

40991.

Beiträge
zur
Theorie der Lichtbrechung
in Prismensystemen.

Eine zur Erlangung
des
Magistergrades
verfasste und mit Bewilligung
einer hochverordneten physiko-mathematischen Fakultät der Kaiserlichen Universität

zu **Dorpat**

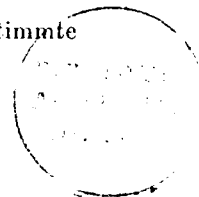
zur öffentlichen Vertheidigung bestimmte

Abhandlung

von

Eugen Block,

cand. astr.



Dorpat.

Druck von C. Mattiesen.

1873.

112018

Gedruckt mit Genehmigung der physico-mathematischen Facultät
der Universität Dorpat.

Dorpat, den 27. März 1873.
№ 19.

Dr. C. Grewingk,
d. Z. Decan.

Meinem Vater.

D 42668

Die vielfache Anwendung, welche die Spectralanalyse in allen Zweigen der Naturwissenschaft gefunden hat, die gesteigerten Anforderungen an die Genauigkeit der Beobachtungen, sowie besonders die Verschiedenheit der Beobachtungsobjecte, hat in den letzten Jahren wesentliche Aenderungen in der Construction der Spectralapparate hervorgerufen. Die meisten dieser Aenderungen sind jedoch nicht durch theoretische Untersuchungen veranlasst worden, sondern auf experimentellem Wege gefunden, wodurch so manche Fehler in der Construction, die von wesentlichem Einfluss auf die Schärfe des dargestellten Spectrum's sein können, ohne Berücksichtigung geblieben sind.

Die Wichtigkeit genauer spectroscopischer Beobachtungen und Messungen für die Lösung verschiedener Fragen aus der Astrophysik, hat mich zur Untersuchung der Theorie der Spectralapparate und einer Kritik der jetzt gebräuchlichen Instrumente veranlasst, von der ich hiermit den einleitenden Theil, die Theorie der Lichtbrechung in Prismensystemen, veröffentliche.

Was die vorhandenen Schriften über die Theorie der Lichtbrechung in Prismen anbetrifft, verdient, ausser den

Lehrbüchern der Optik von Herschel, Littrow und Schmidt, besonders Beachtung die Bearbeitung dieser Frage von Helmholtz¹⁾, welcher, nicht vom gewöhnlichen Ausdruck des Brechungsgesetzes, sondern vom Fermatschen Satze²⁾ ausgehend, die allgemeine Theorie der Lichtbrechung, so wie den Gang der Lichtstrahlen in einem Prisma, einer eingehenden analytischen Untersuchung unterwirft. Leider werden in diesen Arbeiten jedoch hauptsächlich nur parallele Strahlen berücksichtigt und nur höchst oberflächlich der Gang nicht paralleler Strahlen in Betracht gezogen. Wo es aber, wie beim Objectivprisma, oder dem Prisma zwischen Objectiv und Spalt des Spectroscops, darauf ankommt, ein möglichst wenig verzerrtes Bild des Objects, trotz der vorhandenen Prismensysteme, zu erzeugen, muss die Untersuchung auch auf convergirende und divergirende Strahlen ausgedehnt werden, und zwar mit Berücksichtigung der Dicke der angewandten Prismen.

Von Wichtigkeit ist ferner die Bestimmung der Intensität, des durch ein Prismensystem gebrochenen Lichtes, so wie des Einflusses, welchen fehlerhafte Prismen oder die Neigung der Prismen gegen einander, auf die Reinheit des Spectrums ausüben können: Fragen, die in den bisherigen Arbeiten über diesen Gegenstand unberücksichtigt geblieben sind.

1) Helmholtz: Physiologische Optik. pag. 238 ff.

2) Der Fermatsche Satz (Descartes Briefwechsel Bd. III) lässt sich folgendermassen ausdrücken: Die optische Länge eines Lichtstrahls zwischen einem ihm angehörigen Punkte im ersten und zweiten Medium ist ein Grenzwert. Unter der optischen Länge ist die Summe der Producte aus der Weglänge in jedem Mittel und dem Brechungscoefficienten desselben zu verstehen.

Hervorgehoben werden müssen die Arbeiten von Mousson¹⁾ und Voit²⁾, von denen der erstere besonders die Darstellung eines reinen Spectrum eingehend behandelt. Die Arbeit von Voit beschränkt sich mehr auf die Beschreibung einiger bisher gebräuchlicher Spectralapparate, ohne dieselben einer Kritik zu unterziehen.

Obwohl nicht speciell die Theorie der Lichtbrechung in Prismen betreffend, sind noch zu erwähnen die Arbeiten von Dittscheiner³⁾, „Ueber die Krümmung der Spectrallinie,“ Reusch⁴⁾ und Listing⁵⁾, von denen letzterer sehr eingehend die Theorie des Reflexionsprisma behandelt.

Wenngleich es mir, wegen der höchst verwickelten Gleichungen, zu denen man gelangt, nicht möglich gewesen, allgemein für eine beliebige Anzahl von Prismen, mit Berücksichtigung der oben erwähnten Fehlerquellen, die Bedingungen zur Darstellung eines reinen Spectrums zu entwickeln, so habe ich doch die Hoffnung, durch die folgenden Untersuchungen eine klare Uebersicht zu geben, welche Bedingungen in den besonderen, für die Construction der Spectralapparate wichtigen Fällen, hauptsächlich erfüllt werden müssen.

1) Mousson: Ueber Spectralbeobachtungen. Pogg. An. Bd. CXII.

2) Voit: Ueber Spectralapparate. Ph. Carl. Rep. d. Phys. Bd. I.

3) Abh. d. Wiener Ac. Bd. 51.

4) Pogg. An. Bd. XCIII.

5) Listing: Ueber das Reflexionsprisma. Ph. Carl. Rep. d. Phys. Bd. VII.

Das allgemein bekannte Gesetz der einfachen Lichtbrechung lässt sich auch in folgender Form ausdrücken¹⁾:

Der Cosinus der Neigung des verlängerten einfallenden Strahles, gegen irgend ein beliebiges auf der Grenzfläche des brechenden Mittels vom Einfallspunct aus gezogenes Linearelement, steht zu dem Cosinus der Neigung des gebrochenen Strahles gegen dasselbe Linearelement, in einem beständigen Verhältnisse, nämlich dem bekannten Brechungsverhältnisse.

Bezeichnet man mit α, β, γ die Neigung des einfallenden, mit α', β', γ' die Neigung des gebrochenen Strahles gegen die drei Axen, mit x, y, z die Coordinaten des Einfallspunctes und mit n_0 und n_1 die Brechungscoefficienten des ersten und zweiten Mittels, so drückt folgende Gleichung die Verbindung des einfallenden mit dem gebrochenen Strahle aus:

$$n_0 \{ \cos \alpha \cdot dx + \cos \beta \cdot dy + \cos \gamma \cdot dz \} \\ = n_1 \{ \cos \alpha' \cdot dx + \cos \beta' \cdot dy + \cos \gamma' \cdot dz \}$$

Führt man in diese Gleichung den Differentialausdruck der Fläche:

$$dz = p \cdot dx + q \cdot dy$$

ein, so zerfällt sie in zwei andere, indem jeder Coefficient von dx und dy für sich verschwinden muss.

Für den besonderen Fall, dass die brechende Fläche eine Ebene ist, lässt sich, wie leicht zu erkennen, das Brechungsgesetz in die allgemeine Fassung bringen:

1) Minding: Bull. phys. math. de l'académie de St. Pétersbourg. T. V. pag. 113.

Der Cosinus der Neigung des einfallenden Strahles, gegen irgend eine beliebige, der Grenzebene des brechenden Mittels parallele Richtung, steht zu dem Cosinus der Neigung des gebrochenen Strahles gegen dieselbe Richtung, in einem beständigen Verhältnisse, dem Brechungsverhältnisse.

In dieser Form ausgesprochen wird die Brechung des Lichtes, namentlich wenn es sich um die Brechung durch Prismen handelt, die gegen einander geneigt sind, bedeutend leichter einer analytischen Behandlung zugänglich, indem man die Neigung der Lichtstrahlen auf die für die Rechnung vortheilhafteste Richtung beziehen kann. Bei der Untersuchung über die Wirkung fehlerhafter Prismen und einer Drehung der Einfallsebene, oder der Prismen gegen einander, auf die Reinheit des Spectrums, werde ich von diesem Satze Gebrauch machen.

Bei der folgenden Untersuchung beschränke ich mich darauf, die Neigung des Lichtstrahls gegen die Durchschnittslinie der Einfallsebene, die für's Erste mit dem Hauptschnitte des Prisma's zusammenfallend angenommen wird, mit der brechenden Ebene zu beziehen, indem ich die Neigung des einfallenden Strahles, die Einfalleneigung, sowie des rückwärts verlängerten gebrochenen Strahles oder die Brechungsneigung, von dieser Durchschnittslinie aus im Sinne der Fortpflanzung des Lichtes von 0° — 180° zähle.

Es hat diese Art der Bezeichnung der Neigungswinkel vor der üblichen Bezeichnung durch den Winkel zwischen dem Lichtstrahl und dem Einfallslot, den Vortheil, dass sich aus dem Zeichen der Cosinusfunction erkennen

lässt, in welchem Quadranten der Winkel liegt und nicht dem Einfallswinkel, je nachdem er vom Einfallslot aus, auf der Seite der brechenden Kante des Prisma's, oder der entgegengesetzten liegt, ein verschiedenes Vorzeichen gegeben werden muss. Ganz allgemein kann man z. B. bei dieser Art der Bezeichnung setzen: die Differenz der zweiten Einfallseigung und der ersten Brechungsneigung gleich dem brechenden Winkel des Prisma's.

Brechung eines homogenen Lichtstrahls durch ein Prismensystem.

Angenommen, es falle ein Lichtstrahl von bestimmter Wellenlänge auf ein Prismensystem, das aus i fehlerfreien Prismen bestehe, deren Kanten einander parallel sind und zwar sei die Einfallsebene ein Hauptschnitt, d. h. senkrecht auf der brechenden Kante.

Es bezeichne:

- $P_1, P_2, P_3, \dots, P_i$ die brechenden Winkel der einzelnen Prismen,
- $n_0, n_1, n_2, \dots, n_{i+1}$ die Brechungscoefficienten der einzelnen Medien,
- $e_0, e_1, e_2, \dots, e_i$ die Einfallseigungen in den Medien vom Brechungscoefficienten n_0, n_1 etc. n_i ,
- $b_1, b_2, b_3, \dots, b_{i+1}$ die Brechungsneigungen in den Medien n_1, n_2, \dots, n_{i+1} ,
- $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{i+1}$ die Ablenkungen, die der Lichtstrahl durch die einzelnen Brechungen erleidet, gezählt von dem ersten einfallenden Strahle aus im Sinne der Fortpflanzung des Lichtstrahles.

Denn hat man allgemein die Gleichungen:

$$\begin{aligned} e_1 &= P_1 \mp b_1 \\ e_2 &= P_2 \mp b_2 \\ &\dots \dots \dots \\ e_i &= P_i \mp b_i \end{aligned} \tag{I.}$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= b_1 - e_0 \\ \alpha_2 &= b_2 - e_1 \\ &\dots \dots \dots \\ \alpha_{i+1} &= b_{i+1} - e_i \end{aligned} \tag{II.}$$

und die schliessliche Ablenkung des Lichtstrahles von seiner ursprünglichen Richtung nach $i + 1$ Brechungen:

$$A = b_{i+1} - e_0 - \sum_1^i P \tag{III.}$$

wobei:

$$\sum_1^i P = P_1 \mp P_2 \mp P_3 \mp \dots \mp P_i$$

Der Winkel $P_1, P_2 \dots P_i$ wird positiv genommen, wenn die brechende Kante des Prismas auf der Seite des Einfallslotes auf die brechende Fläche liegt, welche der Fortpflanzungsrichtung des Lichtstrahles entspricht.

Zwischen den Einfallseigungen und den Brechungsneigungen bestehen folgende Relationen:

$$\begin{aligned} n_0 \cos e_0 &= n_1 \cos b_1 \\ n_1 \cos e_1 &= n_2 \cos b_2 \\ &\dots \dots \dots \\ n_i \cos e_i &= n_{i+1} \cos b_{i+1} \end{aligned} \tag{IV.}$$

$$\frac{n_0^2 + m_{-0}^2 \cotg^2 b_1}{n_2^2 + m_1^2 \cotg^2 e_1} \cdot \frac{n_2^2 + m_{-2}^2 \cotg^2 b_3}{n_4^2 + m_3^2 \cotg^2 e_3} \cdot \dots \cdot \frac{n_{i-1}^2 + m_{-(i-1)}^2 \cotg^2 b_i}{n_{i+1}^2 + m_i^2 \cotg^2 e_i} = 1$$

VIII.

$$\frac{n_0^2}{n_{i+1}^2} \cdot \frac{n_1^2 + m_{-1}^2 \cotg^2 b_2}{n_2^2 + m_0^2 \cotg^2 e_0} \cdot \frac{n_3^2 + m_{-3}^2 \cotg^2 b_4}{n_3^2 + m_2^2 \cotg^2 e_2} \cdot \dots \cdot \frac{n_i^2 + m_{-i}^2 \cotg^2 b_{i+1}}{n_i^2 + m_{i-1}^2 \cotg^2 e_i} = 1$$

Anmerkung. n_0 ist nicht gleich n_{i+1} gesetzt, damit diese Formeln auch für den allgemeineren Fall, dass die Prismen von verschiedenen Medien begrenzt sind, anwendbar sind.

