A. Kisseljov

GEOMEETRIA

STEREOMEETRIA

XI KLASSILE

Eesti Riiklik Kirjastus
Tallinn

A. KISSELJOV

GEOMEETRIA

STEREOMEETRIA

KESKKOOLI XI KLASSILE

Prof. N. Glagolevi toimetusel ja lisaga

EESTI RIIKLIK KIRJASTUS
TALLINN 1950

Eesti NSV Haridusministeeriumi poolt kinnitatud.

Stereomeetria.

Eelmärkusi.

1. Stereomeetrias käsitellakse geomeetrilisi kehasid ja ruumilisi kujundeid, mille kõik punktid ei asetse ühel tasapinnal. Ruumilisi kujundeid kujutatakse joonistel nii, et nad silmas kutsuvad esile umbes samasuguse mulje kui kujundid ise. Neid jooniseid valmistatakse kindlate reeglite järgi, mis põhjenevad kujundite geomeetrilistel omadustel.

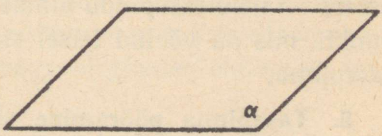
Ühte ruumiliste kujundite kujutamise võtet tasapinnal käsitleme edaspidi (§ 54—66).

Esimene peatükk.

SIRGED JA TASAPINNAD.

I. Tasapinna asendi määramine.

2. Tasapinna kujutamine. Paljudel igapäevases elus tarvitatavatel esemetel, mille pind meenutab tasapinda, on ristküliku kuju, näiteks: raamatu kaas, aknaklaas, kirjutuslaua plaat jne. Seejuures, vaadeldes neid esemeid kõrvalt ja suurest kaugusest, näib neil olevat rööpküliku kuju. Seepärast on saanud kombeks kujutada tasapinda joonisel rööpkülikuna. Tasapinda tähistatakse tavaliselt ühe kreeka tähega, näiteks «tasapind α» (joon. 1).



Joon. 1.

3. Tasapinna põhiomadused. Mainime järgmisi tasapinna omadusi, mida tunnustatakse tõestuseta ja kasutatakse seega aksioomidena.

1) *Kui sirgjoone kaks punkti asetsevad mingis tasapinnas, siis asetsevad selles tasapinnas ka selle sirge kõik teised punktid.*

2) *Kui kahel tasapinnal on üks ühine punkt, siis need tasapinnad lõikuvad mööda sirget, mis läbib seda punkti.*

3) *Läbi kolme punkti, mis ei asetse ühel sirgel, saab asetada tasapinna ja nimelt üheainsa.*

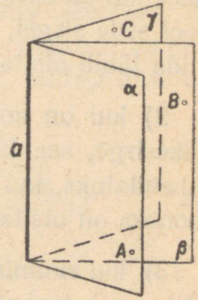
4. Järeldused. Viimasest lausest saab teha järgmisi järeldusi.

1) *Läbi sirge ja sellest väljaspool asetseva punkti saab paigutada tasapinna (ja ainult ühe).* Tõesti, väljaspool sirget asetsev punkt koos mingi kahe punktiga, mis on võetud sellel sirgel, moodustab kolm niisugust punkti, mille läbi saab juhtida tasapinna (ja ainult ühe).

2) *Läbi kahe lõikuva sirge saab asetada tasapinna (ja ainult ühe).* Tõesti, võttes sirgete lõikepunkti ja veel ühe punkti kummalgi sirgel saame kolm niisugust punkti, mille läbi saab juhtida tasapinna (ja ainult ühe).

3) *Läbi kahe paralleelse sirge saab paigutada ainult ühe tasapinna.* Tõesti, paralleelsete sirgete definitsiooni järgi kaks paralleelset sirget asetsevad ühel ja samal tasapinnal; seejuures on neid tasapindu ainult üks, sest läbi ühe sirge ja läbi punkti, mis on võetud teisel sirgel, saab juhtida ainult ühe tasapinna.

5. Tasapinna pööramine sirge ümber. ***Läbi iga sirge ruumis saab asetada lõpmatu hulga tasapindu.*** Tõepoolest, olgu antud mingi sirge a (joon. 2); võtame väljaspool seda sirget mingi punkti A. Punkti A ja sirget a läbib ainult üks tasapind (§ 4). Nimetame teda tasapinnaks α. Võtame uue punkti B väljaspool tasapinda α. Punkti B ja sirget a läbib uus tasapind. Nimetame teda tasapinnaks β. See tasapind ei või ühtida tasapinnaga α, sest temal asetseb punkt B, mis ei kuulu tasapinnale α. Meie võime võtta ruumis väljaspool tasapindu α ja β jälle uue punkti C. Punkti C ja sirget a läbib jällegi uus tasapind. Nimetame seda tasapinnaks γ. Ta ei saa ühtida ei tasapinnaga α ega ka tasapinnaga β, sest temal asetseb punkt C, mis ei kuulu tasapinnale α ega ka tasapinnale β. Jätkates järjest uute punktide võtmist ruumis saame järjest uusi tasapindu, mis läbivad sirget a. Niisuguste tasapindade hulk on lõpmatu. Kõiki neid tasapindu võime aga käsitella ka kui ühe ja sama tasapinna eri asendeid selle tasapinna pööramisel ümber sirge a.



Joon. 2.

Järelikult võime väljendada veel ühe tasapinna omaduse: t a s a p i n d s a a b p ö ö r e l d a i g a s e l l e t a s a p i n n a s i r g e ü m b e r.

6. Konstruktsioonülesannetest ruumis. Kõiki konstruktsioone, millega tegeldakse planimeetrias, on võimalik teostada ühes ainsas tasapinnas kasutades selleks joonestamisvahendeid. Ruumilisteks konstruktsioonideks aga joonestamisvahendeid ei saa kasutada, sest on võimatu joonestada kujundeid ruumis. Peale selle esineb ruumilistes konstruktsioonides uus element — t a s a p i n d, mille ehitamist ei saa teostada samasuguste lihtsate vahenditega, nagu sirgjoone ehitamist tasapinnal.

Seepärast on tarvilik täpselt k i n d l a k s m ä ä r a t a, m i d a m õ i s t a n õ u d e a l l t e o s t a d a ü k s v õ i t e i n e r u u m i l i n e k o n s t r u k t s i o o n, eriti aga, mida mõista nõude all ehitada tasapind ruumis. Kõigi ruumiliste konstruktsioonülesannete kohta eldame järgmist:

1) nõude all ehitada tasapind mõistame nõuet leida need elemendid, mis määravad tasapinna asendi ruumis (§ 3 ja 4), see tähendab, et tasapinna ehitamise ülesande loeme lahendatuks, kui on leitud need kolm punkti, või sirge ja punkt väljaspool seda sirget, või need kaks lõikuvat või paralleelset sirget, mida läbib otsitav tasapind;

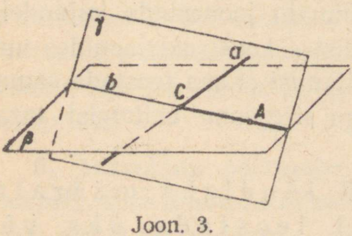
2) kui on antud kaks tasapinda, siis on antud ka nende lõikesirge, see tähendab, et sirge ehitamise ülesande loeme lahendatuks, kui on leitud need kaks tasapinda, mille lõikejooneks on otsitav sirge;

3) kui ruumis on antud tasapind, siis on temas teostatavad kõik need tasapinnalised konstruktsioonid, mis olid teostatavad planimeetrias.

Teostada mingi ruumiline konstruktsioon tähendab taandada see ülesanne lõplikuks hulgaks praegumainitud põhikonstruktsioonideks.

Nende eelduste ja kokkulepete põhjal lahendataksegi stereomeetrilisi konstruktsioonülesandeid.

7. Ruumilise konstruktsioonülesande näide. Ülesanne. *Leida antud sirge a* (joon. 3) *ja antud tasapinna β lõikepunkt.* Võtame tasapinnal β mingi punkti A. Läbi punkti A ja sirge a paigutame tasapinna γ. See tasapind lõikab tasapinda β mööda mingit sirget b. Leiame tasapinnal γ sirgete a ja b lõikepunkti. See punkt ongi otsitav punkt. Kui sirged a ja b osutuvad paralleelseteks, siis ülesandel lahendust ei ole.

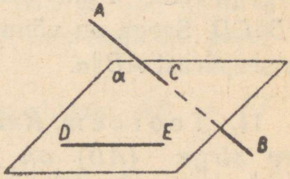


Joon. 3.

II. Paralleelsed sirged ja tasapinnad.

Paralleelsed sirged.

8. Eelmärkusi. Kaks sirget võivad ruumis asetseda nii, et läbi nende ei saa juhtida tasapinda. Võtame näiteks (joon. 4) kaks niisugust sirget AB ja DE, millest üks lõikab mingit tasapinda α, teine aga asetseb sellel tasapinnal, kuid ei läbi esimese sirge ja tasapinna α lõikepunkti (C). Läbi kahe niisuguse sirge ei ole võimalik juhtida tasapinda, sest vastasel korral läbiks sirget DE ja punkti C kaks eri tasapinda: tasapind α, mis lõikub sirgega AB, ja mingi teine tasapind, millel asetseb sirge AB, — kuid see on võimatu (§ 3).



Joon. 4.

Kaks sirget, mis ei asetse ühel tasapinnal, ei saa muidugi lõikuda; siiski neid ei nimetata paralleelseteks, sest see nimetus säilitatakse sirgetele, mis ei lõika teineteist, kuid asetsevad seejuures ühel ja samal tasapinnal.

Kaht sirget, mis ei asetse ühel tasapinnal, nimetatakse kiivsirgeteks.

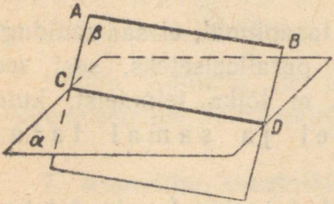
Sirge ja tasapinna rööpseis.

9. Definitsioon. Tasapinda ja väljaspool seda tasapinda asetsevat sirget nimetatakse paralleelseteks, kui nad teineteisega ei lõiku.

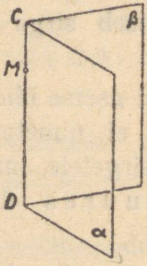
10. Teoreem. ***Kui sirge*** (AB, joon. 5) ***on paralleelne sirgega*** (CD), ***mis asetseb tasapinnal*** (α), ***siis ta on paralleelne ka selle tasapinnaga.***

Läbi sirgete AB ja CD asetame tasapinna β ja oletame, et sirge AB lõikab kusagil tasapinda α. Siis oletatav lõikepunkt, asetsedes sirgel AB, peab kuuluma ka tasapinnale β, millel asetseb sirge AB; samal ajal lõikepunkt peab muidugi kuuluma ka tasapinnale α. Tähendab oletatav lõikepunkt, asetsedes ühtaegu nii tasapinnal α kui ka tasapinnal β, peab asetsema nende lõikesirgel CD. Järelikult sirge AB lõikub sirgega CD. Kuid see on võimatu, kuna eelduse järgi $AB \| CD$. Seega on võimatu, et sirge AB lõikaks tasapinda α, ja seepärast $AB \| \alpha$.

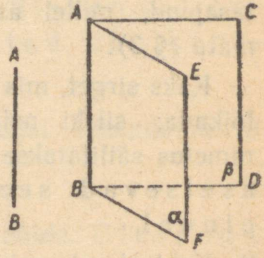
11. Teoreem. ***Kui ühel tasapinnal*** (β, joon. 5) ***asetsev sirge*** (AB) ***on paralleelne teise tasapinnaga*** (α) ***ja tasapinnad lõikuvad, siis see sirge on paralleelne nende tasapindade lõikesirgega*** (CD).



Joon. 5.



Joon. 6.



Joon. 7.

Tõepoolest, esiteks sirge CD asetseb sirgega AB ühel ja samal tasapinnal β; teiseks sirge CD ei saa lõikuda sirgega AB, sest lõikepunkt oleks tasapinnal α, mis aga on võimatu.

12. Järeldus 1. *Kui sirge* (AB, joon. 6) *on paralleelne kummagagi kahest lõikuvast tasapinnast* (α ja β), *siis ta on paralleelne nende tasapindade lõikesirgega* (CD).

Võtame tasapinna läbi sirge AB ja läbi mingi punkti M sirgel CD. See tasapind peab lõikuma tasapindadega α ja β

mööda sirgeid, mis on paralleelsed sirgega AB ja läbivad punkti M. Kuid punkti M läbib ainult üks sirge, mis on paralleelne sirgega AB; see tähendab, et abitasapinna ning tasapindade α ja β kaks oletatavat lõikesirget peavad ühtima. See sirge, asetsedes ühtaegu tasapinnal α ja tasapinnal β, peab ühtima nende tasapindade lõikesirgega CD; seega $CD \| AB$.

13. J ä r e l d u s 2. *Kui kaks sirget* (AB ja CD, joon. 7) *on paralleelsed kolmanda sirgega* (EF), *siis nad on paralleelsed ka teineteisega.*

Juhime tasapinna α läbi paralleelsete sirgete AB ja EF. Et $CD \| EF$, siis $CD \| \alpha$ (§ 10).

Juhime läbi sirge CD ja läbi mingi punkti A sirgel AB veel tasapinna β. Et $EF \| CD$, siis $EF \| \beta$. Järelikult tasapind β peab lõikuma tasapinnaga α mööda sirget, mis on paralleelne sirgega EF (§ 11) ja mis läbib punkti A. Kuid tasapinnal α läbib punkti A ainult üks sirge, mis on paralleelne sirgega EF, nimelt sirge AB. Järelikult tasapinnad α ja β lõikuvad mööda sirget AB, seega $CD \| AB$.

Paralleelsed tasapinnad.

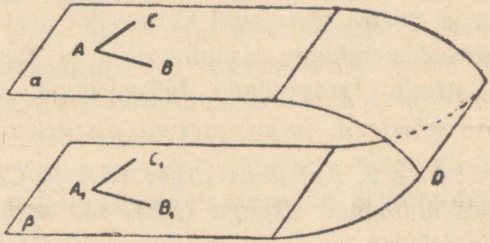
14. Definitsioon. Kaht tasapinda, mis ei lõiku teineteisega, nimetatakse paralleelseteks.

15. T e o r e e m. ***Kui ühe tasapinna*** (α, joon. 8) ***kaks lõikuvat sirget*** (AB ja AC) ***on vastavalt paralleelsed teise tasapinna*** (β) ***kahe lõikuva sirgega*** (A_1B_1 ja A_1C_1), ***siis need tasapinnad on paralleelsed.***

Sirged AB ja AC on paralleelsed tasapinnaga β (§ 10).

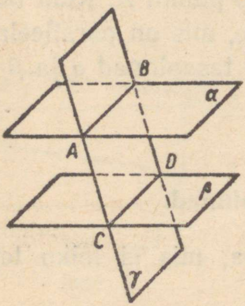
Oletame, et tasapinnad α ja β lõikuvad mööda mingit sirget DE (joon. 8). Niisugusel juhul $AB \| DE$ ja $AC \| DE$ (§ 11). Seega läbib tasapinnal α punkti A kaks sirget AB ja

AC, mis on paralleelsed sirgega *DE*, mis aga on võimatu. Järelikult tasapinnad α ja β ei lõiku.

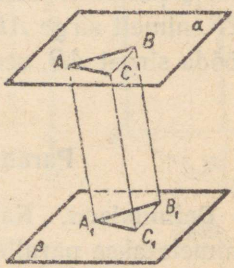


Joon. 8.

16. T e o r e e m. ***Kui kahte paralleelset tasapinda*** (α ja β, joon. 9) ***lõigatakse kolmanda tasapinnaga*** (γ), ***siis lõikesirged*** (*AB* ja *CD*) ***on paralleelsed.***



Joon. 9.



Joon. 10.

Tõesti, esiteks sirged asetsevad ühel tasapinnal (γ); teiseks nad ei saa lõikuda, sest vastasel korral lõikuksid tasapinnad α ja β, mis aga on vastuolus eeldusega.

17. T e o r e e m. ***Paralleelsete tasapindadega*** (α ja β, joon. 9) ***piiratud paralleelsete sirgete lõigud*** (*AC* ja *BD*) ***on võrdsed.***

Juhime läbi paralleelsete sirgete AC ja BD tasapinna γ; see tasapind lõikab tasapindu α ja β mööda paralleelseid sirgeid AB ja CD. Järelikult nelinurk $ABCD$ on rööpkülik ja seepärast $AC = BD$.

18. T e o r e e m. ***Kaks nurka*** (BAC ja $B_1A_1C_1$, joon. 10) ***mille haarad on vastavalt paralleelsed ja ühtepidi suunatud, on võrdsed ja asetsevad paralleelsetes tasapindades*** (α ja β).

Et tasapinnad α ja β on paralleelsed, oli juba ülal tõestatud (§ 15); jääb tõestada, et nurgad A ja A_1 on võrdsed. Võtame nurkade haaradel vabalt valitud, kuid vastavalt võrdsed lõigud $AB = A_1B_1$ ja $AC = A_1C_1$ ning tõmbame sirglõigud AA_1, BB_1, CC_1, BC ja B_1C_1. Et lõigud AB ja A_1B_1 on võrdsed ja paralleelsed, siis nelinurk ABB_1A_1 on rööpkülik; seetõttu on paralleelsed ja võrdsed ka lõigud AA_1 ja BB_1. Samal põhjusel on võrdsed ja paralleelsed ka lõigud AA_1 ja CC_1; järelikult $BB_1 \| CC_1$ ja $BB_1 = CC_1$. Seepärast $BC = B_1C_1$ ja $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$ (kolme külje järgi), järelikult $\angle A = \angle A_1$.

Konstruktsioonülesandeid.

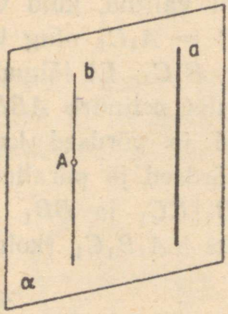
19. *Läbi punkti* (A, joon. 11), *mis asetseb väljaspool antud sirget* (a), *juhtida sirge, mis on paralleelne antud sirgega* (a).

L a h e n d u s. Juhime tasapinna α läbi sirge a ja punkti A. Sel tasapinnal ehitame läbi punkti A sirge b paralleelselt sirgega a.

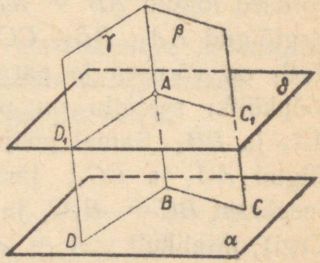
Ülesandel on ainult üks lahend. Tõepoolest otsitav sirge peab asetsema sirgega a ühel ja samal tasapinnal. Samal tasapinnal peab asetsema ka punkt A, mida peab läbima otsitav sirge. Tähendab see tasapind peab ühtima tasapinnaga α. Kuid tasapinnal α saab läbi punkti A juhtida ainult ühte sirget, mis on rööbiti sirgega a.

20. *Läbi punkti* (A, joon. 12) *ehitada tasapind, mis on paralleelne antud tasapinnaga* (α), *mis ei läbi antud punkti* (A).

Lahendus. Juhime läbi mingi punkti B tasapinnal α mingid kaks sirget BC ja BD. Kujundame kaks abitasapinda: läbi punkti A ja sirge BC — tasapinna β ning läbi punkti A ja sirge BD — tasapinna γ. Otsitav, tasapinnaga α paralleelne tasapind peab lõikama tasapinda β mööda sirget, mis on paralleelne sirgega BC, ja tasapinda γ mööda sirget, mis on paralleelne sirgega BD (§ 16). Sellest järeldub nii-



Joon. 11.



Joon. 12

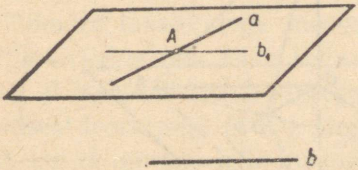
sugune konstruktsioon: juhime läbi punkti A tasapinnal β sirge $AC_1 \| BC$ ja tasapinnal γ sirge $AD_1 \| BD$. Läbi sirgete AC_1 ja AD_1 juhime tasapinna δ. See tasapind ongi nõutav tasapind. Tõepoolest, tasapinnal δ asetseva nurga D_1AC_1 haarad on paralleelsed tasapinnal α asetseva nurga DBC haaradega. Järelikult $\delta \| \alpha$.

Et tasapinnal β on läbi punkti A võimalik ehitada ainult üks sirgega BC paralleelne sirge ja tasapinnal γ samuti ainult üks sirgega BD paralleelne sirge, siis ülesandel on ainult üks lahend. Järelikult on läbi väljaspool tasapinda asetseva punkti võimalik ehitada ainult üks antud tasapinnaga paralleelne tasapind.

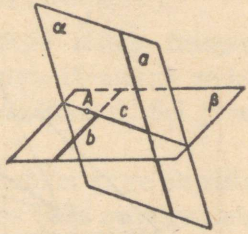
21. *Läbi antud sirge* (a, joon. 13) *ehitada teise antud sirgega* (b) *paralleelne tasapind.*

Lahendus. 1. juhtum: sirged a ja b ei ole paralleelsed. Läbi sirge a mingi punkti A ehitame sirgega b paralleelse sirge b_1; läbi sirgete a ja b_1 juhime tasapinna. See tasapind ongi nõutav tasapind (§ 10). Ülesandel on sel juhul ainult üks lahend.

2. juhtum: sirged a ja b on paralleelsed. Sel juhtumil ülesanne on määramatu, sest iga tasapind, mis läbib sirget a, on paralleelne sirgega b.



Joon. 13.



Joon. 14.

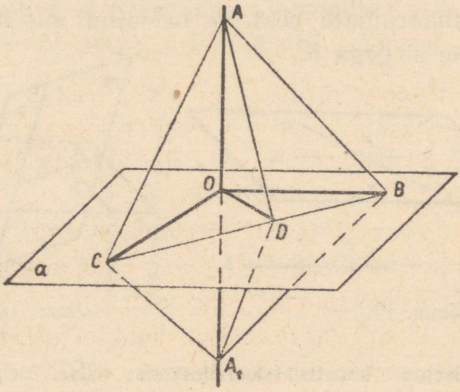
22. Keerulisema konstruktsioonülesande näide. *On antud kaks kiivsirget* (a ja b, joon. 14) *ja punkt A, mis ei asetse kummalgi nendest sirgetest. Ehitada läbi punkti A sirge, mis lõikab mõlemat antud sirget.*

Lahendus. Et nõutud sirge peab läbima punkti A ja lõikama sirget a, siis peab ta asetsema punkti A ja sirget a läbival tasapinnal (sest kaks tema punkti, A ja lõikepunkt sirgega a, asetsevad sellel tasapinnal). Just samuti veendume, et nõutud sirge peab asetsema tasapinnal, mis läbib punkti A ja sirget b. Järelikult see sirge peab olema nende tasapindade lõikesirge. Siit järeldub järgmine konstruktsioon. Asetame läbi punkti A ja sirge a tasapinna α; läbi punkti A ja sirge b asetame tasapinna β. Võtame tasapindade α ja β lõikesirge c. Kui sirge c ei ole paralleelne kummagagi antud sirgetest, siis ta lõikab mõlemat (sest ta asetseb kummagagi neist ühel tasapinnal: a ja c asetsevad tasapinnal α, b ja c — tasapinnal β). Sel juhul sirge c ongi nõutud sirge. Kui aga $a \parallel c$ või $b \parallel c$, siis ülesandel pole lahendit. Sirged a ja c on paralleelsed sel juhtumil, kui punkti A ja sirget b läbiv tasapind on paralleelne sirgega a. Analoogiliselt: $b \parallel c$, kui $a \parallel b$.

III. Tasapinna rist- ja kaldsirged.

Seame endale ülesandeks määrata, missugusel juhul võib sirget lugeda ristuvaks tasapinnaga. Tõestame esmalt järgmise lause.

23. T e o r e e m. ***Kui tasapinnaga lõikuv sirge** (AA_1, joon. 15) **on risti selle tasapinna mingi kahe sirgega,***



Joon. 15.

(OB ja OC), ***mis läbivad antud sirge ja tasapinna lõikepunkti*** (O), ***siis antud sirge on risti ka selle tasapinna iga kolmanda sirgega*** (OD), ***mis läbib sedasama lõikepunkti*** (O).

Võtame sirgel AA_1 vabalt valitud pikkusega, kuid võrdsed lõigud OA ja OA_1, ja võtame tasapinnal mingi sirge, mis lõikab punkti O läbivat kolme sirget mingites punktides C, D ja B. Ühendame need punktid punktidega A ja A_1. Siis saame rea kolmnurki. Vaatleme neid järgemööda.

Esmalt vaatleme kolmnurki ACB ja A_1CB; nad on kongruentsed, sest neil on ühine külg CB, $AC = A_1C$ — kui kaldlõigud, mille aluspunktid on võrdsetel kaugustel ristlõigu OC aluspunktist O, $AB = A_1B$ samal põhjusel. Nende kolmnurkade ühtivusest järeldub, et $\angle ABC = \angle A_1BC$.

Seejärel siirdume kolmnurkade ADB ja A_1DB vaatlemisele: nad saavad ühtida, sest neil on ühine külg DB, $AB = A_1B$ ja $\angle ABD = \angle A_1BD$. Nende kolmnurkade ühtivusest järeldame, et $AD = A_1D$.

Nüüd võtame kolmnurgad AOD ja A_1OD; nad on kongruentsed, sest nende vastavad küljed on võrdsed. Nende kolmnurkade ühtivusest järeldame, et $\angle AOD = \angle A_1OD$; et need nurgad on aga kõrvunurgad, siis $AA_1 \perp OD$.

24. Definitsioon. Öeldakse, et sirge **ristub tasapinnaga**, kui ta lõikudes tasapinnaga moodustab täisnurga selle tasapinna iga sirgega, mis läbib seda lõikepunkti. Sel juhul öeldakse ka, et tasapind ristub sirgega.

Eelmisest teoreemist (§ 23) järeldub, et sirge on risti tasapinnaga, kui ta on risti selle tasapinna kahe sirgega, mis läbivad antud sirge ja tasapinna lõikepunkti.

Sirget, mis lõikub tasapinnaga, kuid ei ole risti temaga, nimetatakse selle tasapinna **kaldsirgeks.** Sirge ja tasapinna lõikepunkti nimetatakse ristsirge või kaldsirge **aluspunktiks** ehk jälgpunktiks.

25. Ristlõigu ja kaldlõigu pikkuste võrdlemine[1]. Kui ühest punktist A (joon. 16) on tasapinnani ehitatud ristlõik AB ja kaldlõik AC, siis nimetame kaldlõigu projektsiooniks tasapinnal α lõiku BC, mis ühendab ristlõigu ja kaldlõigu aluspunkte. Niiviisi lõik BC on kaldlõigu AC projektsioon, lõik BD on kaldlõigu AD projektsioon jne.

26. Teoreem. ***Kui ühest ja samast punktist*** (A, joon. 16) ***väljaspool tasapinda*** (α) ***on selle tasapinnani juhitud ristlõik*** (AB) ***ja kaldlõigud*** (AC, AD, AE, . . .), ***siis:***

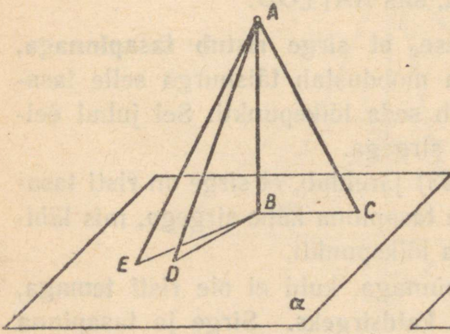
---

[1] «Tasapinnani ehitatud ristlõigu» ja «tasapinnani ehitatud kaldlõigu» all mõtleme ristsirge lõiku antud punktist kuni ristsirge aluspunktini ja kaldsirge lõiku antud punktist kuni kaldsirge aluspunktini.

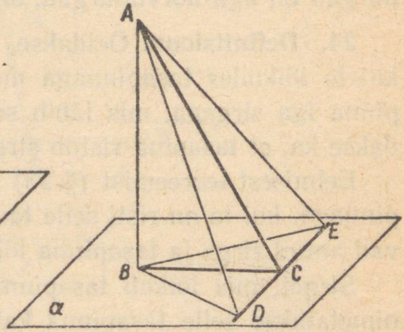
1) ***võrdsete projektsioonidega kaldlõigud on võrdsed;***

2) ***kahest kaldlõigust on suurem see, mille projektsioon on suurem.***

Pöörates täisnurkseid kolmnurki ABC ja ABD kaateti AB ümber võime nende tasapinnad viia ühtima kolmnurga ABE tasapinnaga. Siis ristsirge ja kõik kaldsirged asetsevad ühel ja samal tasapinnal ning nende projektsioonid asetsevad ühel ja samal sirgel. Seega on tõestatav teoreem taandatud analoogilistele teoreemidele planimeetriast.



Joon. 16



Joon. 17.

Märkus. Et ristlõik AB on täisnurkse kolmnurga kaatetiks ja iga kaldlõik: AC, AD, AE, . . . on hüpotenuusiks, **siis ristlõik on lühem igast kaldlõigust;** tähendab punktist tasapinnani ehitatud ristlõik on lühim kõigist lõikudest, mis seda punkti ühendavad selle tasapinna mistahes punktidega, ja seepärast ristlõigu AB pikkust loetakse A kauguseks tasapinnast α.

27. Pöördteoreemid. ***Kui ühest ja samast punktist väljaspool tasapinda on tasapinnani ehitatud ristlõik ja kaldlõigud, siis: 1) võrdsetel kaldlõikudel on võrdsed projektsioonid, 2) kahe kaldlõigu projektsioonidest on suurem see, kumb kuulub pikemale kaldlõigule.***

Jätame õpilastele endile tõestada need teoreemid (vastuväiteliselt).

Mainime veel järgmist teoreemi ristlõikudest, mida vajame edaspidi.

28. Teoreem. ***Tasapinnal*** (α, joon. 17) ***asetsev sirge*** (DE), ***mis läbib kaldsirge*** (AC) ***aluspunkti ja on risti kaldsirge projektsiooniga*** (BC), ***on risti ka kaldsirge endaga.***

Võtame tasapinnal meelevaldsed, kuid võrdsed lõigud CD ja CE ning ühendame sirglõikude abil punktid A ja B punktidega D ja E. Siis saame, et $BD = BE$ — kui kaldlõigud sirgele DE, mille aluspunktid D ja E asetsevad võrdsel kaugusel ristlõigu BC aluspunktist C, ning et $AD = AE$ — kui võrdsete projektsioonidega BD ja BE kaldlõigud tasapinnani α. Seetõttu $\triangle\ ADE$ on võrdhaarne kolmnurk ja seega tema mediaan AC on risti alusega DE.

Seda teoreemi nimetatakse kolme ristsirge teoreemiks. Tõepoolest see teoreem käsitleb kolme järgmise ristsirge seost: 1) ristsirge AB tasapinnale α, 2) ristsirge BC sirgele DE ja 3) ristsirge AC samale sirgele DE.

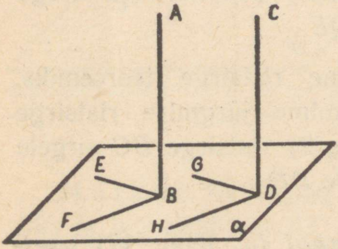
29. Pöördteoreem. ***Tasapinnal*** (α, joon. 17) ***asetsev sirge*** (DE), ***mis läbib kaldsirge*** (AC) ***aluspunkti ja on risti kaldsirgega, on risti ka tema projektsiooniga*** (BC).

Teeme sama konstruktsiooni, mis otsesegi teoreemi tõestamiseks. Võtame meelevaldsed, kuid võrdsed lõigud CD ja CE ning ühendame sirglõikude abil punktid A ja B punktidega D ja E. Siis saame, et $AD = AE$ — kui kaldlõigud sirgele DE, mille aluspunktid D ja E asetsevad võrdsetel kaugustel ristlõigu AC aluspunktist C, ning et $BD = BE$ — kui võrdsete kaldlõikude AD ja AE projektsioonid. Seetõttu $\triangle BDE$ on võrdhaarne kolmnurk ja seega tema mediaan BC on risti alusega DE.

IV. Sirgete ja tasapindade rööpseisu ja ristseisu seos.

30. Eelmärkus. Sirgete ja tasapindade rööpseisu ning nende ristseisu vahel valitseb mõnesugune seos. Nimelt ühtede elementide rööpseis tingib teiste elementide ristseisu, ja ümberpöördult, ühtede elementide ristseisust on võimalik järeldada teiste elementide rööpseisu. See sirgete ja tasapindade rööpseisu ja ristseisu seos väljendub järgmistes teoreemides.

31. Teoreem. ***Kui tasapind*** (α, joon. 18) ***on risti ühega paralleelsetest sirgetest*** (AB), ***siis ta on risti ka teisega*** (CD).

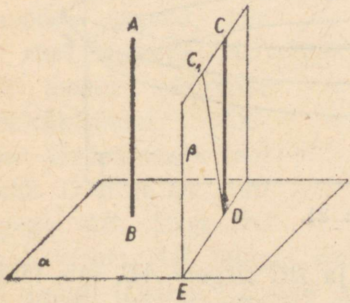


Joon. 18.

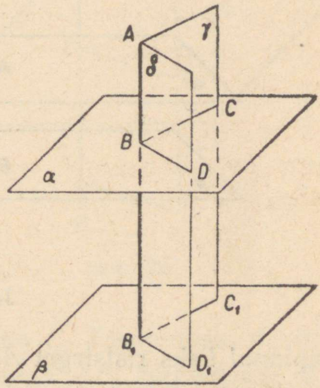
Võtame tasapinnal α kaks punktist B väljuvat kiirt BE ja BF ning punktist D väljuvad kiired DG ja DH, mis on vastavalt paralleelsed kiirtega BE ja BF. Siis saame, et $\angle ABE = \angle CDG$ ja $\angle ABF = \angle CDH$ kui vastavalt paralleelsete haaradega nurgad. Kuid $\angle ABE$ ja $\angle ABF$ on täisnurgad, sest $AB \perp \alpha$. Järelikult on $\angle CDG$ ja $\angle CDH$ samuti täisnurgad (§ 18). Seega $CD \perp \alpha$ (§ 24).

