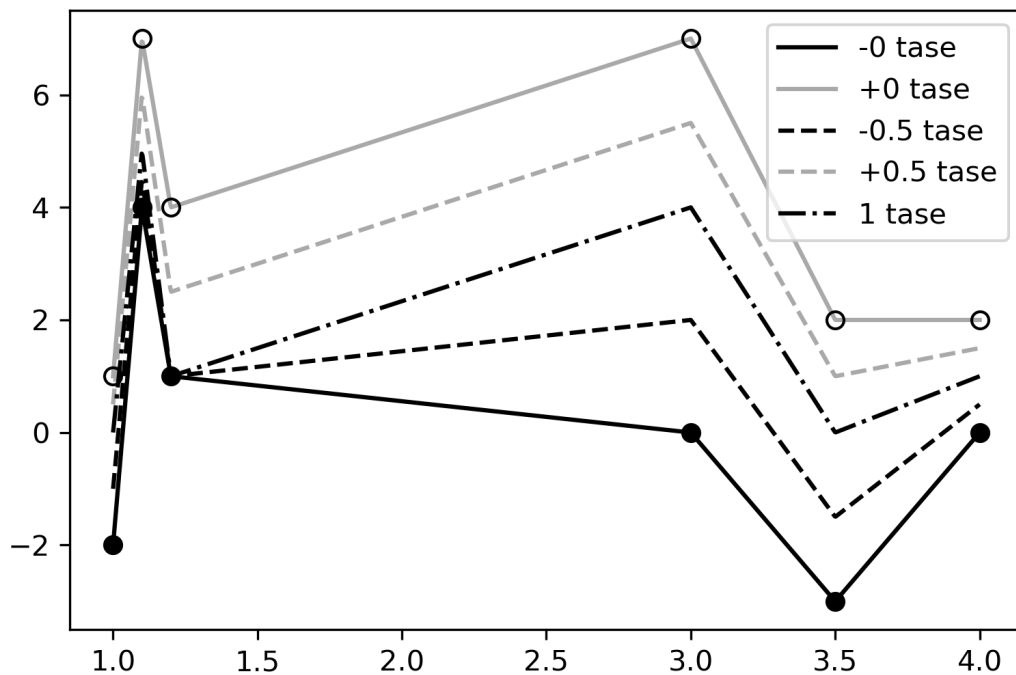
$$f s(x)_r^+ = s_i(x) \cdot b_{i,r} + s_{i+1}(x) \cdot b_{i+1,r}.$$

Seega, meil säilib hägusus ilma probleemideta.
Toome siin ka ühe näite võrdluseks näitele 3.1.

Näide 4.1. Olgu meil antud hägusad kolmnurkarvud:

i	0	1	2	3	4	5
x_i	1	1.1	1.2	3	3.5	4
$u_{i,0}^+$	1	7	4	7	2	2
$u_{i,1}$	0	5	1	4	0	1
$u_{i,0}^-$	-2	4	1	0	-3	0

mis annavad joonise 4.1. Jooniselt on näha, et kandja laius on kõvasti väiksem, kui Lagrange'i meetodi korral.



Joonis 4.1: Joonisel on funktsiooni kandja, tuum ja 0.5-tasemed eristatud vastavate joontega. Suured täpid kandjal märgivad interpolatsioonipunkte.

4.2.2 Veahinnang

Selles alajaotuses anname hägusale linearsplainidega lähendamisele veahinnangu.

Olgu antud interpolatsioonisõlmed $a = x_0 < \dots < x_n = b$. Olgu meil hägus linearsplain $fs(x)_r = [fs(x)_r^-, fs(x)_r^+]$ lõigus $[x_i, x_{i+1}]$, kus $i = 1, \dots, n-1$, mis lähendab hägusat funktsiooni $f(x)$, mille r-tasemefunktsioonid $f(x)_r^+, f(x)_r^- \in C^2([a, b])$ iga $r \in [0, 1]$ korral. Lisaks eeldame, et $f''(x)_r^+$ ja $f''(x)_r^-$ on ühtlastelt r suhtes tõkestatud.

Iga $r \in [0, 1]$ ja $i = 1, \dots, n-1$ korral leiame $fs(x)_r^-$ ja $fs(x)_r^+$ eraldi lõigus $[x_i, x_{i+1}]$, kasutades vaid r-taseme vastavaid otspunkte. Nüüd, kuna $fs(x)_r^-$ kasutab r-taseme alumisi otspunkte, siis ta lähendab funktsiooni $f(x)_r^-$. Samuti $fs(x)_r^+$ lähendab funktsiooni $f(x)_r^+$. Fikseerime $x \in [x_i, x_{i+1}]$ vabalt valitud $i = 0, \dots, n-1$ korral. Kasutades Hausdorffi kaugust (definiitsioon 1.11) saame

$$D(f(x), fs(x)) = \sup_{r \in [0,1]} \max\{|f(x)_r^- - fs(x)_r^-|, |f(x)_r^+ - fs(x)_r^+|\}, \quad (4.1)$$

Üldiselt lineaarse interpolatsiooni viga $f \in C^2$ ja tema lineaarse lähendi $p(x)$ vahel lõigus $[x_i, x_{i+1}]$ on iga $x \in [x_i, x_{i+1}]$ korral [10]:

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{1}{8}(x_{i+1} - x_i)^2 \max_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} |f''(x)|.$$

Seega, saame võrdusest 4.1 edasi

$$\begin{aligned} & \sup_{r \in [0,1]} \max\{|f(x)_r^- - fs(x)_r^-|, |f(x)_r^+ - fs(x)_r^+|\} \leq \\ & \leq \sup_{r \in [0,1]} \max\left\{\frac{1}{8}(x_{i+1} - x_i)^2 \max_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} |f''(x)_r^-|, \frac{1}{8}(x_{i+1} - x_i)^2 \max_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} |f''(x)_r^+|\right\} = \\ & = \frac{1}{8}(x_{i+1} - x_i)^2 \sup_{r \in [0,1]} \max\left\{\max_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} |f''(x)_r^-|, \max_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} |f''(x)_r^+|\right\}. \end{aligned}$$

Tähistame $h = \max\{x_{i+1} - x_i \mid i = 0, \dots, n-1\}$. Nüüd kogu lõigul $[a, b]$ saame vea

$$\begin{aligned} \max_{x \in [a,b]} \{D(f(x), fs(x))\} &= \max_{i=0, \dots, n-1} \max_{x \in [x_i, x_{i+1}]} \{D(f(x), fs(x))\} \leq \\ &\leq \frac{1}{8}h^2 \sup_{r \in [0,1]} \max\left\{\max_{a \leq x \leq b} |f''(x)_r^-|, \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)_r^+|\right\} \end{aligned}$$

Anname saadud tulemuse ka lausena.

Lause 4.2. *Olgu $f(x) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_F$ hägus funktsioon ja $fs(x)$ teda lähendav tükiti lineaarne splain. Veel olgu $f(x)_r^+, f(x)_r^- \in C^2([a, b])$ ja $f''(x)_r^+$ ning $f''(x)_r^-$ ühtlaselt r suhtes tõkestatud. Sellisel juhul iga $x \in [a, b]$ korral*

$$D(f(x), fs(x)) \leq \frac{1}{8}h^2 \sup_{r \in [0,1]} \max\left\{\max_{a \leq x \leq b} |f''(x)_r^-|, \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)_r^+|\right\},$$

kus h on suurima osalõigu pikkus lõigu $[a, b]$ jaotuses.

Nagu näha kandub linearsplainidega lähendades veahinnang mittehägusalt juhult hädusale juhule üle.

4.3 Hägus kuupsplain

Selles alajaotuses vaatleme hädusat kuupsplaini ehk $l = 3$.

Olgu meil siledusastmega 2 kuupsplainide ruum $S_{3,2}$ ja sõlmed x_0, \dots, x_n . Paneme tähele, et kuupsplain avaldub kuuppolünoomina igas n osalõigus $[x_i, x_{i+1}]$, kus $i = 0, \dots, n-1$. Kuna kuuppolünoomil on 4 tundmatut igas osalõigus, siis saame kokku $4n$ tundmatut. Kuna splain kuulub ruumi $S_{3,2}$, siis pidevustingimused osalõikude liitekohtades vähendavad tundmatute arvu $3(n-1)$ võrra. Seega, splainide ruumi dimensioon on $4n - 3(n-1) = n+3$. Selleks, et splainid oleks üheselt määratud on vaja veel kahte lisatingimust, sest interpolatsioonitingimused annavad vaid $n+1$ tingimust. Lisatingimustena kasutame *not a knot* ehk mittesõlm tingimust ning naturaali ja täielikku rajatingimust, millest tuleb täpsemalt juttu järgnevas alajaotustes. Olgu nüüd kogu selles alajaotuses splainid $s_i \in S_{3,2}$ iga $i = 0, \dots, n$ korral, sellised, et sõlmede x_0, \dots, x_n korral $s_i(x_i) = 1$ ja $s_i(x_j) = 0$, kui $i \neq j$. Selliselt defineeritud splainid moodustavad baasi ruumis $S_{3,2}$.

Toome ära ka lause, mis ütleb, et meie rajatingimustega on splain üheselt määratud.

Lause 4.3. *Splain $s(x) \in S_{3,2}$ on üheselt määratud, kui ta täidab interpolatsioonitingimusi ning lisaks üht tingimust järgnevaist:*

- *mittesõlm tingimus: splaini $s(x)$ kolmas tuletis on pidev punktides x_1 ja x_{n-1} ,*
- *täielik rajatingimus: $s'(x_0) = f'(x_0)$ ja $s'(x_n) = f'(x_n)$, kus funktsioon f on lähendatav funktsioon,*
- *naturaalne rajatingimus: $s''(x_0) = s''(x_n) = 0$ [11],*

kus x_0, \dots, x_n on splainisõlmed.

Tõestus. Tõestus on antud momentide meetodi jaotuses 4.5.2. □

Hädusa splaini korral on O.Kaleva [1] samuti välja pakkunud hädusast interpolatsiooniülesandest mõelda kui optimeerimisülesandest. Tähistame interpolatsioonipunktid $u_{i,r} = [a_{i,r}, b_{i,r}]$, kus $a_{i,r}$ ja $b_{i,r}$ on vastavalt u_i r-taseme alumine ja ülemine otspunkt. Esmalt vaatleme $f_s(x)_r^+$ leidmist analoogse optimeerimisülesandena nagu Lagrange'i interpolatsioonipolünoomi korral jaotises 3.1.

$$\max\{s_{d_0, \dots, d_n}(x) \mid a_{i,r} \leq d_i \leq b_{i,r}, i = 0, \dots, n\}. \quad (4.2)$$

Selleks, et antud tingimustel $s_{d_0, \dots, d_n}(x)$ tuleks maksimaalne, siis peab tulema $\sum_{i=0}^n s_i(x) \cdot d_i$ maksimaalne. Tulemuse põhjendus on samuti analoogne Lagrange'i interpolatsioonipolünoomi omale ning me ei hakka seda siin uuesti välja tooma. Seega, tulemus on järgmine:

$$d_i = \begin{cases} a_{i,r} & \text{kui } s_i(x) < 0 \\ b_{i,r} & \text{kui } s_i(x) \geq 0 \end{cases}$$

Samuti saame, et $fs(x)_r^-$ leidmine on minimiseerimisülesanne, mille lahendus on järgmine:

$$d_i = \begin{cases} a_{i,r} & \text{kui } s_i(x) \geq 0 \\ b_{i,r} & \text{kui } s_i(x) < 0 \end{cases}$$

Niisiis optimeerimisülesande ja artikli [9] eeskujul saame kirjutada:

$$fs(x)_r^- = \sum_{s_i(x) \geq 0} a_{i,r} \cdot s_i(x) + \sum_{s_i(x) < 0} b_{i,r} \cdot s_i(x), \quad (4.3)$$

$$fs(x)_r^+ = \sum_{s_i(x) \geq 0} b_{i,r} \cdot s_i(x) + \sum_{s_i(x) < 0} a_{i,r} \cdot s_i(x). \quad (4.4)$$

Nüüd uurime, kuidas käitub $s_i(x)$ märk. Tuleb välja, et see ei pruugi käituda nii hästi nagu $L_i(x)$ märk. Arvutuslikult ei oma see erilist tähtsust, kuidas märk käitub, sest arvuti saab selle iga x korral uuesti välja arvutada. Seevastu teoreetiliste tulemuste tõestamiseks omab märgi käitumine suurt rolli.

