

Propädeutik

der

G e o m e t r i e

zugleich

ein Leitfaden für den Elementarunterricht

in der Planimetrie

von

A. Paulson. [Gustav] [Alexand.]

Hofrath und Ritter, Oberlehrer der Mathematik am Gymnasium in Dorspat.

5013

5013

Dorspat.

W. Gläfers Verlag.

1872.

Von der Censur gestattet.
Dorpat, den 20. Juni 1872.



6102

Vorwort.

Wenn gleich es erwiesen sein mag, daß der Erzählung, Ptolomäus Soter habe einst den Euklides gefragt, ob es keinen bequemeren Weg zum Verständniß der Geometrie gäbe, — aller historische Grund mangelt, so beweist doch diese vornehmlich durch Henr. Savile verbreitete Sage, daß man schon in so alten Zeiten das Bedürfniß nach einer Vorbereitung für das Verständniß der Geometrie gefühlt hat. Wie viel mehr mußte nicht dieses Bedürfniß rege werden, als die Geometrie mehr und mehr in den Schulen allgemeinen Eingang fand, und man anfing Kindern zuzumuthen, was selbst Jünglingen und Männern zu erfassen schwer geworden war. Es hat daher auch nicht an den eifrigsten Bestrebungen in dieser Richtung gefehlt, wie die zahlreichen methodologischen Erzeugnisse der letzten Decennien beweisen, die als „geometrische Formenlehre“ eine reichhaltige Literatur bilden.

Nicht bloßer Indolenz aber dürfen wir es zuschreiben, wenn der geometrische Unterricht an den höheren Lehranstalten noch meist unberührt von diesen Bestrebungen geblieben ist, sondern vielmehr wohl den nachhaltigen Wirkungen einer übermäßigen Verehrung des Euklid und seiner Methode. Denn, obgleich Philosophen wie Herbart — in seinem ABC der Anschauung — und später Trendelenburg — in seinen logischen Untersuchungen — es auf das evidenteste dargethan haben, daß die Euklidische Methode den Anforderungen der Wissenschaft nicht genügt, und bereits 1845 Bernhard Becker in einer Broschüre „Ueber die Methode des geometrischen Unterrichtes“ betitelt, gestützt auf die Forschungen seiner berühmten Lehrer Steiner und Trendelenburg, die entwickelnde genetische Methode nicht nur als die präcise wissenschaftliche, sondern auch als die einzig gedeihliche Lehrmethode in eben so beredter als geistvoller Weise begründet hat; so erscheinen doch fort und fort Lehrbücher der Geometrie, die als verschiedene Variationen der Euklidischen Methode, zur Belebung des Unterrichtes nicht mehr beitragen, als — wie Falke sich ausdrückt — die Vertauschung von daher und demnach bei einer mathematischen Schlußfolgerung.

Die fast chaotische Verwirrung in dem Euklidischen Systeme ist eine nothwendige Folge des Umstandes, daß die Anordnung des Stoffes einzig durch den streng logischen Beweis bestimmt ist. So gleicht dieses System einer Cycloppenmauer, welche auf willkürlich gewählte und genügend befestigte Grundsteine so aufgeführt wird, daß die folgenden Steine genau in die vorhandenen Lücken und Fugen gepaßt und gefügt werden. Wie hier jeder Stein, so hat in Euklid's System jeder Satz

nur die Bestimmung zu stützen, und gestützt zu werden, und nimmt für sich kein weiteres Interesse in Anspruch. Das Ganze aber macht den Eindruck der Starrheit und unzerstörbaren Festigkeit, ohne jeglichen Anspruch auf Planmäßigkeit und architektonische Schönheit. „Nicht an Umfang, noch an Gewißheit und Bündigkeit fehlt es ihr, aber an systematischer Eleganz und an philosophischer Durchsichtigkeit. Jeder Mangel hierin macht sich beim pädagogischen Gebrauch aufs Unangenehmste fühlbar, aufs Nachtheiligste wichtig, — da es für diesen Gebrauch nicht auf die Resultate, noch auf ihre Zuverlässigkeit, sondern auf das Denken selbst, und auf dessen musterhaften Gang ankommt“. — So urtheilt Herbart (S. ABC der Anschauung). Und Trendelenburg sagt: „Auf diese Weise schreitet die Wissenschaft durch eine zufällige Ansicht fort. — So scheint denn der Ruhm der Wissenschaft, die Nothwendigkeit, plötzlich zu verfliegen, oder doch wenigstens auf der Basis des Gegentheiles, auf zutreffendem Gerathewohl zu ruhen. So erscheinen Euklides Elemente, so Spinozas Ethik und welche Schriften sonst den wohlbefestigten Weg des Euklides einschlagen, Allenthalben ist eine kunstreiche Verkettung, aber nirgends ein Werden und Wachsen“.

Doch durch consequent entwickelnde Ableitung schreitet die Erkenntniß nicht fort. Gerade die scharfsinnigen Einfälle und die listigen Umwege, durch welche Euklid seine Sätze verschanzt, sind die geeignetsten Mittel, um in noch unbekannte Gebiete der Wissenschaft einzudringen. Daher der Enthusiasmus der hochgelehrten Mathematiker für die Euklidische Methode, und ihre Gleichgiltigkeit für „systematische Eleganz und philosophische Durchsichtigkeit“.

Dem Lehrer aber bietet diese Methode keine unerhebliche Bequemlichkeit dar. Der Mangel an Nothwendigkeit in der Reihenfolge der Lehrsätze schließt selbstverständlich jede Deduction aus. Wie jener Taschenspieler, der jede neue Production mit den Worten einleitete: „nun kommt wieder dies“, so kann auch der Euklidische Geometer nur seinen Satz hinstellen und verschanzen, und wenn der Schüler, ermüdet durch die künstlichen Verschlingungen und Windungen der Beweisführung, im Unmuth die Frage aufwirft: „Sa wozu ist denn der Satz überhaupt da? — wozu dient die ganze Geometrie? — so kann ihn der Lehrer nur mit der kurzen Antwort abfertigen: „sonst könnte ich den folgenden Satz nicht beweisen“ oder, „das kannst du erst begreifen, wenn du das ganze System durchgemacht hast.“ — So besteht denn die Thätigkeit des Lehrers im Wesentlichen nur im Aufgeben und Abfragen. Setzt man nun Sicherheit in der Reproduction durchgenommenen Materiales als Maasstab für die Beurtheilung, so kann ein Lehrer, bei genügender Consequenz und Strenge, leicht glänzend scheinende Erfolge erzielen. Das Bewußtsein nämlich mit dem Euklid im Besitze der ganzen geometrischen Wissenschaft zu sein, giebt dem auf sein treues Gedächtniß gestützten Schüler, eine Zuversicht und Sicherheit, wie sie ein Anderer, der dazu angehalten ist, den Beweis stets aus dem Wesen des Satzes selbst zu entwickeln, so daß er oft nicht weiß, ob er den betreffenden Satz gehabt hat oder nicht — nicht leicht

besitzt, namentlich nicht in kritischen Momenten. Freilich kann es denn auch einem solchen Schüler passiren, daß er eine kunstreiche und correcte Verkettung von Syllogismen an die Tafel schreibt, ohne zu merken, daß dieselbe in gar keiner Beziehung zum vorliegenden Satze steht. Als ich in einem solchen Falle den Schüler, nachdem er sein quod erat demonstrandum gesprochen hatte, aufforderte sich doch die Theses anzusehen, wischte er rasch den vermeintlichen Beweis ab, mit der kurzen Entschuldigung: „ach, das war ja der Beweis des folgenden Satzes“, und schrieb nunmehr den richtigen Beweis eben so geläufig nieder, die Tafel mit dem stolzen Bewußtsein verlassend, seine Sache vortrefflich gemacht zu haben. Welchen Begriff hatte wohl dieser Schüler von einem Beweise, welchen Nutzen hat er von dem geometrischen Unterrichte gehabt?!

Aber auch die eifrigsten Anhänger der Euklidischen Methode können nicht umhin zuzugestehen, daß es mit dem Erlernen der Geometrie nicht so recht gehen will, wenigstens nicht so gut, wie mit den Anfangsgründen der Arithmetik. Weil nun von den geometrischen Formeln keine Brücke zu dem streng geschlossenen Systeme führt, so sucht man durch geänderte Fassung, und durch möglichste Vereinfachung der Beweise, den Schülern verständlich zu werden; das Interesse aber durch einen reichen Anhang von Aufgaben zu erwecken. So sagt Unger in der Vorrede zu seiner Geometrie des Euklid: „Man findet allgemein, daß die Anfangsgründe der arithmetischen Wissenschaft leichter erlernt werden, als die der Geometrie; und der Grund hiervon liegt darin, daß in der Arithmetik die theoretischen Untersuchungen sogleich zu praktischen Regeln führen, durch deren Anwendung die mannigfachsten Aufgaben gelöst werden können“. — „Es ist sicher, daß der Unterricht in der Geometrie zu einem gleichen Erfolge führen muß, wenn man bei demselben auf eine ähnliche Weise verfährt. Hierzu ist es aber keineswegs nothwendig, ein neues System der Geometrie aufzustellen, sondern es kommt bloß darauf an, ein gutes Lehrbuch dieser Wissenschaft auf zweckmäßige Weise zu benutzen. Den geeignetsten Leitfaden zu einem solchen Unterricht besigen wir durch die Elemente des Euklid“. „Dieses Werk enthält nicht bloß die wahren Elemente der Geometrie vollständig und in einer dem Geiste der Wissenschaft entsprechenden Folge, sondern“... etc.

Was die „dem Geiste der Wissenschaft entsprechende Folge“ betrifft, so wurde die Unwissenschaftlichkeit dieser Folge oben kurz beleuchtet, und kann ausführlicher aus Trendelenburg (Logische Untersuchungen XIX, die Ableitung aus dem Begriff und die zufällige Ansicht) ersehen werden. In Betreff der arithmetischen Methode aber ist es Thatsache, daß kein einsichtsvoller Lehrer heutzutage mehr in der von Unger bezeichneten Weise in der Arithmetik unterrichtet; denn wer beginnt hier wohl mit „theoretischen Untersuchungen“, und geht dann zu „praktischen Regeln über, um so dem Schüler die Bedeutung und den Einfluß der theoretischen Sätze kennen zu lehren“?! — Seit Dierweg wenigstens ist es allgemeiner Gebrauch beim arithmetischen Un-

terrichte sofort mit Aufgaben zu beginnen. Durch die Lösung der geschickt gewählten Aufgaben soll das Kind selbst die Regeln und Gesetze der Arithmetik entdecken. So allein kann das Interesse belebt, so allein eine klare Einsicht in die Theorie bei den Schülern erzielt werden. Diese ist daher auch die einzig richtige Methode für den ersten Unterricht in der Geometrie, die aber meines Wissens bis jetzt nur in Jacob Falke einen einsichtsvollen Vertreter gefunden hat. Da Falke in dem ersten Abschnitte seiner „Propädeutik der Geometrie“ die Prinzipien dieser Methode eben so geistvoll, wie klar und bündig dargestellt hat, so will ich, indem ich jedem Lehrer der Geometrie das Studium der Falke'schen Propädeutik auf das Wärmste empfehle, hier nur einige Punkte hervorheben, die mir für den propädeutischen Unterricht in Gymnasien wesentlich zu sein scheinen, weil sie bei Falke, wie es mir scheint, keine genügende Berücksichtigung gefunden haben. In ihnen soll zugleich die Rechtfertigung für das Erscheinen meiner Propädeutik neben der Falke'schen liegen.

Daß das für den propädeutischen Unterricht gewählte Material geeignet sei, das Interesse des Schülers für sich in Anspruch zu nehmen, ist gewiß im höchsten Grade wünschenswerth, aber doch nicht ausreichend: Das Material darf kein bloß selbstisches Interesse haben, und es darf vor allem nicht so behandelt werden, daß das ganze Interesse des Schülers darauf beschränkt bleibt, davon absorbiert wird. Durch den propädeutischen Unterricht soll der Schüler sowohl für die wissenschaftliche Behandlung der Geometrie befähigt, als auch für dieselbe gewonnen werden. Es sollen hier zunächst bei dem Schüler nicht nur lebendige und klare Vorstellungen der Raumformen und Raumgebilde erweckt, sondern er soll auch an eine präcise und correcte Ausdrucksweise gewöhnt werden. Viele auf den Raum bezügliche Ausdrücke sind dem Schüler aus der Umgangssprache geläufig, allein ihr Gebrauch ist hier oft schwankend und unklar. Der Schüler glaubt die Bedeutung eines Wortes zu kennen, und kann doch nicht Rechenschaft ablegen darüber, was er sich unter dem Worte eigentlich vorstellt. Der Schüler soll nicht von vornherein mit Definitionen gefüttert werden, aber durch die Entwicklung klarer Vorstellungen an geometrischen Problemen und durch einen correcten Gebrauch der Namen für diese Vorstellungen soll der Lehrer beim propädeutischen Unterrichte den Schüler dazu befähigen den richtigen Sinn der Wörter zu finden und correct auszudrücken. „Linien, die überall einen gleichen Abstand haben“, ist die vulgäre Vorstellung von Parallellinien; statt nun diese Vorstellung zu adoptiren und zu sanctioniren, wie es Falke thut, soll der Lehrer, wenn ein Schüler diese Definition bringt, grade die Gelegenheit benutzen, um die Unklarheit und die wissenschaftliche Unzulänglichkeit derselben ihm klar zu machen. Und das ist hier leicht, er frage nur den Schüler, was er unter Abstand zweier Linien versteht. Weiß dieser anzugeben, daß der Abstand die gemeinsame Normale ist, so frage er weiter, ob es so ganz von selbst verständlich ist, daß zwei Linien, die an einer Stelle eine gemeinsame Normale haben, auch an einer anderen Stelle eine solche haben. Die Propädeutik soll nicht falsche und vage Definitionen befesti-

gen, sondern beseitigen. Ist der Schüler noch nicht befähigt eine correcte Definition zu geben oder zu fassen, so verlange man sie von ihm nicht, noch weniger dictire man ihm eine solche, sondern wache nur darüber, daß er das betreffende Wort im rechten Sinne gebrauche. In der Jugend eingeimpfte falsche Begriffe sind später nicht leicht beseitigt.

Zweitens soll der Schüler durch den propädeutischen Unterricht für die wissenschaftliche Geometrie gewonnen werden. Die Aufgaben müssen daher zwar an sich für den Schüler interessant sein, doch hauptsächlich mit der Rücksicht gewählt und in der Absicht gestellt werden, um reichliche Gelegenheit zu haben, den Schüler aufmerksam zu machen, wie viele Bedenken zu beseitigen und welche Wahrheiten erst zu begründen wären, bevor eine, bei oberflächlicher Betrachtung ganz plausible Lösung wirklich sicher gestellt ist.

Ist so in dem Schüler eine heilsame Skepsis erwacht, so schläferen man sie nicht durch Ueberredung wieder ein; ist ein gesunder Durst nach Erkenntniß der Wahrheit entstanden, so suche man ihn nicht durch ein erkünsteltes, fades Surrogat vorläufig zu stillen. War das Getränk auch fade, der Durst ist doch hin, und es mundet auch das reinste Quellwasser nicht mehr. Es giebt keinen propädeutischen Beweis; der Beweis ist entweder ein correcter oder gar keiner. Die Propädeutik für den Beweis aber besteht nur in der Erzeugung des Bedürfnisses danach. Ist das Bedürfniß nach einem Beweise in dem Schüler wirklich lebendig geworden, so ist er auch fähig einen strengen Beweis zu fassen; derselbe darf aber nicht gekünstelt, und nicht pedantisch in eine wissenschaftliche Form gekleidet sein. Auf dieser Stufe ist der Schüler meist nicht befähigt zu generalisiren, sondern schließt aus Besonderem auf Besonderes. Aus den Daten $a = c$ und $b = c$, schließt er meist richtig $a = b$; fragt man ihn aber warum? so antwortet er meist durch Wiederholung: „weil a und b beide gleich c waren“. Verlangt man dagegen die Anführung eines vorher eingelernten allgemeinen Satzes, so ist er fähig, wie ich es öfters erlebt habe, hierbei auch anzuführen: „Gleiches zu Gleichem addirt giebt Gleiches!“ — Die mathematische Form des Ausdruckes ist eine besondere Sprache, die für den Uneingeweihten ihre eigenthümlichen Schwierigkeiten hat und beim ersten Unterrichte nicht vorausgesetzt werden darf.

Die Aufgabe des mathematischen Unterrichtes auf humanistischen Gymnasien ist nicht die, den Schüler mit einer Summe von mathematischen Wahrheiten auszurüsten, die genügend beglaubigt sind, um sie im späteren Leben mit guter Zuversicht verwenden zu können, sondern vielmehr die, den Schüler zu lehren, einen gegebenen Stoff wissenschaftlich zu bearbeiten. Dazu ist kein anderer Unterrichtszweig so geeignet als die Geometrie, da sie allein dem Lehrer Gelegenheit bietet, mit dem Schüler gemeinsam ein wissenschaftliches Gebäude aufzuführen und zu vollenden.

Etwas anderes ist es, wenn der Unterricht auf einer niederen Entwicklungsstufe abbrechen, und abschließen muß. Da muß dem erweckten Durste auch eine gewisse Befriedigung geboten werden, da darf

auch ein Wahrscheinlichmachen durch Veranschaulichung den strengen Beweis ersetzen. Dann ist aber der Unterricht kein propädeutischer mehr, sondern ein elementarer.

Es giebt gewiß kein geeigneteres Mittel lebendige Begriffe der Raumgebilde zu erwecken, als geodätische Aufnahmen, und daher sind Excursionen zu diesem Zwecke im höchsten Grade empfehlenswerth, und der geeignetste Wegweiser für solche ist Falles Propädeutik. Doch die ganze Propädeutik auf Geodäsie gründen zu wollen, scheint mir doch bedenklich, und eine Ueberschätzung der Tragweite dieser Methode zu sein. Zunächst können solche Excursionen nur außerhalb der eigentlichen Schulstunden ausgeführt werden, und man kann daher die Schüler zu denselben nicht verpflichten. Betheiligten sich aber wirklich auch alle, so ist die Zahl sehr groß, und es dürfte dem Lehrer schwer werden alle erfolgreich zu beschäftigen, selbst wenn auch ein jeder mit den nothwendigen Apparaten ausgerüstet wäre. Denn es giebt vieles auf Feld und Wiese, was den munteren Knaben mehr anzieht als Messkette und Messel; was das Grundstück bewohnt, dürfte ihn leicht mehr interessieren als die Dimensionen desselben, und so könnte die Ausbeute an Material am Ende reichlicher für die Naturgeschichte als für die Geometrie ausfallen.

Allendlich hat der Unterricht in der Geometrie auch Eingang in die höheren Töchterschulen unserer Provinzen gefunden. Das durch diesen erfreulichen Fortschritt hervorgerufene Bedürfniß nach einem geeigneten Leitfaden für den elementargeometrischen Unterricht, hat mich veranlaßt vorliegendes Büchlein, das in erster Anlage nur Propädeutik sein sollte, zu einer Elementar-Geometrie zu erweitern. Doch hoffe ich daß dasselbe dadurch für den propädeutischen Unterricht nicht unbrauchbar geworden ist.

In Betreff der Benennung des Leitfadens muß ich noch bemerken, daß meines Erachtens der Anfang sofort mit dem ersten Theile, d. h. mit der Aufgabe zu machen ist. Die Einleitung wird mit den Schülern am besten erst am Schlusse des eigentlich propädeutischen Unterrichtes abgehandelt, wo die Schüler schon durch die Lösung der Aufgaben für Abstractionen vorbereitet sind.

Der Verfasser.

Dorpat den 18. Juni 1872.

Einleitung.

Anschauliche Entwicklung der räumlichen Fundamentalvorstellungen, und deren Benennungen.

§ 1. Der Begriff der Ausdehnung, und des Ausgedehnten — des Raumes — entsteht in uns durch Bewegung.

Erwachen wir plötzlich in vollkommener Finsterniß, und können uns nicht besinnen, wo wir uns befinden, so tasten wir umher, d. h. wir machen Bewegungen nach allen Seiten, um uns zu überzeugen, ob wir Raum um uns haben. — Wie der im Finstern erwachende Erwachsene absichtlich und mit Bewußtsein umher tappt, da die Vorstellung des Raumes schon in ihm lebt, und er sich bloß überzeugen will, in wie weit dieselbe hier verwirklicht ist, so bewegt das neugeborene Kind seine Gliedmaßen absichtslos und unbewußt, getrieben durch einen inneren oder äußeren Reiz, und entwickelt erst so in sich die Vorstellung des Raumes, die es dann, sobald es zum Bewußtsein erwacht, schon in sich vorfindet.

§ 2. Im Raume ist nach allen Richtungen Bewegung möglich. — Der Raum ist das allseitig Ausgedehnte. — Die Ausdehnungen des Raumes sind endlos, grenzenlos. Der Raum ist unendlich. — Auch das im Raume sich bewegende, der Körper, ist allseitig ausgedehnt; seine Ausdehnungen aber sind endlich, begrenzt — doch unendlich verschieden an Größe bei verschiedenen Körpern sowohl, als auch bei demselben Körper in den verschiedenen Richtungen: Der Körper ist ein begrenzter Raum, mannigfaltig an Größe und Gestalt.

Der Mond ist 50 000, die Sonne 20 000 000 Meilen von uns entfernt. Von der Sonne kommt ein Lichtstrahl in 83 Minuten zu uns, vom nächsten Fixsterne in mehr denn 3 Jahren, von den Sternen der Milchstraße in Tausenden von Jahren — und doch ist das von der Milchstraße umgrenzte Fixsternensystem nur eine einzige Insel im unendlichen Weltenraume, in welchem noch viele solcher Fixsterneninseln sich befinden, die uns als Nebelflecke erscheinen.

In einem Wassertropfen befinden sich oft Hunderte von Thierchen, und haben noch Raum, um sich zu tummeln. — Könnte man den unendlichen Raum, wie einen Tropfen mit einem Blicke überschauen, so würden die ungeheuer großen Firsterninseln den Infusionsthierchen gleich erscheinen, und umgekehrt, — denn auch diese kleinen Thierchen würden bei ungeheurer Vergrößerung als Systeme von kleineren, in steter und gesetzmäßiger Bewegung befindlichen Organismen erscheinen.

§ 3. Die Größe und die Gestalt der Körper im Allgemeinen fassen wir mit dem Gesichtsinne auf; aber auch (und oft noch besser) mit dem Tastsinne. Das Sichtbare und Tastbare an einem Körper nennen wir seine Oberfläche.

Der Lehrer hat mehrere Körper zur Hand, verschieden an Größe und namentlich an Gestalt: runde und kantige; mit ebenen und unebenen Flächentheilen; mit glatten und rauhen Oberflächen; mit tiefgehenden Einschnitten und Löchern; ein Stück Schwamm oder besser Bimstein etc. — Um an diesen Körpern zu veranschaulichen, wie die Gestalt der Körper, die Gestalt und Beschaffenheit der Oberfläche von den Dimensionen derselben in den verschiedenen Richtungen abhängig ist, bedient man sich eines Rundzirkels, oder es können auch einige der Körper in verschiedenen Richtungen fein durchbohrt sein, um eine Stricknadel durchstoßen zu können.

Wichtig ist die Beurtheilung der Gestalt des Körpers und der Beschaffenheit seiner Oberfläche durch den Tastsinn: — Ein Schüler tritt hervor; nachdem er die Augen geschlossen hat, hält ihm der Lehrer einen beliebigen Körper hin, setzt einen Finger des Schülers auf eine beliebige Stelle der Oberfläche, und fordert ihn nun auf, laut zu referiren über die Wahrnehmungen, die er in Betreff der Gestalt des Körpers, und der Beschaffenheit der Oberfläche macht, bloß mit dem einen Finger, indem er mit demselben auf der Oberfläche nach allen Seiten hin Excursionen macht. — Kann der Finger von der Stelle aus nach allen Seiten hin ungehindert die Excursionen ausführen, so wird die Vorstellung einer Fläche erzeugt. Diese kann gebogen sein oder eben, rauh oder glatt. — Ist die Fläche rauh — kann da der Körper in allen Richtungen vollkommen gleiche Dimensionen haben? — Ist sie glatt — muß da der Körper gleiche Dimensionen haben? — Genügt ein Finger zur Beurtheilung der ganzen Gestalt eines Körpers? — Rollen wir einen, oben und unten gewölbten Körper unter dem Finger, so erlangen wir stets die Vorstellung einer vollständigen Kugel — rollen wir eine kleine Kugel zwischen gekreuzten Fingern, so drängt sich uns unabweislich die Vorstellung von zwei Kugeln auf! — „Partielle Wahrnehmungen mit dem Tastsinne ergänzen wir in der Vorstellung stets gleichartig“.