32. Pöördteoreem. ***Kui kaks sirget*** (AB ja CD, joon. 19) ***on risti ühe ja sama tasapinnaga, siis nad on teineteisega paralleelsed.***

Oletame vastupidist, s. o. et AB ja CD ei ole paralleelsed. Võtame siis läbi punkti D sirge, mis on paralleelne sirgega AB. Tehtud oletusel see on mingi sirge DC_1, mis ei ühti sirgega DC. Otsese teoreemi järgi sirge DC_1 on risti tasapinnaga α. Läbi sirgete CD ja C_1D juhime tasapinna β ning võtame tasapinnale α ja β lõikesirge DE. Et (eelmise teoreemi järgi) $C_1D \perp \alpha$, siis $\angle C_1DE$ on täisnurk, kuid et teoreemi eelduse kohaselt $CD \perp \alpha$, siis $\angle CDE$ on samuti täisnurk. Niiviisi selgub, et tasapinnas β on sirgele DE ühest ja samast punktist D ehitatud kaks ristsirget DC ja DC_1. Et see on võimatu, siis on ka võimatu, et sirged AB ja CD ei ole paralleelsed.



Joon. 19.



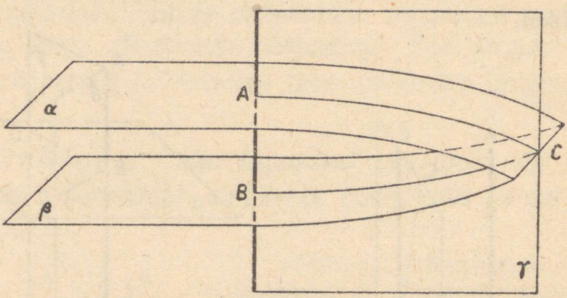
Joon. 20.

33. Teoreem. ***Kui sirge*** (BB_1, joon. 20). ***on risti ühega paralleelsetest tasapindadest*** (α), ***siis on ta risti ka teisega*** (β).

Ehitame läbi sirge BB_1 mingid kaks tasapinda γ ja δ, millest kumbki lõikub tasapindadega α ja β mööda paralleelseid sirgeid: üks mööda sirgeid BC ja B_1C_1 ning teine mööda sirgeid BD ja B_1D_1. Eelduse kohaselt sirge BB_1 on risti sirgetega BC ja BD, järelikult ta on risti ka nendega paralleelsete sirgetega B_1C_1 ja B_1D_1 ning seepärast ta on risti ka tasapinnaga β, millel asetsevad sirged B_1C_1 ja B_1D_1.

34. Pöördteoreem. ***Kui kaks tasapinda*** (α ja β, joon. 21) ***on risti ühe ja sama sirgega*** (AB), ***siis nad on paralleelsed teineteisega.***

Oletame vastupidist, s. o. et tasapinnad α ja β lõikuvad. Võtame nende lõikesirgel mingi punkti C ning juhime tasapinna γ läbi punkti C ja sirge AB. Tasapind γ lõikab tasapindu α ja β vastavalt mööda sirgeid AC ja BC. Et $AB \perp \alpha$, siis $AB \perp AC$, ja et $AB \perp \beta$, siis $AB \perp BC$. Sel viisil saame



Joon. 21.

tasapinnal kaks ristsirget AC ja BC sirgele AB, mis läbivad ühte ja sama punkti C. Et see on võimatu, siis oletus, et α ja β lõikuvad, oli vale. Järelikult nad on paralleelsed.

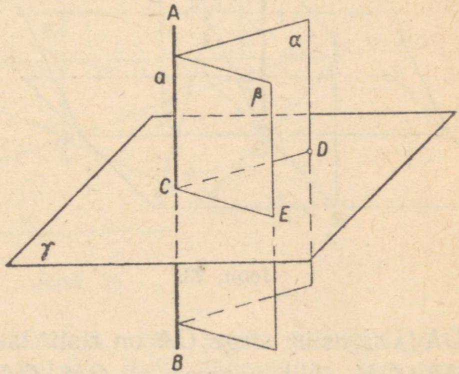
Konstruktsioonülesandeid.

35. *Läbi antud punkti ehitada tasapind, mis on risti antud sirgega AB* (joon. 22).

Lahendus. 1. juhtum. Antud punkt C asetseb sirgel AB.

Juhime läbi sirge AB mingid kaks tasapinda α ja β. Otsitav tasapind peab lõikama neid tasapindu mööda sirgeid, mis on risti sirgega AB (§ 24). Siit saame järgmise konstruktsiooni. Võtame läbi sirge AB kaks meelevaldset tasapinda α ja β. Kummaski tasapinnas ehitame läbi punkti C ristsirged sirgele AB (tasapinnas α — ristsirge CD ja tasapinnas β — ristsirge CE). Sirgeid CD ja CE läbiv tasapind ongi nõutud tasapind γ.

2. j u h t u m. Antud punkt D asetseb väljaspool sirget AB (joon. 22). Ehitame läbi punkti D ja sirge AB tasapinna α ning võtame selles tasapinnas sirge DC risti sirgega AB. Läbi sirge AB ehitame veel meelevaldse tasapinna β ning selles tasapinnas võtame sirge CE risti sirgega AB. Otsitav tasapind peab lõikama tasapindu α ja β mööda sirgeid, mis on risti sirgega AB. Siit saame järgmise konstruktsiooni. Ehitame tasapinnas α läbi punkti D sirge DC risti sirgega AB. Sirge DC lõikab sirget AB mingis punktis C. Tasapinnas β võtame läbi punkti C sirge CE risti sirgega AB. Sirgeid CD ja CE läbiv tasapind ongi nõutud tasapind γ.



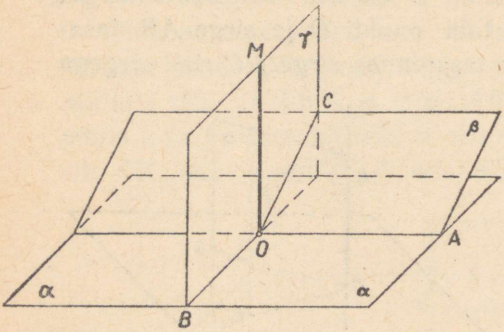
Joon. 22.

Et kummaski tasapinnas α ja β on läbi antud punkti võimalik ehitada ainult üks sirge, mis on risti antud sirgega, siis mõlemal juhul on ülesandel ainult üks lahend, s. o. l ä b i i g a r u u m i p u n k t i o n v õ i m a l i k e h i t a d a a i n u l t ü k s t a s a p i n d, m i s o n r i s t i a n t u d s i r g e g a.

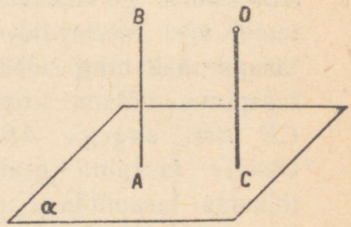
36. *Läbi antud punkti O juhtida sirge, mis on risti antud tasapinnaga α.*

1. j u h t u m. Punkt O asetseb tasapinnas α (joon. 23). Ehitame tasapinnas α läbi punkti O mingid kaks teineteisega ristuvat sirget OA ja OB. Läbi sirge OA võtame veel mingi tasapinna β ja tasapinnal β ehitame sirge OC risti sirgega

OA. Läbi sirgete OB ja OC juhime uue tasapinna γ ja sellel tasapinnal võtame sirge OM risti sirgega OB. Sirge OM ongi nõutud ristsirge tasapinnale α. Kuna $OA \perp OB$ ja



Joon. 23.



Joon. 24.

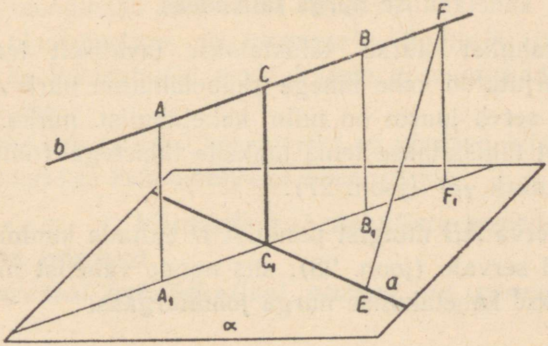
$OA \perp OC$, siis sirge OA on risti tasapinnaga γ ja järelikult $OA \perp OM$. Nii näeme, et $OM \perp OA$ ja $OM \perp OB$, järelikult sirge OM on risti tasapinnaga α.

2. juhtum. Punkt O asetseb väljaspool tasapinda α (joon. 24.). Võtame tasapinnal α mingi punkti A ja teostame sellest lähtudes sama konstruktsiooni, mis eelmiselgi juhul. Siis saame tasapinnaga α ristuva sirge AB. Seejärel ehitame läbi punkti O sirge rööbiti sirgega AB. See sirge ongi nõutud ristsirge.

Ülesandel on mõlemal juhul ainult üks lahend. Tõesti, kuna kaks sirget, mis on risti ühe ja sama tasapinnaga, on paralleelsed, siis punktist O ei ole võimalik ehitada tasapinnale α kahte ristsirget. Järelikult läbi iga ruumipunkti on võimalik ehitada ainult üks sirge, mis on risti tasapinnaga.

37. Keerulisema ülesande näide. *On antud kaks kiivsirget* (a ja b, joon. 25). *Ehitada sirge, mis lõikab mõlemat antud sirget ja on risti mõlemaga.*

Lahendus. Juhime läbi sirge a tasapinna α, mis on paralleelne sirgega b (§ 21). Sirge b mingist kahest punktist ehitame ristsirged AA_1 ja BB_1 tasapinnale α. Ühendame sirge abil punktid A_1 ja B_1 ning



Joon. 25.

leiame sirgete A_1B_1 ja a lõikepunkti C_1. Läbi punkti C_1 ehitame ristsirge tasapinnale α. Jätame õpilasile endile tõestada, et see sirge 1) lõikab sirget b mingis punktis C ja 2) on risti nii sirgega a kui ka sirgega b.

Järelikult sirge CC_1 ongi nõutud sirge.

Täheldame, et lõik CC_1 on väiksem kui ükski teine lõik, mis ühendab sirge a punkte sirge b punktidega. Tõepoolest võtnud sirgel a mingi punkti E ja sirgel b mingi punkti F, ühendame nad sirglõigu abil ja tõestame, et $EF > CC_1$. Ehitame punktist F tasapinnale α ristsirge FF_1. Siis saame, et $EF > FF_1$ (§ 26). Kuid $FF_1 = CC_1$ järelikult $EF > CC_1$. Sel põhjusel nimetatakse lõiku CC_1 lühimaks kauguseks sirgete a ja b vahel.

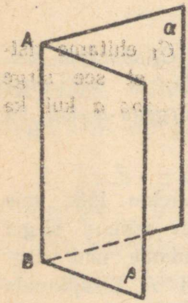
V. Kahetahulised nurgad, sirge ja tasapinna vaheline nurk, kiivsirgete vaheline nurk, ruumnurgad.

Kahetahulised nurgad.

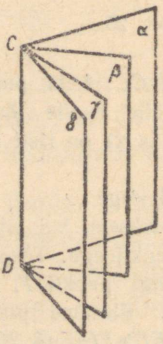
38. Definitsioone. Tasapinna osa, mis asetseb ühelpool selle tasapinna mingit sirget, nimetatakse **leheks**. Kujundit, mille moodustavad kaks ühest sirgest (AB) väljuvat lehte (α ja β, joon. 26), nimetatakse **kahetahuliseks nurgaks.** Sirget AB nimetatakse kahetahulise nurga **servaks** ning lehti α ja β — kahetahulise nurga **tahkudeks.**

Kahetahulist nurka tähistatakse tavaliselt tema serva juurde kirjutatud kahe tähega (kahetahuline nurk AB). Kui aga ühe serva juures on mitu kahetahulist nurka, siis igaühte neist tähistatakse tema tahkude tähistega (näiteks kahetahuline nurk $\gamma\delta$) (joon. 27).

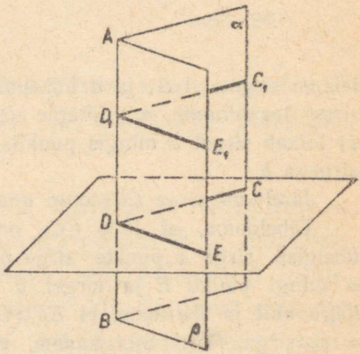
Kui serva AB mingist punktist D ehitada kummalgi tahul ristsirged servale (joon. 28), siis nende vahelist nurka CDE nimetatakse kahetahulise nurga **joonnurgaks.**



Joon. 26.



Joon. 27.



Joon. 28.

Joonnurga suurus ei olene tema tipu asukohast serval. Nii on joonnurgad CDE ja $C_1D_1E_1$ võrdsed, sest nende küljed on vastavalt paralleelsed ja ühesuunalised.

Joonnurga tasapind on servaga risti, sest ta sisaldab kahte servaga ristuvat sirget. Seepärast joonnurga leidmiseks piisab, kui lõigata kahetahulist nurka tasapinnaga, mis on servaga risti.

39. Võrdsed ja mittevõrdsed kahetahulised nurgad. Kahte kahetahulist nurka loetakse **võrdseks,** kui nad teineteise sisse paigutamisel ühtivad; vastasel korral loetakse väiksemaks see nurk, mis moodustab osa teisest nurgast.

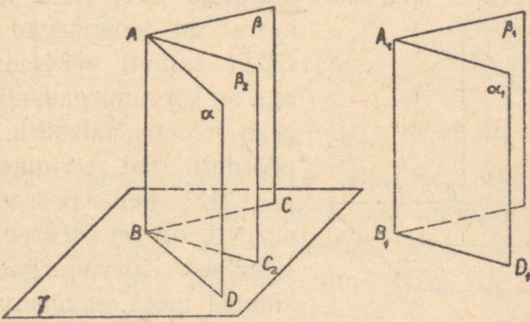
Nagu planimeetrias on kõrvunurki, tippnurki jms., saab vastavalt ka kahetahulisi nurki lugeda kõrvunurkadeks, tippnurkadeks jne.

Kui kaks kahetahulist kõrvunurka on võrdsed, siis kumbagi neist nimetatakse **kahetahuliseks täisnurgaks.**

Teoreem. 1) ***Võrdsete kahetahuliste nurkade joonnurgad on võrdsed.***

2) ***Suuremal kahetahulisel nurgal on suurem joonnurk.***

Olgu $\alpha\beta$ ja $\alpha_1\beta_1$ (joon. 29) kaks kahetahulist nurka. Paigutame nurga $\alpha_1\beta_1$ nurga $\alpha\beta$ sisse nii, et serv A_1B_1 ühtib



Joon. 29.

servaga AB ja tahk α_1 ühtib tahuga α. Kui need kahetahulised nurgad on võrdsed, siis tahk β_1 ühtib tahuga β. Kui aga nurk A_1B_1 on väiksem kui nurk AB, siis tahk β_1 satub mingisse asendisse β_2 seespool nurka AB.

Seda tähele pannud, võtame ühisel serval mingi punkti B ja juhime sellest läbi tasapinna γ risti servaga AB. Selle tasapinna lõikumisel kahetahuliste nurkade tahkudega tekivad nende nurkade joonnurgad. On selge, et kui kahetahulised nurgad ühtivad, siis neil on üks ja sama joonnurk; kui nad aga ei ühti, s. o. kui näiteks tahk β_1 satub asendisse β_2, siis on suuremal kahetahulisel nurgal ka suurem joonnurk (nimelt $\angle CBD > \angle C_2BD$).

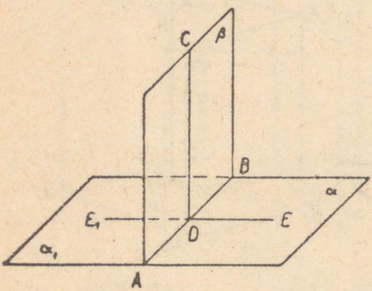
40. Pöördteoreemid. 1) ***Võrdsetele joonnurkadele vastavad võrdsed kahetahulised nurgad.***

2) ***Suuremale joonnurgale vastab suurem kahetahuline nurk.***

Neid teoreeme on kerge tõestada vastuväiteliselt.

41. Järeldused. 1) *Kahetahulise täisnurga joonnurk on täisnurk ja ümberpöördult.*

Olgu $\alpha\beta$ (joon. 30) kahetahuline täisnurk. See tähendab, et ta on võrdne oma kõrvunurgaga $\beta\alpha_1$. Kuid niisugusel korral on joonnurgad CDE ja CDE_1 samuti võrdsed; et nad aga on kõrvunurgad, siis kumbki peab olema täisnurk. Ümberpöördult: kui joonnurgad CDE ja CDE_1 on võrdsed kõrvunurgad, siis on võrdsed ka kahetahulised kõrvunurgad, s. o. kumbki neist on täisnurk.



Joon. 30.

2) *Kõik kahetahulised täisnurgad on võrdsed,* sest nende joonnurgad on võrdsed.

Samal viisil on kerge tõestada, et:

3) *Kahetahulised tippnurgad on võrdsed.*

4) *Paralleelsete ja samasuunaliste* (või vastassuunaliste) *tahkudega kahetahulised nurgad on võrdsed.*

5) Kui võtame kahetahulise nurga mõõtühikuks niisuguse

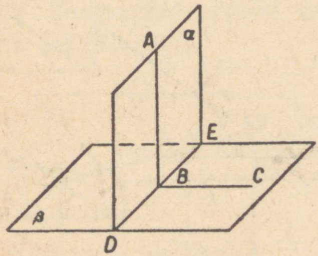
kahetahulise nurga, mis vastab joonnurga mõõtühikule, siis võib öelda, et:

Kahetahulist nurka mõõdab tema joonnurk.

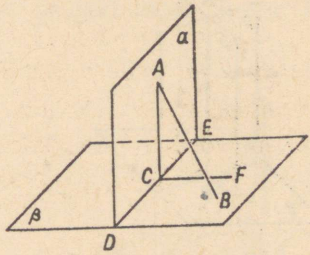
Risttasapinnad.

42. **Definitsioon.** Kahte tasapinda nimetatakse teineteise risttasapindadeks, kui nad teineteisega lõikudes moodustavad kahetahulise täisnurga.

43. Teoreem (kahe tasapinna ristseisu tunnus). ***Tasapind*** (α, joon. 31), ***milles asetseb teise tasapinna*** (β) ***ristsirge*** (AB), ***on risti teise tasapinnaga.***



Joon. 31.



Joon. 32.

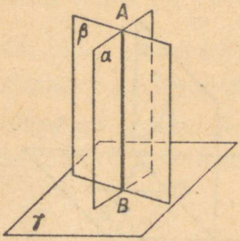
Olgu DE tasapindade α ja β lõikejoon. Ehitame tasapinnal β $BC \perp DE$. Siis nurk ABC on kahetahulise nurga $\alpha\beta$ joonnurk. Et sirge AB on eelduse põhjal risti tasapinnaga β, siis $AB \perp BC$, tähendab nurk ABC on täisnurk ja seega ka kahetahuline nurk on täisnurk, s. o. tasapind α on risti tasapinnaga β.

44. Teoreem. ***Kui kaks tasapinda*** (α ja β, joon. 31) ***on teineteisega risti ja ühele neist*** (β) ***on ehitatud ristsirge*** (AB), ***millel on ühine punkt*** (A) ***teise tasapinnaga*** (α), ***siis see ristsirge asetseb terveni teises tasapinnas*** (α).

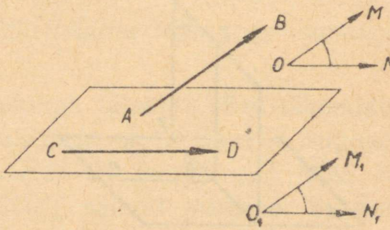
Oletame, et ristsirge AB ei asetse tasapinnas α (nagu joonisel 32). Olgu DE tasapindade α ja β lõikejoon. Ehitame tasapinna α sirge $AC \perp DE$ ja võtame tasapinnal β

sirge $CF \perp DE$. Siis nurk ACF on täisnurk kui kahetahulise täisnurga joonnurk. Seepärast sirge AC, moodustades sirgetega DE ja CF täisnurgad, on risti tasapinnaga β. Meil on siis ühest ja samast punktist A tasapinnale β juhitud kaks ristsirget — AB ja AC. Et see on võimatu (§ 36), siis oletus on vale, tähendab ristsirge AB asetseb tasapinnal α (§ 36).

45. Järeldus. *Kui kaks tasapinda* (α ja β, joon. 33) *on risti kolmanda tasapinnaga* (γ), *siis ka nende lõikejoon on risti kolmanda tasapinnaga.*



Joon. 33.



Joon. 34.

Tõesti, kui tasapindade α ja β lõikejoone mingist punktist A ehitada ristsirge tasapinnale γ, siis see ristsirge asetseb eelmise teoreemi põhjal tasapinnal β ja ka tasapinnal α, tähendab ta ühtib sirgega AB.

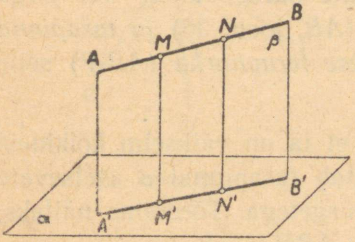
Kahe kiivsirge vaheline nurk.

46. Definitsioon. Nurgaks kahe **kiivsirge** (AB ja CD, joon. 34) vahel, mille asukoht ja suund on antud, nimetatakse niisugust nurka (MON), mis tekib sel teel, et ruumis vabalt võetud punktist (O) ehitame antud kiivsirgetega (AB ja CD) vastavalt paralleelsed ja samasuunalised kiired (OM ja ON).

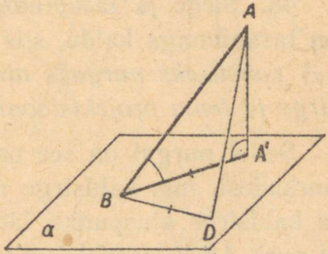
Selle nurga suurus ei olene punkti O asukohast, sest kui näidatud viisil ehitame nurga $M_1O_1N_1$ tipuga mingis punktis O_1, siis $\angle MON = \angle M_1O_1N_1$, sest neil nurkadel on vastavalt paralleelsed ja samasuunalised haarad.

Nurk sirge ja tasapinna vahel.

47. Punkti ja sirgjoone projektsioon tasapinnal. Ütlesime varem (§ 25), et kui ühest punktist on tasapinnale ehitatud ristlõik ja kaldlõik, siis selle kaldlõigu projektsiooniks tasapinnal nimetatakse lõiku, mis ühendab ristlõigu ja kaldlõigu aluspunkte. Nüüd anname projektsiooni jaoks üldisema definitsiooni.



Joon. 35.



Joon. 36.

1) *Mingi punkti projektsiooniks* (ka rist- ehk normaalprojektsiooniks) *antud tasapinnal* (näiteks punkti M projektsiooniks tasapinnal α, joon. 35) *nimetatakse punktist tasapinnani juhitud ristlõigu aluspunkti* (M').

2) *Mingi joone projektsiooniks tasapinnal nimetatakse selle joone punktide projektsioonidest koosnevat joont.*

Erijuhul, kui projitseeritav joon on s i r g e (näiteks AB, joon. 35), mis ei ole risti tasapinnaga (α), siis ka tema projektsioon sellele tasapinnale on s i r g e. Tõepoolest kui võtame tasapinna β läbi sirge AB ja läbi ristsirge MM', mis on juhitud projektsioonitasapinnale sirge AB mingist punktist M, siis see tasapind peab olema risti tasapinnaga α; seepärast sirge AB mistahes punktist (näiteks punktist N) tasapinnale α ehitatud ristsirge peab asetsema tasapinnas β (§ 44), järelikult sirge AB iga punkti projektsioon peab asetsema sirgjoonel $A'B'$, kus lõikuvad tasapinnad α ja β. Ümberpöördult: sirge $A'B'$ iga punkt on sirge AB mingi punkti projektsiooniks, sest sirge $A'B'$ mistahes punktist juhitud ristsirge asetseb tasapinnas β ja lõikub järelikult sirgega AB. Seega sirge $A'B'$ on antud sirge AB punktide projektsioonidest koosnev joon, järelikult tema projektsioon.

Lühiduse pärast ütleme «normaalprojektsiooni» asemel lihtsalt «projektsioon».

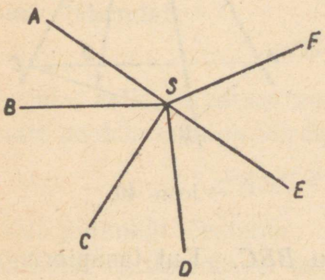
48. Sirge ja tasapinna vaheline nurk. Juhul, kui sirge on tasapinnaga kaldu, siis *sirge* (AB, joon. 36) *ja tasapinna* (α) *vaheliseks nurgaks nimetatakse teravnurka* (ABA') selle *sirge ja tema projektsiooni vahel.*

Sellel nurgal on see omadus, et ta on väikseim kõikidest nurkadest, mis kaldsirge moodustab tasapinnal α asetsevate ja kaldsirge aluspunkti läbivate sirgetega. Tõestame näiteks, et nurk ABA' on väiksem kui nurk ABD.

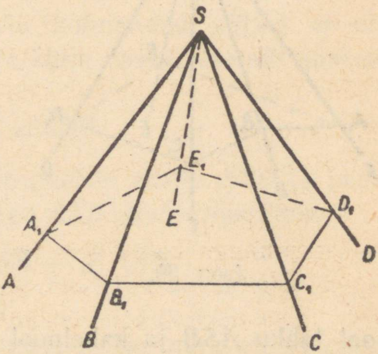
Selleks võtame lõigu $BD = BA'$ ja ühendame punkti D punktiga A. Kolmnurga ABA' kaks külge on kolmnurga ABD kahe küljega vastavalt võrdsed, kuid kolmandad küljed ei ole võrdsed, nimelt $AD > AA'$ (§ 26). Seetõttu nurk ABD on nurgast ABA' suurem.

Ruumnurgad.

49. Definitsioonid. Võtame nurgad (joon. 37): ASB, BSC, $CSD, \ldots$, mis on paigutatud järgemööda üksteise külge nii, et nad asetsevad ühes tasapinnas ja et neil on ühine tipp S. Pöörame nurga ASB tasapinda ümber haara SB nii, et see tasapind moodustaks tasapinnaga BSC mingi kahetahulise nurga. Seejärel, muutmata saadud kahetahulist nurka, pöörame viimast ümber sirge SC nii, et tasapind BSC moodustaks tasapinnaga CSD mingi kahetahulise nurga. Jätkame säärast järk-järgulist pööramist iga ühise haara ümber. Kui seejuures viimane haar SF ühtib esimese haaraga SA, siis tekib kujund (joon. 38), mida nimetatakse **ruumnurgaks.**



Joon. 37.

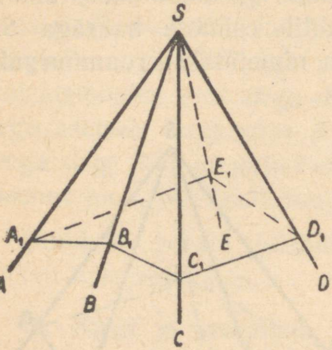


Joon. 38.

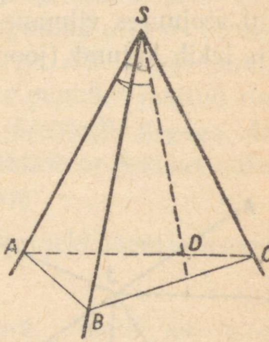
Nurki ASB, BSC,... nimetatakse ruumnurga **tasanurkadeks** ehk **tahkudeks,** haarasid SA, SB,... nimetatakse **servadeks,** ning ühist tippu S nimetatakse ruumnurga **tipuks.** Ruumnurga iga serv on ühtlasi ühe kahetahulise nurga servaks, seepärast on ruumnurgal niimitu kahetahulist nurka ja niimitu tasanurka, kuimitu serva tal on. Ruumnurga väikseim tahkude arv on kolm; niisugust nurka nimetatakse **kolmetahuliseks** nurgaks. Ruumnurgad võivad olla neljatahulised, viietahulised jne.

Ruumnurka tähistatakse kas tipu juures oleva ühe tähega S või tähtede reaga $SABCDE$, millest esimene tähistab tippu, ning teised — järjestikku asetsevate servade punkte.

Ruumnurka nimetataks **kumeraks**, kui ta asetseb terveni ühelpool iga tahu tasapinda. Selline on näiteks nurk, mis on kujutatud joonisel 38. Kuid ruumnurka, mis on kujutatud joonisel 39, ei või nimetada kumeraks, sest ta asetseb kahel-



Joon. 39.



Joon. 40.

pool tahku ASB ja kahelpool tahku BSC. Kui tasapinnaga lõigata mitmetahulise nurga kõiki tahke, siis tekib hulknurk $(A_1B_1C_1D_1E_1)$. Kumeras mitmetahulises nurgas on ka see hulknurk kumer.

Meie käsitleme ainult kumeraid mitmetahulisi nurki.

50. Teoreem. ***Kolmetahulises nurgas on iga tasanurk väiksem kui teiste tasanurkade summa.***

Olgu kolmetahulises nurgas $SABC$ (joon. 40) tasanurkadest suurim nurk ASC. Paigutame sellele nurgale nurga ASD, mis on võrdne nurgaga ASB, ja võtame mingi sirge AC, mis lõikab sirget SD mingis punktis D. Võtame lõigu $SB = SD$. Ühendades punktid B ja A teineteisega, saame kolmnurga ABC, milles

$$AD + DC < AB + BC.$$

Kolmnurgad ASD ja ASB on kongruentsed, sest neil on üks paar võrdseid nurki vastavalt võrdsete külgede vahel; järelikult

$$AD = AB.$$

Seega kui ülaltoodud võrratuses ära jätta võrdsed liikmed AD ja AB, siis saame, et

$$DC < BC.$$

Nüüd näeme, et kolmnurga SCD kaks külge on võrdsed kolmnurga SCB kahe küljega ja kolmandad küljed ei ole võrdsed; säärasel juhul suurema külje vastas asetseb suurem nurk, tähendab

$$\angle CSD < \angle CSB.$$

Lisades selle võrratuse vasakule poolele nurga ASD ja paremale poolele temaga võrdse nurga ASB saame võrratuse

$$\angle ASC < \angle CSB + \angle ASB,$$

mida pidimegi tõestama.

Meie tõestasime, et isegi s u u r i m tasanurk on väiksem, kui teiste tasanurkade summa.

Seega teoreem on tõestatud iga tasanurga kohta.

J ä r e l d u s. Lahutades viimase võrratuse mõlemast poolest kord nurga ASB, kord nurga CSB, saame, et

$$\angle ASC - \angle ASB < \angle CSB$$

ja

$$\angle ASC - \angle CSB < \angle ASB.$$

Lugedes neid võrratusi paremalt vasakule, ning pidades veel silmas, et ka nurk ASC kolmest suurimana on suurem kui teiste nurkade vahe, jõuame järeldusele, et

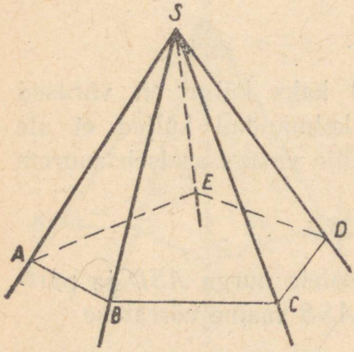
k o l m e t a h u l i s e s n u r g a s o n i g a t a s a n u r k s u u r e m k u i t e i s t e t a s a n u r k a d e v a h e.

X 51. T e o r e e m. ***Kumera mitmetahulise nurga tasanurkade summa on väiksem kui*** 2π.

Lõikame kumera nurga $SABCDE$ (joon. 41) tahke mingi tasapinnaga; lõikes saame kumera hulknurga $ABCDE$.

Rakendades eelmise paragrahvi teoreemi igale kolmetahulisele nurgale, mille tipud asetsevad punktides B, C, D, E ja A, saame et

$$\angle ABC < \angle ABS + \angle SBC;$$
$$\angle BCD < \angle BCS + \angle SCD;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\angle EAB < \angle EAS + \angle SAB.$$



Joon. 41.

Liidame need võrratused liikmeti. Vasakul poolel saame siis hulknurga $ABCDE$ kõikide nurkade summa, mille suurus on $(n—2)\pi$, ning paremal poolel — kolmnurkade ABS, SBC, ... nurkade summa ilma nende nurkadeta, mis asetsevad tipu S juures. Tähistanud nende viimaste nurkade summa x, saame liitmisel:

$$(n-2)\pi < n\pi - x$$

ehk

$$n\pi - 2\pi < n\pi - x.$$

Et vahedel $n\pi - 2\pi$ ja $n\pi - x$ vähendatavad on võrdsed, siis selleks, et esimene vahe oleks teisest väiksem, peab lahutatav 2π olema lahutatavast x suurem, tähendab

$$2\pi > x,$$

s. o.

$$x < 2\pi.$$

Kolmetahuliste nurkade võrdsuse lihtsaimad juhud.

52. Teoreemid. ***Kolmetahulised nurgad on võrdsed, kui neil on***

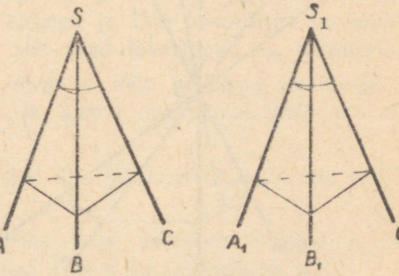
1) *üks paar võrdseid kahetahulisi nurki vastavalt võrdsete ja ühteviisi asetsevate tasanurkade vahel või*

2) *üks paar võrdseid tasanurki vastavalt võrdsete ja ühteviisi asetsevate kahetahuliste nurkade vahel.*

1) Olgu S ja S_1 kaks kolmetahulist nurka (joon. 42), milledel

$$\angle ASB = \angle A_1S_1B_1,$$
$$\angle ASC = \angle A_1S_1C_1$$

(seejuures need võrdsed nurgad asetsevad ühteviisi) ning kahetahuline nurk AS võrdub kahetahulise nurgaga A_1S_1. Paigutame nurga S_1 nurga S sisse nii, et ühtiksid tipud S_1 ja S, servad S_1A_1 ja SA ning tahud $A_1S_1B_1$ ja ASB. Siis serv S_1B_1 satub servale SB (tasanurkade $A_1S_1B_1$ ja ASB võrdsuse tõttu), tahk $A_1S_1C_1$ ühtib tahuga ASC (kahetahuliste nurkade võrdsuse tõttu) ning serv S_1C_1 ühtib servaga SC (tasanurkade $A_1S_1C_1$ ja ASC võrdsuse tõttu). Seega need kolmetahulised nurgad ühtivad kõigis servades, s. t. nad on võrdsed.