Ob der Grenzwert von A ein Minimum oder Maximum, entscheidet das zweite Differential von A . Führt man die Differentiation aus, so erhält man:

$$\frac{d^2 A}{de_0^2} = n_0 \left\{ \frac{1}{n_1} \cdot \frac{d(\nu_1)}{db_1} + \frac{\nu_0}{n_2} \cdot \frac{d(\nu_1)}{db_2} + \frac{\nu_1 i}{n_3} \cdot \frac{d(\nu_2)}{db_3} + \dots + \frac{(\nu_{i-1}) i}{n_{i+1}} \cdot \frac{d(\nu_i)}{db_{i+1}} \right\}$$

Setzt man in diesen Ausdruck die Werthe der Differentialquotienten

$$\frac{d(\nu_i)}{db_{i+1}} = - \frac{m_{-i}^2 \cos b_{i+1}}{\nu_i \cdot n_i^2 \sin^3 b_{i+1}} = - \frac{\nu_i^2 \cdot m_{-i}^2 \cos e_i}{n_i \cdot n_{i+1} \cdot \sin^3 e_i}$$

ein, wobei für i der Reihe nach 1, 2, 3... i gesetzt werden muss, so wird:

$$\frac{d^2 A}{de_0^2} = - n_0 \left\{ \frac{\nu_0^2 \cdot m_{-0}^2 \cos e_0}{n_0 \cdot n_1^2 \sin^3 e_0} + \frac{\nu_0 \cdot m_{-1}^2 \cos b_2}{\nu_1 \cdot n_1^2 \cdot n_2 \sin^3 b_2} + \dots + \frac{(\nu_{i-2})' \nu_{i-1}^2 \cdot m_{-(i-1)}^2 \cos e_{i-1}}{n_{i-1} \cdot n_i^2 \sin^3 e_{i-1}} + \frac{(\nu_{i-1}) i m_{-i}^2 \cos b_{i+1}}{\nu_i \cdot n_i^2 \cdot n_{i+1} \sin^3 b_{i+1}} \right\}$$

Die Ausdrücke für $\frac{dA}{de_0}$ und $\frac{d^2 A}{de_0^2}$ lassen eine ganz allgemeine Lösung nicht zu; für einige specielle Fälle vereinfachen sie sich jedoch bedeutend und man erkennt dann aus denselben leicht, welcher Zusammenhang zwischen den Winkeln stattfindet, wenn die Ablenkung des Lichtstrahls ein Minimum werden soll.

Betrachtet man ein einzelnes Prisma, das von beiden Seiten von verschiedenen Medien eingeschlossen ist, so sind die Bedingungen für einen Grenzwert der Ablenkung:

$$n_2^2 + m_1^2 \cotg^2 e_1 = n_0^2 + m_{-0}^2 \cotg^2 b_1$$

$$n_2^2 (n_1^2 + m_0^2 \cotg^2 e_0) = n_0^2 (n_1^2 + m_{-1}^2 \cotg^2 b_2)$$

und hieraus findet man:

$$\sin e_1 = \frac{m_{-1}}{m_{-0}} \cdot \sin b_1$$

$$\sin e_0 = \frac{n_2 m_0}{n_0 m_{-1}} \cdot \sin b_2$$

Für den Fall, dass das Prisma von beiden Seiten von demselben Medium begrenzt ist, wird $n_2 = n_0$, $m_0 = m_{-1}$ und es ergibt sich:

$$\sin e_1 = \sin b_1 \quad ; \quad e_1 = b_1 \text{ oder } 180^\circ - b_1$$

$$\sin e_0 = \sin b_2 \quad ; \quad e_0 = b_2 \text{ oder } 180^\circ - b_2$$

Zwischen e_1 und b_1 besteht noch die Gleichung:

$$e_1 = P_1 + b_1.$$

Ist P_1 von Null verschieden, so muss also

$$e_1 = 180^\circ - b_1 - 90^\circ + \frac{P_1}{2}$$

$$b_1 = 180^\circ - e_1 - 90^\circ + \frac{P_1}{2}$$

Die Werthe von e_0 und b_2 erhält man dann aus den Gleichungen

$$n_0 \cos e_0 = n_1 \cos b_1$$

$$n_1 \cos e_1 = n_2 \cos b_2.$$

Das zweite Differential von A reducirt sich für diesen Fall auf:

$$\frac{d^2 A}{de_0^2} = \frac{2 \cdot m_0^2 \cdot n_0^2 \cos e_0}{n_1^2 \cdot \sin^3 e_0}$$

ein Ausdruck, der stets einen positiven Werth erhält. Also ist der Grenzwert von A , für

$$e_1 = 90^\circ + \frac{P_1}{2} \quad b_1 = 90^\circ - \frac{P_1}{2}$$

ein Minimum.

Stellt man die Bedingung, ein Prismensystem von $2i+1$ Prismen werde von einem homogenen Lichtstrahl so getroffen, dass jedes einzelne Prisma ein Minimum der Ablenkung des Strahles bewirke, so hat man die Bedingungengleichungen:

$$\sin e_1 = \frac{m_1}{m_{-0}} \cdot \sin b_1 \quad ; \quad \sin e_0 = \frac{n_2 \cdot m_0}{n_0 \cdot m_{-1}} \cdot \sin b_2$$

$$\sin e_3 = \frac{m_3}{m_{-2}} \cdot \sin b_3 \quad ; \quad \sin e_2 = \frac{n_4 \cdot m_2}{n_2 \cdot m_{-3}} \cdot \sin b_4$$

.....

$$\sin e_{2i+1} = \frac{m_{2i+1}}{m_{-(2i)}} \cdot \sin b_{2i+1} \quad ; \quad \sin e_{2i} = \frac{n_{2i+2} \cdot m_{2i+2}}{n_{2i} \cdot m_{-(2i+1)}} \cdot \sin b_{2i+2}$$

IX.

Bei der Construction der Spectralapparate kommen nun zwei Fälle in Betracht. Entweder sind die Prismen aus Glas von verschiedener brechender Kraft durch Prismen aus Luft von einander getrennt, die Batteriestellung, oder dieselben sind durch parallele Schichten mit einander verbunden, wie beim Spectroskop à vision directe.

Für den ersten Fall hat man:

$$n_0 = n_2 = n_4 \dots = n_{2i+2} = 1$$

$$m_0 = m_{-1} ; m_2 = m_{-3} \dots m_{2i} = m_{-(2i+1)}$$

und die Bedingungen für das Minimum der Ablenkung werden:

$$e_1 = 90^\circ + \frac{P_1}{2} \quad ; \quad b_1 = 90^\circ - \frac{P_1}{2} \quad ; \quad e_0 = 180^\circ - b_2$$

$$e_3 = 90^\circ + \frac{P_3}{2} \quad ; \quad b_3 = 90^\circ - \frac{P_3}{2} \quad ; \quad e_2 = 180^\circ - b_4$$

$$\dots \dots \dots$$

$$e_{2i+1} = 90^\circ + \frac{P_{2i+1}}{2} \quad ; \quad b_{2i+1} = 90^\circ - \frac{P_{2i+1}}{2} \quad ; \quad e_{2i} = 180^\circ - b_{2i+2}$$

Die Aufgabe ist nun, die Stellung dieser Glasprismen gegen einander, oder die brechenden Winkel der Luftprismen $P_2, P_4 \dots P_{2i}$ zu berechnen, so dass diese Bedingungen erfüllt werden können.

Es ist

$$\cos e_0 = n_1 \cdot \sin \frac{P_1}{2} = - \cos b_2$$

$$\cos e_2 = n_3 \cdot \sin \frac{P_3}{2} = - \cos b_4$$

.....

$$\cos e_{2i} = n_{2i+1} \cdot \sin \frac{P_{2i+1}}{2} = - \cos b_{2i+2}$$

und:

$$P_2 = e_2 - b_2$$

$$P_4 = e_4 - b_4$$

.....

$$P_{2i} = e_{2i} - b_{2i}$$

Man findet also:

$$P_2 = \text{arc. cos} \left(n_1 \sin \frac{P_1}{2} \right) + \text{arc. cos} \left(n_3 \sin \frac{P_3}{2} \right) - 180^\circ$$

$$P_4 = \text{arc. cos} \left(n_3 \sin \frac{P_3}{2} \right) + \text{arc. cos} \left(n_5 \sin \frac{P_5}{2} \right) - 180^\circ$$

.....

$$P_{2i} = \text{arc. cos} \left(n_{2i-1} \sin \frac{P_{2i-1}}{2} \right) + \text{arc. cos} \left(n_{2i+1} \sin \frac{P_{2i+1}}{2} \right) - 180^\circ$$

Haben die einzelnen Prismen, wie es meist bei den Spectroscopen mit Prismenbatterien der Fall ist, gleiche brechende Winkel und gleiche Brechungscoefficienten, so wird $P_2 = P_4 = \dots P_{2i}$ und man erhält

$$\sin \frac{P_2}{2} = - n_1 \sin \frac{P_1}{2}$$

in diesem Falle muss also der brechende Winkel des Luftprismas auf der entgegengesetzten Seite des Einfallslotes liegen, als der brechende Winkel vom Glasprisma.

Für den zweiten Fall, dass die einzelnen Prismen des Systems durch parallele Schichten von einander getrennt sind und jedes Prisma ein Minimum der Ablenkung des Strahles bewirken soll, müssen bestimmte Bedingungs-

gleichungen zwischen den brechenden Winkeln der Prismen erfüllt sein, damit die Lösung der Aufgabe möglich wird.

Nimmt man wieder ein System von $2i + 1$ Prismen von verschiedener brechender Kraft an, so hat man die Winkel $P_2, P_4 \dots P_{2i}$ gleich Null zu setzen, da die Schicht zwischen den einzelnen Glasprismen als parallel angenommen wurde, die Winkel $P_1, P_3 \dots P_{2i+1}$ sind aber dann von einander und von den Brechungscoefficienten abhängig.

Durch leichte Umformung erhält man aus den Gleichungen IX, wenn man zur Abkürzung setzt:

$$\frac{m_{-0}}{m_1} = \frac{m_0}{m_{-1}} = \mu_1$$

$$\frac{m_{-1}}{m_2} = \frac{m_1}{m_{-2}} = \mu_2$$

.....

$$\frac{m_{-2i}}{m_{2i+1}} = \frac{m_{2i}}{m_{-(2i+1)}} = \mu_{2i+1}$$

als Bedingung für das Minimum der Ablenkung in jedem Prisma:

$$\text{tg } e_1 = \frac{\sin P_1}{\cos P_1 - \mu_1} \quad ; \quad \text{tg } b_1 = \frac{\mu_1 \sin P_1}{1 - \mu_1 \cos P_1}$$

$$\text{tg } e_3 = \frac{\sin P_3}{\cos P_3 - \mu_3} \quad ; \quad \text{tg } b_3 = \frac{\mu_3 \sin P_3}{1 - \mu_3 \cos P_3}$$

.....

$$\text{tg } e_{2i+1} = \frac{\sin P_{2i+1}}{\cos P_{2i+1} - \mu_{2i+1}} \quad ; \quad \text{tg } b_{2i+1} = \frac{\mu_{2i+1} \sin P_{2i+1}}{1 - \mu_{2i+1} \cos P_{2i+1}}$$

Da nun: $e_2 = b_2$; $e_4 = b_4$; \dots $e_{2i} = b_{2i}$, so hat man:

$$\begin{aligned} \cos b_3 &= \frac{n_1}{n_3} \cos e_1 \\ \cos b_5 &= \frac{n_3}{n_5} \cos e_3 \\ &\dots \dots \dots \\ \cos b_{2i+1} &= \frac{n_{2i-1}}{n_{2i+1}} \cos e_{2i-1} \end{aligned}$$

Man erhält also zwischen $P_1, P_3 \dots P_{2i+1}$ die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{1 - \mu_3 \cos P_3}{\sqrt{1 + \mu_3^2 - 2\mu_3 \cos P_3}} &= \frac{n_1}{n_3} \cdot \frac{\cos P_1 - \mu_1}{\sqrt{1 + \mu_1^2 - 2\mu_1 \cos P_1}} \\ \frac{1 - \mu_5 \cos P_5}{\sqrt{1 + \mu_5^2 - 2\mu_5 \cos P_5}} &= \frac{n_3}{n_5} \cdot \frac{\cos P_3 - \mu_3}{\sqrt{1 + \mu_3^2 - 2\mu_3 \cos P_3}} \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{1 - \mu_{2i+1} \cos P_{2i+1}}{\sqrt{1 + \mu_{2i+1}^2 - 2\mu_{2i+1} \cos P_{2i+1}}} &= \frac{n_{2i-1}}{n_{2i+1}} \cdot \frac{\cos P_{2i-1} - \mu_{2i-1}}{\sqrt{1 + \mu_{2i-1}^2 - 2\mu_{2i-1} \cos P_{2i-1}}} \end{aligned}$$

wobei noch die Bedingungen

$$\begin{aligned} P_1 &= e_1 - b_1 \\ P_3 &= e_3 - b_3 \\ &\dots \dots \dots \\ P_{2i+1} &= e_{2i+1} - b_{2i+1} \end{aligned}$$

zu erfüllen sind.

Die allgemeine Lösung führt zu höchst verwickelten Gleichungen, deren Auflösung von keinem practischen

Nutzen wäre. Für die Fälle, die bei der Construction der Spectralapparate in Anwendung kommen, vereinfachen sich die Gleichungen ganz bedeutend dadurch, dass die Schichten, durch welche die Prismen von einander getrennt sind, aus demselben Medium bestehen, wodurch $\mu_1, \mu_3 \dots \mu_{2i+1}$ gleich eins werden. Nur für das erste und letzte Prisma wird die Formel zur Rechnung unbequem.