Geräth der Finger bei fortgesetzter Bewegung auf eine Kante, so muß er, will er auf der Oberfläche verbleiben, längs der Kante fortgleiten. — Die Kante erweckt den Gedanken an nur eine Er-

streckung — oder, über die Kante hinausgehend, plötzlich die Richtung ändern: Durch Kanten zerfällt die Oberfläche in der Vorstellung in mehrere Theile, die kurzweg Flächen genannt werden, und paarweise in einer Kante ihre gemeinschaftliche Grenze haben.

Welche Dimensions-Verhältnisse müssen bei einem kantigen Körper statt haben?

Um zu veranschaulichen, wie die Kanten auf einen plötzlichen Uebergang eines raschen Wachsthums der Dimensionen, von einer bestimmten Stelle (der Mitte) aus, in eine eben so rasche Abnahme schließen lassen, entwirft man eine Figur, die einen Durchschnitt des kantigen Körpers darstellt. — Auch die schärfste Kante erweist sich bei hinreichender Vergrößerung als eine gewölbte Fläche, auf der eine feine Nadelspitze auch seitliche Excursionen machen kann.

An einer Ecke biegt die Kante plötzlich ab — die Ecke erscheint als die gemeinschaftliche Grenze von mindestens drei Kanten. Warum nicht als Grenze von mindestens drei Kanten. Warum nicht als Grenze von Flächen?! — Eine kegelförmig zugespitzte Ecke hat ja keine Kanten! — Auch die schärfste Ecke erweist sich bei hinreichender Vergrößerung als eine gewölbte Kuppel!

Die Oberfläche eines Körpers hat keinen Anfang und kein Ende, sie ist continuirlich, in sich geschlossen.

§ 4. Nicht immer fassen wir den Körper in seiner ganzen Gestalt und Größe auf, sondern beschränken unsere Betrachtungen oft nur auf einen Theil der Oberfläche: Man hat zu unterscheiden die Gestalt eines Körpers im Großen und Ganzen von seiner Gestalt en detail.

Die Erde ist eine Kugel! — Auf einige Fuß im Durchmesser reducirt, würde die Erde, trotz den himmelanstiegenden Gebirgen, einer polirten Kugel gleichen; wer aber von der Erdoberfläche nur etwa die Schweiz kennt, würde schwerlich diese Vorstellung gewinnen. Ein Stück Bimstein, aus einiger Entfernung betrachtet, erscheint als ein mehr oder weniger kantiger und eckiger Körper; — in der Nähe aber — welche Mannigfaltigkeit an Erhebungen und Vertiefungen.

§ 5. Die Oberfläche eines Körpers ist nichts vom Körper Trennbares, ohne Körper Denkbares; in so fern wir aber an der Oberfläche erkennen, daß hier der Körper aufhört, nennen wir sie auch die Grenze des Körpers.

Bezeichnen die Wörter Schale und Haut dasselbe, als das Wort Oberfläche? — Haben alle Körper eine Oberfläche? Haben auch alle eine Schale? — Wenn man die Haut von einem Körper abgezogen, die Schale abgeschält hat, hat da der Körper noch eine Oberfläche? — Läßt sich auch die Oberfläche abschälen? — Wenn man von einem

Körper eine dünne Schicht abgeschält hat, so hat er doch eine neue Oberfläche (!) — was ist aus der alten geworden? — Kann man da nicht sagen, man habe sie abgeschält? — Welche falsche Ansicht wird durch den Satz erzeugt: „die den Körper umschließenden Flächen sind untrennbar mit dem Körper verbunden, sie haben gar keine Dicke“?

§ 6. Nichten wir unsere ganze Aufmerksamkeit auf die Bewegung eines Körpers, so sehen wir unwillkürlich ganz ab von seinen Dimensionen, und in so fern wir das thun, nennen wir den Körper einen Punkt, und es erweckt die Bewegung in uns den Gedanken an nur eine Erstreckung (Linie). — Mit dem Worte Punkt drücken wir also stets aus, daß wir die Dimensionen eines Körpers nicht berücksichtigen wollen (von ihnen abstrahiren) oder, daß sie (ihrer verhältnißmäßigen Kleinheit wegen) nicht zu berücksichtigen sind. — Mit dem Worte Linie aber drücken wir aus, daß wir nur eine Erstreckung berücksichtigen — nur an eine Dimension denken wollen.

Die Wörter Punkt und Linie sind dem Schüler schon aus dem Schreib- und Zeichnen-Unterrichte geläufig, es ist daher — meines Erachtens — auch kein Grund vorhanden, dieselben beim propädeutischen Unterrichte ganz zu vermeiden. Man dringe dem Schüler nur keine unbegreiflichen Definitionen dieser Wörter auf, sondern bringe ihnen allmählig die richtige Bedeutung bei, indem man zunächst Körper, Stelle, Fleck *) für Punkt; Weg statt Linie sagt; bei passender Gelegenheit aber hinzufügt: „Da hier die Größe des Körpers garnicht in Betracht kommt“, oder — „Da hier die Dimensionen (der Stelle, des Fleckes) unmerklich sein müssen, so sagen wir besser Punkt statt Körper etc. Eben so beim Wege: „Da hier die Breite des Weges durchaus nicht zu berücksichtigen ist oder in Betracht kommt, so sagen wir besser Linie statt Weg. — Bald kann man die Zusätze weglassen, und nur gelegentlich fragen: warum sagt man hier Punkt — warum Linie?

§ 7. Hält man in der einen Hand eine Schwalbe, in der anderen einen Stein, und öffnet beide Hände, so setzen sich auch sogleich beide Körper in Bewegung; aber in ganz verschiedener Weise. — Während der Stein unverrückt einem bestimmten Ziele (dem Mittelpunkte der Erde) zustrebt, durchstreift die Schwalbe in den wunderbarsten Windungen ziellos die Luft.

Von einem Körper, der auf ein Ziel hin sich in Bewegung setzt, sagt man: er nimmt eine Richtung.

*) Nur nicht, wie Falke will, „Ausdehnungsloser Ort, denn das ist eine *contradictio in adjecto*, wie eckiger Kreis.

Auch der Mensch, wenn er sich auf die Wanderschaft begiebt, hat ein Ziel (örtlich) im Auge, — doch ist seine Bewegung wohl unterschieden von der des Steines. — Bewegt sich ein Körper auf der Oberfläche eines anderen, so ist seine Bewegung nicht frei; er ist vielfach verhindert seine ursprüngliche Absicht auszuführen.

Strebt ein Körper, wie der fallende Stein, während seiner ganzen Bewegung stetig demselben Ziele entgegen, so nennt man seine Bewegung eine **gradlinige**, den Weg aber, den er beschreibt, einen **graden Weg**, oder — in so fern man die Breite nicht berücksichtigt — eine **grade Linie**.

Ein Körper kann auf der Oberfläche eines anderen nur dann sich gradlinig bewegen, wenn diese eine besondere Beschaffenheit hat; wenn sie der Oberfläche eines Spiegels, einer ruhigen Wasserfläche gleicht, kurz, wenn sie eben ist.

Erster Cursus.

Entwicklung der auf Erfahrung gegründeten Prinzipien der Geometrie an Constructionen.

Cap. I. Die Grade als Ausdruck des Abstandes oder als Strecke.

§ 1. Aufgabe. Auf der ebenen Oberfläche eines beweglichen Körpers sind zwei Flecke (A und B) gegeben; man soll auf der ebenen Oberfläche eines festen Körpers zwei Flecke angeben, die einen gleichen Abstand haben.

Ein über die ebene Oberfläche eines Brettes gespannter Papierbogen dient als feste, ein loses Blatt Papier als bewegliche Ebene, da letzteres auf der festen Ebene ausgebreitet, ebenfalls eine ebene Oberfläche darbietet. Kürze des Ausdruckes erleichtert die Uebersicht, also auch das Verständniß; in der Folge soll daher statt „ebene Oberfläche eines festen oder beweglichen Körpers“ kurz gesagt werden: „bewegliche oder feste Ebene“. — Da der Abstand der inneren Ränder wohl ein anderer sein wird, als der Abstand der äußeren Ränder, und wieder ein anderer, als der Abstand der Mitten der Flecke, so müssen — soll die Aufgabe nicht vieldeutig sein — die Flecke möglichst klein sein, so daß gleichsam die äußeren Ränder die inneren berühren. — So kleine Flecke, deren Dimensionen gar nicht in Betracht kommen, wollen wir in der Folge stets Punkte nennen. Nach diesen Bemerkungen würde nun die obige Aufgabe kurz und präcis lauten:

Auf einer beweglichen Ebene sind zwei Punkte (A und B) gegeben, man soll auf einer festen Ebene zwei Punkte angeben, die einen gleichen Abstand haben.

Lösung. Man breite die bewegliche Ebene (das Blatt Papier, mit den Punkten A und B) auf der festen glatt aus (d. h. so, daß sie

die feste Ebene in allen Punkten berührt), und durchsteche die beiden Punkte A und B mit einer feinen Nadel.

Was man nun auch unter Abstand der Punkte A und B verstehen mag, — die Stiche auf der unteren festen Ebene haben jedenfalls denselben Abstand.

(Empirischer Begriff der Gleichheit:)

Was Gleich ist, was sich deckt, ist

Bedenken! Was deckt sich hier? — Punkte decken sich, die Abstände aber sollten gleich sein! Was sind Abstände?!

§ 2. **Aufgabe.** Auf der festen Ebene ist ein Punkt (E) gegeben; man soll einen zweiten Punkt (D) auf derselben angeben, dessen Abstand von C gleich ist dem Abstände, der Punkte (A und B) auf der beweglichen Ebene.

Die Lösung durch Deckung, wie bei der vorigen Aufgabe ist hier zwar nicht unmöglich, aber doch schwierig; daher wird durch diese Aufgabe schon die Anregung gegeben, ein anderes Mittel zu ersinnen.

§ 3. **Aufgabe.** Auf einer festen Ebene sind zwei Punkte (A und B) gegeben; man soll auf derselben Ebene andere zwei Punkte angeben, die denselben Abstand haben.

Lösung. Die Lösung durch Deckung ist hier unmöglich! — Man copire daher die Punkte A und B auf einem durchsichtigen Papiere, oder besser auf der scharfen Kante eines Papiere, bezeichne die Copien mit E und F, und übertrage sie wie unter § 1 auf die feste Ebene. — Sind C und D die Copien von E, F, so hat man:

Den Abstand EF gleicht dem Abstände AB gemacht

„ „ CD „ „ „ EF „

oder in mathematischer Sprache:

$$\begin{array}{l} EF = AB \\ CD = EF \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \\ \text{gemacht} \end{array} \right\}$$

Nun soll der Abstand CD gleich dem Abstände AB sein! Prüfen kann man die Gleichheit nicht; welchen Grund hat man für den Glauben an die Gleichheit?

Ueberlegung. Als man zwei Stäbchen einem dritten an Länge gleich machte, und sie dann an einander brachte, so deckten sich die Endpunkte, auch als man zwei Bandendchen, zwei (oder auch mehrere) Papierstreifen einem Dritten genau gleich schnitt, immer erwiesen sie sich als gleich. Da man nun stets und ausnahmslos gefunden hat, daß zwei

Abstände oder Strecken, die einer dritten gleich gemacht wurden, auch einander gleich waren, so oft man die Gleichheit prüfen konnte, so glaubt man auch an die Gleichheit, wenn man sie nicht prüfen kann. — Eine so durch wiederholte Erfahrung gewonnene Ueberzeugung prägt man dann, zur ferneren Benutzung, am besten dem Gedächtnisse ein, in dem man sie in einem allgemeinen Satze ausspricht; welcher allgemeine, nur auf Erfahrung gegründete Satz ein Grundsatz heißt *).

Generalisation aus der Erfahrung in Betreff der Gleichheit, oder

Erster Grundsatz.

Was demselben gleich, ist auch einander gleich, oder
Eine Größe kann stets durch eine ihr gleiche Größe ersetzt werden.

*) Nach der gewöhnlichen Auffassung sind Grundsätze Wahrheiten, die man nicht beweisen kann; oder, die man nicht zu beweisen braucht, weil sie „durch sich selbst gewiß und wahr sind, und so einfach und unmittelbar evident, daß Jeder, der mit uns dieselben Gesetze des Denkens und der Anschauung theilt, sie ohne weiteres zugestehen muß (s. Snell Planim. S. 12). — Was heißt aber „durch sich selbst gewiß“?! Was ist „unmittelbar evident“? — Das Kind ist an sich zum Autoritäts-Glauben geneigt, und wird durch den Unterricht vielfältig in diesem Glauben so sehr geübt, daß es weit schwerer ist ihm die Nothwendigkeit eines Beweises begreiflich zu machen, als es zur unmittelbaren Anerkennung einer, mit Klarheit und Ernst ausgesprochenen Behauptung zu bewegen.

Ist unsere Ueberzeugung, daß zwei besondere Strecken gleich sind, weil sie einer dritten gleich gemacht waren, wirklich durch den allgemeinen Grundsatz vermittelt: „was demselben gleich, ist auch einander gleich“? oder sind wir nicht vielmehr erst befähigt die allgemeine Wahrheit zu begreifen und auszusprechen, nachdem wir uns von der Richtigkeit im Einzelnen und Besonderen überzeugt hatten?! — Daß wir, die wir leben, doch sterben werden, schließen wir nicht etwa aus der, durch sich selbst gewissen“ und „unmittelbar evidenten“ allgemeinen Wahrheit: alle Menschen sind sterblich“, sondern aus der gemachten Erfahrung, daß bis jetzt ausnahmslos alle Menschen gestorben sind. Fühlen wir uns zu der Generalisation berechtigt: alle Menschen sind sterblich, so haben wir schon geschlossen, daß wir sterben werden. — Der natürliche Verstand (und auch der gebildete!) schließt stets vom Besonderen auf das Besondere (der gebildete Verstand bedient sich der Generalisation nur zur Unterstützung des Gedächtnisses). — Das Kind wird nur mit Klarheit die Gleichheit zweier Abstände aus ihrer Gleichheit mit einem dritten erschließen, wenn es sich erinnert dieses an Holzstäbchen und Papierstreifen erfahren zu haben. — Mangelt ihm diese Erfahrung, so verhilft ihn die Anführung des Grundsatzes nicht zur Erkenntniß, was aus der falschen Anwendung der angelernten Grundsätze deutlich hervorgeht. — Das Gesetz unseres Denkens besteht, meines Erachtens, darin, daß, so bald wir ein Ereigniß stets und ausnahmslos von einem anderen Ereigniß begleitet finden, wir schließlich unfähig werden, das erstere Ereigniß ohne das letztere zu denken, so daß uns das letztere Ereigniß als eine nothwendige, von selbst (!) verständliche Folge des ersteren erscheint.

§ 4. **Aufgabe.** Zwei feste Punkte haben einen bestimmten Abstand; man soll den räumlichen **Ausdruck** des Abstandes ermitteln.

Erwägung. Im Allgemeinen beurtheilt man den Abstand zweier Punkte nach der Länge des Weges. Oft führen aber von einem Orte zum andern viele Wege von verschiedener Länge. Oft auch ist der Abstand zweier Derter augenscheinlich geringer als der Abstand von zwei andern Dertern, und doch ist der Weg zwischen den ersteren Dertern länger, als der zwischen den letzteren!

In einer finsternen Winternacht tritt ein Mann aus einem Hause, und geht auf ein in der Ferne schimmerndes Licht los. Um nicht zu irren behält er das Licht stets im Auge. — Bald nach ihm tritt ein zweiter aus derselben Thüre, und geht auf dasselbe Licht los — er nimmt dieselbe Richtung. In Gedanken versunken achtet er aber beim weiteren Fortschreiten nicht auf das Licht, und sieht sich daher öfter genöthigt seinen Kurs zu ändern. — Ihm folgt ein Dritter, der, dem Ersten gleich, das Licht stets im Auge behält. — Ein Vierter ist wieder unachtsam und muß daher öfter einlenken. — Nun folgen noch mehrere, die alle aufmerksam und stetig auf das Licht losgehen. — Wie viel Wege wird man nun am nächsten Morgen auf der schneebedeckten Fläche wahrnehmen? — Im ganzen nur drei Wege, einen breiteingetretenen Weg und zwei einzelne Spuren. — Alle, die stetig auf das Licht losgingen, sind denselben Weg gegangen; obgleich der Folgende die Spuren des Vorhergehenden nicht sehen konnte; — sie sind alle in grader Linie gegangen. Von den Unachtsamen hat aber jeder eine besondere Spur hinterlassen.

Die grade Linie ist allein und einzig zwischen zwei Punkten bestimmt: Die grade Linie ist der Ausdruck des Abstandes.

Aus dieser und aus ähnlichen Erfahrungen entnimmt man noch folgende allgemeine Wahrheit in Betreff der Graden:

Zweiter Grundsatz.

Unter allen Linien zwischen zwei Punkten ist die Grade die kürzeste.

§ 5. **Aufgabe.** Von einem Punkte zum anderen eine grade Linie zu ziehen.

Lösung. Nur mit Hilfe eines Lineales ausführbar. *)

*) Der feine Strich, den man mit der scharfen Spitze eines Bleistiftes oder mit einer Reissfeder längs der graden Kante des Lineales zieht, löst sich unter der Lupe in eine unzusammenhängende Reihe von Graphithäufchen oder Tintenflecke auf, die — den Fußtapsen des Wanderers gleich — im Zickzack zu beiden Seiten der eingebil deten (idealen) Graden liegen.

§ 6. **Aufgabe.** Von einem beliebigen oder gegebenen Punkte (C) einer unbegrenzten Geraden (XY) aus soll eine Strecke (CD) gleich einer gegebenen Strecke (AB) abge- schnitten werden. *)

Lösung. Durch Anwendung des Zirkels auszuführen.

NB. Beide Strecken sind gleich dem Abstände der Zirkelspitzen, daher einander gleich!

Von einem gegebenen Punkte aus kann eine gegebene Strecke von der Geraden nach rechts oder links hin abgeschnitten werden. Die Abschnitte haben entgegengesetzte Richtung.

§ 7. **Erklärung.** Durch drei Punkte auf einer Geraden sind drei Strecken gegeben, von welchen je zwei einen gemeinschaftlichen Endpunkt haben. Jede der drei Strecken ist durch die beiden anderen mit gegeben, und es heißt die eine Strecke die $\left\{ \begin{array}{l} \text{Summe} \\ \text{Differenz} \end{array} \right\}$ der beiden anderen, wenn sie den gemeinschaftlichen Endpunkt derselben $\left\{ \begin{array}{l} \text{zwischen} \\ \text{nicht zwischen} \end{array} \right\}$ ihren Endpunkten hat.

§ 8. **Aufgabe.** Von einer unbegrenzten Geraden soll eine Strecke abgeschnitten werden, die der Summe von zwei gegebenen Strecken gleich ist.

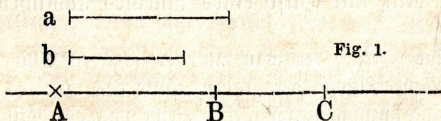
Lösung. Sind die Strecken beweglich, so setzt man sie mit den Enden aneinander, so daß sie zusammen eine Gerade bilden; der Abstand der nicht gemeinschaftlichen Endpunkte ist dann die Summe der Strecken, welche durch Decken auf die unbegrenzte Gerade übertragen werden kann. Sind die Strecken nicht beweglich, so hat man sie durch bewegliche zu ersetzen. (1. Grundsatz).

Beschreibung des Verfahrens: (Fig. 1).

$$\begin{array}{l} 1) \quad AB = a \\ 2) \quad BC = b \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} 1) \\ 2) \end{array}} \right\} \text{gemacht.}$$

Es ist aber nach § 7. $AC = AB + BC$

Nach obigem Grundsatz auch $AC = a + b$

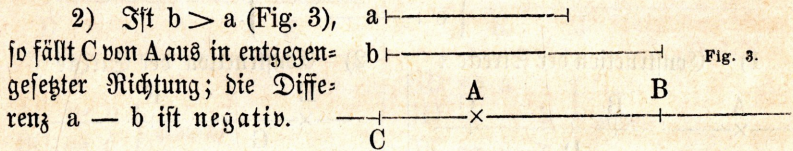
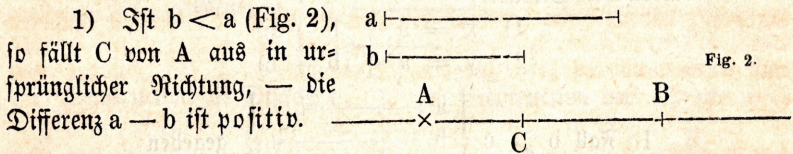


*) Strecke heißt begrenzte Gerade.

§ 9. **Aufgabe.** Von einer unbegrenzten Geraden soll eine Strecke gleich der Differenz von zwei gegebenen Strecken abgezeichnet werden. (Fig. 2 und 3.)

Lösung. Man veranschauliche die Lösung zunächst an Stäbchen (wie die vorige), und führe sie dann mit dem Zirkel an Strichen aus:

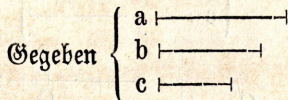
Sind a und b die gegebenen Strecken, und ist $x = a - b$ zu construiren, so schneide man von dem gegebenen Punkte (A) der unbegrenzten Geraden aus beliebig, nach rechts oder links, die Strecke $AB = a$ ab. Die gewählte Richtung ist die ursprüngliche (die positive). Von B aus hat man nun $BC = b$ stets in entgegengesetzter Richtung abzuschneiden. AC ist dann in jedem Falle die Differenz der Strecken a und b . Der relative Werth kann aber ein zwiefacher sein:



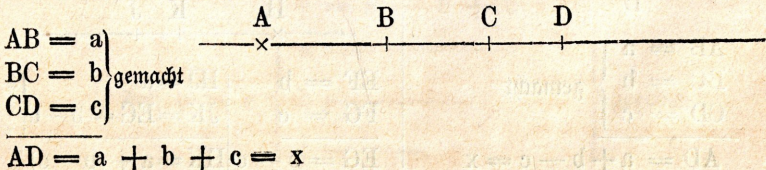
Als specieller Fall ist noch der zu unterscheiden, in welchem C auf den Anfangspunkt A fällt, welcher eintritt, wenn $b = a$ ist. Die Differenz ist dann null.