Kuna kuupsplain ei ole interpolatsioonitingimustega üheselt määratud, siis uurimegi missuguseid rajatingimusi on võimalik nende juures kasutada ning kuidas mõjutavad need $s_i(x)$ märki.

4.3.1 Hägus mittesõlm ehk *not a knot spline*

Antud *not a knot* ehk hägus mittesõlm spline on hästi kirjeldatud Kaleva artiklis [1], millele me ka selles alapeatükis toetume.

Mittesõlm rajatingimus tähendab seda, et splaini $s(x) \in S_l$ kolmas tuletis on pidev punktides x_1 ja x_{n-1} ning seega ei ole x_1 ja x_{n-1} splaini sõlmed.[11]

Tuleb välja, et mittesõlm tingimusega käitub $s_i(x)$ märk samamoodi kui $L_i(x)$ märk. Näitame seda, kuid enne me vajame ühte teoreemi splaini nullkohtade kohta raamatust [12] (*Zero Theorem*). Kuna teoreemis kirjeldatud nullkohad on natuke erinevad klassikalisest arusaamast, siis anname järgnevalt ka nende definitsiooni.

Definitsioon 4.3. [12] Olgu meil antud sõlmed $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ ning spline $s(x) \in S_l$, nii et $s(x): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Punkti $\xi \in [x_\nu, x_{\nu+1}) \subset [a, b]$, kus $0 \leq \nu \leq n-1$, nimetatakse splinei $s(x)$ *oluliseks nullkohaks*, kui $s(\xi) = 0$, aga $s(x)$ ei ole null iga $x \in [x_\nu, x_{\nu+1})$ korral. Kui $s(b) = 0$, siis b on oluline nullkoht.

Edasises kasutame lihtsuse huvides termini *oluline nullkoht* asemel terminit *nullkoht*.

Definitsioon 4.4. [12] Olgu meil antud sõlmed $x_0 < x_1 < \dots < x_n$, siis *sisesõlmedeks* nimetame sõlmi $x_1 < \dots < x_{n-1}$.

Teoreem 4.1. [12] Kui $s \in S_l$ nii et $s(x): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, siis

$$Z(s) \leq m + l,$$

kus $Z(s)$ on splinei s nullkohtade arv koos kordsustega ja m on sisesõlmede arv.

Kui $[x_\mu, x_{\mu+\nu}]$ on maksimaalne selline intervall, kus s võrdub nulliga, siis $x_{\mu+\nu}$ on l kordne nullkoht.

Tõestus. [12] Võrratuse $Z(s) \leq m + l$ tõestamiseks tähistame splinei nullkohtade arvu lõigus $[a, b]$ tähega r . Kuna $s \in C^{l-1}$, siis Rolle'i teoreemi tõttu $s^{(l-1)} \in S_1$ omab vähemalt $r - (l-1)$ nullkohta. Nüüd, kuna $s^{(l-1)}$ on pidev tükiti lineaarspline, siis on tal maksimaalselt n nullkohta (iga kahe sõlme vahel üks) lõigus $[a, b]$. Saame, et $r - (l-1) \leq n$, kust liikmeid ümberorganiseerides saame $r \leq n - 1 + l = m + l$, sest $n - 1 = m$ on sisesõlmede arv.

Teine osa järeldub otseselt definitsioonist 4.3. Kui $[x_\mu, x_{\mu+\nu}]$ on maksimaalne selline intervall, kus s võrdub nulliga, siis definitsiooni 4.3 põhjal $x_{\mu+\nu}$ on nullkoht. Samuti on ta l -kordne nullkoht, sest $s \in C^{l-1}$, kust järeldub $s(x_{\mu+\nu}) = s'(x_{\mu+\nu}) = \dots = s^{(l-1)}(x_{\mu+\nu}) = 0$. \square

Järgmine teoreem annab meile teadmised, kuidas käitub s_i märk.

Teoreem 4.2. [1] Rahuldagu $s_i \in S_l$ mittesõlm tingimust ning olgu $l = 3$. Siis

1. s_i ei võrdu nulliga üheski intervallis $[x_j, x_{j+1}]$,
2. s_i on intervallis $[x_j, x_{j+1}]$ sama märgiga,
3. s_i muudab igas sõlmes x_j märki v.a $j = 0, i, n$,

kus $j = 0, \dots, n$.

Tõestus. Tõestus põhineb artiklil [1].

Oletame, et mingite indeksite j korral iga $x \in [x_j, x_{j+1}]$ korral $s_i(x) = 0$. Võime eeldada, et $j + 1 < i$, sest vastasel juhul oleks esimese osa tõestus analoogne. Olgu

$$s(x) = \begin{cases} 0, & \text{kui } x_0 \leq x \leq x_{j+1}, \\ s_i(x), & \text{kui } x_{j+1} < x \leq x_n, \end{cases}$$

$s(x)$ kuulub hulka S_l ja rahuldab mittesõlm tingimust ning samuti interpoleerib punkte nagu ka $s_i(x)$. Kuna mittesõlm tingimustega spline on lause 4.3 põhjal üheselt määratud, siis tuleb välja, et iga $x \in [x_0, x_{j+1}]$ korral $s_i(x) = 0$. Olgu nüüd $[x_0, x_\sigma]$ selline maksimaalne intervall, kus $s_i(x) = 0$ kogu intervallis. See intervall ei pea olema tingimata võrdne intervalliga $[x_0, x_{j+1}]$, sest ta võib ka väljaspool seda olla veel null, kuid maksimaalselt kuni sõlmeni x_i , sest seal $s_i(x_i) = 1$. Seega $\sigma < i$.

Olgu nüüd intervall $[x_\tau, x_n]$ selline maksimaalne intervall, kus iga $x \in [x_\tau, x_n]$ korral $s_i(x) = 0$, kusjuures $\tau > i$. Rakendame teoreemi 4.1 splinele $s_i(x)$ intervallis $[x_\sigma, x_\tau]$ ja saame, et

$$Z(s_i(x)) \leq (\tau - \sigma - 1) + l, \quad (4.5)$$

kus $\tau - \sigma - 1$ on intervalli $[x_\sigma, x_\tau]$ sisesõlmede arv ja l on spline järk. Paneme tähele, et on kaks võimalust, kas $\tau = n$ või $\tau < n$.

Juhul, kui $\tau < n$, siis x_τ ja x_σ on teoreemi 4.1 põhjal l kordsed $s_i(x)$ nullkohad. Kuna x_i ei ole nullkoht, siis saame, et splineil $s_i(x)$ on vähemalt

$$2l + (\tau - \sigma - 1) - 1$$

nullkohta. Paneme tähele, et interpolatsioonitingimused annavad siin $\tau - \sigma - 2$ nullkohta, kuna otspunktid x_τ ja x_σ on arvestuses kui l kordsed nullkohad. Võrratuse 4.5 tõttu saame:

$$2l + (\tau - \sigma - 1) - 1 \leq Z(s_i(x)) \leq (\tau - \sigma - 1) + l,$$

kust saame, et $l \leq 1$, mis on vastuolus eeldusega, et $l = 3$, kuna meil on tegu kuupsplineidega.

Juhul, kui $\tau = n$, siis x_σ on teoreemi 4.1 põhjal l kordne $s_i(x)$ nullkoht. Kuna x_i ei ole nullkoht, siis saame, et splineil $s_i(x)$ on vähemalt

$$l + (n - \sigma) - 1$$

nullkohta. Nendime ka tõika, et $n - \sigma - 1$ nullkohta on olemas tänu interpolatsioonitingimustele, kus otspunkt x_σ ei ole nullkohana arvesse läinud, sest tema nullkoht kajastub kui l .

Võrratus 4.5 ei vasta enam aga päris tõele, sest nüüd on intervall kujul $[x_\sigma, x_n]$. Kuna mittesõlm tingimuse tõttu x_{n-1} ei ole enam sisesõlm nagu teoreem 4.1 nõuab, siis on meil sisesõlmi võrratuses ühe võrra vähem. Seega, saame:

$$l + (n - \sigma) - 1 \leq Z(s_i(x)) \leq (n - \sigma - 2) + l,$$

kust saame, et $0 \leq -1$, mis on vastuolu. Sellega oleme tõestanud teoreemi esimese osa.

Teise ja kolmanda osa tõestuseks paneme tähele järgmist seika. Kuna meie spline $s_i(x)$ on konstrueeritud nii, et $s_i(x_i) = 1$, kui $j = i$ ja 0 muul juhul, siis näeme, et puhtalt interpolatsioonitingimuste tõttu on splainil vähemalt n nullkohta ehk $Z(s_i(x)) \geq n$.

Teisalt, teoreemist 4.1 ja sisesõlmede arvust, mis on mittesõlm tingimuste tõttu $n - 3$, et

$$Z(s_i(x)) \leq n - 3 + l = n,$$

sest $l = 3$. Seega, $Z(s_i(x)) = n$. Niisiis, need n nullkohta on interpolatsioonitingimuste tõttu just punktid $x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$. On selge, et nad on ühekordsed. Seega, vahetab $s_i(x)$ märki just nendes punktides ning on seetõttu ka iga intervalli sees sama märgiga. Sellega oleme tõestanud ka teise ja kolmanda punkti. \square

Nüüd tõestame teoreemi, mis näitab, kuidas käituvad hägusa splaini r -taseme intervallid. Teeme seda taaskord O.Kaleva eeskujul [1].

Teoreem 4.3. [1] Olgu $l = 3$ ja $fs(x)$ hägus interpoleeriv mittesõlm tingimust rahuldav spline. Kui $x \in (x_i, x_{i+1})$, siis iga $r \in [0, 1]$ korral

$$\text{len}(fs(x)_r) \geq \min\{\text{len}(fs(x_i)_r), \text{len}(fs(x_{i+1})_r)\}.$$

Tõestus. Tõestus on sarnane teoreemi 3.1 tõestusele, nii et anname selle natuke üldsõnalisemal kujul.

Paneme tähele, et r -tasemekaupa interpolatsioonipoliinoomi kuju ja lause 3.2 tõttu kehtib:

$$\text{len}(fs(x)_r) = \text{len}\left(\sum_{i=0}^n s_i(x) \cdot u_{i,r}\right) \geq \text{len}\left(\sum_{j=i}^{i+1} s_j(x) \cdot u_{j,r}\right).$$

Saame ka:

$$\text{len}\left(\sum_{j=i}^{i+1} s_j(x) \cdot u_{j,r}\right) \geq \min\{\text{len}(u_{i,r}), \text{len}(u_{i+1,r})\} \sum_{j=i}^{i+1} |s_j(x)|.$$

Lõpetuseks jääb näidata, et $s_i(x) + s_{i+1}(x) \geq 1 \quad \forall x \in (x_i, x_{i+1})$.

Paneme tähele, et $s_i(x) + s_{i+1}(x) \in S_l$ ja tema väärtus on 1, kui $x = x_i$ või $x = x_{i+1}$ ning muudes sõlmedes 0.