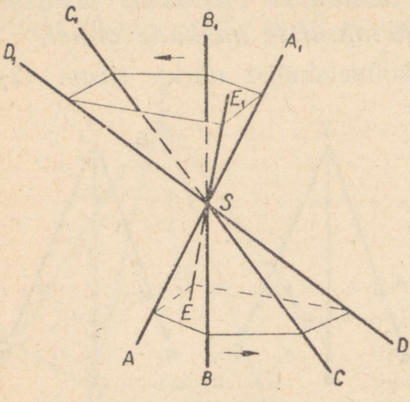


Joon. 42.

2) Teine tunnus tõestatakse nagu esimenegi sissepaigutamise teel.

53. Sümmeetrilised ruumnurgad. Nagu teada, tippnurgad on võrdsed, kui neid nurki moodustavad sirged või tasapinnad. Vaatame, kas see väide on õige ka mitmetahuliste ruumnurkade kohta.

Pikendame mitmetahulise nurga $SABCDE$ kõiki servi tipust S (joon. 43), siis saame teise ruumnurga $SA_1B_1C_1D_1E_1$, mida esimese suhtes võib nimetada **tippnurgaks.** Ei ole raske näha, et nende nurkade tasanurgad on vastavalt võrdsed ja et ka kahetahulised nurgad on vastavalt võrdsed, kuid nii need kui ka teised asetsevad vastupidises järjestuses. Tõesti, kui kujutleme vaatlejat, kes väljaspool kahetahulist nurka vaatab tema tippu, siis servad SA, SB, SC, SD, SE on järjestatud kellaosuti liikumisele vastupidises suunas, kuid vaadates nurka $SA_1B_1C_1D_1E_1$ nähakse servi SA_1, $SB_1 \ldots$ järjestatult kellaosuti liikumise suunas.



Joon. 43.

Vastupidi järjestatud vastavalt võrdsete tasanurkadega ja vastavalt võrdsete kahetahuliste nurkadega ruumnurgad ei saa üldse ühtida sissepaigutamise teel. Sääraseid nurki nimetatakse sümmeetrilisteks (punkti S suhtes). Kujundite sümmeetriast ruumis kõneleme üksikasjalisemalt edaspidi.

Harjutusi.

Tõestada teoreeme:

1. Kaks tasapinda, mis on paralleelsed kolmanda tasapinnaga, on teineteisega paralleelsed.

2. Kõik ühte punkti läbivad antud tasapinnaga paralleelsed sirged asetsevad ühel tasapinnal, mis on paralleelne antud tasapinnaga.

3. Kui tasapind α on paralleelne sirgega a, siis sirge a kõik punktid asetsevad võrdsel kaugusel tasapinnast α.

4. Tasapinna punktid asetsevad võrdsel kaugusel temaga paralleelsest tasapinnast.

5. Kui kahest lõikuvast tasapinnast kumbki läbib ühte kahest paralleelsest sirgest, siis nende tasapindade lõikesirge on paralleelne nende sirgetega.

6. Kui sirge a on paralleelne tasapinnal α asetseva sirgega b, siis iga tasapind, mis läbib sirget a, lõikub tasapinnaga α kas mööda sirgega b paralleelset sirget või mööda sirget b.

7. Kui sirge a on paralleelne tasapinnaga α, siis iga sirge, mis läbib tasapinnal α asetsevat punkti ja on paralleelne sirgega a, asetseb tasapinnal α.

8. Kui on antud kaks kiivsirget a ja b ning läbi esimese sirge on juhitud tasapind rööbiti teise sirgega ja läbi teise sirge on juhitud tasapind rööbiti esimese sirgega, siis need tasapinnad on paralleelsed.

9. Kõik sirged, mis läbivad sirge a ühte ja sama punkti ja on risti sirgega a, asetsevad ühel ja samal tasapinnal, mis on risti sirgega a.

10. Kui tasapind ja sirge on risti ühe ja sama sirgega, siis nad on teineteisega paralleelsed.

11. Kui tasapinnaga α paralleelne sirge a lõikub sirgega b, mis on risti selle tasapinnaga, siis sirged a ja b on teineteisega risti.

Konstruktsioonülesandeid.

12. Läbi antud punkti ehitada kahe antud sirgega a ja b paralleelne tasapind.

13. Läbi antud punkti ehitada antud tasapinnaga paralleelne sirge, mis lõikub antud sirgega.

14. Ehitada sirge, mis lõikub kahe antud sirgega ja on paralleelne kolmanda antud sirgega.

15. Ehitada mingi sirge, mis lõikab kahte antud sirget ja on paralleelne antud tasapinnaga (määramatu ülesanne).

16. Ehitada mingi sirge, mis lõikab kolme antud sirget (määramatu ülesanne).

17. Läbi antud punkti ehitada sirge risti kahe antud kiivsirgega.

18. Läbi antud sirge ehitada tasapind risti antud tasapinnaga.

19. Antud on tasapind α ja sirge $a \parallel \alpha$. Ehitada läbi sirge a tasapind, mis lõikub tasapinnaga α ja moodustab temaga antud nurga.

20. Antud on tasapind α ning ühelpool seda tasapinda punktid A ja B. Leida tasapinnal α punkt C nii, et summa $AC + CB$ oleks võimalikult väike.

Teine peatükk.

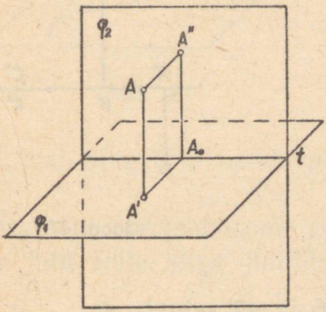
PUNKTI, LÕIGU JA KUJUNDI RIST-PROJEKTSIOONID.

54. Punkti kujutamine tema projektsioonide abil kahel tasapinnal. Kujutleme kahte projektsioonitasapinda, horisontaalset ehk põhitasapinda φ_1 ja vertikaalset ehk püsttasapinda φ_2, mis lõikuvad täisnurgi mööda sirget t, mida nimetame projektsiooniteljeks (joon. 44). Need tasapinnad moodustavad neli kahetahulist nurka, milledest lihtsuse pärast vaatleme ainult ühte, nimelt eesmist ülal. Oletame, et selle nurga sisepiirkonnas asetseb mingi punkt A. Juhime sellest punktist ristlõigud tasapindadeni φ_1 ja φ_2. Siis saame nendel tasapindadel punkti A projektsioonid: A' on **põhiprojektsioon,** A'' — **püstprojektsioon** (neid nimetatakse **normaal-** ehk **ristprojektsioonideks,** sest nad tekivad ristsirgete abil).

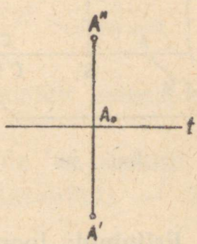
Projektsioone tähistatakse harilikult sama tähega, millega on tähistatud projitseeritav punkt, lisandades tähele märgikesed $'$ (prim) ja $''$ (sekund) vastavalt esimese ja teise projektsiooni puhul. Ristlõike, mille abil saadakse punkti projektsioonid, nimetatakse **projitseerijateks** ehk kujutamiskiirteks: AA' on ülalt-projitseerija ning AA'' on eestprojitseerija.

Projitseerijaid läbiv tasapind on risti tasapinnaga φ_1 ja tasapinnaga φ_2 (§ 43), järelikult ka risti teljega t (§ 45) ja seepärast on lõigud $A'A_0$ ja $A''A_0$, mida mööda see tasapind lõikub tasapindadega φ_1 ja φ_2, risti teljega t; seega nad moodustavad tasapindade φ_1 ja φ_2 vahelise kahetahulise nurga joonnurga, ning et kahetahuline nurk on täisnurk, siis ka tema joonnurk on täisnurk. Nii on nelinurk $AA'A_0A''$ ristkülik, mille tasapind on risti teljega t.

Seda silmas pidades pöörame rõhtlehe φ_1 telje t ümber 90° võrra allapoole; siis ühtib ta alumise püstlehega, moodustades ülemise püstlehega ühise vertikaalse tasapinna. See-



Joon. 44.

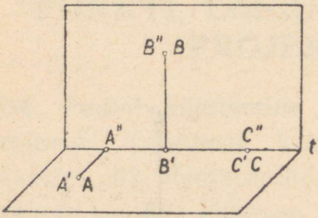


Joon. 45.

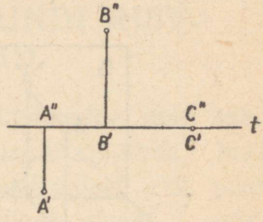
juures punktid A_0 ja A'' jäävad paigale, kuid punkt A' saab asukoha allpool telge t ning tuleb ristlõigu $A''A_0$ pikendusel kaugusele A_0A', mis on võrdne lõiguga AA''. Saame tasapinnale laotatud joonise (joon. 45), mida edaspidi nimetame **epüüriks;** see joonis koosneb sirgest t, mis kujutab projektsioonitelge, ja kahest punktist, mis asetsevad telje t ristjoonel; alumine punkt on punkti A põhiprojektsioon ja ülemine on püstprojektsioon.

Igale kahetahulise nurga (joon. 44) sisepiirkonnas võetud punktile A vastab joonisel muidugi kaks täiesti kindlaks määratud punkti A' ja A'', mis asetsevad telje t ristsirgel. Ümberpöördult, igale kahele punktile A' ja A'' joonisel, mis asetsevad telje t ristsirgel (punkt A' allpool ja punkt A'' ülalpool telge t), vastab üks kindlaks määratud punkt A kahetahulise nurga sisepiirkonnas.

Et saada seda punkti, peame kujutlema, et joonise alumine pool on pööratud telje t ümber 90° võrra ülespoole, s. o. tagasi oma endisesse asendisse, ning et seejärel on punktidest A' ja A'' võetud kahetahulist nurka moodustavate tasapindade ristsirged; nende sirgete lõikepunkt ongi punkt A.



Joon. 46.



Joon. 47.

55. **Erijuhud:** Joonistest 46 ja 47 selgub, et

1) kui punkt A asetseb põhitasapinnal, siis tema püstprojektsioon A'' asetseb teljel t ja põhiprojektsioon ühtib punkti endaga;

2) kui punkt B asetseb püsttasapinnal, siis tema põhiprojektsioon asetseb teljel t ja püstprojektsioon ühtib punkti endaga;

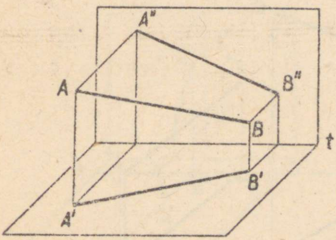
3) kui punkt C asetseb teljel t, siis mõlemad tema projektsioonid ühtivad punkti endaga.

56. **Sirglõigu kujutamine.** Meie nägime juba (§ 47), et kui projitseeritav joon on s i r g e, siis ka tema projektsioon on s i r g e.

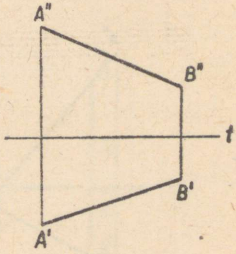
Tähendab sirglõiku, mis ühendab punkte A ja B (joon. 48), kujutavad epüüril (joon. 49) lõigud $A'B'$ ja

$A''B''$, milledest esimene on lõigu AB põhiprojektsioon ja teine on püstprojektsioon.

Et saada sirgjoone projektsiooni mingil tasapinnal, selleks on vaja leida tema kahe punkti projektsioonid sellel



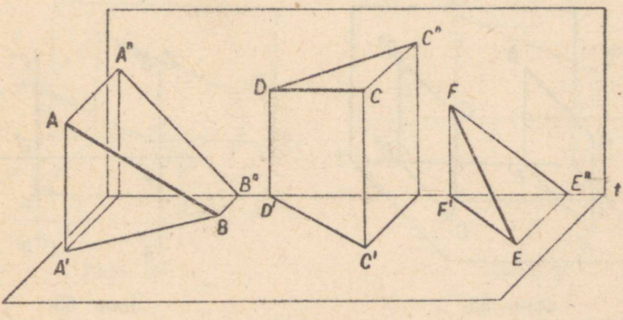
Joon. 48.



Joon. 49.

tasapinnal ning läbi nende projektsioonide joonestada sirgjoon.

Sirgjoone projektsiooni võib saada ka teisiti: nimelt võime läbi selle sirge juhtida kaks tasapinda — ühe risti

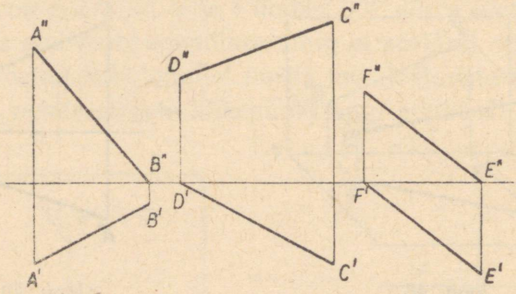


Joon. 50.

põhitasapinnaga, teise risti püsttasapinnaga. Neid tasapindu nimetame **projitseerivateks tasapindadeks.**

Nende tasapindade lõikumine projektsioonipindadega annab lõigu AB projektsioonid $A'B'$ ja $A''B''$.

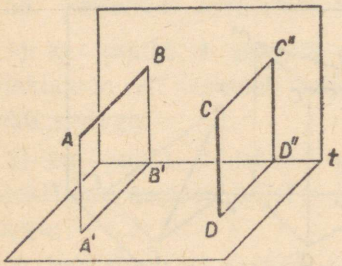
Märgime siinjuures, et kui sirglõik on tähistatud tähtedega *AB*, siis tähistatakse tema projektsioone tähtedega *A'B'* (põhiprojektsioon) ja *A''B''* (püstprojektsioon); kui sirge on tähistatud ühe tähega, näiteks tähega *k*, siis tema



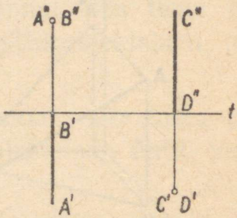
Joon. 51.

projektsioone tähistatakse ka ühe tähega: *k'* (põhiprojektsioon) ja *k''* (püstprojektsioon).

57. E r i j u h u d. 1) Lõigu *AB* üks otspunkt asetseb põhitasapinnal.



Joon. 52.



Joon. 53.

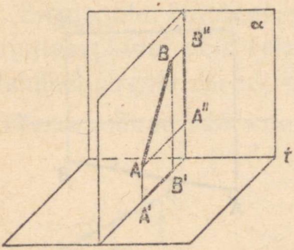
2) Lõigu *CD* üks otspunkt asetseb püsttasapinnal.

3) Lõik *EF* toetub oma otspunktidega projektsioonitasapindadele.

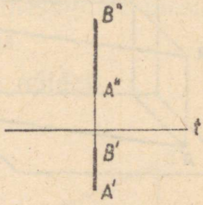
Need kolm juhtu on kujutatud näitlikult joonisel 50, ning projektsioonidena epüüril joonisel 51.

4) Lõik AB on risti püsttasapinnaga ning toetub viimasele (joon. 52 ja 53).

5) Lõik CD on risti põhitasapinnaga ning toetub viimasele (joon. 52 ja 53).

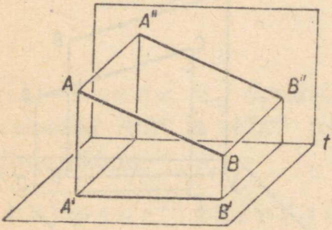


Joon. 54.

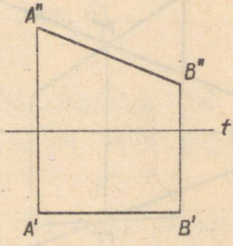


Joon. 55.

6) Lõik AB asetseb mingis tasapinnas α, mis on risti teljega t. Siis mõlemad projitseerivad tasapinnad ühtivad tasapinnaga α ja seetõttu lõigud $A'B'$ ja $A''B''$ asetsevad epüüril telje t ühel ja samal ristsirgel (joon. 54 ja 55).



Joon. 56.

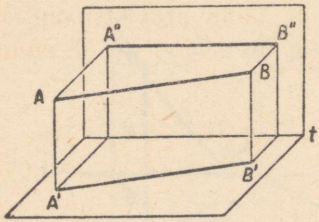


Joon. 57.

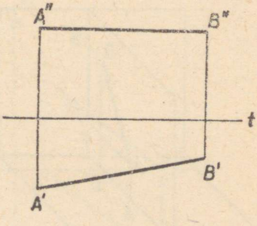
7) Lõik AB on paralleelne püsttasapinnaga. Siis tema põhiprojektsioon on paralleelne teljega t (joon. 56 ja 57) ja püstprojektsioon on võrdne ning paralleelne lõiguga AB.

8) Lõik AB on paralleelne põhitasapinnaga (joon. 58 ja 59); tema püstprojektsioon on siis paralleelne teljega t ja põhiprojektsioon on võrdne ning paralleelne lõigu AB endaga.

58. Lõikuvate sirgete projektsioonid. On ilmne, et kui kaks sirget (k ja l) lõikuvad, siis lõikuvad ka nende ühenimelised projektsioonid (joon. 60), kusjuures lõikepunktid

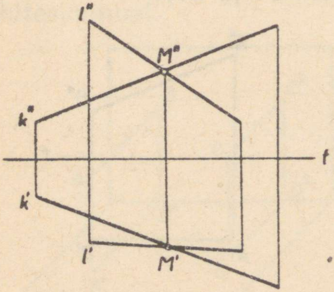


Joon. 58.

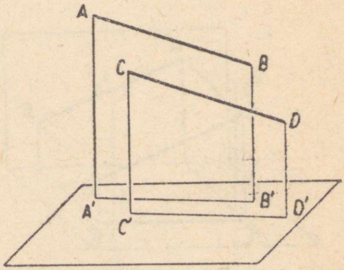


Joon. 59.

M' ja M'' asetsevad telje t ühel ja samal ristsirgel. Ümberpöördult, kui kahe sirge ühenimelised projektsioonid lõikuvad, kusjuures lõikepunktid asetsevad telje t ühel ja samal



Joon. 60.



Joon. 61.

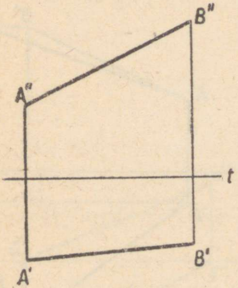
ristsirgel, siis lõikuvad ka need sirged ise, sest projektsioonide lõikepunktidega määratud punkt (M', M'') kuulub mõlemale sirgele.

59. Paralleelsete sirgete projektsioonid on paralleelsed. Tõepoolest, kui $AB \| CD$ (joon. 61), siis on nurkade BAA' ja

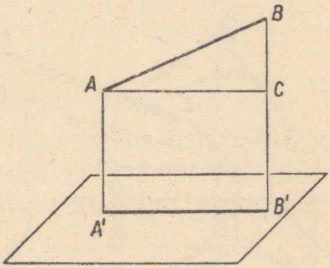
DCC' haarad paralleelsed ja seega on ka projitseerivad tasapinnad paralleelsed (§ 15), kuid paralleelsed tasapinnad lõikuvad kolmanda tasapinnaga (φ) mööda paralleelseid sirgeid (*A'B'* ja *C'D'*) (§ 16).

60. Sirgjoonte kujutamist nende kahe projektsiooni abil kahel risttasapinnal võib rakendada mitmesuguste ülesannete lahendamisel sirgete asendi kohta ruumis.

Vaatleme mõnda sääraste ülesannete näidet.



Joon. 62.



Joon. 63.

Ülesanne 1. *Epüüril on antud sirglõigu AB projektsioonid A'B'* ja *A"B"* (joon. 62). Leida selle sirglõigu tõeline pikkus.

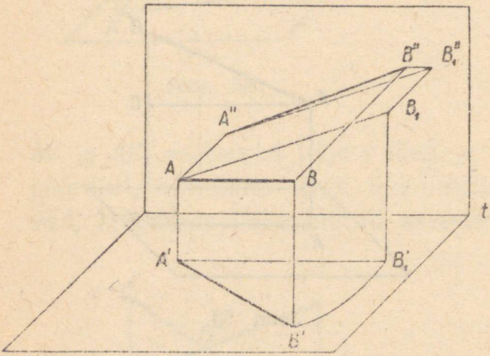
Esimene lahendamisviis. Et oleks parem ette kujutada sirglõigu asendit ruumis, võtame sirglõigu *AB* ja tema põhiprojektsiooni *A'B'* näitliku kujutise (joon. 63), s. o. niisuguse kujutise, mida kasutasime esimeses peatükis.

Nelinurk *ABB'A'* on täisnurkne trapets täisnurkadega punktide *A'* ja *B'* juures. Võttes selles trapetsis küljega *A'B'* paralleelse lõigu *AC* saame täisnurkse kolmnurga *ABC*.

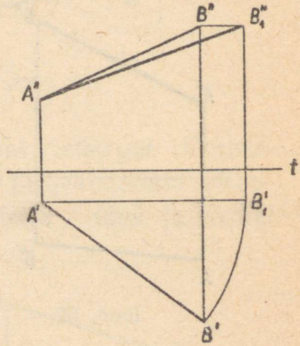
Lõik *AB* on selles kolmnurgas hüpotenuusiks, kaatet *AC*, nagu näha, on võrdne lõigu *AB* põhiprojektsiooniga *A'B'*.

See projektsioon on joonisel antud. Kaatet BC on võrdne lõikude BB' ja AA' vahega.

Lõigud BB' ja AA' on samuti joonisel antud; nad on nimelt võrdsed punktide B'' ja A'' kaugustega teljest t, seega võib nende vahe joonisel leida. Lõikude BB' ja AA' vahe võrdub seega punktide B'' ja A'' ning telje t vaheliste kauguste vahega. Siit järeldub, et lõigu AB loomuliku pikkuse leidmiseks tuleb ehitada täisnurkne kolmnurk, mille üheks kaatetiks on otsitava lõigu põhiprojektsioon $A'B'$ ning tei-



Joon. 64.

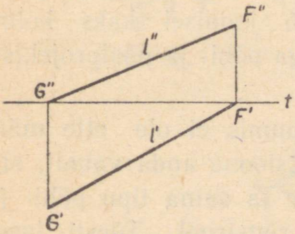


Joon. 65.

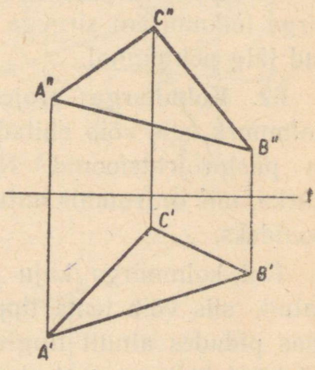
seks kaatetiks on lõik, mis võrdub otsitava lõigu otspunktide püstprojektsioonide A'' ja B'' kauguste vahega teljest t. Selle kolmnurga hüpotenuus on lõigu AB tõeliseks pikkuseks.

T e i n e   v i i s. Kujutleme, et lõik AB ja lõik AA' on teineteisega jäigalt kinnitatud; pöörame lõiku AB sirge AA' ümber seni, kuni ta saab paralleelseks püsttasapinnaga (joon. 64) ja siis tema püstprojektsioon osutubki temaga ühepikkuseks.

Säärasel lõigu AB pööramisel tema projektsioonid $A'B'$ ja $A''B''$ muutuvad, kuid tema kaldenurk lõigu AA' suhtes ei muutu, seega ei muutu ka tema põhiprojektsiooni pikkus (muutub ainult selle siht). Tähendab sellel lõigu pööramisel tema põhiprojektsioon muutub nii, et punkt A' jääb joonisel paigale ja punkt B' liigub ringjoone kaart mööda. Kui lõik AB saab paralleelseks püsttasapinnaga, siis tema põhiprojektsioon saab paralleelseks teljega t. Ka püstprojektsioon $A''B''$ muutub sellel pööramisel, kuid et punkti B kaugus põhitasapinnast jääb endiseks, siis jääb endiseks ka punkti B'' kaugus teljest t. Siit selgub, et punkt B'' liigub mööda telje t paralleeli. Öeldust järeldub, et epüüril võib saada lõigu AB projektsioonid pärast pööramist püstsirge AA' ümber järgmise konstruktsiooni abil (joon. 65): joonestame



Joon. 66.



Joon. 67.

raadiusega $A'B'$ ringjoone kaare keskpunktiga A' ja leiame selle kaare lõikepunkti B'_1 telje t paralleelsirgega, mis läbib punkti A'; läbi B'' joonestame telje t paralleelse sirge lõikumiseni punkti B'_1 läbiva telje t ristsirgega punktis B''_1. Lõigud $A'B'_1$ ja $A''B''_1$ ongi lõigu AB projektsioonid pärast pööramist. Tema püstprojektsioon $A''B''_1$ on seejuures lõigu AB tõeliseks pikkuseks.

61. Ü l e s a n n e 2. Epüüril on antud sirge projektsioonid l' ja l'' (joon. 66). Leida selle sirge lõikepunktid projektsioonipindadega (neid lõikepunkte nimetatakse sirgjoone j ä l g e d e k s projektsioonipindadel).

L a h e n d u s. Antud sirge ja püsttasapinna lõikepunkti põhiprojektsioon asetseb teljel t. Teiselt poolt selle punkti põhiprojektsioon peab asetsema sirgel l'. Seega sirge jälje saamiseks püsttasapinnal pikendame tema põhiprojektsiooni l' lõikumiseni teljega t punktis F'.

Punkt F' on otsitava jälje põhiprojektsioon. Et leida tema püstprojektsiooni, võtame punktist F' telje t ristsirge lõikumiseni sirgega l'' punktis F''. Punkt F'' ongi jälje püstprojektsiooniks, ilmselt ühtib ta jälje endaga. Samal teel leiame ka jälje põhitasapinnal: pikendame sirget l'' lõikumiseni teljega t punktis G'', punktist G'' võtame telje t ristsirge lõikumiseni sirgega l' punktis G'; punkt G' ongi nõutud jälg põhipinnal.

62. Kolmnurga projektsioonid. Kui ruumis on antud kolmnurk, siis võib ehitada tema tippude ja külgede põhi- ja püstprojektsioonid. Niiviisi tekib joonisel kaks kolmnurka, mis on ruumis antud kolmnurga põhi- ja püstprojektsioonideks.

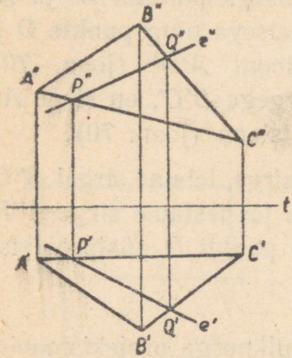
Kui kolmnurga kuju ja asend ruumis ei ole ette määratud, siis võib tema tippude projektsioone anda vabalt, silmas pidades ainult tingimust, et ühe ja sama tipu põhi- ja püstprojektsioon asetseksid telje t ristsirgel. Tõesti tasapinna asend ruumis on täiesti määratud tema kolme punkti asukohaga, mida võib ruumis võtta täiesti vabalt, ainult mitte ühel ja samal sirgel.

Joonisel 67 on esitatud mingi kolmnurga ABC projektsioonid. Kasutades neid projektsioone võib kolmnurga asendi kohta ruumis lahendada mitmesuguseid ülesandeid.

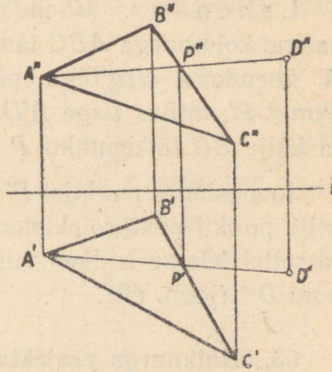
63. Ü l e s a n n e 1. *On antud kolmnurga projektsioonid* $A'B'C'$ ja $A''B''C''$ (joon. 68). *Ehitada epüüril niisuguse sirge püstprojektsioon, mis asetseb selle kolmnurga tasapinnas ja mille põhiprojektsioon on antud.*

L a h e n d u s. Olgu e' sirge põhiprojektsioon, ta lõikub sirgetega $A'C'$ ja $B'C'$ vastavalt punktides P' ja Q'.

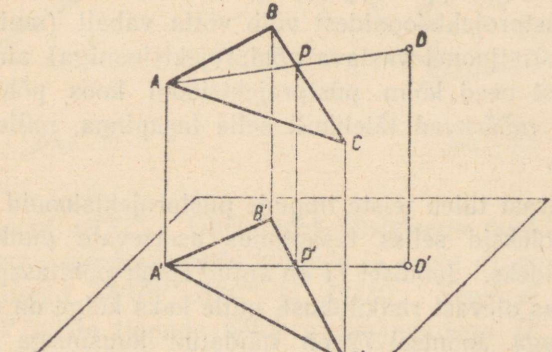
Et see sirge asetseb kolmnurga ABC tasapinnal, siis lõikub ta külgedega AC ja BC nendes punktides, mille põhiprojektsioonideks on P' ja Q'. Nendesamade punktide püstprojektsioonide saamiseks tuleb punktidest P' ja Q' joones-



Joon. 68.



Joon. 69.



Joon. 70.

tada teljele t ristsirged lõikumiseni vastavalt sirgetega $A''C''$ ja $B''C''$ punktides P'' ja Q''. Sirge $P''Q''$ on kolmnurga ABC tasapinnas asetseva otsitava sirge püstprojektsioon.

64. Ülesanne 2. *Epüüril on antud kolmnurga ABC projektsioonid A'B'C'* ja *A''B''C''* (joon. 69). *Peale selle on antud kolmnurga tasapinnal asetseva punkti D põhiprojektsioon D'. Ehitada selle punkti püstprojektsioon.*

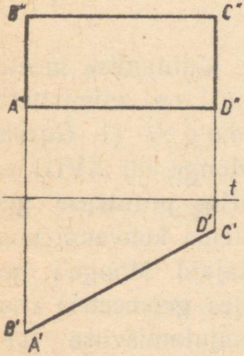
Lahendus. Ühendades teineteisega punktid D' ja A', saame kolmnurga ABC tasapinnas asetseva ning punkte D ja A ühendava sirglõigu põhiprojektsiooni $A'D'$ (joon. 70). Punkt P', milles sirge $A'D'$ lõikub sirgega $B'C'$, on sirge AD ja külje BC lõikepunkti P põhiprojektsioon (joon. 70).

Joonestades punktist P' teljele ristsirge, leiame sirgel $B''C''$ selle punkti püstprojektsiooni P''. Siis joonestame sirge $A''P''$ ja sellel leiame endisel viisil otsitava punkti D püstprojektsiooni D'' (joon. 69).

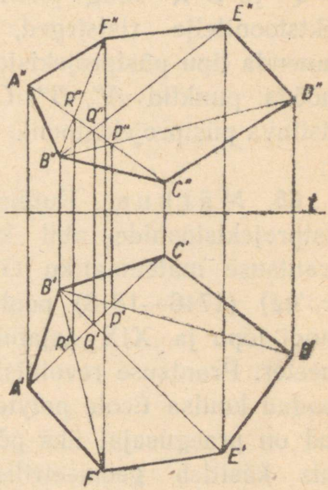
65. Hulknurga projektsioonid. Hulknurga projektsioonide ehitamisel ei saa tippude projektsioone enam vabalt võtta. Kui hulknurga tippude põhiprojektsioonid võtta vabalt, siis nende püstprojektsioonidest võib võtta vabalt (muidugi ühel ja samal ristjoonel vastava põhiprojektsiooniga) ainult kolm. Tõepoolest need kolm püstprojektsiooni koos põhiprojektsioonidega määravad täielikult selle tasapinna, milles asetseb hulknurk.

Seepärast tuleb teiste tippude püstprojektsioonid võtta nii, et nad oleksid selles tasapinnas asetsevate punktide projektsioonideks. Joonisel 71 on antud epüür põhitasapinna risttasapinnas olevast ristkülikust, mille kaks külge on risti põhitasapinnaga. Joonisel 72 on näidatud kuusnurga projektsioonide ehitamine, kusjuures tema tippude põhiprojektsioonid A', B', C', D', E', F' on võetud vabalt.

Püstprojektsioonid A'', B'', C'' on võetud projektsioonitelje ristsirgetel, mis läbivad punkte A', B', C'. Seejuures punkti A'' võib punkti A' läbival telje ristsirgel võtta kus tahes, punkti B'' võib punkti B' läbival telje ristsirgel võtta kus tahes ning punkti C'' võib võtta punkti C' läbival telje ristsirgel kus tahes. Teiste tippude püstprojektsioone võib ehitada § 64 näidatud võtte abil. Ühendades üksteisega punktid A', B' ja C', saame kuusnurga kahe külje põhiprojektsioonid ($A'B'$ ja $B'C'$) ning ühe diagonaali põhi-



Joon. 71.