Nimmt man an, das $i+1$ Prisma in dem System von $2i+1$ Prismen habe den festen brechenden Winkel $P_{i+1} = \mathbf{P}$, so hat man zur Bestimmung der Winkel P_{i+3} und P_{i-1} die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \sin \frac{\mathbf{P}}{2} &= - \frac{n_{i-1}}{n_{i+1}} \cdot \sin \frac{P_{i-1}}{2} \\ \sin \frac{\mathbf{P}}{2} &= - \frac{n_{i+3}}{n_{i+1}} \cdot \sin \frac{P_{i+3}}{2} \end{aligned}$$

Für die äusseren Prismen, welche von den beiden Seiten von verschiedenen brechenden Medien begrenzt sind, findet man die brechenden Winkel P_1 und P_{2i+1} aus den Gleichungen:

$$\begin{aligned} \sin P_1 &= \sin e_1 \cos b_1 - \cos e_1 \sin b_1 \\ \sin P_{2i+1} &= \sin e_{2i+1} \cos b_{2i+1} - \cos e_{2i+1} \sin b_{2i+1} \end{aligned}$$

in denen die Relationen zwischen e_1 und b_1, e_{2i+1} und b_{2i+1} durch die Gleichung IX gegeben sind. Führt man die Werthe von $e_1, b_1, e_{2i+1}, b_{2i+1}$ in diese Gleichungen ein, so erhält man die Abhängigkeit des Winkels P_1 von dem Winkel \mathbf{P} aus:

$$\sin P_1 = \frac{1}{n_1^2} \cdot \sqrt{n_1^2 - n_{i+1}^2} \sin^2 \frac{P}{2}$$

X. $\cdot \left\{ \sqrt{n_1^2 - \mu_1^2 (n_1^2 - n_{i+1}^2 \sin^2 \frac{P}{2})} - \mu_1 n_{i+1} \sin \frac{P}{2} \right\}$

Der Winkel P_{2i+1} ergibt sich aus einer ähnlichen Gleichung, in welcher nur n_1, μ_1, P_1 mit $n_{2i+1}, \mu_{2i+1}, P_{2i+1}$ vertauscht ist.

Den Zusammenhang zwischen der ersten Einfalleneigung und der letzten Brechungseigung giebt die Gleichung:

$$\sin e_0 = \frac{n_{2i+1}}{n_0} \cdot \mu_1 \cdot \mu_{2i+1} \cdot \sin b_{2i+1}$$

aus der die Ablenkung des Strahles leicht zu berechnen ist.

Die Prismensysteme, welche in Spectralapparaten von dieser Construction in Anwendung kommen, bestehen meistens aus einer ungeraden Anzahl Prismen von zwei verschiedenen brechenden Glasarten und zwar sind dieselben so geordnet, dass das 1, 3, $2i+1$ Prisma aus der einen Glasart (Crown Glas), das 2, 4, $2i$ Prisma aus der zweiten Glasart (Flintglas) besteht.

In diesem Falle muss, wie leicht aus der Gleichung X zu erschen

$$\begin{aligned} P_1 &= P_{2i+1} \\ P_3 &= P_5 = \dots P_{2i-1} \\ P_2 &= P_4 = \dots P_{2i} \end{aligned}$$

sein.

Bezeichnet man den Brechungscoefficienten der Prismen vom brechenden Winkel $P_1, P_3 \dots P_{2i+1}$ mit n_1 , diejenigen der Prismen mit dem Winkel $P_2, P_4, \dots P_{2i}$ mit n_2 und den Brechungscoefficienten der die Prismen verbindenden parallelen Schicht, meist Canadabalsam, mit

n_c , so hat man zwischen den Winkeln (P), wenn wiederum der Brechungscoefficient des umgebenden Mittels

$$n_0 = n_{2i+1} = 1$$

gesetzt wird, die Gleichungen:

$$\sin \frac{P_3}{2} = - \frac{n_2}{n_1} \sin \frac{P_2}{2}$$

und

$$\sin P_1 = \cos \frac{P_3}{2} \left\{ \sqrt{1 - \mu_c^2 \cos^2 \frac{P_3}{2}} - \mu_c \sin \frac{P_3}{2} \right\} \quad \text{Xa}$$

wobei:

$$\mu_c = \sqrt{\frac{1 - n_1^2}{n_c^2 - n_1^2}}$$

Die erste Einfalleneigung e_0 wird bei dieser Anordnung der Prismen gleich $180^\circ - b_{2i+2}$ und die Ablenkung des Strahles durch das Prismensystem von seiner ursprünglichen Richtung:

$$A = (180^\circ - 2e_0) = \sum_1^{2i+1} P$$

In den betrachteten Fällen war die Bedingung gestellt, dass jedes einzelne Prisma ein Minimum der Ablenkung des Lichtstrahls hervorrufe. Höchst verwickelt gestalten sich die Gleichungen, welche die Relationen zwischen Einfalleneigung und den brechenden Winkeln enthalten, wenn man verlangt ein Prismensystem, aus $2i+1$ Prismen bestehend, deren brechende Winkel eine bestimmte Grösse haben, werde von einem Strahl unter dem Minimum der Ablenkung getroffen. Nur für einzelne Fälle ist die Auflösung der Gleichungen alsdann möglich, so z. B. wenn die Prismen alle aus derselben Glasart bestehen und durch parallele Schichten von einander getrennt sind. Für diesen Fall erkennt man leicht aus den Gleichungen VIII, dass:

$$b_1 = 90^\circ - \sum_1^{2i+1} \frac{P}{2}$$

$$e_{2i} = 90^\circ + \sum_1^{2i+1} \frac{P}{2}.$$

Bei den bisherigen Untersuchungen ist keine Rücksicht darauf genommen worden, in wie fern die Möglichkeit einer Brechung von der Grösse der Einfalleneigung und dem Verhältniss der Brechungscoefficienten zu einander abhängig ist.

Aus den Gleichungen IV ist nun leicht zu ersehen, dass eine Brechung des Lichtstrahls aus einem Medium vom Brechungscoefficienten n_i in ein anderes vom Brechungscoefficienten n_{i+1} unmöglich wird, sobald

$$\frac{n_i}{n_{i+1}} \cos e_i = \cos b_{i+1}$$

grösser als eins wird.

Ist $n_i < n_{i+1}$, so kann der Lichtstrahl bei jeder Neigung gegen die Grenzebene, in das zweite Mittel gebrochen werden; ist $n_i > n_{i+1}$, so erhält die Einfalleneigung einen Grenzwert:

$$e_g = \arccos \left(\pm \frac{n_{i+1}}{n_i} \right).$$

Erreicht die Einfalleneigung diesen Grenzwert oder wird kleiner als dieser Werth, so ist eine Brechung nicht möglich und es tritt totale Reflexion ein.

Anmerkung. In den Lehrbüchern der Physik wird dieser Werth von e_g als der Grenzwinkel bezeichnet, bei welchem ein Lichtstrahl aus einem dichteren in ein optisch dünneres Mittel noch gebrochen werden kann. Genau genommen müsste dieser Werth als der Grenzwert der Einfalleneigung betrachtet werden, für

welche totale Reflexion noch möglich ist; denn betrachtet man die Fresnelschen Intensitätsformeln, so erkennt man sogleich, dass für diesen Grenzwert der Einfalleneigung die Intensität des gebrochenen Lichtes Null, die Intensität des reflectirten Lichtes aber Eins wird. Die Einfalleneigung kann sich, falls noch Brechung eintreten soll, diesem Grenzwert wohl unendlich nähern, ihn aber nicht erreichen.

Soll ein Lichtstrahl ein Prisma, das von einem gleichbrechenden Medium begrenzt ist, ohne vorhergehende Reflexion im Innern desselben, durchdringen, so erhält man den Grenzwinkel desselben P_g , bei welchem eine derartige Brechung noch möglich ist, aus der Gleichung:

$$\frac{\sin P_g}{n_{i+1}} \cdot \sqrt{n_i^2 - n_{i+1}^2} = \cos P_g - 1$$

welche sich leicht aus der Bedingung ergibt, dass für eine Einfalleneigung von 0° oder 180° die zweite Einfalleneigung den Grenzwert e_g erhalte, für den eine Brechung nicht mehr möglich ist. n_i bezeichnet hierin den Brechungscoefficienten des Prisma's, n_{i+1} den des umgebenden Mittels.

Nimmt man den brechenden Winkel des Prisma's positiv an, so ergibt sich aus dieser Gleichung durch eine leichte Umformung:

$$P_g = 2 \arcsin \left(\frac{n_{i+1}}{n_i} \right)$$

In der Gleichung Xa müssen also noch folgende Bedingungen erfüllt sein, damit P_1 einen reellen Werth erhält. Es muss, damit ein Minimum der Ablenkung überhaupt noch möglich ist,

$$n_1 > n_c < n_2$$

da sonst μ_c imaginär wird und:

$$\sin \frac{P_1}{2} < \frac{n_c}{n_2}.$$

Folgende Tabelle enthält für einige Werthe von n die Grenzwerte der Einfallsneigung und des brechenden Winkels.

n	e_g	P_g
1.50	48° 11'	83° 38'
1.55	49 49	80 22
1.60	51 19	77 22
1.65	52 42	74 36
1.70	53 58	72 4
1.75	55 9	69 42
1.80	56 15	67 30

Für die Beobachtung mit dem Spectroscope ist es häufig äusserst unbequem, dass der Lichtstrahl durch das Prismensystem von seiner ursprünglichen Richtung abgelenkt wird und dadurch das entstehende Spectrum nicht am Orte des leuchtenden Objectes gesehen wird. Man kann jedoch diesem Uebelstande leicht dadurch abhelfen, dass man den austretenden, abgelenkten Strahl durch Reflexion oder neue Brechung, wobei zu berücksichtigen ist, dass die Zerstreung nicht aufgehoben werden darf, seiner ursprünglichen Einfallsrichtung parallel macht. Am einfachsten geschieht dies durch Reflexion von einem ebenen Spiegel, der so gestellt ist, dass ihn der austretende Strahl unter dem halben Ablenkungswinkel trifft, doch zieht man all-

gemein die Reflexion durch ein Prisma vor, da der Lichtverlust alsdann geringer ist. Am häufigsten verbindet man zwei Prismen von verschieden stark brechender Glasmasse, so dass die Ablenkung für einen Strahl mittlerer Brechbarkeit Null wird, die Zerstreung sich aber nur zum Theil aufhebt.

Für den Fall, dass die Reflexion durch ein Prisma hervorgebracht werden soll, findet man die Einfallsneigung, unter welchem der durch das Prismensystem gebrochene Strahl das Reflexionsprisma treffen muss, damit die Ablenkung Null wird, aus der Bedingung:

$$b_{2r} - e_r - P_r = -A,$$

wo e_r die erste Einfallsneigung, b_{2r} die zweite Brechungsneigung und P_r den brechenden Winkel des Reflexionsprisma's bedeutet.

Wendet man ein gleichschenkliges Prisma an, so wird:

$$e_r = -\frac{A}{2} + 90^\circ - \frac{P_r}{2}.$$

Soll der Lichtstrahl, um Lichtverlust zu vermeiden, das Reflexionsprisma senkrecht treffen, so muss der brechende Winkel P_r gleich der Ablenkung A des Strahles durch das Prismensystem sein; totale Reflexion erhält man dann aber nur, so lange:

$$\cos \frac{A}{2} < \frac{1}{n_r}.$$

Für ein rechtwinkliges Prisma, dessen Hypotenusenfläche den Strahl zurückwerfen soll, findet man die Einfallsneigung:

$$e_r = 45^\circ + \frac{A}{2}.$$

Statt durch Reflexion an einem Spiegel oder in einem zweiten Prisma, kann man den austretenden Strahl dem eintretenden parallel machen durch zweimalige Reflexion im Innern des Prisma's. Ist der brechende Winkel P_b eines Prisma's bestimmt, so kommt es darauf an, die Einfalleneigung und einen zweiten Winkel P_r des Prisma's so zu bestimmen, dass der Lichtstrahl nach einer Reflexion von der zweiten Fläche unter einem ganz bestimmten Winkel von der dritten Prismenfläche reflectirt wird.

Bezeichnet e_0 und b_1 die erste, e_1 und b_2 die letzte Einfalleneigung und sei P_r der Winkel, der von den beiden reflectirenden Flächen des Prisma's gebildet wird, so hat man, wie leicht zu erkennen, zwischen den Winkeln folgende Relation

$$b_1 - e_1 = 2P_r - P_b$$

und ferner, da die Ablenkung des Strahles Null werden soll:

$$b_2 - e_0 = P_b,$$

woraus man dann den Winkel P_r berechnen kann.

Schreibt man die erste Bedingung in der Form:

$$\cos(2P_r - P_b) = \frac{1}{n^2} \left\{ \cos e_0 \cdot \cos b_2 + \sqrt{(n^2 - \cos^2 e_0)(n^2 - \cos^2 b_2)} \right\}$$

und stellt die Bedingung, dass der Lichtstrahl das Prisma unter der Einfalleneigung $90^\circ - \frac{P_b}{2}$ treffe, so ist $b_2 = 90^\circ + \frac{P_b}{2}$ und es wird

$$\cos(2P_r - P_b) = 1 - \frac{2 \sin^2 \frac{P_b}{2}}{n^2}.$$

Soll das Prisma rechtwinklig sein, so wird:

$$\sin 2P_r = \frac{\sin 2e_0}{2n^2} + \sqrt{\frac{n^2 - 1}{n^2} + \left(\frac{\sin 2e_0}{2n^2}\right)^2}$$

und für die Einfalleneigung 45°

$$\sin 2P_r = \frac{n^2 - 1}{n^2}.$$

Ebenso wie für ein einzelnes Prisma kann man auch für mehrere combinirte Prismen auf diese Art die Ablenkung Null machen, nur muss man in dem Falle

$$b_2 - e_0 - P_b = -A$$

der Ablenkung durch die vorhergehenden Prismen gleich, aber mit entgegengesetzten Zeichen setzen ¹⁾.