Oletame vastuväiteliselt, et $\exists x \in (x_i, x_{i+1})$ nii, et $s_i(x) + s_{i+1}(x) < 1$. Olgu $0 < i < n$. Seega oleks ta tuletisel lõigus (x_{i-1}, x_{i+2}) vähemalt kolm nullkohta. Lisaks on tal Rolle'i teoreemi tõttu ka igas lõigus (x_j, x_{j+1}) tuletisel nullkoht, kus $0 \leq j \leq i - 2$ ja $i + 2 \leq j \leq n$ ehk kokku $n - 3$ nullkohta. Seega on ta tuletisel kokku kogu piirkonnas vähemalt n nullkohta. Paneme tähele, et $s_i(x) + s_{i+1}(x)$ tuletis kuulub hulka S_{l-1} . Seega, teoreem 4.1 annab, et tema tuletisel on maksimaalselt

$$(n - 3) + (l - 1) = n - 3 + 3 - 1 = n - 1$$

nullkohta. Seega meil ei saa olla n nullkohta ning saime vastuolu.

Juhul kui $i = 0$ või $i = n$ saame tõestada sarnaselt. Seega kehtib, et

$$s_i(x) + s_{i+1}(x) \geq 1, \quad \forall x \in (x_i, x_{i+1})$$

□

Sellega oleme kirjeldanud hägusate mittesõlm tingimust rahuldavate splineide peamised omadused.

4.3.2 Hägus täielik spline

Hägus täielik spline ehk *complete fuzzy spline* on hästi kirjeldatud S. Abbasbandy artiklis [13].

Täielik spline peab üldiselt rahuldama tingimusi: $s'(x_0) = f'(x_0)$ ja $s'(x_n) = f'(x_n)$, kus funktsioon f on lähendatav funktsioon [11]. Hägusal juhul võrdsustatakse tuletised aga nulliga, sest üldiselt ei ole tuletisi kerge leida.

Definitsioon 4.5. [13] Funktsiooni $s: [x_0, x_n] \rightarrow \mathbb{R}$ nimetatakse paaritu astmega täielikuks splineiks, kus $l = 2m - 1$, $m \geq 2$ ning rahuldab järgmisi tingimusi:

1. olgu s spline, siis $s \in C^{l-1}[x_0, x_n]$,
2. spline $s(x)$ on l järku polünoom igas intervallis $[x_i, x_{i+1})$ iga $i = 0, \dots, n - 1$ korral,
3. $s^{(v)}(x_0) = s^{(v)}(x_n) = 0$, $v = 1, \dots, m - 1$.

Teoreemid 4.2 ja 4.3 on artiklis [13] tõestatud ka häguse täieliku splinei jaoks, kitsendusel, et kasutatakse paaritu astmega täielikke spline. Need tõestused on väga sarnased mittesõlm splinei juhu omadele, mispärast ei hakka me neid siin andma.

Niisiis, hägusa paaritu astmega täieliku splinei $s_i(x)$ märk käitub samamoodi kui $L_i(x)$ märk.

4.3.3 Hägus naturaalspline

Hägus naturaalspline ehk *natural fuzzy spline* on hästi kirjeldatud S. Abbasbandy ja E. Baboliani artiklis [14].

Definitsioon 4.6. [14] Funktsiooni $s: [x_0, x_n] \rightarrow \mathbb{R}$ nimetatakse paaritu astmega täielikuks splineiks, kus $l = 2m - 1$, $m \geq 2$ ning rahuldab järgmisi tingimusi:

1. $s \in C^{l-1}[x_0, x_n]$,
2. spline $s(x)$ on l järku polünoom igas intervallis $[x_i, x_{i+1})$ iga $i = 0, \dots, n - 1$ korral,

$$3. s^{(v)}(x_0) = s^{(v)}(x_n) = 0, \quad v = m, \dots, 2m - 2.$$

Artiklis [14] on tõestatud ka häguse naturaalsplaini jaoks teoreemid 4.2 ja 4.3 tingimusel, et kasutatakse paaritu astmega naturaalsplaine. Sarnaselt eelmisele alajaotusele 4.3.2, ei hakka me neid tõestusi andma.

Seega, ka hägusa paaritu astmega naturaalsplaini $s_i(x)$ märk käitub kui $L_i(x)$ märk.

4.3.4 Veahinnang

Hägusate kuupsplainidega lähendamise puhul ei tundu olevat praeguse seisuga veel olemas ühtegi head veahinnangut. P.Blaga ja B.Bede mainivad samuti oma artiklis [15], et on raske või isegi võimatu tõestada aproksimatsiooniteoreeme hägusate funktsioonide lähendamisel splainidega.

4.4 Hägusa splaini siledus ja pidevus

Siin alajaotuses eeldame, et splaini $s_i(x)$ märk käitub samuti nagu Lagrange'i fundamentaalpolünoomi $L_i(x)$ märk.

Tuleb välja, et hægus splain on hægusalt pidev.

Lause 4.4. *Hægus splain on hægusalt pidev.*

Tõestus. Tõestus analoogne lause 3.3 tõestusega. □

Järgmine lause väidab, et hægusa splaini esimest järku tuletis ei ole enam pidev.

Lause 4.5. [9] *Olgu $fs(x)_r = [fs(x)_r^-, fs(x)_r^+]$ r -taseme hægus splain. Mittehägusate funktsioonide $fs(x)_r^-$ ja $fs(x)_r^+$ esimesed tuletised ei ole üldiselt interpolatsioonisõlmedes pidevad.*

Tõestus. Tõestus on analoogne lause 3.4 tõestusega. □

Seega on ka hægusate splainidega lähendades tuletis mittepidev.

4.5 Numbriline meetod

Eelnimetatud artiklites ei ole antud, või on mainitud väga üldiselt, numbriliste meetodite kirjeldusi, kuidas hægusate splainidega praktiliselt lähendada. Järgnevalt püüame täita selle lünga.

Kuna antud töö keskendub hägusate andmete interpolatsioonile ja kirjeldatavad meetodid põhinevad peamiselt mittehägusatel tulemustel, siis me ei lasku mittehägusate tulemuste juures väga detailidesse, vaid anname lihtsalt põgusa ülevaate.

Järgnev fundamentaalsplainide teooria on pärit raamatust [16].

Olgu meil splainid $F_3^j \in S_{3,2}$, kus $j = 0, \dots, n+3$, mis rahuldavad järgnevaid tingimusi. Interpolatsioonisõlmede võrgul

$$\xi_0 < \dots < \xi_{n+3}$$

peavad kehtima võrdsed

$$F_3^j(\xi_j) = 1, \quad F_3^j(\xi_i) = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 0, \dots, n+3$$

Ning splainisõlmede võrgu

$$-\infty < x_1 < \dots < x_n < \infty$$

igal osalõigul peavad splainid F_3^j olema kuuppolünoomid, kus $j = 0, \dots, n+3$.

Sellisel määratud splaine nimetatakse *fundamentaalsplainideks* ning nad moodustavad baasi meie splainiruumis $S_{3,2}$. Mittesõlm splain on võimalik konstrueerida splainisõlmi muutes.

Iga splaini $S \in S_{3,2}$ saab esitada fundamentaalsplainide lineaarkombinatsioonina [16]

$$S(x) = \sum_{j=0}^{n+3} f_j F_3^j(x),$$

kus $F_3^j(x)$ on fundamentaalsplainid ja f_j on interpolatsioonitingimused iga $j = 0, \dots, n+3$ korral. Seda tulemust nimetatakse ka *Lagrange'i interpolatsioonivalemiks splainide jaoks*.

Teoreem 4.4. [16] *Interpolatsiooniülesanne* $S(\xi_i) = f_i$, kus $i = 0, \dots, n+3$ ja $S \in S_{3,2}$, on üheselt lahenduv parajasti siis, kui iga $j = 1, \dots, n$ korral

$$\xi_{j-1} < x_j < \xi_{j+3}.$$

Tõestus. Teoreem on tõestatud raamatus [16] teoreemi 1.3 all. □

Niisiis, interpolatsioonisõlmede korral valime lihtsalt $x_j \in (\xi_{j-1}, \xi_{j+3})$ iga $j = 1, \dots, n$ korral.

Järgnevalt vaatame kahte meetodit, kuidas leida fundamentaalsplaine ja kuidas hägusaid andmeid numbriliselt lähendada hägusate splainidega. Mõlemad meetodid annavad samade lähteandmete puhul sama tulemuse, erinevus on vaid baassplainide esituses.

4.5.1 Lõigatud astmefunktsioonid

Lõigatud astmefunktsioonide teooria põhineb raamatul [16].

Kui $S \in S_{3,2}$, siis lõigatud astmefunktsioonide kaudu avaldub spline S nii:

$$S(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \sum_{i=1}^n b_i(x - x_i)_+^3,$$

kus $c_0, \dots, c_3, b_1, \dots, b_n$ on reaalarvulised kordajad, x_1, \dots, x_n on splineisõlmed ja

$$(x - x_i)_+^3 = \begin{cases} (x - x_i)^3, & \text{kui } x \geq x_i \\ 0, & \text{kui } x < x_i \end{cases}$$

iga $i = 1, \dots, n$ korral.

Tingimustest $S(\xi_i) = f_i$, kus kordajad f_i ja ξ_i on interpolatsiooniantmed, $i = 0, \dots, n+3$, saame, et

$$f_i = c_0 + c_1\xi_i + c_2\xi_i^2 + c_3\xi_i^3 + \sum_{j=1}^n b_j(\xi_i - x_j)_+^3,$$

mis on lineaarvõrranditesüsteem $c_0, \dots, c_3, b_1, \dots, b_n$ suhtes.

Arvestades fundamentaalsplineide interpolatsioonitingimusi, saame leida kõik fundamentaalsplainid F_j^3 lahendades süsteemi kordajate komplektide $c_0^j, \dots, c_3^j, b_1^j, \dots, b_n^j$ suhtes iga $j = 0, \dots, n+3$ korral. Seega, kui splineisõlmed on vastavalt teoreemile 4.4 valitud, siis saame üheselt lahenduva süsteemi:

$$\begin{bmatrix} 1 & \xi_0 & \dots & \xi_0^3 & (\xi_0 - x_1)_+^3 & \dots & (\xi_0 - x_n)_+^3 \\ 1 & \xi_1 & \dots & \xi_1^3 & (\xi_1 - x_1)_+^3 & \dots & (\xi_1 - x_n)_+^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \xi_{n+3} & \dots & \xi_{n+3}^3 & (\xi_{n+3} - x_1)_+^3 & \dots & (\xi_{n+3} - x_n)_+^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0^0 & \dots & c_0^{n+3} \\ c_1^0 & \dots & c_1^{n+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_1^0 & \dots & b_1^{n+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n+3}^0 & \dots & b_{n+3}^{n+3} \end{bmatrix} = E,$$

kus E on $n+4$ dimensiooniline ühikmaatriks.

Niisiis, fundamentaalsplainid avalduvad kordajate $c_0^j, \dots, c_3^j, b_1^j, \dots, b_n^j$ kaudu:

$$F_j^3(x) = c_0^j + c_1^jx + c_2^jx^2 + c_3^jx^3 + \sum_{i=1}^n b_i^j(x - x_i)_+^3,$$

kus x_i on splineisõlmed iga $i = 1, \dots, n$ korral.

Seega, hägus interpolatsioonispain $fs(x)$ avaldub

$$fs(x) = \sum_{j=0}^{n+3} u_j F_3^j(x),$$

kus u_j on hägus interpolatsioonitingimus ehk hägus arv iga $j = 0, \dots, n+3$ korral, mille korrutamise skalaariga $F_3^j(x)$ on antud esimese peatüki definitsioonis 1.8.

Meetodi *Pythoni*'i implementatsioon on antud lisas 6.2.2.

4.5.2 Momentide meetod

Kasutame nüüd kuupsplaini esitust momentide meetodi abil.

