Tartu Ülikool
Loodus- ja täppisteaduste valdkond
Matemaatika ja statistika instituut

Kadi Siigur

Poolrühma püsivad endomorfismid

Matemaatika eriala

Bakalaureusetöö (9 EAP)

Juhendajad: PhD Ülo Reimaa ja prof. Valdis Laan

Tartu 2023

POOLRÜHMA PÜSIVAD ENDOMORFISMID

Bakalaureusetöö

Kadi Siigur

Lühikokkuvõte

Käesolevas bakalaureusetöös uuritakse poolrühmade vahelisi homomorfisme, mis rahuldavad teatud eritingimust, mida nimetame püsivuseks. Töös defineeritakse homomorfismide püsivus. Edasi tuuakse välja hulkade homomorfismiteoreem ja sellest järelduv tensorkorrutise universaalomadus. Töös tuuakse välja mõned üldised tulemused püsivate homomorfismide kohta ning üldistatakse V. Laane ja L. Maríni tulemust püsivate homomorfismide kompositsiooni püsivuse kohta ja antakse sellele uus tõestus. Töös tõestatakse ka, et naturaalarvude aditiivsel poolrühmal pole ühtegi püsivat endomorfismi ning et kõik täisarvude aditiivse poolrühma endomorfismid on püsivad.

CERCS teaduseriala: P120 Arvuteooria, väljateooria, algebraline geomeetria, algebra, rühmateooria

Märksõnad: Poolrühm, püsiv poolrühm, homomorfism, püsiv homomorfism, monoid.

FIRM ENDOMORPHISMS OF A SEMIGROUP

Bachelor's thesis

Kadi Siigur

Abstract

In this Bachelor's thesis semigroup homomorphisms, which satisfy a special condition, called firmness, are studied. Firm homomorphisms are defined in the thesis. Also, fundamental homomorphism theorem and the universal property of tensor products are brought out. The thesis brings out some general results about firm homomorphisms. V. Laan's and L. Marín's result about the firmness of the composition of firm homomorphisms is generalized and given a new proof to. In the thesis we prove that the additive semigroup of natural numbers has no firm endomorphisms and all of the endomorphisms of the additive semigroup of integers are firm.

CERCS research specialisation: P120 Number theory, field theory, algebraic geometry, algebra, group theory.

Key Words: Semigroup, firm semigroup, homomorphism, firm homomorphism, monoid.

Sisukord

Sissejuhatus

Käesolevas bakalaureusetöös uurime poolrühmade vahelisi homomorfisme, mis rahuldavad teatud eritingimust, mida me kutsume püsivuseks. Ennekõike huvitavad meid püsivate endomorfismide poolrühmad ja monoidid.

Kui kahe monoidi vahel on mingi poolrühmade homomorfism (s.t. korrutamistehet säilitav kujutus), siis see homomorfism ei pruugi säilitada ühikelementi. Tekib loomulik küsimus: kas võib vaadelda mingit poolrühmade homomorfismide klassi nii, et iga sellesse klassi kuuluv homomorfism kahe monoidi vahel säilitaks ühikut? Tuleb välja, et selliseks klassiks sobib püsivate homomorfismide klass (vt. [3]). Homomorfismi püsivus defineeritakse tensorkorrutiste abil.

Võib rääkida ka püsivatest poolrühmadest. Nende klass sisaldab kõiki monoide, kuid selles on ka palju poolrühmi, mis ei ole monoidid. Püsivad poolrühmad on kerkinud hiljuti esile poolrühmade Morita teoorias (vt. artiklit [4]).

Töö koosneb viiest peatükist. Esimeses peatükis antakse peamised töös kasutatavad definitsioonid ning tõestatakse mõned abitulemused. Teine peatükk räägib hulkade homomorfismiteoreemist ning sisaldab ka teisi tulemusi, mida selle abil tõestada saab, ent mida edasises töös vaja läheb. Kolmandas peatükis sõnastatakse ja tõestatakse üldised tulemused poolrühmade püsivate endomorfismide kohta. Näiteks antakse tõestus, et püsivate homomorfismide kompositsioon on samuti püsiv, mistõttu moodustavad püsiva poolrühma püsivad endomorfismid monoidi. Neljandas peatükis uuritakse, kas naturaalarvude aditiivsel poolrühmal leidub püsivaid endomorfisme. Viimases peatükis näidatakse, et poolrühmade homomorfismid monoidide vahel on püsivad parajasti siis, kui need säilitavad monoidi ühikelementi ning kasutatakse seda teadmist, et näidata, millised täisarvude aditiivse poolrühma endomorfismid on püsivad. Tõestatakse ka seda, et kõik rühmade vahelised poolrühmade endomorfismid on püsivad.

Mõned töös sisalduvad tulemused on uued. Töös tõestatakse, et naturaalarvude aditiivsel poolrühmal pole ühtegi püsivat endomorfismi ning et täisarvude aditiivse poolrühma kõik endomorfismid on püsivad. Uus tulemus on ka see, et kõik rühmade vahelised poolrühmade endomorfismid on püsivad. Lisaks üldistatakse V. Laane ja L. Maríni artikli [3] tulemust püsivate homomorfismide kompositsiooni kohta ja antakse sellele uus tõestus.

1 Definitsioonid ja abitulemused

Siin anname mõned definitsioonid, mida selles töös läheb vaja.

Definitsioon 1.1 ([1])**.** **Poolrühmaks** $(S, *)$ nimetatakse hulka S koos sellel defineeritud assotsiatiivse kahekohalise algebralise tehtega $*$.