Soll der durch ein Prismensystem abgelenkte Lichtstrahl durch neue Brechung seiner ursprünglichen Richtung parallel gemacht werden, so hat man den brechenden Winkel des Prisma's oder Prismensystems, durch welches die Ablenkung aufgehoben werden soll, aus der Bedingung:

$$b'_{i+1} - e'_0 - \Sigma P' = -A$$

zu bestimmen, wo (e') , (b') , (P') die Einfalleneigung, Brechungeneigung und den brechenden Winkel des zweiten Prismensystems bezeichnen.

Am Einfachsten wird diese Bedingung erfüllt durch Anwendung eines ganz gleichen Prismensystems, dessen brechender Winkel auf der entgegengesetzten Seite des Einfallslotes liegen; für die Construction von Spectroscopen à vision direct lässt sich dieses Mittel jedoch nicht

1) Solche Prismen à vision directe sind in dem Herschel'schen Sternschnuppenspectroscop angewandt.

anwenden, da die Strahlen verschiedener Brechbarkeit in diesem Falle einander parallel aus den Prismensystemen austreten würden, in Folge dessen also auch keine Farbenzerlegung stattfinden würde. Man kann jedoch Prismen aus verschiedener Glasmasse derart combiniren, dass für einen Strahl bestimmter Wellenlänge die Ablenkung Null wird, die Farbenzerstreuung aber nur zum Theil aufgehoben wird, wie für einige wichtigere Fälle in Folgendem gezeigt werden soll.

Es sei die Bedingung gestellt ein Prismensystem das aus $i + 1$ Glasprismen, in Batteriestellung von derselben Glasart und gleichen brechenden Winkeln bestehe, werde von einem Lichtstrahl so getroffen, dass jedes einzelne Prisma ein Minimum der Ablenkung hervorbringe, die schliessliche Ablenkung aber Null wird, so besteht zwischen den brechenden Winkeln der Glasprismen P und den Winkeln der Luftprismen P' , durch welche sie getrennt sind, die Relation:

$$\sin \frac{P'}{2} = n_1 \sin \frac{P}{2}$$

und die Ablenkung des Strahles wird

$$A = 180^\circ - 2e_0 - \Sigma P.$$

Es ist aber die schliessliche Ablenkung gleich der Summe der Ablenkungen, die jedes einzelne Glasprisma hervorbringt und da diese einander gleich angenommen wurden:

$$A = (i + 1) \alpha = (i + 1) (180^\circ - 2e_0 - P).$$

Setzt man nun $A = 360^\circ$ ($A = 0$ ist in diesem Falle unmöglich, da alle brechenden Winkel auf derselben Seite des Einfallslotthes angenommen sind), so hat man zur Bestimmung von P die Gleichung:

$$\left(\frac{i-1}{i+1}\right) 90^\circ - \frac{P}{2} = e_0$$

oder, wenn man setzt

$$\varphi = \left(\frac{i-1}{i+1}\right) \cdot 90^\circ,$$

da fürs Minimum der Ablenkung $\cos e_0 = n_1 \sin \frac{P}{2}$,

$$\cos \left(\varphi - \frac{P}{2}\right) = n_1 \sin \frac{P}{2}$$

woraus man leicht erhält:

$$\operatorname{cotg} \frac{P}{2} = \frac{n_1 \sin \varphi}{\cos \varphi}.$$

Zur Construction der Spectroscopie à vision directe wendet man gewöhnlich eine Combination von einer ungeraden Anzahl Glasprismen an, von denen das 1, 3 ... $2i+1$ Prisma aus Crown Glas, das 2, 4 ... $2i$ Prisma aus Flintglas besteht und zwar sind die Prismen bis auf das erste und das letzte gleichschenkelig. Diese äusseren Prismen sind aber einander gleich und durch Aenderung ihres brechenden Winkels kann die Ablenkung des Lichtstrahls Null gemacht werden. Soll der Lichtstrahl aus dem Prismensystem dabei parallel der Axe des Spectroscopes austreten, so muss er das mittlere Prisma ebenfalls parallel der Axe durchdringen, da das Prismensystem nach beiden Seiten symmetrisch ist. Hieraus erkennt man leicht, dass alsdann $b_{2i+1} = 180^\circ - e_0$ und die Ablenkung

$$A = 180^\circ - 2e_0 - \Sigma P.$$

Nennt man nun den brechenden Winkel des ersten Prismas P_1 , den des zweiten P_2 , und n_1 und n_2 die Brechungscoefficienten der Crown Glas- und Flintglasprismen, so wird, wenn $A = 0$ gesetzt wird:

$$P_1 - \frac{P_2}{2} = 90^\circ - e_0$$

oder:

$$\sin\left(P_1 - \frac{P_2}{2}\right) = n_1 \cos b_1 = n_1 \cos(e_1 - P_1)$$

Hieraus erhält man:

$$\operatorname{tg} P_1 = \frac{\sin \frac{P_2}{2} + n_1 \cos e_1}{\cos \frac{P_2}{2} - n_1 \sin e_1}$$

Für das mittlere Prisma von den $2i+1$ Prismen wird:

$$\cos b_{i+1} = \sin \frac{P_2}{2},$$

woraus man den Winkel e_1 berechnen kann.

Stellt man die Bedingung, jedes einzelne Prisma des Prismensystems werde unter dem Minimum der Ablenkung vom Lichtstrahl getroffen und es soll dabei die schliessliche Ablenkung gleich Null werden, so können die angewandten Prismen nicht gleichschenkelig sein und die Lösung der Aufgabe ist nur möglich, wenn jeder einzelne brechende Winkel des Prisma's eine bestimmte von den Brechungscoefficienten der angewandten Glasart abhängige Grösse hat. Die Gleichungen, aus denen die brechenden Winkel der Prismen hergeleitet werden müssen, sind dann:

$$90^\circ - e_0 = P_1 + i \frac{P_2}{2} + (i-1) \frac{P_3}{2}$$

wobei

$$\sin \frac{P_2}{2} = -\frac{n_1}{n_2} \sin \frac{P_3}{2}$$

$$\sin P_1 = \cos \frac{P_3}{2} \left\{ \sqrt{1 - \mu_c \cos \frac{P_3}{2}} + \mu_c \sin \frac{P_3}{2} \right\}$$

Die allgemeine Lösung ist nicht möglich, da die Schlussgleichung transcendent wird. Einfacher gestaltet sich die Bedingungsgleichung, wenn man den Brechungscoefficienten

der die Prismen verbindenden Schicht gleich eins setzt, denn alsdann hat man P_1 und P_3 zu bestimmen aus:

$$n_1 \sin \frac{P_1}{2} = \sin \left\{ i \frac{P_2}{2} + (i+1) \operatorname{arc.} \sin \left(-\frac{n_2}{n_1} \right) \sin \frac{P_2}{2} \right\}$$

Betrachtet man z. B. drei Prismen, so ist

$$n_1 \sin \frac{P_1}{2} = \sin \left(P_1 + \frac{P_2}{2} \right) = \sin P_1 \cos \frac{P_2}{2} - \frac{n_1}{n_2} \cos P_1 \sin \frac{P_2}{2}$$

oder

$$n_1 + \frac{n_1}{n_2} \cos P_1 = 2 \cos \frac{P_1}{2} \cos \frac{P_2}{2}.$$

Hieraus erhält man die leicht zu entwickelnde Gleichung:

$$\cos \frac{P_1}{2} = \frac{n_1 (n_2 - 1)}{2 \sqrt{n_2 (n_2 - n_1^2)}},$$

ein Ausdruck, der nur dann reell wird, wenn $n_2 > n_1^2$.

Will man die Ablenkung des Strahles nur angenähert kennen, so kann man für einen bestimmten Prismenwinkel die Brechungsneigungen und Ablenkung ganz leicht durch folgende sehr elegante von Radau¹⁾ vorgeschlagene Construction erhalten.

Man beschreibe zwei concentrische Kreise (Fig. 1) mit den Radien 1 und n , und mache einen Centriwinkel gleich dem brechenden Winkel P , oder was dasselbe ist, man schneide auf dem zum Radius n zugehörigen Kreise einen Bogen gleich P ab: Zieht man durch die Endpunkte dieses Bogens zwei Parallele, welche den kleinern Kreis treffen, so schneiden diese auf dem letzteren einen Bogen gleich $P + A$ aus. Zieht man einen Radius parallel zu

1) Radau, Ph. Carl. Rep. Bd. IV. pg. 184.

Es sind hier P der Prismenwinkel, A die Ablenkung, ϵ und β der Einfallswinkel und Brechungswinkel, gezählt vom Einfallslot. Für die Bezeichnung durch Einfallswinkel und Brechungswinkel ist die Construction etwas zu verändern.

den beiden Linien, so theilt derselbe den äussern Bogen P in zwei Theile, welche die Brechungswinkel β_1 und ε_1 vorstellen, und den inneren Bogen $A + P$ in zwei Theile, welche die Winkel ε_0 und β_2 vorstellen. Sind die Parallelen symmetrisch zum Mittelpunkte, so ist A ein Minimum.

Practisch lässt sich die Methode folgendermassen verwenden.

Auf einer Platte aus Metall sind mehrere concentrische Kreise gezogen, deren Radien den Brechungscoefficienten $n_0, n_1 \dots n_{i+1}$ entsprechen und von denen der äusserste Kreis mit einer genauen Theilung versehen ist, welche bis zum innersten Kreise reicht. (Fig. 2). Auf der Platte ist ein kleines Lineal L verschiebbar so angebracht, dass es stets senkrecht auf dem Radius bleibt, der durch den Mittelpunkt der Theilung geht; zur Controlle kann die Ablesung auf der anderen Seite des Radius dienen.

Will man nun für einen bestimmten brechenden Winkel des Prisma's die Brechungsneigungen und die Ablenkungen wissen, die einer gewissen Einfallsneigung entsprechen, so liest man auf dem Kreise, welcher dem Brechungscoefficienten n_0 entspricht, die Einfallsneigung e_0 ab und verschiebt das kleine Lineal bis zu diesem Theilstrich; dann schneidet die Linie $E_0 B_1$ auf dem Kreise n_1 den Bogen b_1 ab, oder die erste Brechungsneigung. Zählt man von hieraus den Bogen P_1 ab und verschiebt das Lineal bis zu dem Theilungsstriche, welcher dem Bogen $b_1 + P_1 = e_1$ entspricht, so schneidet wieder die Linie $E_1 B_2$ auf dem Kreise n_0 den Bogen b_2 ab und die Ablenkung erhält man dann aus $A = b_2 - e_0 - P_1$. Um die Einfallsneigung zu bestimmen, die dem Minimum der Ablen-

kung entspricht, hat man auf dem Kreise n_1 den Winkel $90^\circ - \frac{P_2}{2}$ abzulesen, und dann das Lineal bis zu diesem Theilstrich zu verschieben; der Bogen auf dem Kreise n_0 ist dann die Einfallsneigung für das Minimum der Ablenkung. Den Grenzwinkel des Prismas, der eine directe Brechung des Lichtstrahls noch zulässt, erhält man durch die Tangente an den Kreis n_0 .

Ebenso kann man auch die brechenden Winkel der äusseren Prismen bestimmen, welche die Ablenkung eines Lichtstrahls durch ein Prismensystem aufheben, und, wenn die concentrischen Kreise den Brechungscoefficienten der verschiedenfarbigen Strahlen entsprechen, die Zerstreuung, die ein Prismensystem hervorbringt.

Ueber die Dispersion des Lichtes.

Die Formeln des vorigen Abschnittes waren unter der Voraussetzung hergeleitet, dass der einfallende Lichtstrahl homogen sei, d. h. nur Licht von einer bestimmten Wellenlänge λ enthalte. Dieser Wellenlänge λ entsprechen in den einzelnen brechenden Medien die Brechungscoefficienten n_1, n_2, \dots, n_i und der Einfallsneigung e_0 die bestimmte Brechungsneigung b_{i+1} . Ist nun der einfallende Strahl nicht homogen, sondern besteht er aus parallelen Strahlen von verschiedener Wellenlänge, so entspricht jeder einzelnen Wellenlänge in den brechenden Medien ein besonderer Brechungscoefficient und die aus dem Prismensystem tretenden Strahlen werden im Allgemeinen nicht mehr einander parallel sein, sondern unter

verschiedenen Brechungsneigungen das Prismensystem verlassen. Dadurch werden die einzelnen Farben, die den Wellenlängen entsprechen, von einander getrennt und bilden durch ihre Nebeneinanderlagerung das sogenannte Spectrum. Der Winkel, welchen die Strahlen zweier bestimmter Wellenlängen beim Austreten aus dem Prismensystem mit einander bilden, das ist die Differenz ihrer Ablenkungen von der Richtung des einfallenden Strahles, kann als Mass für die Grösse der Dispersion dienen, die durch das bestimmte Prismensystem, bei einer bestimmten Einfalleneigung, für diese beiden Strahlen hervorgebracht wird.

In den meisten Lehrbüchern der Physik wird als Mass für die Dispersion des Lichtes durch ein Prisma die Differenz der Brechungscoefficienten der betreffenden Strahlen angenommen; ich nenne diese Differenz der Brechungscoefficienten, die eine besondere Eigenschaft des betreffenden brechenden Mediums ist, den Dispersionscoefficienten des Mediums für diese Strahlen, während die hervorgebrachte Dispersion, die ausser von dem Dispersionscoefficienten, von dem brechenden Winkel des Prismas und der ersten Einfalleneigung abhängig ist, durch die Differenz der Ablenkungen der beiden Strahlen gemessen werden soll. In den folgenden Formeln bezeichne ich den Dispersionscoefficienten mit Δn und die hervorgebrachte Dispersion durch D , wobei durch hinzugefügte Indices angezeigt werden soll, welche Strahlen die Dispersion begrenzen. So bedeutet z. B. D_{λ}^g die Grösse der Dispersion des Lichtes zwischen den Strahlen G und C des Sonnenspectrum's.