Paneme tähele, et momentide meetodi korral splaini- ja interpolatsioonisõlmed langevad kokku ehk meile piisab vaid interpolatsioonisõlmedest ning lisatingimustest otspunktides. Interpolatsioonisõlmi tähistame siin alajaotuses järgmiselt:

$$x_0 < \dots < x_n.$$

See alajaotus põhineb kahel allikal, peatükil 3.3 raamatust [17] ja veebilehel [18], mille tähistust kasutame ka siin töös.

Järgnevalt toome ära splaini üldkuju ja meetodi tema kordajate leidmiseks. Täpsem tuletuskäik on leitav mõlemast allikast [17] ja [18].

Kui $S \in S_{3,2}$, x_0, \dots, x_n on interpolatsioonisõlmed ja y_0, \dots, y_n on funktsiooni väärtused sõlmedes, siis kuupsplain, mis rahuldab tingimusi $S(x_i) = y_i$ iga $i = 0, \dots, n$ korral avaldub momentide meetodil nii:

$$S(x) = \sum_{j=1}^n C_j(x),$$

kus iga $i = 1, \dots, n$ korral $C_i(x)$ on kuuppolünoom lõigus $[x_{i-1}, x_i]$ ning väljaspool lõiku $C_i(x) = 0$.

Splaini $C_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i \in S_{3,2}$ kordajate a_i, b_i, c_i, d_i leidmiseks, kus $x \in [x_{i-1}, x_i]$ ja $i = 1, \dots, n$, kasutatakse tingimusi

$$C_i(x_i) = y_i \text{ ja } C_i(x_{i-1}) = y_{i-1} \tag{4.6}$$

ning siledusnõudest tulenevaid tingimusi

$$C_i'(x_i) = C_{i+1}'(x_i) \text{ ja } C_i''(x_i) = C_{i+1}''(x_i). \tag{4.7}$$

Olgu M_i splaini teise tuletise väärtus sõlmedes x_i iga $i = 0, \dots, n$ korral. Kuna $C_i''(x) = 6a_i x + 2b_i$ on lineaarne lõigus $[x_{i-1}, x_i]$, siis

$$C_i''(x) = \frac{x_i - x}{h_i} M_{i-1} + \frac{x - x_{i-1}}{h_i} M_i, \tag{4.8}$$

kus $h_i = x_i - x_{i-1}$ iga $i = 1, \dots, n$ korral. Saadud võrdust 4.8 kaks korda integreerides saame kahe tundmatuga $C_i(x)$. Asendades tingimused 4.6 polünoomi $C_i(x)$, leiame need kaks tundmatut ning avaldame $C_i(x)$ momentide M_i abil, kus $x \in [x_{i-1}, x_i]$ iga $i = 1, \dots, n$ korral.

$$C_i(x) = \frac{(x_i - x)^3}{6h_i} M_{i-1} + \frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} M_i + \left(\frac{y_{i-1}}{h_i} - \frac{M_{i-1}h_i}{6} \right) (x_i - x) + \left(\frac{y_i}{h_i} - \frac{M_i h_i}{6} \right) (x - x_{i-1}). \quad (4.9)$$

Momentide M_i leidmiseks, kus $i = 1, \dots, n-1$, võtame tuletise $C'_i(x)$ kujust 4.9 ning kasutame siledusomadust $C'_i(x_i) = C'_{i+1}(x_i)$. Organiseerime saadud võrduses liikmeid ümber ning saame

$$\mu_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} = 6f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}), \quad (4.10)$$

kus $f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) = \frac{1}{h_{i+1} + h_i} \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} \right)$ on diferentsuhte, $\mu_i = \frac{h_i}{h_{i+1} + h_i}$ ja $\lambda_i = 1 - \mu_i$ iga $i = 1, \dots, n-1$ korral.

Koos rajatingimustega saame lineaarvõrrandisüsteemi $M_0 \dots, M_n$ suhtes. Kuna me otsime siinkohal hoopis fundamentaalsplaini kordajaid, siis peame lahendama $n+1$ sellist lineaarvõrrandisüsteemi. Iga võrrandisüsteemi ehk $i = 0, \dots, n$ korral kasutame funktsiooni väärtustena y_0, \dots, y_n ühikmaatriksi i 'nda veeru väärtuseid, et leida

$$6f(x_0, x_1, x_2)_i, \dots, 6f(x_{n-2}, x_{n-1}, x_n)_i$$

iga $i = 0, \dots, n$ korral nii, et leitud splainid rahuldaksid fundamentaalsplainide tingimusi. Nii saame süsteemi momentide komplektide M_0^i, \dots, M_n^i leidmiseks iga $i = 0, \dots, n$ korral.

Naturaalsplainide puhul on lisanduvad rajatingimused $C''_1(x_0) = C''_n(x_n) = 0$.

$$C''_1(x_0) = 0 \Rightarrow M_0^i = 0,$$

$$C''_n(x_n) = 0 \Rightarrow M_n^i = 0,$$

iga $i = 0, \dots, n$ korral. Seega saame lineaarvõrrandisüsteemi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_0^0 & M_0^1 & \dots & M_0^n \\ M_1^0 & M_1^1 & \dots & M_1^n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ M_{n-1}^0 & M_{n-1}^1 & \dots & M_{n-1}^n \\ M_n^0 & M_n^1 & \dots & M_n^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 6f(x_0, x_1, x_2)_0 & 6f(x_0, x_1, x_2)_1 & \dots & 6f(x_0, x_1, x_2)_n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 6f(x_{n-2}, x_{n-1}, x_n)_0 & 6f(x_{n-2}, x_{n-1}, x_n)_1 & \dots & 6f(x_{n-2}, x_{n-1}, x_n)_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Paneme tähele, et saadud süsteem on kolmediagonaalse maatriksiga, kus diagonaal domineerib ridade kaupa. Seetõttu on süsteem mittesingulaarne ning naturaalsplainide rajatingimused koos interpolatsioonitingimustega määravad lahendi üheselt.

Täielike splineide puhul on rajatingimused $C_1'(x_0) = C_n'(x_n) = 0$.

$$C_1'(x_0) = 0 \Rightarrow 2M_0^i + M_1^i = 6 \frac{f(x_0, x_1)_i}{h_1},$$

$$C_n'(x_0) = 0 \Rightarrow 2M_n^i + M_{n-1}^i = 6 \frac{f(x_{n-1}, x_n)_i}{h_n},$$

iga $i = 0, \dots, n$ korral. Saame lineaarvõrrandisüsteemi:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_0^0 & M_0^1 & \dots & M_0^n \\ M_1^0 & M_1^1 & \dots & M_1^n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ M_{n-1}^0 & M_{n-1}^1 & \dots & M_{n-1}^n \\ M_n^0 & M_n^1 & \dots & M_n^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \frac{f(x_0, x_1)_0}{h_1} & 6 \frac{f(x_0, x_1)_1}{h_1} & \dots & 6 \frac{f(x_0, x_1)_n}{h_1} \\ 6f(x_0, x_1, x_2)_0 & 6f(x_0, x_1, x_2)_1 & \dots & 6f(x_0, x_1, x_2)_n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 6f(x_{n-2}, x_{n-1}, x_n)_0 & 6f(x_{n-2}, x_{n-1}, x_n)_1 & \dots & 6f(x_{n-2}, x_{n-1}, x_n)_n \\ 6 \frac{f(x_{n-1}, x_n)_0}{h_n} & 6 \frac{f(x_{n-1}, x_n)_1}{h_n} & \dots & 6 \frac{f(x_{n-1}, x_n)_n}{h_n} \end{bmatrix}.$$

Nõndasamuti on ka see süsteem kolmediagonaalse maatriksiga, kus diagonaal domineerib ridade kaupa. Seepärast on süsteem regulaarne ning lahend ühene.

Mittesõlm splineid puhul tulevad juurde rajatingimused $C_1'''(x_1) = C_2'''(x_1)$ ja $C_{n-1}'''(x_{n-1}) = C_n'''(x_{n-1})$, et leida esimene ja viimane võrrand süsteemis.

$$C_1'''(x_1) = C_2'''(x_1) \Rightarrow h_2 M_0^i - (h_1 + h_2) M_1^i + h_1 M_2^i = 0$$

$$C_{n-1}'''(x_{n-1}) = C_n'''(x_{n-1}) \Rightarrow h_n M_{n-2}^i - (h_{n-1} + h_n) M_{n-1}^i + h_{n-1} M_n^i = 0$$

iga $i = 0, \dots, n$ korral. Saame lineaarvõrrandisüsteemi:

$$\begin{bmatrix} h_2 & -(h_1 + h_2) & h_1 & \dots & 0 \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ 0 & \dots & h_n & -(h_{n-1} + h_n) & h_{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_0^0 & M_0^1 & \dots & M_0^n \\ M_1^0 & M_1^1 & \dots & M_1^n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ M_{n-1}^0 & M_{n-1}^1 & \dots & M_{n-1}^n \\ M_n^0 & M_n^1 & \dots & M_n^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 6f(x_0, x_1, x_2)_0 & 6f(x_0, x_1, x_2)_1 & \dots & 6f(x_0, x_1, x_2)_n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 6f(x_{n-2}, x_{n-1}, x_n)_0 & 6f(x_{n-2}, x_{n-1}, x_n)_1 & \dots & 6f(x_{n-2}, x_{n-1}, x_n)_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Paneme tähele, et saadud süsteemis domineerivat peadiagonaali pole. Süsteemi lahendi ühesuse näitamiseks avaldame M_0^i ja M_n^i iga $i = 0, \dots, n$ korral

$$M_0^i = \frac{h_1 + h_2}{h_2} M_1^i - \frac{h_1}{h_2} M_2^i,$$

$$M_n^i = \frac{h_{n-1} + h_n}{h_{n-1}} M_{n-1}^i - \frac{h_n}{h_{n-1}} M_{n-2}^i$$

ning asendame süsteemi ja saame

$$\begin{bmatrix} 2 + \frac{h_1}{h_2} & 1 - \frac{h_1}{h_2} & 0 & \dots & 0 \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{n-2} & 2 & \lambda_{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & 1 - \frac{h_n}{h_{n-1}} & 2 + \frac{h_n}{h_{n-1}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_1^1 & \dots & M_1^{n-1} \\ M_2^1 & \dots & M_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ M_{n-2}^1 & \dots & M_{n-2}^{n-1} \\ M_{n-1}^1 & \dots & M_{n-1}^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6f(x_0, x_1, x_2)_1 & \dots & 6f(x_0, x_1, x_2)_{n-1} \\ 6f(x_1, x_2, x_3)_1 & \dots & 6f(x_1, x_2, x_3)_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 6f(x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-1})_1 & \dots & 6f(x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-1})_{n-1} \\ 6f(x_{n-2}, x_{n-1}, x_n)_1 & \dots & 6f(x_{n-2}, x_{n-1}, x_n)_{n-1} \end{bmatrix},$$

mis on kolmediagonaalse maatriksiga süsteem, kus diagonaal domineerib ridade kaupa. Seejärel on ka mittediagonaalse süsteemi tingimusega süsteem regulaarne ning lahend ühene.

Tähistame kuuppolünoomi $C_j(x)$, mis on kordajate M_j^i abil arvutatud $C_j^i(x)$ iga $i = 0, \dots, n$ ja $j = 1, \dots, n$ korral. Seega, fundamentaalsplained avalduvad splineide $C_j^i(x)$ kaudu:

$$F_i^3(x) = \sum_{j=1}^n C_j^i(x),$$

iga $i = 0, \dots, n$ korral.

Hägas interpolatsioonispain fs avaldub taaskord

$$fs(x) = \sum_{i=0}^n u_i F_3^i(x),$$

kus u_i on hägas funktsiooni väärtus sõlmes x_i iga $i = 0, \dots, n$ korral, mille korrutamine skalaariga $F_3^i(x)$ on antud esimese peatüki definitsioonis 1.8.