Definitsioon 1.2 ([1])**.** Olgu $(S, *)$ poolrühm ja A hulk. Kujutust

$$A \times S \to A,\ (a, s) \mapsto a \cdot s$$

nimetatakse **parempoolseks** S**-toimeks**, kui iga $a \in A$ ja iga $s, t \in S$ korral

$$(a \cdot s) \cdot t = a \cdot (s * t).$$

Paari $(A, \cdot)$ nimetatakse **parempoolseks** S**-polügooniks** ja tähistatakse A_S.

Analoogiliselt defineeritakse ka **vasakpoolsed** S**-toimed** ja **vasakpoolsed** S**-polügoonid**.

Edaspidi jäetakse lihtsuse mõttes $*$ ära, $s * t$ asemel kirjutatakse st.

Definitsioon 1.3 ([2], Definitsioon 1.4.24)**.** Olgu ${}_SA$ vasakpoolne S-polügoon ja A_T parempoolne T-polügoon. Kui

$$(s \cdot a) \cdot t = s \cdot (a \cdot t)$$

iga $a \in A, s \in S$ ja $t \in T$ korral, siis saadud polügooni nimetatakse (S, T)**-bipolügooniks** ja tähistatakse ${}_SA_T$.

Definitsioon 1.4. Olgu S poolrühm, A_S parempoolne S-polügoon ja ${}_SB$ vasakpoolne S-polügoon. Olgu p vähim ekvivalentsiseos hulgal $A \times B$, mille korral (as, b) ja (a, sb) on seoses iga $a \in A$, $b \in B$ ja $s \in S$ korral. Faktorhulka $(A \times B)/p$ nimetatakse A_S ja ${}_SB$ **tensorkorrutiseks** ja tähistatakse $A_S \otimes {}_SB$ või $A \otimes_S B$. Paari

(a, b) ekvivalentsiklassi tähistatakse $a \otimes b$. Seega iga $a \in A, b \in B$ ja $s \in S$ korral $as \otimes b = a \otimes sb$.

Definitsioon 1.5 ([4])**.** Parempoolset S-polügooni A_S üle poolrühma S nimetatakse **püsivaks**, kui kujutus

$$\mu_{A_S} : A \otimes_S S \to A, \quad a \otimes s \mapsto as$$

on bijektiivne. Poolrühm S on **püsiv** kui kujutus $\mu_{S_S} : S \otimes S \to S, s \otimes s' \mapsto ss'$ on bijektiivne.

Definitsioon 1.6. Hulga A **ühikelemendiks** nimetatakse elementi 1, mille korral $a1 = 1a = a$ iga $a \in A$ korral. Poolrühma, millel on ühikelement nimetatakse **monoidiks**.

Lause 1.7. *Iga monoid on püsiv poolrühm.*

Tõestus. Olgu meil monoid M ning ühikelement $1 \in M$. Peame tõestama, et kujutus $\mu_{M_M} : M \otimes M \to M$, $m \otimes m' \to mm'$ on bijektiivne. Iga $m \in M$ korral

$$\mu_{M_M}(1 \otimes m) = 1 \cdot m = m,$$

seega kujutus μ_{M_M} on sürjektiivne.

Olgu $a, b, a', b' \in M$ ning $ab = a'b'$. Siis

$$a \otimes b = ab \otimes 1 = a'b' \otimes 1 = a' \otimes b'.$$

Seega on kujutus ka injektiivne ning M on püsiv poolrühm. $\square$

Definitsioon 1.8. Olgu $f : S \to R$ mingi kujutus poolrühmade vahel. Kui $f(ab) = f(a)f(b)$ iga $a, b \in S$ korral, nimetatakse kujutust f **poolrühmade homomorfismiks**.

Olgu $f : R \to S$ poolrühmade homomorfism. Kui A_S on parempoolne S-polügoon, siis defineerides

$$a \cdot r = af(r)$$

iga $a \in A$ ja $r \in R$ korral saame parempoolse R-toime hulgal A, sest

$$(a \cdot r) \cdot t = (af(r))f(t) = a(f(r)f(t))$$

iga $a \in A$ ja $r, t \in S$ korral. Saadud R-polügooni tähistame kui A_R^f.

Definitsioon 1.9 ([3])**.** Poolrühma homomorfismi $f : R \to S$ nimetatakse **paremalt püsivaks**, kui S_R^f on püsiv. Vasakult püsivad homomorfismid defineeritakse analoogiliselt. Poolrühma homomorfismi nimetatakse **püsivaks**, kui see on paremalt ja vasakult püsiv.

Lemma 1.10 ([3])**.** *Poolrühmade homomorfism $f : R \to S$, $r \to f(r)$ on paremalt püsiv parajasti siis, kui $S = Sf(R)$ ja iga $s, t \in S$ ja $r, p \in R$ korral*

$$sf(r) = tf(p) \Rightarrow s \otimes r = t \otimes p \ \ \textit{tensorkorrutises} \ \ S \otimes_R R.$$

Tõestus. Homomorfism f on paremalt püsiv, kui S_R^f on püsiv ehk

$$\mu_{S_R^f} : S \otimes R \to S, \quad s \otimes r \mapsto sf(r)$$

on bijektiivne.

Funktsioon $\mu_{S_R^f}$ on sürjektiivne parajasti siis, kui kõik poolrühma S elemendid on esitatavad kujul $sf(r)$, kus $s \in S$ ja $r \in R$. See tähendab, et $S = Sf(R)$.