* § 10. **Aufgabe.** Es seien a, b, c drei gegebene Strecken; man soll construiren die Strecken:

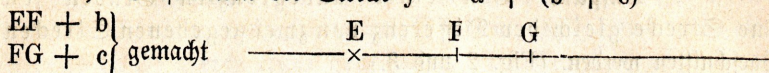
- 1) $x = a + b + c$
- 2) $y = a + (b + c)$



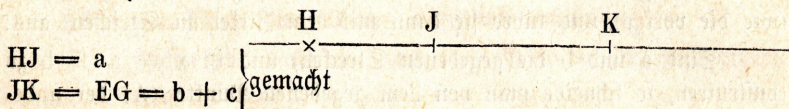
1) Construction der Strecke $x = a + b + c$



2) Construction der Strecke $y = a + (b + c)$



$EG = b + c$



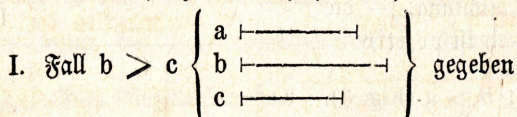
$HK = a + (b + c) = y$

Bemerkung. Da nun $HK = AD$, so ist auch
 $a + b + c = a + (b + c)$

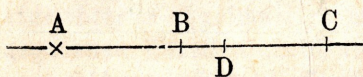
§ 11. **Aufgabe.** Es seien a, b, c drei gegebene Strecken; man soll construiren die Strecken

1) $x = a + b - c$

2) $y = a + (b - c)$



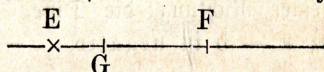
1) Construction der Strecke x



$AB = a$
 $BC = b$
 $CD = c$ } gemacht

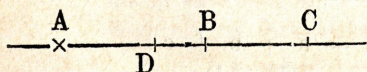
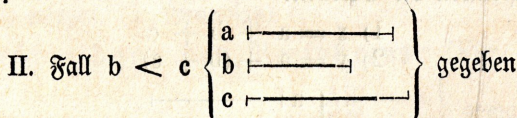
$AD = a + b - c = x$

2) Construction der Strecke y



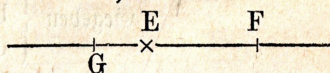
$EF = b$
 $FG = c$ } gemacht
 $HJ = a$
 $JK = EG = b - c$ } gemacht

$EG = b - c$ | $HK = a + (b - c) = y$



$AB = a$
 $BC = b$
 $CD = c$ } gemacht

$AD = a + b - c = x$



$EF = b$
 $FG = c$ } gemacht
 $HJ = a$
 $JK = EG = b - c$ } gemacht

$EG = b - c$ | $HK = a + (b - c)$

Bemerkung. Im zweiten Falle muß $JK = EG = b - c$ von rechts nach links abgetragen werden, weil EG die Richtung von rechts nach links, die negative Richtung hat: „eine Linie zu einer anderen addiren heißt, sie in ihrer Richtung antragen.“

So wird im jeden Falle $HK = AD$, und es ist also

$$a + b - c = a + (b - c)$$

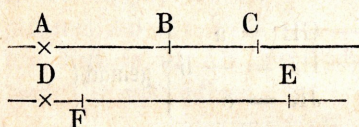
* § 12. **Aufgabe.** Es seien a, b, c drei gegebene Strecken; man soll construiren die Strecken.

$$1) x = a - (b + c)$$

$$2) y = a - b - c$$

$$\text{Gegeben} \left\{ \begin{array}{l} a \text{ —————} \\ b \text{ —————} \\ c \text{ —————} \end{array} \right.$$

1) Construction der Strecke x



$$\left. \begin{array}{l} AB = b \\ BC = c \end{array} \right\} \text{gemacht}$$

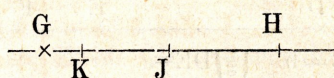
$$AC = b + c$$

$$DE = a$$

$$EF = AC = b + c$$

$$DF = a - (b + c) = x$$

2) Construction der Strecke y



$$\left. \begin{array}{l} GH = a \\ HJ = -b \\ JK = -c \end{array} \right\} \text{gemacht}$$

$$GK = a - b - c = y$$

Bemerkung. Da nun $GK = DF$, so ist auch:

$$a - (b + c) = a - b - c$$

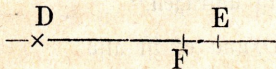
* § 13. **Aufgabe.** Es seien a, b, c drei gegebene Strecken; man soll construiren die Strecke

$$1) x = a - (b - c)$$

$$2) y = a - b + c$$

$$\text{I. Fall } b > c \left\{ \begin{array}{l} a \text{ —————} \\ b \text{ —————} \\ c \text{ —————} \end{array} \right\} \text{gegeben}$$

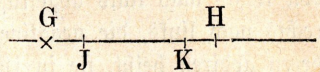
1) Construction der Strecke x



$$\left. \begin{array}{l} AB = b \\ BC = -c \end{array} \right\} \text{gemacht} \quad \left. \begin{array}{l} DE = a \\ EF = -AC = -(b-c) \end{array} \right\} \text{gemacht}$$

$$\hline AC = b - c \quad DF = a - (b - c) = x$$

2) Construction der Strecke y

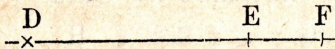
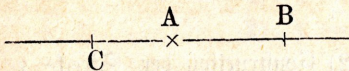


$$\left. \begin{array}{l} GH = a \\ HJ = -b \\ JK = c \end{array} \right\} \text{gemacht}$$

$$\hline GK = a - b + c = y$$

II. Fall $b < c$ $\left\{ \begin{array}{l} a \\ b \\ c \end{array} \right.$ gegeben

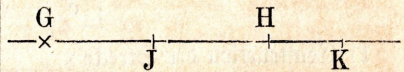
1) Construction der Strecke x



$$\left. \begin{array}{l} AB = b \\ BC = -c \end{array} \right\} \text{gemacht} \quad \left. \begin{array}{l} DE = a \\ EF = -AC = -(b-c) \end{array} \right\} \text{gemacht}$$

$$\hline DF = a - (b - c) = x$$

2) Construction der Strecke y



$$\left. \begin{array}{l} GH = a \\ HJ = -b \\ JK = c \end{array} \right\} \text{gemacht}$$

$$\hline GK = a - b + c = y$$

In beiden Fällen ist $DF = GK$, folglich ist

$$a - (b - c) = a - b + c$$

NB Eine Linie wird subtrahirt, wenn man sie in der Richtung ansetzt, welche der ihrigen entgegengesetzt ist.

Anmerkung. Die Aufgaben § 10 bis 13 sind zur Veranschaulichung der algebraischen Addition und Subtraction wichtig, können daher hier übergangen, und bei Erläuterung der Theorie der entgegengesetzten Größen abgehandelt werden.

§ 14. **Aufgabe.** Von einem bestimmten Punkte einer gegebenen Geraden aus soll eine Strecke abgeschnitten werden gleich einem bestimmten Vielfachen (2, 3, 4... fachen) einer gegebenen Strecke.

§ 15. **Aufgabe.** Es soll eine gegebene Strecke durch eine andere gegebene Strecke gemessen werden.

Bemerkung. Die Lösung ist nicht gleich an gezeichneten Linien mit dem Zirkel auszuführen, sondern zur besseren Veranschaulichung an wirklichen Gegenständen. Als Object in der Classe eignet sich die Wandtafel, deren Länge und Breite mit einem Lineale oder einem Blei-

stifte gemessen wird. Im günstigsten Falle sind die Dimensionen ganze Vielfache des gewählten Maaßes (haben also grade 5 oder 6 Stiftlängen). Bleibt ein Rest, so könnte man die Länge desselben auf dem Maaße durch einen kleinen Einschnitt bezeichnen; — doch läßt sich nicht immer ein Einschnitt machen, auch müßte man, um etwa eine Tafel von gleichen Dimensionen zu bestellen, das gebrauchte Maaß mit zum Tischler schicken! Das Bedürfniß nach einem fertig getheilten Maaßstabe, welcher allgemein im Gebrauch ist, wird fühlbar. Soll aber bei Anwendung eines getheilten Maaßstabes der scharf begrenzte Eckpunkt der zu messenden Strecke genau mit einem Theilstriche zusammen fallen, so muß die Theilung sehr fein sein! — Doch auch die feinste Theilung könnte möglicherweise nicht ausreichen!?

§ 16. **Aufgabe.** Das Verhältniß zweier Strecken zu bestimmen, d. h. die Größe einer Dimension durch die einer anderen auszudrücken. — (Fig. 4).

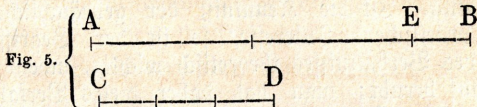
Lösung. Sind AB und CD die gegebenen Strecken, so schneide man die kleinere CD so oft als möglich von der größeren AB ab; bleibt kein Rest, so ist AB ein Vielfaches der Strecke CD, und unmittelbar durch CD ausdrückbar:

$$AB = 3 \times CD$$

Das Verhältniß beider Strecken $\left(AB : CD = \frac{AB}{CD} \right)$ ist eine ganze Zahl:

$$\frac{AB}{CD} = 3$$

Bleibt ein Rest, so kann dieser Rest möglicherweise ein aliquoter Theil der Strecke CD sein, und es wäre AB ein Vielfaches eines aliquoten Theiles von CD also wieder durch CD ausdrückbar — das Verhältniß beider Strecken ist jetzt ein Bruch: (Fig. 5).



$$AB = 2 CD + EB$$

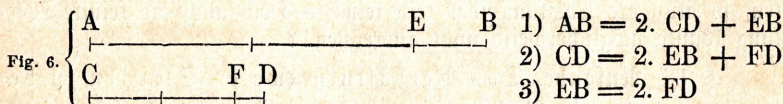
$$CD = 3 EB \text{ oder } EB = \frac{1}{3} CD$$

$$AB = 2 CD + \frac{1}{3} CD = 2\frac{1}{3} CD = \frac{7}{3} CD$$

oder $\frac{AB}{CD} = \frac{7}{3}$, d. h. um AB zu erhalten muß man den dritten Theil von CD 7 mal setzen. Man schreibt auch: $AB : CD = 7 : 3$ und

liest: AB verhält sich zu CD, wie 7 zu 3. Die Bedeutung ist: Theilt man AB in 7 und CD in 3 gleiche Theile, so sind die Theile der einen gleich denen der anderen Linie.

Bleibt abermals ein Rest, so ermittelt man durch Abtragen, ob derselbe ein aliquoter Theil des vorigen Restes sei, u. s. f. bis man zu einem Reste kommt, der in dem vorhergehenden aufgeht. Dieser Rest ist dann stets ein aliquoter Theil beider gegebenen Strecken, und heißt daher ihr gemeinschaftliches Maaß. (Fig. 6).



Ist die Messung beendigt, so ermittelt man der wie viele Theil das gemeinschaftliche Maaß von den gegebenen Strecken ist, indem man, mit der letzten Gleichung beginnend, aufwärts die durch das gemeinsame Maaß ausgedrückten Werthe statt der einzelnen Strecken substituirt:

Der Werth für EB aus 3 in 2 gesetzt ergibt:

$$4) CD = 2. 2. FD + FD = 5 FD$$

Der Werth für CD aus 4 und der für EB aus 3 in 1 gesetzt:

$$5) AB = 2. 5 FD + 2 FD = 12 FD$$

Aus 4 folgt nun: $FD = \frac{1}{5} CD$, welcher Werth in 5 substituirt ergibt: $AB = 12 \times \frac{1}{5} CD = \frac{12}{5} CD$

oder auch: $\frac{AB}{CD} = \frac{12}{5}$; endlich als Proportion geschrieben:

$$AB : CD = 12 : 5$$

Anmerkung. Ist die Kenntniß der gebräuchlichen Maaßstäbe besonders von practischem Interesse, so ist der Begriff und die Bestimmungsart des Verhältnisses theoretisch wichtig, indem die Aehnlichkeitslehre hierauf beruht; man hat daher dieses Verfahren an vielen Beispielen einzuüben. Zur häuslichen Arbeit eignet sich besonders die Bestimmung des Verhältnisses der Hypotenuse eines rechtwinklichen Dreieckes zu den Katheten, da die Controle leicht ausführbar ist. Der rechte Winkel wird nach dem Winkelhaken gezeichnet (auch kann man schon die Construction § 39 anzeigen), die Katheten — drei bis vier Zoll lang — nehme man zunächst gleich, dann im Verhältniß von 1 : 2; 2 : 3; 3 : 4; etc.

Ist a die Hypotenuse, b die kleinere, c die größere Kathete, so ist:

$$a : b = \sqrt{2} = 1,41421 \text{ wenn } c : b = 1 : 1$$

$$a : b = \sqrt{5} = 2,23607 \quad " \quad c : b = 2 : 1$$

$$a : b = \frac{1}{2} \sqrt{13} = 1,80277 \quad " \quad c : b = 3 : 2$$

$$a : b = \frac{5}{3} = 1,66666 \quad " \quad c : b = 4 : 3$$

$$a : b = \frac{1}{2} \sqrt{29} = 2,69258 \quad " \quad c : b = 5 : 2$$

$$a : b = \frac{1}{3} \sqrt{34} = 1,94365 \quad " \quad c : b = 5 : 3$$

$$a : b = \frac{1}{4} \sqrt{41} = 1,60078 \quad " \quad c : b = 5 : 4$$

Bei der Bestimmung des Verhältnisses durch Messung, werden die Strecken sich stets als commensurabel erweisen, indem der Rest schließlich unmeßbar klein werden muß; doch kann man schon hier auf die Incommensurabilität als denkbar aufmerksam machen.

§ 17. **Aufgabe.** Auf einer Ebene ist ein Punkt (M) gegeben; man soll eine Reihe von Punkten auf der Ebene angeben, die von dem gegebenen Punkte (M) alle einen gleichen Abstand haben.

Lösung. Man öffnet den Zirkel beliebig, setzt die eine Spitze in den gegebenen Punkt (M), die andere, ohne die Oeffnung zu ändern, auf verschiedene Punkte der Ebene. Die so bezeichneten Punkte werden von M alle einen gleichen Abstand haben, da ihre Abstände von M alle gleich dem Abstände der Zirkelspitzen sind (1. Grds.).

Anmerkung. Macht man die Punkte dicht aneinander (oder läßt die zeichnende Spitze ohne abzusetzen längs der Ebene hingleiten), und setzt die Operation genugsam lange fort, so erhält man eine (fast) zusammenhängende Kette von Punkten, die aus entsprechender Entfernung betrachtet, die Vorstellung einer continuirlichen, geschlossenen, stetig gekrümmten Linie, erzeugt, welche eingebildete (ideale) Linie Kreislinie heißt.

§ 18. **Erklärung.** Eine ideale Linie, die einer, nach einem bestimmten Gesetze fortschreitenden Reihe von Punkten unterlegt wird, heißt der **geometrische Ort** dieser Punkte.

§ 19. **Erklärung.** Der geometrische Ort aller Punkte, die von einem Punkte gleichen Abstand haben, heißt eine **Kreis-**

linie. Die von der Kreislinie umgrenzte Ebene heißt **Kreisfläche** oder kurz **Kreis**. Der Punkt, von dem alle Punkte gleichen Abstand haben, heißt der **Mittelpunkt** des Kreises. Der constante Abstand der Punkte vom Mittelpunkte endlich heißt der **Radius** des Kreises. Eine Gerade, die zwei Punkte der Kreislinie verbindet, heißt **Sehne**, so lange sie nicht durch den Mittelpunkte geht, dagegen **Durchmesser**, wenn sie zugleich durch den Mittelpunkte geht.

§ 20 **Aufgabe.** Um einen gegebenen Punkt (M) mit einem beliebigen oder gegebenen Radius eine Kreislinie zu schlagen.

§. § 17. Anmerkung.

§ 21. **Aufgabe.** Einen Punkt zu bestimmen, der einen gleichen Abstand von zwei gegebenen Punkten hat.

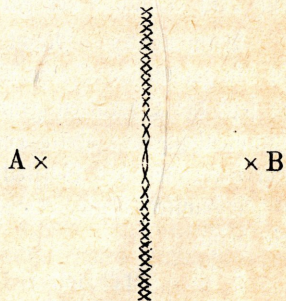
Lösung. Man schlage um jeden der beiden gegebenen Punkte eine Kreislinie mit derselben Zirkelöffnung. Jeder Durchschnittspunkt dieser Kreislinien hat alsdann von beiden gegebenen Punkten einen dem Abstände der Zirkelspitzen gleichen Abstand.

Müssen sich die Kreise unbedingt schneiden, und in wie viel Punkten schneiden sie sich? (!)

§ 22. **Aufgabe.** Den geometrischen Ort aller Punkte zu bestimmen, die einen gleichen Abstand von zwei gegebenen Punkten haben. (Fig. 7).

Fig. 7.

Bemerkung. Hat man nach § 21 viele Punkte bestimmt, die von den gegebenen einen gleichen Abstand haben, so wird man finden, daß dieselben um so genauer auf einer Geraden liegen, je sorgfältiger die Zeichnung ausgeführt ist. Betrachtet man z. B. die Fig. 7 aus einiger Entfernung, so fließen die kleinen Kreuzchen in eine continuirliche Gerade zusammen. Hat man sich davon überzeugt, so genügt es nur zwei Punkte zu bestimmen, die von den gegebenen Punkten einen gleichen Abstand haben; die durch diese bestimmte Gerade ist der gewünschte geometrische Ort.



§ 23. **Aufgabe.** Den geometrischen Ort der Mittelpunkte aller Kreislinien zu bestimmen, die durch zwei gegebene Punkte gehn.

Lösung. Man bestimme nach § 22 den geometrischen Ort aller Punkte, die von den gegebenen Punkten einen gleichen Abstand haben.

§ 24. **Aufgabe.** Eine gegebene Strecke zu halbiren, oder auf der Strecke einen Punkt zu bestimmen, der von den Endpunkten einen gleichen Abstand hat.

Lösung. Der geometrische Ort aller Punkte, die von den Endpunkten der gegebenen Graden einen gleichen Abstand haben, halbirt auch die Grade.

§ 25. **Aufgabe.** Auf einer gegebenen Graden zwei Punkte so zu bestimmen, daß sie einen gleichen Abstand von einem gegebenen Punkte haben.

Lösung. Den einen Punkt wähle man beliebig, und schlage dann mit dem Abstände dieses Punktes vom gegebenen eine Kreislinie um den gegebenen Punkt.

Bemerkung. Die Kreislinie schneidet die Grade nur in zwei Punkten (!) ?

§ 26. **Aufgabe.** Den geometrischen Ort der Mittelpunkte aller Kreislinien zu bestimmen, die mit einem gegebenen Radius geschlagen, durch einen gegebenen Punkt gehn.

Lösung. Mit dem gegebenen Radius schlage man um den gegebenen Punkt eine Kreislinie.

§ 27. **Aufgabe.** Es sollen zwei Punkte einer Kreislinie durch eine Grade verbunden werden, so daß dieselbe 1) durch den Mittelpunkt geht, 2) nicht durch der Mittelpunkt geht.

Frage. Wenn zwei Punkte der Kreislinie durch Grade mit einander und auch mit dem Mittelpunkte verbunden sind, auf wie viel Wegen kann man dann von dem einen Punkte zum anderen gelangen, und wie heißen diese Wege?

§ 28. **Aufgabe.** Von einem gegebenen Punkte der Kreislinie aus soll eine Sehne gleich einer gegebenen Strecke eingetragen werden.

Bemerkung. Nimmt man die Strecke in den Zirkel und schlägt um den gegebenen Punkt eine Kreislinie, so schneidet diese die vorige im Allgemeinen zweimal, einmal beim Eintritt, das zweite Mal beim

Austritt: Von einem Punkte einer Kreislinie aus kann man zwei, einer gegebenen Strecke gleiche Sehnen eintragen. — Ist die gegebene Strecke sehr nahe dem Durchmesser des gegebenen Kreises gleich, so fällt die zweite Kreislinie mit der ersteren (scheinbar) in einer ganzen Strecke zusammen. Können zwei Kreislinien mehrere Punkte gemein haben? (!) — Jedenfalls ist die Construction jetzt unsicher, denn man kann von dem gegebenen Punkte aus nun mehrere Sehnen ziehen, die so sehr der gegebenen Strecke gleich sind, daß man ihre Ungleichheit nicht erkennen, also auch die richtige nicht herausfinden kann. — Ist die gegebene Strecke größer als der Durchmesser des gegebenen Kreises, so schneidet die zweite Kreislinie die erstere gar nicht: Die Sehne ist stets kürzer als der Durchmesser. (!)

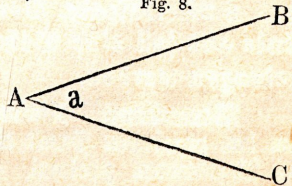
Cap. I. Die Grade als Richtung.

§ 29. Setzt sich ein Körper auf einen bestimmten Punkt hin in Bewegung, so nimmt er eine Richtung. Führt er die Bewegung so aus, daß er stets auf denselben Punkt hinstrebt, so beschreibt er eine grade Linie. Alle Punkte der graden Linie liegen in derselben Richtung; jeder Abschnitt derselben drückt die Richtung aus, in der sich der Körper (Punkt) bewegte:

Die grade Linie ist Ausdruck der Richtung.

§ 30. Zwei Grade, die von demselben Punkte ausgehen, oder die auf denselben Punkt hin gerichtet sind (convergiren), drücken verschiedene Richtungen aus, und insofern sie das thun, sagt man von ihnen, sie bilden einen Winkel. Der gemeinschaftliche Ausgangs- oder Zielpunkt der Graden heißt der Scheitelpunkt, die Graden selbst aber heißen die Schenkel des Winkels. — Zur Bezeichnung des Winkels setzt man an die Endpunkte der Schenkel je einen Buchstaben, und einen an den Scheitel, und geht bei der Benennung vom Endpunkte des einen Schenkels zum Scheitelpunkte und von da zum Endpunkte des anderen Schenkels, so daß der Buchstabe am Scheitel stets der mittlere Buchstabe ist; oder man setzt einen kleinen Buchstaben zwischen die Schenkel in die Nähe des Scheitelpunktes. Beistehender Winkel heißt also BAC oder CAB oder kurz a. — (Fig. 8).

Fig. 8.



§ 31. Gehen von einem Punkte aus zwei, auf denselben Punkt hin gerichtete Grade, — z. B. die Kante eines Lineales, und der längs dieser Kante auf einer ebenen Fläche gezogene Strich — so sind die-

selben gleich gerichtet; sie bilden keinen Winkel oder, man sagt auch: sie bilden einen Nullwinkel. — Dreht man nun die eine Gerade (das Lineal) um den Aufgangspunkt (einen Stift) in der Ebene, so ändert man ihre Richtung je mehr und mehr, und es wächst der Winkel, den sie mit der festen Geraden (dem Striche) bildet, je mehr und mehr. Ein bestimmter Punkt der gedrehten Linie beschreibt, da er stets in gleichem Abstände vom Drehpunkte bleibt, einen Kreisbogen, welcher mit dem Winkel zugleich, und im gleichen Maaße wächst. Setzt man die Drehung fort, bis die Linie in die Lage kommt, in der sie als rückwärts gehende Fortsetzung der festen Linie erscheint, so hat sie die grade entgegengesetzte Richtung zu ihrer ursprünglichen Richtung erhalten; sie hat eine halbe Drehung gemacht, und bildet mit der festen Geraden einen gestreckten Winkel, ein jeder Punkt der gedrehten Linie aber hat einen Halbkreis beschrieben. Bei weiter fortgesetzter Drehung muß die Linie schließlich in ihre ursprüngliche Lage kommen, in der sie wieder mit der festen Linie zusammenfällt. Sie hat jetzt eine ganze Drehung vollendet, es ist ein completer Winkel entstanden, jeder Punkt der gedrehten Linie hat eine ganze Kreislinie beschrieben.

§ 32. Verlängert man den Einen Schenkel eines Winkels über dessen Scheitel hinaus, so bildet diese Verlängerung mit dem anderen Schenkel einen Winkel, welcher der Nebenwinkel des ersteren heißt. Der Nebenwinkel ergänzt den Winkel zu einem Gestreckten. — Wächst der Winkel, so nimmt sein Nebenwinkel ab, und es muß daher eine Lage geben, in welcher der Winkel seinem Nebenwinkel gleich ist; diese Lage wird die normale Lage genannt (die Linien stehen normal zu einander), und der Winkel, welcher seinem Nebenwinkel gleich ist, heißt ein rechter Winkel. Ist der Winkel kleiner als ein Rechter, so heißt er ein spitzer Winkel; ist er größer als ein Rechter, so heißt er ein stumpfer Winkel. — Verlängert man auch den anderen Schenkel, so entstehen keine neuen Winkel; zwei sich durchschneidende Geraden können nur zwei Winkel bilden, da nur eine zweifache Drehung denkbar ist — rechts herum und links herum. Welches Ende der gedrehten Linie (vom Schneidpunkte gerechnet) dabei berücksichtigt wird, ist natürlich gleichgiltig, wenn gleich es in vielen Fällen bequem ist, den von den entgegengesetzten Enden gebildeten Winkel unter dem Namen Scheitelwinkel, als einen besonderen Winkel zu unterscheiden.

§ 33. Als characteristische Eigenschaft der graden Linie ergibt sich uns aus den Betrachtungen der letzten Paragraphen:

Dritter Grundsatz.

Durch zwei Punkte ist nur eine Gerade denkbar.

Zwei Geraden können daher nur einen Punkt gemein haben, und sie müssen sich in diesem Punkte schneiden.

§ 34. Die Größe eines Winkels ist durch die Größe des Weges, des Bogens, den ein bestimmter Punkt der gedrehten Linie beschrieben hat, bestimmt; die Größe des Bogens aber ist durch den Abstand seiner Endpunkte, d. h. durch die zugehörige Sehne bestimmt.—(?)

§ 35. **Aufgabe.** Von einer Kreislinie mehrere gleiche Bogen abzuschneiden.

Lösung. Man trage mehrere gleiche Sehnen in den Kreis.

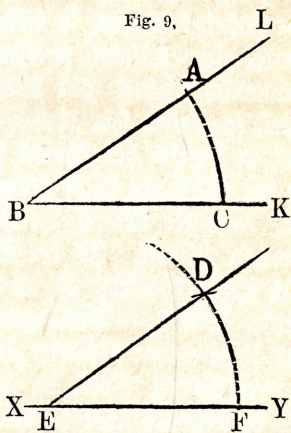
§ 36. **Aufgabe.** An dem Mittelpunkte eines Kreises mehrere gleiche Winkel (Contrawinkel) zu construiren.

Lösung. Man trage mehrere gleiche Sehnen in den Kreis und verbinde die Endpunkte derselben mit dem Mittelpunkte.

§ 37. **Aufgabe.** An einer Geraden einen Winkel zu construiren, welcher einem gegebenen Winkel gleich ist.—(Fig. 9).

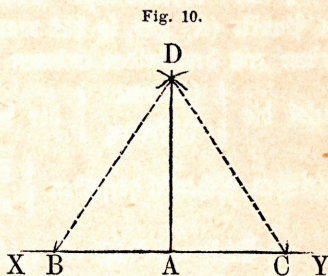
Lösung. Man schlage um den Scheitelpunkt B des gegebenen Winkels LBK mit beliebiger Zirkelöffnung einen Kreis. Der Bogen CA zwischen den Schenkeln des Winkels kann alsdann als der Weg betrachtet werden, den der Punkt A der Geraden BL bei der Erzeugung des Winkels beschrieben hat. Soll nun der Punkt E in der gegebenen Linie XY der Scheitelpunkt des dem Winkel LBK gleichen Winkels werden, so schlage man um denselben mit demselben Radius (derselben Zirkelöffnung) eine Kreislinie, und schneide vom Durchschnittspunkte F dieser Kreislinie mit der Geraden XY aus den Bogen $DF = AC$ ab. Die von E durch D gezogene Gerade bildet mit XY alsdann einen Winkel gleich dem Winkel LBK.