Meetodi *Python*'i kood on olemas lisas 6.2.1.

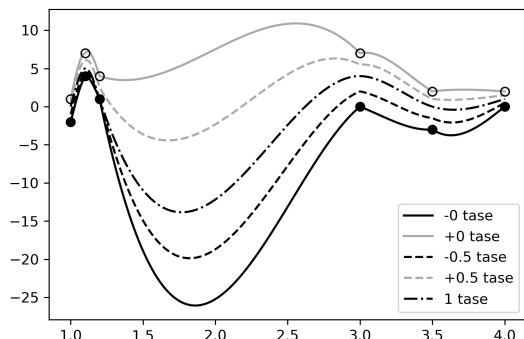
4.6 Näited

Toome kaks näidet artiklist [1], kus kasutame hägusa kuupsplainediga interpoleerimist erinevate rajatingimustega. Näited on saadud momentide meetodiga, kuid samad tulemused saab ka teiste meetoditega.

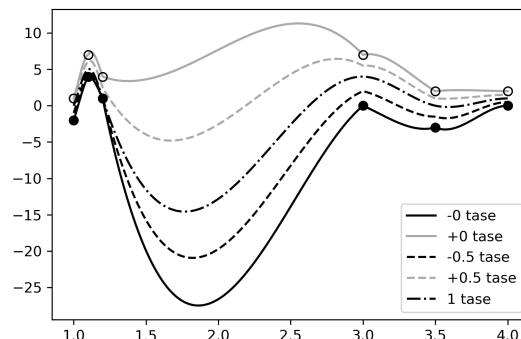
Näide 4.2. *Esimene näide on taaskord klassikaline, et demonstreerida interpolatsioonimeetodite erinevust. Olgu meil antud hägusad kolmnurkarvud:*

i	0	1	2	3	4	5
x_i	1	1.1	1.2	3	3.5	4
$u_{i,0}^+$	1	7	4	7	2	2
$u_{i,1}$	0	5	1	4	0	1
$u_{i,0}^-$	-2	4	1	0	-3	0

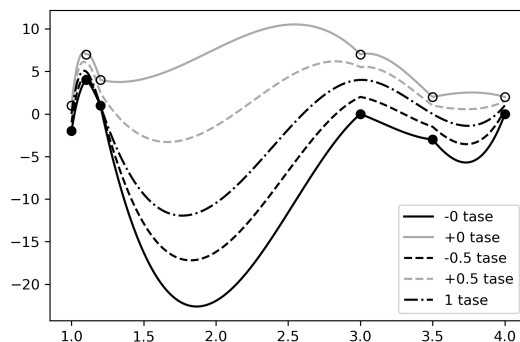
Joonisel 4.2 on näha lähendamise tulemused kõigi kolme rajatingimuse korral.



(a) Lähend hägusa naturaalsplainiga.



(b) Lähend hägusa täieliku splainiga.



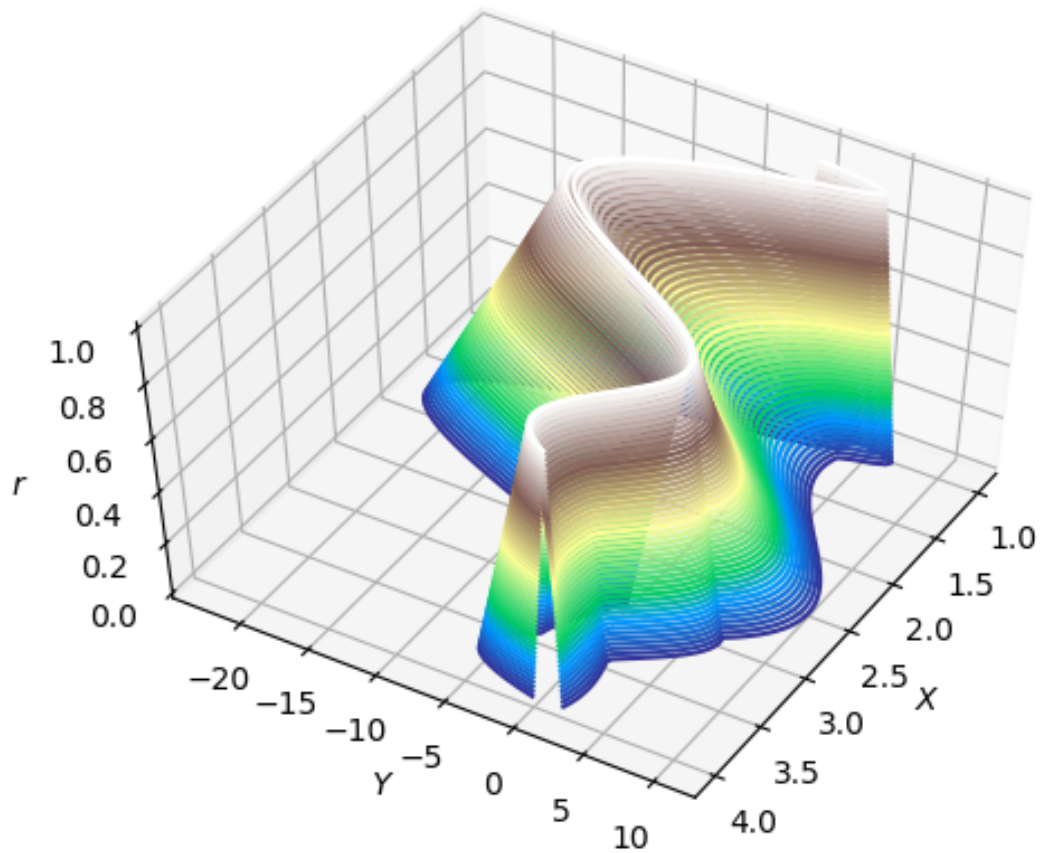
(c) Lähend hägusa mittesõlm splainiga.

Joonis 4.2: Joonistel on funktsiooni kandja, tuum ja 0.5-tasemed eristatud vastavate joontega. Suured täpid kandjal märgivad interpolatsioonipunkte.

Parema võrdluse jaoks anname iga rajatingimuse korral kandjaintervalli punktis 2:

- *naturaalsplain: [-21.945, 7.655]*
- *täielik splain: [-26.623, 7.698]*
- *mittesõlm splain: [-25.236, 7.524]*

Toome siinkohal ära ka ühe 3D joonise parema intuitsiooni tekitamiseks. Tegemine on samade andmetega mittesõlm juhul. Tulemus on joonisel 4.3

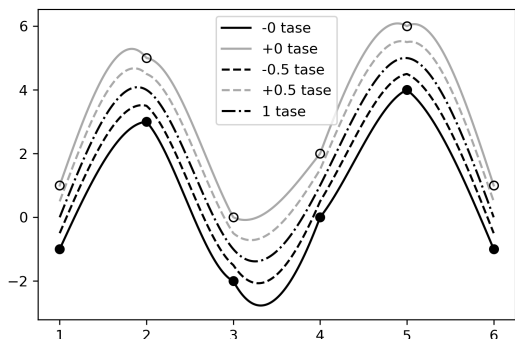


Joonis 4.3: Joonisel on näite 4.2 lähend hägusa mittedõlm splineiga kolmemõõtmelises ruumis.

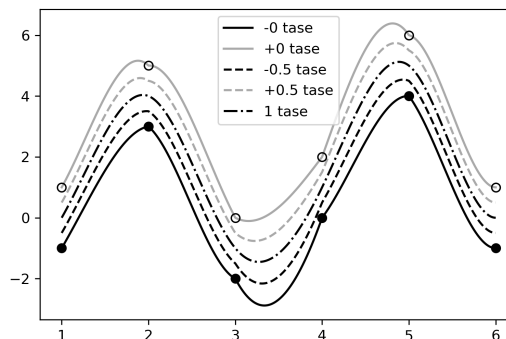
Näide 4.3. *Olgu meil nüüd antud hägusad kolmnurkarvud:*

i	0	1	2	3	4	5
x_i	1	2	3	4	5	6
$u_{i,0}^+$	1	5	0	2	6	1
$u_{i,1}$	0	4	-1	1	5	0
$u_{i,0}^-$	-1	3	-2	0	4	-1

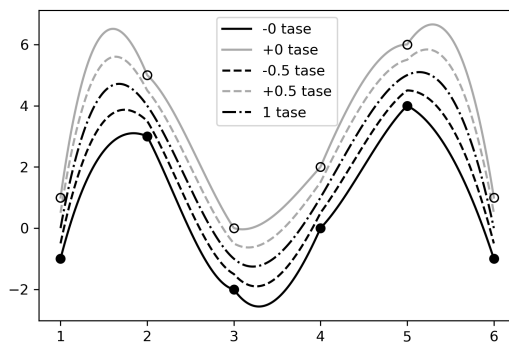
Joonisel 4.4 on näha lähendamise tulemused kõigi kolme rajatingimuse korral.



(a) Lähend hägusa naturaalsplainiga.



(b) Lähend hägusa täieliku splainiga.



(c) Lähend hägusa mittesõlm splainiga.

Joonis 4.4: Joonistel on funktsiooni kandja, tuum ja 0.5-tasemed eristatud vastavate joontega. Suured täpid kandjal märgivad interpolatsioonipunkte.

Nagu joonistelt on näha ei ole tulemused sujuvad, kuid tasemeintervallid näites 4.2 ei kasva nii kiiresti kui Lagrange'i meetodil.

5. Kuupsplainidega kolmnurkarvude interpoleerimise erijuht

Selles peatükis kirjeldame tükiti kuupsplainidega lähendamise erijuhtu kolmnurkarvudele. Selleks kasutame B-splainidest moodustatud baasi.

Erijuht seisneb selles, et mingitel tingimustel on võimalik lähendada kolmnurkarve otse r -taseme otspunktide kaudu eraldi interpoleerides.

Selle peatüki tulemused ja tõestused põhinevad artiklil [2], kui ei ole teisiti viidatud.

5.1 Üldist

Alustame üldisest B-splaini tüüpi kuupsplaini konstrueerimisest.

Olgu meil antud ühtlane intervalli $[a, b]$ tükeldus $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ ning lisaks veel 6 sõlme $t_{-3} < t_{-2} < t_{-1} < t_0$ ja $t_{n+3} > t_{n+2} > t_{n+1} > t_n$. Olgu $t_i = a + i\left(\frac{b-a}{n}\right)$, kus $i = -3, \dots, n+3$ ja $h = \frac{b-a}{n}$. Tähistagu $S_{3,2}$ kõigi eelneval antud sõlmedega kuupsplainide hulka, mille siledusaste on 2. Nüüd defineerime lähte- ehk baassplaini $B_i(t)$

$$B_i(t) = \frac{1}{h^3} \begin{cases} (t - t_{i-2})^3 & \text{kui } t \in [t_{i-2}, t_{i-1}] \\ h^3 + 3h^2(t - t_{i-1}) + 3h(t - t_{i-1})^2 - 3(t - t_{i-1})^3 & \text{kui } t \in [t_{i-1}, t_i] \\ h^3 + 3h^2(t_{i+1} - t) + 3h(t_{i+1} - t)^2 - 3(t_{i+1} - t)^3 & \text{kui } t \in [t_i, t_{i+1}] \\ (t_{i+2} - t)^3 & \text{kui } t \in [t_{i+1}, t_{i+2}] \\ 0 & \text{muul juhul} \end{cases} \quad (5.1)$$

kus $i = -1, \dots, n+1$.

Seega saame nüüd suvalise kuupsplaini $s(x) \in S_{3,2}$ esitada selliste baassplainide lineaarkombinatsioonina.

$$s(x) = \sum_{i=-1}^{n+1} c_i B_i(x),$$

kus c_i , $i = -1, \dots, n+1$ on reaalarvulised kordajad.