Funktsioon $\mu_{S_R^f}$ on injektiivne parajasti siis, kui

$$sf(r) = tf(p) \Rightarrow s \otimes r = t \otimes p \ \ \text{tensorkorrutises} \ \ S \otimes_R R.$$

Seega lemma kehtib. □

Definitsioon 1.11. Tähistame elemendi a ekvivalentsiklassi ekvivalentsiseose ρ järgi kui a/ρ. Kõikide ekvivalentsiklasside hulka nimetatakse **faktorhulgaks** seose ρ järgi ja tähistatakse

$$A/\rho = \{a/\rho \mid a \in A\}.$$

Definitsioon 1.12. Kujutuse $f : X \to Y$ **tuumaks** nimetatakse hulka

$$\ker(f) = \{(x, y) \mid f(x) = f(y)\} \subset X^2.$$

Definitsioon 1.13. **Seosest indutseeritud ekvivalentsiseoseks** nimetatakse vähimat ekvivalentsiseost, mis antud seost sisaldab.

2 Hulkade homomorfismiteoreem ja selle rakendused

Selles peatükis tõestatakse hulkade homomorfismiteoreem ning näidatakse, kuidas selle abil funktsioonide korrektselt defineeritust tõestada.

Teoreem 2.1 ([2], Teoreem 1.1.8. Hulkade homomorfismiteoreem)**.** *Olgu X hulk, p seos hulgal X ning ρ olgu seosest p indutseeritud ekvivalentsiseos. Olgu $\pi : X \to X/\rho$, $x \mapsto x/\rho$. Siis kujutus*

$$\varphi : \{f \mid f \colon X/\rho \to Y\} \to \{g \mid g \colon X \to Y\,, p \subseteq \ker(g)\}\,, \quad f \mapsto f \circ \pi$$

on bijektsioon.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dr, "g"'] & & X/\rho \arrow[dl, "f"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

Tõestus. Näitame, et funktsioon φ on korrektselt defineeritud ehk määramis- ja muutumispiirkonnad ühtivad definitsiooniga. Tõepoolest,

$$f : X/\rho \to Y, \pi : X \to X/\rho \Rightarrow f \circ \pi : X \to Y.$$

Olgu $(x, y) \in p$. Siis $(x, y) \in \rho$ ehk $x/\rho = y/\rho$. Seega $f(x/\rho) = f(y/\rho)$ ja $(f \circ \pi)(x) = (f \circ \pi)(x)$. Seega $(x, y) \in \ker(f \circ \pi)$. Oleme näidanud, et $p \subseteq \ker(f \circ \pi)$. Seega,

$$\varphi : \{f \mid f \colon X/\rho \to Y\} \to \{g \mid g \colon X \to Y\,, p \subseteq \ker(g)\}\,, \quad f \mapsto f \circ \pi$$

on korrektselt defineeritud.

Näitame, et funktsioon φ on injektiivne. Olgu $\varphi(f_1) = \varphi(f_2)$ ehk $f_1 \circ \pi = f_2 \circ \pi$.

Siis $(f_1 \circ \pi)(x) = (f_2 \circ \pi)(x)$ iga $x \in X$ korral. Seega

$$f_1(x/\rho) = (f_1 \circ \pi)(x) = (f_2 \circ \pi)(x) = f_2(x/\rho)$$

ehk $f_1 = f_2$. Järelikult funktsioon φ on injektiivne.

Näitame, et funktsioon on sürjektiivne. Olgu antud funktsioon $g : X \to Y$, kus $p \subseteq \ker(g)$. Olgu (x, y) seoses p. Siis $g(x) = g(y)$. Samuti $g(x) = g(x)$ ja $g(y) = g(x)$. Lisaks kui $g(x) = g(y)$ ja $g(y) = g(z)$, siis $g(x) = g(z)$. Järelikult $\ker(g)$ on ekvivalentsiseos, mis sisaldab seost p. Seega sisaldab see ka vähimat ekvivalentsiseost, mis sisaldab seost p, ehk $\rho \subseteq \ker(g)$.

Defineerime $h : X/\rho \to X, x/\rho \mapsto x$, kus valime igast ρ-klassist ühe elemendi x ja h kujutub selleks elemendiks. Defineerime $f = g \circ h$. Kuna $\rho \subseteq \ker(g)$, siis f ei sõltu kõrvalklassi esindaja valikust. Samuti $f \circ \pi = (g \circ h) \circ \pi = g$, seega oleme leidnud sobiva originaali. Järelikult funktsioon on sürjektiivne ja seega ka bijektiivne. $\square$

Definitsioon 2.2. Olgu A_S ja ${}_SB$ S-polügoonid ja olgu C hulk. Kujutust $f : A \times B \to C$ nimetatakse **balansseeritud kujutuseks**, kui $f(as, b) = f(a, sb)$ iga $a \in A, b \in B$ ja $s \in S$ korral.

Lemma 2.3 (Tensorkorrutise universaalomadus)**.** *Olgu A_S ja ${}_SB$ S-polügoonid. Olgu $\pi : A \times B \to A \otimes_S B, (a, b) \mapsto a \otimes b$. Siis kujutus*

$$\begin{aligned}\varphi : \{f \mid f \colon A \otimes_S B \to C\} &\to \{g \mid g \colon A \times B \to C\,, g \text{ on balansseeritud kujutus}\}\\ f &\mapsto f \circ \pi\end{aligned}$$

on bijektsioon.

$$\begin{tikzcd} A \times B \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dr, "g"'] & & A \otimes_S B \arrow[dl, "f"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

Tõestus. Olgu p seos hulgal $A \times B$, mille korral (as, b) ja (a, sb) on seoses iga $a \in A$,

$b \in B$ ja $s \in S$ korral. Siis $A \otimes_S B = A \times B/\rho$, kus ρ on seosest p indutseeritud ekvivalentsiseos.