Angenommen, der einfallende Strahl enthalte nur Licht von der Wellenlänge λ und der nur wenig davon verschiedenen $\lambda + d\lambda$, so werden für die kleine Aenderung der Wellenlänge $d\lambda$, die Dispersionscoefficienten der brechenden Medien, $\Delta n_1, \Delta n_2, \dots \Delta n_i$ ebenfalls nur sehr klein sein, so dass man sie als Differentiale betrachten kann. Sind nun die beiden Strahlen parallel und wird die Einfalleneigung constant angenommen, so erhält man für die Dispersion der beiden Strahlen aus der Formel VI

$$D_{\lambda}^{\lambda + d\lambda} = db_{i+1} = \frac{\nu_1! \sin P_1}{\sin e_1 \sin b_1} dn_1 + \frac{\nu_2! \sin P_2}{\sin e_1 \sin b_2} dn_2 + \dots + \frac{\nu_i \sin P_i}{\sin e_i \sin b_i}.$$

Um nun den Einfluss einer Aenderung der Einfalleneigung oder der brechenden Winkel auf die Grösse der Dispersion kennen zu lernen, hat man obigen Ausdruck nach e_0 und (P) zu differenziren, da aber die Ausdrücke dann schwer zu übersehen sind, so beschränke ich mich hier auf die Betrachtung eines einzelnen Prisma's, das von Luft umgeben sei.

Für ein einzelnes Prisma wird

$$D_{\lambda}^{\lambda + d\lambda} = \frac{\sin P_1}{\sin b_1 \sin b_2} dn_1$$

ein Ausdruck der Null werden kann nur wenn $dn_1 = 0$ oder $P_1 = 0$. Den grössten Werth erhält er, wenn b_2 sich 0° oder 180° nähert, also bei streifendem Austritt, wobei jedoch D nie unendlich gross werden kann, wie Mousson irrthümlich behauptet, sondern seinen bestimmten Grenzwert erhält.

Differenzirt man nun D nach e_0 und P_1 so erhält man:

$$\frac{dD}{de_0} = -\frac{\nu_0}{n_1} \cdot D \cdot \{n_1^2 \nu_1^2 \cotg e_1 + \cotg b_1\}$$

$$\frac{dD}{dP_1} = -D \{n_1^2 \nu_1^2 \cotg e_1 - \cotg P_1\}.$$

Da nun ν_0 nie gleich Null werden kann, so erhält man einen Grenzwert von D , sobald bei constantem P_1

$$n_1^2 \nu_1^2 \cotg e_1 = -\cotg b_1$$

oder bei constanter Einfallsneigung:

$$n_1^2 \nu_1^2 \cotg e_1 = \cotg P_1.$$

Führt man in diese beiden Ausdrücke für e_1 seinen Werth $b_1 + P_1$ ein, so erhält man zwei Gleichungen zwischen b_1 und P_1 welche, die erste in Bezug auf $\text{tg } b_1$, die zweite für $\text{tg } P_1$ vom dritten Grade sind. Will man nun für einen bestimmten brechenden Winkel P_1 die Einfallsneigung e_0 kennen lernen, welche ein Minimum¹⁾ der Dispersion hervorbringt, so verfährt man daher besser, wenn man für verschiedene Einfallsneigungen die brechenden Winkel der Prismen berechnet, für welche diese angenommenen Einfallsneigungen ein Minimum der Dispersion hervorbringen und dann durch Interpolation für den bestimmten brechenden Winkel P_1 die zugehörige Einfallsneigung e_0 bestimmt.

Es lassen sich nämlich obige zwei Ausdrücke nach geeigneter Umformung auf folgende merkwürdige Form bringen:

1) Die Prüfung des zweiten Differentienquotienten ergibt, dass der Grenzwert ein Minimum.

$$\text{tg } e_1 \cdot \text{tg}(e_1 + b_1) = n_1^2 - 1 \quad \text{für } P \text{ constant}$$

$$\text{und} \quad \text{tg } e_1 \text{ tg } b_1 = n_1^2 - 1 \quad \text{„ } e_0 \quad \text{„}$$

Durch Betrachtung dieser Formeln erkennt man nun leicht, dass für eine constante Einfallsneigung durch Aenderung des brechenden Winkels kein Grenzwert der Dispersion erhalten werden kann, indem keine Brechung mehr möglich ist, sobald obige Bedingung erfüllt wird. Es muss nämlich für den Grenzwert der Einfallsneigung, wenn eine Brechung noch möglich sein soll, $\text{tg } e_1 > \sqrt{n_1^2 - 1}$ sein. Da nun $\text{tg } b_1$ um so kleiner werden muss, je grösser $\text{tg } e_1$ wird und die Brechung ebenfalls nur so lange stattfinden kann, so lange $\text{tg } b_1 > \sqrt{n_1^2 - 1}$, so erkennt man, dass die Erfüllung der Bedingung $\text{tg } e_1 \text{ tg } b_1 = n_1^2 - 1$ nicht in Einklang zu bringen ist mit der Bedingung für die Möglichkeit einer Brechung. Für einen bestimmten brechenden Winkel P dagegen kann durch Aenderung der Einfallsneigung wohl ein Grenzwert der Dispersion erlangt werden, jedoch ist ein solcher Grenzwert nur so lange möglich, als P_1 eine gewisse Grösse nicht überschritten. Mit dem Minimum der Ablenkung kann aber das Minimum der Dispersion nur dann zusammenfallen, wenn $P_1 = 0$. Ferner erkennt man, dass für eine Aenderung des Brechungscoefficienten auch die Einfallsneigung geändert werden muss, mithin die verschiedenen Farben nicht gleichzeitig im Minimum der Dispersion sind.

Folgende Tabelle enthält für einige Werthe des brechenden Winkels P die zugehörigen Einfallsneigungen, welche ein Minimum der Dispersion hervorbringen, und

zwar sind dieselben berechnet für Flintglas von Guynand mit den Brechungscoefficienten

$$\begin{aligned} n_1 &= 1,769702 \text{ für die Fraunhofersche Linie } B \\ n_1 &= 1,785254 \text{ „ „ „ } E \\ n_1 &= 1,818597 \text{ „ „ „ } H. \end{aligned}$$

Die zweite Tabelle giebt die entsprechenden Einfallsneigungen für ein Minimum der Ablenkung derselben Strahlen.

Minimum der Dispersion bei: Minimum der Ablenkung bei:

P	B	E	H
	e_0	e_0	e_0
0°	90° 0'.0	90° 0'.0	90° 0'.0
5°	83 16.9	83 11.6	83 0.2
10°	76 30.4	76 19.7	75 56.7
15°	69 36.0	69 19.3	68 43.5
20°	62 28.5	62 5.3	61 15.1
25°	55 0.2	54 29.7	53 22.5
30°	46 59.8	46 18.8	44 49.3
35°	38 3.5	37 7.9	35 4.0
40°	27 16.0	25 50.4	22 31.2

P	B	E	H
	e_0	e_0	e_0
0°	90° 0'.0	90° 0'.0	90° 0'.0
5°	85 34.6	85 32.0	85 27.0
10°	81 7.6	87 2.9	80 52.8
15°	76 38.8	76 31.5	76 16.1
20°	72 6.2	71 56.4	71 35.4
25°	67 28.7	67 16.2	66 49.2
30°	62 44.3	62 28.8	61 55.3
35°	57 50.9	57 31.9	56 50.9
40°	52 45.2	52 22.1	51 32.2

Ein Minimum der Dispersion ist nicht mehr zu erlangen, sobald

$$\operatorname{tg} e_1 = -\frac{n_1^2}{2} \sqrt{n_1^2 - 1} \left\{ 1 \pm \sqrt{1 + \frac{4}{n_1^2}} \right\}$$

ein Ausdruck den man erhält, wenn man in die Formel für das Minimum der Dispersion für $\operatorname{tg} b_1$ seinen Grenzwert $\sqrt{n_1^2 - 1}$ einsetzt. Für das Flintglas, für welches

obige Tabellen berechnet sind, ist z. B. der Grenzwert von P , für welchen ein Minimum der Dispersion der violetten Strahlen erhalten werden kann, $P = 43^\circ 45' 39''$. Wird der brechende Winkel grösser als dieser Grenzwert, so entspricht die kleinste Dispersion der streifenden Incidenz.

Der Umstand, dass bei einem bestimmten brechenden Winkel des Prismas durch Aenderung der Einfallsneigung ein Minimum der Dispersion erlangt werden kann, scheint mir folgende wichtige Schlüsse zu gestatten. Wenn bei einer bestimmten Einfallsneigung e_0 die Dispersion ihr Minimum erreicht, so wird dieselbe Dispersion, welche einer Einfallsneigung kleiner als e_0 entspricht, auch hervorgebracht werden können durch eine Einfallsneigung grösser als e_0 . Da aber diesen beiden Einfallsneigungen verschiedene Ablenkungen entsprechen, so wird es möglich sein aus zwei Prismen von derselben Substanz und gleichem brechenden Winkel, wenn man sie passend durch ein Luftprisma trennt, ein achromatisches Prisma zusammenzusetzen, welches den Strahl von seiner ursprünglichen Richtung ablenkt und die Farbenzerstreuung vollständiger aufhebt, als es durch achromatische Prismen von verschiedener Glasart möglich wäre.

Ferner kann man aus dem Umstande, dass das Minimum der Dispersion nicht für alle Farben zugleich eintritt, schliessen, dass die Annahme, die relative Lage der Linien im Spectrum ändere sich bei einer Aenderung der Einfallsneigung für alle Linien in demselben Verhältnisse, falsch sei. Wenn nämlich für die grünen Strahlen das Minimum der Dispersion eintritt, fängt die Dispersion

der rothen Strahlen schon an grösser zu werden, während die Dispersion der violetten Strahlen noch abnimmt. Um eine Uebersicht über die Aenderung der Dispersion bei veränderter Einfallsneigung zu erhalten, ist in folgender Tabelle die Grösse der Dispersion, wie sie bei verschiedenem brechenden Winkel den verschiedenen Einfallsneigungen entspricht, zusammengestellt. Die Reihen auf der folgenden Seite enthalten die Grösse des Minimums der Dispersion, berechnet für die Strahlen in der Nähe der Linie *E*, und des Maximums, d. h. die Grösse der Dispersion, welche dem streifenden Austritt des Strahles *H* entspricht.

$P =$	10°	20°	30°	40°
$e_0 =$	D_b^h	D_b^h	D_b^h	D_b^h
0°	0° 51' 9"	1° 16' 38"	1° 42' 0"	2° 12' 37"
10°	0 49 32	1 15 30	1 41 5	2 12 12
20°	0 45 36	1 12 21	1 38 47	2 11 28
30°	0 40 55	1 8 19	1 36 2	2 11 33
40°	0 36 39	1 4 28	1 33 41	2 14 17
50°	0 33 17	1 1 37	1 33 48	2 22 39
60°	0 30 57	1 0 16	1 36 50	2 43 17
70°	0 29 45	1 1 2	1 45 32	3 46 41
80°	0 29 32	1 4 36	2 6 6	
90°	0 30 43	1 12 49	3 10 31	
100°	0 33 26	1 31 13		
110°	0 38 48	2 33 9		
120°	0 49 46			
130°	1 21 42			

Minimum der Dispersion:

$P =$	10°	20°	30°	40°
$e_0 =$	76° 19' 42"	62° 5' 15"	46° 18' 47"	25° 50' 21"
D_b^h	0° 29' 31"	1° 0' 16"	1° 33' 33"	2° 11' 20"

Maximum der Dispersion:

$P =$	10°	20°	30°	40°
$e_0 =$	136° 8' 25"	114° 50' 43"	96° 6' 56"	77° 53' 10"
D_b^h	7° 48' 29"	10° 38' 38"	12° 42' 28"	14° 21' 35"

Man ersieht nun aus der ersten Tabelle, dass es möglich ist aus zwei ganz gleichen Prismen ein achromatisches Prisma zusammenzusetzen. Trennt man z. B. zwei Prismen vom brechenden Winkel $P = 30^\circ$ durch ein Luftprisma so, dass ein Strahl der das erste Prisma unter 30° trifft, das zweite Prisma unter einer Einfallsneigung von 60° durchdringt, so wird die hervorgebrachte Dispersion gleich, und falls man den zweiten brechenden Winkel negativ nimmt, d. h. auf entgegengesetzter Seite des ersten brechenden Winkel, so wird die Dispersion aufgehoben. Ehe ich jedoch zur Construction der achromatischen Prismen übergehe, will ich die Frage untersuchen, ob die Annahme, bei einer Aenderung der totalen Dispersion ändern sich alle partiellen Dispersionen in gleichem Masse, richtig sei.

Die Aenderung der Grösse der Dispersion muss am stärksten sein in der Nähe des Maximums oder auch im Minimum, da alsdann die Aenderungen für einzelne Far-

ben im entgegengesetzten Sinne wirken. Ich habe daher in der folgenden Tabelle für den brechenden Winkel $P = 30''$ im Minimum der Dispersion die Grösse der Dispersionen zwischen den einzelnen Fraunhoferschen Linien B bis H zusammengestellt und zwar für den Fall, dass ein Minimum der Dispersion bei B , E und H eintritt.