Joon. 72.

projektsiooni ($A'C'$). Ühendades üksteisega punktid A'', B'' ja C'' saame nende samade külgede ja sama diagonaali püstprojektsioonid ($A''B''$, $B''C''$ ja $A''C''$). Seejärel ühendame punkti B' teiste tippude põhiprojektsioonidega D', E' ja F'. Sirgete $B'D'$, $B'E'$ ja $B'F'$ lõikepunktid sirgega $A'C'$ tähistame vastavalt tähtedega P', Q' ja R'. Joonestades punktidest P', Q' ja R' projektsiooniteljele ristsirged lõikumiseni sirgega $A''C''$, saame punktid P'', Q'' ja R''. Need on püstprojektsioonis kuusnurga kolme diagonaali lõikepunktid neljanda diagonaaliga, mille püstprojektsiooniks on sirge $A''C''$. Nende diagonaalide püstprojektsioonid saame sel teel, et ühendame punktid P'', Q'' ja R'' punktiga B''. Kui nüüd pikendada sirglõiku $B''P''$ ja punktist D' joonestada projektsioonitelje ristsirge kuni lõikumiseni sirgega $B''P''$, siis nende sirgete lõikepunkt D'' ongi kuusnurga neljanda tipu püstprojektsiooniks. Samal viisil, pikendades sirglõike $B''Q''$ ja $B''R''$ ning joonestades punktidest E' ja F' projektsioonitelje ristsirged, leiame kuusnurga viienda ja kuuenda tipu püstprojektsioonid E'' ja F''. Ühendades järgemööda punktid A'', B'', C'', D'', E'', F'', saame kuusnurga otsitava püstprojektsiooni.

66. Märkus. Kujundite ja kehade kujutamise meetod ristprojektsioonide abil kahel tasapinnal on viimistletud prantsuse matemaatiku Gaspard Monge'i (l. *Gaspa'r mo'nž*) (1746—1818) poolt. Gaspard Monge oli XVIII sajandi lõpu ja XIX sajandi alguse suurim prantsuse geomeeter. Prantsuse revolutsiooni ajal oli tema konvendi poolt loodud kuulsa École polytechnique'i asutajaid. Monge'i meetod on praegusajal üks põhilisemaid selles geomeetria osas, mis käsitleb geomeetriliste kehade kujutamisviise tasapinnal ja mida nimetatakse **kujutavaks geomeetriaks.** Monge'i meetodit rakendatakse laialdaselt tehnikas ehituste projektide, hoonete plaanide, masinate osade ja detailide joonestamisel jne.

Selle meetodiga teostatakse joonisel konstruktsioone mõnikord keeruliste reeglite järgi, mida võib kasutada ainult hästi omandades stereomeetria tõdesid ja lauseid. Seepärast kasutatakse geomeetria õpikutes, nagu ka käesolevas raamatus, geomeetriliste kujundite ja kehade kujutamisel lihtsustatud jooniseid.

Need joonised on õpitavate kujundite projektsioonid, kuid mitte kahel, vaid ainult ühel tasapinnal, nimelt joonise tasapinnal.

Nagu kõigest eelnenust järeldub, ei määra üks säärane projektsioon veel ei kujundi asendit ruumis ega ka tema täpseid mõõteid, kuid ta annab selge ülevaate uuritava kujundi kujust. Sellest ülevaatest piisab, et, tugenedes stereomeetria üldistele teoreemidele, tundma õppida geomeetriliste kujundite ja kehade omadusi.

Kolmas peatükk.

HULKTAHUKAD.

I. Rööptahukas ja püramiid.

67. Hulktahukas. Hulktahukaks ehk tahkkehaks nimetatakse tasaste hulknurkadega piiratud keha. Nende hulknurkade külgi nimetatakse **hulktahuka servadeks.** Hulktahukat piiravaid hulknurki nimetatakse tema **tahkudeks.** Ühte punkti koonduvad hulktahuka tahud moodustavad ruumnurga; sääraste ruumnurkade tippe nimetatakse **hulktahuka tippudeks.** Sirglõike, mis ühendavad mitte ühel tahul asetsevaid tippe, nimetatakse **hulktahuka diagonaalideks.**

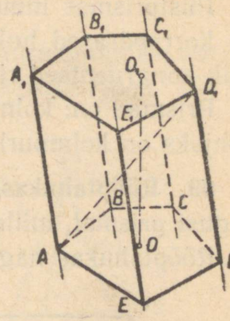
Meie käsitleme ainult kumeraid hulktahukaid, s. o. sääraseid, mis terveni asetsevad ühel pool iga tema tahu tasapinda.

Hulktahuka väikseim tahkude arv on neli; niisugune hulktahukas tekib kolmetahulise nurga lõikamisel mingi tasapinnaga.

68. Prisma. Prismaks nimetatakse niisugust hulktahukat, mille kaks tahku on võrdsete ja vastavalt paralleelsete külgedega hulknurgad ning kõik teised tahud on rööpkülikud.

Selleks et näidata, et niisugune hulktahukas on võimalik, võtame mingi hulknurga *ABCDE* (joon. 73) ja ehitame tema tippudest rea väljaspool tema tasapinda asetsevaid rööpsirgeid.

Võtnud seejärel ühel rööpsirgel vabalt punkti A_1, juhime läbi selle punkti tasapinnaga $ABCDE$ paralleelse tasapinna: läbi iga paari lähestikku asetsevate rööpsirgete paigutame samuti tasapinnad. Kõik need tasapinnad määravad lõikumisel hulktahuka $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$, mis vastab prisma definitsioonile. Tõepoolest, paralleelsed tasapinnad $ABCDE$ ja $A_1B_1C_1D_1E_1$ lõikuvad külgtasapindadega mööda paralleelseid sirgeid (§ 16); seepärast nelinurgad AA_1E_1E, EE_1D_1D jne. on rööpkülikud. Teiselt poolt on hulknurkade $ABCDE$ ja $A_1B_1C_1D_1E_1$ küljed vastavalt võrdsed (kui rööpkülikute vastasküljed) ja nende nurgad on vastavalt võrdsed (kui paralleelsete ja ühtviisi suunatud haaradega nurgad); seega need hulknurgad on kongruentsed.



Joon. 73.

Paralleelsetes tasapindades asetsevaid hulknurki $ABCDE$ ja $A_1B_1C_1D_1E_1$ nimetatakse prisma **põhjadeks,** ühe põhja mingist punktist teise põhja tasapinnani ehitatud ristlõiku OO_1 nimetatakse prisma **kõrguseks.** Rööpkülikuid AA_1B_1B, BB_1C_1C jne. nimetatakse prisma **külgtahkudeks** ja nende külgi AA_1, BB_1 jne., mis ühendavad põhjade vastavaid tippe, nimetatakse **külgservadeks.** Prisma kõik külgservad on võrdsed kui rööpsirgete lõigud paralleelsete tasapindade vahel.

Mitte ühel tahul asetsevat kahte tippu ühendavat sirglõiku nimetatakse prisma **diagonaaliks.** Säärane on näiteks sirglõik AD_1 (joon. 73).

Kahte mitte ühele tahule kuuluvat külgserva (näiteks servi AA_1 ja CC_1, joon. 73) läbivat tasapinda nimetatakse **diagonaaltasapinnaks.**

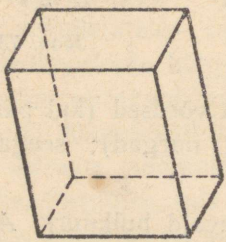
Prismat nimetatakse kas **püstprismaks** või **kaldprismaks** sedamööda, kas tema külgservad on põhjadega risti või kaldu. Püstprisma külgtahud on ristkülikud. Püstprisma kõrguseks võib lugeda tema külgserva.

Püstprismat nimetatakse **korrapäraseks,** kui tema põhjad on korrapärased hulknurgad. Säärase prisma külgtahud on kõik kongruentsed ristkülikud.

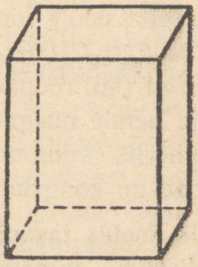
Prismad on: kolmnurksed, nelinurksed jne. sedamööda, kas põhjaks on kolmnurk, nelinurk jne.

69. Rööptahukas. Rööptahukaks nimetatakse niisugust prismat, mille põhjadeks on rööpkülikud (joon. 74).

Rööptahukas nagu iga prisma võib olla kas püströöptahu-



Joon. 74.



Joon. 75.

kas või kaldrööptahukas. Püströöptahukat, mille põhi on ristkülik, nimetatakse **risttahukaks** (joon. 75).

Nendest definitsioonidest järeldub:

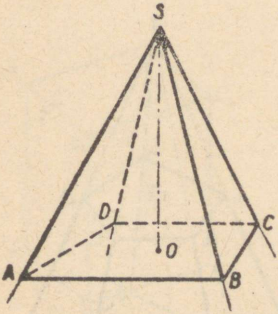
1) rööptahuka kõik kuus tahku on rööpkülikud;
2) püströöptahuka neli külgtahku on ristkülikud ja kaks põhitahku on rööpkülikud;
3) risttahuka kõik kuus tahku on ristkülikud.

Ühest tipust lähtuvat kolme risttahuka serva nimetatakse tema mõõdeteks, ühte neist võib vaadelda pikkusena, teist — laiusena ja kolmandat — kõrgusena.

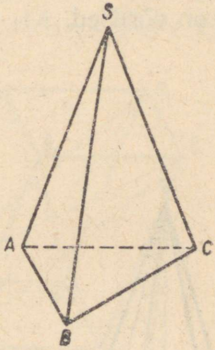
Võrdsete mõõdetega risttahukat nimetatakse **kuubiks.** Kuubi kõik tahud on ruudud.

70. Püramiid. Püramiidiks nimetatakse niisugust hulktahukat, mille üks — põhjaks nimetatav — tahk on hulknurk ja kõik teised — külgtahkudeks nimetatavad — tahud on ühise tipuga kolmnurgad.

Et saada püramiidi, selleks võib mingi mitmetahulise nurga S läbi lõigata vabalt võetud tasapinnaga $ABCD$ (joon. 76) ja võtta äralõigatud osa $SABCD$.



Joon. 76.



Joon. 77.

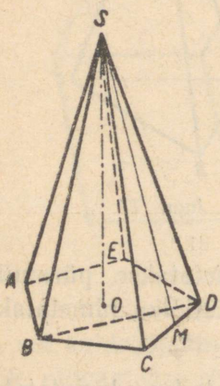
Külgkolmnurkade ühist tippu S nimetatakse püramiidi **tipuks,** ja tipust põhitasapinnani võetud ristlõiku nimetatakse tema **kõrguseks.**

Harilikult, püramiidi tähtedega tähistades, kirjutatakse esikohale see täht, mis on tipu tähiseks, näiteks $SABCD$ (joon. 76).

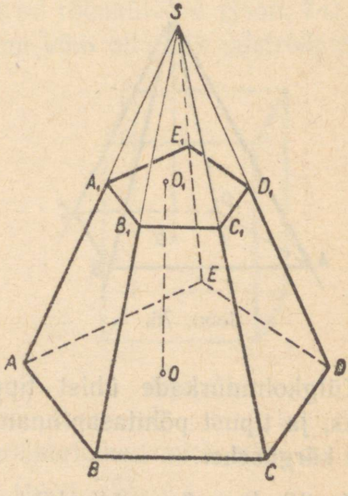
Püramiidi tippu ja põhja mingit diagonaali (näiteks BD joonisel 78) läbivat tasapinda nimetatakse **diagonaaltasapinnaks.**

Püramiidid on: kolmnurksed, nelinurksed jne. sedamööda, mis on põhjaks: kolmnurk, nelinurk jne. Kolmnurkset püramiidi (joon. 77) nimetatakse **nelitahukaks** ehk **tetraeedriks;** tetraeedri kõik neli tahku on kolmnurgad.

Püramiidi nimetatakse **korrapäraseks** (joon. 78), kui tema põhjaks on korrapärane hulknurk ja tema kõrguse aluspunktiks on selle hulknurga keskpunkt. Korrapärase püramiidi külgservad on kõik võrdsed (kui võrdsete projektsioonidega kaldlõigud). Seepärast on korrapärase püramiidi kõik külgtahud kongruentsed võrdhaarsed kolmnurgad. Iga niisuguse kolmnurga kõrgust SM (joon. 78) nimetatakse püramiidi **apoteemiks.** Korrapärase püramiidi apoteemid on võrdsed.



Joon. 78.



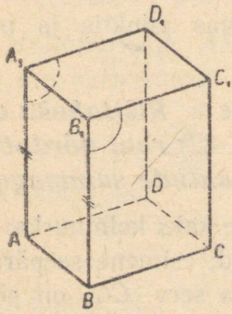
Joon. 79.

71. Tüvipüramiid. Põhja ($ABCDE$) ja põhjaga paralleelse lõiketasapinna ($A_1B_1C_1D_1E_1$) vahelist püramiidi osa nimetatakse **tüvipüramiidiks** (joon. 79). Paralleelseid tahke nimetatakse tüvipüramiidi **põhjadeks,** põhja $A_1B_1C_1D_1E_1$ mingist punktist O_1 teise põhjani võetud ristlõiku OO_1 nimetatakse tüvipüramiidi **kõrguseks.** Tüvipüramiidi nimetatakse **korrapäraseks,** kui ta moodustab osa korrapärasest püramiidist.

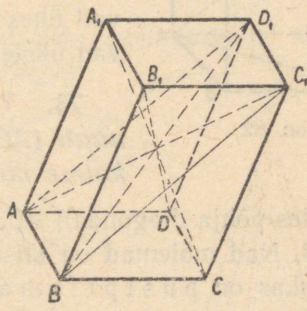
72. Teoreemid. 1) ***Rööptahuka vastastahud on kongruentsed ja paralleelsed.***

2) ***Rööptahuka kõik neli diagonaali lõikuvad ühes ja samas punktis ja poolitavad üksteist selles punktis.***

1) Tahud BB_1C_1C ja AA_1D_1D (joon. 80) on paralleelsed, sest ühe tahu kaks lõikuvat sirget BB_1 ja B_1C_1 on rööbiti teise tahu kahe lõikuva sirgega AA_1 ja A_1D_1 (§ 15);



Joon. 80.



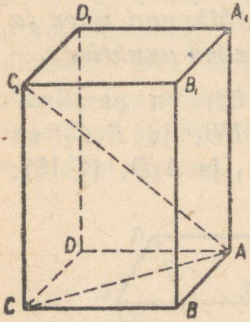
Joon. 81.

need tahud on kongruentsed, sest $B_1C_1 = A_1D_1$, $B_1B = A_1A$ (kui rööpkülikute vastasküljed) ja

$$\angle BB_1C_1 = \angle AA_1D_1.$$

2) Võtame mingid kaks diagonaali (joon. 81), näiteks diagonaalid AC_1 ja BD_1, ning abisirged AD_1 ja BC_1. Et servad AB ja D_1C_1 on vastavalt paralleelsed ja võrdsed servaga DC, siis nad on paralleelsed ja võrdsed teineteisega; seega nelinurk AD_1C_1B on rööpkülik, milles lõigud C_1A ja BD_1 on diagonaalideks, rööpküliku diagonaalid aga poolitavad teineteist. Võtame nüüd ühe nendest diagonaalidest, näiteks diagonaali AC_1 koos kolmanda diagonaaliga, ütleme diagonaaliga B_1D. Täielikult samal viisil võime tõestada, et

nad lõikepunktis poolitavad teineteist. Järelikult diagonaalid B_1D ja AC_1 ning diagonaalid AC_1 ja BD_1 (mis võtsime varem) lõikuvad ühes ja samas punktis, nimelt diagonaali AC_1 poolituspunktis. Võttes lõpuks sama diagonaali AC_1 koos neljanda diagonaaliga A_1C, tõestame samuti, et ka nemad poolitavad teineteist. Tähendab ka selle diagonaalipaari lõikepunktiks on diagonaali AC_1 poolituspunkt. Seega rööptahuka kõik neli diagonaali lõikuvad ühes ja samas punktis ja poolitavad üksteist.



Joon. 82.

73. T e o r e e m. ***Risttahuka diagonaali*** (AC_1 joon. 82) ***ruut võrdub tema kolme mõõte ruutude summaga.***

Võttes põhja diagonaali AC, saame kaks kolmnurka: AC_1C ja ACB. Nad mõlemad on täisnurksed; esimene seepärast, et risttahukas on p ü s t p r i s m a, seega serv CC_1 on põhjaga risti; teine seepärast, et risttahuka põhi on r i s t k ü l i k. Nendest kolmnurkadest leiame, et

$$AC_1^2 = AC^2 + CC_1^2 \text{ ja } AC^2 = AB^2 + BC^2.$$

Seega

$$AC_1^2 = AB^2 + BC^2 + CC_1^2 = AB^2 + AD^2 + AA_1^2.$$

J ä r e l d u s: *Risttahuka diagonaalid on võrdsed.*

Püramiidi paralleelsete lõigete omadused.

74. T e o r e e m i d. ***Kui püramiid*** (joon. 83) ***on lõigatud põhjaga paralleelse tasapinnaga, siis***

1) ***see tasapind jaotab külgservad ja kõrguse võrdelisteks osadeks;***

2) *lõige on põhjaga sarnane hulknurk;*

3) *lõike pindala ja põhja pindala suhtuvad nagu vastavate püramiidide kõrguste ruudud.*

1) Sirgeid A_1B_1 ja AB võib vaadelda kui paralleeltasapindade (põhja ja lõikaja) lõikejooni kolmanda tasapinnaga ASB; seepärast $A_1B_1 \parallel AB$ (§ 16). Selsamal põhjusel $B_1C_1 \parallel BC$, $C_1D_1 \parallel CD$, . . . ja $A_1M_1 \parallel AM$; seepärast

$$\frac{SA_1}{A_1A}=\frac{SB_1}{B_1B}=\frac{SC_1}{C_1C}=\ldots=\frac{SM_1}{M_1M}.$$

2) Kolmnurkade ASB ja A_1SB_1, kolmnurkade BSC ja B_1SC_1 jne. sarnasusest järeldame, et

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BS}{B_1S};\quad \frac{BS}{B_1S}=\frac{BC}{B_1C_1},$$

millest saame, et

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}.$$

Samuti saame, et

$$\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{CS}{C_1S};\quad \frac{CS}{C_1S}=\frac{CD}{C_1D_1},$$

millest järeldub, et

$$\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{CD}{C_1D_1}.$$

Samal viisil tõestame hulknurkade $ABCDE$ ja $A_1B_1C_1D_1E_1$ kõigi külgede võrdelisuse. Et peale selle nende hulknurkade vastavad nurgad on võrdsed (sest nende haarad on paralleelsed ja samasuunalised), siis on nad sarnased.

3) Sarnaste hulknurkade pindalad suhtuvad nagu vastavate külgede ruudud;

seepärast

$$\frac{\text{pindala } ABCDE}{\text{pindala } A_1B_1C_1D_1E_1}=\frac{AB^2}{A_1B_1{}^2}=\left(\frac{AB}{A_1B_1}\right)^2.$$

Kuid

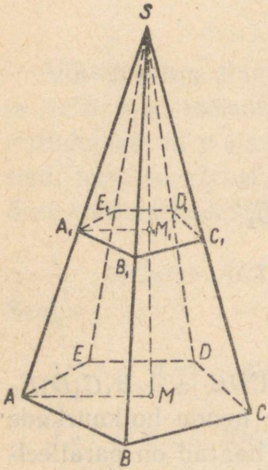
$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AS}{A_1S} = \frac{MS}{M_1S}.$$

Tähendab

$$\frac{\text{pindala } ABCDE}{\text{pindala } A_1B_1C_1D_1E_1} = \left(\frac{MS}{M_1S}\right)^2 = \frac{MS^2}{M_1S^2}$$

75. Järeldus. *Korrapärase tüvipüramiidi ülemine põhi on korrapärane hulknurk ning külgtahud on kongruentsed ja võrdhaarsed trapetsid* (joon. 83).

Iga säärase trapetsi kõrgust nimetatakse korrapärase tüvipüramiidi **apoteemiks.**



Joon. 83.

76. Teoreem. ***Kui kahte võrdse kõrgusega püramiidi lõigata tippudest võrdsel kaugusel põhjadega paralleelsete tasapindadega, siis lõigete pindalad on võrdelised põhjade pindaladega.***

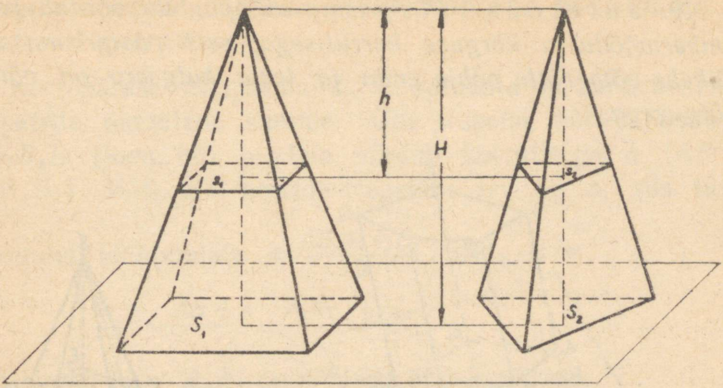
Olgu S_1 *ja* S_2 (joonis 84) kahe püramiidi põhjade pindalad, kummagi kõrgus olgu H; s_1 ja s_2 olgu tippudest ühel ja samal kaugusel h asetsevate põhjadega paralleelsete lõigete pindalad.

Eelmise teoreemi põhjal saame:

$$\frac{s_1}{S_1} = \frac{h^2}{H^2} \text{ ja } \frac{s_2}{S_2} = \frac{h^2}{H^2},$$

millest järeldub, et

$$\frac{s_1}{S_1} = \frac{s_2}{S_2} \text{ ehk } \frac{s_1}{s_2} = \frac{S_1}{S_2}.$$



Joon. 84.

77. Järeldus. Kui $S_1 = S_2$, siis ka $s_1 = s_2$, s. o. *kui võrdsete kõrgustega püramiidide põhjad on pindvõrdsed, siis on pindvõrdsed ka tippudest võrdsetel kaugustel asetsevad põhjadega paralleelsed lõiked.*

Prisma ja püramiidi külgpindala.

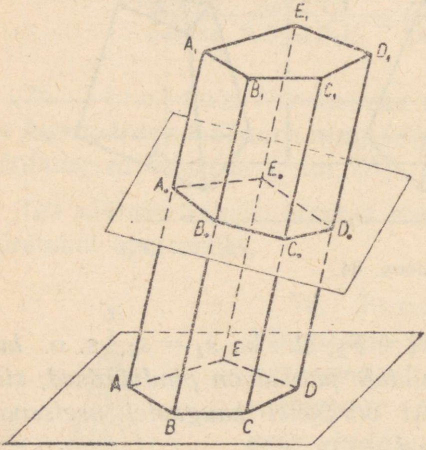
78. Teoreem. ***Prisma külgpindala võrdub tema ristlõike ümbermõõdu ja külgserva korrutisega.***

Ristlõikeks (joon. 85) nimetatakse hulknurka $A_0B_0C_0D_0E_0$, mis tekib prisma lõikamisel külgservadega ristuva tasapinnaga. Selle hulknurga küljed on risti prisma külgservadega (§ 24).

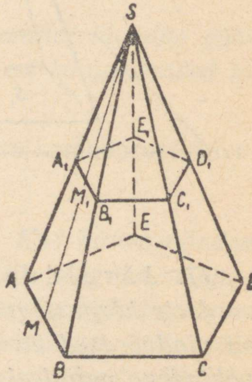
Prisma külgpindala on rööpkülikute pindalade summa; iga rööpküliku aluseks võib võtta siin külgserva ning kõrguseks — ristlõike külje.

Seega prisma külgpindala $= AA_1 \cdot A_0B_0 + BB_1 \cdot B_0C_0 +$
$+ CC_1 \cdot C_0D_0 + DD_1 \cdot D_0E_0 + EE_1 \cdot E_0A_0 = (A_0B_0 +$
$+ B_0C_0 + C_0D_0 + D_0E_0 + E_0A_0) \cdot AA_1.$

79. Järeldus. *Püstprisma külgpindala võrdub põhja ümbermõõdu ja kõrguse korrutisega, sest püstprisma ristlõikeks võib võtta põhja enda ja tema külgserv on võrdne kõrgusega.*



Joon. 85.



Joon. 86.

80. Teoreem. ***Korrapärase püramiidi külgpindala võrdub põhja ümbermõõdu ja püramiidi apoteemi poole korrutisega.***

Olgu (joon. 86) $SABCDE$ korrapärane püramiid ning SM tema apoteem. Selle püramiidi külgpindala on kongruentsete võrdhaarsete kolmnurkade pindalade summa. Ühe kolmnurga, näiteks kolmnurga ASB pindala on võrdne korrutisega $\frac{1}{2} \cdot AB \cdot SM$. Kui kõikide kolmnurkade arv on n, siis

$$\text{püramiidi külgpindala} = \tfrac{1}{2} \cdot AB \cdot SM \cdot n = \frac{n \cdot AB \cdot SM}{2},$$

kus $n \cdot AB$ on põhja ümbermõõt ja SM on püramiidi apoteem.

81. Teoreem. ***Korrapärase tüvipüramiidi külg-***

pindala võrdub põhjade ümbermõõtude poolsumma ja apoteemi korrutisega.

Korrapärase tüvipüramiidi külgpindala on kongruentsete trapetsite pindalade summa. Ühe trapetsi, näiteks trapetsi AA_1B_1B (joon. 86) pindala võrdub korrutisega $\frac{1}{2}$ $(AB + A_1B_1) \cdot MM_1$. Kui kõikide trapetsite arv on n, siis tüvipüramiidi külgpindala $= \frac{AB + A_1B_1}{2} \cdot MM_1 \cdot n =$

$$= \frac{n \cdot AB + n \cdot A_1B_1}{2} \cdot MM_1,$$

kus $n \cdot AB$ ja $n \cdot A_1B_1$ on põhjade ümbermõõdud.

Harjutusi.

1. Korrapärase kolmnurkse püstprisma kõrgus on 12 m ja põhiserv on 3 m. Arvutada prisma täispindala.

2. Risttahuka täispindala on 1714 m^2 ning põhja lähisservade pikkused on 25 m ja 14 m. Arvutada külgpindala ja külgserv.

3. Ruudukujulise põhjaga risttahukas, mille kõrgus on h, on lõigatud tasapinnaga, mis läbib kahte vastasküIgserva. Avaldada risttahuka täispindala, teades, et lõike pindala on S.

4. Korrapärase kuusnurkse püramiidi põhiserv on a ja kõrgus on h. Avaldada külgserv, apoteem, külgpindala ja täispindala.

5. Avaldada kolmnurkse püramiidi täispindala ja kõrgus, kui tema iga serv on a.

6. Korrapärane kuusnurkne püramiid, mille kõrgus on 25 cm ja põhiserv on 5 cm, on lõigatud põhjaga paralleelse tasapinnaga. Arvutada selle tasapinna kaugus püramiidi tipust, teades, et lõike pindala on $\frac{3}{2}\sqrt{3}$ cm^2.

7. Ruudukujulise põhjaga tüvipüramiidi kõrgus on h, alumise põhja serv on a ja ülemise põhja serv on b. Avaldada tüvipüramiidi täispindala.

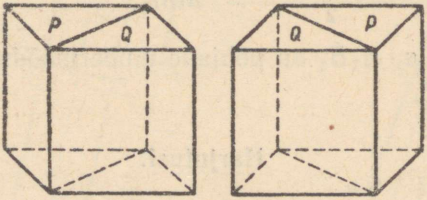
8. Tüvipüramiidi kõrgus on 6 ja põhjade pindalad on 18 ning 8. See tüvipüramiid on lõigatud põhjadega paralleelse tasapinnaga, mis poolitab kõrguse. Arvutada lõike pindala.

II. Prisma ja püramiidi ruumala.

82. **Põhilauseid ruumalade kohta.** Geomeetrilise keha pinnaga piiratud ruumiosa suurust nimetatakse selle keha **ruumalaks.**

Meie seame endale ülesande avaldada see suurus arvu abil, mis mõõdab seda suurust. Seejuures peame silmas järgmisi põhilauseid.

1) *Kongruentsete kehade ruumalad on võrdsed.*



Joon. 87.

2) *Osadest* (*P* ja *Q*) *koosneva keha ruumala* (näiteks kummagi joonisel 87 kujutatud rööptahuka ruumala) *võrdub nende osade ruumalade summaga.*

Võrdsete ruumaladega kehasid nimetatakse ruumvõrdseteks.

83. **Ruumalaühik.** Ruumalade mõõtmisel võetakse ühikuks niisuguse kuubi ruumala, mille iga serv võrdub pikkusühikuga. Nii on ruumalaühikutena tarvitusel kuupmeeter (m^3), kuupsentimeeter (cm^3) jne.

Rööptahuka ruumala.

84. Teoreem. ***Risttahuka ruumala võrdub tema kolme mõõte korrutisega.***

Selles lühikeses lauses väljendatud teoreemi tuleb mõista nii: risttahuka ruumala mõõtarv võrdub tema kolme mõõte mõõtarvude korrutisega, kui risttahuka kolme lähisserva on mõõdetud pikkusühikuga, mis võrdub ruumalaühikuks võetud kuubi servaga. Nii et kui x on arv, mis väljendab risttahuka ruumala kuupsentimeetrites ning a, b ja c on arvud, mis väljendavad tema kolme lähisserva pikkusi sentimeetrites, siis teoreem väidab, et $x = abc$.

Tõestamisel vaatleme eraldi kolme juhtu.

1) Mõõdete mõõtarvud on täisarvud.

Olgu mõõted näiteks järgmised (joon. 88): $AB = a$, $BC = b$ ja $BD = c$, kus a, b ja c on täisarvud (näiteks meie joonisel $a = 4$, $b = 2$ ja $c = 5$). Siis risttahuka põhi sisaldab ab niisugust ruutu, mis on vastavaks ruutühikuks. On ilmne, et igale ruudule võib paigutada ühe kuupühiku. Siis tekib kiht (nagu joonisel kujutatud), mis koosneb ab kuupühikust. Et selle kihi kõrgus võrdub ühe pikkusühikuga ja kogu risttahuka kõrgus on c pikkusühikut, siis risttahukasse võib paigutada c niisugust kihti. Seega selle risttahuka ruumala võrdub abc kuupühikuga.

2) Mõõted esinevad murdarvudena.

Olgu risttahuka mõõted järgmised:

$$\frac{m}{n}, \quad \frac{p}{q}, \quad \frac{r}{s}$$

(mõned neist murdudest võivad olla täisarvud).

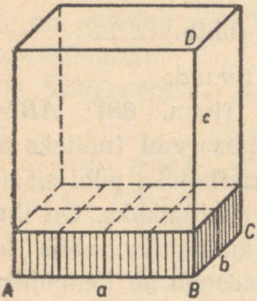
Teisendades murrud ühenimelisteks, saame:

$$\frac{mqs}{nqs}, \quad \frac{pns}{nqs}, \quad \frac{rnq}{nqs},$$

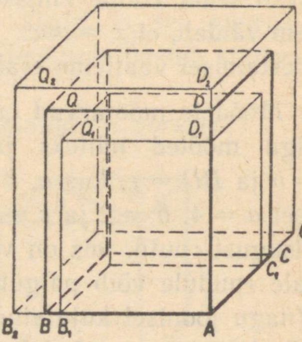
Võtame $\frac{1}{nqs}$ osa pikkusühikust uueks (abi-) pikkusühikuks. Selle uue ühikuga mõõdetud risttahuka servi väljendavad siis täisarvud, ja nimelt:

$$mqs, \ pns \text{ ja } rnq$$

ja seega, nagu tõestatud juhul 1, risttahuka ruumala võrdub korrutisega $(mqs) \cdot (pns) \cdot (rnq)$, kui seda ruumala mõõta uuele pikkusühikule vastava kuupühikuga. Endisele pikkusühikule vastav kuupühik sisaldab sääraseid uusi kuupühikuid $(nqs)^3$ tükki; tähendab uus kuupühik moodustab $\frac{1}{(nqs)^3}$ osa



Joon. 88.



Joon. 89.

endisest. Seepärast endise kuupühikuga mõõdetud risttahuka ruumala on:

$$\frac{1}{(nqs)^3} \cdot (mqs)\ (pns)\ (rnq) = \frac{mqs}{nqs} \cdot \frac{pns}{nqs} \cdot \frac{rnq}{nqs} = \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} \cdot$$

3) Mõõteid väljendavad irratsionaalarvud.

Olgu antud risttahukal (joon. 89), mida lühiduse pärast tähistame ühe tähega Q, järgmised mõõted:

$$AB = \alpha;\ AC = \beta;\ AD = \gamma,$$

kus arvud α, β ja γ või mõned neist on irratsionaalsed. Igaühte arvudest α, β ja γ võib väljendada lõppematu kümnendmurru kujul. Võtame nende murdude ligikaudsed väärtused n kohaga murdosas esiteks puudusega, seejärel liiaga. Puudusega võetud väärtusi tähistame tähtedega α_n, β_n, γ_n ja liiaga võetud väärtusi tähtedega α'_n, β'_n, γ'_n. Paigutame servale AB punktist A kaks lõiku: $AB_1 = \alpha_n$ ja $AB_2 = \alpha'_n$. Servale AC paigutame samast punktist A lõigud: $AC_1 = \beta_n$ ja $AC_2 = \beta'_n$ ning servale AD samast punktist lõigud: $AD_1 = \gamma_n$ ja $AD_2 = \gamma_n$.

Seejuures on:

$$AB_1 < AB < AB_2;\ AC_1 < AC < AC_2;\ AD_1 < AD < AD_2.$$

Ehitame nüüd kaks abi-risttahukat: ühe mõõdetega AB_1, AC_1 ja AD_1 (tähistame ta tähega Q_1) ning teise mõõdetega AB_2, AC_2 ja AD_2 (tähistame ta tähega Q_2). Risttahukas Q_1 on terveni risttahuka Q sees ning risttahukas Q_2 sisaldab endas risttahukat Q.

Juhul 2 tõestatu põhjal on:

$$\text{ruumala } Q_1 = \alpha_n \beta_n \gamma_n, \quad (1)$$

$$\text{ruumala } Q_2 = \alpha'_n \beta'_n \gamma'_n, \quad (2)$$

kusjuures ruumala $Q_1 <$ ruumala Q_2.

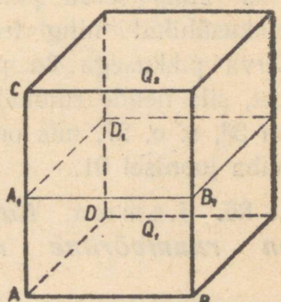
Hakkame nüüd suurendama arvu n. See tähendab, et võtame arvude α, β ja γ ligikaudsed väärtused järjest suurema täpsusega. Vaatame, kuidas muutuvad seejuures risttahukate Q_1 ja Q_2 ruumalad.