Edasi on vaja näidata, et $g : A \times B \to C$ on balansseeritud parajasti siis, kui $p \subseteq \ker(g)$. Homomorfismiteoreemi kohaselt on kujutus φ bijektiivne, kui $p \subseteq \ker(g)$. Olgu (as, b) ja $(a, sb) \in p$. Siis $g(as, b) = g(a, sb)$ ehk $((as, b), (a, sb)) \subseteq \ker(g)$. Seega $p \subseteq \ker(g)$. Järelikult funktsioon φ on bijektiivne. $\square$

Märkus 2.4. Praktikas on kohati tarvis defineerida tensorkorrutisest lähtuvaid kujutusi. Näiteks võiksime soovida defineerida kujutuse

$$f \colon A \otimes_S B \to C\,, \quad a \otimes b \mapsto g(a, b)\,.$$

kus $g(a, b)$ on mingi avaldis. Tensorkorrutise universaalomaduse põhjal on see korrektselt defineeritud, kui kujutus

$$g : A \times B \to C, \quad (a, b) \mapsto g(a, b)$$

on balansseeritud.

Definitsioon 2.5. Parempoolsete S-polügoonide **morfismiks** nimetatakse kujutust $f : A_S \to B_S$, kui

$$f(as) = f(a)s$$

iga $a \in A$ ja $s \in S$ korral. Vasakpoolsete S-polügoonide morfismid defineeritakse analoogiliselt.

Lause 2.6. *Kui $f : A_S \to A'_S$ on parempoolsete S-polügoonide morfism ja $g : {}_SB \to {}_SB'$ on vasakpoolsete S-polügoonide morfism, siis kujutus*

$$f \otimes g : A \otimes B \to A' \otimes B'\,, \quad a \otimes b \mapsto f(a) \otimes g(b)$$

on korrektselt defineeritud.

Tõestus. Defineerime kujutuse $\varphi : A \times B \to A' \otimes B', \quad (a, b) \mapsto f(a) \otimes g(b)$. Olgu $a \in A, s \in S$ ja $b \in B$. Siis

$$\varphi((as, b)) = f(as) \otimes g(b) = f(a)s \otimes g(b) = f(a) \otimes sg(b) = f(a) \otimes g(sb) = \varphi(a, sb).$$

Seega on φ balansseeritud kujutus ning $f \otimes g$ on tensorkorrutise universaalomaduse põhjal korrektselt defineeritud. □

Lemma 2.7. *Polügoonide B_S ja ${}_SA_T$ korral saab tensorkorrutise $B \otimes_S A$ muuta parempoolseks T-polügooniks defineerides*

$$(b \otimes a) \cdot t = b \otimes a \cdot t.$$

Tõestus. Näitame, et toime on korrektselt defineeritud. Selleks näitame, et kujutus

$$f : B \times A \to B \otimes_S A, \quad (b, a) \mapsto b \otimes a \cdot t$$

on balansseeritud. Olgu $b \in B, a \in A$ ja $s \in S$. Siis

$$f(bs, a) = bs \otimes a \cdot t = b \otimes sa \cdot t = f(b, sa).$$

Järelikult f on balansseeritud ehk toime on korrektselt defineeritud.

Peame näitama, et iga $b \otimes a \in B \otimes_S A$ ja $s, t \in T$ korral

$$((b \otimes a) \cdot s) \cdot t = b \otimes a \cdot (st).$$

Olgu $b \otimes a \in B \otimes_S A$ ja $s, t \in T$. Siis

$$((b \otimes a) \cdot s) \cdot t = (b \otimes a \cdot s) \cdot t = b \otimes a \cdot s \cdot t = b \otimes a \cdot (st).$$

□

3 Üldised tulemused

Selles peatükis tõestatakse mõned üldised tulemused püsivate homomorfismide kohta.

Lemma 3.1. *Poolrühma S samasusteisendus on püsiv parajasti siis, kui poolrühm on püsiv.*

Tõestus. Olgu $f : S \to S$ samasusteisendus. Kasutame selleks lemmat 1.10.

Paremalt püsivuse tingimuseks on, et $S = Sf(S)$ ehk $S = SS$. See kehtib parajasti siis, kui $\mu_{S_S} : S \otimes S \to S, s \otimes s' \mapsto ss'$ on sürjektiivne, sest siis on iga S element esitatav kahe elemendi korrutisena. Analoogiline tulemus kehtib vasakult püsivuse kohta.

Paremalt püsivuse teiseks tingimuseks on, et

$$sf(r) = tf(p) \Rightarrow s \otimes r = t \otimes p \ \text{ tensorkorrutises } \ S \otimes_S S.$$

See kehtib parajasti siis, kui $\mu_{S_S} : S \otimes S \to S, s \otimes s' \mapsto ss'$ on injektiivne. Analoogiline tulemus kehtib ka vasakult püsivuse kohta.

Järelikult on samasusteisendus püsiv parajasti siis, kui $\mu_{S_S} : S \otimes S \to S, s \otimes s' \mapsto ss'$ on bijektiivne, ehk poolrühm S on püsiv. $\square$

Definitsioon 3.2. Poolrühma automorfismiks nimetatakse poolrühma endomorfismi, mis on bijektiivne.