Fig. 9.



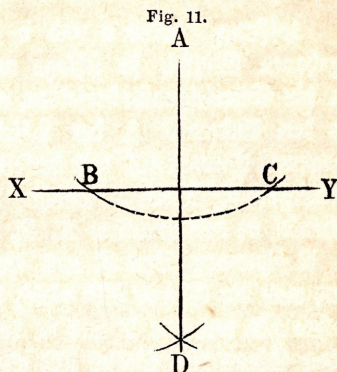
* § 38. **Aufgabe.** In einem gegebenen Punkte einer Geraden eine Normale zu errichten.—(Fig. 10).

Lösung. Auf der gegebenen Geraden XY bestimme man zwei Punkte (B und C) in gleichem Abstände von dem gegebenen Punkte A , und darnach den Punkt D in gleichem Abstände von den Punkten B und C , so ist die Gerade AD die gewünschte Normale zu XY ; sie bildet mit XY rechte Winkel.



Bemerkung. Schneidet man den Rand eines Papierblattes grade, bricht das Blatt dann so zusammen, daß die durch den Bruch entstandenen Theile des graden Randes genau auf einander zu liegen kommen, und schlägt das Blatt dann wieder los, so bildet der Bruch mit dem bezeichneten Rande gleiche Nebenwinkel, steht also normal zum Rande.

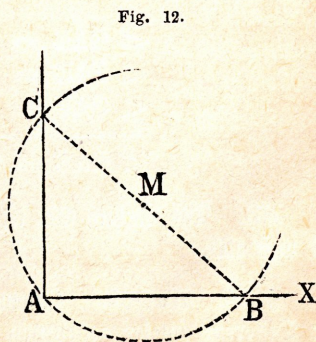
§ 39. **Aufgabe.** Von einem gegebenen Punkte außerhalb einer gegebenen Geraden eine Normale zu derselben zu construiren (fällen). — (Fig. 11).



Lösung. Siehe § 38.

§ 40. **Aufgabe.** Im Endpunkte einer Geraden eine Normale zu errichten, ohne die Gerade zu verlängern. — (Fig. 12).

Lösung. Ueber der Geraden AX nehme man den Punkt M beliebig, schlage mit dem Radius MA einen Kreis, welcher die Gerade AX in B schneidet, und ziehe den Durchmesser BC , so ist die Gerade AC die Normale zu AX .



§ 41. **Erklärung.** Gehen drei Grade (AB, AC, AD) von einem Punkte (A) aus, so hat man auch drei Winkel, von welchen jedoch je einer von den beiden anderen abhängig ist, und zwar ist der eine

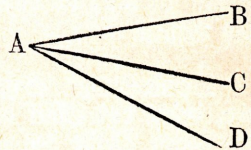
Winkel die $\left\{ \begin{array}{l} \text{Summe} \\ \text{Differenz} \end{array} \right\}$ der beiden anderen, wenn er den gemeinschaftlichen Schenkel derselben $\left\{ \begin{array}{l} \text{zwischen} \\ \text{nicht zwischen} \end{array} \right\}$ seinen Schenkeln hat:

$$\sphericalangle BAD = \sphericalangle BAC + \sphericalangle CAD$$

$$\sphericalangle BAC = \sphericalangle BAD - \sphericalangle CAD$$

$$\sphericalangle CAD = \sphericalangle BAD - \sphericalangle BAC$$

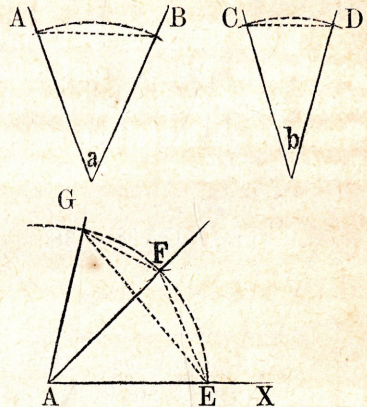
Fig. 13.



§ 42. **Aufgabe.** Einen Winkel zu konstruieren, welcher der Summe zweier gegebenen Winkel gleich ist. — (Fig. 14).

Lösung. Sind a und b die gegebenen Winkel, so schlage man um die Scheitelpunkte derselben, und um den Endpunkt A der beliebig gezogenen Geraden AX mit derselben Zirkelöffnung Kreise, welche die Schenkel in den Punkten A, B, C, D, E schneiden. Von E aus trage man nun die Sehne EF gleich der Sehne AB, und von F aus in demselben Sinne die Sehne FG gleich der Sehne CD ein. Verbindet man nun die Punkte F und G mit dem Punkte A, so ist:

Fig. 14.



$$\sphericalangle GAE = \sphericalangle FAE + \sphericalangle GAF$$

$$\left. \begin{array}{l} \sphericalangle FAE = a \\ \sphericalangle GAF = b \end{array} \right\} \text{gemacht}$$

$$\sphericalangle GAE = a + b \text{ (S. Grundsatz 3).}$$

NB. Die Sehne GE ist nicht gleich der Summe der Sehnen AB und CD.

§ 43. **Aufgabe.** Einen Winkel zu konstruieren, welcher gleich der Differenz zweier gegebenen Winkel ist. — (Fig. 15).

Lösung. Man construire wie unter § 42 den Winkel $\angle FAE = a$; von F aus trage man aber die Sehne CD oder $C'D'$ in entgegengesetztem Sinne ein, also $FG_1 = CD$; $FG' = C'D'$, so ist:

$$\begin{array}{l|l} \angle EAF = a & \angle EAF = a \\ \angle FAG = b & \angle FAG' = b_1 \\ \hline \angle EAG = a - b & \angle EAG_1 = a - b_1 \end{array}$$

Der Winkel $\angle EAG$ liegt mit $\angle EAF$ nach derselben Seite des festen Schenkels AE , ist also mit $\angle EAF$ als durch eine Drehung in gleichem Sinne entstanden zu betrachten, und daher positiv; dagegen entspricht $\angle EAG_1$ einer Drehung in entgegengesetztem Sinne, und ist negativ. (Vergl. § 9).

§ 44. **Aufgabe.** Einen Winkel zu construiren, der ein bestimmtes Vielfache (das Zweifache, Dreifache... etc.) eines gegebenen Winkels ist. — (Fig. 16).

Lösung. Um den Scheitelpunkt B des gegebenen Winkels ABC , und um den Punkt E der Graden EX , an welcher das Vielfache des gegebenen Winkels construirt werden soll, schlage man mit demselben Radius Kreise, und trage vom Durchschnittpunkte D die Sehne AC in der bestimmten Anzahl (hier 3mal) als Sehne in den Kreis. Verbindet man den Punkt F , den Endpunkt der letzten Sehne, mit dem Scheitelpunkte E , so ist der Winkel $\angle FED$ das gewünschte Vielfache (hier das Dreifache) des gegebenen Winkels.

Fig. 15.

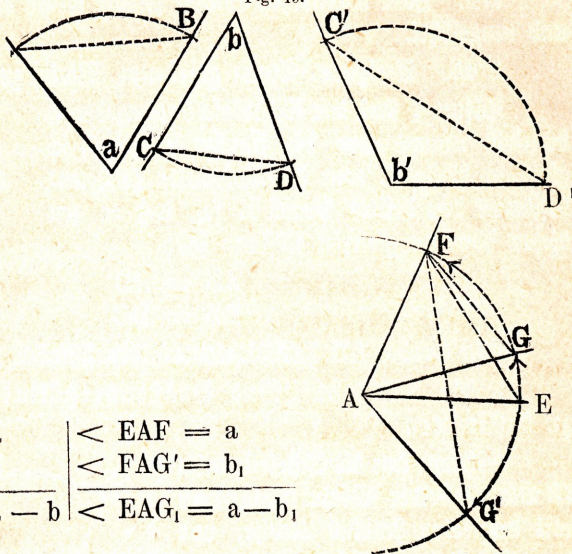
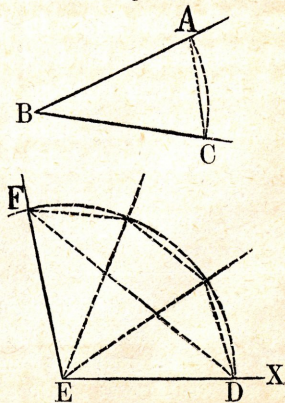


Fig. 16.



NB. Zum Dreifachen Winkel gehört nicht die Dreifache Sehne, und umgekehrt.

§ 45. **Aufgabe.** Einen gegebenen Winkel zu halbiren. (Fig. 17).

Lösung. Auf den Schenkeln des gegebenen Winkels nimmt man die Punkte B und C in gleichem Abstände vom Scheitelpunkte (A), und bestimmt den dritten Punkt D so, daß er von diesen Punkten gleichen Abstand hat:

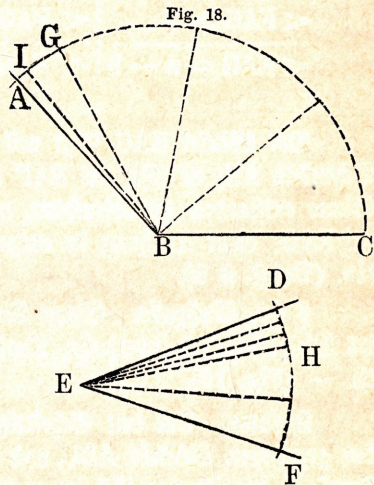
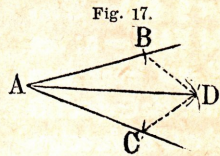
$$AB = AC$$

$$DB = DC$$

Die Gerade AD halbirt alsdann den Winkel. *).

§ 46. **Aufgabe.** Das Größenverhältniß zweier Winkel zu bestimmen.

Lösung. Um die Scheitelpunkte (B und E) beider Winkel schlage man mit demselben Radius Kreise, und trage die Sehne AC des kleineren so oft als möglich als Sehne in den Bogen des größeren Winkels. Bleibt kein Rest, so ist der größere Winkel ein ganzes Vielfache des kleineren: $FED = 3 \times ABC$ (s. d. Fig. 16). Bleibt aber ein Rest, so trage man die Sehne des Restes so oft als möglich in den Bogen des kleineren Winkels; die Sehne des abermaligen Restes als Sehne in den Bogen des vorigen u. s. f. bis kein Rest bleibt, und berechne das Verhältniß nach § 16. (Fig. 18).



- 1) $\angle ABC = 3 \cdot \angle DEF + \angle ABG$ desgl. Bog. $AC = 3 \text{ Bog. } DF + \text{Bog. } AG$
- 2) $\angle DEF = 2 \cdot \angle ABG + \angle DEH$ „ Bog. $DF = 2 \text{ Bog. } AG + \text{Bog. } DH$
- 3) $\angle ABG = 1 \cdot \angle DEH + \angle ABI$ „ Bog. $AG = 1 \text{ Bog. } DH = \text{Bog. } AI$
- 4) $\angle DEH = 3 \cdot \angle ABI$ „ Bog. $DH = 3 \text{ Bog. } AI$

*) Die Uebereinstimmung der Lösungen zu den Aufgaben § 38 und § 45 ist nicht zufällig, sondern eine nothwendige Folge der Gleichheit beider Aufgaben, denn „in einem gegebenen Punkte einer Geraden eine Normale zu errichten“, heißt mit anderen Worten: „einen gestreckten Winkel zu halbiren.“

Aus 3 und 4 folgt:

$$5) \angle ABG = 3. ABJ + ABJ = 4. ABJ \text{ desgl. Bog. } AG = 4. \text{Bog. } AJ$$

Aus 2,5 und 4 folgt:

$$6) \angle DEF = 2. 4. ABJ + 3. ABJ = 11. ABJ \quad " \quad \text{Bog. } DF = 11. \text{Bog. } AJ$$

Aus 1,6 und 5 folgt:

$$7) \angle ABC = 3. 11. ABJ + 4. ABJ = 37. ABJ \quad " \quad \text{Bog. } AC = 37. \text{Bog. } AJ$$

$$\text{Aus 6 folgt 8) } \angle ABJ = \frac{1}{11} \text{ DEF oder Bog. } AJ = \frac{1}{11} \text{ Bog. } DF$$

$$\text{Aus 7 und 8 folgt 9) } \angle ABC = \frac{37}{11} \text{ DEF oder Bog. } AC = \frac{37}{11} \text{ Bog. } DF$$

$$\text{oder } \angle ABC : \text{DEF} = 37 : 11 \text{ desgl. Bog. } AC : DF = 37 : 11.$$

Anmerkung. Da der rechte Winkel als der vierte Theil des complete Winkels eine bestimmte Größe hat, so ist er (oder eigentlich der Complete) das natürliche Maasß des Winkels. Um unbequeme Brüche zu vermeiden, theilt man den complete Winkel in 360 Theile, Grade genannt, den Grad in 60 Theile, Minuten genannt, und die Minute wieder in 60 Theile, Secunden genannt. — Als Vorlagen zur Uebung dienen zweckmäßig die in der Anmerkung zu § 16 bezeichneten rechtwinkligen Dreiecke, indem man das Verhältniß der spitzen Winkel derselben zum rechten bestimmen, und den erlangten Bruch in Grade, Minuten und Secunden verwandeln läßt. — Ein Beispiel mag das Verfahren erläutern:

Es bezeichne a die Hypotenuse, b die kleinere, c die größere Kathete, ferner sei $c = 2 b$, so ist: (Fig. 19).

$$\begin{aligned} \angle BAC &= 3. \angle ABC + \angle DAC \text{ oder } \alpha = 3. \beta + \delta = 61 \eta \\ \angle ABC &= 2. \angle DAC + \angle EBC \quad " \quad \beta = 2. \delta + \epsilon = 18 \eta \\ \angle DAC &= 1. \angle EBC + \angle FAC \quad " \quad \delta = 1. \epsilon + \zeta = 7 \eta \\ \angle EBC &= 1. \angle FAC + \angle GBC \quad " \quad \epsilon = 1. \zeta + \eta = 4 \eta \\ \angle FAC &= 3. \angle GBC \quad " \quad \zeta = 3. \eta \end{aligned}$$

$$\beta = \frac{18}{61} \quad \alpha = \frac{18}{61} \cdot 90^\circ = 26^\circ 33' 26,5$$

$$\begin{aligned} \angle BAC &= 1. \angle BCA + \angle HAC = 61 \text{ MAC} = \alpha \\ \angle BCA &= 2. \angle HAC + \angle ICB = 43 \text{ MAC} = \gamma \\ \angle HAC &= 2. \angle ICB + \angle KAC = 18 \text{ MAC} \\ \angle ICB &= 1. \angle KAC + \angle LCB = 7 \text{ MAC} \\ \angle KAC &= 1. \angle LCB + \angle MAC = 4 \text{ MAC} \\ \angle LCB &= 3. \text{MAC} \end{aligned}$$

$$\gamma = \frac{43}{61} \quad \alpha = \frac{43}{61} \cdot 90^\circ = 63^\circ 26' 33,4$$

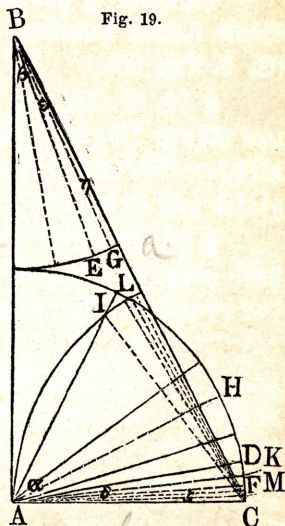


Fig. 19.

Anmerkung. Hiernach wäre $\alpha + \gamma = 89^\circ 59' 59''9$, der Fehler also bloß $= 0,1$. Der Fehler für jeden einzelnen Winkel ist aber nicht etwa $= 0,05$, wie man nach Obigem zu schließen geneigt sein dürfte, sondern beträchtlich viel größer; denn die trigonometrische Berechnung ergiebt $\beta = 26^\circ 33' 54,2$, also der aus der Messung erzielte Werth für β um $28''$ zu klein, für γ um $27,8$ zu groß.

Zur bequemeren Controle folgen hier einige, den einfachen Cathetenverhältnissen entsprechende Winkelwerthe:

Ist $b : c = 1 : 2$	so ist $\beta = 26^\circ 33' 54,2$	$\gamma = 63^\circ 26' 5,8$
„ $b : c = 2 : 3$	„ $\beta = 33^\circ 41' 24,2$	$\gamma = 56^\circ 18' 35,8$
„ $b : c = 3 : 4$	„ $\beta = 36^\circ 52' 11,6$	$\gamma = 53^\circ 7' 48,4$
„ $b : c = 4 : 5$	„ $\beta = 38^\circ 39' 35,3$	$\gamma = 51^\circ 20' 24,7$
„ $b : c = 5 : 6$	„ $\beta = 39^\circ 48' 20,0$	$\gamma = 50^\circ 11' 40,0$
⋮	⋮	
$b : c = 1 : 1$	„ $\beta = 45^\circ 0' 0''$	$\gamma = 45^\circ 0' 0''$

Bedenkt man, wie klein schon ein Grad an einem gewöhnlichen Transporteur (von circa $1\frac{3}{4}$ Zoll Radius) ist, so wird man sich nicht wundern, wenn die durch Messung erhaltenen Winkelwerthe sich um mehrere Minuten von den obigen, einer trigonometrischen Tafel entnommenen, bis auf $\frac{1}{10}$ Sec. genauen Werthen differiren.

§ 45. **Aufgabe.** Zwei (oder auch mehrere) Grade zu construiren, die mit einer gegebenen Grad gleich Winkel in gleichem Sinne bilden. *)

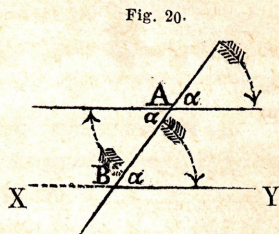
Bemerkung zur Lösung. Die gleichen Winkel in gleichem Sinne können entweder einseitig oder wechselnd angetragen werden. (S. d. Fig. 20).

§ 46. **Erklärung.** Zwei oder mehrere Grade, die, in einer Ebene liegend, mit derselben Grad gleiche Winkel in gleichem Sinne (gleiche correspondirende Winkel) bilden, heißen gleich gerichtet oder parallel.

§ 47. **Aufgabe.** Durch einen gegebenen Punkt (A) außerhalb einer gegebenen Grad (XY) eine Grad zu ziehen, die der gegebenen parallel ist. — (Fig. 20).

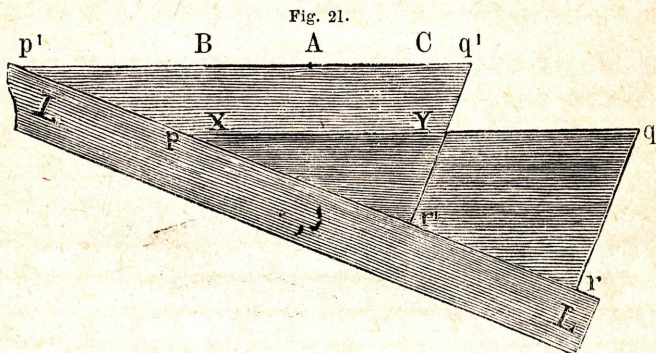
*) Eine Drehung kann in doppeltem Sinne geschehen, links herum oder rechts herum. Winkel in gleichem Sinne heißen Winkel, die durch eine Drehung im gleichen Sinne entstanden sind; man nennt sie kurz correspondirende Winkel, wenn sie von den entsprechenden Enden, d. h. von den nach derselben Seite hin gerichteten Enden beschrieben sind, dagegen heißen sie wechselnde Correspondirende oder kurz Wechselwinkel, wenn sie von den entgegengesetzten Enden beschrieben sind.

1. **Lösung.** Durch den gegebenen Punkt A ziehe man eine Gerade so, daß sie die XY in einem beliebigen Punkte B schneidet, und trage den einen der Winkel, die sie mit der XY bildet in A in gleichem Sinne an die Schneidende AB an, einseitig oder wechselnd.



2. **Lösung;** mittelst Lineal und Winkelhaken.

Man setze einen Winkelhaken (pqr) an die Kante eines Lineales (LL) (Fig. 21) und richte beide so, daß die freie Kante (pq) des



Winkelhakens mit der gegebenen Geraden XY zusammen fällt. In dieser Lage halte man das Lineal fest, und schiebe den Winkelhaken längs der Kante des Lineales hinaus, bis die freie Kante bis an den gegebenen Punkt A heran kommt; darnach ziehe man längs derselben den Strich BC, so geht der durch A und ist parallel XY, weil beide in ihrer Verlängerung mit der Kante des Lineales gleiche correspondirende Winkel bilden.

§ 48. **Aufgabe.** Zwei Grade zu construiren, die mit einer gegebenen Geraden ungleiche Winkel in gleichem Sinne bilden.

Bemerkung zur Lösung. Zwei Grade, die mit einer Dritten ungleiche Winkel in gleichem Sinne bilden, werden sich bei hinlänglicher Verlängerung stets schneiden.

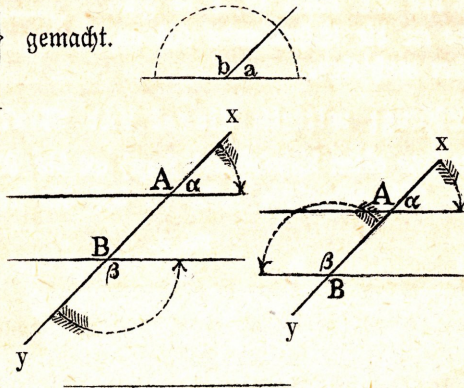
§ 49. **Aufgabe.** Zwei Grade zu construiren, die mit einer gegebenen Geraden Winkel in entgegengesetztem Sinne bilden, deren Summe gleich einem gestreckten Winkel ist. — (Fig. 22).

Lösung. In einem beliebigen Punkte A der gegebenen Grade setze man den einen, in einem anderen Punkte B den anderen von zwei Nebenwinkeln, in entgegengesetztem Sinne an, einseitig oder wechselseitig. *)

$$\left. \begin{array}{l} \alpha = a \\ \beta = b \end{array} \right\} \text{gemacht.}$$

$$\frac{a + b = 2R}{\alpha + \beta = 2R}$$

Fig. 22.



Cap. III. Das Dreieck.

§ 50. **Erklärung.** Drei Grade können sich in drei Punkten schneiden, und umgrenzen dann ein Stück Ebene, welches Dreieck heißt. Die Durchschnittspunkte heißen Ecken, die Abstände der Ecken heißen Seiten des Dreiecks. Jede Seite bildet mit einer anderen Seite einen Innenwinkel, mit der Verlängerung einer anderen dagegen einen Außenwinkel.

§ 51. **Aufgabe.** Einen Winkel zu construiren, welcher gleich der Summe der drei Innenwinkel des Dreiecks ist.

Bemerkung zur Lösung. Je genauer die Construction ist, desto genauer wird der gewünschte Winkel einem Gestreckten gleich sein.

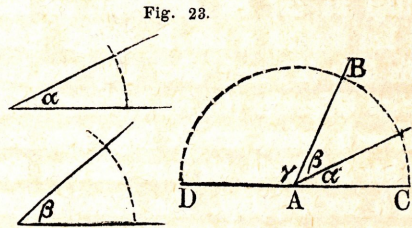
§ 52. **Aufgabe.** Einen Winkel zu construiren, welcher gleich der Summe der Außenwinkel des Dreiecks ist.

Bemerkung. Die Summe der Außenwinkel muß einen complete Winkel geben.

*) Je zwei Winkel, welche zwei Grade mit einer dritten bilden, heißen Gegenwinkel, wenn sie durch eine Drehung im entgegengesetzten Sinne von entsprechenden Enden gebildet sind; sie heißen Gegenwechselwinkel, wenn sie durch entgegengesetzte Drehung der entgegengesetzten Enden gebildet sind. — (α und β sind in der ersten Fig. Gegenwinkel, in der zweiten Gegenwechselwinkel).

§ 53. **Aufgabe.** Zwei Innenwinkel (α und β) eines Dreiecks sind gegeben; es soll der dritte durch Construction gefunden werden. (Fig. 23).

Lösung. Man construire den Winkel BAC gleich der Summe der gegebenen Winkel ($= \alpha + \beta$); so ist sein Supplement γ , d. h. der Winkel, den der eine Schenkel (BA) mit der gradlinigen Verlängerung (AD) des andern Schenkels (AC) bildet, der gewünschte dritte Winkel des Dreiecks.



§ 54. **Aufgabe.** Zwei Innenwinkel eines Dreiecks sind in Zahlen gegeben, es soll der dritte durch Rechnung gefunden werden.