Arvu n piiramatul kasvamisel ruumala Q_1 ilmselt suureneb ning võrduse (1) tõttu on tema piiriks korrutise $(\alpha_n \beta_n \gamma_n)$ piir. Ruumala Q_2 ilmselt kahaneb ning võrduse (2) tõttu tema piiriks on korrutise $(\alpha'_n \beta'_n \gamma'_n)$ piir. Kuid algebrast on teada, et arvu n piiramatul kasvamisel on korrutistel $\alpha_n \beta_n \gamma_n$ ja $\alpha'_n \beta'_n \gamma'_n$ ühine piir, mis on irratsionaalarvude α, β ja γ korrutiseks.

Seda piiri loemegi risttahuka Q ruumala mõõtarvuks; seega

$$\text{ruumala } Q = \alpha\beta\gamma.$$

Võib tõestada, et säärasel viisil määratud ruumala rahuldab ruumalade kohta seatud nõudeid (§ 82). Tõesti ruumala niisuguse definitsiooni puhul on võrdsetel risttahukatel ilmselt võrdsed ruumalad. Seega esimene tingimus (§ 82) on täidetud. Jaotame nüüd antud risttahuka Q põhjaga paralleelse tasapinnaga kaheks: Q_1 ja Q_2 (joon. 90).



Joon. 90.

Siis on:

$$\text{ruumala } Q = AB \cdot AC \cdot AD;$$
$$\text{ruumala } Q_1 = AB \cdot AA_1 \cdot AD;$$
$$\text{ruumala } Q_2 = A_1B_1 \cdot A_1C \cdot A_1D_1.$$

Liites liikmeti kaks viimast võrdust ning pidades silmas, et $A_1B_1 = AB$ ja $A_1D_1 = AD$, saame, et

$$\text{ruumala } Q_1 + \text{ruumala } Q_2 = AB \cdot AA_1 \cdot AD + AB \cdot A_1C \cdot AD =$$
$$= AB \,.\, AD\,(AA_1 + A_1C) = AB \,.\, AD \,.\, AC;$$

siit saame, et

$$\text{ruumala } Q_1 + \text{ruumala } Q_2 = \text{ruumala } Q.$$

Seega ka teine tingimus (§ 82) on täidetud, kui risttahukas koostada kahest osast, mis tekkisid tema lõikamisel ühe tahuga paralleelse tasapinnaga.

85. Järeldus. Olgu risttahuka põhiservade mõõtarvud a ja b ning olgu kolmanda mõõte (kõrguse) mõõtarv c. Siis, tähistades tema vastava kuupühikuga mõõdetud ruumala tähega V, võime kirjutada:

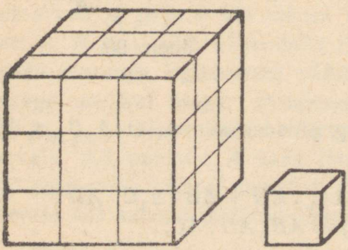
$$V = abs.$$

Et korrutis ab väljendab põhja pindala, siis võib öelda, et ***risttahuka ruumala võrdub põhja pindala ja kõrguse korrutisega.***

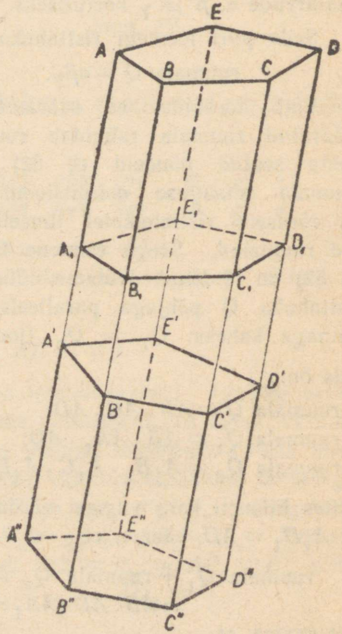
Märkus. Kahe eri nimega kuupühiku suhe võrdub nende ühikkuupide servadeks olevate pikkusühikute suhte kolmanda astmega. Nii on kuupmeetri suhe kuupdetsimeetriga võrdne 10^3, s. o. 1000.

Seepärast, kui meil on näiteks kuup serva pikkusega a pikkusühikut ning teine kuup serva pikkusega $3a$ pikkusühikut, siis nende ruumalade suhe on 3^3, s. o. 27, mis on ilmsesti näha joonisel 91.

86. Lemma. ***Kaldprisma on ruumvõrdne niisuguse***



Joon. 91.



Joon. 92.

püstprismaga, mille põhjaks on kaldprisma ristlõige ja mille kõrgus on võrdne kaldprisma külgservaga.

Olgu antud kaldprisma $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ (joon. 92). Pikendame ühele poole kõiki tema külgservi ja külgtahke. Võtame mingi ühe serva pikendusel vabalt punkti A' ning läbi selle punkti ristlõike $A'B'C'D'E'$. Seejärel, paigutanud sellele servale punktist A' lõigu $A'A'' = AA_1$, võtame läbi punkti A'' ristlõike $A''B''C''D''E''$. Et nende ristlõigete tasapinnad on paralleelsed, siis

$$B'B'' = C'C'' = D'D'' = E'E'' = A'A'' = AA_1 \quad (\S\ 17).$$

Seetõttu hulktahukas $A'D''$, mille põhjadeks on need ristlõiked, on p ü s t p r i s m a, millest kõneldakse teoreemis.

Tõestame, et antud kaldprisma on ruumvõrdne selle püstprismaga. Selleks veendume esmalt, et tahkkehad $A'D$ ja $A''D_1$ on kongruentsed. Nende põhjad $A'B'C'D'E'$ ja $A''B''C''D''E''$ on kongruentsed kui ühe ja sama prisma $A'D''$ põhjad; teiselt poolt, lisades võrduse $A_1A = A''A'$ kummalegi poolele ühe ja sama lõigu A_1A', saame, et

$$A'A = A''A_1;$$

samal viisil saame, et

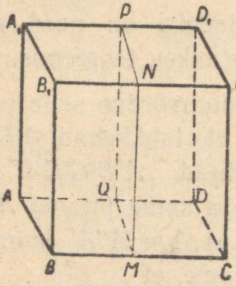
$$B'B = B''B_1,$$
$$C'C = C''C_1$$
jne.

Kujutleme nüüd, et hulktahukas $A'D$ on asetatud hulktahuka $A''D_1$ sisse nii, et nende põhjad ühtivad; siis ühtivad ka nende külgservad, sest nad on risti põhjadega ja on vastavalt võrdsed; seetõttu hulktahukas $A'D$ ühtib hulktahukaga $A''D_1$, tähendab need kehad on kongruentsed. Nüüd paneme tähele, et kui püstprismale $A''D'$ lisame hulktahuka $A'D$ ja kaldprismale A_1D lisame hulktahuka $A''D_1$, mis on ruumvõrdne kehaga $A'D$, siis saame ühe ja sama hulktahuka $A''D$. Sellest järeldub, et prismad A_1D ja $A''D'$ on ruumvõrdsed.

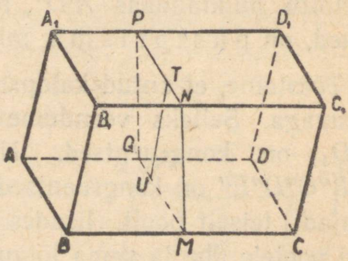
87. Teoreem. ***Rööptahuka ruumala võrdub põhja pindala ja kõrguse korrutisega.***

Varem tõestasime selle teoreemi r i s t t a h u k a kohta, nüüd tõestame ta p ü s t r ö ö p t a h u k a kohta ja seejärel k a l d r ö ö p t a h u k a kohta.

1) Olgu AC_1 (joon. 93) püströöptahukas, s. o. niisugune rööptahukas, mille põhi $ABCD$ on rööpkülik ja kõik külgtahud on ristkülikud. Võtame tema põhjaks külgtahu AA_1B_1B, siis saame k a l d r ö ö p t a h u k a. Vaadeldes teda kui k a l d p r i s m a erijuhtu, võime eelmise paragrahvi



Joon. 93.



Joon. 94.

lemma põhjal kinnitada, et see rööptahukas on ruumvõrdne niisuguse püströöptahukaga, mille põhjaks on ristlõige $MNPQ$ ja kõrguseks on lõik BC. Nelinurk $MNPQ$ on ristkülik, sest kõik tema nurgad on kahetahuliste täisnurkade joonnurgad; seepärast püströöptahukas, mille põhjaks on ristkülik $MNPQ$, peab olema risttahukas ja seega tema ruumala võrdub tema kolme mõõte korrutisega, milledeks võib võtta lõigud MN, MQ ja BC. Seega

$$\text{ruumala } AC_1 = MN \cdot MQ \cdot BC = (MQ \cdot BC) \cdot MN.$$

Kuid korrutis $MQ \cdot BC$ väljendab rööpküliku $ABCD$ pindala, seepärast

$$\text{ruumala } AC_1 = (\text{pindala } ABCD) \cdot MN = (\text{pindala } ABCD) \cdot BB_1 .$$

 lk. 39 14 lk 40 2 6

2) Olgu AC_1 (joon. 94) kaldrööptahukas. Ta on ruumvõrdne niisuguse püströöptahukaga, mille põhjaks on ristlõige $MNPQ$ (s. o. servadega AD, BC, . . . ristiolev lõige) ja kõrguseks on serv BC. Kuid varem tõestatu põhjal püströöptahuka ruumala võrdub põhja pindala ja kõrguse korrutisega, tähendab

$$\text{ruumala } AC_1 = (\text{pindala } MNPQ) \,.\, BC.$$

Kui lõike $MNPQ$ kõrgus on TU, siis

$$\text{pindala } MNPQ = MQ \cdot TU,$$

seega

$$\text{ruumala } AC_1 = MQ \cdot TU \cdot BC = (BC \cdot MQ) \cdot TU.$$

Korrutis $BC \cdot MQ$ on rööpküliku $ABCD$ pindala, järelikult

$$\text{ruumala } AC_1 = (\text{pindala } ABCD) \cdot TU.$$

Jääb veel tõestada, et lõik TU on rööptahuka kõrguseks. Tõepoolest, servadega BC, B_1C_1, . . . ristuv lõige $MNPQ$ on risti ka neid servi läbivate tahkudega $ABCD$, BB_1C_1C, . . . (§ 43). Seepärast, kui punktist U juhtida ristsirge tahule $ABCD$, siis see ristsirge peab asetsema tasapinnas $MNPQ$ (§ 44) ja järelikult peab ühtima sirgega UT, mis asetseb selles tasapinnas ja on risti sirgega MQ. Tähendab lõik UT on rööptahuka kõrgus. Seega ka kaldrööptahuka ruumala võrdub põhja pindala ja kõrguse korrutisega.

J ä r e l d u s. Kui V, S ja h on arvud, mis väljendavad vastavates ühikutes vastavalt rööptahuka ruumala, põhja pindala ja rööptahuka kõrgust, siis võib kirjutada:

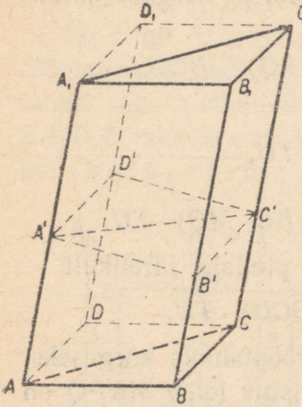
$$V = Sh.$$

Prisma ruumala.

*88. T e o r e e m. ***Prisma ruumala võrdub põhja pindala ja kõrguse korrutisega.***

Esiteks tõestame selle teoreemi k o l m n u r k s e prisma, siis h u l k n u r k s e prisma kohta.

1) Võtame läbi prisma $ABCA_1B_1C_1$ serva AA_1 tahuga BB_1C_1C paralleelse tasapinna ja läbi serva CC_1 tahuga AA_1B_1B paralleelse tasapinna; seejärel pikendame kummagi põhja tasapinda lõikumiseni võetud tasapindadega. Siis saame rööptahuka BD_1, mille diagonaaltasapind AA_1C_1C jaotab kaheks kolmnurkseks prismaks (millest üks on antud prisma). Tõestame, et need prismad on ruumvõrdsed. Selleks võtame ristlõike $A'B'C'D'$. See lõige on rööpkülik, mille diagonaal $A'C'$ jaotab kaheks kongruentseks kolmnurgaks. Antud prisma on ruumvõrdne niisuguse püstprismaga, mille põhjaks on $A'B'C'$ ja kõrguseks on serv AA_1 (§ 86). Teine kolmnurkne prisma on ruumvõrdne niisuguse püstprismaga, mille põhjaks on $A'D'C'$ ja kõrguseks serv AA_1.



Joon. 95.

Kuid kaks kongruentsete põhjadega ja võrdsete kõrgustega püstprismat on kongruentsed (sest teineteise sisse paigutamisel nad ühtivad); tähendab prismad $ABCA_1B_1C_1$ ja $ADCA_1D_1C_1$ on ruumvõrdsed. Sellest järeldub, et antud prisma ruumala moodustab p o o l e rööptahuka BD_1 ruumalast; tähistades prisma kõrguse h, saame seega, et

kolmnurkse prisma ruumala =

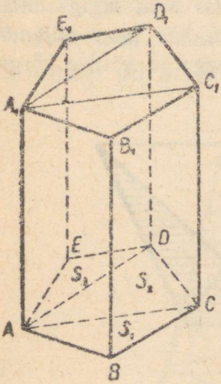
$$= \frac{(\text{pindala } ABCD) \cdot h}{2} = \frac{\text{pindala } ABCD}{2} \cdot h =$$

$$= (\text{pindala } ABC) \cdot h$$

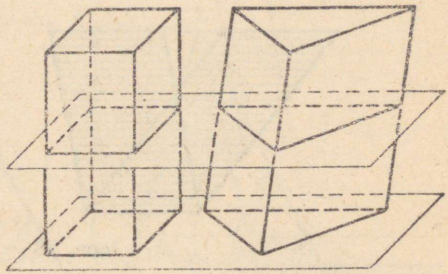
2) Võtame läbi hulknurkse prisma (joon. 96) serva AA_1 diagonaaltasapinnad AA_1C_1C ja AA_1D_1D.

Siis antud prisma jaguneb kolmnurkseteks prismadeks. Viimaste ruumalade summa moodustab antud otsitava ruumala. Kui nende põhjade pindalasid tähistada tähtedega S_1, S_2, S_3 ja ühist kõrgust tähega h, siis saame, et

$$\text{hulknurkse prisma ruumala} =$$
$$= S_1 \cdot h + S_2 \cdot h + S_3 \cdot h = (S_1 + S_2 + S_3) \cdot h =$$
$$= (\text{pindala } ABCDE) \cdot h.$$



Joon. 96.



Joon. 97.

J ä r e l d u s. Kui V, S ja h on arvud, mis väljendavad vastavates ühikutes vastavalt prisma ruumala, põhja pindala ja prisma kõrgust, siis võib kirjutada:

$$V = S \cdot h.$$

89. Cavalieri printsiip. Itaalia XVII sajandi matemaatik Cavalieri avaldas tõestuseta järgmise väite:

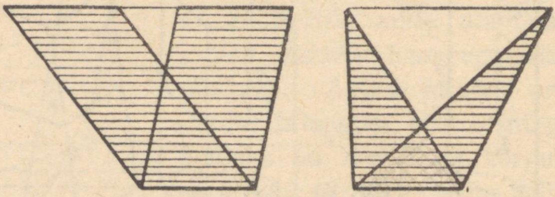
Kui kahte keha (mida piiravad tasapinnad või kõverpinnad) *on võimalik asetada nii, et nende mingi antud tasapinnaga paralleelsed lõiked on pindvõrdsed, siis need kehad on ruumvõrdsed.*

Sellel lausel on olemas range tõestus, kuid see tõestus ei mahu elementaarmatemaatika piiridesse, seepärast piirdume tema kontrollimisega mõnel näitel.

Cavalieri printsiibi nõudeile vastavad näiteks kaks pindvõrdsete põhjadega ja võrdsete kõrgustega prismat (ükskõik, kas kolmnurksed või hulknurksed) (joon .97). Niisugused prismad, nagu teame, on ruumvõrdsed. Kui need prismad asetada põhjadega mingile tasapinnale, siis iga põhjadega paralleelne tasapind, mis lõikab ühte prismat, lõikab ka teist, kusjuures lõiked on pindvõrdsed kujundid, sest need kujundid on kongruentsed põhjadega, põhjad aga on pindvõrdsed. Tähendab Cavalieri printsiip leiab kinnitust sellel erijuhul.

See printsiip leiab kinnitust ka planimeetrias tema rakendamisel pindalade võrdlemiseks ja nimelt:

Kui kahte kujundit võib asetada nii, et lõigates neid mingi antud sirgega paralleelse sirgega tekivad võrdsed lõigud, siis need kujundid on pindvõrdsed. Selle näiteks on kaks võrdse alusega ja võrdse kõrgusega rööpkülikut või kolmnurka (joon. 98).



Joon. 98

Püramiidi ruumala.

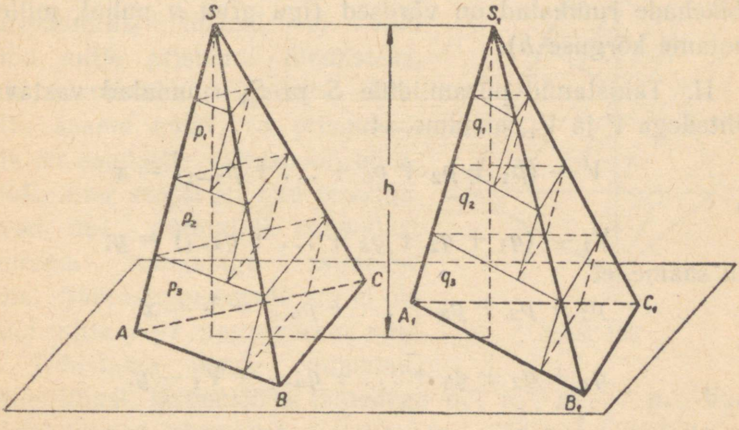
90. L e m m a. ***Pindvõrdsete põhjadega ja võrdsete kõrgustega kolmnurksed püramiidid on ruumvõrdsed.***

Meie tõestus koosneb kolmest osast. Esimeses osas tõestame mitte püramiidide eneste, vaid niisuguste abikehade ruumvõrdsuse, mis koosnevad üksteise peale paigutatud kolmnurksetest prismadest. Teises osas tõestame, et nende abikehade ruumalad neid moodustavate prismade arvu suurendamisel lähenevad püramiidide ruumaladele k u i t a h e s l i g i d a l e. Lõpuks kolmandas osas veendume, et püramiidid ise on ruumvõrdsed.

I. Kujutleme, et püramiidid on paigutatud põhjadega mingile tasapinnale (nagu kujutatud joonisel 99); siis nende tipud asetsevad põhjade tasapinnaga paralleelsel sirgel ning püramiidide kõrgust võib kujutada ühe ja sama sirglõiguga h.

Jaotame selle kõrguse n-iks võrdseks osaks, kusjuures n on mingi täisarv (näiteks 4-ks võrdseks osaks, nagu näidatud joonisel), ja juhime läbi jaotuspunktide rea põhjadega paralleelseid tasapindu.

Nende tasapindade ja püramiidide lõikumisel tekib rida kolmnurgakujulisi lõikeid, kusjuures püramiidi S lõiked on pindvõrdsed püramiidi S_1 vastavate lõigetega (§ 77). Ehitame kummagi püramiidi sisse rea prismasid nii, et nende ülemis-



Joon. 99.

teks põhjadeks on kolmnurksed lõiked ja külgservad on ühes püramiidis paralleelsed servaga SA, teises püramiidis servaga S_1A_1 ning iga prisma kõrgus on $\frac{h}{n}$. Sääraseid prismasid tekib kummaski püramiidis $n - 1$; nad moodustavad mingisuguse astmelise keha, mille ruumala on ilmselt väiksem, kui selle püramiidi ruumala, millesse prismad on ehitatud. Tähistame püramiidi S prismade ruumalad, alates tipust, järgemööda tähtedega $p_1, p_2, p_3, \ldots p_{n-1}$ ja püramiidi S_1 prismade ruumalad, samuti alates tipust, järgemööda tähtedega $q_1, q_2, q_3, \ldots q_{n-1}$; siis, silmas pidades, et iga vastavate prismade paari (p_1 ja q_1, p_2 ja q_2, ...) põhjad on pindvõrdsed ja kõrgused on võrdsed, võime kirjutada rea võrdusi:

$$p_1 = q_1;\ p_2 = q_2;\ p_3 = q_3; \ldots p_{n-1} = q_{n-1}.$$

Liites liikmeti kõik võrdused, leiame, et

$$p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_{n-1} = q_1 + q_2 + q_3 + \ldots + q_{n-1}. \quad (1)$$

Seega oleme tõestanud, et meie poolt ehitatud astmeliste abikehade ruumalad on võrdsed (iga arvu n puhul, milleks jaotame kõrguse h).

II. Tähistanud püramiidide S ja S_1 ruumalad vastavalt tähtedega V ja V_1, oletame, et

$$V - (p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_{n-1}) = x$$

ja

$$V_1 - (q_1 + q_2 + q_3 + \ldots + q_{n-1}) = y;$$

siit saame, et

$$p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_{n-1} = V - x$$

ja

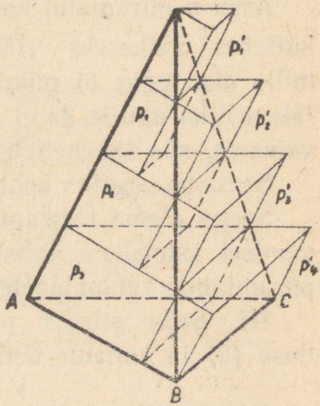
$$q_1 + q_2 + q_3 + \ldots + q_{n-1} = V_1 - y.$$

Siis võime võrduse (1) kirjutada nii:

$$V - x = V_1 - y. \quad (2)$$

Kujutleme nüüd, et võrdsete osade arv n, milleks jaotame kõrguse h, kasvab piiramatult: kujutleme näiteks, et 4 osa asemel jaotame kõrguse 8-ks võrdseks osaks, siis 16-ks, siis 32-ks jne., ja et igakord ehitame näidatud viisil kummaski püramiidis astmelise keha. Kuidas ka ei kasva astmelisi kehi moodustavate prismade arv, võrdus (1) ja seega ka võrdus (2) jäävad kummatigi kehtima. Seejuures ruumalad V ja V_1 muidugi ei muutu, kuna suurused x ja y, mis näitavad, mille võrra püramiidide ruumalad ületavad vastavate astmeliste kehade ruumalasid, ilmsesti järjest vähenevad. Tõestame, et suurused x ja y võivad saada kuitahes väikesteks (teisiti öeldes, et nad l ä h e n e v a d n u l l i l e). Piisab, kui seda tõestame ühe suuruse kohta kahest, näiteks suuruse x kohta.

Selleks ehitame püramiidile S veel teise rea prismasid (joon. 100), mis moodustavad ka astmelise keha, kuid ruumalalt püramiidist suurema. Need prismad ehitame samal viisil, nagu ehitasime sisemised prismad, ainult selle vahega, et me kolmnurgakujulisi lõikeid ei võta nüüd mitte prismade ülemisteks, vaid alumisteks põhjadeks. Seetõttu saame nüüd rea prismasid, mis on osaliselt väljaspool püramiidi, ning seepärast nad moodustavad uue, püramiidi ruumalast suurema ruumalaga astmelise keha. Sääraste prismade arv ei ole nüüd mitte $n-1$ nagu varem, vaid n. Tähistame nende ruumalad, alates tipust, järgemööda tähtedega p_1', p_2', p_3', ... p_n'. Vaadeldes joonist näeme, et



Joon. 100.

$$p_1' = p_1,\ p_2' = p_2,\ p_3' = p_3, \ldots p_{n-1}' = p_{n-1}.$$

Seepärast

$$(p_1'+p_2' + \ldots +p_{n-1}'+p_n') - (p_1+p_2 + \ldots + p_{n-1}) = p_n'.$$

Et

$$p_1' + p_2' + \ldots + p_{n-1}' + p_n' > V$$

ja

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_{n-1} < V,$$

siis

$$V - (p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_{n-1}) < p_n',$$

s. o.

$$x < p_n'.$$

Kuid

$$p_n' = (\text{pindala } ABC) \cdot \frac{h}{n}$$

seega

$$x < (\text{pindala } ABC) \cdot \frac{h}{n}$$

Arvu n piiramatul kasvamisel suurus $\frac{h}{n}$ võib ilmselt saada kuitahes väikeseks (läheneb nullile). Seepärast korrutis, mille üks tegur ei muutu, kuid teine tegur läheneb nullile, läheneb ka nullile, ja et positiivne arv x on sellest korrutisest väiksem, siis läheneb tema ammugi nullile.

Seesama arutlus kehtib ka suuruse y kohta.

Seega oleme tõestanud, et prismade arvu piiramatul kasvamisel astmeliste abikehade ruumalad lähenevad vastavate püramiidide ruumaladele kuitahes ligidale.

III. Seda silmas pidades võtame ülalkirjutatud võrduse (2) ja anname temale niisuguse kuju:

$$V - V_1 = x - y. \tag{3}$$

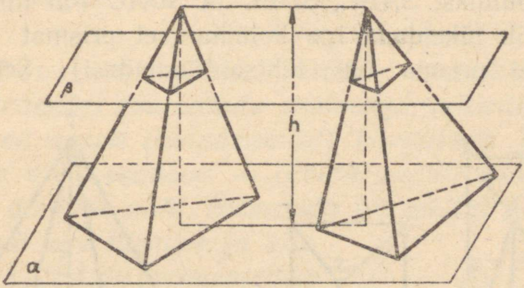
Nüüd tõestame, et see võrdus on ainult siis võimalik, kui $V = V_1$ ja $x = y$. Tõepoolest vahe $V - V_1$, nagu iga jäävate arvude vahe, peab olema jääv arv, kuid vahe $x - y$, nagu iga muutuvate, nullile lähenevate arvude vahe peab olema kas muutuv (nullile lähenev) arv või null. Et jääv arv ei saa võrduda muutuva arvuga, siis jääb kahest võimalusest ainult üks: vahe $x - y = 0$; siis $V = V_1$ ja $x = y$.

Nii oleme tõestanud, et uuritavad püramiidid on ruumvõrdsed [1].

---

[1] Selle teoreemi nii keerulise tõestuse vajalikkust põhjustab fakt, et kahte ruumvõrdset keha ei saa nii hõlpsasti teisendada teineteiseks, nagu seda oli võimalik teha pindvõrdsete hulknurkadega tasapinnal. Nimelt kui on antud kaks ruumvõrdset hulktahukat, siis üldisel juhul osutub võimatuks ühte neist tükeldada niisugusteks osadeks (ka täienduste abil), millest saaks koostada teise. Muuseas on see võimatu kahe vabalt võetud pindvõrdse põhjaga ja võrdse kõrgusega kolmnurkse püramiidi puhul.

Tõestatud lemma järeldub väga lihtsalt ka Cavalieri printsiibist. Tõesti, kujutleme, et kaks pindvõrdse põhjaga ja võrdse kõrgusega püramiidi on asetatud põhjadega mingile tasapinnale α (joon. 101), siis iga tasapinnaga α paralleelne tasapind β annab püramiide lõigates pindvõrdsed kolmnurgad (§ 77); järelikult need püramiidid vastavad Cavalieri printsiibi nõudeile ning seepärast nende ruumalad peavad olema võrdsed. Kuid seda tõestust ei saa rangeks nimetada, sest meie ei tõestanud Cavalieri printsiipi.



Joon. 101.

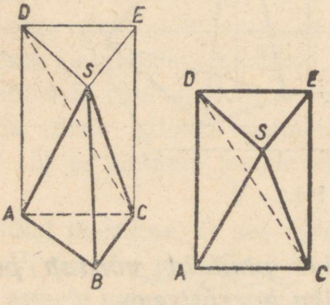
91. Teoreem. ***Püramiidi pindala võrdub põhja pindala ja kõrguse kolmandiku korrutisega.***

Esiteks tõestame selle teoreemi kolmnurkse, siis hulknurkse püramiidi kohta.

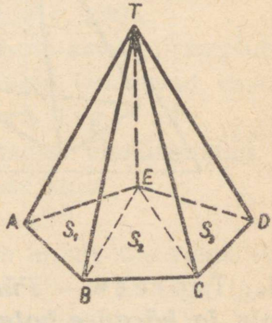
1) Ehitame kolmnurkse püramiidi $SABC$ (joon. 102) põhjale niisuguse prisma $SABCDE$, mille kõrgus võrdub püramiidi kõrgusega ja mille üks külgserv ühtib servaga SB. Tõestame, et püramiidi ruumala moodustab ühe kolmandiku selle prisma ruumalast. Eraldame prismast antud püramiidi. Siis jääb järele nelinurkne püramiid $SADEC$ (mis selguse pärast on eraldi kujutatud). Lõikame seda püramiidi tippu S ja põhja diogonaali DC läbiva tasapinnaga. Sel teel tekkinud kahel kolmnurksel püramiidil on ühine tipp S ning võrdsed põhjad DEC ja DAC, mis asetsevad ühes tasapinnas; tähendab vastavalt ülemal tõestatud lemmale need püramiidid on

ruumvõrdsed. Võrdleme ühte neist, nimelt püramiidi *SDEC*, antud püramiidiga. Püramiidi *SDEC* põhjaks võib võtta kolmnurga *DSE*; siis tema tipuks on punkt *C* ja kõrgus on võrdne antud püramiidi kõrgusega. Et $\triangle DSE \cong \triangle ABC$, siis vastavalt samale lemmale on püramiidid *CSDE* ja *SABC* ruumvõrdsed.

Meie tükeldasime prisma *SABCDE* kolmeks ruumvõrdseks püramiidiks: *SABC*, *SDEC* ja *SDAC* (on ilmne, et nii on võimalik tükeldada iga kolmnurkset prismat — see on kolmnurkse prisma üks tähtsaid omadusi). Seega antud



Joon. 102.



Joon. 103.

püramiidiga kolme ruumvõrdse püramiidi ruumalade summa moodustab prisma ruumala;
järelikult

$$\text{ruumala } SABC = \tfrac{1}{3} \text{ ruumalast } SDEABC =$$

$$= \frac{(\text{pindala } ABC) \cdot h,}{3}$$

kus *h* tähendab püramiidi kõrgust.

2) Ehitame hulknurkse püramiidi *TABCDE* (joon. 103) põhja mingist tipust *E* diagonaalid *EB* ja *EC*. Seejärel juhime lõiketasapinnad läbi iga diagonaali ja serva *TE*. Siis hulknurkne püramiid tükeldub kolmnurkseteks, milledel on antud püramiidiga ühine kõrgus. Tähistades kolmnurksete

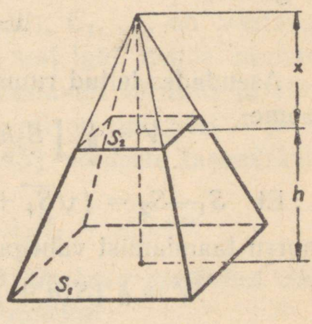
püramiidide põhjade pindalad tähtedega S_1, S_2, S_3 ja kõrguse tähega h, saame, et

$$\text{ruumala } TABCDE = \tfrac{1}{3} S_1 \cdot h + \tfrac{1}{3} S_2 \cdot h + \tfrac{1}{3} S_3 \cdot h =$$
$$= (S_1 + S_2 + S_3) \cdot \frac{h}{3} = \frac{(\text{pindala } ABCDE) \cdot h}{3},$$

J ä r e l d u s. Kui V, S ja h tähendavad arve, mis vastavates ühikutes väljendavad mistahes püramiidi ruumala, põhja pindala ja kõrgust, siis

$$V = \tfrac{1}{3} Sh.$$

92. T e o r e e m ***Tüvipüramiidi ruumala võrdub kolme püramiidi ruumalade summaga, millede kõrgused on võrdsed antud tüvipüramiidi kõrgusega ja millede põhjadeks on: esimesel — tüvipüramiidi alumine põhi teisel — ülemine põhi, kolmanda püramiidi põhja pindala võrdub aga ülemise ja alumise põhja pindala geomeetrilise keskmisega.***



Joon. 104.

Olgu tüvipüramiidi (joon. 104) põhjade pindalad S_1 ja S_2, kõrgus h ning ruumala V (tüvipüramiid võib olla ükskõik kas kolmnurkne või hulknurkne). Peame tõestama, et

$$V = \tfrac{1}{3} S_1 h + \tfrac{1}{3} S_2 h + \tfrac{1}{3} h \sqrt{S_1 S_2} =$$
$$= \tfrac{1}{3} h (S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}),$$

kus $\sqrt{S_1 S_2}$ on suuruste S_1 ja S_2 geomeetriline keskmine. Tõestuseks paigutame väiksemale põhjale väikese püramiidi, mis antud tüvipüramiidi täiendab täispüramiidiks. Siis võime tüvipüramiidi ruumala V vaadelda kui täispüramiidi ja täienduspüramiidi ruumalade vahet.

Tähistades täienduspüramiidi kõrguse tähega x, leiame, et

$$V = \tfrac{1}{3} S_1 (h + x) - \tfrac{1}{3} S_2 x = \tfrac{1}{3} (S_1 h + S_1 x - S_2 x) =$$
$$= \tfrac{1}{3} [S_1 h + (S_1 - S_2) x].$$

lu 53 (7) (13)

Kõrguse x leidmiseks kasutame teoreemi § 74, millele vastavalt võime kirjutada võrrandi

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{(h+x)^2}{x^2}.$$

Selle võrrandi lihtsustamiseks võtame tema mõlemast poolest positiivse ruutjuure:

$$\frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_2}}=\frac{h+x}{x}.$$

Sellest võrrandist (mida võime vaadelda kui võrret) saame:

$$x\sqrt{S_1}=h\sqrt{S_2}+x\sqrt{S_2},$$

millest leiame, et

$$(\sqrt{S_1}-\sqrt{S_2})\,x=h\sqrt{S_2},$$

seega

$$x=\frac{h\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1}-\sqrt{S_2}}.$$

Asendades leitud ruumala valemis tähe x selle avaldisega, saame

16. rida

$$V=\tfrac{1}{3}\left[S_1h+\frac{(S_1-S_2)\,h\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1}-\sqrt{S_2}}\right].$$

Et $S_1-S_2=(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2})\,(\sqrt{S_1}-\sqrt{S_2})$, siis peale murru taandamist vahega $\sqrt{S_1}-\sqrt{S_2}$ saame:

$$V=\tfrac{1}{3}\,[S_1h+(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2})\;h\;\sqrt{S_2}]=$$
$$=\tfrac{1}{3}(S_1h+h\sqrt{S_1S_2}+S_2h)=$$
$$=\tfrac{1}{3}\,h\,(S_1+S_2+\sqrt{S_1S_2}),$$

s. o. saame valemi, mida pidimegi tõestama.