Lause 3.3. *Olgu S püsiv poolrühm. Siis kõik poolrühma S automorfismid on püsivad.*

Tõestus. Olgu S püsiv poolrühm. Siis $\mu_{S_S} : S \otimes S \to S, a \otimes r \mapsto ar$ on bijektiivne. Olgu f poolrühma S automorfism. Tahame näidata, et kujutus

$$\mu_{S^f_S} : S^f_S \otimes S \to S, \quad a \otimes r \mapsto af(r)$$

on bijektiivne. Vaatame kolmnurka

$$\begin{tikzcd}
S_S^f \otimes_S S \arrow[d, "\varphi \overset{\mathrm{def}}{=} (a\otimes r \mapsto a \otimes f(r))"'] \arrow[dr, "\mu_{S_S^f}"] & \\
& S \\
S \otimes_S S \arrow[ur, "\mu_{S_S}"'] &
\end{tikzcd}$$

Näitame lemma 1.13 abil, et φ on korrektselt defineeritud. Vaatame kujutust

$$g : S_S^f \times S \to S \otimes_S S, \quad (a, r) \mapsto a \otimes f(r).$$

Olgu $a, s, r \in S$. Siis

$$g(a \cdot s, r) = a \cdot s \otimes f(r) = af(s) \otimes f(r) = a \otimes f(s)f(r) = a \otimes f(sr) = g(a, sr).$$

Seega g on balansseeritud kujutus ehk φ on korrektselt defineeritud.

Näitame, et kolmnurk kommuteerub. Tõepoolest,

$$(\mu_{S_S} \circ \varphi)(a \otimes r) = \mu_{S_S}(a \otimes f(r)) = af(r) = \mu_{S_S^f}(a \otimes r).$$

Seega kolmnurk kommuteerub.

Järelikult kui vasakpoolne funktsioon on bijektiivne, siis on $\mu_{S_S^f}$ bijektiivne, sest μ_{S_S} on bijektiivne. Seega on vaja näidata, et φ on bijektiivne funktsioon. Selleks konstrueerime funktsioonile pöördkujutuse. Vaatame funktsiooni

$$\varphi^{-1} : S \otimes_S S \to S^f \otimes_S S, \quad a \otimes r \mapsto a \otimes f^{-1}(r).$$

Funktsioon f^{-1} leidub, kuna f on bijektiivne. Veelgi enam, ka f^{-1} on poolrühma S automorfism.

Näitame lemma 2.3 abil, et φ on korrektselt defineeritud. Vaatame kujutust

$$g : S \times S \to S^f \otimes_S S, \quad (a, r) \mapsto a \otimes f^{-1}(r).$$

Olgu $a, s, r \in S$. Siis

$$\begin{aligned} g(a \cdot s, r) &= a \cdot s \otimes f^{-1}(r) = af(f^{-1}(s)) \otimes f^{-1}(r) = a \cdot f^{-1}(s) \otimes f^{-1}(r) \\ &= a \otimes f^{-1}(s)f^{-1}(r) = a \otimes f^{-1}(sr) = g(a, sr). \end{aligned}$$

Seega g on balansseeritud kujutus ehk φ^{-1} on korrektselt defineeritud.

Paneme tähele, et

$$(\varphi \circ \varphi^{-1})(a \otimes r) = \varphi(a \otimes f^{-1}(r)) = a \otimes f(f^{-1}(r)) = a \otimes r$$

ja

$$(\varphi^{-1} \circ \varphi)(a \otimes r) = \varphi^{-1}(a \otimes f(r)) = a \otimes f^{-1}(f(r)) = a \otimes r.$$

Seega φ^{-1} on funktsiooni φ pöördfunktsioon ehk φ on bijektiivne. Järelikult on ka $\mu_{S^f_S}$ bijektiivne ehk f on püsiv endomorfism. $\square$

Lemma 3.4. *Kui $f : A_S \to A'_S$ on mingi parempoolsete S-polügoonide isomorfism ning $g : {}_SB \to {}_SB'$ on vasakpoolsete S-polügoonide isomorfism, siis kujutus $f \otimes g : A \otimes_S B \to A' \otimes_S B'$ on bijektsioon.*

Tõestus. Lause 2.6 põhjal on $f \otimes g$ korrektselt defineeritud. Näitame, et see on bijektiivne. Selleks konstrueerime sellele pöördkujutuse. Vaatame kujutust

$$f^{-1} \otimes g^{-1} : A' \otimes_S B' \to A \otimes_S B, \quad (f^{-1} \otimes g^{-1})(a \otimes b) \mapsto f^{-1}(a) \otimes g^{-1}(b).$$

Olgu $a \in A$ ja $b \in B$. Siis

$$((f \otimes g) \circ (f^{-1} \otimes g^{-1}))(a, b) = (f \otimes g)(f^{-1}(a) \otimes g^{-1}(b)) = f(f^{-1}(a)) \otimes g(g^{-1}(b)) = a \otimes b$$

ning

$$((f^{-1}\otimes g^{-1})(f\otimes g))(a\otimes b) = (f^{-1}\otimes g^{-1})(f(a)\otimes f(b)) = f^{-1}(f(a))\otimes g^{-1}(g(b)) = a\otimes b.$$

Seega leidub kujutusel $f \otimes g$ pöördkujutus, mis on lause 2.6 põhjal korrektselt defineeritud, mistõttu on $f \otimes g$ tensorkorrutiste isomorfism. $\square$

Lause 3.5 ([3], lemma 7.1)**.** *Mistahes poolrühmade püsivate homomorfismide kompositsioon on püsiv.*