Minimum der Dispersion:

bei:	B	E	H
$e_0 =$	46° 59' 47"	46° 18' 47"	44° 49' 19"
D_b^c	3' 56"	3' 57"	3' 56"
D_c^d	11 18	11 15	11 18
D_d^e	14 31	14 32	14 32
D_e^f	13 43	13 43	13 42
D_f^g	26 20	26 21	26 22
D_g^h	23 47	23 45	23 45
D_b^h	1° 33' 35"	1° 33' 33"	1° 33' 35"

In der Nähe des Minimums der Dispersion bleibt nicht nur die Totaldispersion, sondern auch die partielle Dispersion bei einer Aenderung der Einfalleneigung dieselbe. Die kleinen Unterschiede in der Grösse der partiellen Dispersionen sind wohl einer Ungenauigkeit der Rechnung zuzuschreiben. — Die nächste Tabelle enthält für verschiedene Einfalleneigungen die Dispersion zwischen B u. E und E u. H .

e_0	b_2 für $B^1)$	b_2 für E	b_2 für H	D_b^h	D_b^e	D_e^h	$D_b^e : D_e^h$
0°	82° 11' 4''	82° 43' 41''	83° 53' 4''	1° 42' 0''	32' 37''	69' 23''	0.470
10°	83 14 31	83 46 50	84 55 36	1 41 5	32 29	68 46	0.472
20°	86 19 52	86 51 25	87 58 39	1 38 47	31 33	67 14	0.470
30°	91 14 29	91 45 6	92 50 31	1 36 2	30 37	65 25	0.468
40°	97 42 52	98 12 47	99 16 33	1 33 41	29 55	63 46	0.468
50°	105 31 49	106 1 36	107 5 37	1 33 48	29 47	64 1	0.465
60°	114 34 9	115 4 50	116 10 59	1 36 50	30 41	66 9	0.463
70°	124 53 16	125 26 35	126 38 48	1 45 32	33 19	73 7	0.457
80°	136 54 10	137 33 36	139 0 16	2 6 6	39 26	86 40	0.454
90°	152 14 0	153 12 18	155 24 31	3 10 31	58 18	132 13	0.441
Maximum der Dispersion:				12° 42' 28"	2° 13' 14"	10° 29' 14"	0.222

Aus dieser zweiten Tabelle erkennt man nun, dass mit einer Aenderung der Einfalleneigung die Ausdehnung der einzelnen Farben nicht in derselben Masse zunimmt, namentlich, wenn der Strahl das Prisma unter sehr kleiner Brechungeneigung verlässt. Wo es sich daher, wie bei dem Zöllner'schen Reversionsspectroscop um Differentialbestimmungen handelt, scheint es nicht gerathen, das Collimator-Fernrohr mit dem Spalt zu verschieben, dadurch also die Einfalleneigung der einfallenden Strahlen zu ändern.

Ich gehe jetzt über zur Construction eines achromatischen Prismensystems aus Prismen von derselben Glasart, welche durch Luftprismen getrennt sind.

Die Formel für die Dispersion:

$$D = \frac{\nu_1! \sin P_1}{\sin e_1 \sin b_1} dn_1 + \frac{\nu_2! \sin P_2}{\sin e_1 \sin b_2} dn_2 + \dots + \frac{\nu_i \sin P_i}{\sin e_i \sin b_i} dn_i$$

1) Die Brechungeneigungen der Strahlen B , E , H , sind in die Tabelle aufgenommen, um eine Uebersicht über die Grösse der Ablenkung zu haben.

hat nur so lange Gültigkeit als die Dispersionscoefficienten als Differentiale betrachtet werden können; dies ist aber nicht mehr der Fall, sobald man die Dispersion zwischen zwei Strahlen bestimmen will, deren Wellenlänge sehr verschieden ist, so namentlich die Totaldispersion, die Dispersion zwischen den Strahlen des äussersten Roth und Violett. In diesem Fall muss man D nach der Taylor'schen Reihe entwickeln und wenigstens die zweiten Potenzen der Dispersionscoefficienten berücksichtigen.

Angenommen das Prismensystem enthalte drei Prismen, von denen das erste und dritte aus Glas von derselben brechenden Kraft, das zweite aus Luft bestehe. Es ist also $dn_3 = dn_1$ und $dn_2 = 0$ und es wird die Dispersion zweier Strahlen von nur wenig verschiedener Wellenlänge:

$$db_{i+1} = D = \left\{ \frac{\nu_1 \cdot \nu_2 \cdot \nu_3 \cdot \sin P_1}{\sin e_1 \sin b_1} + \frac{\nu_3 \sin P_3}{\sin e_3 \sin b_3} \right\} dn_1.$$

Die Totaldispersion D_b^h wird alsdann, wenn Δn die Dispersionscoefficienten für die betreffenden Strahlen darstellt,

$$D_b^h = \frac{db_{i+1}}{dn} \cdot \Delta n + \frac{1}{1.2} \cdot \frac{d^2 b_{i+1}}{dn^2} \cdot \Delta n^2 + \frac{1}{1.2.3} \cdot \frac{d^3 b_{i+1}}{dn^3} \cdot \Delta n^3 + \dots$$

oder wenn man zur Abkürzung:

$$\frac{\nu_1 \cdot \nu_2 \cdot \nu_3 \sin P_1}{\sin e_1 \cdot \sin b_1} = z_1 \quad ; \quad \frac{\nu_3 \sin P_3}{\sin e_3 \sin b_3} = z_3$$

setzt und das zweite Differential entwickelt:

$$D_b^h = (z_1 + z_3) \Delta n + \frac{1}{1.2} \left\{ z_1 \left(\cotg b_1 \frac{db_1}{dn} - \frac{\sin P_2}{\sin e_2 \sin b_2} \cdot \frac{db_2}{dn} - \frac{\sin P_3}{\sin e_3 \sin b_3} \cdot \frac{db_3}{dn} \right) - z_3 \cotg b_3 \frac{db_3}{dn} - (z_1 + z_3) \cotg b_4 \frac{db_4}{dn} \right\} \Delta n^2 + \frac{1}{1.2.3} \cdot \frac{d^3 b_{i+1}}{dn^3} \Delta n^3 + \dots$$

Soll keine Dispersion stattfinden, so muss $D_b^h = 0$ sein. Eine erste Annäherung wird man also erhalten, wenn:

$$z_1 + z_3 = 0$$

oder:
$$\frac{\sin P_1}{\sin b_1 \sin b_2} = - \frac{\sin P_3}{\sin e_2 \sin e_3}$$

wobei die nachbleibende Dispersion erhalten wird, gleich

$$\frac{1}{1.2} \cdot z_1 \left\{ \cotg b_1 \frac{db_1}{dn} - \frac{\sin P_2}{\sin e_2 \sin b_2} \cdot \frac{db_2}{dn} + \cotg e_3 \frac{db_3}{dn} \right\} \Delta n^2 + \frac{1}{1.2.3} \cdot \frac{d^3 b_{i+1}}{dn^3} \Delta n^3 \dots$$

Für eine zweite Annäherung muss auch der Factor von Δn^2 Null werden u. s. w.

Stellt man nun in Bezug auf das erste Prisma gewisse Bedingungsgleichungen auf, so kann man den brechenden Winkel des Luftprismas und des zweiten Glasprismas berechnen, durch welche die Farbenzerstreuung aufgehoben wird, während eine Abkürzung des Strahles nachbleibt. Ohne auf die weitläufigen Rechnungen einzugehen¹⁾ gebe ich in Folgendem zwei Beispiele, welche

1) 1867 ist von M. Hoek eine kleine Abhandlung erschienen: „Sur les prismes achromatiques construits avec une seule substance“, in welcher der Verfasser von ähnlichen Formeln ausgehend, mehrere achromatische Combinationen berechnet.

dazu dienen mögen, die Wirkung einer achromatischen Combination von Prismen aus derselben Glasart mit der Wirkung einer solchen Combination aus Prismen von verschiedener Glasart, zu vergleichen.

Durch Interpolation findet man aus der letzten Tabelle, dass für obiges Flintglas bei einem brechenden Winkel von 30° die Dispersion D_b^h die gleiche ist bei:

$$e_0 = 20 \text{ und } e_0 = 63^\circ 6'$$

$$e_0 = 30 \quad \text{„} \quad e_0 = 58^\circ 17'$$

Soll die Dispersion sich aufheben, so muss man die beiden Glasprismen derart zusammensetzen, dass der unter der Einfallsneigung $e_0 = 20^\circ$ eintretende Strahl, das zweite Prisma unter der Brechungsneigung $b_4 = 63^\circ 6'$ verlässt, wobei der brechende Winkel des zweiten Prismas auf der entgegengesetzten Seite des brechenden Winkels des ersten Prismas liegen muss.

Nun ist aber für $P = 30^\circ$ bei der Einfallsneigung:

e_0	b_2 für B	b_2 für E	b_2 für H	D_b^h	Ablenkung A
20°	$86^\circ 19' 52''$	$86^\circ 51' 25''$	$87^\circ 58' 39''$	$1^\circ 38' 47''$	$36^\circ 19' 52''$
30°	$19^\circ 14' 29''$	$91^\circ 45' 6''$	$92^\circ 50' 31''$	$1^\circ 36' 2''$	$31^\circ 14' 29''$

und für $P = -30^\circ$ bei der Brechungsneigung:

b_4	e_2 für B	e_2 für E	e_2 für H	D_b^h	Ablenkung A
$58^\circ 17'$	$112^\circ 55' 52''$	$113^\circ 26' 18''$	$114^\circ 31' 54''$	$1^\circ 36' 2''$	$-24^\circ 38' 52''$
$63^\circ 6'$	$117^\circ 37' 16''$	$118^\circ 8' 33''$	$119^\circ 16' 3''$	$-1^\circ 38' 47''$	$-24^\circ 31' 16''$

hieraus erkennt man, dass der brechende Winkel des Luftprismas, welches das Prismensystem achromatisch macht, für:

$$e_0 = 20^\circ \text{ sein muss } P_2 = 31^\circ 17' 24''$$

$$e_0 = 30^\circ \quad \text{„} \quad \text{„} \quad P_2 = 21^\circ 41' 23''$$

Die folgende Tabelle zeigt die Zusammensetzung und Wirkung eines solchen achromatischen Prismas aus derselben Substanz:

e_0	P_1	P_2	P_3	b_4	A	δD
20°	$30^\circ 0'$	$31^\circ 17'$	$-30^\circ 0'$	$63^\circ 6'$	$11^\circ 49'$	$16''$
30°	$30^\circ 0'$	$21^\circ 41'$	$-30^\circ 0'$	$58^\circ 17'$	$6^\circ 36'$	$10''$

Die Grösse δD bedeutet die nachbleibende Dispersion, d. i. der Winkel, welchen die Strahlen von der Wellenlänge der Linie E mit den einander parallel austretenden Strahlen B und H bildet. Wäre die Annahme, die Aenderung der partiellen Dispersionen sei proportional der Aenderung der totalen Dispersion richtig, so würde diese Grösse Null werden.

Will man aus zwei Prismen von verschiedener Glasart ein achromatisches Prisma zusammensetzen, so findet man den brechenden Winkel des zweiten Glasprismas, — den brechenden Winkel des Luftprismas $P_2 = 0$ gesetzt — aus:

$$\text{tg } P_3 \frac{\cos e_2^b - \cos e_2^h}{n_3^b \sin b_3^b - n_3^h \sin b_3^h}$$

wo die Indices oben andeuten, für welchen Strahl die Grössen e_2 , b_3 , n_3 zu berechnen sind. So findet man für

ein Prisma vom brechenden Winkel $P_1 = 45^\circ$ aus Crown-
glas $\mathcal{N}^\circ 9$ für welches:

$$n_b = 1,525832; n_e = 1,533005; n_h = 1,546566.$$

folgende achromatische Combination mit einem Prisma aus
Flintglas von Guynand.

e_0	P_1	P_3	b_4	A	δD
20°	45°	-21° 26' 17"	61° 55' 57"	18° 22' 13"	119"
40°	45°	-20° 4' 26"	77° 0' 25"	12° 4' 51"	116"

Nimmt man Crown-
glas $\mathcal{N}^\circ 9$ und Flintglas $\mathcal{N}^\circ 13$ für
welches:

$$n_b = 1,627749; n_e = 1,642024; n_h = 1,671062,$$

so kann man folgendes achromatische Prisma zusammen-
setzen:

e_0	P_1	P_3	b_4	A	δD
40°	45°	- 22° 42' 24"	75° 35' 33"	13° 17' 54"	62"

Wie man sieht ist bei ungefähr derselben Ablenkung,
die nachbleibende Dispersion der achromatischen Prismen-
combination aus verschiedenen Glasarten in dem einen Fall
cc 7mal, im zweiten Fall *cc* 4mal grösser als bei einer
achromatischen Combination aus Prismen von derselben
Glasart. Fig. 3 u. 4 veranschaulichen die Form solcher
achromatischer Prismen.

Ich füge hier noch einige Beispiele hinzu, um die
Dispersion der Prismensysteme à vision directe verschie-
dener Construction mit einander vergleichen zu können.

Verbindet man 4 Prismen aus Crown-
glas $\mathcal{N}^\circ 9$ und 3 Prismen aus Flintglas $\mathcal{N}^\circ 13$ abwechselnd durch pa-

rallele Schichten von Canadabalsam mit einander, so er-
hält man ein Prismensystem, welches den Strahl E nicht
von seiner ursprünglichen Richtung ablenkt, sobald man
z. B. den brechenden Winkel der inneren Prismen, $P_2 = 60^\circ$,
der beiden äusseren Prismen, $P_1 = 50^\circ 12'.4$, macht und
den Strahl unter der Einfallsnennung $69^\circ 47'.6$ auf das
Prismensystem auffallen lässt. Die folgende Tabelle ver-
anschaulicht die Anordnung der Prismen und den Gang
der Lichtstrahlen.

e_0	P_1, P_7	P_2, P_4, P_6	P_3, P_5	b_n			D_b^h
				B	E	H	
69° 47'.6	50° 12'.4	- 60° 0'.0	+ 60° 0'.0	111° 25'.1	110° 12'.4	107° 26'.8	3° 58'.3

Würde man 7 Prismen aus Flintglas $\mathcal{N}^\circ 13$ in Bat-
teriestellung so ordnen, dass der einfallende Strahl jedes
Prisma unter dem Minimum der Ablenkung durchdringt
und parallel der ursprünglichen Richtung wieder austritt,
so erhielte man folgende Combination, falls die Bedingun-
gen für den Strahl E erfüllt werden sollen.

e_0	P	P'	$b_{1,4}$			D_b^f
			B	E	F	
33° 56'.3	60° 41'.7	- 112° 7'.4	139° 1'.5	146° 3'.8	151° 59'.0	12° 57'.5

worin P den brechenden Winkel der Glasprismen,
 P' den der Luftprismen bedeutet. Die Dispersion ist nur
zwischen den Linien B und F angegeben, weil Strahlen
von der Wellenlänge der Linien H und G schon total-
reflectirt werden. Die Totaldispersion würde $40^\circ 58'.5$ be-
tragen und das Spectrum sich bis in die Nähe der

Linie G erstrecken. Zur Untersuchung des Spectrums zwischen G und H müsste man dann die Einfallsneigung ändern.