III. Hulktahukate sarnasus.

93. Definitsioon. Kahte hulktahukat nimetatakse **sarnasteks,** kui neil on vastavalt kongruentsed ruumnurgad ja vastavalt sarnased tahud. Elemente, mis sarnastel hulktahukatel on nii vastamisi seotud, nimetatakse **vastavateks.**

Sellest definitsioonist järeldub, et sarnastel hulktahukatel

1) kahetahulised nurgad on vastavalt võrdsed ja asetsevad ühteviisi, sest neil on ruumnurgad kongruentsed;

2) vastavad servad on võrdelised, sest iga kahe sarnase tahu vastavate servade suhe on üks ja sama ning kummagi hulktahuka lähistahkudel on ühine serv.

Sarnaste hulktahukate olemasolu võimalust näitab järgmine teoreem.

94. Teoreem. ***Püramiidi*** (joon. 105) ***põhjaga paralleelne lõiketasapind*** ($A_1B_1C_1D_1E_1$) ***eraldab püramiidist temaga sarnase püramiidi*** ($SA_1B_1C_1D_1E_1$).

Et $A_1B_1 \parallel AB$, $B_1C_1 \parallel BC$ jne., siis nende kahe püramiidi külgtahud on sarnased (§ 74). Jääb veel tõestada ruumnurkade kongruentsus. Ruumnurk S on mõlemal püramiidil ühine; kolmetahulised nurgad A_1, B_1, C_1, ... on vastavalt võrdsed nurkadega A, B, C, . . . , sest igal nende nurkade paaril on ühine kahetahuline nurk vastavalt võrdsete ja ühteviisi asetsevate tasanurkade vahel; nii on nurkadel A ja A_1 ühine kahetahuline nurk (servaga AS) võrdsete tasanurkade vahel:

$$\angle SA_1E_1 = \angle SAE \text{ ja } \angle SA_1B_1 = \angle SAB.$$

95. Teoreem. ***Sarnaste hulktahukate pindalad suhtuvad nagu vastavate servade ruudud.***

Tähistagu tähed P_1, P_2, $P_3, \ldots, P_n$ ühe hulktahuka üksikute tahkude pindalasid, tähed p_1, p_2, $p_3, \ldots, p_n$ tähistagu teise, esimesega sarnase hulktahuka vastavate tahkude pindalasid; oletame veel, et lõigud L ja l on mingi kahe teineteisele vastava serva pikkused.

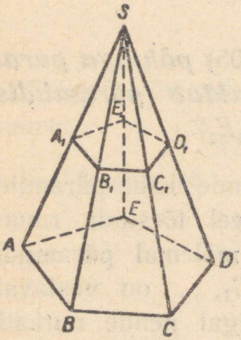
Siis vastavate tahkude sarnasuse ja vastavate servade võrdelisuse tõttu saame, et

$$\frac{P_1}{p_1} = \frac{L^2}{l^2}, \quad \frac{P_2}{p_2} = \frac{L^2}{l^2}, \quad \frac{P_3}{p_3} = \frac{L^2}{l^2}, \; \ldots, \frac{P_n}{p_n} = \frac{L^2}{l^2},$$

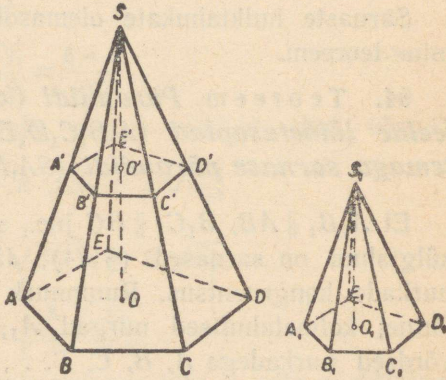
millest võrdsete suhete omaduse põhjal leiame, et

$$\frac{P_1+P_2+P_3+\ldots+P_n}{p_1+p_2+p_3+\ldots+p_n}=\frac{L^2}{l^2}.$$

96. Teoreem. ***Sarnaste hulktahukate ruumalad suhtuvad nagu vastavate servade kuubid.***



Joon. 105.



Joon. 106.

Piirdume selle teoreemi tõestamisega ainult sarnaste püramiidide kohta. Olgu (joon. 106) püramiidid $SABCDE$ ja $S_1A_1B_1C_1D_1E_1$ sarnased. Paigutame teise püramiidi esimese sisse nii, et ühtivad nende ruumnurgad S ja S_1.

Siis põhi $A_1B_1C_1D_1E_1$ satub asendisse $A'B'C'D'E'$, kusjuures küljed $A'B'$, $B'C'$, ... on vastavalt paralleelsed küljedega AB, BC, ... (selle tõttu, et kolmetahuliste nurkade A ja A_1, B ja B_1 jne. vastavad tasanurgad on võrdsed). Seepärast tasapind $A'B'C'D'E'$ on paralleelne tasapinnaga $ABCDE$. Olgu SO ja SO' püramiidide kõrgused.

Siis

$$\text{ruumala } SABCDE = \frac{(\text{pindala } ABCDE)\cdot SO}{3};$$

$$\text{ruumala } SA'B'C'D'E' = \frac{(\text{pindala } A'B'C'D'E')\cdot SO'}{3}$$

Seega

$$\frac{\text{ruumala } SABCDE}{\text{ruumala } SA'B'C'D'E'} = \frac{\text{pindala } ABCDE}{\text{pindala } A'B'C'D'E'} \cdot \frac{SO}{SO'};$$

kuid

$$\frac{\text{pindala } ABCDE}{\text{pindala } A'B'C'D'E'} = \frac{SO^2}{SO'^2},$$

seega

$$\frac{\text{ruumala } SABCDE}{\text{ruumala } SA'B'C'D'E'} = \frac{SO^3}{SO'^3} = \frac{SA^3}{SA'^3}.$$

Järelikult ka

$$\frac{\text{ruumala } SABCDE}{\text{ruumala } S_1A_1B_1C_1D_1E_1} = \frac{SA^3}{S_1A_1{}^3}.$$

IV. Korrapärased hulktahukad.

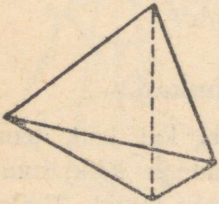
Hulktahukat nimetatakse **korrapäraseks,** kui kõik tema tahud on võrdsed korrapärased hulknurgad ja kõik ruumnurgad on kongruentsed (säärane on näiteks kuup). Sellest definitsioonist järeldub, et korrapärastel hulktahukatel on võrdsed kõik tasanurgad, kõik kahetahulised nurgad ja kõik servad.

97. Korrapäraste hulktahukate loetelu. Peame silmas, et mitmetahulise nurga väikseim tahkude arv on kolm, ja et kumera mitmetahulise nurga tasanurkade summa on väiksem kui 2π ehk 360° (§ 51). Korrapärase kolmnurga iga nurk on 60°. Kui võtame 60° liidetavana 3, 4 ja 5 korda, siis saame summad, mis on väiksemad kui 360°; kui aga võtame 60° liidetavana 6 või rohkem korda, siis saame summa, mis on 360° või suurem kui 360°. Seepärast võib korrapärase kolmnurga nurgaga võrdsetest tasanurkadest moodustada ainult kolme liiki mitmetahulisi nurki: kolmetahulisi, neljatahulisi ja viietahulisi. Järelikult kui korrapärase hulktahuka tahkudeks on korrapärased kolmnurgad, siis hulktahuka tipust võib lähtuda kas 3 või 4 või 5 serva. Sellele vastavalt on kolm liiki kolmnurksete tahkudega korrapäraseid kehasid:

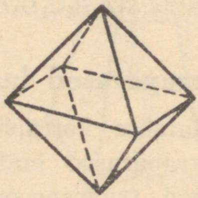
1) Korrapärane nelitahukas ehk korrapärane **tetraeeder**, mille pind koosneb neljast korrapärasest kolmnurgast (joon. 107). Tal on 4 tahku, 4 tippu ja 6 serva.

2) Korrapärane kaheksatahukas ehk korrapärane **oktaeeder,** mille pind koosneb kaheksast korrapärasest kolmnurgast (joon. 108). Tal on 8 tahku, 6 tippu ja 12 serva.

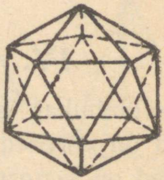
3) Korrapärane kakskümmendtahukas ehk korrapärane **ikosaeeder,** mille moodustavad kakskümmend korrapärast kolmnurka (joon. 109). Tal on 20 tahku, 12 tippu ja 30 serva.



Joon. 107.



Joon. 108.



Joon. 109.

Ruudu nurk on 90° ja korrapärase viisnurga nurk on 108°; võttes neid nurki liidetavana 3 korda, saame 360°-st väiksemad summad, võttes aga 4 või enam korda, saame summas 360° või rohkem. Seepärast võib säärastest tasanurkadest, mis on võrdsed ruudu või korrapärase viisnurga nurkadega, moodustada ainult kolmetahulisi nurki.

Ja seepärast, kui hulktahuka tahkudeks on ruudud, siis igast tipust võib lähtuda ainult 3 serva. Seda liiki korrapäraseid hulktahukaid on ainult üks — see on korrapärane kuustahukas ehk korrapärane **heksaeeder** ehk kuup (joon. 110), tal on 6 tahku, 8 tippu ja 12 serva.

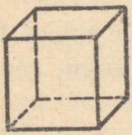
Kui korrapärase hulktahuka tahkudeks on korrapärased viisnurgad, siis igast tipust võib lähtuda ainult 3 serva.

Seda liiki korrapäraseid hulktahukaid on ainult üks

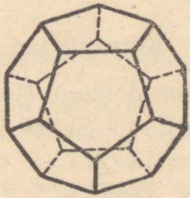
— korrapärane kaksteisttahukas ehk korrapärane **dodekaeeder**. Tal on 12 tahku, 20 tippu ja 30 serva (joon. 111).

Korrapärase kuusnurga nurk on 120°; seega säärastest nurkadest ei saa moodustada isegi kolmetahulist nurka. Kui korrapärase hulknurga külgede arv on suurem kuuest, siis tema nurkadest ei saa ammugi moodustada mingit kumerat ruumnurka.

Siit järeldub, et korrapärase hulktahuka tahkudeks võivad olla ainult korrapärased kolmnurgad, ruudud ja korrapärased viisnurgad.



Joon. 110.



Joon. 111.

Seega on võimalikud ainult viis ülalnäidatud liiki korrapäraseid hulktahukaid.

98. Korrapäraste hulktahukate konstruktsioon. Ülaltoodud arutlused korrapäraste hulktahukate võimalikkude liikide kohta näitavad, et korrapäraseid hulktahukaid ei või olla rohkem kui viis liiki.

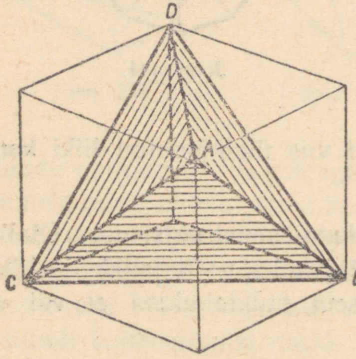
Kuid sellest ei saa veel järeldada, et kõik need viis liiki korrapäraseid hulktahukaid ka tõeliselt on olemas, s. o. et tasapindade juhtimise abil ruumis võib teostada kõige viie liigi korrapäraste hulktahukate konstruktsioone. Et veenduda kõikide korrapäraste hulktahukate olemasolus, selleks piisab, kui näitame iga keha ehitamise viisi. Kuubi ehitamisviis on eriti lihtne. Võtame vabalt tasapinna a ja selles mingi ruudu; läbi selle külgede juhime risttasapinnad tasapinnale a. Sääraseid tasapindu on neli. Edasi võtame tasapinnaga a paralleelse tasapinna β, mis asetseb viimasest ruudu külje pikkusega võrdsel kaugusel.

Need kuus tasapinda moodustavad kuubi tahud; kaksteist sirget, mida mööda lõikuvad lõikuvate tasapindade paarid, on kuubi servadeks ja kaheksa punkti, milles lõikuvad lõikuvate tasapindade kolmikud, on kuubi tippudeks. Selles on kerge veenduda, vaadeldes vahetult tekkinud punktide, sirgete ja tasapindade kogu.

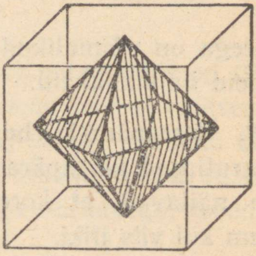
Kui oskame ehitada kuubi, siis on kerge leida ka kõikide teiste korrapäraste hulktahukate ehitamise viise.

Korrapärase tetraeedri konstruktsioon.

Olgu antud kuup (joon. 112). Võtame mingi tema tipu, näiteks tipu A. Selles lõikuvad kuubi kolm ruudukujulist



Joon. 112.



Joon. 113.

tahku. Võtame igas ruudus tipu A vastastipu. Olgu need kuubi tipud B, C ja D. Punktid A, B, C ja D on korrapärase tetraeedri tippudeks. Tõesti lõikudest AB, BC, CD, AD, BD ja AC on igaüks ilmsesti kuubi ühe tahu diagonaaliks. Ja seepärast kõik need lõigud on võrdsed. Siit järeldub, et kolmnurkses püramiidis, mille tipp on A ja põhi on BCD, on kõik tahud korrapärased kolmnurgad, seega see püramiid on korrapärane tetraeeder. See tetraeeder on kujundatud antud kuupi.

On tulus tähele panna, et kuubi ülejäänud neli tippu on teise samasse kuupi kujundatud korrapärase tetraeedri tippudeks, mis on kongruentne esimesega.

Oktaeedri konstruktsioon.

Kui antud kuubil ehitada kõikide tahkude keskpunktid, siis sel teel saadud kuus punkti on korrapärase oktaeedri tippudeks. Selles on kerge veenduda vaadeldes joonist 113.

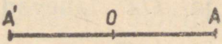
Dodekaeedri ja ikosaeedri konstruktsioon.

Kui läbi kuubi iga serva võtta tasapind, millel kuubi pinnaga ei ole teisi ühiseid punkte peale selle serva punktide, siis 12 saadud tasapinda on mingi 12-tahuka tahkudeks. Selle hulktahuka lähem uurimine näitab, et tasapindade kalded kuubi tahkude suhtes võib nii valida, et tekib korrapärane dodekaeeder.

Lõpuks, kui oskame ehitada dodekaeedrit, siis ikosaeedri ehitamine ei tee raskusi: dodekaeedri tahkude keskpunktid on ikosaeedri tippudeks.

V. Ruumiliste kujundite sümmeetria.

99. Tsentraalne sümmeetria. Kahte kujundit nimetatakse ruumi mingi punkti O suhtes sümmeetriliseks, kui ühe kujundi igale punktile A vastab teise kujundi punkt A', mis asetseb sirgel OA teisel pool punkti O samal kaugusel sellest punktist nagu punkt A (joon. 114). Punkti O nimetatakse kujundite sümmeetriakeskpunktiks. Sääraste sümmeetriliste kujundite näidet ruumis me juba nägime (§ 53), kui

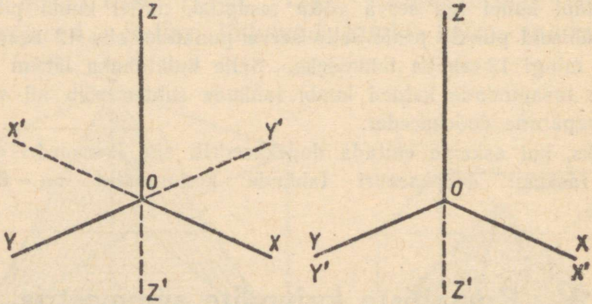


Joon. 114.

pikendasime ruumnurga servi üle tema tipu ning saime antud ruumnurgaga sümmeetrilise ruumnurga.

Sümmeetriliste kujundite vastavad lõigud ja vastavad nurgad on võrdsed. Sellele vaatamata ei saa nimetada neid kujundeid kongruentseteks: neid ei saa paigutada teineteise sisse seetõttu, et ühe kujundi elementide järjekord on erinev teise kujundi elementide järjekorrast, nagu nägime sümmeetriliste ruumnurkade näites.

Erijuhtumitel sümmeetrilised kujundid võivad ka ühtida, kuid seejuures ei ühti nende vastavad elemendid. Näiteks võtame kolmetahulise täisnurga (joon. 115) tipuga *O* ja servadega *OX*, *OY*, *OZ*.



Joon. 115.

Ehitame temale sümmeetrilise nurga *OX'Y'Z'*. Nurga *OXYZ* võib paigutada nurga *OX'Y'Z'* sisse nii, et serv *OX* ühtib servaga *OY'* ning serv *OY* ühtib servaga *OX'*. Kui aga paigutada ühte vastavad servad: *OX* ja *OX'* ning *OY* ja *OY'*, siis servad *OZ* ja *OZ'* lähevad teineteisele vastassuundades.

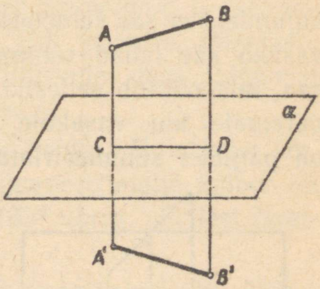
Kui sümmeetrilised kujundid moodustavad teineteisega koos ühe geomeetrilise keha, siis öeldakse, et sellel geomeetrilisel kehal on sümmeetriakeskpunkt. Seega kui antud kehal on sümmeetriakeskpunkt, siis igale selle keha punktile vastab mingi teine sellesama keha sümmeetriline punkt. Meile tuttavatest geomeetrilistest kehadest on sümmeetriakeskpunkt näiteks: 1) rööptahukal; 2) prismal, mille põhjaks on paarisarvulise külgede arvuga korrapärane hulknurk.

Korrapärasel tetraeedril ei ole sümmeetriakeskpunkti.

100. Sümmeetria tasapinna suhtes. Kahte ruumilist kujundit nimetatakse sümmeetriliseks tasapinna α suhtes, kui ühe kujundi igale punktile A vastab teise kujundi punkt A', kusjuures lõik AA' on risti tasapinnaga α ja poolitub lõikumisel selle tasapinnaga.

Teoreem. ***Kahe sümmeetrilise kujundi iga paar vastavaid lõike on võrdsed.***

Olgu antud kaks tasapinna α suhtes sümmeetrilist kujundit. Eraldame ühes kujundis mingid kaks punkti A ja B. Olgu punktid A' ja B' neile vastavad teise kujundi punktid (joon. 116, joonisel kujundeid endid ei ole näidatud). Punkt C olgu lõigu AA' ja tasapinna α lõikepunkt, D olgu lõigu BB' lõikepunkt sellesama tasapinnaga. Ühendades sirglõigu abil punktid C ja D, saame kaks nelinurka, $ABDC$ ja $A'B'DC$. Et $AC = A'C$, $BD = B'D$ ja $\angle ACD = \angle A'CD$, $\angle BDC = \angle B'DC$ kui täisnurgad, siis need nelinurgad on kongruentsed (milles veendume kergesti nende paigutamise teel teineteisele). Järelikult $AB = A'B'$. Sellest teoreemist järeldub otseselt, et tasapinna suhtes sümmeetriliste kujundite vastavad tasanurgad ja vastavad kahetahulised nurgad on võrdsed. Sellele vaatamata neid kujundeid ei saa teineteise sisse paigutada nii, et nende vastavad osad ühtiksid, sest ühe keha osade järjestus on vastupidine teise keha



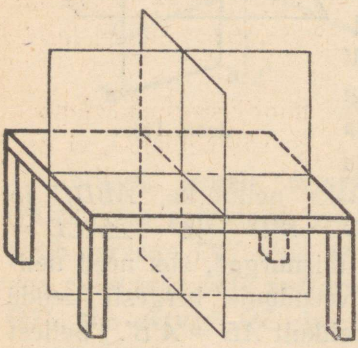
Joon. 116.

osade järjestusega (seda tõestatakse hiljem § 102). Tasapinna suhtes sümmeetriliste kehade lihtsaimaks näiteks on mistahes ese ja tema peegeldus tasapinnalises peeglis: iga kujund on peegli tasapinna suhtes sümmeetriline oma peegeldusega.

Kui mingit geomeetrilist keha võib tükeldada kaheks osaks, mis on sümmeetrilised mingi tasapinna suhtes, siis seda tasapinda nimetatakse antud keha sümmeetriatasapinnaks.

Geomeetrilisi kehi, millel on sümmeetriatasapind, esineb väga palju looduses ja igapäevases elus. Inimese ja looma kehal on sümmeetriatasapind, mis jaotab keha paremaks ja vasakuks pooleks.

Sellest näitest nähtub eriti selgesti, et sümmeetrilisi kujundeid ei saa teineteise sisse paigutada. Nii on parema ja vasaku käe labad sümmeetrilised, kuid ühtima neid viia ei saa, mis nähtub sellestki, et üks ja sama kinnas ei sobi nii paremale kui vasakule käele. Igapäevastest tarbeasjadest on paljudel sümmeetriatasapind: toolil, söögilaual, raamatukapil, diivanil jm. Mõnel esemel, näiteks söögilaual, on isegi kaks sümmeetriatasapinda (joon. 117).



Joon. 117.

Sümmeetrilist eset vaadeldes püüame tema suhtes harilikult võtta niisugust asendit, et meie keha või vähemalt meie pea sümmeetriatasapind ühtiks selle eseme sümmeetriatasapinnaga. Sel juhul on eseme kuju sümmeetrilisus eriti märgatav.

101. Teljeline sümmeetria. Teist järku sümmeetriatelg. Kahte kujundit nimetatakse sümmeetriliseks telje l suhtes, kui esimese kujundi igale punktile A vastab teise kujundi punkt A' nii, et lõik AA' on risti teljega l, lõikub temaga ja lõikepunktis jaguneb pooleks.

Telge l ennast nimetatakse teist järku sümmeetriateljeks.

Sellest definitsioonist järeldub otseselt, et kui kahte mingi sirge suhtes sümmeetrilist keha lõigata selle sirge risttasapinnaga, siis tekib kaks tasapinnalist kujundit, mis on sümmeetrilised sirge ja tasapinna lõikepunkti suhtes.

Edasi on kerge järeldada siit, et kahte telje suhtes sümmeetrilist keha on võimalik teineteisega ühtima viia, pöörates ühte neist sümmeetriatelje ümber 180° võrra. Kujutleme kõiki võimalikke sümmeetriateljega ristuvaid tasapindu.

Iga niisugune tasapind, lõigates kumbagi keha, sisaldab kaks kujundit, mis on sümmeetrilised tasapinna ja kehade sümmeetriatelje lõikepunkti suhtes. Kui pöörata lõiketasapinda sümmeetriatelje ümber 180°, libistades teda iseennast mööda, siis esimene kujund ühtib teisega.

See on õige iga lõike ja tasapinna kohta. Kuid keha kõikide lõigete pööramine 180° võrra sümmeetriatelje ümber on samaväärne keha enda pööramisega 180° võrra. Sellest järeldubki, et meie väide on õige.

Kui ruumilise kujundi pööramisel mingi sirgjoone ümber 180° võrra see kujund ühtib iseenesega, siis öeldakse, et see sirge on kujundi teist järku sümmeetriateljeks.

Nimetus «teist järku sümmeetriatelg» põhjeneb sellel, et täispöörde jooksul selle telje ümber keha satub kaks korda esialgse asendiga ühtivasse asendisse (arvestades ka esialgset asendit). Geomeetriliste kehade näideteks, millel on teist järku sümmeetriatelg, võivad olla:

1) korrapärane püramiid, mille külgtahkude arv on paarisarv; tema sümmeetriateljeks on tema kõrgus;

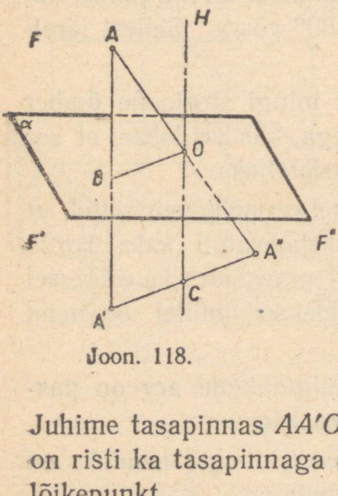
2) risttahukas; tal on kolm sümmeetriatelge: nendeks on vastastahkude keskpunkte läbivad sirged;

3) korrapärane prisma, mille külgtahkude arv on paarisarv. Tema sümmeetriateljeks on iga sirge, mis läbib vastastahkude (kas külgtahkude või põhitahkude) keskpunkte. Kui prisma külgtahkude arv on $2k$, siis sümmeetriatelgede arv on $k + 1$. Peale selle on niisuguse prisma sümmeetriateljeks iga sirge, mis läbib tema teineteise vastas asetsevate külgservade keskpunkte. Sääraste sümmeetriatelgede arv on k.

Seega on korrapärasel $2k$-nurksel prismal $2k + 1$ sümmeetriatelge.

102. Olenevus mitmesuguste ruumilise sümmeetria liikide vahel. Eri liiki sümmeetriate vahel ruumis — teljelise, tasapinnalise ja tsentraalse sümmeetria vahel — kehtib seos, mida väljendab järgmine teoreem.

T e o r e e m. **Kui kujund F on sümmeetriline kujundiga F' tasapinna α suhtes ja on ühtlasi sümmeetriline kujundiga F'' tasapinnal α asetseva punkti O suhtes, siis kujundid F' ja F'' on sümmeetrilised telje suhtes, mis läbib punkti O ja on risti tasapinnaga α.**



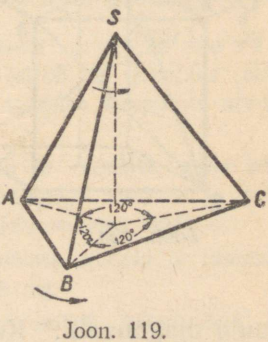
Joon. 118.

Võtame kujundi F mingi punkti A (joon. 118). Sellele vastab kujundi F' punkt A' ja kujundi F'' punkt A'' (kujundid F, F' ja F'' ise ei ole joonisel kujutatud).

Olgu B sirglõigu AA' ja tasapinna α lõikepunkt. Võtame punktidega A, A' ja O määratud tasapinna. See tasapind on risti tasapinnaga α, sest ta läbib sirget AA', mis on risti tasapinnaga α. Juhime tasapinnas $AA'O$ sirgele OB ristsirge OH. Sirge OH on risti ka tasapinnaga α. Olgu punkt C sirgete $A'A''$ ja OH lõikepunkt.

Sirglõik BO ühendab kolmnurgas $AA'A''$ külgede AA' ja AA'' keskpunkte, seega $BO \parallel A'A''$, kuid $BO \perp OH$, tähendab $A'A'' \perp OH$. Edasi, et punkt O on külje AA'' keskpunkt ja $CO \parallel AA'$, siis $A'C = A''C$. Siit järeldame, et punktid A' ja A'' on sümmeetrilised telje OH suhtes. Seesama on kehtiv kujundi kõikide teiste punktide kohta. Seega meie teoreem on tõestatud. Sellest teoreemist järeldub otseselt, et kaks tasapinna suhtes sümmeetrilist kujundit ei saa ühtida nii, et nende vastavad osad ühtiksid. Tõesti kujund F' ühtib kujundiga F'' tema pööramisel 180° võrra telje OH ümber. Kuid kujundid F'' ja F ei saa ühtida, sest nad on sümmeetrilised punkti suhtes; järelikult ei saa ühtida ka kujundid F ja F'.

103. Kõrgemat järku sümmeetriateljed. Kujund, millel on sümmeetriatelg, ühtib iseenesega pärast sümmeetriatelje ümber pööramist 180° võrra. Kuid on võimalikud juhud, mil kujund ühtib oma esialgse asendiga pärast pööramist mingi telje ümber vähem kui 180° võrra. Nii et kui keha teeb selle telje ümber täispöörde, siis ühtib ta täispöörde vältel oma esialgse asendiga mitu korda. Niisugust telge nimetatakse kõrgemat järku sümmeetriateljeks, kusjuures täispöörde vältel keha esialgse asendiga ühtivate asendite arvu nimetatakse sümmeetriatelje järguks. See telg ei tarvitse ühtida teist järku sümmeetriateljega. Nii ei ole korrapärasel kolmnurksel püramiidil teist järku sümmeetriatelge, kuid kõrgus on tema kolmandat järku sümmeetriateljeks. Tõesti pärast selle püramiidi pööramist tema kõrguse ümber 120° võrra ta ühtib iseenesega (joon. 119). Püramiidi pööramisel kõrguse ümber võtab ta kolm asendit, mis ühtivad lähteasendiga, lähteasend



Joon. 119.

kaasa arvatud. Kergesti nähtub, et iga paarisjärku sümmeetriatelg on ühtaegu ka teist järku sümmeetriateljeks.

Kõrgemat järku sümmeetriatelgede näiteid:

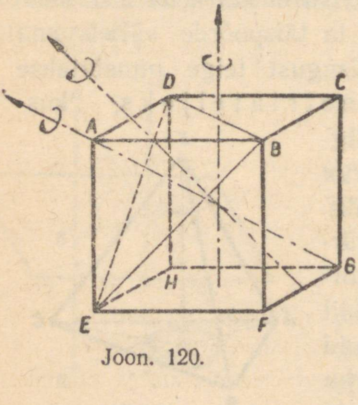
1) korrapärasel n-nurksel püramiidil on n-indat järku sümmeetriatelg; selleks teljeks on püramiidi kõrgus;

2) korrapärasel n-nurksel prismal on n-indat järku sümmeetriatelg; selleks teljeks on prisma põhjade keskpunkte läbiv sirge.

104. Kuubi sümmeetria. Nagu iga rööptahuka, nii ka kuubi diagonaalide lõikepunkt on tema sümmeetria keskpunktiks.

Kuubil on üheksa sümmeetriatasapinda: kuus diagonaaltasapinda ja kolm tasapinda, mis läbivad iga nelja paralleelse serva keskpunkte.

Kuubil on üheksa teist järku sümmeetriatelge: kuus sirget, mis ühendavad tema vastasservade keskpunkte ja kolm sirget, mis ühendavad vastastahkude keskpunkte (joon. 120). Viimased sirged on neljandat järku sümmeetriatelgedeks. Kuubil on peale selle neli kolmandat järku sümmeetriatelge, mis on tema diagonaalideks. Tõepoolest kuubi diagonaal AG (joon. 120) on ilmsesti ühteviisi kaldu servade AB, AD ja AE suhtes ja need servad on ühteviisi kaldu üksteise suhtes. Kui ühendada punktid B, D ja E, siis saame korrapärase kolmnurkse püramiidi, mille kõrgus asetseb kuubi diagonaalil. Kui püramiidi pööramisel kõrguse ümber püramiid ühtib iseenesega, siis ka kogu kuup ühtib oma lähteasendiga. Muid sümmeetriatelgi, nagu kerge on veenduda, kuubil ei ole.



Joon. 120.

Vaatame, mitmel eri viisil kuup võib ühtida iseenesega. Pööramine hariliku sümmeetriatelje ümber annab ühe lähteasendist erineva kuubi asendi, milles kuup ühtib iseenesega. Pööramine kolmandat järku sümmeetriatelje ümber annab kaks niisugust asendit ning pööramine neljandat järku sümmeetriatelje ümber — kolm niisugust asendit. Et kuubil on kuus teist järku sümmeetriatelge (need on harilikud sümmeetriateljed), neli kolmandat järku ning kolm neljandat järku sümmeetriatelge, siis on

$$6 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 23$$

lähteasendist erinevat kuubi asendit, milles ta ühtib iseenesega.

On kerge otseselt veenduda, et kõik need asendid erinevad üksteisest ja ka kuubi lähteasendist. Koos lähteasendiga moodustavad nad 24 võimalikku kuubi iseenesega ühtimise juhtu.

Harjutusi.

1. Antud kuubi serva pikkus on a. Avaldada kaks korda suurema ruumalaga kuubi serva pikkus.

kahekordistamise

Märkus. See vanast ajast tuntud **kuubi kahendamise ülesanne** lahendub kergesti arvutamise teel (nimelt: $x = \sqrt[3]{2a^3} = a\sqrt[3]{2} = a \cdot 1{,}25992\ldots$), kuid konstruktsiooni teel (sirkli ja joonlaua abil) teda lahendada ei saa, sest otsitav avaldis sisaldab kuupjuurt arvust, mis ei ole ratsionaalarvu kuup.

2. Arvutada niisuguse püstprisma pindala ja ruumala, mille põhjaks on korrapärane kõõlkolmnurk ringis raadiusega $r = 2$ m ja mille kõrgus võrdub sama ringi korrapärase puutujakuusnurga küljega.

3. Arvutada korrapärase kaheksanurkse prisma pindala ja ruumala, kui prisma kõrgus $h = 6$ m ja põhiserv $a = 8$ cm.

4. Arvutada korrapärase kuusnurkse püramiidi külgpindala ja ruumala, kui püramiidi kõrgus on 1 m ja apoteem moodustab kõrgusega 30°-se nurga.

5. Avaldada kolmnurkse püramiidi ruumala, mille iga külgserv on l ja põhiservad on a, b ja c.

6. Antud on kolmetahuline nurk $SABC$, mille kõik kolm tasanurka on täisnurgad. Tema servadele on paigutatud pikkused: $SA = a$, $SB = b$ ja $SC = c$. Läbi punktide A, B ja C on juhitud tasapind. Avaldada püramiidi $SABC$ ruumala.