Tõestus. Olgu antud poolrühmade homomorfismid

$$T \xrightarrow{g} R \xrightarrow{f} S.$$

Vaatleme diagrammi

$$\begin{tikzcd} S^f_R \otimes R^g_T \otimes T \arrow[r, "id_S \otimes \mu_{R^g_T}"] \arrow[d, "\mu_{S^f_R} \otimes id_T"'] & S^f_R \otimes R^g_T \arrow[d, "\mu_{S^f_R}"] \\ S^{fg}_T \otimes T \arrow[r, "\mu_{S^{fg}_T}"'] & S^f_R. \end{tikzcd}$$

On vaja tõestada, et $\mu_{S^{fg}_T}$ on bijektiivne. Selleks piisab näidata, et diagramm kommuteerub ja ülejäänud funktsioonid seal on bijektiivsed. Teame, et $\mu_{S^f_R}$ ja $\mu_{R^g_T}$ on bijektiivsed.

Et tensorkorrutisi diagrammi ülemises reas saaks moodustada, peab ${}_RR^g_T$ olema (R,T)-bipolügoon. Olgu $r, r' \in R$ ja $t \in T$. Siis

$$(r \cdot r') \cdot t = rr'g(t) = r \cdot (r'g(t)) = r \cdot (r' \cdot t).$$

Järelikult ${}_RR^g_T$ on (R,T)-bipolügoon.

Näitame, et $\mu_{S^f_R} : S^f_R \otimes R^g_T \to S^{fg}_T$ on parempoolsete T-polügoonide homomorfism. Sel juhul on see ka parempoolsete T- polügoonide isomorfism. Olgu $s \in S, r \in R$ ja $t \in T$. Siis

$$\mu_{S^f_R}((s \otimes r)t) = \mu_{S^f_R}(s \otimes rg(t)) = sf(rg(t)) = sf(r)f(g(t)) = \mu_{S^f_R}(s \otimes r)t$$

ehk $\mu_{S^f_R}$ on parempoolsete T-polügoonide homomorfism.

Näitame, et $\mu_{R^g_T} : R^g_T \otimes T \to R^g_T$ on vasakpoolsete R-polügoonide homomorfism. Siis on see ka vasakpoolsete R-polügoonide isomorfism. Olgu $r, r' \in R$ ja $t \in T$. Siis

$$\mu_{R^g_T}(r \cdot (r' \otimes t)) = \mu_{R^g_T}(rr' \otimes t) = rr'g(t) = r \cdot \mu_{R^g_T}(r' \otimes t)$$

ehk $\mu_{R^g_T}$ on vasakpoolsete R-polügoonide homomorfism.

Lemma 3.4 põhjal on ka $id_S \otimes \mu_{R^g_T}$ ja $\mu_{S^f_R} \otimes id_T$ isomorfismid, mistõttu on need bijektiivsed.

On veel vaja näidata, et diagramm kommuteerub. Ühelt poolt

$$(\mu_{S^f_R} \circ (id_S \otimes \mu_{R^g_T}))(s \otimes r \otimes t) = \mu_{S^f_R}(s \otimes rg(t)) = sf(rg(t)) = sf(r)f(g(t)).$$

Teisalt

$$(\mu_{S^{fg}_T} \circ (\mu_{S^f_R} \otimes id_T))(s \otimes r \otimes t) = \mu_{S^{fg}_T}(sf(r) \otimes t) = sf(r)f(g(t)),$$

seega diagramm kommuteerub. Järelikult $\mu_{S^{fg}_T}$ on bijektiivne ehk püsivate homomorfismide kompositsioon on püsiv. $\square$

Järeldus 3.6. *Poolrühma püsivad endomorfismid moodustavad poolrühma. Püsiva poolrühma püsivad endomorfismid moodustavad monoidi.*

4 Naturaalarvude poolrühma endomorfismid

Vaatame poolrühma $(\mathbb{N}, +)$. Täpsustame, et siin ei ole 0 naturaalarv. Poolrühma samasusteisendus id_S on püsiv parajasti siis, kui S on püsiv. Kuna 1 ei esitu kahe teise naturaalarvu summana, pole kujutis $\mu_{\mathbb{N}_\mathbb{N}}$ sürjektiivne, seega pole poolrühm $(\mathbb{N}, +)$ püsiv. Kuna $(\mathbb{N}, +)$ pole püsiv, ei moodusta selle poolrühma endomorfismid monoidi.

Olgu $A_\mathbb{N}$ parempoolne polünoom üle poolrühma $(\mathbb{N}, +)$. Vaatame tensorkorrutise $A \otimes_\mathbb{N} \mathbb{N}$ elementi $a \otimes n$. Siis

$$a \otimes n = a \otimes (n-1) + 1 = a(n-1) \otimes 1.$$

Seega saame kõiki ekvivalentsiklasse vaadata kujul $a' \otimes 1$, kus $a' \in A$.

Vaatame kujutust $h : A \to A \otimes_\mathbb{N} \mathbb{N}$, $a \mapsto a \otimes 1$. Eelneva põhjal on ilmne, et kujutus on sürjektiivne.