Lösung. Ist $\alpha = 35^\circ 47' 45''$; $\beta = 48^\circ 35' 27''$ so ist der dritte $\gamma = 180^\circ - (35^\circ 47' 45'' + 48^\circ 35' 27'') = 180^\circ - 84^\circ 23' 12'' = 95^\circ 36' 48''$.

§ 55. **Aufgabe.** Aus dem gegebenen Größerverhältnisse der drei Winkel eines Dreiecks die Größe der Winkel zu berechnen.

Lösung. Ist das Verhältniß der Winkel $\alpha : \beta : \gamma = 3 : 4 : 6$, so kommen:

$$\begin{array}{rcl} \text{auf } \alpha & = & 3 \text{ Theile} \\ \text{'' } \beta & = & 4 \text{ ''} \\ \text{'' } \gamma & = & 6 \text{ ''} \end{array}$$

$$\text{auf } \alpha + \beta + \gamma = 13 \text{ ''}$$

$$\text{Es ist aber } \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

$$13 \text{ Theile} = 180^\circ$$

$$1 \text{ Theil} = \frac{180^\circ}{13}$$

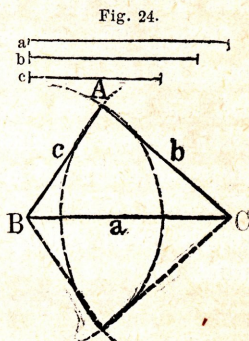
$$\alpha = \frac{3 \cdot 180^\circ}{13} = 41^\circ 32' 18 \frac{6''}{13}$$

$$\beta = \frac{4 \cdot 180^\circ}{13} = 55^\circ 23' 4 \frac{8''}{13}$$

$$\gamma = \frac{6 \cdot 180^\circ}{13} = 83^\circ 4' 36 \frac{12''}{13}$$

§ 56. **Aufgabe.** Ein Dreieck zu construiren so, daß seine drei Seiten drei gegebenen Strecken gleich werden. (Fig. 24).

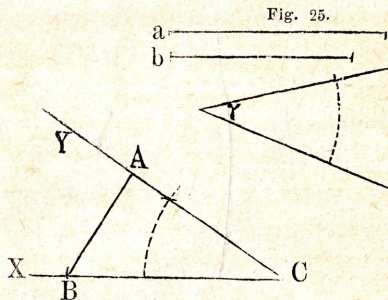
Lösung. Auf einer beliebigen Geraden bestimme man zwei Punkte (B und C) so, daß ihr Abstand der einen gegebenen Strecke (a) gleich ist; man mache also $BC = a$. — Da nun die dritte Ecke (A) von der Ecke B einen bestimmten Abstand $= c$ haben muß, so liegt sie auf der Kreislinie, die man mit dem Radius c um B schlägt. Diese dritte Ecke (A) muß aber auch von dem zweiten Eckpunkte (C) den bestimmten Abstand $= b$ haben, und sie liegt daher auch auf der Kreislinie, die man mit dem Radius b um C schlägt. Der Durchschnittspunkt beider Kreislinien (wenn einer vorhanden ist!) ist also die dritte Ecke.



Anmerkung. Zwei Kreise schneiden sich in zwei Punkten (!), und es entstehen daher zwei Dreiecke, die sich indeß nur in der Lage unterscheiden. Sind die zwei Seiten b und c zusammen der dritten Seite fast gleich, so fallen die Kreislinien scheinbar in einer ganzen Strecke zusammen, und die Construction wird unsicher. — Durch die drei Seiten sind auch die Winkel mit bestimmt!

§ 57. **Aufgabe.** Ein Dreieck zu construiren so, daß zwei Seiten zwei gegebenen Strecken, der Zwischenwinkel aber einem gegebenen Winkel gleich werden. (Fig. 25).

Lösung. Auf der unbegrenzten Geraden CX nehme man die Strecke $CB = a$; construire $\angle YCX = \angle \gamma$, und schneide von CY die Strecke $CA = b$ ab. Verbindet man nun A mit B, so ist ABC das gewünschte Dreieck.



Folgerung. Durch zwei Seiten und den Zwischenwinkel ist das Dreieck unzweideutig bestimmt.

§ 58. **Aufgabe.** Ein Dreieck zu construiren so, daß zwei Seiten zwei gegebenen Strecken, ein nicht zwischenliegender Winkel aber einem gegebenen Winkel gleich werden. — (Fig. 26).

Lösung. Auf der unbegrenzten Geraden BX nehme man die

Strecke BC gleich der dem gegebenen Winkel anliegenden Seite, $= a$, und construiren alsdann $\angle YBX = \angle \beta$. Die dritte Ecke muß nun von C den bestimmten Abstand $= b$ haben, also auf der Kreislinie liegen, die man um C mit dem Radius $= b$ schlägt; zugleich muß diese dritte Ecke auch auf dem Schenkel BY liegen: der Durchschnittspunkt beider Linien ist also die dritte Ecke. Hierbei können aber drei Fälle eintreten:

Die Strecke welcher die dem gegebenen Winkel gegenüberliegende Seite gleich sein soll ist:

1) (b_1) kleiner als die kürzeste Linie, die von C nach BY gezogen werden kann (kleiner als das Loth von C auf BY); alsdann trifft der (mit b_1 geschlagene) Kreis die Linie BY garnicht, und es giebt also kein Dreieck, das den gegebenen Bedingungen entspricht.

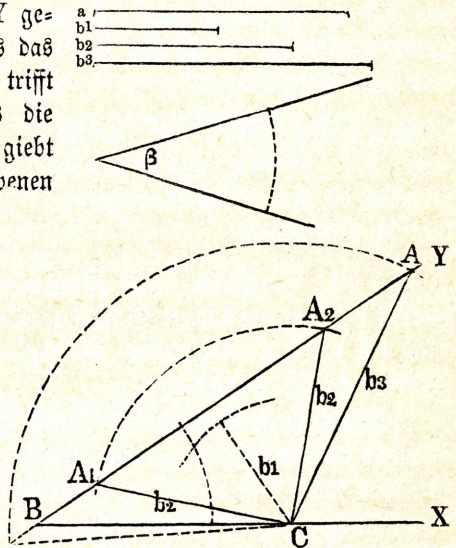
Sie ist 2) (b_2) zwar größer als die von C nach BY gezogene kürzeste Linie, aber kleiner als die anliegende Seite a ; alsdann schneidet der Kreis den Schenkel BY zweimal (in A_1 und A_2) und es entstehen zwei Dreiecke (A_1BC und A_2BC) die den Bedingungen genügen, die aber in den übrigen Elementen nicht übereinstimmen. (Das eine ist bei A nothwendig spitzwinklig, das andere stumpfwinklig).

Sie ist 3) (b_3), auch größer als die anliegende Seite a ; alsdann schneidet die Kreislinie den Schenkel BY nur einmal (das zweite Mal die rückwärts gehende Verlängerung), und es entsteht ein unzweideutig bestimmtes Dreieck (ABC).

Folgerung. Durch zwei Seiten und einen nicht zwischenliegenden Winkel ist nur dann das Dreieck unzweideutig bestimmt, wenn die dem Winkel gegenüberliegende Seite nicht kleiner ist als die anliegende.

§ 59. Aufgabe. Ein Dreieck zu construiren so, daß eine

Fig. 26.

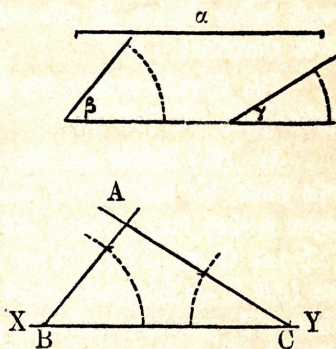


Seite einer gegebenen Strecke, die dieser Seite anliegenden Winkel aber zwei gegebenen Winkeln gleich werden. — (Fig. 27).

Fig. 27.

Lösung. Auf der unbegrenzten Geraden XY nehme man die Strecke $BC = a$, und construiere dann $\angle ABC = \beta$; $\angle ACB = \gamma$. Ist die Summe der Winkel β und γ kleiner als ein Gestreckter, so schneiden sich die Schenkel, und dieser Durchschnittspunkt A ist die dritte Ecke des Dreiecks.

Folgerung. Durch eine Seite und die beiden anliegenden Winkel ist das Dreieck unzweideutig bestimmt.



§ 60. **Aufgabe.** Ein Dreieck zu construiren so, daß eine Seite einer gegebenen Strecke, ein dieser Seite anliegender, und ein nicht anliegender Winkel aber je einem gegebenen Winkel gleich werde.

Lösung. Man construiere nach § 53 zu den beiden gegebenen Winkeln den dritten Winkel des Dreiecks, und führe die weitere Construction dann nach Anleitung der vorigen Aufgabe aus.

Folgerung. Durch eine Seite und zwei Winkel ist stets das Dreieck unzweideutig bestimmt.

Zweiter Cours.

Grundriß der Planimetrie.

Cap. I. Allgemeine Betrachtungen über die Begründung.

§ 1. Alle unsere Erkenntniß gründet sich schließlich auf Erfahrung. Einigen Sätzen geben wir sogleich unsere Zustimmung, sobald wir den Sinn derselben verstehen. Das sind Sätze, die auf so einfache und alltägliche Erfahrungen gegründet sind, auf Erfahrungen, die wir so oft, und in so früher Jugend bereits gesammelt haben, daß wir uns des Anfanges nicht erinnern können, so, daß, sobald sie uns in einem Satze formulirt vorgeführt werden, es uns scheint, als hätten wir diese Erkenntniß bereits mit auf die Welt gebracht. Solche ursprüngliche Erkenntnisse, denen wir unbedingt unsere Zustimmung geben, weil wir sie stets und ausnahmslos von der Erfahrung bestätigt gefunden haben, nennen wir Grundsätze. Drei solcher Grundsätze entnehmen wir aus dem vorigen Abschnitte:

1) Wenn zwei Größen einer dritten gleich sind, so sind sie auch einander gleich; oder — statt einer Größe kann stets eine ihr gleiche Größe gesetzt werden.

2) Unter allen Linien zwischen zwei Punkten ist die Gerade die kürzeste.

3) Zwei Gerade schneiden sich nur einmal, oder fallen ganz zusammen.

Von diesen drei Grundsätzen ist der erste ein allgemeiner; die beiden anderen drücken speciell geometrische Wahrheiten aus.

§ 2. Noch andere Wahrheiten und Eigenschaften glaubten wir im vorigen Abschnitte entdeckt zu haben, aber wir konnten uns nicht entschließen ihnen so unbedingt unsere Zustimmung zu geben. — Als wir die drei Winkel eines Dreieckes aneinander setzten, erhielten wir als Summa einen Winkel, der oft gar nicht, jedenfalls aber nur sehr wenig von einem Gestreckten verschieden war. War es eine Folge unvermeid-

licher Fehler der Construction, wenn die Summe nicht genau einen Gestreckten gab, und bloß Zufall, oder eine Eigenschaft besonderer Dreiecke, wenn die Summe mit dem Gestreckten übereinstimmte?! — Die Construction kann das nicht vollgiltig entscheiden.

Eine Kreislinie schneidet eine andere im Allgemeinen zweimal, das erste Mal beim Eintritt, das zweite Mal beim Austritt. In gewissen Lagen aber schien es doch (s. II § 12) als hätten die beiden Kreislinien eine ganze Strecke mit einander gemein; — ist das wirklich bloß Schein, und Folge der Breite gezeichneter Kreislinien? — Wie löst man diese Zweifel?!

§ 3. In der Geometrie werden im Allgemeinen Gleichheiten behauptet. Gleichheiten haben wir bisher aber nur durch unmittelbare Deckung erkennen können, ein Mittel, welches an zwei Mängeln leidet: zunächst kann nicht alles zur Deckung gebracht werden, dann aber kann durch Deckung keine absolute Gleichheit — es kann nicht die Nothwendigkeit einer Gleichheit erkannt werden. Durch Anerkennung des Grundsatzes, „was demselben gleich, ist auch einander gleich“, haben wir uns aus der ersten Verlegenheit gezogen, aber über die Empirie haben wir uns damit nicht erhoben. Für zusammenhanglose Größen giebt es auch in der That kein anderes Mittel, ihre Größe oder Gleichheit zu erkennen, als die Messung oder Deckung; wenn aber die Größen — Seiten und Winkel — zu einer Figur zusammengesetzt werden, so ist es zunächst gewiß eine über alle Zweifel erhabene Thatsache, daß stets dieselbe Figur entsteht, wenn dieselben Elemente in derselben Reihenfolge zusammen treten. Wenn sich nun ferner mit Sicherheit feststellen ließe, daß bereits eine verhältnißmäßig geringe Zahl von Elementen ausreicht, um eine Figur unzweideutig zu bestimmen — zu welcher Erwartung uns der vorhergehende Abschnitt berechtigt — so können wir, mit Rücksicht auf den oben ausgesprochenen Grundsatz, Figuren, die in den sie unzweideutig bestimmenden Elementen übereinstimmen, als bloße Wiederholungen oder Copien von einander, oder — um einen althergebrachten Ausdruck zu gebrauchen — als congruente Figuren (\cong) ansprechen. Hiermit haben wir aber ein Mittel gewonnen aus Gleichheiten auf Gleichheiten zu schließen; und es bildet daher die Erforschung, und sichere Begründung der gegenseitigen Abhängigkeit der Elemente einer Figur, und in Sonderheit der eines Dreieckes als der einfachsten Figur, die wesentliche Grundlage der theoretischen Geometrie, indem die fragliche Gleichheit gewisser Linien und Winkel im Allgemeinen dadurch

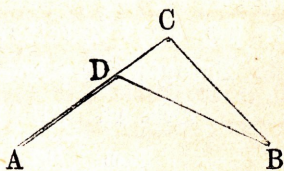
erwiesen wird, daß wir dieselben als Elemente von Dreiecken erkennen, die in den sie unzweideutig bestimmenden Elementen übereinstimmen.

Cap. II. Die Größe von Linien und Winkeln im Allgemeinen.

§ 1. **Lehrsatz.** Von zwei einmal gebrochenen Linien mit gemeinschaftlichen Endpunkten ist die umschlossene stets die kürzere. — (Fig. 28).

1) **Voraussetzung.** Zwei farbige Fäden sind mit dem einen Ende an den Stift A, mit dem anderen an den Stift B gebunden. Der blaue Faden wird durch den Stift C straff angezogen, der rothe durch den Stift D, welcher den blauen Faden eben berührt.

Fig. 28.



Behauptung Der umspannte rothe Faden ist kürzer als der umspannende blaue Faden.

Bew. Von A bis D deckt der rothe Faden den blauen; in dieser Strecke sind sie also gleich. Von D bis B ist der rothe Faden gerade, und daher kürzer als der Theil des blauen Fadens zwischen denselben Punkten, weil der über C gebrochen geht. Daher ist auch der ganze rothe Faden von A bis B kürzer als der ganze blaue Faden.

Kurze Darstellung in mathematischer Form:

Behauptung $ADB < ACB$

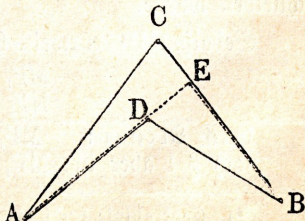
Bew. $AD = AD$ (Was sich deckt ist gleich).
 $DB < DCB$ (Grundsatz 2).

Durch Addition: $AD + DB < AD + DCB$
 oder $ADB < ACB$

2) **Voraussetzung.** Alles wie in der ersten Voraussetzung, nur berührt der Stift D den umspannenden blauen Faden nicht. (Fig. 29).

Fig. 29.

Bew. Da jetzt die beiden Fäden in keinem Theile zusammen fallen, so kann man sie auch in dieser Lage nicht unmittelbar mit einander vergleichen. Befestigt man aber einen dritten Faden, etwa einen schwarzen (auf der schwarzen Tafel besser einen weißen) mit dem einen Ende an A,



führt ihn von da an D vorbei gerade bis zum blauen Faden, und dann um den Stift E bis B, wo man das zweite Ende befestigt. So kann man nun mit diesem die beiden ersteren vergleichen, da er mit beiden zum Theil zusammen fällt; und zwar ist:

Nach dem vorigen Falle $ACB > AEB$ d.h. der blaue Fad. länger als der schwarze
 desgleichen $AEB > ADB$ d.h. der schwarze " " " " rothe
 Um so mehr $ACB > ADB$ d.h. der blaue " " " " rothe

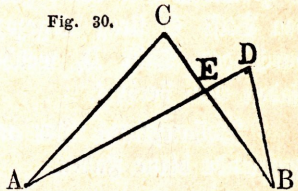
§ 2. **Lehrsatz.** Schneiden sich zwei einmal gebrochene Linien, die gemeinschaftliche Endpunkte haben; so ist die Summe der sich schneidenden Theile größer, als die Summe der sich nicht schneidenden Theile. — (Fig. 30).

Vorausf. Die gebrochenen Linien ACB und ADB schneiden sich in E.

Behaupt. $AD + BC > AC + DB$

Fig. 30.

Bew. $AE + EC > AC$
 $DE + BE > DB$ } Grund-
 satz 2.



durch Addition: $AE + DE + EC + BE > AC + DB$

d. h. $AD + BC > AC + DB$

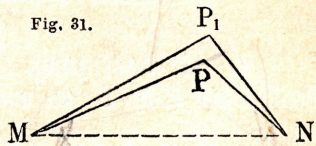
§ 3. **Lehrsatz.** Zwei Kreislinien können nicht mehr als zwei Punkte gemein haben, und diese liegen nach entgegengesetzter Seite der Centrallinie *). — (Fig. 31).

Vorausf. M und N sind die Mittelpunkte zweier Kreise und der Punkt P ist beiden Kreislinien gemein.

Behauptung. Es giebt außer P keinen zweiten Punkt auf derselben Seite (hier oberhalb) der Centrallinie XY, welcher beiden Kreislinien gemein wäre.

Bew. Wo wir auch den zweiten Punkt annehmen mögen, stets würden die Verbindungslinien desselben mit den Mittelpunkten M und N eine gebrochene Linie bilden, welche die gebrochene MPN entweder umschließen oder schneiden würde.

Fig. 31.



Sei also 1) P' der zweite bei den Kreislinien gemeinsame Punkte so wäre:

$MP_1 = MP$ als Radien des Kreises um M
 $NP_1 = NP$ " " " " " N

durch Addition: $MP_1 + NP_1 = MP + NP$

nach § 1 aber ist: $MP_1 + NP_1 > MP + NP$

*) Centrallinie heißt die Gerade, welche durch beide Mittelpunkte geht.

Da nun diese beiden Folgerungen richtig gezogen sind, und doch sich widersprechen, so muß die Annahme, daß auch P_1 beiden Kreislinien gemein sei, falsch sein. *)

Wäre 2) P_2 (Fig. 32) der zweite beiden Kreislinien gemeinsame Punkt, so M hätten wir wiederum:

$$\begin{array}{l} MP_2 = MP \text{ als Radien des Kreises um M} \\ NP = NP_2 \text{ " " " " " N} \end{array}$$

durch Addition: $MP_2 + NP = MP + NP_2$

nach § 2 aber ist: $MP_2 + NP < MP + NP_2$

welche Folgerungen wieder richtig gezogen, und doch widersprechend sind, also ist außer P kein zweiter, beiden Kreislinien gemeinsamer Punkt auf derselben Seite mit P überhaupt möglich.

1. **Folgerung.** Durch die Sehne ist auch der zugehörige Bogen und Centriwinkel mitbestimmt (§. I § 28).

2. **Folgerung.** Zu gleichen Sehnen in demselben und in gleichen Kreisen gehören auch gleiche Bogen und Centriwinkel. (§. Cap. I, § 3).

Anmerkung. In diesem Satze finden die in Curf. I, § 34 ausgesprochenen Behauptungen, so wie die im § 35 und 37 ausgeführten Constructionen ihre Begründung.

Cap. III. Parallelenlehre, und Winkel in geschlossenen Figuren.

Für die Gleichheit haben wir folgende drei Merkmale:

- 1) Was sich deckt, ist sich gleich. *Was deut sich aber? 2*
- 2) Was demselben gleich, ist auch einander gleich. *gleiche*
- 3) Was von demselben um gleich viel verschieden, ist unter sich gleich. *ausp*

Die beiden ersten Merkmale können auch ohne Bedenken als

*) Wird P so angenommen, daß MP_1N von MPN umschlossen wird, so bildet das keinen neuen Fall, sondern fällt mit dem ersten zusammen, indem man nur P_1 mit P zu vertauschen braucht.

Merkmale für die Gleichheit der Richtung hingestellt werden; sie sind aber als solche, wie leicht ersichtlich, von untergeordneter Bedeutung. Da wir aber die Größe des Richtungsunterschiedes, d. h. den Winkel mit Zirkel und Lineal bestimmen können, außerdem die in Cap. I § 3 angestellten Betrachtungen uns zu der Hoffnung berechtigen, daß wir Mittel und Wege entdecken werden, aus gewissen Merkmalen mit Sicherheit die Gleichheit der Winkel zu erschließen, so ist es einleuchtend, daß das dritte Merkmal als Merkmal für Richtungsgleichheit von großer Tragweite wäre. Nun aber können zwei Grade, die sich schneiden, offenbar nicht gleichgerichtet genannt werden, und es drängt sich daher uns zunächst die Frage auf, ob wohl Grade, die von denselben Graden um gleichviel in Richtung unterschieden sind, sich schneiden können?

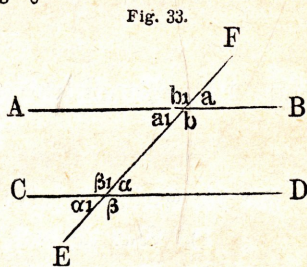
§ 4. **Lehrsatz.** Wenn zwei Grade mit einer Dritten Richtlinie genannt, in einer Ebene liegend, gleiche Winkel in gleichem Sinne bilden, so können sie sich nicht schneiden. (Fig. 33).

Voraussetzung. AB und CD liegen mit der Richtlinie EF in einer Ebene und es ist:

$$\begin{aligned} \angle a &= \alpha \\ \text{also auch } \angle b &= \beta \end{aligned}$$

Behauptung. AB und CD können sich nicht schneiden.

Bew. Da nach der Voraussetzung zu beiden Seiten der Richtlinie vollkommene Symmetrie (Gleichheit in umgekehrter Reihenfolge) ist, — denn es ist $a = \alpha_1$; $b = \beta_1$; $\alpha = a_1$; $\beta = b_1$, — so ist nicht abzusehen, auf welcher Seite der Schnittpunkt liegen sollte. Schnitten sich die Linien AB und CD rechts, so müßten sie sich eben so gut auch links schneiden. Da aber nach Grundsatz 3 zwei Grade sich nicht zweimal schneiden können, so können Grade, die mit der Richtlinie gleiche Winkel in gleichem Sinne bilden, sich garnicht schneiden.



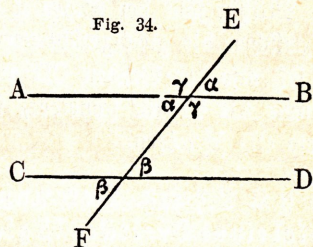
Anmerkung. Um dem Anfänger den Beweis zu veranschaulichen, und dadurch zugänglicher zu machen, zeichne man die Figur auf ein besonderes Blatt, schneide dieses in der Richtlinie (EF) durch, und bringe dann die rechte Hälfte mit der linken zur Deckung, wo auch zugleich die Bedeutung der symmetrischen Gleichheit veranschauligt wird.

Hierbei hat man eine besondere Gelegenheit zu der Bemerkung, daß in einer euklidischen imaginären Deckung durchaus keine beweisende Kraft liegt, sondern daß dieselbe eben so wie die reelle Deckung, bloß ein — dazu schwächeres Mittel der Veranschaulichung ist. Denn offenbar liegt hier der Schwerpunkt des Beweises in dem Bewußtsein, daß der Schnittpunkt doch nur auf einer Seite der Richtlinie liegen kann, und daß aus der Voraussetzung für diese Seite irgend ein besonderes, dem Schneiden günstiges Merkmal sich ergeben müßte.

Nachdem nun mit diesem Satze jedes Bedenken beseitigt ist, stellen wir obiges dritte Merkmal vornehmlich als Merkmal der Richtungs-gleichheit hin:

§ 5. Definition. Wir nennen zwei Grade **gleichgerichtet** oder **parallel**, wenn sie, in einer Ebene liegend, von derselben Graden (Richtlinie) um gleich viel in Richtung verschieden sind, oder wenn sie, in einer Ebene liegend, mit derselben Graden gleiche Winkel in gleichem Sinne (gleiche correspondirende Winkel) bilden.

§ 6. **Lehrsatz.** Zwei parallele Grade bilden mit einer beliebigen dritten Graden Gegenwinkel, (sowohl einseitige als wechselnde), deren Summe gleich zwei Rechten ist. (Fig. 34).