Berechnet man die Combination der Prismen derart, dass der Strahl von der Wellenlänge der Linie H seiner ursprünglichen Richtung parallel bleibt, so braucht man zur Beobachtung des ganzen Spectrums nicht die Einfallsneigung des Strahles zu ändern. Die Zusammenstellung der Prismen wäre dann folgende:

e_0	P	P'	b_{14}		D_b^h
			B	H	
34° 53'.0	58° 48'.0	-110° 14'.0	131° 15'.0	140° 7'.0	13° 58'.0

Wie man sieht, würde man bei dieser Zusammenstellung bei einer gleichen Anzahl Prismen eine cc. 3mal so grosse Dispersion erhalten als bei einem Prismensystem à vision directe aus parallel aneinander gefügter Prismen.

Soll der austretende Lichtstrahl durch Reflexion im Inneren des Prismas dem einfallenden parallel gemacht werden, so findet man, dass für ein Prisma aus Flintglas von Guynand, von den pag. 40 angegebenen Brechungscoefficienten, bei einem brechenden Winkel von 90° und einer Einfallsneigung von 45° diese Bedingung für den Strahl E erfüllt wird, wenn der Winkel P_r zwischen den beiden reflectirenden Flächen des Prismas gleich 21° 41'.0 gemacht wird. Man erhält dann

e_0	P_b	P_r	b_2			D_b^h
			B	E	H	
45°	90° 0'.0	21° 40'.0	133° 59'.4	135° 0'.0	137° 10'.7	3° 11'.3

Die Dispersion bei diesem einzelnen Prisma ist nur wenig kleiner, als bei dem ersten der berechneten Prismensysteme. Welche Art der Prismensysteme à vision directe vortheilhafter anzuwenden sind, hängt von dem Zwecke ab, zu welchem das Spectroscop benutzt werden soll, im Allgemeinen wird es jedoch nicht vortheilhaft sein, die viel verbreitete Amici'sche Construction — die Verbindung verschieden stark brechender Prismen durch parallele Schichten von Canadabalsam — anzuwenden, indem durch die theilweise Aufhebung der Dispersion der Crown- und Flintglasprismen erstens ein grosser Theil der Wirkung verloren geht, zweitens aber namentlich durch die stattfindende Uebereinanderlagerung der Farben die Reinheit des Spectrums bedeutend gestört wird.

Ueber die Unreinheit des Spectrums.

Angenommen, es sei die Lichtquelle, aus welcher parallele Strahlen verschiedener Brechbarkeit auf ein fehlerfreies Prismensystem fallen, eine leuchtende Linie parallel den brechenden Kanten der Prismen, so wird die Farbe jeder einzelnen Wellenlänge durch eine mathematische Linie dargestellt und jeder in der Lichtquelle fehlenden Wellenlänge wird in dem Spectrum eine scharfe dunkle Linie entsprechen; das Spectrum würde ein ideell reines sein.

Ist dagegen die Lichtquelle eine kleine leuchtende Fläche von gewisser Breite, z. B. der Spalt eines Spectroscopes, so würden die von den beiden Rändern ausgehenden parallelen Strahlen einer bestimmten Brechbarkeit einan-

der parallel das Prismensystem verlassen und in dem Spectrum eine kleine farbige Fläche von der gleichen Breite darstellen¹⁾. Für unmittelbar benachbarte Wellenlängen würden sich diese kleinen Flächen zum Theil decken und dadurch eine Unschärfe des Spectrums darstellen; diese Unschärfe wird um so kleiner, je grösser die Länge des Spectrums im Vergleich zur Breite des Spaltes, je weiter vom Prismensystem man das Spectrum objectiv darstellen würde. Da die Strahlen verschiedener Brechbarkeit hierbei verschiedenen Brechungsneigungen entsprechen, die Vermischung der Farben also nur eine scheinbare ist, so nenne ich diese Unschärfe — die scheinbare Unreinheit, die ich mit u bezeichne.

Sind die Lichtstrahlen, die von dem Spalt des Spectroscopes ausgehen, nicht einander parallel, sondern haben eine kleine Divergenz oder Convergenz de_0 , so dass etwa die Strahlen von dem einen Rande unter der Einfallsniegung e_0 , die vom andern Rande unter der Einfallsniegung $e_0 + de_0$ auf das Prismensystem fallen, so werden Strahlen von verschiedenen Brechungscoefficienten n und $n + dn$ bei ihrem Austritt aus dem Prismensystem dieselbe Brechungsneigung erhalten und dadurch die wirkliche Unreinheit U hervorbringen. Die Anzahl der Strahlen verschiedener Wellenlänge $d\lambda$ oder die Differenz der Brechungscoefficienten der Strahlen, die an derselben Stelle im Spectrum zusammentreffen, kann als Mass für die Grösse des Unreinheit dienen.

1) Mousson begeht in seiner Abhandlung das Versehen, dass er annimmt, auch wenn nur parallele Strahlen durch den Spalt des Spectroscopes dringen, die Breite des Spaltes durch die Brechung geändert wird.

Betrachtet man ein einzelnes Prisma, das von beiden Seiten von Luft umgeben sei, so findet man durch Differentiation der Gleichungen:

$$\begin{aligned} n_0 \cos e_0 &= n_1 \cos b_1 \\ n_1 \cos e_1 &= n_2 \cos b_2 \end{aligned}$$

nach dn_1 , wenn $n_0 = n_2 = 1$ und b_2 constant angenommen wird

$$de_0 = - \frac{\sin P}{\sin e_0 \sin e_1} \cdot dn_1$$

oder:

$$U = dn_1 = - \frac{\sin e_0 \cdot \sin e_1}{\sin P} \cdot de_0$$

wobei das negative Vorzeichen für U von keiner wesentlichen Bedeutung ist und nur anzeigt, welche Strahlen die Unschärfe hervorbringen.

Differenzirt man diesen Ausdruck für U nach de_0 und setzt $\frac{dU}{de_0} = 0$, so erhält man für einen Grenzwert der Unreinheit, der sich als ein Maximum ergibt, die Bedingung:

$$\operatorname{tg} b_1 \operatorname{tg}(e_1 + b_1) = n_1^2 - 1,$$

dieselbe Bedingung, die man für ein Minimum der Dispersion erhält, wenn man die Einfallsniegung mit der letzten Brechungsneigung vertauscht.

Den kleinsten Werth würde U erhalten, wenn e_0 sich seinem Grenzwert Null nähert oder de_0 den kleinsten Werth erhält.

Was die Grösse der scheinbaren Unreinheit u anbelangt, so erkennt man, dass bei objectiver Darstellung dieselbe ebenfalls gemessen werden kann durch die Differenz der Brechungscoefficienten der Strahlen verschiede-

ner Wellenlänge, die im Spectrum einen Raum von der Breite des Spaltes einnehmen. Ist β_2 die scheinbare Breite des Spaltenbildes vom Einfallspuncte aus in der Entfernung des objectiv dargestellten Spectrums, so erhält man die Unreinheit

$$u = \frac{\beta_2 \Delta n}{D}$$

wo Δn den zur Dispersion D gehörigen Dispersionscoefficienten darstellt.

Es wird also u , unabhängig von der Einfallsneigung, um so kleiner werden, je grösser die Dispersion im Verhältniss zum Dispersionscoefficienten und je kleiner die scheinbare Breite β_2 , also je weiter vom Einfallspuncte das Spectrum dargestellt wird. Beobachtet man das Spectrum durch ein Fernrohr, so werden die parallelen Strahlen in einen Punkt vereint, es wird also $u = 0$.

Der Werth von U ändert sich sowohl für verschiedene Glasarten als auch für die verschiedenen Farbenregionen, indem derselben Differenz dn verschiedene Werthe von $d\lambda$ entsprechen, in dem einen Falle daher eine grössere Anzahl verschiedener Strahlen dieselbe Brechungsneigung erhalten als in dem anderen Falle. Um ein absolutes Mass für die Unreinheit des Spectrums zu erhalten, müsste man U noch multipliciren mit $\frac{d\lambda}{dn}$, welche Grösse aus den Dispersionsformeln herzuleiten wäre. Da jedoch die bisherigen Dispersionsformeln, ausser der von Ketteler, die Brechungscoefficienten nur ungenau als Function der Wellenlänge darstellen, so beschränke ich mich darauf die Unreinheit des Spectrums durch die Dif-

ferenz der Brechungscoefficienten der Strahlen, welche am selben Orte zusammentreffen, darzustellen.

Für ein Prisma aus Flintglas von Guynand mit dem brechenden Winkel $P_1 = 30$ würden den verschiedenen Einfallsneigungen folgende Grösse der Unreinheit — in Einheiten der 6. Decimale — in der Nähe des Strahles E entsprechen, wenn die Divergenz der einfallenden Strahlen $de_0 = 60''$ angenommen wird:

$e_0 =$	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°	97° 16'
$U =$	0	100	199	284	373	441	489	517	522	504	478

wobei eine Unreinheit von 100 entsprechen würde der Differenz der Brechungscoefficienten der beiden D Linien. Es wäre also bei diesem Prisma nur dann möglich die Doppellinie D zu sehen, wenn die Einfallsneigung kleiner als 10° .

Denkt man sich in dem Ausdruck für U statt e_0 u. e_1 b_2 u. b_1 gesetzt, also die Einfallsneigungen mit den Brechungsneigungen vertauscht, so findet man folgende Relation:

$$\frac{D}{db_2} = \frac{\Delta n_1}{U}$$

wo db_2 die Divergenz der einfallenden Strahlen oder die scheinbare Breite des Spaltes bezeichnet und Δn_1 der Dispersionscoefficient ist, welcher der Dispersion D entspricht. Construirt man die Curve der Dispersion in der Nähe eines bestimmten Strahles, indem man zur Abscisse die Einfallsneigung e_0 annimmt und die Curve der Reinheit, indem man zur Abscisse die Brechungsneigung b_2 annimmt, so werden die beiden Curven einander parallel sein.

Für eine Prismensystem aus verschiedenen brechenden Glasprismen lässt sich die Grösse der Unreinheit nicht direct berechnen. Man erhält nämlich:

$$- \nu_0 ! de_0 = \frac{\nu_1 ! \sin P_1}{\sin e_1 \sin b_1} dn_1 + \frac{\nu_2 ! \sin P_2}{\sin e_2 \sin b_2} dn_2 \\ + \dots + \frac{\nu_i \sin P_i}{\sin e_i \sin b_i} dn_i$$

woraus man den mittleren Dispersionscoefficienten herleiten müsste, welcher bei einer Einfallneigung b_{i+1} die Dispersion de_0 hervorbringt.

Was die Mittel anbetrifft, durch welche die grösstmögliche Reinheit des Spectrums erzielt werden kann, muss ich auf den zweiten Theil dieser Schrift verweisen, da hierbei die Verbindung der Prismensysteme mit Linsensystemen von grosser Wichtigkeit sind.

Ueber die Helligkeit des Spectrums.

Trifft ein unpolarisirter homogener Lichtstrahl von der Intensität I^2 auf die Trennungsebene zweier Medien, so wird der gebrochene Strahl polarisirt erscheinen, und zwar wird, den Fresnel'schen Formeln gemäss, die Intensität des parallel zur Einfallsebene polarisirten Strahles

$$i_p^2 = \frac{I^2}{2} \cdot \frac{\sin 2e_0 \sin 2b_1}{\sin^2(e_0 + b_1)}$$

und des senkrecht zur Einfallsebene polarisirten Strahles:

$$i_s^2 = \frac{I^2}{2} \cdot \frac{\sin 2e_0 \sin 2b_1}{(\sin e_0 \cos e_0 + \sin b_1 \cos b_1)^2}$$

Die Gesamtintensität des gebrochenen Strahles wird dann:

$$J^2 = i_p^2 + i_s^2$$

Bleibt die Einfallsebene dieselbe, so wiederholt jede Brechung ähnliche Ausdrücke und man erhält die Intensität des gebrochenen Lichtes nach $i-1$ Brechungen:

$$J_{i+1}^2 = (i_p^2)! + (i_s^2)!$$

wo:

$$(i_p^2)! = (i_p^2)_1 \cdot (i_p^2)_2 \cdot \dots \cdot (i_p^2)_{i+1}$$

$$(i_s^2)! = (i_s^2)_1 \cdot (i_s^2)_2 \cdot \dots \cdot (i_s^2)_{i+1}$$

Für die Intensität eines Lichtstrahles, der durch ein Prismensystem von i Prismen gebrochen ist, erhält man nach einigen leichten Umformungen der Fresnel'schen Formeln:

$$J_{i+1}^2 = \frac{I^2}{2} \cdot \frac{4^{i+1}}{n_0^2 n_{i+1}^2} \left\{ \frac{n_0^2}{n_0^2} \right\}^2 \cdot \text{tge}_0! \text{tgb}_1! \text{tg}^2 \alpha_1! \{ \cos^2 \alpha_1! + 1 \}.$$

Betrachtet man nun ein einzelnes Prisma, das von Luft umgeben sei, so wird die Intensität des austretenden Strahles, von dem Verlust durch Absorption im Innern des Glases abgesehen:

$$J_2^2 = \frac{I^2}{2} \left(\frac{2n_1}{n_1^2 - 1} \right)^4 \cdot \text{tge}_0 \cdot \text{tgb}_1 \text{tge}_1 \cdot \text{tgb}_2 \cdot \text{tg}^2 \alpha_1 \text{tg}^2 \alpha_2 \\ (\cos^2 \alpha_1 \cos^2 \alpha_2 + 1).$$

Man erkennt nun, dass der Ausdruck Null wird, sobald e_0 oder $b_2 = 0^\circ$ oder 180° , das ist also sowohl für streifendes Eintreten als Austreten des Strahles. Wird e_0 oder $e_1 = 90^\circ$, so wird der Ausdruck unbestimmt $= 0 \cdot \infty$ und lässt sich dann auf die Form bringen:

$$J_2^2 = I^2 \frac{n}{(n_1 + 1)^2} \cdot \left(\frac{2n_1}{n_1^2 + 1} \right)^2 \cdot \operatorname{tg} e_1 \cdot \operatorname{tg} b_2 \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha_2 (\cos^2 \alpha_1 + 1).$$

Für $e_1 = 90^\circ$ hat man nur statt e_1 , b_2 , α_2 zu setzen e_0 , b_1 , α_1 ; übrigens bleibt der numerische Werth derselbe.