Lemma 4.1. *Kujutus $h : A \to A \otimes_\mathbb{N} \mathbb{N}$, $a \mapsto a \otimes 1$ on parempoolsete $\mathbb{N}$-polügoonide isomorfism.*

Tõestus. Näitame, et kujutus on bijektiivne, konstrueerides sellele pöördkujutuse. Defineerime kujutuse $h^{-1} : A \otimes_\mathbb{N} \mathbb{N} \to A$:

$$h^{-1}(a \otimes n) = \begin{cases} a \cdot (n-1), \ kui \ n \neq 1 \\ a, \ kui \ n = 1. \end{cases}$$

Defineerime kujutuse $g : A_\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to A$, $g(a, n) \mapsto h^{-1}(a \otimes n)$. Näitame, et kujutus g on balansseeritud. Olgu $a \in A$ ja $s, n \in \mathbb{N}$. Kui $n \neq 1$, siis

$$g(as, n) = as(n-1) = a(s+n-1) = g(a, s+n).$$

Kui $n = 1$, siis

$$g(as, n) = as = a(s + n - 1) = g(a, s + n).$$

Seega kujutus g on balansseeritud. Järelikult lemma 2.3 põhjal on h^{-1} korrektselt defineeritud ning h on bijektiivne.

Näitame, et h ja h^{-1} on teineteise pöördkujutused. Olgu $a \in A$ ja $n \in \mathbb{N}$, kusjuures $n \neq 1$. Siis

$$h^{-1}(h(a)) = h^{-1}(a \otimes 1) = a$$

ning

$$h(h^{-1}(a \otimes n)) = h(a \cdot (n - 1)) = a \cdot (n - 1) \otimes 1 = a \otimes n.$$

Olgu $a \in A$ ja $n = 1 \in \mathbb{N}$. Siis

$$h(h^{-1}(a \otimes n)) = h(a) = a \otimes 1 = a \otimes n.$$

On veel vaja näidata, et h on polügoonide homomorfism. Selleks on vaja, et iga $a \in A$ ja $n \in \mathbb{N}$ korral kehtiks $h(a \cdot n) = h(a) \cdot n$. Olgu $a \in A$ ja $n \in \mathbb{N}$. Siis

$$h(a \cdot n) = a \cdot n \otimes 1 = a \otimes n + 1 = a \otimes n \cdot 1 = a \otimes 1 \cdot n = (a \otimes 1) \cdot n = h(a) \cdot n.$$

Seega h on isomorfism. $\square$

Lause 4.2. *Poolrühma* $(\mathbb{N}, +)$ *endomorfismi* f *püsivuse tingimuseks on, et kujutus*

$$g : \mathbb{N}^f_{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}^f_{\mathbb{N}}, \quad n \mapsto n \cdot f(1) = n + f(1)$$

on bijektiivne.

Tõestus. Vaatame kujutust $g : A \to A$, $a \mapsto a \cdot 1$, kus $A_{\mathbb{N}}$ on parempoolne $\mathbb{N}$-polügoon.

$$\begin{tikzcd} & A \otimes \mathbb{N} \arrow[dr, "\mu_{A_{\mathbb{N}}}"] & \\ A \arrow[ur, "h"] \arrow[rr, "g"] & & A \end{tikzcd}$$

Iga $a \in A$ korral

$$g(a) = a \cdot 1 = \mu_{A_{\mathbb{N}}}(a \otimes 1) = (\mu_{A_{\mathbb{N}}} \circ h)(a).$$

Seega kolmnurk kommuteerub. Kuna h on bijektiivne, siis $\mu_{A_{\mathbb{N}}}$ on bijektiivne parajasti siis, kui g on bijektiivne. Seega on $A_{\mathbb{N}}$ paremalt püsivuse tingimuseks, et $g : A \to A, a \mapsto a \cdot 1$ on bijektiivne.

Kuna poolrühm $(\mathbb{N}, +)$ on kommutatiivne, on vasakult ja paremalt püsivus samaväärsed. Seega on poolrühma endomorfismi $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ püsivuse tingimuseks, et $g : \mathbb{N}_{\mathbb{N}}^{f} \to \mathbb{N}_{\mathbb{N}}^{f}$, $n \mapsto n \cdot f(1) = n + f(1)$ on bijektiivne. □

Teoreem 4.3. *Olgu* $(\mathbb{N}, +)$ *aditiivne naturaalarvude poolrühm ja olgu kujutus* $f : (\mathbb{N}, +) \to (\mathbb{N}, +)$*. Siis* f *on endomorfism parajasti siis, kui leidub* $k \in \mathbb{N}$ *nii, et iga* $n \in \mathbb{N}$ *korral*

$$f(n) = kn.$$

Tõestus. Tarvilikkus. Olgu $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ endomorfism. Olgu $k = f(1)$. Kuna $n = 1 + \cdots + 1$ iga n korral, siis

$$f(n) = f(1 + \cdots + 1) = f(1) + \cdots + f(1) = k + \cdots + k = kn.$$

Seega iga $n \in \mathbb{N}$ korral $f(n) = kn$.

Piisavus. Olgu $k \in \mathbb{N}$ selline, et $f(n) = kn$. Siis iga $m, n \in \mathbb{N}$ korral

$$f(m + n) = k(m + n) = km + kn = f(m) + f(n).$$

Seega f on poolrühma $(\mathbb{N}, +)$ endomorfism. □

Lause 4.4. *Poolrühmal* $(\mathbb{N}, +)$ *ei leidu ühtegi püsivat endomorfismi.*

Tõestus. Et endomorfism f oleks püsiv, peab $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto n + f(1)$ olema bijektiivne. Endomorfismid f on kujul $f(n) = kn$, kus $k \in \mathbb{N}$. Seega peab $g(n) = n + k$, kus $k \in \mathbb{N}$ olema bijektiivne.