Vorausf. $AB \parallel CD$ oder $\angle \alpha = \angle \beta$

Behaupt. $\angle \gamma + \angle \beta = 2 R$

Bew. $\angle \gamma + \angle \alpha = 2 R$ (als Nebenwinkel)

$\angle \alpha = \angle \beta$ (Voraussetzung)

$\angle \gamma + \angle \beta = 2 R$ (nach Grundsatz 1).

§ 7. **Lehrsatz.** Bilden zwei Grade mit einer dritten Graden Gegenwinkel, deren Summe gleich zwei Rechten ist, so sind diese Grade parallel. (Fig. 34).

Vorausf. $\angle \beta + \gamma = 2 R$

Behaupt. $AB \parallel CD$

Bew. $\angle \beta + \gamma = 2 R$ (Voraussetzung).

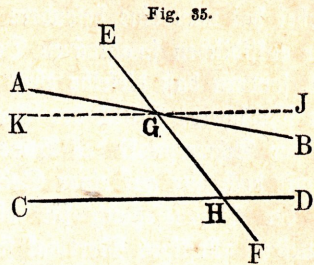
$\angle \alpha + \gamma = 2 R$ (als Nebenwinkel).

$\angle \beta + \gamma = \angle \alpha + \gamma$ (Grunds. 1).

$\gamma = \gamma$

Durch Subtraction: $\angle \beta = \angle \alpha$ d. h. $AB \parallel CD$.

§ 8. **Lehrsatz.** Bilden zwei Grade mit einer dritten Gegenwinkel, deren Summe nicht gleich zwei Rechten ist, so schneiden sich dieselben, und der Convergenzpunkt liegt nach der Seite der Richtlinie, auf welcher die Summe der inneren Gegenwinkel kleiner ist als 2 R. (Fig. 35).



Vorausß. $\angle BGH + \angle DHG < 2 R$

Behaupt. AB und CD schneiden sich rechts von der Richtlinie EF

Bew. $\angle BGH + \angle DHG < 2 R$

$$\underline{\angle BGH + \angle BGE = 2 R}$$

$$\underline{\angle BGH + \angle DHG < \angle BGH + \angle BGE}$$

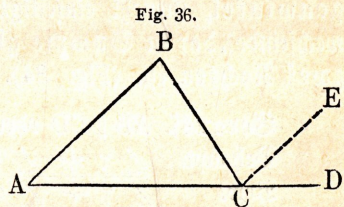
$$\angle BGH \text{ subtrahirt} \quad \underline{\angle DHG < \angle BGE}$$

Macht man daher $\underline{\angle JGE = \angle DHG}$, so ist:

$$\underline{\angle JGE < \angle BGE}$$

Mithin fällt der Schenkel GB, d. h. das rechte Ende der Geraden AB zwischen die gleichgerichteten GJ und CD, und die Grade AB nähert sich also der Grade CD auf der rechten Seite der Richtlinie EF. Da nun AB die KJ schneidet, so muß sie auch die der KJ gleichgerichtete CD schneiden.

§ 9. **Lehrsatz.** Der Außenwinkel eines Dreieckes ist gleich der Summe der beiden ihm nicht anliegenden Innenwinkel. (Fig. 36).



Behaupt. $\angle BCD = \angle BAC + \angle ABC$

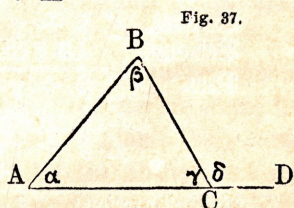
Bew. Man ziehe $CE \parallel AB$, so ist nach § 5:

$$\angle ECD = \angle BAC$$

$$\underline{\angle ECB = \angle ABC}$$

Durch Addition: $\underline{\angle BCD = \angle BAC + \angle ABC}$

§ 10. **Lehrsatz** Die Summe der drei Innenwinkel eines Dreieckes ist gleich zwei Rechten. — (Fig. 37).



Behaupt. $\angle \alpha + \angle \beta + \angle \gamma = 2 R$

Bew. Man verlängere die eine Seite AC, so entsteht der Außenwinkel BCD oder δ , und es ist:

$$\angle \delta + \angle \gamma = 2 R \text{ (als Nebenwinkel)}$$

$$\angle \delta = \alpha + \angle \beta \text{ (s. § 9).}$$

Durch Substitution: $\angle \alpha + \angle \beta + \angle \gamma = 2 R$. (Grunds. 1).

Bemerkung. Durch zwei Winkel eines Dreieckes ist der dritte mit bestimmt. Ist der eine Winkel eines Dreieckes ein rechter oder ein stumpfer Winkel, so sind jedesmal die beiden anderen spitz und das Dreieck heißt im ersteren Falle ein rechtwinkliges, im letzteren ein stumpfwinkliges. Sind alle drei Winkel spitz, so heißt das Dreieck spitzwinklig.

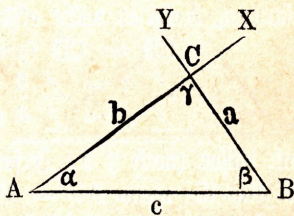
Cap. IV. Gegenseitige Abhängigkeit der Seiten und Winkel eines Dreieckes.

a) Erster Congruenzfall.

§ 11. **Lehrsatz.** Durch eine Seite und zwei Winkel ist das Dreieck unzweideutig bestimmt. (Fig. 38).

Bew. Die gegebene Seite (c) bestimmt den Abstand zweier Ecken (A und B), und da die Lage des Dreieckes gleichgiltig ist,—diese Ecken selbst. Durch die dieser Seite anliegenden Winkel (α und β) sind ferner die Richtungen (AX und BY) der von den bestimmten Ecken (A und B) ausgehenden Seiten bestimmt. Ist nun die Summe ($\alpha + \beta$) dieser Winkel kleiner als ein Gestreckter, so schneiden sich die Geraden auf der Seite dieser Winkel (§ 8), und da zwei Gerade sich nur in einem Punkte schneiden (Grundsatz 3), so ist dieser Schnittpunkt (C), d. h. die dritte Ecke des Dreieckes hiermit unzweideutig bestimmt. — Geht nun auch hieraus zunächst bloß hervor, daß das Dreieck durch eine Seite und die beiden anliegenden Winkel unzweideutig bestimmt ist, so folgt doch aus der Bemerkung zu § 10 sofort die Gültigkeit des Lehrsatzes in der obigen allgemeinen Fassung. (Vergl. I § 56 und 57).

Fig. 38.



Anmerkung. Es ist sehr anzuempfehlen die Construction des Dreieckes, (nach I § 56 u. f.), bei jedem Congruenzfalle aus den be-

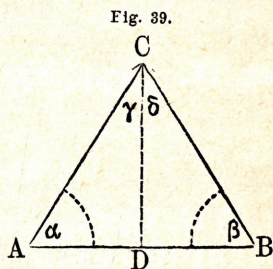
jüglischen Elementen wieder ausführen zu lassen, und zwar jedesmal in zwei Exemplaren. Hierdurch wird es dem Schüler nicht nur anschaulich, daß er wirklich dasselbe Dreieck in zwei Exemplaren erhält, sondern er lernt auch sicher unterscheiden, welche Elemente in der Construction gleich gemacht, und welche mit gleich geworden sind, daß also hier wirklich gegebene Gleichheiten andere zur nothwendigen Folge haben, oder, daß hier wirklich ein Schließen aus Gleichem auf Gleiches stattfindet. Zu dem Zwecke muß der Schüler die gleichgemachte, und gie gleichgewordenen Elemente gesondert aufschreiben.

Zusatz. Dreiecke die in einer Seite, und zwei ähnlich liegenden Winkeln übereinstimmen, sind congruent. (S. Cap. I § 3).

§ 12. **Lehrsatz.** Gleichen Winkeln liegen in einem Dreiecke auch gleiche Seiten gegenüber. (Fig. 39).

Vorausf. $\angle \alpha = \angle \beta$

Behaupt. $BC = AC$



Bew. Es ist jedenfalls eine Gerade CD denkbar welche den Winkel ACB halbiert; durch diese Gerade aber würde das Dreieck ACB in zwei Dreiecke zerlegt, die in einer Seite und zwei Winkeln übereinstimmen, denn es wäre alsdann:

$CD = CD$ (gemeinsames Element).

$\angle \alpha = \angle \beta$ (Vorausf.).

$\angle \gamma = \angle \delta$ (gemacht).

und daher (nach § 11 Zusatz) $\triangle ACD \cong \triangle BCD$, was aber nur möglich ist, wenn $AC = BC$ ist, da diese Linien ähnlich liegende Seiten der genannten Dreiecke sind. Die Gleichheit der Winkel (α und β) hat daher zur nothwendigen Folge die Gleichheit der gegenüberliegenden Seiten.

Bemerkung. Hat ein Dreieck zwei gleiche Winkel, so hat es auch zwei gleiche Seiten; die gleichen Seiten heißen Schenkel, die ungleiche heißt Basis, das Dreieck aber heißt ein gleichschenkliges. Sind alle drei Winkel gleich, so sind auch die drei Seiten gleich, das Dreieck heißt gleichseitig.

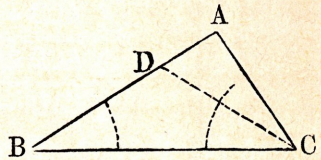
§ 13. **Lehrsatz** Dem größeren Winkel liegt in einem Dreiecke auch die größere Seite gegenüber. (Fig. 40).

Vorausf. $\angle ACB > \angle ABC$

Behaupt. $AB > AC$

Bew. Trägt man den kleineren Winkel (ABC) von dem Größeren (ACB) ab, construirt also $\angle DCB = \angle ABC$, so muß der zweite Schenkel (CD) des ersteren zwischen die Schenkel (AC und BC) des letzteren fallen, und dieser Schenkel muß die gegenüberliegende Seite (AB) in einem Punkte (D) treffen, der zwischen die Ecken A und B fällt; dann ist aber:

Fig. 40.



$$CD + DA > CA \text{ (Grundf. 2)}$$

$$CD = DB \text{ (§ 12)}$$

Durch Substitution: $DB + DA > CA$

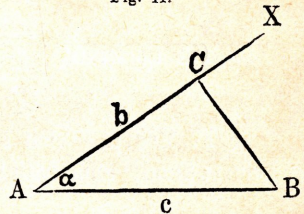
$$\text{d. h. } AB > CA$$

b) Zweiter Congruenzfall.

§ 14. **Lehrsatz.** Durch zwei Seiten und den zwischenliegenden Winkel ist das Dreieck unzweideutig bestimmt. (Fig. 41).

Bew. Durch die gegebene Seite (c) ist der Abstand zweier Ecken (A und B) bestimmt. Der anliegende Winkel (α) bestimmt ferner die Richtung AX der von der Ecke A ausgehenden Seite (b), und es muß die dritte Ecke (C) in dieser Richtung (AX) liegen; und da es nur einen Punkt (C) auf der Geraden (AX) geben kann, welcher von A den bestimmten Abstand b haben kann, so ist hiermit diese dritte Ecke, und somit das ganze Dreieck unzweideutig bestimmt. (Vgl. I § 54).

Fig. 41.



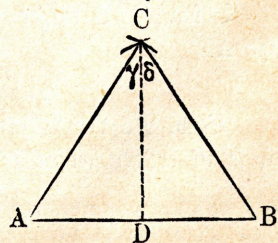
Zusatz. Dreiecke, die in zwei Seiten und dem zwischenliegenden Winkel übereinstimmen, sind congruent.

Fig. 42.

§ 15. **Lehrsatz.** Gleichen Seiten liegen in einem Dreiecke auch gleiche Winkel gegenüber. (Fig. 42).

Vorausf. $AC = BC$

Behaupt. $\angle ABC = \angle BAC$



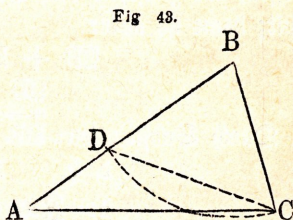
Bew. Durch C ist jedenfalls eine Gerade (CD) möglich, die den Winkel ACB halbiert. Durch diese Gerade wird aber das Dreieck ACB in zwei congruente Dreiecke zerlegt; denn es ist:

$$\begin{aligned} CD &= CD \text{ (gemeinsames Element)} \\ AC &= BC \text{ (Voraussetzung)} \\ \underline{\angle ACD = \angle BCD} &\text{ (gemacht)} \\ \underline{\triangle ACD \cong \triangle BCD} &\text{ (§ 14 Zusatz).} \\ \underline{\angle CAD = \angle CBD} & \end{aligned}$$

§ 16. **Lehrsatz.** Der größeren Seite liegt in einem Dreiecke auch der größere Winkel gegenüber. (Fig. 43).

Vorausf. $AB > BC$

Behaupt. $\angle ACB > \angle BAC$



Bew. Man schneide $BD = BC$ ab. Da nach der Voraussetzung $AB > BC$ ist, so fällt der Punkt D zwischen A und B, also die Gerade DC zwischen AC und BC; folglich ist:

$$\begin{aligned} \angle ACB &> \angle DCB \\ \text{Nun ist aber } \angle DCB &= \angle BDC \text{ (nach § 15)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \angle ACB &> \angle BDC \\ \text{Es ist ferner } \angle BDC &> \angle BAC \text{ (f. § 9.)} \\ \underline{\angle ACB > \angle BAC} & \end{aligned}$$

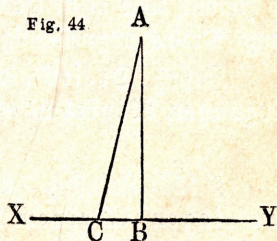
§ 17. **Lehrsatz.** Von den Geraden welche die Punkte einer Geraden mit einem Punkte außerhalb derselben verbinden gelten folgende drei Sätze:

1) Die Normale ist unter allen die kürzeste. (Fig. 44).

Vorausf. $AB \perp XY$

Behaupt. AB kürzer als die Beliebige AC

Fig. 44



Bew. Da der Winkel ABC nach der Voraussetzung ein rechter ist, so ist er der größte im Dreiecke, also:

$$\begin{aligned} \angle ABC &> \angle ACB \\ \underline{AC > AB} &\text{ (§ 13).} \end{aligned}$$

Zusatz. Die Normale ist der Abstand eines Punktes von einer Geraden.

2) Se zwei dieser Geraden sind gleich, wenn ihre Fußpunkte gleichen Abstand vom Fußpunkte der Normalen haben. (Fig. 45).

Vorausf. 1) $AB \perp XY$

2) $BC = BD$

Behaupt. $AC = AD$

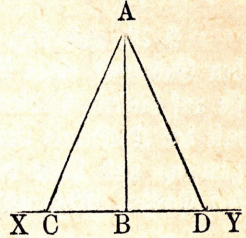
Bew. $AB = AB$ (Gemeinsames Element)

$BC = BD$ (2. Voraussetzung)

$\angle ABC = \angle ADB$ (nach der 1. Vorausf.)

$AC = AD$ (§ 14 Zusatz).

Fig. 45.



3) Diejenige der genannten Geraden ist die längere, deren Fußpunkt vom Fußpunkte des Lothes weiter absteht. (Fig. 46).

Vorausf. $AB \perp XY$

$BE > BD$

Behaupt. $AE > AD$

Bew. $\angle \gamma + \delta = \angle \alpha + \epsilon$ (Weil beide Summen = 1 R)

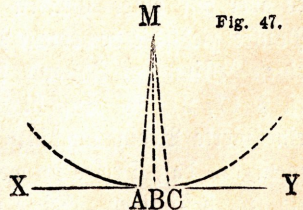
$\angle \gamma < \angle \alpha$

Durch Subtraction: $\delta > \epsilon$, und da δ und ϵ Winkel des Dreiecks AED sind: $AD > AE$

Zusatz. Von einem Punkte nach einer Geraden hin kann man nicht mehr als zwei gleiche Grade ziehen.

§ 18. **Lehrsatz.** Eine Kreislinie kann nicht mehr als zwei Punkte mit einer Geraden gemein haben. (Fig. 47).

Fig. 47.



Bew. Wären A, B und C Punkte der Kreislinie, so müßten ihre Abstände (AM, BM, CM) vom Mittelpunkte M gleich sein. Sind aber

A, B, C Punkte der Graden, so können die genannten Abstände (nach dem vorigen Zusatz) nicht gleich sein; daher können drei Punkte nicht zugleich Punkte der Kreislinie und einer Graden sein.

§ 19. **Lehrsatz.** Eine Gerade die durch den Endpunkt eines Radius geht, so, daß sie auf diesem Radius normal steht, hat mit der Kreislinie nur diesen einen Punkt gemein, und heißt daher eine Tangente des Kreises. (Fig. 48).

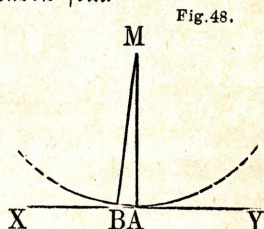


Fig. 48.

Vorausf. A ein Punkt der Peripherie und $MA \perp XY$

Behaupt. XY hat mit der Kreislinie keinen Punkt außer A gemein.

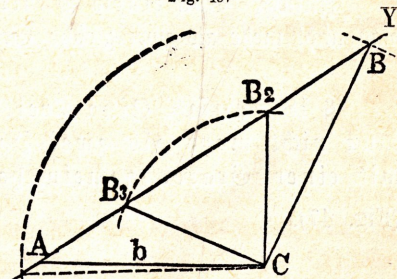
Bew. Ist B ein beliebiger Punkt der Graden XY, so ist nach § 17, 1 $MB > MA$. Da nun A ein Punkt der Kreislinie ist, so liegt B außerhalb des Kreises.

c) **Dritter Congruenzfall.**

§ 20. **Lehrsatz.** Durch zwei Seiten und einen, diesen Seiten nicht zwischen liegenden Winkel ist das Dreieck unzweideutig bestimmt 1) wenn der gegebene Winkel der größeren der gegebenen Seiten gegenüber liegt, 2) wenn der gegebene Winkel zwar der kleineren der gegebenen Seiten gegenüber liegt, aber zugleich bekannt ist ob der Winkel welcher der anderen Seite gegenüber liegt ein spitzer oder stumpfer sei. (Fig. 49).

Bew. Die Seite b bestimmt den Abstand der Ecken A und C, der Winkel α die Richtung (AY) der Seite b zu c. Die dritte Ecke nun muß auf AY liegen, und von C den Abstand a haben,—da es aber auf einer Graden zwei Punkte giebt, die von einem Punkte einen bestimmten Abstand haben (s. § 17, 2), so muß hier noch eine vierte Bedingung hinzu kommen, um das Dreieck unzweideutig zu bestimmen. Diese vierte Bedingung ist, daß die gegenüberliegende Seite a größer sei, als die anliegende, oder wenn nicht — daß

Fig. 49.



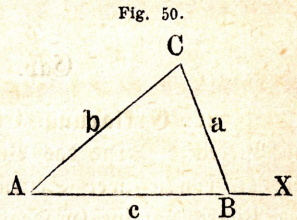
die Art des der zweiten Seite (b) gegenüberliegenden Winkels bestimmt sei, ob derselbe nehmlich ein spitzer oder ein stumpfer sei. Ist die gegenüberliegende Seite (a) länger als die anliegende (b), so liegen (nach § 17; 3) die beiden Punkte B_1 und B nach entgegengesetzter Seite der Ecke A, und das zweite Dreieck B_1AC hat der Seite a nicht den Winkel α gegenüberliegend, sondern dessen Nebenwinkel. Ist dagegen die gegenüberliegende Seite a kleiner als die anliegende (b), so liegen beide Punkte (B_2 und B_3) von der Ecke A aus nach derselben Seite, und es giebt dann wirklich zwei Dreiecke, die in den drei Elementen übereinstimmen, ohne in den übrigen dreien übereinzustimmen,—aber das eine hat nothwendig einen spitzen, das andere eben so nothwendig einen stumpfen Winkel der Seite b gegenüberliegend; denn das Dreieck B_2CB_3 ist gleichschenkelig, und daher ist der Winkel AB_2C ein spitzer und AB_3C ein stumpfer.

Zusatz. Zwei Dreiecke, die in zwei Seiten und einem nicht zwischenliegenden Winkel übereinstimmen, sind congruent, wenn der gleiche Winkel der größeren der gleichen Seiten gegenüber liegt, oder wenn der gleiche Winkel zwar der kleineren der gleichen Seiten gegenüber liegt, aber zugleich der Winkel, welcher der größeren der gleichen Seiten gegenüber liegt, in beiden Dreiecken gleichartig ist.

d) **Vierter Congruenzfall.**

§ 21. **Lehrsatz.** Durch drei Seiten ist das Dreieck unzweideutig bestimmt. (Fig. 50).

Bew. Ist die Ecke A und die Richtung (AX) der Seite c beliebig gewählt, so ist durch c die Ecke B unzweideutig bestimmt, denn es giebt auf der Geraden AX nur einen Punkt (B), der von A den bestimmten Abstand c hat. Da nun die dritte Ecke C von A den Abstand b und von B den Abstand a hat, so ist diese dritte Ecke der gemeinsame Punkt zweier Kreislinien, von welchen die eine um A mit dem Radius b, die andere um B mit dem Radius a geschlagen ist. Da nun (nach § 3) zwei Kreislinien auf derselben Seite der Centrallinie nur einen Schnittpunkt haben, so ist also auch die dritte Ecke (C) unzweideutig bestimmt.



Zusatz. Dreiecke, die in ihren drei Seiten übereinstimmen, sind congruent.

Anhang.

Zur Aufgabe § 22. Abschn. II.

Lehrsatz. Wenn von zwei Punkten (C und D) jeder von zwei anderen (A und B) einen gleichen Abstand hat, so ist die durch die ersteren Punkte bestimmte Gerade der geometrische Ort aller Punkte, die von den letzteren einen gleichen Abstand haben. (Fig. 51).

$$\begin{array}{l} \text{Bew. } AC = BC \\ AD = BD \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} AC = BC \\ AD = BD \end{array}} \right\} \text{gemacht.} \\ \underline{CD = CD \text{ (gemeinsames Element)}} \\ \angle ACD = \angle BCD \text{ (f. § 21. Zuf.)}$$

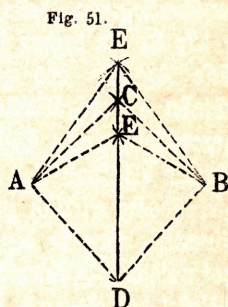
Die durch C und D bestimmte Gerade CD halbt also den Winkel ACB. — Sei nun E ein beliebiger dritter Punkt, der gleichen Abstand von A und B hat, so ist:

$$\begin{array}{l} AE = BE \\ AC = BC \\ CE = CE \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} AE = BE \\ AC = BC \\ CE = CE \end{array}} \right\} \text{gemacht oder vorausgesetzt}$$

$$\underline{\angle ACE = \angle BCE} \text{ (f. § 21 Zuf.)}$$

Es halbt also auch die Gerade EC (oder deren Verlängerung) den Winkel ACB; folglich fällt dieselbe mit der Geraden CD zusammen, d. h. E liegt auf der durch C und D bestimmten Geraden.

Anmerkung. Es bleibt dem Schüler überlassen die Lösungen der Aufgaben § 24; § 37; § 38; § 39; § 44 in gleicher Weise zu begründen.



Cap. V. Das Viereck.

§ 22. **Erklärung.** Eine von vier Geraden umgrenzte Ebene heißt ein Viereck. — Die das Viereck begrenzenden Geraden heißen die Seiten, die von je zwei Seiten gebildeten Winkel aber die Innenwinkel des Viereckes. Eine Gerade die zwei, nicht durch Seiten verbundene Ecken verbindet, heißt eine Diagonale.

§ 23. **Lehrsatz.** Die Summe der Innenwinkel eines Viereckes beträgt vier Rechte. (Fig. 52).

Bew. Durch eine Diagonale (BD) wird das Viereck (ABCD) in zwei Dreiecke zerlegt; da nun die Summe der Innenwinkel eines

Dreieckes = 2 R ist, so erhält man durch Addition die Winkelsumme des Viereckes = 4 R:

$$\left. \begin{array}{l} A + \beta + \delta = 2 R \\ C + \beta_1 + \delta_1 = 2 R \end{array} \right\} \text{(f. § 10).}$$

Durch Addit. $A + C + \beta + \beta_1 + \delta + \delta_1 = 4 R$ d. h.

$$A + C + B + D = 4 R \text{ da } \beta + \beta_1 = B \text{ und } \delta + \delta_1 = D$$

§ 24. **Erklärung.** Ein Viereck, in welchem je zwei gegenüberliegende Seiten parallel sind, heißt ein Parallelogramm.

§ 25. **Lehrsatz.** In einem Parallelogramme sind die gegenüberliegenden Winkel einander gleich. (Fig. 53).