Nõudes, et spline $s(x)$ rahuldaks interpolatsioonitingimusi $s(t_i) = f(t_i)$, $0 \leq i \leq n$, kus $(t_i, f(t_i))$ on interpolatsiooniantmed, ei määra veel splinei üheselt. Selleks vajame veel kahte lisatingimust. Siinjuures kasutame hilisema hāgusate arvudega tegelemise lihtsustamiseks selliseid lisatingimusi :

$$s(t_{-2}) = f(t_{-2}), \quad s(t_{n+2}) = f(t_{n+2}).$$

Paneme tähele, et $f(t_{-2})$ ja $f(t_{n+2})$ valime suvaliselt, kui me ei tea funktsiooni $f(t)$ tegelikke vārtusi.

Nüüd tõestame, et selliselt defineeritud spline on üheselt määratud.

Teoreem 5.1. [2] *Leidub üheselt määratud spline $s(x) \in S_{3,2}$, mis lahendab järgneva interpolatsiooniülesande:*

1. $s(t_{-2}) = f(t_{-2}), \quad s(t_{n+2}) = f(t_{n+2}),$
2. $s(t_i) = f(t_i), \quad 0 \leq i \leq n$, kus $(t_i, f(t_i))$ on interpolatsiooniantmed.

Tõestus. Olgu $s(x) \in S_{3,2}$, siis ta avaldub baassplainide lineaarkombinatsioonina $s(x) = \sum_{i=-1}^{n+1} c_i B_i(x)$ kus c_i , $i = -1, \dots, n+1$ on reaalarvulised kordajad. Seega, interpolatsiooni-tingimustest saame:

$$\begin{aligned} s(t_{-2}) &= c_{-1} B_{-1}(t_{-2}) + \dots + c_{n+1} B_{n+1}(t_{-2}) = f(t_{-2}), \\ s(t_i) &= c_{-1} B_{-1}(t_i) + \dots + c_{n+1} B_{n+1}(t_i) = f(t_i), & 0 \leq i \leq n, \\ s(t_{n+2}) &= c_{-1} B_{-1}(t_{n+2}) + \dots + c_{n+1} B_{n+1}(t_{n+2}) = f(t_{n+2}), \end{aligned}$$

Siit saame $n+3$ lineaarvõrrandit $n+3$ tundmatu c_{-1}, \dots, c_{n+1} suhtes. Ehk $AC = B$, kus

$$C = (c_{-1}, \dots, c_{n+1})^T$$

$$B = (s(t_{-2}), s(t_0), \dots, s(t_n), s(t_{n+2}))^T$$

Kerge on näha baassplaini definitsioonist 5.1, et

$$\begin{aligned} B_i(t_i) &= 4 \\ B_i(t_j) &= 1, & \text{kui } j = i-1, j = i+1 \\ B_i(t_j) &= 0, & \text{muul juhul} \end{aligned}$$

Konstrueerime funktsiooni p tema r -tasemete kaupa:

$$p(x)_r^- = c_{-1,r}^- B_{-1}(x) + \cdots + c_{n+1,r}^- B_{n+1}(x)$$

$$p(x)_r^+ = c_{-1,r}^+ B_{-1}(x) + \cdots + c_{n+1,r}^+ B_{n+1}(x)$$

iga $r \in [0, 1]$ korral. Paneme tähele, et iga $r \in [0, 1]$ korral $p(x)_r^-, p(x)_r^+ \in S_{3,2}$. On selge, et selline interpolant p täidab interpolatsioonitingimusi, sest teoreemi 5.1 põhjal igal r -tasemel nõuame $p(t_i)_r^\pm = u_{i,r}^\pm$ iga $i = -2, 0, \dots, n, n+2$ korral. Kuid kas $p(x) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_F$ on ikka hägus funktsioon ka interpolatsioonipunktide vahel?

Järgnev teoreem väidab, et teatud tingimustel on ta tõesti hägus.

Teoreem 5.3. [2] Olgu $a \geq 1$ ja

$$e_i^- = y_i - x_i \text{ ja } e_i^+ = z_i - y_i,$$

kus $i = -2, 0, \dots, n, n+2$. Tähistame

$$E^- = (e_{-2}^-, e_0^-, \dots, e_n^-, e_{n+2}^-)^T$$

$$E^+ = (e_{-2}^+, e_0^+, \dots, e_n^+, e_{n+2}^+)^T$$

Olgu maatriks A nagu on ta kirjeldatud võrduses 5.2. Olgu tema veerud tähistatud A_1, \dots, A_{n+3} . Kui leiduvad sellised positiivsed skalaarid $a_1, \dots, a_{n+3} \geq 0$ ja $b_1, \dots, b_{n+3} \geq 0$ nii, et

$$E^- = \sum_{i=1}^{n+3} a_i A_i \tag{5.3}$$

$$E^+ = \sum_{i=1}^{n+3} b_i A_i \tag{5.4}$$

siis $p(x)$ on hägus funktsioon $p(x) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_F$

Tõestus. Olgu meil suvaline $x \in [a, b]$. Tõestuseks näitame, et $p(x)$ rahuldab teoreemi 5.2 tingimusi ning on seetõttu hägus arv. Selleks, olgu $r_1, r_2 \in [0, 1], r_1 \leq r_2$. Tõestame, et $p(x)_{r_1}^-$ on mittekahanev ja $p(x)_{r_1}^+$ on mittekasvav r suhtes. Ehk

$$p(x)_{r_2}^- \geq p(x)_{r_1}^-, \tag{5.5}$$

$$p(x)_{r_2}^+ \leq p(x)_{r_1}^+ \tag{5.6}$$

Samuti peab näitama, et $p(x)_1^- \geq p(x)_1^+$, kuid see vastab ilmselt tõele, kuna vastavalt $p(x)$ konstruktsioonile $p(x)_1^- = p(x)_1^+$.

Tõestame võrratuse 5.5. Võrratuse 5.6 tõestus on analoogne.

Kuna interpolatsioonipunktid u_i on hägusad arvud, siis teoreemi 5.2 põhjal kehtib interpolatsioonisõlmedes t_i , et $p(t_i)_{r_2}^- \geq p(t_i)_{r_1}^-$, kus $i = -2, 0, \dots, n, n+2$. Splaini $p(x)$ konstruktsioonist ja võrdusest 5.2 saame, et

$$\begin{aligned} c_{-1,r_2}^- &= p(t_{-2})_{r_2}^- \geq p(t_{-2})_{r_1}^- = c_{-1,r_1}^- \\ c_{-1,r_2}^- + 4c_{0,r_2}^- + c_{1,r_2}^- &= p(t_0)_{r_2}^- \geq p(t_0)_{r_1}^- = c_{-1,r_1}^- + 4c_{0,r_1}^- + c_{1,r_1}^- \\ c_{0,r_2}^- + 4c_{1,r_2}^- + c_{2,r_2}^- &= p(t_1)_{r_2}^- \geq p(t_1)_{r_1}^- = c_{0,r_1}^- + 4c_{1,r_1}^- + c_{2,r_1}^- \\ &\vdots \\ c_{n-1,r_2}^- + 4c_{n,r_2}^- + c_{n+1,r_2}^- &= p(t_n)_{r_2}^- \geq p(t_n)_{r_1}^- = c_{n-1,r_1}^- + 4c_{n,r_1}^- + c_{n+1,r_1}^- \\ c_{n+1,r_2}^- &= p(t_{n+2})_{r_2}^- \geq p(t_{n+2})_{r_1}^- = c_{n+1,r_1}^- \end{aligned}$$

Siit saame elemente ümber organiseerides:

$$\begin{aligned} c_{-1,r_2}^- - c_{-1,r_1}^- &= p(t_{-2})_{r_2}^- - p(t_{-2})_{r_1}^- \geq 0 \\ c_{-1,r_2}^- - c_{-1,r_1}^- + 4(c_{0,r_2}^- - c_{0,r_1}^-) + c_{1,r_2}^- - c_{1,r_1}^- &= p(t_0)_{r_2}^- - p(t_0)_{r_1}^- \geq 0 \\ c_{0,r_2}^- - c_{0,r_1}^- + 4(c_{1,r_2}^- - c_{1,r_1}^-) + c_{2,r_2}^- - c_{2,r_1}^- &= p(t_1)_{r_2}^- - p(t_1)_{r_1}^- \geq 0 \\ &\vdots \\ c_{n-1,r_2}^- - c_{n-1,r_1}^- + 4(c_{n,r_2}^- - c_{n,r_1}^-) + c_{n+1,r_2}^- - c_{n+1,r_1}^- &= p(t_n)_{r_2}^- - p(t_n)_{r_1}^- \geq 0 \\ c_{n+1,r_2}^- - c_{n+1,r_1}^- &= p(t_{n+2})_{r_2}^- - p(t_{n+2})_{r_1}^- \geq 0 \end{aligned}$$

Teisest küljest tänu kolmnurkarvude definitsioonile saame:

$$\begin{aligned} p(t_i)_{r_2}^- - p(t_i)_{r_1}^- &= u_{i,r_2}^- - u_{i,r_1}^- = x_i + (y_i - x_i)r_2 - x_i - (y_i - x_i)r_1 = \\ &= (y_i - x_i)(r_2 - r_1) = e_i^-(r_2 - r_1) \end{aligned}$$

Nüüd, tähistades $d_{i,r}^- = c_{i,r_2}^- - c_{i,r_1}^-$, kus $i = -1, \dots, n+1$ saame kirjutada

$$D_r^- = (d_{-1,r}^-, \dots, d_{n+1,r}^-)^T.$$

Eelnevast saame, et $AD_r^- = (r_2 - r_1)E^-$.

Tänu eeldusele 5.3 on $d_{i,r}^- \geq 0$ iga $i = -1, \dots, n+1$ korral. Seega

$$0 \leq d_{i,r}^- = c_{i,r_2}^- - c_{i,r_1}^- \Rightarrow c_{i,r_2}^- \geq c_{i,r_1}^-$$

Millest järeldub, et

$$\sum_{i=-1}^{n+1} c_{i,r_1}^- B_i(x) \leq \sum_{i=-1}^{n+1} c_{i,r_2}^- B_i(x).$$

Kuna $B_i(x)$ on positiivne funktsioon iga $i = -1, \dots, n+1$ korral, siis saamegi

$$p(x)_{r_1}^- \leq p(x)_{r_2}^-.$$

Pidevustingimused teoreemi 5.2 kasutamiseks järelduvad sellest, et $p(x)_r^-$ ja $p(x)_r^+$ on iga r korral antud punktis t pidevad, kuna nad on polünoomid.

Seega rahuldab $p(x)$ teoreemi 5.2 tingimusi ja on iga x korral hägus. \square

Paneme tähele, et eelneva teoreemi põhjal on $p(x)$ r -tasemekaupa tuletis ka pidev ning saame kena sileda funktsiooni.

5.3 Näited

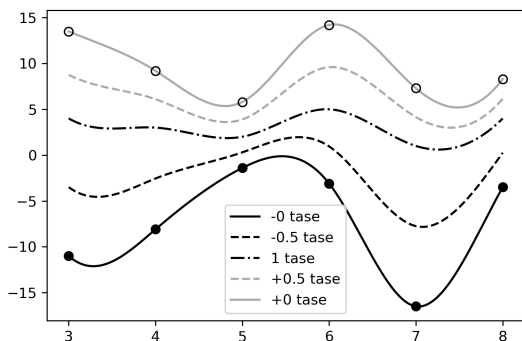
Toome järgnevalt kaks näidet artiklist [2], kus kasutame ülalkirjeldatud tulemusi.