Kuna $n, k \in \mathbb{N}$, siis $g(n) = n + k \geq 1 + 1 = 2$, mistõttu ei leidu naturaalarvu, mille korral $g(n) = 1$. Seega pole kujutus g sürjektiivne ega ka bijektiivne. $\square$

5 Monoidi endomorfismide püsivus

Selles peatükis räägitakse monoididide endomorfismide püsivusest ja täisarvude aditiivse poolrühma endomorfismide püsivusest.

Definitsioon 5.1. Olgu S ja M monoidid. Kujutust $f : S \to M$ nimetatakse **monoididide homomorfismiks**, kui $f(as) = f(a)f(s)$ iga $a, s \in S$ korral ning kui $f(1_S) = 1_M$. Monoididide homomorfismi $f : M \to M$ nimetatakse **monoididide endomorfismiks**.

Teoreem 5.2 ([3], teoreem 7.2)**.** *Kui $f : S \to M$ on poolrühmade homomorfism ning S ja M on monoidid, siis f on püsiv parajasti siis, kui f on monoididide homomorfism.*

Tõestus. Olgu f monoididide homomorfism. Lemma 1.10 põhjal on poolrühmade homomorfismi $f : S \to M$ paremalt püsivuse ja seega ka püsivuse tarvilikuks tingimuseks, et $M = Mf(S)$. Olgu monoidi S ühikelemendiks 1_S. Kuna kõik monoididide homomorfismid säilitavad ühikelementi, siis $1_M = f(1_S)$ ning $M = Mf(1_S)$. Seega on lemma see tingimus täidetud.

Kontrollime lemma teist tingimust. Olgu $a, b, a', b' \in M$ ning $af(b) = a'f(b')$. Siis

$$a \otimes b = af(b) \otimes 1_M = a'f(b') \otimes 1_M = a' \otimes b'.$$

Seega on monoididide homomorfism $f : S \to M$ paremalt püsiv. Vasakult püsivuse saab tõestada analoogiliselt.

Olgu $f : S \to M$ püsiv poolrühmade homomorfism. Siis $M = Mf(S)$. Olgu $m \in M$. Siis leiduvad $m' \in M, s \in S$ nii, et

$$m = m'f(s) = m'f(s1_S) = m'f(s)f(1_S).$$

Lisaks $M = f(S)M$, seega leiduvad $m'' \in M$ ja $s' \in S$ nii, et

$$m = f(s')m'' = f(1_S s')m'' = f(1_S)f(s')m''.$$

Järelikult on $f(1_S)$ monoidi M parem- ja vasakpoolne ühikelement ehk $f(1_S) = 1_M$. $\square$

Järeldus 5.3. *Iga poolrühmade endomorfism $f : G \to G$, kus G on rühm, on püsiv.*

Tõestus. Olgu antud rühm G ühikelemendiga 1 ja poolrühmade endomorfism $f : G \to G$. Olgu $g \in G$ idempotent ehk $g = gg$. Siis

$$f(g) = f(gg) = f(g)f(g)$$

ehk ka $f(g)$ on idempotent. Seega viib kujutus f idempotendi idempotendiks. Kuna rühma ainus idempotent on ühikelement, siis $f(1) = 1$. Järelikult f säilitab ühikelementi ja on teoreemi 5.2 põhjal püsiv. $\square$

Järeldus 5.4. *Poolrühma $(\mathbb{Z}, +)$ kõik endomorfismid on püsivad.*

Kokkuvõte

Käesolevas bakalaureusetöös uuriti poolrühmade vahelisi püsivaid homomorfisme. Töös toodi välja hulkade homomorfismiteoreem ning sellest järelduv tensorkorrutise universaalomadus.

Töös tõestati, et mistahes poolrühmade püsivate homomorfismide kompositsioon on püsiv. Lisaks tõestati, et naturaalarvude aditiivsel poolrühmal pole ühtegi püsivat endomorfismi. Viimaks tõestati, et kõik poolrühmade endomorfismid hulkade vahel on püsivad.

Kuna tegemist on väga uue teemaga, on veel palju võimalusi töö jätkamiseks. Näiteks saaks välja arvutada, missugused püsivad endomorfismid on vasakult või paremalt korrutamisega poolrühmal. Lisaks saaks otsida püsivaid poolrühmasid, mille kõik endomorfismid ei ole püsivad.

Viited

[1] M. Kilp (1998). Algebra II. Tartu Ülikool.

[2] M. Kilp, U. Knauer, A. V. Mikhalev (2000). Monoids, Acts and Categories. De Gruyter.

[3] V. Laan, L. Marín (2023). Firm homomorphisms of semigroups. Avaldamata käsikiri.

[4] V. Laan, L. Márki, Ü. Reimaa (2018). Morita equivalence of semigroups revisited: Firm semigroups. Journal of Algebra. 505, 247–270.

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Kadi Siigur,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) minu loodud teose "Poolrühma püsivad endomorfismid", mille juhendajad on PhD Ülo Reimaa ja prof. Valdis Laan, reprodutseerimiseks eesmärgiga seda säilitada, sealhulgas lisada digitaalarhiivi DSpace kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.

2. Annan Tartu Ülikoolile loa teha punktis 1 nimetatud teos üldsusele kättesaadavaks Tartu Ülikooli veebikeskkonna, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace kaudu Creative Commonsi litsentsiga CC BY NC ND 4.0, mis lubab autorile viidates teost reprodutseerida, levitada ja üldsusele suunata ning keelab luua tuletatud teost ja kasutada teost ärieesmärgil, kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.

3. Olen teadlik, et punktides 1 ja 2 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

4. Kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei riku ma teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse õigusaktidest tulenevaid õigusi.

Kadi Siigur

09.05.2023