Vorausf. $AB \parallel CD$

$AC \parallel BD$

Behaupt. $\angle A = \angle D$

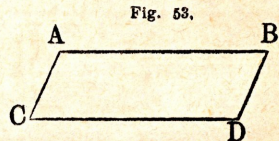
$\angle B = \angle C$

Bew. $\left. \begin{array}{l} \angle A + \angle B = 2 R \\ \angle D + \angle B = 2 R \end{array} \right\} \text{f. § 6.}$

$\angle A + \angle B = \angle D + \angle B$ (f. Grundf.)

$\angle B = \angle B$ subtrahirt.

$\angle A = \angle D$



EX. 111. 112. 113.

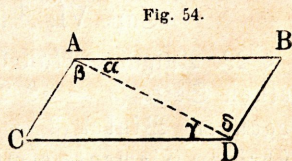
Anmerkung. Die Wahrheit obiger Behauptung folgt eigentlich schon aus der einfachen Bemerkung, daß Linien, die gleiche Richtung haben, von gleichgerichteten Linien um gleich viel in Richtung unterschieden sein müssen.

Zusatz. Ist ein Winkel eines Parallelogrammes ein Rechter, so sind alle vier rechte Winkel.

§ 26. **Lehrsatz.** In einem Parallelogramme sind die gegenüberliegenden Seiten einander gleich. (Fig. 54).

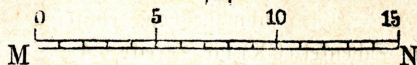
Vorausf. $\left\{ \begin{array}{l} AB \parallel CD \\ AC \parallel BD \end{array} \right.$

Behaupt. $\left\{ \begin{array}{l} AB = CD \\ AC = BD \end{array} \right.$



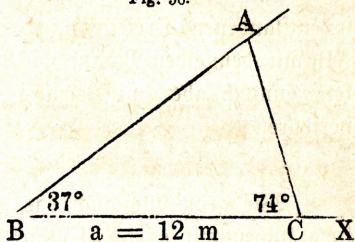
Lösung. Man wähle eine beliebige Strecke m als Maßeinheit und construire sich einen Maßstab (MN) (Fig. 55), indem man die gewählte Maßeinheit in beliebiger Anzahl auf einer Geraden abträgt.

Fig. 55.



Nachdem man dann die eine Ecke B (Fig. 56) und die Richtung (BX) der Grundlinie beliebig gewählt hat, schneide man von derselben die Strecke $BC = 12$ Maß ab, und trage mit Hilfe eines Transporteurs in der Ecke B den Winkel $ABC = 37^\circ$, in der Ecke C den Winkel $ACB = 74^\circ$ an die Grundlinie. Mißt man nun die Seiten AB und AC des so construirten Dreieckes mit demselben Maße, und den Winkel BAC mit dem Transporteur, so wird man stets AB oder $c = 12,4$ Maß; AC oder $b = 7,8$ Maß, den Winkel BAC oder $\alpha = 69^\circ$ finden, wie lang man auch die Maßeinheit gewählt haben mag. *)

Fig. 56.



Folgerung. Durch zwei Winkel ist auch das Verhältniß der Seiten eines Dreieckes zu einander bestimmt.

In allen Dreiecken die einen Winkel von 37° und einen von 74° haben ist das Verhältniß der Seiten: $a : b : c = 12 : 7,8 : 12,4$.

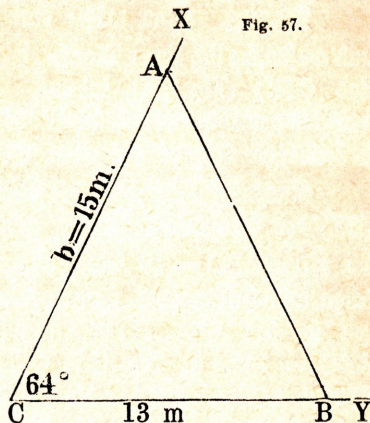
Nennen wir Dreiecke, die in ihren Winkeln und in den Verhältnissen ihrer Seiten übereinstimmen formgleich oder ähnlich, so erhalten wir aus obigem folgenden Satz:

§ 30. **Lehrsatz.** Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in zwei Winkeln übereinstimmen.

§ 31. **Aufgabe.** Man kennt von einem Dreiecke die Länge zweier Seiten ($a = 13$ Maß und $b = 15$ Maß) und die Größe des zwischenliegenden Winkels ($\gamma = 64^\circ$); es soll die Größe der übrigen Elemente ermittelt werden. — (Fig. 57).

*) Man braucht die Schüler nur darauf aufmerksam zu machen, daß, obgleich jeder sein Dreieck nach einem anderen Maße construirte, doch alle für die Seiten b und c dieselben Zahlen fanden; wenigstens nahezu, denn die kleinen Differenzen lassen sich leicht als Folgen unvermeidlicher Constructionsfehler erkennen. Die Größe des Winkels α konnte man auch durch Rechnung finden, denn nach § 10 ist $\alpha = 180 - (\beta + \gamma) = 180 - (37 + 74) = 69^\circ$.

Lösung. Man construire nach dem Transporteuren den Winkel $YCX = 64^\circ$, schneide von dem einen Schenkel (CX) die Strecke $CA = 15$ Maaß; von dem anderen (CY) die Strecke $CB = 13$ Maaß ab, verbinde die Punkte A und C durch eine Gerade, — und messe in dem so entstandenen Dreiecke die Seite AB mit demselben Maaße, die Winkel α und β aber mit dem Transporteuren.



Wie groß nun auch das gewählte Maaß (m) gewesen sein mag, — stets finden wir $c = 14,9$ m; $\alpha = 51^\circ 30'$; $\beta = 64^\circ 30'$. — Gegeben war nur der eine Winkel ($\gamma = 64^\circ$) und das Verhältniß der diesen Winkel einschließenden Seiten*) ($a : b = 13 : 15$). Mit Rücksicht auf die in § 29 gegebene Erklärung erhalten wir hiernach den Satz:

§ 32. **Lehrsatz.** „Durch einen Winkel und das Verhältniß der, diesen Winkel einschließenden Seiten ist die Form des Dreiecks unzweideutig bestimmt“ oder **Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in einem Winkel, und dem Verhältnisse der diesen Winkel einschließenden Seiten übereinstimmen.**

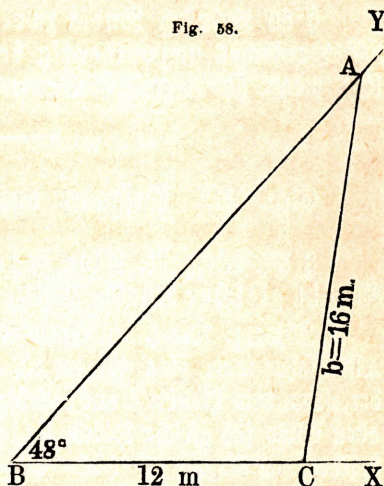
§ 53. **Aufgabe.** Man kennt von einem Dreiecke die Länge zweier Seiten ($a = 12$ m; $b = 16$ m) und die Größe des der größeren Seite b gegenüberliegenden Winkels $\beta = 48^\circ$; es soll die Größe der übrigen Elemente ermittelt werden. — (Fig. 58).

Lösung. Von der einseitig begrenzten Geraden BX schneide man die Strecke $BC = 12$ m ab, trage den Winkel $YBX = 48^\circ$ an, und schlage um C mit einem Radius $= 16$ m eines Kreis. Da nun der Radius größer ist als die Strecke BC, so schneidet dieser Kreis die

*) Da die Maaßeinheit m beliebig ist, so ist a die absolute Länge der Seiten a und b nicht bestimmt, wohl aber ihr Verhältniß; denn aus $a = 13$ m und $b = 15$ m folgt $a : b = 13 : 15$.

Grade BY nur in einem Punkte A (s. § 20), und es entsteht ein unzweideutig bestimmtes Dreieck ABC.

Auch hier findet man, unabhängig von der Größe der gewählten Maßeinheit, stets $c = 21, 3 \text{ m}$; $\angle \alpha = 34^\circ$; $\angle \gamma = 98^\circ$.—Bestimmt war nur das Verhältniß zweier Seiten ($a : b = 12 : 16 = 3 : 4$) und der, der größeren von den proportionirten Seiten gegenüberliegende Winkel ($\beta = 48^\circ$), und wir erhalten daher den Satz:

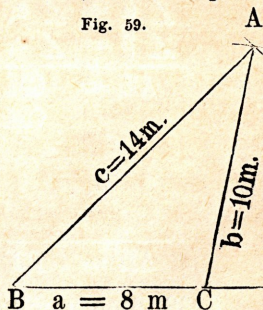


§ 34. **Lehrsatz.** Durch das Verhältniß zweier Seiten und den der größeren proportionirten Seite gegenüberliegenden Winkel ist die Form des Dreiecks unzweideutig bestimmt;—oder: Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in dem Verhältnisse zweier Seiten und dem der größeren proportionirten Seite gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen. *)

§ 35. **Aufgabe.** Von einem Dreiecke kennt man die Länge seiner drei Seiten ($a = 8 \text{ m}$; $b = 10 \text{ m}$; $c = 14 \text{ m}$); es soll die Größe der drei Winkel ermittelt werden. (Fig. 59).

Bemerkung zur Lösung. Construiert man das Dreieck nach I § 56, so findet man, unabhängig von der zur Construction angewandten Maßeinheit, $\alpha = 34^\circ$; $\beta = 44^\circ 30'$; $\gamma = 101^\circ 30'$. Gegeben ist nur das Verhältniß der drei Seiten $a : b : c = 8 : 10 : 14 = 4 : 5 : 7$; drei Größen geben aber nur zwei Verhältnisse, denn aus $a : b = 4 : 5$ und $a : c = 4 : 7$ folgt mit Nothwendigkeit $b : c = 5 : 7$. Somit erhalten wir den Satz:

Fig. 59.



*) Liegt der Winkel der kleineren proportionirten Seite gegenüber, so gelten selbstverständlich auch hier alle unter § 20 (oder II § 55) gemachten Bemerkungen.

§ 36. **Lehrsatz.** Durch zwei Seitenverhältnisse ist die Form des Dreiecks unzweideutig bestimmt, oder: Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in zwei Seitenverhältnissen übereinstimmen.

Cap. VII. Aufgaben aus der praktischen Geometrie.

§ 37. **Aufgabe.** Eine gegebene Strecke in eine beliebige Anzahl gleicher Theile zu theilen. (Fig. 60).

Lösung. Durch den einen Endpunkt (A) der gegebenen Strecke AB ziehe man eine Gerade AX in beliebiger Richtung; schneide von derselben vom Punkte A aus beliebige aber unter sich gleiche Stücke in der bestimmten Anzahl ab ($AC=CD=DE=EF=FG$); verbinde den letzten Theilpunkt (G) mit dem zweiten Endpunkte (B) der gegebenen Strecke, und ziehe darnach durch die übrigen Theilpunkte Grade parallel der genannten Verbindungslinie BG, bis dieselben die Strecke AB schneiden. Durch diese Graden wird die gegebene Strecke (AB) in die gewünschte Zahl gleicher Theile getheilt.

Bew. Zieht man die Graden CM, DN, EO, FP alle parallel der AB, so ist:

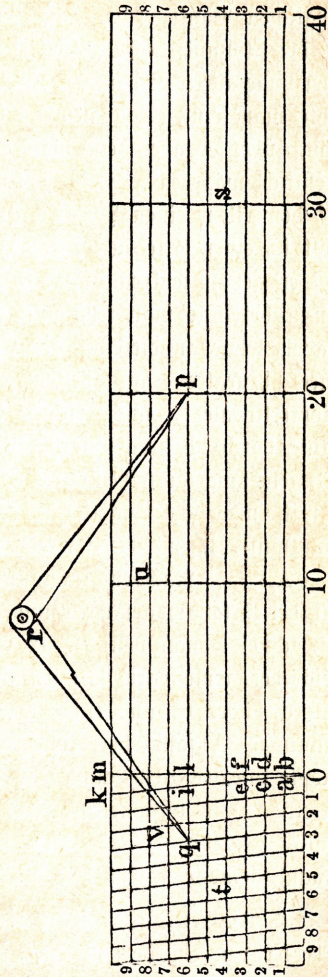
$$\begin{array}{l}
 AC = CD = DE = EF = FG \text{ (gemacht)} \\
 \angle \alpha = \angle \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 \\
 \angle \beta = \angle \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 \\
 \hline
 AH = CM = DN = EO = FP \text{ (§ 11 Zuf.)} \\
 \quad CM = HJ \\
 \quad \quad DN = JK \\
 \quad \quad \quad EO = KL \\
 \quad \quad \quad \quad FP = LB \quad \left. \vphantom{FP = LB} \right\} \text{ § 26} \\
 \hline
 AH = HJ = JK = KL = LB
 \end{array}$$

§ 38. **Das verjüngte Maaß.** In der praktischen Geometrie ist es meist erforderlich, daß die Einheit des Maaßes, nach welchem die Zeichnung (Karte) ausgeführt wird, ein bestimmtes, angegebenes Verhältniß zur Einheit des bei der Messung auf dem Felde gebrauchten

Maafes habe. — Ein solches Maaf, dessen Einheit also ein aliquoter Theil der gebräuchlichen Einheit ist, heißt ein verjüngtes Maaf.

Um nach zehntel einer verjüngten Maßeinheit mit möglichster Sicherheit abmessen zu können, dient ein Maßstab, wie ihn Fig. 61 darstellt, und wie man ihn auf dem Lineale eines Transporteurs meist findet. — Da das Dreieck aOb dem Dreiecke kOm ähnlich ist, so ist $ab = km = bO : mO$. Nun ist aber $bO = \frac{1}{10} mO$ (die zehn Parallelen sind in beliebigen, aber unter sich gleichen Abständen gezogen), so ist auch $ab = \frac{1}{10} km$. — Eben so ist $cd = \frac{2}{10} km$, da $dO = \frac{2}{10} mO$, und $\triangle cOd \sim kOm$, u. s. w. Der Abstand pq beträgt hiernach 23,6 km, denn $qi = 3$ km und $il = \frac{6}{10} km$; der Abstand $uv = 12,8$ km; $st = 36,4$ km α .

Fig. 61.



Man achte nur beim Abmessen darauf, daß beide Zirkelspitzen auf der selben Parallelen stehen *).

§ 39. Aufgabe. Es soll der Abstand eines unzugänglichen Punktes bestimmt werden. — (Fig. 62).

*) Um allen Schülern einer ganzen Classe zugleich die Benutzung eines derartigen Maßstabes erläutern zu können, fertige man denselben aus starkem (5fachen) Cartonpapiere an, etwa in der fünffachen Größe der obigen Figur (die Einheit $\frac{1}{2}$ Zoll lang), und hefte denselben an die schwarze Tafel. Derselben Maßstabes bedient sich natürlich dann auch der Lehrer (oder der Schüler), wenn er eine Construction an der Tafel ausführt. Einen Transporteurs von etwa 6 Zoll Radius muß man sich aus demselben Papiere zur Abtragung und Abmessung der Winkel anfertigen. An beiden Instrumenten müssen die mit schwarzer Tusche gezogenen Linien und Theilstriche nahe 1 mm oder $\frac{1}{24}$ Zoll dick sein.

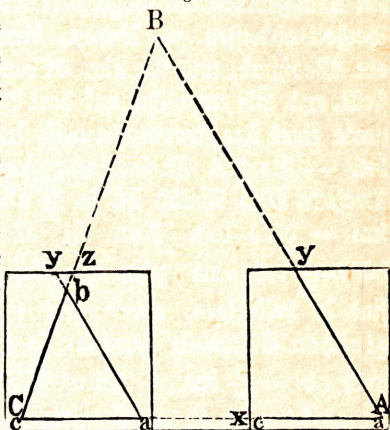
Lösung. Es sei B der Punkt, dessen Abstand von A gemessen werden soll. Man wähle einen dritten, von A aus sichtbaren und zugänglichen Punkt C so, daß sein Abstand von A nicht viel kleiner ist, als der Abstand des Punktes B nach einer ungefähren Schätzung. In C errichte man eine Signalstange senkrecht, über A aber setze man einen Meßtisch wagerecht, und bestimme auf demselben einen Punkt a (möglichst in einer Ecke des Tisches) so, daß er genau senkrecht über A steht. (In a befestige man jetzt eine feine Nadel, lehne an dieselbe die Kante eines Lineales (am besten eines Diopterlineales), und richte diese Kante durch Visiren zuerst auf C, und ziehe längs derselben einen Strich

Fig. 62.

ax mit einem scharfzugespitzten Stifte; darnach richte man die Kante auf den Punkt B, und ziehe wiederum einen Strich ay, so ist $\angle xay = \angle CAB$. — Nachdem man nun die Strecke AC (mit der Kette oder mit der Stange) gemessen und in A eine Signalstange senkrecht errichtet hat, schneide man von der ax nach verjüngtem Maasse die Strecke ac gleich der gemessenen Strecke ab, trage den Tisch nach C, setze c genau senkrecht über C, und richte den Tisch durch Drehen so, daß ca in die Richtung CA fällt (bei Anwendung des Diopterlineales). Mit Hilfe des Diopterlineales ziehe man jetzt den Strich cz in der Richtung CB, bis derselbe ay in b schneidet. Das Dreieck abc ist jetzt dem Dreiecke ABC ähnlich (§ 29 und 30), und die Strecke ab nach dem verjüngtem Maasse gemessen giebt den wirklichen Abstand des Punktes B von A an.

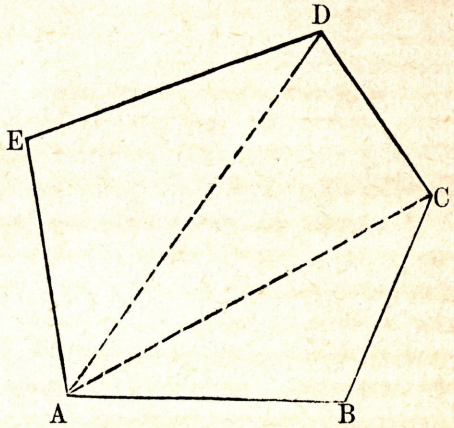
§ 40. **Aufgabe.** Von einer Flur, welche die Form eines beliebigen Vieleckes hat, soll eine Karte aufgenommen werden. (Fig. 63).

Lösung. Es stelle ABCDE die aufzunehmende Flur, FGHI den Meßtisch vor. — Man messe die eine Grenzlinie AB der Flur, und ziehe auf dem Meßtische der Strich ab nach verjüngtem Maasse gleich der gemessenen Strecke AB. Jetzt setze man den Punkt a des Meßtisches senkrecht über A und nehme den Winkel $xab = \angle EAB$ auf, (wie in § 39 beschrieben). In gleicher Weise nehme man in B den

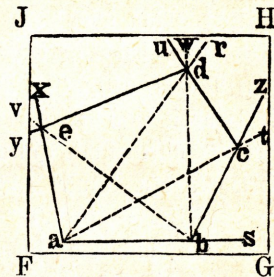


Winkel $abz = \angle ABC$ auf, messe darnach BC und schneide nach verjüngtem Maaße von bz die Strecke $bc = BC$ ab. In C nehme man den Winkel $bcd = \angle BCD$ auf, messe CD , schneide nach verjüngtem Maaße $cd = CD$ ab, und nehme endlich in D den Winkel $ydc = \angle EDC$ auf. Die Gerade dy schneidet die ax in e , und es ist $abcde$ die Karte von $ABCDE$, weil beide Figuren gleiche Winkel und gleiche Seitenverhältnisse haben, also ähnlich sind. — Zur Controle begeben sich noch nach E , und überzeuge sich, ob der Winkel dea dem Winkel DEA gleich ist.

Fig. 63.



2. Lösung. — Man setzt den Punkt a des Meßtisches senkrecht über A und zieht mit Hilfe des Diopterlineales die Graden ax , ar , at , as respective in den Richtungen AE , AD , AC , AB . Darnach messe man die Strecken AE , AD , AC , AB und schneide nach verjüngtem Maaße $ae = AE$; $ad = AD$; $ac = AC$ und $ab = AB$ ab. — Verbindet man jetzt die so bestimmten Punkte b , c , d , e unter einander durch Graden, so ist die Figur $abcd$ wiederum der Figur $ABCDE$ ähnlich, also erstere eine Karte der letzteren. — Hierbei muß man den Satz anerkennen: Polygone sind ähnlich, wenn sie in gleicher Weise aus ähnlichen Dreiecken zusammengesetzt sind.



3. Lösung. Man zieht, wie bei der vorigen Lösung, die Graden ax , ar , at und as in den Richtungen AE , AD , AC und AB ; mißt die Strecke AB und schneidet ab nach verjüngtem Maaße $= AB$ ab. Darnach setzt man den Punkt b über B , die Gerade ba in der Richtung BA , und zieht die Graden bv , bw , bz , in den Richtungen BE , BD , BC . Es schneiden sich nun bv und ax in e , bw und ar in d ; bz und

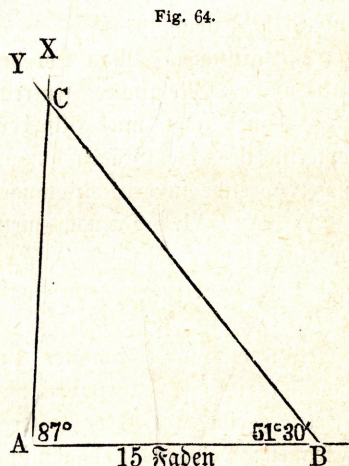
at in c, und alle Eckpunkte der Figur sind wiederum unzweideutig bestimmt. *)

Anmerkung. Ist das Diopterlineal um den Mittelpunkt eines in Grade und Minuten eingetheilten Kreises drehbar, so hat man ein eigentliches Winkelinstrument. Mit solch einem Instrumente ausgerüstet kann man sich die Größe der zu messenden Winkel nach Graden und Minuten anmerken, und die ganze Zeichnung zu Hause ausführen, indem man die Winkel nach einem Transporteuren von möglichst großem Radius und feiner Eintheilung abträgt.

§ 41. **Aufgabe.** Um die Breite eines Flusses zu messen, nimmt man dem Ufer entlang die Standlinie $AB = 15$ Faden (à 6 Fuß). Wenn nun die Visirlinien nach dem Punkte C am jenseitigen Ufer (in welchem eine Signalstange senkrecht errichtet ist) an den Endpunkten A und B der Standlinie mit denselben respective die Winkel $BAC = 87^\circ$ und $ABC = 51^\circ 30'$ bilden; wie breit ist der Fluß zwischen A und C? (Fig. 64).

Lösung. Man macht den Abstand AB gleich 15 Einheiten des verjüngten Maaßes (Fig. 61), indem man die Einheit km gleich einem Faden setzt. Construirt mit Hilfe des Transporteuren den Winkel $XAB = 87^\circ$ und $\angle YBA = 51^\circ 30'$. Die Richtungen AX und BY schneiden sich in C, und die Strecke AC nach dem verjüngten Maaße gemessen giebt 17,8 Faden als Breite des Flusses zwischen A und C.

Die trigonometrische Berechnung ergibt 17,7 Faden.



§ 42. **Aufgabe.** Um die Höhe des Thurmes der Marienkirche in Dorpat zu messen, wurde vom Fußpunkte des Thurmes ans eine Standlinie von 140 Fuß genommen. Das Auge des Beobachters am Endpunkte der Standlinie stand 5 Fuß

*) Bei dieser Methode ist es rathsam die längste Seite der Flur als Basis zu wählen, weil sonst die Richtlinien sich leicht unter zu spitzen Winkeln schneiden dürften, wodurch die Lage der Schneidepunkte unsicher würde. — Daß der Meßtisch bei der Aufnahme stets wagerecht gestellt sein muß, ist selbstverständlich.

höher als der Fußpunkt des Thurmes; und die Richtlinie zur Spitze bildete mit der Richtlinie zum Fußpunkte am Auge den Winkel von $51^{\circ}30'$. — Wie hoch ist der Thurm? (Fig. 65).

Lösung. Man zeichne die Strecke $AB = 14$ Einheiten des verjüngten Maaßes, indem man die Einheit $\text{km} = 10$ Fuß setzt. In A und B construire man die Verticalen AX und BY; schneide $BC = 0,5$ km ab; verbinde C mit A, und setze an AC den Winkel $ACD = 51^{\circ}30'$. — Die Strecke AD nach dem verjüngten Maaße gemessen giebt 17 km d. h. 170 Fuß als Höhe des Thurmes.

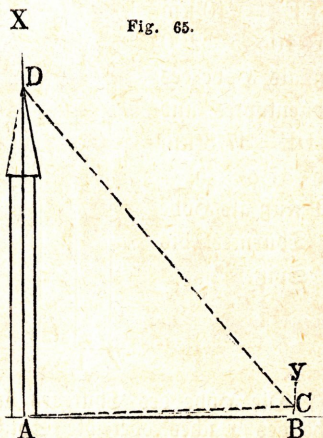


Fig. 65.