7. Püramiidi kõrgus on h ja põhi on korrapärane kuusnurk küljega a. Missugusel kaugusel x, püramiidi tipust arvates, tuleb püramiidi lõigata põhjaga paralleelse tasapinnaga, et tekkinud tüvipüramiidi ruumala oleks V?

8. Korrapärase tetraeedri serv on a. Avaldada ruumala.

9. Korrapärase oktaeedri serv on a. Avaldada ruumala.

10. Tüvipüramiidi ruumala $V = 1465$ cm^3, tema põhjadeks on korrapärased kuusnurgad servadega $a = 23$ cm ja $b = 17$ cm. Arvutada selle tüvipüramiidi kõrgus.

11. Tüvipüramiidi ruumala $V = 10{,}5$ m^3, kõrgus $h = \sqrt{3}$ m ja tema alumiseks põhjaks oleva korrapärase kuusnurga külg $a = 2$ m. Arvutada ülemiseks põhjaks oleva korrapärase kuusnurga külje pikkus.

12. Kui kaugel püramiidi $SABC$ tipust S tuleb võtta põhjaga paralleelne tasapind, et nende osade, milleks see tasapind lõikab püramiidi, ruumalade suhe oleks m?

13. Püramiid kõrgusega h on põhjaga paralleelsete tasapindadega jaotatud kolmeks osaks, kusjuures nende osade ruumalad suhtuvad nagu $m:n:p$. Avaldada nende tasapindade kaugused püramiidi tipust.

14. Kahe sarnase hulktahuka ruumalade summa on V ja vastavate servade suhe on $m:n$. Avaldada nende ruumalad.

15. Lõigata tüvipüramiid põhjadega S_1 ja S_2 paralleelse tasapinnaga kaheks niisuguseks osaks, mille ruumalad suhtuvad nagu $m:n$.

16. Leida sümmeetriakeskpunkt, -teljed ja -tasapinnad kujundile, mis koosneb tasapinnast ja teda kaldu lõikavast sirgest.

V a s t u s: sümmeetriakeskpunktiks on sirge ja tasapinna lõikepunkt; sümmeetriatasapinnaks osutub antud tasapinnaga ristuv ja antud sirget läbiv tasapind; sümmeetriateljeks on sirge, mis asetseb antud tasapinnas ja on risti antud sirgega.

17. Leida sümmeetriakeskpunkt, -teljed ja -tasapinnad kujundile, mis koosneb kahest lõikuvast sirgest.

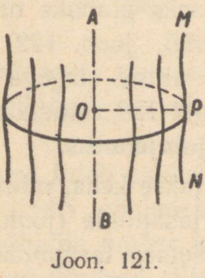
V a s t u s: kujundil on kaks sümmeetriatasapinda ja kolm sümmeetriatelge (näidata, millised).

Neljas peatükk.

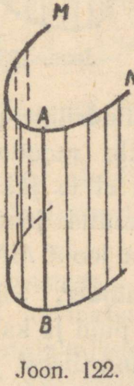
ÜMARKEHAD.

I. Silinder ja koonus.

105. Pöördpind. Pöördpinnaks nimetatakse pinda, mis tekib mingi **moodustajaks** nimetatava joone (*MN*, joon. 121) pöörlemisel liikumatu sirge (*AB*) ümber, mida nimetatakse **teljeks**; seejuures eeldatakse, et moodustaja (*MN*) on pöörlemisel muutumatult seotud teljega (*AB*).



Joon. 121.



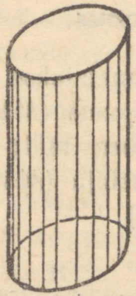
Joon. 122.

Võtame moodustajal mingi punkti *P* ja juhime sellest teljeni ristlõigu *PO*. On ilmne, et pöörlemisel ei muutu ei selle ristlõigu pikkus, ei nurga *AOP* suurus ega ka punkti *O* asend. Seepärast moodustaja iga punkt joonestab ringjoone, mille tasapind on risti teljega *AB* ja mille keskpunktiks on selle tasapinna ja telje lõikepunkt.

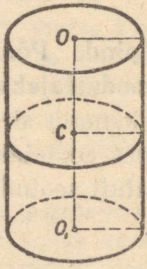
Siit järeldub:

teljega ristuva tasapinna ja pöördpinna lõikejoon on ringjoon.

Iga lõiketasapinda, mis läbib pöördpinna telge, nimetatakse **meridiaantasapinnaks**, ja tema lõikejoont pöördpinnaga nimetatakse pöördpinna m e r i d i a a n i k s. Kõik meridiaanid on kongruentsed, sest pöörlemisel igaüks neist läbib selle asendi, milles varem oli mõni teine meridiaan.



Joon. 123.



Joon. 124.

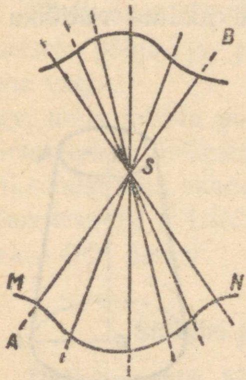
106. Silindriline pind. Silindriliseks pinnaks nimetatakse pinda, mille moodustab sirge (*AB*, joon. 122) liikudes ruumis nii, et ta jääb paralleelseks antud sirgega ja lõikab seejuures antud joont (*MN*). Sirget *AB* nimetatakse **moodustajaks** ja joont *MN* nimetatakse **juhtjooneks.**

107. Silinder. Silindriks nimetatakse keha, mida piiravad silindriline pind ja kaks paralleelset tasapinda (joon. 123).

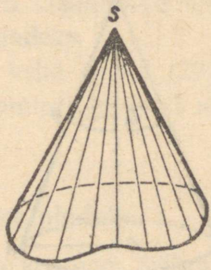
Osa silindrilisest pinnast, mis asetseb tasapindade vahel, nimetatakse silindri **külgpinnaks**, silindrilise pinnaga tasapindadest ära lõigatud osi nimetatakse silindri **põhjadeks.** Põhjadevahelist kaugust nimetatakse silindri **kõrguseks.** Silindrit nimetatakse kas **püst-** või **kaldsilindriks** sedamööda, kas moodustajad on põhjadega risti või kaldu.

Püstsilindrit (joon. 124) nimetatakse **ringsilindriks**, kui tema põhjad on ringid. Säärast silindrit võib vaadelda kui keha, mis tekib ristküliku OAA_1O_1 pöörlemisel külje OO_1 kui telje ümber; külg AA_1 kujundab seejuures külgpinna ning küljed OA ja O_1A_1 — põhiringid. Iga sirglõik BC, mis on paralleelne lõiguga OA, kujundab samuti ringi, mille pind on risti teljega. Siit järeldub:

püstringsilindri lõige põhjadega paralleelse tasapinnaga on ring.



Joon. 125.



Joon. 126.

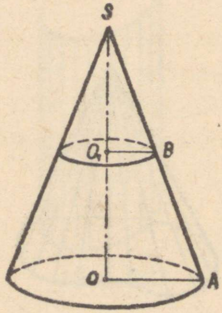
Elementaarses geomeetrias käsitellakse ainult püstringsilindrit; lühiduse pärast nimetatakse teda lihtsalt s i l i n d r i k s.

Mõnikord tuleb käsitella niisuguseid prismasid, mille põhjad on silindri põhjadesse kujundatud kõõlhulknurgad või silindri põhjade ümber kujundatud puutujahulknurgad, aga kõrgused on võrdsed silindri kõrgusega; sääraseid prismasid nimetatakse silindri s i s s e või silindri ü m b e r kujundatud prismadeks.

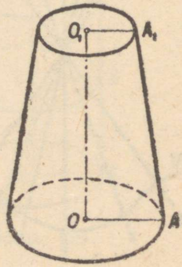
108. Kooniline pind. Kooniliseks pinnaks nimetatakse pinda, mis tekib sirge (AB, joon. 125) liikumisel ruumis nii, et see sirge läbib liikumatut punkti (S) ja lõikub antud joonega (MN). Sirget AB nimetatakse **moodustajaks,** joont MN — **juhtjooneks** ja punkti S — **koonilise pinna tipuks.**

109. Koonus. Koonuseks nimetatakse keha, mida piiravad ühelpool tippu asetsev koonilise pinna osa ja tasapind, mis lõikab kõiki moodustajaid ühel ja samal pool tippu (joon. 126). Selle tasapinnaga piiratud koonilise pinna osa nimetatakse koonuse **külgpinnaks** ja koonilise pinnaga tasapinnast ära lõigatud osa nimetatakse koonuse **põhjaks.**

Koonuse tipust põhitasapinnani juhitud ristlõiku nimetatakse koonuse **kõrguseks.**



Joon. 127.



Joon. 128.

Koonust nimetatakse **püstringkoonuseks,** kui tema põhi on ring ja kõrguse aluspunkt on põhja keskpunktiks (joon. 127). Säärast koonust võib vaadelda kui keha, mis tekib täisnurkse kolmnurga SOA pöörlemisel kaateti OS kui telje ümber.

Seejuures hüpotenuus SA kujundab külgpinna ja kaatet OA — koonuse põhja. Iga lõik BO_1, mis on paralleelne lõiguga OA, moodustab pöörlemisel ringi, mille pind on risti teljega. Siit järeldub:

püstringkoonuse lõige põhjaga paralleelse tasapinnaga on ring.

Elementaarses geomeetrias käsitellakse ainult püstringkoonust, mida lühiduse pärast nimetatakse lihtsalt k o o n u s e k s.

Mõnikord tuleb käsitella niisuguseid püramiide, mille põhjadeks on koonuse põhjasse kujundatud kõõlhulknurk või koonuse põhja ümber kujundatud puutujahulknurk ja mille tipp ühtib koonuse tipuga. Sääraseid püramiide nimetatakse koonuse s i s s e või koonuse ü m b e r kujundatud püramiidideks.

110. Tüvikoonus. Tüvikoonuseks nimetatakse koonuse osa, mis asetseb põhja ja p õ h j a g a p a r a l l e e l s e lõiketasapinna vahel.

Ringe, mida mööda paralleelsed tasapinnad lõikavad koonust, nimetatakse tüvikoonuse **põhjadeks.**

Tüvikoonust võib vaadelda kui keha (joon. 128), mis tekib täisnurkse trapetsi OAA_1O_1 pöörlemisel trapetsi alustega ristuva haara OO_1 ümber.

Silindri ja koonuse pindala.

111. Definitsioonid. Silindri ja koonuse külgpinnad kuuluvad **kõverate** pindade hulka, s. o. niisuguste pindade hulka, mille ükski osa ei ühti tasapinnaga. Seepärast peame eriti defineerima, mida mõista silindri või koonuse külgpindala all, kui neid pindalasid võrreldakse t a s a s e pindalaühikuga. Edaspidi toetume järgmistele d e f i n i t s i o o n i d e l e:

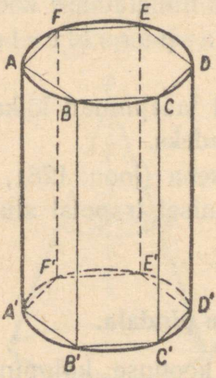
1) Silindri külgpindalaks loetakse silindri sisse kujundatud korrapärase prisma külgpindala piirväärtust, kui selle prisma põhiservade arv piiramatult suureneb (ning iga külgtahu pindala järelikult kahaneb).

2) *Koonuse* (või tüvikoonuse) *külgpindalaks loetakse koonuse sisse kujundatud korrapärase püramiidi* (või tüvipüramiidi) *külgpindala piirväärtust, põhiservade arvu piira-*

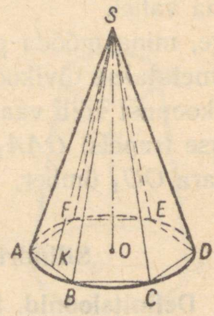
matul suurenemisel (järelikult iga külgtahu pindala kahanemisel).

112. Teoreem. ***Silindri külgpindala võrdub põhja ümbermõõdu ja kõrguse korrutisega.***

Kujundame silindrisse (joon. 129) mingi korrapärase prisma. Tähistame selle prisma põhja ümbermõõtu ja kõrgust väljendavaid arvusid tähtedega p ja h. Tema külgpindala väljendab siis korrutis $p \cdot h$. Kujutleme nüüd, et põhja kõõlhulknurga külgede arv piiramatult kasvab.



Joon. 129.



Joon. 130.

Siis ümbermõõt p läheneb piirväärtusele, mis loetakse silindri põhiringi ümbermõõdu pikkuseks C ning kõrgus h jääb muutumatuks; seega prisma külgpindala, mis alati võrdub korrutisega $p \cdot h$, läheneb piirväärtusele $C \cdot h$. Seda piirväärtust loetaksegi silindri külgpindalaks. Tähistades silindri külgpindala tähega S, võime siis kirjutada:

$$S = C \cdot h.$$

113. Järeldused. 1) Kui R tähendab silindri põhja raadiust, siis $C = 2\pi R$, seepärast silindri külgpindala väljendab valem

$$S = 2\pi R \cdot h.$$

2) Et saada silindri täispindala, selleks tuleb külgpindalale lisada põhjade pindalade summa; seega, tähistades täispindala tähega T, saame:

$$T = 2\pi Rh + \pi R^2 + \pi R^2 = 2\pi R\,(h + R).$$

114. Teoreem. ***Koonuse külgpindala võrdub põhja ümbermõõdu ja moodustaja poole korrutisega.***

Kujundame koonuse (joon. 130) sisse mingi korrapärase püramiidi ning tähistame selle püramiidi põhja ümbermõõdu ja külgtahu apoteemi tähtedega p ja l. Tema külgpindala väljendab siis korrutis $\frac{1}{2}\,pl$. Kujutleme nüüd, et põhja kõõlhulknurga külgede arv piiramatult kasvab; siis ümbermõõt p läheneb piirväärtusele, mida loetakse põhiringjoone pikkuseks C, kuna apoteemi l piirväärtuseks on koonuse moodustaja (sest kolmnurgast SAK järeldub, et $SA - SK < AK$); tähendab kui koonuse moodustajat tähistada tähega L, siis sissekujundatud püramiidi külgpindala, olles alati võrdne korrutisega $\frac{1}{2}\,pl$, läheneb piirväärtusele $\frac{1}{2}\,CL$. Seda piirväärtust loetaksegi koonuse külgpindalaks. Tähistades koonuse külgpindala tähega S, võime kirjutada:

$$S = \tfrac{1}{2}\,C \cdot L.$$

115. Järeldused. 1) Et $C = 2\pi R$, siis koonuse külgpindala väljendub valemiga:

$$S = \tfrac{1}{2} \cdot 2\pi R \cdot L = \pi RL.$$

2) Koonuse täispindala saame, kui külgpindalaga liidame põhja pindala; seega, tähistades täispindala tähega T, saame:

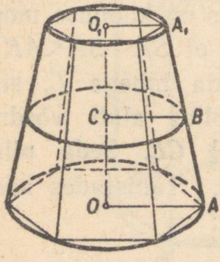
$$T = \pi RL + \pi R^2 = \pi R\,(L + R).$$

116. Teoreem. ***Tüvikoonuse külgpindala võrdub põhjade ümbermõõtude poolsumma ja moodustaja korrutisega.***

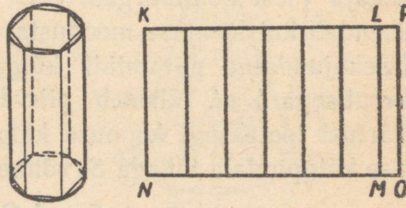
Kujundame tüvikoonuse (joon. 131) sisse mingi korrapärase tüvipüramiidi ning tähistame selle tüvipüramiidi põhjade ümbermõõdud ja külgtahu apoteemi tähtedega p, p_1 ja l. Siis sissekujundatud tüvipüramiidi külgpindala on $\frac{1}{2}(p+p_1)\,l$.

Sissekujundatud tüvipüramiidi külgtahkude arvu piiramatul kasvamisel ümbermõõdud p ja p_1 lähenevad piirväärtustele, mida loetakse põhiringide ümbermõõtude pikkusteks C ja C_1, kuna apoteemi l piirväärtuseks on tüvikoonuse moodustaja L. Järelikult sissekujundatud tüvipüramiidi külgpindala läheneb piirväärtusele $\frac{1}{2}(C+C_1)\,L$. Seda arvu loetakse tüvikoonuse külgpindalaks. Tähistades tüvikoonuse külgpindala tähega S, saame:

$$S = \tfrac{1}{2}(C + C_1)\,L.$$



Joon. 131.



Joon. 132.

117. Järeldused. 1) Kui R ja r tähendavad alumise ja ülemise põhja raadiusi, siis tüvikoonuse külgpindala

$$S = \tfrac{1}{2}(2\pi R + 2\pi r)\,L = \pi\,(R + r)\,L.$$

2) Kui trapetsis OO_1A_1A (joon. 131), mille pöörlemisel tüvikoonus tekib, võtame kesklõigu BC ja tähistame tema pikkuse tähega k, siis saame:

$$BC = \tfrac{1}{2}(OA + O_1A_1)$$

ehk

$$k = \tfrac{1}{2}(R + r),$$

millest leiame, et

$$R + r = 2k.$$

Seega

$$S = 2\pi k \cdot L,$$

s. o.

tüvikoonuse külgpindala võrdub kesklõike ümbermõõdu ja moodustaja korrutisega.

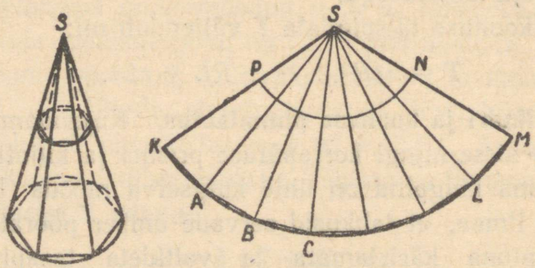
3) Tüvikoonuse täispindala T väljendub nii:

$$T = \pi(R^2 + r^2 + RL + rL).$$

118. Silindri ja koonuse pinnalaotus. Kujundame silindri (joon. 132) sisse mingi korrapärase prisma ja kujutleme seejärel, et tema külgpind on ühte külgserva mööda lahti lõigatud. On ilmne, et tahkusid servade ümber pöörates võime selle külgpinna käristamata ja voltideta tasapinnaliseks kujundiks laotada. Siis tekib see, mida nimetatakse prisma **külgpinnalaotuseks.** Ta kujutab endast ristkülikut $KLMN$, mis on moodustatud niimitmest ristkülikust, kuimitu külgtahku on prismal. Tema alus MN võrdub prisma põhja ümbermõõduga ja tema kõrguseks KN on prisma kõrgus.

Kujutleme nüüd, et sissekujundatud prisma külgtahkude arv järjest suureneb; siis tema külgpinnalaotus küll järjest pikeneb, kuid läheneb piir-ristkülikule $KPON$, mille alus on võrdne silindri põhja ümbermõõduga ja mille kõrguseks on silindri kõrgus. Seda ristkülikut nimetatakse silindri **külgpinnalaotuseks.**

Samal viisil kujutleme, et koonusesse on kujundatud mingi korrapärane püramiid (joon. 133). Meie võime tema külgpinna lahti lõigata ühte külgserva mööda ning seejärel tahkusid servade ümber pöörates saada külgpinna tasapinnaliseks laotuseks hulknurkse sektori SKL, mis on moodustatud niimitmest võrdhaarsest kolmnurgast, kuimitu külgtahku on püramiidil. Lõigud SK, SA, SB, ... võrduvad püramiidi külgservaga (ehk koonuse moodustajaga) ning murdjoone $KAB \ldots L$ pikkus võrdub püramiidi põhja ümbermõõduga. Koonusesse kujundatud püramiidi külgtahkude arvu piiramatul suurendamisel tema pinnalaotus küll järjest suureneb, kuid läheneb piir-sektorile *SKM*, mille kaare *KM* pikkus võrdub koonuse põhja ümbermõõdu pikkusega ja raadius *SK* võrdub koonuse moodustajaga. Seda sektorit nimetatakse koonuse **külgpinnalaotuseks.**



Joon. 133.

Samal viisil võime saada tüvikoonuse külgpinnalaotuse *KMNP* (joon. 133), mis kujutab endast rõnga osa. On kerge näha, et silindri ja koonuse külgpindala on võrdne vastava pinnalaotuse pindalaga.

Silindri ja koonuse ruumala.

119. Definitsioonid. 1) *Silindri ruumalaks loetakse silindrisse kujundatud korrapärase prisma ruumala piirväärtust selle prisma külgtahkude arvu piiramatul suurenemisel.*

2) *Koonuse* (või tüvikoonuse) *ruumalaks loetakse koonusesse* (või tüvikoonusesse) *kujundatud korrapärase püramiidi* (või tüvipüramiidi) *ruumala piirväärtust külgtahkude arvu piiramatul suurenemisel.*

120. Teoreemid. 1) ***Silindri ruumala võrdub põhja pindala ja kõrguse korrutisega.***

2) ***Koonuse ruumala võrdub põhja pindala ja kõrguse ühe kolmandiku korrutisega.***

Kujundame silindrisse mingi korrapärase prisma ja koonusesse mingi korrapärase püramiidi; tähistanud siis prisma või püramiidi põhja pindala tähega S_1, nende kõrguse — tähega h ja ruumala — tähega V_1, saame:

$$\text{prisma jaoks } V_1 = S_1 h;$$
$$\text{püramiidi jaoks } V_1 = \tfrac{1}{3} S_1 h.$$

Kujutleme nüüd, et nii prisma kui ka püramiidi külgtahkude arv piiramatult suureneb. Siis suuruse S_1 piirväärtuseks on silindri või koonuse põhja pindala S, nende kõrgus h jääb aga muutumatuks; tähendab korrutised $S_1 h$ ja $\frac{1}{3} S_1 h$ lähenevad piirväärtustele Sh ja $\frac{1}{3} Sh$ ja seepärast silindri ja koonuse ruumalad on:

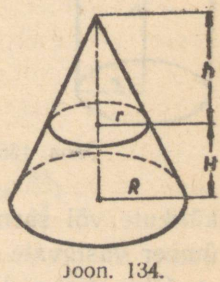
$$\text{silindri ruumala } V = Sh;$$
$$\text{koonuse ruumala } V = \tfrac{1}{3} Sh.$$

121. Järeldus. Kui tähistada silindri või koonuse raadiust tähega R, siis $S = \pi R^2$; seepärast

$$\text{silindri ruumala } V = \pi R^2 h;$$
$$\text{koonuse ruumala } V = \tfrac{1}{3} \pi R^2 h.$$

122. Teoreem. ***Tüvikoonuse ruumala võrdub kolme niisuguse koonuse ruumalade summaga, millede kõrgused on võrdsed antud tüvikoonuse kõrgusega ja millede põhjadeks on: esimesel — tüvikoonuse alumine põhi, teisel — ülemine põhi, kolmanda koonuse põhja pindala võrdub aga ülemise ja alumise põhja pindala geomeetrilise keskmisega.***

Seda teoreemi tõestame täiesti samal viisil, nagu tõestame tüvipüramiidi ruumala teoreemi (§ 92). Paigutame tüvikoonuse ülemisele põhjale (joon. 134) niisuguse koonuse (kõrgusega h), mis täiendab antud tüvikoonuse täiskoonuseks. Siis võib tüvikoonuse ruumala V vaadelda nagu täiskoonuse ja täiendava koonuse ruumalade vahet. Seepärast



Joon. 134.

$$V = \tfrac{1}{3} \pi R^2 (H + h) - \tfrac{1}{3} \pi r^2 h = \tfrac{1}{3} \pi \, [R^2 H + (R^2 - r^2) h].$$

Kolmnurkade sarnasusest leiame, et

$$\frac{R}{r}=\frac{H+h}{h},$$

millest saame:

$$Rh = rH + rh;\ (R-r)\,h = rH;\ h=\frac{rH}{R-r},$$

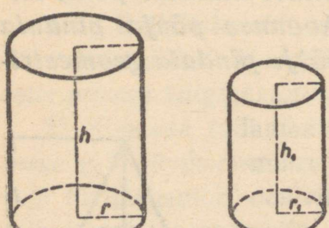
Seepärast

$$\begin{aligned} V &= \tfrac{1}{3}\pi[R^2H + (R+r)\,rH] = \\ &= \tfrac{1}{3}\pi H\,(R^2+Rr+r^2) = \\ &= \tfrac{1}{3}\pi R^2H + \tfrac{1}{3}\pi RrH + \tfrac{1}{3}\pi r^2H. \end{aligned}$$

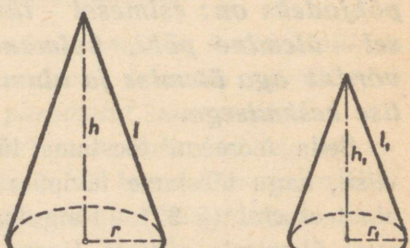
Et πR^2 väljendab alumise põhja pindala, πr^2 väljendab ülemise põhja pindala ja πRr ehk $\sqrt{\pi R^2 \cdot \pi r^2}$ on nimetatud põhjade pindalade geomeetriline keskmine, siis saadud valem on täiesti kooskõlas teoreemiga.

Sarnased silindrid ja koonused.

123. Definitsioon. Kahte silindrit või kahte koonust nimetatakse **sarnasteks**, kui nad on tekkinud sarnaste rist-



Joon. 135.



Joon. 136.

külikute või sarnaste täisnurksete kolmnurkade pöörlemisel ümber vastavate külgede.

Olgu (joon. 135 ja 136) h ja h_1 kahe sarnase silindri või kahe sarnase koonuse kõrgused, r ja r_1 — nende põhjade raadiused ning l ja l_1 — moodustajad; siis definitsiooni põhjal:

$$\frac{r}{r_1}=\frac{h}{h_1} \text{ ja } \frac{r}{r_1}=\frac{l}{l_1},$$

millest (võrdsete suhete omaduse põhjal) leiame, et

$$\frac{r+h}{r_1+h_1}=\frac{r}{r_1} \text{ ja } \frac{r+l}{r_1+l_1}=\frac{r}{r_1}.$$

Silmas pidades neid võrdeid, tõestame järgmise teoreemi.

124. Teoreem. ***Sarnaste silindrite ja sarnaste koonuste külg- ning täispindalad suhtuvad nagu raadiuste või kõrguste ruudud ja ruumalad suhtuvad nagu raadiuste või kõrguste kuubid.***

Olgu S, T ja V vastavalt ühe silindri või ühe koonuse külgpindala, täispindala ja ruumala; S_1, T_1 ja V_1 tähistagu vastavalt teise sarnase silindri või teise sarnase koonuse samu suurusi. Siis võime silindrite kohta kirjutada:

$$\frac{S}{S_1}=\frac{2\pi rh}{2\pi r_1 h_1}=\frac{rh}{r_1 h_1}=\frac{r}{r_1}\cdot\frac{h}{h_1}=\frac{r^2}{r_1^2}=\frac{h^2}{h_1^2};$$

$$\frac{T}{T_1}=\frac{2\pi r(r+h)}{2\pi r_1(r_1+h_1)}=\frac{r}{r_1}\cdot\frac{r+h}{r_1+h_1}=\frac{r^2}{r_1^2}=\frac{h^2}{h_1^2};$$

$$\frac{V}{V_1}=\frac{\pi r^2 h}{\pi r_1^2 h_1}=\frac{r^2}{r_1^2}\cdot\frac{h}{h_1}=\frac{r^3}{r_1^3}=\frac{h^3}{h_1^3};$$

ja koonuste kohta:

$$\frac{S}{S_1}=\frac{\pi rl}{\pi r_1 l_1}=\frac{r}{r_1}\cdot\frac{l}{l_1}=\frac{r^2}{r_1^2}=\frac{h^2}{h_1^2};$$

$$\frac{T}{T_1}=\frac{\pi r(r+l)}{\pi r_1(r_1+l_1)}=\frac{r}{r_1}\cdot\frac{r+l}{r_1+l_1}=\frac{r^2}{r_1^2}=\frac{h^2}{h_1^2};$$

$$\frac{V}{V_1}=\frac{\frac{1}{3}\pi r^2 h}{\frac{1}{3}\pi r_1^2 h_1}=\frac{r^2}{r_1^2}\cdot\frac{h}{h_1}=\frac{r^3}{r_1^3}=\frac{h^3}{h_1^3}.$$

II. Kera.

Kera tasapinnaline lõige.

125. **Definitsioon.** Keha, mis tekib poolringi pöörlemisel diameetri ümber, nimetatakse **keraks,** seejuures poolringjoone poolt moodustatud pinda nimetatakse **kerapinnaks** ehk **sfääriks.** Võib öelda, et see pind on ühest ja samast punktist (mida nimetatakse kera **keskpunktiks**) võrdsetel kaugustel asetsevate punktide geomeetriliseks kohaks.

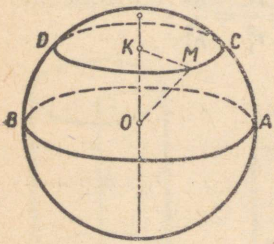
Keskpunkti mingi pinna punktiga ühendavat lõiku nimetatakse kera raadiuseks ja kahte pinna punkti ühendavat lõiku, mis läbib keskpunkti, nimetatakse kera **diameetriks.**

Ühe ja sama kera raadiused on kõik võrdsed; iga diameeter võrdub kahe raadiuse summaga.

Kaks võrdsete raadiustega kera on kongruentsed, sest teineteise sisse paigutamisel nad ühtivad.

126. Teoreem. ***Kera iga tasapinnaline lõige on ring.***

1) Oletame esiteks, et lõiketasapind AB (joon. 137) läbib kera keskpunkti O. Lõikejoone kõik punktid asetsevad kera pinnal ja on seepärast võrdsetel kaugustel punktist O, mis asetseb lõiketasapinnal; seega lõige on ring keskpunktiga O.



Joon. 137.

2) Oletame nüüd, et lõiketasapind CD ei läbi keskpunkti. Juhime kera keskpunktist lõiketasapinnani ristlõigu OK ning võtame kera ja tasapinna lõikejoonel mingi punkti M. Ühendades selle punktidega O ja K, saame täisnurkse kolmnurga MOK, millest leiame, et

$$MK = \sqrt{OM^2 - OK^2}. \qquad (1)$$

Et punkti M liikumisel mööda lõikejoont lõikude OM ja OK pikkused ei muutu, siis antud lõike puhul kaugus MK

on jääv suurus; tähendab lõikejoon on ringjoon, mille keskpunktiks on punkt K.

127. Järeldused. Olgu R ja r vastavalt kera ja lõikeringi raadiused ning d — lõiketasapinna kaugus keskpunktist; siis võrdus (1) omandab kuju:

$$r = \sqrt{R^2 - d^2}.$$

Sellest valemist järeldame:

1) *Lõike raadius on suurim juhul, kui* $d = 0$, *s. o. siis, kui lõiketasapind läbib kera keskpunkti. Sel juhul* $r = R$. Lõikeringi nimetatakse sel juhul **suurringiks.**

2) *Lõike raadius on väikseim juhul, kui* $d = R$. Sel juhul $r = 0$, s. o. lõige taandub punktiks.

3) *Kera keskpunktist võrdsetel kaugustel asetsevad lõiked on võrdsed.*

4) *Kera keskpunktist mittevõrdsetel kaugustel asetsevaist lõikeist on sellel suurem raadius, kumb asetseb ligemal keskpunktile.*

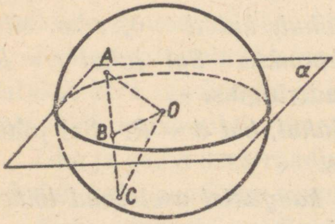
128. Teoreem. ***Iga tasapind*** (α joon. 138), ***mis läbib kera keskpunkti, jaotab kerapinna kaheks sümmeetriliseks ja kongruentseks osaks.***

Võtame kerapinnal mingi punkti A; olgu AB punktist A tasapinnani α juhitud ristlõik. Pikendame lõiku AB lõikumiseni kerapinnaga punktis C. Ehitades lõigu BO saame kaks kongruentset täisnurkset kolmnurka AOB ja BOC (kaatet BO on ühine ja hüpotenuusid on võrdsed kui kera raadiused); seega $AB = BC$. Nii vastab kera pinna igale punktile A selle pinna teine, punktiga A tasapinna α suhtes sümmeetriline punkt C. Tähendab tasapind α jaotab kera pinna kaheks sümmeetriliseks osaks.

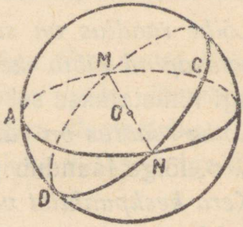
Need osad ei ole mitte ainult sümmeetrilised, vaid ka kongruentsed, sest lõiganud kera tasapinnaga α kaheks tükiks, võime ühe tüki paigutada teisesse nii, et nad ühtivad.

129. Teoreem. ***Kahte kerapinna punkti, mis ei ole ühe diameetri otspunktideks, läbib üksainus suurringjoon.***

Olgu kerapinnal, mille keskpunktiks on punkt O (joon. 139), võetud kaks mingit punkti, näiteks punktid C ja N, mis ei asetse ühel ja samal sirgel punktiga O. Siis punktid C, O ja N määravad tasapinna. See tasapind, läbides keskpunkti O, lõikub kerapinnaga mööda suurringjoont.



Joon. 138.



Joon. 139.

Teist suurringjoont läbi punktide C ja N ei saa juhtida. Tõesti definitsiooni põhjal peab iga suurring asetsema kera keskpunkti läbival tasapinnal; järelikult kui punkte C ja N läbiks veel teine suurringjoon, siis ilmneks, et kolm mitte ühel sirgel asetsevat punkti C, N ja O määravad kaks erinevat tasapinda, mis on võimatu.

130. Teoreem. ***Kaks lõikuvat suurringjoont poolitavad teineteist.***

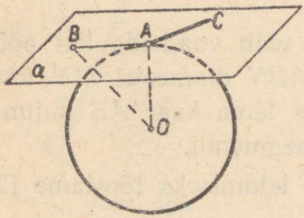
Keskpunkt O (joon. 139), asetsedes mõlema suurringi tasapinnas, asetseb nende suurringide lõikesirgel; tähendab sellel sirgel asetseb nii ühe kui teise ringi diameeter, kuid diameeter jaotab ringjoone pooleks.

Kera puutuvtasapind.