Differenzirt man J_2^2 nach e_0 , so findet man, dass der Differentialquotient $\frac{dJ_2^2}{de_0} = 0$ wird, sobald

$$\frac{d}{de_0} \cdot \{\cos^2 \alpha_1 \cos^2 \alpha_2 + 1\} = 0,$$

das ist sobald $\alpha_1 + \alpha_2$, die Ablenkung durch das Prisma, ein Minimum erlangt, und zwar wird dieser Grenzwert von J_2^2 alsdann ein Maximum. Man erhält also ein Maximum der Intensität des austretenden Strahles, sobald man den einfallenden Strahl unter der Einfalleneigung aufs Prisma fallen lässt, welche ein Minimum der Ablenkung hervorbringt.

Ferner erkennt man, dass die Intensität des gebrochenen Lichtes dieselbe ist für die Brechungsneigung b_1 als für die Brechungsneigung $180^\circ - (P_1 + b_1)$, da alsdann $\operatorname{tg} e_0 \cdot \operatorname{tg} b_1 \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha_1$ und $\cos^2 \alpha_1$ ihre Werthe austauschen mit $\operatorname{tg} e_1$, $\operatorname{tg} b_2$, $\operatorname{tg}^2 \alpha_2$ und $\cos^2 \alpha_2$. Nimmt man die Brechungsneigungen b_1 als Abscissen, die zugehörige Intensität J_2^2 als Ordinaten, so wird die Intensitätscurve vom Maximum aus nach beiden Seiten hin symmetrisch verlaufen. Die (Fig. 5) zeigt solche Curven, die für ein Prisma aus Flintglas von Guynand ($P_1 = 30^\circ$) für die Strahlen B , F und H construiert sind. Würde man die Einfalleneigung e_0 zur Abscisse nehmen, so würde die Intensitätscurve eine wesentlich andere Form annehmen (Fig. 6).

Für das obige Prisma würden den verschiedenen Einfalleneigungen folgende Intensität des Strahles J entsprechen; wenn $I^2 = 1$ gesetzt wird:

e_0	J^2
0°	0,000
2°	0,161
4°	0,289
6°	0,398
8°	0,469
10°	0,536
20°	0,724
30°	0,798
40°	0,829
50°	0,841
60°	0,841
62° . 30'	0,842.

Die Intensität der Strahlen anderer Wellenlänge weicht nur wenig davon ab, im Maximum ist die Differenz der Intensität der Strahlen B und H . 7 Einheiten der letzten Decimale.

Ist die Lichtquelle, welche das einfallende Licht ausstrahlt, der Spalt eines Spectroscopes, dessen scheinbare Breite vom Ort des Einfallspunctes aus de_0 sei, so wird die scheinbare Breite db_2 des Spaltes nach der Brechung durch ein Prismensystem:

$$db_2 = \frac{1}{\nu_0'} \cdot de_0.$$

Ist nun h_0 die Helligkeit des Spaltes, h_{i+1} die seines Bildes nach $i+1$ Brechungen, so wird h_0 zu h_{i+1} — abgesehen von der Schwächung des Lichtes durch Ab-

sorption und Reflexion — sich verhalten umgekehrt, wie die scheinbare Breite des Spaltes de_0 zu der seines Bildes db_2 , so dass also

$$h_{i+1} = \frac{h_0}{\nu_0!}.$$

Berücksichtigt man die Aenderung der Intensität durch Reflexion, so wird, wenn h_0 statt I^2 gesetzt wird,

$$h_{i+1} = \frac{J_{i+1}^2}{\nu_0!}$$

oder wenn man $n_0 = n_{i+1} = 1$ setzt und beachtet, dass $\text{tg } e_0! = \nu_0! \text{tg } b_1!$

$$h_{i+1} = \frac{h_0}{2} \cdot 4^{i+1} \left\{ \frac{n_0!}{m_0!} \right\}^2 \text{tg}^2 b_1! \text{tg}^2 \alpha_1! (\cos^2 \alpha_1! + 1).$$

Es wird also die Helligkeit einer bestimmten Farbe nicht mehr das Maximum der Intensität erhalten im Minimum der Ablenkung, sondern da $\nu_0!$ seinen kleinsten Werth für eine Einfallsneigung nahe bei 0° erhält, bei einer Einfallsneigung, kleiner als die für ein Minimum der Ablenkung.

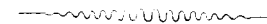
Ist das einfallende Licht nicht homogen, so wird die Helligkeit einer bestimmten Stelle des Spectrums H noch dadurch vergrößert, dass das Spectrum nicht rein ist. Ist wiederum h_0 die Helligkeit des Spaltes für eine bestimmte homogene Farbe und nimmt man an, dass unmittelbar benachbarte Strahlen dieselbe Helligkeit haben, so hat man h_{i+1} noch zu multipliciren mit der Anzahl der Strahlen $d\lambda$, die an demselben Orte zusammentreffen, dass ist mit $U \frac{d\lambda}{dn_1}$.

Für ein einzelnes Prisma wird also der Ausdruck für die Helligkeit einer bestimmten Stelle des Spectrums sein:

$$H = \frac{h_0}{2} \cdot \left\{ \frac{2n_1}{n_1^2 - 1} \right\}^4 \cdot \frac{\sin b_1 \sin b_2}{\sin P_1} \cdot \text{tge}_0 \text{tgb}_1 \text{tge}_1 \text{tgb}_2 \text{tg}^2 \alpha_1 \text{tg}^2 \alpha_2 (\cos^2 \alpha_1 \cos^2 \alpha_2 + 1) \cdot de_0 \cdot \frac{d\lambda}{dn_1}.$$

Für die drei verschiedenen Arten Prismensysteme à vision directe würde sich die Helligkeit für den Strahl E ergeben, wenn $h_0 = 1$ und $de_0 = 60''$ angenommen wird:

	<i>D</i>	<i>U</i>	<i>H</i>
Amicische Construction	3° 58,3	351	0,0354.
Batteriestellung . . .	12° 57,5	023	0,0001.
Einzelnes Prisma . . .	3° 11,3	260	0,4160.



T H E S E N.

- 1) Die Ketteler'sche Dispersionsformel

$$\frac{1}{n^2} = A \frac{1}{1 - kl^2} + B \frac{1}{l^2 - c''}$$

ist allen bisher aufgestellten Dispersionsformeln vorzuziehen.

- 2) Es giebt keine anomale Dispersion.
 3) Zu Längenbestimmungen sind Verfinsterungen der Jupiterstrabanten den Sternbedeckungen vorzuziehen.
 4) Die Erscheinung des Nordlichts ist von localen klimatischen Verhältnissen abhängig.
 5) Die Bestimmung der Höhe der Nordlichtstrahlen durch correspondirende Beobachtungen ist nicht zulässig.
 6) Achromatische Prismen aus derselben Glasart geben vollständigere Achromasie als Prismen aus verschiedener Glasart.
 7) Die Empfindlichkeit der astronomischen Instrumente ist grösser als die Beobachtungen es erfordern.

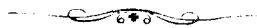


Fig. 2

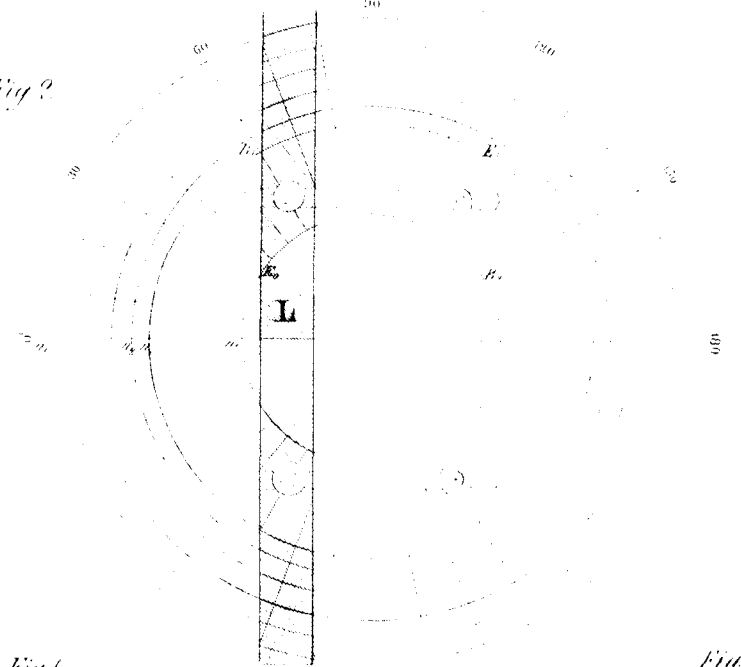


Fig. 1

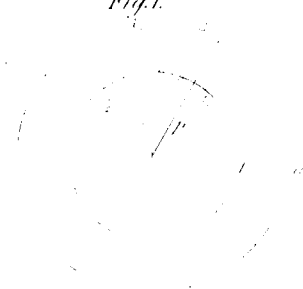


Fig. 3

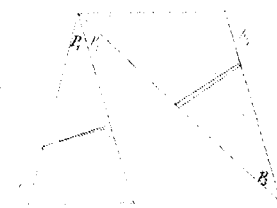


Fig. 4



Fig. 5

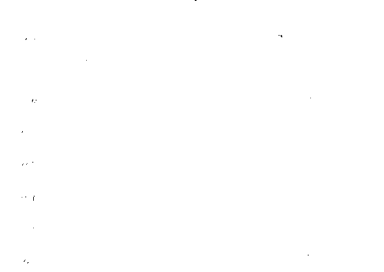


Fig. 6



[Faint, illegible text at the bottom of the page, possibly bleed-through or a separate section.]

Fig. 2.

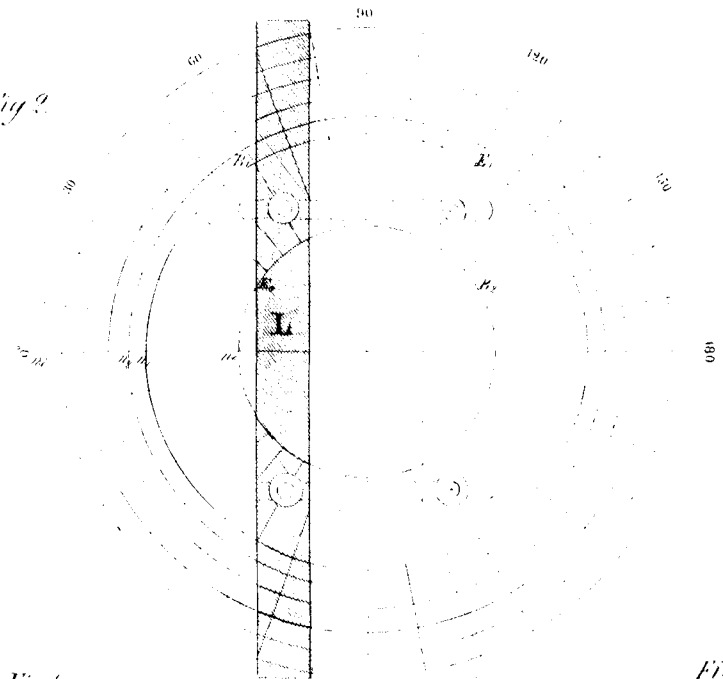


Fig. 1.



Fig. 3.

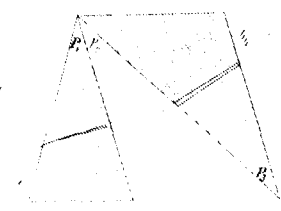


Fig. 4.



Fig. 5.



Fig. 6.



$\frac{R^2 + U^2}{32} = 50^2 = 2500$ $\frac{D^2 + K^2}{32} = 50^2 = 2500$

Lith. v. Giesels, Leipzig.

Corrigenda.

Pg. 11,	Zeile 17	von oben:	$\nu_0!$	statt:	ν_0 .
" 11,	" 20	"	\sum_1^i	statt:	Σ_1^i
" 14,	" 12	"	$\frac{d(\nu_0)}{db_1}$	statt:	$\frac{d(\nu_1)}{db_1}$
" 14,	" 18	"	0, 1, 2 . . . i	statt:	1, 2 . . . i.
" 16,	" 5	"	$90^\circ - \frac{P_1}{2}$	statt:	$90^\circ + \frac{P_1}{2}$
" 17,	" 4	"	$n_{2i-2} \cdot m_{2i}$	statt:	$n_{2i-2} \cdot m_{2i+2}$
" 34,	" 15	"	Nullpunkt	statt:	Mittelpunkt.

—•••••—