Näide 5.1. *Olgu meil antud kaks komplekti interpolatsioonandmeid hägusate kolmnurkarvude näol:*

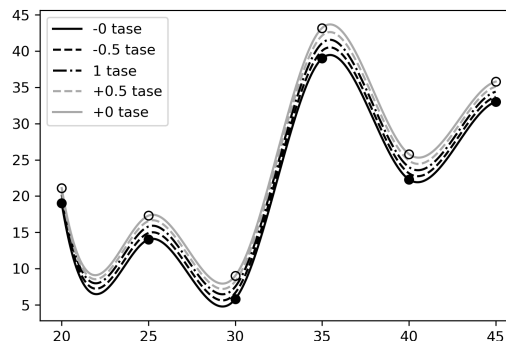
i	0	1	2	3	4	5	6	7
x_i	1	3	4	5	6	7	8	10
$u_{i,0}^+$	3	13.5	9.2	5.8	14.2	7.3	8.3	5.1
$u_{i,1}$	2.5	4	3	2	5	1	4	3
$u_{i,0}^-$	1.5	-11	-8.1	-1.4	-3.1	-16.5	-3.5	1.5

i	0	1	2	3	4	5	6	7
x_i	10	20	25	30	35	40	45	55
$u_{i,0}^+$	29.3	21.1	17.3	9.0	43.2	25.8	35.8	2.9
$u_{i,1}$	29.1	20.2	15.8	7.5	41.1	24.0	34.4	2.6
$u_{i,0}^-$	29.0	19.0	14.0	5.8	39.0	22.3	33.0	2.5

mis annavad vastavalt joonised 5.1(a) ja 5.1(b).



(a)



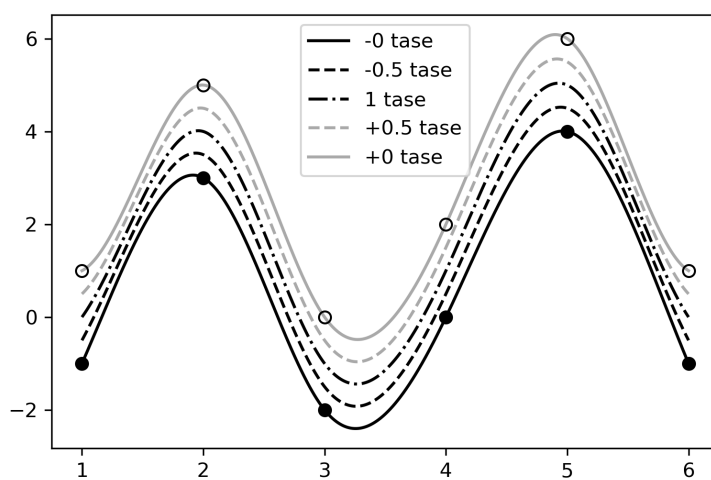
(b)

Joonis 5.1: Joonistel on funktsiooni kandja, tuum ja 0.5-tasemed eristatud vastavate joonidega. Suured täpid kandjal märgivad interpolatsioonipunkte.

Näide 5.2. *Vüimaks toome ka võrdluse näitele 4.3, mis näitab, et erinevalt hägusast kuupsplainist, tuleb selle meetodiga antud juhul tulemus tunduvalt parem. Olgu meil antud hägusad kolmnurkarvud:*

i	0	1	2	3	4	5	6	7
x_i	-1	1	2	3	4	5	6	8
$u_{i,0}^+$	1	1	5	0	2	6	1	1
$u_{i,1}$	0	0	4	-1	1	5	0	0
$u_{i,0}^-$	-1	-1	3	-2	0	4	-1	-1

mis annavad joonise 5.2.



Joonis 5.2: Joonisel on funktsiooni kandja, tuum ja 0.5-tasemed eristatud vastavate joon-
tega. Suured täpid kandjal märgivad interpolatsioonipunkte.

Nagu joonistelt on näha on tulemuseks ilusad sujuvad lähendid.
Meetodi implementatsioon on antud töö lisaalajaotuses 6.3.

Kirjandus

- [1] O. Kaleva. *Interpolation of fuzzy data*. Fuzzy Sets and Systems, 1994, **61**, 63-67.
- [2] M. Zeinali, S. Shahmorad, K. Mirnia. *Piecewise cubic interpolation of fuzzy data based on B-spline basis functions*. Iranian Journal of Fuzzy Systems Vol. 13, 2016, **1**, 67-76.
- [3] L. A. Zadeh. *Fuzzy Sets*. Information and Control, 1965, **8**, 338–353.
- [4] R. Lowen. *A fuzzy Lagrange interpolation theorem*. Fuzzy Sets and Systems, 1990, **34**, 33-38.
- [5] B. Bede. *Mathematics of Fuzzy Sets and Fuzzy Logic*. Springer-Verlag, 2013.
- [6] A. Armand, T. Allahviranloo, Z. Gouyandeh. *Some fundamental results of fuzzy calculus*. Iranian Journal of Fuzzy Systems Vol. 15, 2018, **3**, 27-46.
- [7] Yu-Ru Syau, Ly-Fie Sugianto, E. S. Lee. *Continuity and semicontinuity of fuzzy mappings*. Computers and Mathematics with Applications, 2011, **61**, 1122-1128.
- [8] L. A. Zadeh. *The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning*. Information Sciences, 1975, **8**, 199–249.
- [9] W. A. Lodwick, J. Santos. *Constructing consistent fuzzy surfaces from fuzzy data*. Fuzzy Sets and Systems, 2003, **135**, 259-277.
- [10] J. F. Epperson. *An Introduction to Numerical Methods and Analysis, Revised Edition*. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, USA, 2007.
- [11] C.de Boor, *A Practical Guide to Splines, Revised Edition*. Springer-Verlag, New York, USA, 2001.
- [12] G.Hämmerlin, K.-H. Hoffmann. *Numerical Mathematics*. Springer-Verlag, New York, USA, 1991, saksa keelest tõlkinud L. Schumaker.
- [13] S. Abbasbandy. *Interpolation of fuzzy data by complete splines*. The Korean Journal of Computational & Applied Mathematics Vol. 8, 2001, **3**, 587-594.

- [14] S. Abbasbandy, E. Babolian. *Interpolation of fuzzy data by natural splines*. The Korean Journal of Computational & Applied Mathematics Vol. 5, 1998, **2**, 457-463.
- [15] P. Blaga, B. Bede. *Approximation by fuzzy B-spline series*. Journal of Applied Mathematics and Computing Vol. 20, 2006, **1-2**, 157-169.
- [16] Ju. S. Zavjalov, B. I. Kvasov, V. L. Mirošnitšenko. *Splain funktsioonide meetodid, (v.k Metodõ Splain-Funktsii)*. Nauka, Moskva, 1980.
- [17] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery. *Numerical Recipes, The Art of Scientific Computing, Third Edition*. Cambridge University Press, New York, USA, 2007.
- [18] R. Wangi masinõppe ja mustrituvastus kursuse koduleht. <http://fourier.eng.hmc.edu/e176/lectures/ch7/node6.html> (22.04.2019)
- [19] R. Goetschel Jr., W. Voxman. *Elementary fuzzy calculus*. Fuzzy sets and systems, 1986, **18**, 31-43.

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Joonas Järve (sünnikuupäev 15.11.1996),

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose „Hägasate funktsioonide lähendamine“, mille juhendaja on Urve Kangro, reprodutseerimiseks eesmärgiga seda säilitada, sealhulgas lisada digitaalarhiivi DSpace kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.
2. Annan Tartu Ülikoolile loa teha punktis 1 nimetatud teos üldsusele kättesaadavaks Tartu Ülikooli veebikeskkonna, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace kaudu Creative Commons'i litsentsiga CC BY NC ND 3.0, mis lubab autorile viidates teost reprodutseerida, levitada ja üldsusele suunata ning keelab luua tuletatud teost ja kasutada teost ärieesmärgil, kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.
3. Olen teadlik, et punktides 1 ja 2 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.
4. Kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei riku ma teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse õigusaktidest tulenevaid õigusi.

Tartu, 08.05.2019

6. Lisad

Meetodite implementatsioonid on antud programmeerimiskeeles *Python*. Implementatsioonides kasutatakse ilmutamata järgnevaid funktsioone:

```
def plus(a, b): # kahe hägusa arvu a ja b liitmine
    if not isinstance(a, list):
        a = [a, a]
    if not isinstance(b, list):
        b = [b, b]
    return [a[0] + b[0], a[1] + b[1]]

def korr(a, b): # kahe hägusa arvu a ja b korrutamine
    if not isinstance(a, list):
        a = [a, a]
    if not isinstance(b, list):
        b = [b, b]
    return [np.minimum(np.minimum(a[0]*b[0], a[0]*b[1]),
                        np.minimum(a[1]*b[0], a[1]*b[1])),
            np.maximum(np.maximum(a[0]*b[0], a[0]*b[1]),
                        np.maximum(a[1]*b[0], a[1]*b[1]))]

def tase(X, Y, Z, r): # tagastab kolmnurk arvude r-taseme
    # X- kolmnurkarvu - 0tase
    # Y- kolmnurkarvu 1tase
    # Z- kolmnurkarvu + 0tase
    # r- soovitud tase
    Fpluss = []
    Fminus = []
    for i in range(len(X)):
        Fpluss.append(Z[i] + (Y[i] - Z[i]) * r)
        Fminus.append(X[i] + (Y[i] - X[i]) * r)

    return [Fminus, Fpluss]
```

6.1 Hägusa Lagrange'i interpolatsioonimeetodi implementatsioon

```
def lagfun(n, i, x, X): # Lagrange'i fundamentaalpolünoom
    # n - järk
    # i - polünoomi indeks
    # x - argument
    # X - interpolatsioonisõlmede vektor

    tulem = 1
    for j in range(n):
        if j == i:
            tulem *= 1
        else:
            tulem *= (x - X[j]) / (X[i] - X[j])
    return tulem

def intpoly(n, x, X, F): #Lagrange'i interpolatsiooni valem
    # n - järk
    # x - argument
    # X - interpolatsioonisõlmede vektor
    # F - funktsiooni väärtuste vektor
    tulem = [0,0]
    for i in range(n):
        tulem = plus(tulem, korr([F[0][i],F[1][i]], lagfun(n, i, x, X)))
    return tulem

#naide 1
solmed = [1,1.1,1.2,3,3.5,4]
X = [-2, 4, 1, 0, -3, 0]
Y = [0, 5, 1, 4, 0, 1]
Z = [1, 7, 4, 7, 2, 2]

XX = np.linspace(np.min(solmed), np.max(solmed), 301)
varvid = ["k","darkgrey", "k", "darkgrey"]
stiilid = ["-", "-", "--", "--"]
sildid = ["-0 tase", "+0 tase", "-0.5 tase", "+0.5 tase"]
```

```

tasemed = [0, 0.5, 1]

tulplus = []
tulminus = []
F = tase(X, Y, Z, tasemed[i])
N = len(solmed)

for ex in XX:
    tulplus.append(intpoly(N, ex, solmed, F)[0])
    tulminus.append(intpoly(N, ex, solmed, F)[1])

if tasemed[i] == 1:
    plt.plot(XX, tulplus, "k-.", label = "1 tase")
else:
    plt.plot(XX, tulplus, linestyle = stiilid[2*i],
             label = sildid[2*i], color = varvid[2*i])
    plt.plot(XX, tulminus, linestyle = stiilid[2*i+1],
             label = sildid[2*i+1], color = varvid[2*i+1])

plt.plot(solmed, X, "ko")
plt.plot(solmed, Z, "ko", fillstyle="none")
plt.legend()
plt.show()