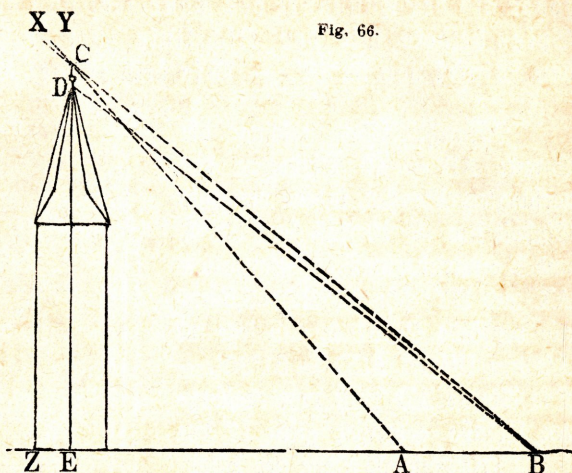
Die trigonometrische Berechnung ergibt 168,65.

§ 43. **Aufgabe.** Um die Höhe des Thurmes der Johannis-firche in Dorpat zu messen, wurde eine Standlinie von 71,5 Fuß in der Richtung zum Thurme genommen. In dem vom Thurme entfernter liegenden Endpunkte (B) der Standlinie machten die Richtlinien zum Hahnenkopfe und zur Thurmspitze mit der Horizontalen respective die Winkel $\beta = 39^{\circ}30'$ und $\beta_1 = 37^{\circ}53'$. Im anderen (dem Thurme näheren) Endpunkte (A) machte die Richtlinie zum Hahnenkopfe mit derselben Horizontalen den Winkel $\alpha = 49^{\circ}30'$. — Die durch beide Winkelscheitel gehende Horizontale traf in ihrer Verlängerung gerade den Fußpunkt des Thurmes. — Wie hoch ist der Thurm 1) bis zum Kopfe des Hahnes, 2) bis zur Spitze? (Fig. 66).

Lösung. Man schneide von der Horizontalen BZ die Strecke $BA = 14,3$ Einheiten des verjüngten Maaßes (die Einheit $\text{km} = 5$ Fuß gerechnet) ab. An die Horizontale ZB setze man in A den Winkel $ZAY = 49^{\circ}30'$, in B den Winkel $ZBX = 39^{\circ}30'$. Vom Schnittpunkte C (dem Orte des Hahnenkopfes) der Graden AY und BX falle man die Normale CE, und construire dann in B den Winkel $ZBW = 37^{\circ}53'$, so ist der Schnittpunkt D der Graden BW mit der Normalen der Ort der Thurmspitze. Nach dem verjüngten Maaße ge-

Fig. 66.

messen erhält man für $CE = 40$ km oder $40 \times 5 = 200$ Fuß als Höhe des Hahnenkopfes, und für $DE = 37,8$ km d. h. $37,8 \times 5 = 189$ Fuß als Höhe des Thurmes bis zur Spitze. *).



Die Höhe des Thurmes bis zum Dache beträgt 118,3 Fuß; die Höhe des Daches, oder die Spitze bis zur Stange = 70,7 Fuß.

Übungsaufgaben.

1) Die Fronte der Domruine erscheint einem Auge, welches 5 Fuß über der Terrasse steht, in einem Abstände von 85 Fuß unter dem Gesichtswinkel von 40° . Wie hoch ist die Mauer?

Antwort. Nahezu 69 Fuß.

2) Um die Höhe der Ruine über dem Spielplatze zu messen, ward auf dem letzteren eine Standlinie von 65 Fuß in der Richtung zum höchsten Punkte der Fronte genommen. Die beiden Elevationswinkel **) an den Endpunkten der Standlinie zum höchsten Punkte der Fronte betragen $\alpha = 39^\circ$; $\beta = 27^\circ 30'$. — Die schiefe Wand der Terrasse mißt 49,5 Fuß und ist gegen den Horizont um $31^\circ 45'$ geneigt. — Wie hoch ist der höchste Punkt der Ruinenfronte über dem Spielplatze, und wie hoch ist die Terrasse?

*) Die zugehörige Figur 66 ist auf die Hälfte reducirt; km also = 10 Fuß gerechnet.

**) Elevationswinkel heißt der Winkel, den die Richtlinie vom Auge zu einem höher gelegenen Punkte mit der Horizontalen macht; Depressionswinkel dagegen der Winkel, den die Richtlinie vom Auge zu einem tiefer gelegenen Punkte mit der Horizontalen macht.

Antwort. Gesamthöhe über dem Spielplatze	= 95,3 Fuß.
Höhe der Terrasse	= 26 Fuß.
Höhe der Ruinenfronte	= 69,3 Fuß.

3) Ein Leuchthurm von 85 Fuß Höhe steht auf dem Gipfel eines steil ins Meer herabfallenden Felsens. Wenn nun der Depressionswinkel zu einem Schiffe an der Spitze des Leuchthurmes 37° , am Fuße desselben 24° beträgt, wie groß ist da der horizontale Abstand des Schiffes von Felsen, und wie hoch ist der Gipfel des Felsens über der Meeresfläche?

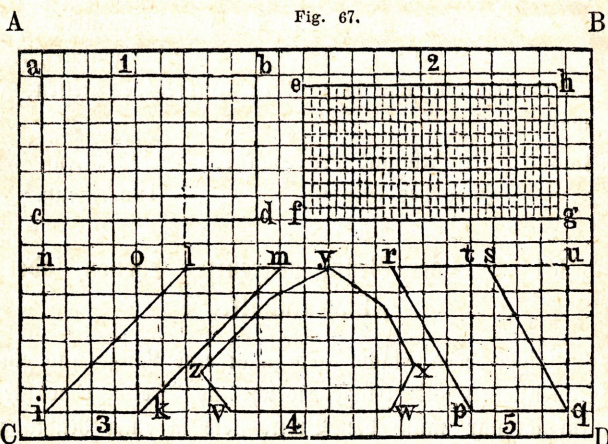
Antwort. Der Abstand des Schiffes	= 275,7 Fuß
Höhe des Gipfels	= 122,7 Fuß.

Cap. VIII. Von der Größe begrenzter Ebenen, oder vom Flächeninhalte.

§ 44. Einer jeden Fläche giebt man eine Länge und eine Breite. Welche Dimensionen als Länge, welche als Breite zu wählen sei, ist meist willkürlich, nur muß die Breite stets in einer Richtung genommen werden, die normal zur Längenrichtung steht.

Um einen bestimmten Ausdruck für die Größe einer begrenzten Fläche zu erlangen, genügt die Kenntniß ihrer Länge und Breite im Allgemeinen nicht, und wir quadriren daher die Fläche, d. h. wir theilen sie (oder denken sie uns getheilt) in lauter Quadrate, deren Seite die Einheit des Längenmaaßes ist. Ein solches Quadrat heißt ein Quadratmaaß (Quadratzoll, Quadratfuß, Quadratmeile x.); und die Zahl, welche die Quadrate zählt, die in dem Flächenraume enthalten sind, heißt Maaßzahl der Fläche; sie bestimmt zugleich den Flächeninhalt, indem man unter Flächeninhalt die Anzahl von Quadratmaaßen versteht, welche den Flächenraum ausfüllen würde. Einen Acker, eine Wiese, oder gar eine Provinz, ein ganzes Land in Wirklichkeit quadriren zu wollen, wäre ein thörichtes — weil unausführbares — Unternehmen. An einer Karte aber wäre es ausführbar, und eine Karte, als treue Copie eines Grundstückes muß jedenfalls eben so viele Quadrate des verjüngten Maaßes enthalten, als das Grundstück selbst Quadrate des wirklichen Maaßes. — Um nun aber eine Karte nicht durch Theilstriche für den sonstigen Gebrauch zu verderben, und namentlich, um die — immerhin mühsame Operation nicht jedesmal wiederholen zu müssen, ist man auf den Gedanken gekommen, eine durchsichtige Horn-

platte, oder eine Glastafel durch das Einreißen feiner Striche ein für allemal in Quadrate zu theilen, deren Seite gleich der bei der Aufnahme der Karten gebräuchlichen verjüngten Längeneinheit ist. Diese Platte deckt man dann auf die Karte, und zählt die Quadrate die innerhalb der durchschneidenden Umgrenzung liegen.



ABCD (Fig. 67) stellt eine solche getheilte Platte dar, gedeckt über die durchscheinenden Karten (1, 2, 3, 4, 5) von Grundstücken. Ein Blick auf diese Figur lehrt uns Folgendes: Hat das Grundstück (also auch die Karte) die Gestalt eines Rechteckes, so ist es leicht, die Zahl der Quadrate innerhalb der Umgrenzung zu bestimmen. In jedem anderen Falle aber, und namentlich wenn die Form eine ganz unregelmäßige ist, finden sich an der Umgrenzung Bruchtheile von Quadraten deren Größe nur geschätzt werden kann (S. Fig. 67, 4). Erwägen wir hierbei; daß jeder Fehler hier, in der Wirklichkeit eben so viel mal größer ist, als das wirkliche Maaß das verjüngte übertrifft, so wird es uns einleuchten, daß diese Art nur für eine angenäherte Bestimmung des Flächeninhaltes ausreicht, trotz dem daß die Geometrie ein jedes Vieleck in ein Rechteck verwandeln lehrt. — Es ist daher vom höchsten Werthe, Mittel ausfindig zu machen, um aus Längenmaaßzahlen direct durch Rechnung den Flächeninhalt erhalten zu können.

§ 45. **Aufgabe.** Es soll der Flächeninhalt eines Rechteckes aus den Maaßzahlen seiner beiden Seiten durch Rechnung bestimmt werden.

Lösung. Das Rechteck ABCD (Fig. 67) ist 24 Maaß lang und

wird durch die vertikalen Theilstriche in eben so viele vertikale, ein Maaf breite Flächenstreifen getheilt. Jedes dieser 24 vertikalen Flächenstreifen wird wiederum durch die horizontalen Theilstriche in so viele Quadrate getheilt, als die Breite (AC) Einheiten zählt, also in 16 Quadrate. Das ganze Rechteck welches 24 Maaf lang und 16 Maaf breite ist — enthält demnach 24×16 Quadratmaaf.

Das Rechteck abcd (Fig. 67, 1) ist 9 Maaf lang und 6 Maaf breit, und wird durch die horizontalen und vertikalen Theilstriche in 9×6 Quadrate getheilt, deren Seite ein Maaf hält.

Das Rechteck efgh (Fig. 67, 2) ist $10 \frac{2}{3}$ Maaf lang und $5 \frac{1}{2}$ Maaf breit. Theilt man jede Längeneinheit der Grundlinie (fg) in Drittel, und jede der Höhe (fe) in Hälften, und zieht durch die so erhaltenen Theilpunkte Parallelen zu den Haupttheilstrichen, so wird das ganze Rechteck in 32×11 kleine Rechtecke getheilt, von welchen ein jedes der sechste Theil des Quadratmaafes ist. Das ganze Rechteck enthält demnach $\frac{32 \times 11}{6}$ Quadratmaaf. Es ist aber auch das Product der Maafzahlen seiner Seiten $10 \frac{2}{3} \times 5 \frac{1}{2} = \frac{32 \times 11}{6}$!

Wir entnehmen hieraus den Satz:

§ 46. **Lehrsatz.** Die Maafzahl eines Rechteckes ist gleich dem Producte aus den Maafzahlen seiner beiden Seiten. — (Der Flächeninhalt des Rechteckes ist das genannte Product, bezogen auf das Quadratmaaf.)

Übungsaufgaben.

1) Es soll durch eine Zeichnung gezeigt werden, daß ein Rechteck welches $4\frac{3}{4}$ Zoll lang und $2\frac{1}{3}$ Zoll breit ist, wirklich $4\frac{3}{4} \times 2\frac{1}{3}$ Quadrat Zoll enthält.

2) Ein Quadratfuß hat wie viel Quadrat Zoll? Ebenfalls an einer Zeichnung zu demonstrieren.

3) Was ist der Flächeninhalt eines Rechteckes, dessen eine Seite 4 Fuß 3 Zoll, die andere 3 Fuß 5 Zoll mißt?

4) Ist durch die Maafzahlen der Seiten eines Parallelogrammes der Flächeninhalt desselben bestimmt?

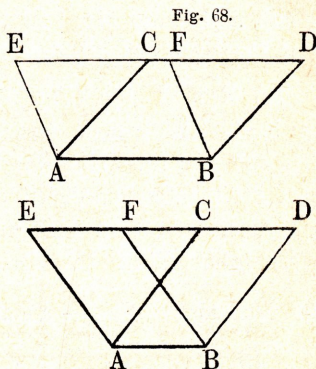
Die Antwort ergibt sich unter anderm aus der Betrachtung der Figur 67, 3. Das Parallelogramm iklm enthält 18 ganze und 12 halbe Quadrate, also im ganzen 24 Quadratmaaf, wie auch das Rechteck ikno,

welches mit dem Parallelogramme gleiche Grundlinie und Höhe hat, während die Seite il des Parallelogrammes offenbar größer ist als die Seite in des Rechteckes.

§ 47. **Lehrsatz.** Parallelogramme von gleicher Grundlinie und Höhe (Länge und Breite) sind gleich groß. (Fig. 68) *).

Bew. Parallelogramme die gleiche Grundlinie und Höhe haben lassen sich immer so aufeinander legen, daß ihre Grundlinien sich decken;

die der Grundlinie Parallelen Seiten liegen dann nothwendig in einer Geraden, und die ganze Figur bildet einen Paralleltrapez. Schneidet man nun von diesem Paralleltrapez $ABED$ das Dreieck EAC ab, so bleibt das Parallelogramm $ABCD$ nach; schneidet man aber von demselben das Dreieck FBD ab, so bleibt das Parallelogramm $ABEF$ nach. Das Dreieck EAC ist aber dem Dreiecke FBD congruent (denn es ist $EA = FB$; $AC = BD$; $\angle EAC = \angle FBD$), also hätten wir jedesmal dasselbe abgeschnitten, folglich muß das Uebrigbleibende auch dasselbe sein. In kurzer, mathematischer Darstellung:



abgeschnitten, folglich muß das Uebrigbleibende auch dasselbe sein. In kurzer, mathematischer Darstellung:

$$\triangle EAC \cong \triangle FBD \left\{ \begin{array}{l} EA = FB \\ AC = BD \end{array} \right\} \text{ § 26}$$

$\angle EAC = \angle FBD$ (die Schenkel sind parallel).

$$EABD - EAC = EABD - FBD$$

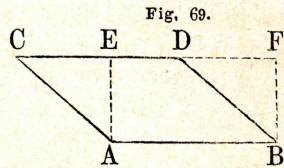
$$\text{d. h. } ABCD = ABEF$$

§ 48. **Lehrsatz.** Die Maßzahl eines Parallelogrammes ist gleich dem Producte aus den Maßzahlen seiner Grundlinie und Höhe. (Fig. 69).

Bew. Errichten wir in den Endpunkten der Grundlinie AB des Parallelogrammes $ABCD$ die Normalen AE und BF , bis sie die gegenüberstehende Parallele schneiden, so ist das Rechteck $ABEF$ dem Pa-

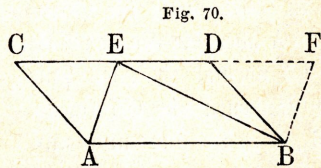
*) Jede Seite eines Parallelogrammes und Dreieckes kann als Grundlinie (Länge) genommen werden. Liegt eine Seite horizontal, so wählt man meist diese als Grundlinie. Die Höhe (Breite) ist beim Parallelogramme die Normale zwischen der Grundlinie und der ihr parallelen Seite. Beim Dreiecke ist die Höhe die Normale von der gegenüberstehende Ecke (dem Scheitel) auf die Grundlinie gefällt.

rallelogramme ABCD nach dem vorigen Lehrsatze gleich. Es ist also auch die Maaßzahl des Parallelogrammes gleich der Maaßzahl des Rechteckes, d. h. gleich dem Producte der Maaßzahlen seiner Seiten (§ 46). Die Seite AB des Rechteckes ist aber zugleich die Grundlinie des Parallelogrammes, und die andere Seite AE ist die Höhe des Parallelogrammes; daher ist die obige Behauptung richtig.



§ 49. **Lehrsatz.** Das Dreieck ist halb so groß als das Parallelogramm von gleicher Grundlinie und Höhe. (Fig. 70).

Bew. Bringt man die Figuren mit ihren Grundlinien zur Deckung (was möglich ist, da die Grundlinien nach der Voraussetzung gleich sind, so muß der Scheitel (E) des Dreieckes (ABE) in die der Grundlinie parallele Seite (CD) des Parallelogrammes (ABCD) oder deren Verlängerung fallen, da beide Figuren gleiche Höhe haben. Ergänzt man nun das Dreieck ABE zu dem Parallelogramme ABFE, so ist das $\triangle ABE$ die Hälfte dieses Parallelogrammes (§ 26 Zus.) Es ist aber das Parallelogramm ABFE gleich dem Parallelogramme ABCD (§ 47), also ist auch



$$\triangle ABE = \frac{1}{2} ABCD.$$

Zusatz. Dreiecke von gleicher Grundlinie und Höhe sind gleich.

§ 50. **Lehrsatz.** Die Maaßzahl eines Dreieckes ist gleich dem halben Producte aus den Maaßzahlen seiner Grundlinie und Höhe.

Bew. Folgt unmittelbar aus § 48 und § 49.

Anmerkung. Da ein jedes Vieleck durch Diagonalen in Dreiecke zerlegt werden kann, so sind wir jetzt im Stande den Flächeninhalt eines jeden vielseitigen Grundstückes aus Längen-Maaßzahlen direct durch Rechnung zu finden.

Übungsaufgaben.

1) Zeichne ein beliebiges Dreieck, und bestimme den Flächeninhalt desselben, indem Du nacheinander eine jede der drei Seiten als Grundlinie nimmst.

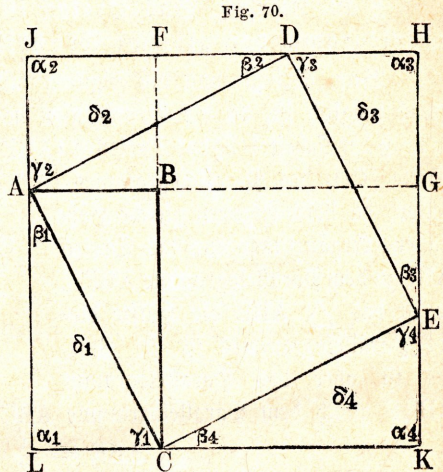
Man mißt nach verjüngtem Maaße die Seite und die von der

gegenüberstehenden Ecke auf dieselbe gefällte Normale; das halbe Product der so erhaltenen Zahlen ist die Maaszahl der Fläche. Die drei Resultate müßten natürlich übereinstimmen.

2) Zeichne ein beliebiges Vieleck und bestimme den Flächeninhalt desselben nach verjüngtem Maßstabe.

§ 51. Der pythagoräische Lehrsatz. Das Quadrat der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes ist allein so groß als die Quadrate über den Katheten zusammen. (Fig. 71).

Bew. Ueber der Hypotenuse AC des rechtwinkligen Dreieckes ABC construire man das Quadrat ACED; verlängere die Katheten (CB und AB) über den Scheitel des rechten Winkels hinaus, und ziehe durch die Ecken D und C die Geraden HJ und LK normal zu CB; durch die Ecken E und A aber die Geraden KH und LJ normal zu AB. Die so entstandenen vier Eckdreiecke $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$ sind nun unter einander congruent, denn es ist:



$AC = AD = DE = EC$ (als Quadratsseiten).

$\angle \alpha_1 = \angle \alpha_2 = \angle \alpha_3 = \angle \alpha_4$ (als Rechte).

$\angle \beta_1 = \angle \beta_2 = \angle \beta_3 = \angle \beta_4$ } denn $\beta_1 + \gamma_2 = 1 \text{ R}$ weil $\angle DAC = 1 \text{ R}$
 und $\beta_2 + \gamma_2 = 1 \text{ R}$ " $\angle \alpha_2 = 1 \text{ R}$
 $\beta_1 = \beta_2$; eben so die übrigen β

Aus dieser Congruenz folgt nun:

1) $LC = AJ$ also auch $AB = AJ$ folglich ist $ABJF = AB\Box$

2) $LA = CK$ " " $BC = CK$ " " $CBGK = CB\Box$

Nun ist aber das Rechteck LABC so groß als zwei Eckdreiecke ($= 2 \cdot \delta_1$), und das Rechteck BFHG ist gleich LABC; beide Rechtecke sind mithin so groß als die vier Eckdreiecke zusammen.

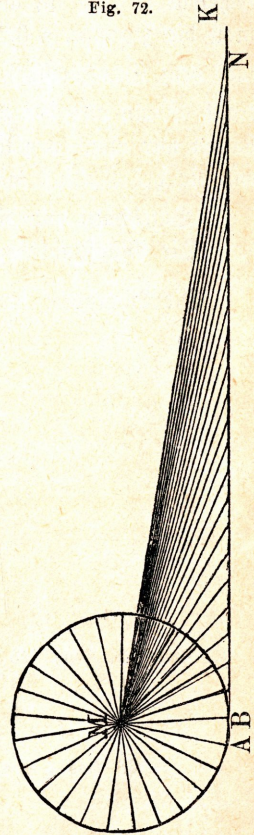
Schneidet man aber von der ganzen Fläche LJHK die vier Eckdreiecke ab, so bleibt die Fläche ACDE, d. h. das Quadrat der Hypotenuse nach. Schneidet man statt der Dreiecke die beiden Rechtecke heraus,

so bleiben die beiden Flächen $ABJF$ und $CBGK$, d. h. es bleiben die beiden Quadrate der Katheten nach. Wenn man aber von demselben Gleiches weg nimmt, so muß auch Gleiches nachbleiben.

§ 52. **Aufgabe.** Den Flächeninhalt des Kreises aus der Maaßzahl seines Radius zu berechnen. (Fig. 72).

Lösung. Denken wir uns die Peripherie in so kleine, unter sich gleiche Theile getheilt, daß wir einen solchen Theil AB ohne merklichen Fehler als Grade betrachten können, und verbinden alle Theilpunkte mit dem Mittelpunkte (M) des Kreises, so zerfällt die ganze Kreisfläche in eine große Zahl schmaler Dreiecke, die alle eine gleiche Grundlinie (AB) haben, und deren Höhe der Radius ist. Ziehen wir nun durch zwei benachbarte Theilpunkte (A und B) eine Gerade AX , schneiden von derselben die Strecke AB eben so oft ab, als sie in der Peripherie enthalten ist, und verbinden wiederum alle Theilpunkte mit dem Mittelpunkte, so bekommen wir dieselbe Zahl schmaler Dreiecke, die auch einzeln den vorigen, im Kreise enthaltenen Dreiecken gleich sind, da sie mit ihnen eine gleiche Grundlinie und dieselbe Höhe (nehmlich auch den Radius als Höhe) haben. Die Gesamtsumme dieser letzten Dreiecke bildet aber ein großes Dreieck AMN , dessen Fläche offenbar der Kreisfläche gleich ist. (Da beide Flächen aus derselben Zahl Dreiecke von derselben Größe bestehn). Die Grundlinie (AN) dieses Dreieckes ist aber gleich der Peripherie, und seine Höhe ist der Radius des Kreises. Wir erhalten daher den Schluß:

Fig. 72.



Der Flächeninhalt eines Kreises ist gleich dem eines Dreieckes, dessen Grundlinie die Peripherie und dessen Höhe der Radius ist.

Mit Rücksicht auf § 50 können wir hieraus weiter schließen:

Die Maaßzahl der Kreisfläche ist gleich dem halben Producte aus den Maaßzahlen seiner Peripherie und seines Radius.

Aber noch eine Schwierigkeit hat die Kreisberechnung zu überwinden: Die Peripherie, als stetig gekrümmte Linie, läßt sich nicht so ohne weiteres messen! Nun weiß aber jedermann, daß der Radius eines jeden Kreises sich sechs mal als Sehne in seine Peripherie tragen läßt. Daraus folgt, daß auch die Peripherie eines jeden Kreises mehr als sechsmal so lang ist, als der Radius, und man hat gefunden, daß wenn man die Peripherie 6,28 mal so lang setzt als der Radius (oder 3,14 mal dem Durchmesser), der Fehler nicht ganz $\frac{2}{1000}$ des Radius beträgt. Wenn also der Radius eines Kreises nicht sehr groß ist, so erhalten wir ohne merklichen Fehler die Maßzahl der Peripherie, wenn wir die des Radius mit 6,28 multipliciren.

Bezeichnen wir die Maßzahl des Radius mit r , so ist :

Die Maßzahl der Peripherie = $6,28 \times r$

Die Maßzahl der Fläche = $\frac{6,28 \times r \times r}{2} = 3,14 \times r^2$

Satzfehler.

Seite 2. Zeile 23 von oben lies fachgelehrten statt hochgelehrten
 „ 1. „ 3 „ unten „ winzige „ einzige
 „ 3. „ 16 „ oben streiche den Satz: Warum nicht als
 Grenze von mindestens drei Kanten
 „ 26. lies § 45a und 46a statt § 45 und § 46.