```

6.2 Hägus kuupsplainidega interpoleerimise implemen- tatsioon

6.2.1 Momentide meetod

```

# Momentide meetodil hägus kuupsplainidega interpoleerimine
def h(i, x):
    # xid - interpolatsioonisõlmede vektor
    # i - indeks
    return x[i] - x[i-1]

def mu(i, xid):
    # xid - interpolatsioonisõlmede vektor
    # i - indeks
    return h(i, xid) / (h(i+1, xid) + h(i, xid))

```

```

def lam(i, xid):
    # xid - interpolatsioonisõlmede vektor
    # i - indeks
    return 1 - mu(i, xid)

def difsuh(i, x, f): #diferentssuhe * 6
    # x - interpolatsioonisõlmede vektor
    # i - indeks
    # f - funktsiooniväärtuste vektor

    a = (h(i+1, f)) / (h(i+1, x))
    b = (h(i, f)) / (h(i, x))
    c = (a - b) / (x[i+1] - x[i-1])
    return 6 * c

def Ci(i, ex, M, fid, xid):
    # i - indeks
    # ex - argument
    # M - splaini kordajate vektor
    # fid - funktsiooniväärtuste vektor
    # xid - interpolatsioonisõlmede vektor

    if xid[i] >= ex and ex > xid[i-1] or (xid[i-1] == ex and i == 1):
        a = (((xid[i] - ex)**3) / (6 * h(i, xid))) * M[i-1]
        b = (ex - xid[i-1])**3 / (6 * h(i, xid)) * M[i]
        c = (xid[i] - ex) * (fid[i-1] / h(i, xid) - M[i-1] * h(i, xid) / 6)
        d = (ex - xid[i-1]) * (fid[i] / h(i,xid) - M[i] * h(i, xid) / 6)
        return a + b + c + d
    else:
        return 0

def tulemus(solmed, X, Y, Z, r, XX, rajatingimus):
    # solmed - interpolatsioonisõlmede vektor
    # X - kolmnurkarvu - 0tase
    # Y- kolmnurkarvu 1tase
    # Z- kolmnurkarvu + 0tase
    # r- soovitud tase
    # XX - argumentide vektor
    # rajatingimus - näitab, mis rajatingimust
    # hetkel kasutatakse (naturaal, taeelik, mittesolm)

```

```

N = len(solmed)
A = np.zeros((N, N))
F = np.zeros((N, N))
I = np.identity(N)

for i in range(1,N-1):
    A[i,i-1]= mu(i, solmed)
    A[i,i]= 2
    A[i,i+1]= lam(i, solmed)

if rajatingimus == "mittesolm":
    A[0,0] = -1 / (h(1, solmed))
    A[0,1] = 1 / (h(2, solmed)) + 1 / (h(1, solmed))
    A[0,2]= -1 / (h(2, solmed))
    A[N-1,N-1] = -1 / (h(N-1, solmed))
    A[N-1,N-2] = 1 / (h(N-2, solmed)) + 1 / (h(N-1, solmed))
    A[N-1,N-3]= -1 / (h(N-2, solmed))

    for i in range(0, N):
        fid = I[i]
        for j in range(1, N-1):
            F[j][i] = difsuh(j, solmed, fid)

if rajatingimus == "natuuraal":
    A[0,0] = 1
    A[N-1,N-1] = 1

    for i in range(0, N):
        fid = I[i]
        for j in range(1, N-1):
            F[j][i] = difsuh(j, solmed, fid)

if rajatingimus == "taielik":
    A[0,0] = 2
    A[0,1] = 1
    A[N-1,N-1] = 2
    A[N-1,N-2] = 1
    for i in range(0,N):
        fid = I[i]
        for j in range(0,N):
            if j == 0:

```

```

        a = (h(j+1, fid))/(h(j+1, solmed))**2
        F[j][i] = 6 * a
    if j == N-1:
        a = -(h(j, fid))/(h(j, solmed))**2
        F[j][i] = 6 * a
    else:
        F[j][i] = difsuh(j, solmed, fid)

M = np.linalg.solve(A, F)
M = np.transpose(M)

FF = tase(X, Y, Z, r)
tulplus = []
tulminus = []

for ex in XX:
    buffer = [0,0]
    for i in range(N):
        vahetul = [0,0]

        for j in range(1, N):
            # plus( , ) on hägusate arvude liitmine
            vahetul = plus(vahetul, Ci(j, ex, M[i], I[i], solmed))
            # korr( , ) on hägusate arvude korrutamise
            vahetul = korr(vahetul, [FF[0][i],FF[1][i]])
            buffer[0] += vahetul[0]
            buffer[1] += vahetul[1]
        tulplus.append(buffer[1])
        tulminus.append(buffer[0])
    return [tulminus, tulplus]

#näide 1
#solmed = [1, 1.1, 1.2, 3, 3.5, 4]
#X = [-2, 4, 1, 0, -3, 0]
#Y = [0, 5, 1, 4, 0, 1]
#Z = [1, 7, 4, 7, 2, 2]

XX = np.linspace(np.min(solmed), np.max(solmed), 1000)
tasemed = [0, 0.5]
varvid = ["k","darkgrey", "k", "darkgrey", ]
stiilid = ["-","-", "--", "--", ]

```

```

sildid = ["-0 tase", "+0 tase", "-0.5 tase", "+0.5 tase"]
for i in range(len(tasemed)):
    tul = tulemus(solmed, X, Y, Z, tasemed[i], XX, "taielik")
    plt.plot(XX, tul[0], linestyle = stiilid[2*i],
             label = sildid[2*i], color = varvid[2*i])
    plt.plot(XX, tul[1], linestyle = stiilid[2*i+1],
             label = sildid[2*i+1], color = varvid[2*i+1])

tul = tulemus(solmed, X, Y, Z, 1, XX, "taielik")
plt.plot(XX, tul[0], "k-.", label = "1 tase")

plt.plot(solmed, X, "ko")
plt.plot(solmed, Z, "ko", fillstyle="none")
plt.legend()
plt.show()

```

6.2.2 Lõigatud astmefunktsioonid

```

def special(x, xi): #erifunktsioon
    # x - argument
    # xi - võrreldav
    if x < xi:
        return 0
    else:
        return (x - xi)**3

def fundamentaal(solmed, T, X, Y, Z, r, XX):
    # solmed - interpolatsioonisõlmede vektor
    # T - splain sõlmede vektor
    # X - kolmnurkarvu - 0tase
    # Y- kolmnurkarvu 1tase
    # Z- kolmnurkarvu + 0tase
    # r- soovitatav tase
    # XX - argumentide vektor

    N = len(solmed)
    D = np.zeros((N,N))

    for i in range(N):
        for j in range(N):

```

```

        if j < 4:
            D[i][j] = solmed[i]**j
        else:
            D[i][j] = special(solmed[i], T[j - 4])

coef = np.linalg.inv(D)
F = tase(X, Y, Z, r)
tulplus = []
tulminus = []

for ex in XX:
    buffer = [0,0]
    for i in range(N):
        vahetul = [0,0]
        for j in range(4):
            vahetul = plus(vahetul, coef[j][i] * (ex**j))
        for j in range(4,N):
            vahetul = plus(vahetul, coef[j][i] * special(ex, T[j-4]))
        vahetul = korr(vahetul, [F[0][i], F[1][i]])
        buffer[0] += vahetul[0]
        buffer[1] += vahetul[1]
    if ex == 2:
        print("2 korral ",buffer)
    tulplus.append(buffer[1])
    tulminus.append(buffer[0])

return [tulminus, tulplus]

#näide 2
T = [1.2, 3]
solmed = [1, 1.1, 1.2, 3, 3.5, 4]
X = [-2, 4, 1, 0, -3, 0]
Y = [0, 5, 1, 4, 0, 1]
Z = [1, 7, 4, 7, 2, 2]

XX = np.linspace(np.min(solmed), np.max(solmed), 1000)
tasemed = [0, 0.5]
stiilid = ["royalblue","crimson", "b--", "r--", ]
sildid = ["-0 tase", "+0 tase", "-0.5 tase", "+0.5 tase"]
for i in range(len(tasemed)):
    tul = fundamentaal(solmed, T, X, Y, Z, tasemed[i], XX)

```

```

plt.plot(XX, tul[0], stiilid[2*i], label = sildid[2*i])
plt.plot(XX, tul[1], stiilid[2*i + 1], label = sildid[2*i + 1])

tul = fundamentaal(solmed, T, X, Y, Z, 1, XX)
plt.plot(XX, tul[0], "k", label = "1 tase")
plt.plot(solmed, X, "bo")
plt.plot(solmed, Z, "ro")
plt.legend()
plt.show()

```

6.3 Kuupsplainidega lähendamise erijuhu implementatsioon

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def Bi(t, T, i, h):#kuup B splain ühtlaste vahede jaoks
    # t- argument
    # T- splaini sõlmede vektor
    # i- baassplaini indeks
    # h- sõlmede vaheline kaugus
    const = 1/(h**3)

    if (t <= T[i-1] and t >= T[i-2]):
        return const * ((t - T[i-2])**3)

    if (t <= T[i] and t >= T[i-1]):
        return const * (h**3 + 3 * (h**2) * (t - T[i-1]) +
                        3 * h * (t - T[i-1])**2 -
                        3 * (t - T[i-1])**3)

    if (t <= T[i+1] and t >= T[i]):
        return const * (h**3 + 3 * (h**2) * (T[i+1] - t) +
                        3 * h * (T[i+1] - t)**2 -
                        3 * (T[i+1] - t)**3)

    if (t <= T[i+2] and t >= T[i+1]):
        return const * ((T[i+2] - t)**3)

```

```

else:
    return 0

def tulemus(C, X, T, solmed, h): #splainide ja sklaaride summa
    # C - sklaaride vektor
    # X - määramispiirkonna vektor
    # T - splaini sõlmede vektor
    # solmed - interpolatsioonisõlmede vektor
    # h - sõlmede vaheline kaugus
    tulem = []
    for x in X:
        vahetulem = [0]
        for i in range(len(solmed)):
            vahetulem += C[i] * Bi(x, T, i+2, h)
        tulem.append(vahetulem)
    return tulem

#näide 2
T = [5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60]
solmed = [10, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 55]
X = [29.0, 19.0, 14.0, 5.8, 39.0, 22.3, 33.0, 2.5]
Y = [29.1, 20.2, 15.8, 7.5, 41.1, 24.0, 34.4, 2.6]
Z = [29.3, 21.1, 17.3, 9.0, 43.2, 25.8, 35.8, 2.9]

h = T[1] - T[0]
N = len(solmed)
A = np.zeros((N,N))
A[0,0]=1
A[N-1,N-1]=1

for i in range(1,N-1):
    A[i,i-1] = 1
    A[i,i] = 4
    A[i,i+1] = 1

tase5 = tase(X, Y, Z, 0.5)

Cminus = np.linalg.solve(A, X)
Cminus5 = np.linalg.solve(A, tase5[0])
Cplus5 = np.linalg.solve(A, tase5[1])
Cplus = np.linalg.solve(A, Z)

```

```

C1 = np.linalg.solve(A, Y)

C = [Cminus, Cminus5, C1, Cplus5, Cplus]
XX = np.linspace(solmed[1], solmed[len(solmed)-2], 1000)
varvid = ["k", "k", "k", "darkgrey", "darkgrey", ]
stiilid = ["-", "--", "-.", "--", "-", ]
sildid = ["-0 tase", "-0.5 tase", "1 tase", "+0.5 tase", "+0 tase"]
for i in range(len(C)):
    tul = tulemus(C[i], XX, T, solmed, h)
    plt.plot(XX, tul, color = varvid[i], label = sildid[i],
             linestyle = stiilid[i])

plt.plot(solmed[1: len(solmed)-1], X[1: len(X)-1], "ko")
plt.plot(solmed[1: len(solmed)-1], Z[1: len(Z)-1], "ko",
         fillstyle="none")
plt.legend()
plt.show()

```