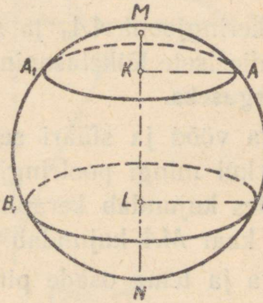
131. Definitsioon. Tasapinda, millel on kerapinnaga üksainus ühine punkt, nimetatakse puutuvtasapinnaks. Säärase tasapinna olemasolu võimalust näitab järgmine teoreem.

132. Teoreem. ***Tasapind** (α, joon. 140), **mis läbib kerapinna ühte punkti ja on risti sellesse punkti juhitud raadiusega** (OA), **on puutuvtasapind.***

Võtame tasapinnal α vabalt punkti *B* ja ühendame punktid *O* ja *B* sirglõiguga *OB*. Et sirglõik *OB* on tasapinna α suhtes kaldu ja sirglõik *OA* on risti selle tasapinnaga, siis $OB>OA$. Seepärast punkt *B* asetseb väljaspool kerapinda; seega on tasapinnal α kerapinnaga üksainus ühine punkt *A*; tähendab see tasapind on puutuvtasapind.



Joon. 140.



Joon. 141.

133. Pöördteoreem. ***Puutuvtasapind** (α, joon. 140) **on puutepunkti juhitud raadiusega** (OA) **risti.***

Et punkt *A* on definitsiooni põhjal puutuvtasapinna ja kerapinna ainus ühine punkt, siis selle tasapinna iga muu punkt asetseb väljaspool kerapinda ja asetseb seega keskpunktist kaugemal kui punkt *A*; nii on lõik *OA* punkti *O* väikseim kaugus tasapinnast α, s. o. lõik *OA* on risti tasapinnaga α.

Sirget, millel on kerapinnaga üksainus ühine punkt, nimetatakse kera puutujaks. On kerge näha, et on olemas arvutu hulk sirgeid, mis puutuvad kokku keraga antud punktis. Tõesti iga sirge (*AC*, joon. 140), mis asetseb kera puutuvtasapinnas ja läbib puutepunkti (*A*), on kera puutujaks.

134. Definitsioonid. 1) Kerapinnast mingi tasapinnaga (AA_1) eraldatud kerapinna osa (joon. 141) nimetatakse sfääri **segmendiks.**

Ringjoont AA_1 nimetatakse sfääri segmendi **äärjooneks,** lõiketasapinnaga ristuva raadiuse lõiku KM nimetatakse sfääri segmendi **kõrguseks.**

2) Kahe paralleelse lõiketasapinna (AA_1 ja BB_1) vahelist kerapinna osa nimetatakse kera **vööks.**

Lõikeringjooni AA_1 ja BB_1 nimetatakse vöö **äärjoonteks** ja paralleelsete lõiketasapindade vahelist kaugust nimetatakse vöö **kõrguseks.**

Kera vööd ja sfääri segmenti võib vaadelda kui pöördpindu: kui mingi poolringjoon $MABN$ diameetri MN ümber pööreldes kujundab kerapinna, siis tema kaar AB kujundab vöö ja kaar MA kujundab sfääri segmendi.

Kera ja tema osade pindalade leidmiseks tõestame järgmise lemma.

*135. Lemma. ***Nii koonuse, tüvikoonuse kui ka silindri külgpindala võrdub keha kõrguse ja niisuguse ringjoone pikkuse korrutisega, mille raadiuseks on moodustaja keskpunktist teljeni juhitud moodustajaga ristuv lõik.***

1) Tekkigu koonus (joon. 142) kolmnurga ABC pöörlemisel kaateti AC ümber. Kui punkt D on moodustaja AB keskpunkt, siis (§ 115)

$$\text{koonuse külgpindala} = 2\pi \cdot BC \cdot AD. \tag{1}$$

Võttes $DE \perp AB$, saame kaks sarnast kolmnurka ABC ja AED (nad on täisnurksed ja neil on ühine nurk A); nende kolmnurkade sarnasusest järeldame, et

$$BC : ED = AC : AD,$$

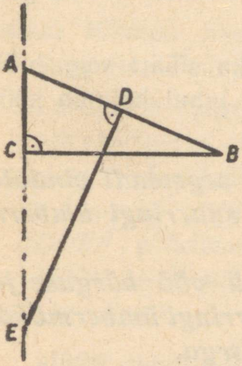
millest leiame, et

$$BC \cdot AD = ED \cdot AC,$$

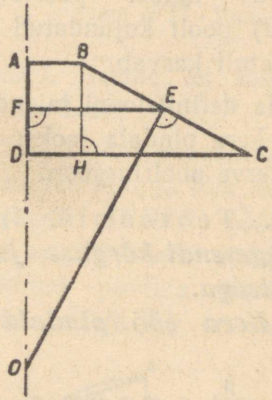
ning võrduse (1) põhjal saame:

$$\text{koonuse külgpindala} = 2\pi \cdot ED \cdot AC,$$

mida pidimegi tõestama.



Joon. 142.



Joon. 143.

2) Tekkigu tüvikoonus (joon. 143) trapetsi $ABCD$ pöörlemisel külje AD ümber.

Võtnud kesklõigu EF, saame (§ 117):

$$\text{tüvikoonuse külgpindala} = 2\pi \cdot EF \cdot BC. \qquad (2)$$

Juhime $EO \perp BC$ ja $BH \perp DC$, siis saame kaks sarnast kolmnurka EFO ja BHC (ühe küljed on risti teise omadega); nende kolmnurkade sarnasusest järeldame, et

$$EF : BH = EO : BC;$$

siit saame, et

$$EF \cdot BC = BH \cdot EO = AD \cdot EO.$$

Seepärast võib võrduse (2) kirjutada nii:

$$\text{tüvikoonuse külgpindala} = 2\pi \cdot EO \cdot AD,$$

mida pidimegi tõestama.

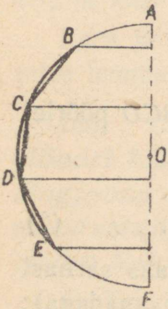
3) Teoreem jääb õigeks ka silindri kohta, sest teoreemis nimetatud sirglõik on võrdne silindri põhja raadiusega.

136. Definitsioon. Poolringjoone mingi kaare (BE, joon. 144) pöörlemisel diameetri (AF) ümber tekkinud keravöö pindalaks loetakse piirväärtust, millele läheneb sama diameetri ümber pöörleva korrapärase kõõlmurdjoone ($BCDE$) poolt kujundatud pinna pindala, kui külgede arv piiramatult kasvab.

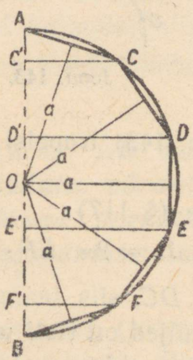
Seda definitsiooni laiendatakse ka sfääri segmendi pindala ja kera pindala jaoks; viimasel juhul hõlmab kõõlmurdjoont terve poolringjoon.

137. Teoreemid. 1) ***Sfääri segmendi pindala võrdub segmendi kõrguse ja kera suurringi ümbermõõdu korrutisega.***

2) ***Kera vöö pindala võrdub vöö kõrguse ja kera suurringi ümbermõõdu korrutisega.***



Joon. 144.



Joon. 145.

1) Ehitame kaaresse AF (joon. 145), mis pöörlemisel kujundab sfääri segmendi, vabalt võetud külgede arvuga korrapärase murdjoone $ACDEF$.

Pind, mis tekib selle murdjoone pöörlemisel, koosneb külgede AC, CD, DE jne. poolt kujundatud osadest. Need osad on kas koonuse (külje AC kujundatud) või tüvikoonuse (külgede CD, EF, . . . kujundatud) või silindri (külje DE kujundatud, kui $DE \parallel AB$) külgpindalad. Seepärast võime siin rakendada lemmat § 135. Seejuures paneme tähele, et iga moodustajaga ristuv lõik, mis on juhitud moodustaja keskpunktist teljeni, võrdub murdjoone apoteemiga. Tähistades selle apoteemi tähega a, saame:

$$\begin{array}{llll} \text{külje } AC & \text{kujundatud} & \text{pindala} & = AC' \cdot 2\pi a; \\ \text{„ } CD & \text{„} & \text{„} & = C'D' \cdot 2\pi a; \\ \ldots & & & \\ \text{„ } EF & \text{„} & \text{„} & = E'F' \cdot 2\pi a; \end{array}$$

Liitnud liikmeti need võrdused, leiame, et murdjoone $ACDEF$ kujundatud pindala $= AF' \cdot 2\pi a$.

Kõõlmurdjoone külgede arvu piiramatul kasvamisel apoteemi a piirväärtuseks on kera raadius R, aga lõik AF' jääb muutumatuks; järelikult, murdjoone $ACDEF$ pöörlemisel kujundunud pinna piirväärtuseks on $AF' \cdot 2\pi R$. Kuid murdjoone $ACDEF$ pöörlemisel tekkinud pindala piirväärtust loetakse sfääri segmendi pindalaks ja lõik AF' on segmendi kõrgus h, seepärast

$$\text{sfääri segmendi pindala} = h \cdot 2\pi R = 2\pi Rh.$$

2) Oletame, et korrapärane murdjoon ei ole kujundatud mitte kaaresse AF, mille pöörlemisel tekib sfääri segmendi pind, vaid mingisse kaaresse CF, mille pöörlemisel tekib kera vöö (joon. 145). See muudatus nagu näha ei mõjuta mingil määral eelneva arutluse käiku, seepärast ka tulemus jääb sekssamaks, s. o.

$$\text{kera vöö pindala} = h \cdot 2\pi R = 2\pi Rh,$$

kus tähega h on nüüd tähistatud kera vöö kõrgust $C'F'$.

138. T e o r e e m. ***Kera pindala võrdub suurringi ümbermõõdu ja diameetri korrutisega*** ehk ***kera pindala võrdub suurringi neljakordse pindalaga.***

Poolringjoone ADB (joon. 145) pöörlemisel tekkinud kera pindala võib vaadelda kui kaarte AD ja DB pöörlemisel tekkinud pindalade summat. Seepärast võime eelneva teoreemi põhjal kirjutada:

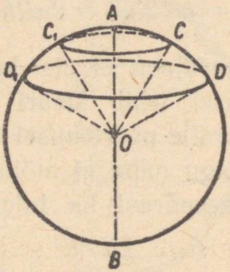
$$\text{kera pindala} = 2\pi R \cdot AD' + 2\pi R \cdot D'B =$$
$$= 2\pi R(AD' + D'B) = 2\pi R \cdot 2R = 4\pi R^2.$$

139. Järeldus. *Kerade pindalad suhtuvad nagu nende raadiuste või diameetrite ruudud,* sest tähistades kerade raadiused tähtedega R ja R_1 ning pindalad tähtedega S ja S_1, saame:

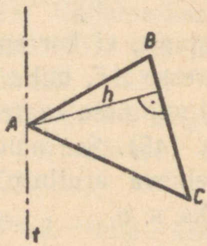
$$S : S_1 = 4\pi R^2 : 4\pi R_1{}^2 = R^2 : R_1{}^2 = 4R^2 : 4R_1{}^2 =$$
$$= (2R)^2 : (2R_1)^2.$$

Kera ja tema osade ruumalad.

140. Definitsioon. Ringisektori (COD, joon. 146) pöörlemisel tema kaarega mitte lõikuva diameetri (AB) ümber tekkinud keha nimetatakse **kerasektoriks.**



Joon. 146.



Joon. 147.

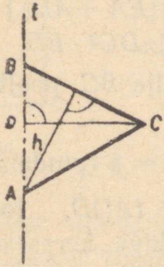
Seda keha piiravad kahe koonuse külgpinnad ja kera vöö pind. Viimast nimetatakse kerasektori **põhjaks.** Üks ringisektorit piiravatest raadiustest võib ühtida pöörlemisteljega; näiteks sektor AOC, pöörеldes telje AO ümber, kujundab kerasektori $OCAC_1$, mida piirab koonuse külgpind ja sfääri segment. Kerasektori ja kera ruumala leidmiseks tõestame algul järgmise lemma.

141. L e m m a. ***Kui $\triangle$ ABC* (joon. 147) *pöörleb telje t ümber, mis asetseb kolmnurga tasapinnas ning läbib tippu A ja ei lõika külge BC, siis pöörlemisel tekkiva keha ruumala võrdub külje BC poolt kujundatud pinna pindala ja sellele küljele joonestatud kõrguse h ühe kolmandiku korrutisega.***

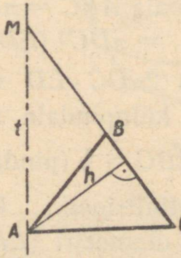
Tõestamisel eraldame kolme juhtu.

1) Telg ühtib küljega AB (joon. 148). Sel juhul otsitav ruumala võrdub täisnurksete kolmnurkade BCD ja DCA pöörlemisel tekkivate koonuste ruumalade summaga. Esimene ruumala on $\frac{1}{3}\pi CD^2 \cdot DB$ ja teine on $\frac{1}{3}\pi CD^2 \cdot DA$; seepärast kolmnurga ABC poolt kujundatud keha ruumala

$$= \tfrac{1}{3}\pi CD^2\ (DB + DA) = \tfrac{1}{3}\pi CD \cdot CD \cdot BA.$$



Joon. 148.



Joon. 149.

Korrutis $CD \cdot BA$ võrdub korrutisega $BC \cdot h$, sest kumbki neist korrutistest väljendab kolmnurga ABC kahekordset pindala; seega

$$\text{ruumala } ABC = \tfrac{1}{3}\pi CD \cdot BC \cdot h.$$

Kuid korrutis $\pi CD \cdot BC$ võrdub koonuse BDC külgpindalaga, tähendab

$$\text{ruumala } ABC = \frac{(\text{pindala } BC)}{3} \cdot h.$$

2) Telg ei ühti küljega AB ega ole paralleelne küljega BC (joon. 149). Sel juhul otsitav ruumala võrdub kolm-

nurkade AMC ja AMB pöörlemisel tekkivate kehade ruumalade vahega. Esimesel juhul tõestatu põhjal

$$\text{ruumala } AMC = \tfrac{1}{3}h \cdot (\text{pindala } MC),$$
$$\text{ruumala } AMB = \tfrac{1}{3}h \cdot (\text{pindala } MB);$$

järelikult

$$\text{ruumala } ABC = \tfrac{1}{3}h \cdot (\text{pindala } MC - \text{pindala } MB) =$$
$$= \tfrac{1}{3}h \cdot (\text{pindala } BC).$$

3) Telg on paralleelne küljega BC (joon. 150). Siis otsitav ruumala võrdub ristküliku $DEBC$ pöörlemisel tekkiva silindri ruumalaga, millest on lahutatud kolmnurkade AEB ja ACD poolt kujundatud koonuste ruumalade summa; esimene neist ruumaladest on $\pi DC^2 \cdot ED$; teine ruumala on $\frac{1}{3}\pi EB^2 \cdot EA$ ja kolmas on $\frac{1}{3}\pi DC^2 \cdot AD$. Pidades nüüd silmas, et $EB = DC$, saame:

$$\text{ruumala } ABC = \pi DC^2 \left[ED - \tfrac{1}{3}(EA + AD)\right] =$$
$$= \pi DC^2 \left(ED - \tfrac{1}{3}ED\right) = \tfrac{2}{3}\pi DC^2 \cdot ED.$$

Korrutis $2\pi DC \cdot ED$ väljendab külje BC poolt kujundatud silindri külgpindala, seepärast

$$\text{ruumala } ABC = \tfrac{1}{3}\,(\text{pindala } BC) \cdot DC = \tfrac{1}{3}\,(\text{pindala } BC) \cdot h.$$

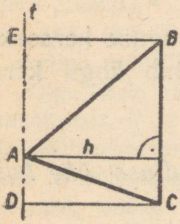
142. Definitsioon. Ringisektori (AOD, joon. 151) pöörlemisel diameetri (EF) ümber tekkiva kerasektori ruumalaks loetakse piirväärtust, millele läheneb sektori äärmiste raadiustega (OA ja OD) ja sektori kaaresse kujundatud korrapärase murdjoonega ($ABCD$) piiratud hulknurkse sektori pöörlemisel tekkiva keha ruumala, kui murdjoone külgede arv piiramatult kasvab.

143. Teoreem. ***Kerasektori ruumala võrdub vastava vöö (või vastava sfääri segmendi) pindala ja kera raadiuse ühe kolmandiku korrutisega.***

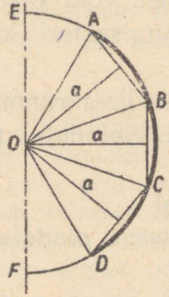
Tekkigu kerasektor ringisektori AOD pöörlemisel diameetri EF (joon. 151) ümber. Avaldame ruumala V. Selleks kujundame kaaresse AD vabaltvõetud külgede arvuga korrapärase murdjoone $ABCD$.

Hulknurkne sektor $OABCD$ kujundab pöörlemisel mingi keha, mille ruumala tähistame tähega V_1. See ruumala on nende kehade ruumalade summa, mille kujundavad diameetri EF ümber pöörlemisel kolmnurgad OAB, OBC ja OCD. Rakendame siin § 141 tõestatud lemmat, märkides seejuures, et kolmnurkade kõrgused võrduvad kõõlmurdjoone apoteemiga a. Vastavalt sellele lemmale saame:

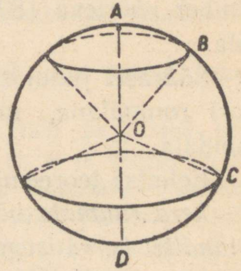
$$V_1 = \tfrac{1}{3}\,(\text{pindala } AB) \cdot a + \tfrac{1}{3}\,(\text{pindala } BC) \cdot a + \ldots =$$
$$= \tfrac{1}{3}\,(\text{pindala } ABCD) \cdot a.$$



Joon. 150.



Joon. 151.



Joon. 152.

Kujutleme nüüd, et murdjoone külgede arv piiramatult kasvab. Säärasel tingimusel on pindala $ABCD$ piirväärtuseks kera vöö AD pindala, kuid apoteemi a piirväärtuseks on raadius R; seega

$$V = \tfrac{1}{3}\,(\text{vöö } AD \text{ pindala}) \cdot R.$$

Märkus. See teoreem ja tema tõestus ei sõltu sellest, kas üks ringi sektorit piirav raadius ühtib pöörlemisteljega või mitte.

144. Teoreem. ***Kera ruumala võrdub tema pindala ja raadiuse ühe kolmandiku korrutisega.***

Tükeldanud poolringi $ABCD$ (joon. 152), mis kujundab kera, mingiteks ringisektoriteks AOB, BOC, COD, märkame, et kera ruumala võib vaadelda nende ringisektorite pöörlemisel kujundatud kerasektorite ruumalade summana. Et eelmise teoreemi põhjal:

$$\text{ruumala } AOB = \tfrac{1}{3}\,(\text{pindala } AB)\cdot R,$$
$$\text{ruumala } BOC = \tfrac{1}{3}\,(\text{pindala } BC)\cdot R,$$
$$\text{ruumala } COD = \tfrac{1}{3}\,(\text{pindala } CD)\cdot R,$$

siis

$$\text{kera ruumala} = \tfrac{1}{3}(\text{pindala } AB + \text{pindala } BC + \text{pindala } CD)\cdot R = \tfrac{1}{3}\,(\text{pindala } ABCD)\cdot R.$$

Märkus. Kera ruumala võib vaadelda ka kui diameetri ümber pöörleva 180°-se ringisektori kujundatud keha ruumala.

Säärasel juhul saadakse kera ruumala niisuguse kerasektori ruumalana, mille vöö pindala moodustab kogu kera pindala.

Eelmise teoreemi põhjal

kera ruumala võrdub tema pindala ja raadiuse ühe kolmandiku korrutisega.

145. Järeldus 1. Tähistame kera vöö või sfääri segmendi kõrguse tähega h, kera raadiuse tähega R ja diameetri tähega D; siis vöö või sfääri segmendi pindala, nagu nägime (§ 137), väljendab avaldis $2\pi Rh$ ja kera pindala (§ 138) väljendab avaldis $4\pi R^2$; seepärast

$$\text{kerasektori ruumala} = \tfrac{1}{3}\cdot 2\pi Rh\cdot R = \tfrac{2}{3}\pi R^2\cdot h;$$
$$\text{kera ruumala}^{1} = \tfrac{1}{3}\cdot 4\pi R^2\cdot R = \tfrac{4}{3}\pi R^3$$

---

[1] Kera ruumala valemi võib tuletada (muide mitte täiesti rangelt) järgmise lihtsa arutluse teel. Kujutleme, et kogu kera pindala on tükeldatud väga väikesteks osadeks ja et iga osa piirde kõik punktid on raadiuste abil ühendatud kera keskpunktiga. Siis kera tükeldub väga suureks arvuks väikesteks kehadeks, millest igaühte võib vaadelda kui püramiidi, mille tipuks on kera keskpunkt. Et püramiidi ruumala võrdub põhja pindala ja kõrguse (mille võib võtta võrdseks kera raadiusega) ühe kolmandiku korrutisega, siis kera ruumala, mis ilmselt võrdub kõikide püramiidide ruumalade summaga, väljendub nii:

$$\text{kera ruumala} = \tfrac{1}{3}S\cdot R,$$

ehk

$$\text{kera ruumala} = \tfrac{4}{3}\pi\left(\frac{D}{2}\right)^3 = \tfrac{1}{6}\pi D^3.$$

Siit on näha, et *kerade ruumalad suhtuvad nagu nende raadiuste või diameetrite kuubid.*

146. Järeldus 2. *Kera pindala ja ruumala moodustavad vastavalt $^2/_3$ kera ümber kujundatud silindri täispindalast ja ruumalast.*

Tõesti, kera ümber kujundatud silindri põhja raadius võrdub kera raadiusega ja kõrgus võrdub kera diameetriga; seepärast säärase

$$\text{silindri täispindala} = 2\pi R \cdot 2R + 2\pi R^2 = 6\pi R^2;$$

$$\text{silindri ruumala} = \pi R^2 \cdot 2R = 2\pi R^3.$$

Siit on näha, et ⅔ selle silindri täispindalast võrdub $4\pi R^2$, s. o. võrdub kera pindalaga, ja ⅔ silindri ruumalast moodustab $^4/_3\ \pi R^3$, s. o. kera ruumala.[2]

147. Märkus. Kera ruumala valemi võib väga lihtsalt saada Cavalieri printsiibi (§ 89) põhjal järgmisel viisil.

Olgu ühele ning samale tasapinnale α (joon. 153) paigutatud kera raadiusega R ja silinder, mille põhja raadius on R ja kõrgus on $2R$ (tähendab see on niisugune silinder, mida võib kujundada nimetatud kera ümber). Kujutleme edasi, et silindrist on välja õõnestatud kaks koonust, millede ühine tipp asetseb silindri telje keskpunktis O ja millede põhjadeks on: ühel — silindri ülemine põhi, teisel — silindri

---

kus S on kõikide püramiidide põhjade pindalade summa. Kuid see põhjade pindalade summa peab moodustama kera pindala, tähendab

$$\text{kera ruumala} = \tfrac{1}{3} \cdot 4\pi R^2 \cdot R = \tfrac{4}{3}\pi R^3.$$

Nii võib kera ruumala valemi tuletada tema pindala valemi abil. Ümberpöördult, kera pindala valemi võib tuletada tema ruumala valemi abil võrdusest:

$$\tfrac{1}{3}S \cdot R = \tfrac{4}{3}\pi R^3; \text{ siit } S = 4\pi R^2.$$

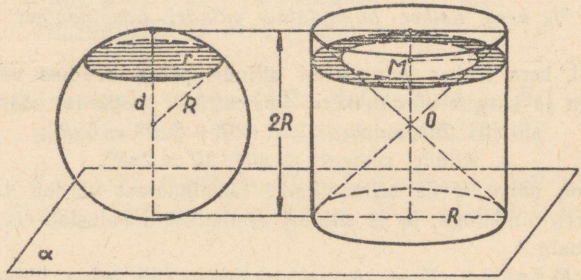
[2] Selle lause tõestas Archimedes (III sajandil e. m. a.). Archimedes avaldas soovi, et selle teoreemi joonis tehtaks tema hauakivile, mis rooma sõjapealiku Marcelluse poolt ka teostati (F. Cajori, Elementaarmatemaatika ajalugu).

Soovitame lugejatele kasuliku harjutusena tõestada, et kera pindala ja ruumala moodustavad $\frac{4}{9}$ vastavalt **kera ümber kujundatud koonuse** täispindalast ja ruumalast, kui moodustaja võrdub põhja diameetriga. Ühenduses selle lause järeldusega 2 võime kirjutada niisuguse võrduse, milles täht Q tähistab kas pindala või ruumala:

$$\frac{Q_{\text{kera}}}{4} = \frac{Q_{\text{silinder}}}{6} = \frac{Q_{\text{koonus}}}{9}.$$

alumine põhi. Silindrist jääb siis järele keha, mille ruumala, nagu kohe näeme, võrdub antud kera ruumalaga.

Võtame tasapinnaga α mingi paralleelse tasapinna, mis lõikab mõlemat keha. Olgu selle tasapinna kaugus kera keskpunktist d ja olgu tasapinna ning kera lõikeringi raadius r. Siis selle ringi pindala on



Joon. 153.

$\pi r^2 = \pi(R^2 - d^2)$. Sellesama tasapinna lõikumisel silindrist saadud kehaga tekib rõngas (mis joonisel on kriipsutatud), mille välimine raadius on R ja sisemine raadius on d (täisnurkne kolmnurk, mille moodustavad see raadius ja lõik OM, on võrdhaarne, sest tema kumbki teravnurk on 45°). Tähendab selle rõnga pindala on $\pi R^2 - \pi d^2 = \pi(R^2 - d^2)$. Nii näeme, et kera ja silindrist saadud keha lõiked tasapinna α paralleeltasapinnaga on pindvõrdsed kujundid; järelikult vastavalt Cavalieri printsiibile nende kehade ruumalad on võrdsed. Kuid silindrist saadud keha ruumala on võrdne silindri ruumalaga, millest on lahutatud kahekordne koonuse ruumala, s. o. ta võrdub avaldisega

$$\pi R^2 \cdot 2R - 2 \cdot \tfrac{1}{3}\pi R^2 \cdot R = 2\pi R^3 - \tfrac{2}{3}\pi R^3 = \tfrac{4}{3}\pi R^3,$$

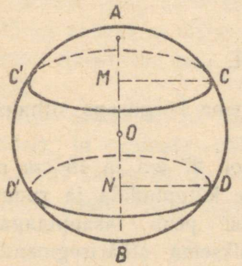
tähendab see ongi kera ruumala.

148. Definitsioonid. 1) Mingi tasapinnaga (CC', joon. 154) kerast eraldatud osa (ACC') nimetatakse **kera segmendiks.** Lõikeringi nimetatakse segmendi **põhjaks** ja põhjaga risti asetseva raadiuse lõiku AM nimetatakse segmendi **kõrguseks.**

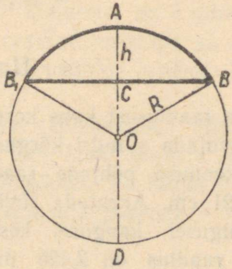
2) Kahe paralleelse lõiketasapinna (CC' ja DD') vahelist kera osa nimetatakse **kera kihiks.** Paralleelseid lõikeringe

nimetatakse kihi põhjadeks ja nendevahelist kaugust MN kihi **kõrguseks.**

Mõlemat keha võib vaadelda kui mingi ringi osade AMC ja $MCDN$ pöörlemisel diameetri AB ümber tekkinud kehasid.



Joon. 154.



Joon. 155.

149. Teoreem. ***Kera segmendi ruumala võrdub niisuguse silindri ruumalaga, mille põhja raadiuseks on segmendi kõrgus ja mille kõrguseks on ühe kolmandiku segmendi kõrguse võrra vähendatud kera raadius,***

s. o.

$$V = \pi h^2 (R - \tfrac{1}{3}h),$$

kus h on segmendi kõrgus ja R on kera raadius.

Ringi osa ACB (joon. 155) pöörlemisel diameetri AD ümber saadud kera segmendi ruumala leiame sel teel, et ringi sektori AOB pöörlemisel tekkinud kera sektori ruumalast lahutame koonuse ruumala, mis tekib kolmnurga COB pöörlemisel. Esimene neist on $\frac{2}{3}\pi R^2 h$ ja teine on $\frac{1}{3}\pi CB^2 \cdot CO$. Et lõik CB on lõikude AC ja CD keskmine võrdeline, siis $CB^2 = h(2R - h)$, seega

$$CB^2 \cdot CO = h(2R - h)\,(R - h) =$$
$$= 2R^2h - Rh^2 - 2Rh^2 + h^3 =$$
$$= 2R^2h - 3h^2R + h^3;$$

järelikult

$$\text{ruumala } ABB_1 = \text{ruumala } OBAB_1 - \text{ruumala } OBB_1 =$$
$$= \tfrac{2}{3}\pi R^2 h - \tfrac{1}{3}\pi CB^2 \cdot CO =$$
$$= \tfrac{2}{3}\pi R^2 h - \tfrac{2}{3}\pi R^2 h + \pi R h^2 - \tfrac{1}{3}\pi h^3 =$$
$$= \pi h^2 (R - \tfrac{1}{3} h).$$

Harjutusi.

1. Põhja raadiusest kaks korda suurema kõrgusega silindri ruumala on 1 m^3. Arvutada silindri kõrgus.

2. Tüvikoonuse põhjade raadiused on 27 cm ja 18 cm ning moodustaja on 21 cm. Arvutada tüvikoonuse külgpindala ja ruumala.

3. Missugusel kaugusel keskpunktist peab tasapinnaga lõikama kera, mille raadius on 2,425 m, et väiksema sfäärisegmendi pindala suhtuks niisuguse koonuse külgpindalaga, millel on segmendiga ühine põhi ja mille tipuks on kera keskpunkt, nagu 7 : 4?

4. Avaldada niisuguse pöördkeha ruumala, mis tekib korrapärase kuusnurga pöörlemisel tema külje a ümber.

5. Arvutada kuubi ümber kujundatud kera raadius, kui kuubi serv on 1 m.

6. Avaldada niisuguse pöördkeha ruumala, mis tekib võrdkülgse kolmnurga pöörlemisel telje ümber, mis läbib üht tippu ja on vastasküljega paralleelne, kui kolmnurga külg on a.

7. On antud võrdkülgne $\triangle ABC$, mille külg on a; küljele BC ehitatakse ruut $BCDE$, mis asetseb väljaspool kolmnurka. Viisnurk $ABEDC$ pöörleb külje AB ümber. Avaldada pöördkeha ruumala.

8. On antud ruut $ABCD$, mille külg on a. Läbi tipu A on joonestatud diagonaaliga AC ristuv sirge AM ja selle sirge ümber pööratakse ruutu. Avaldada pindala, mille kujundab ruudu piirdejoon ning ruumala, mille kujundab ruudu pind.

9. On antud korrapärane kuusnurk $ABCDEF$, mille külg on a. Läbi tipu A joonestatakse raadiusega OA ristuv sirge AM ja selle ümber pööratakse kuusnurka. Avaldada kuusnurga poolt kujundatud keha pindala ja ruumala.

10. Kerasse, mille raadius on 2, on puuritud silindriline auk piki diameetrit. Arvutada ülejäänud ruumala, kui silindrilise augu raadius on 1.

11. Kera, paigutatuna koonilisse lehtrisse, mille põhja raadius $r = 5$ cm ja moodustaja $l = 13$ cm, puutub kokku lehtri äärjoone tasapinnaga. Arvutada kera ruumala.

12. Ringi ümber, mille raadius on 2, on kujundatud võrdkülgne kolmnurk. Leida kehade ruumalade suhe, mis tekivad ringi ja kolmnurga pindade pöörlemisel kolmnurga kõrguse ümber.

13. Silindrilisse nõusse, mille põhja diameeter on 6 cm ja kõrgus on 36 cm, on valatud vett poole kõrguseni. Kui palju tõuseb veepind nõus, kui asetada üleni vette kera, mille diameeter on 5 cm?

14. Õõnes raudkera, mille väline raadius on 0,154 m, ujub poolest saadik vees. Arvutada selle kera kesta paksus, teades, et raua erikaal on 7,7.

15. Marsi läbimõõt on pool Maa läbimõõdust. Mitu korda on Marsi pindala ja ruumala väiksemad kui Maa pindala ja ruumala?

16. Jupiteri läbimõõt on Maa läbimõõdust 11 korda suurem; mitu korda Jupiter ületab Maad pindala ja ruumala poolest?

LISA.

Geomeetria aksioomidest.

1. Geomeetria erineb teistest matemaatika harudest (algebra, aritmeetika) ainult temale omase iseärasusega. See iseärasus seisneb selles, et need teoreemid ja kujundite omadused, mida uuritakse geomeetrias, ei rajane mitte üksi arutluste real, vaid paljudel juhtumitel võivad olla ka otsese vaatluse objektiks; nende omaduste kehtivust mitte ainult ei tõestata, vaid nad leiavad kinnitust ka nägemismeele abil. Nii võib võrdhaarse kolmnurga alusnurkade võrdsust või võrdkülgsete kolmnurkade võrdsust ja paljusid teisi kujundite omadusi otseselt näha.

Geomeetriliste objektide kaemuslikkus aitab avastada ja ette näha paljusid geomeetrilisi tõdesid enne nende tõestamist. Muistsetel egiptlastel (2000 aastat enne meie ajaarvamist) oli geomeetriliste kujundite otsene vaatlemine peamiseks vahendiks nende kujundite ühtedes või teistes omadustes veendumisel. Kuid säärane vahend oli kõlbulik ainult lihtsaimate geomeetriliste tõdede kindlaksmääramisel, ja just sääraste tõdedega tegelesid egiptlased, kes kasutasid geomeetriat kitsal praktilisel eesmärgil. Kuid juba praktiliste ülesannete rohkus ja komplitseeritus sundis tundma õppima üha keerulisemate geomeetriliste kujundite omadusi ning selleks ei piisanud enam joonise lihtsast vaatlusest; tekkis vajadus rakendada üha komplitseeritumaid arutlusi.

Peale selle on keerulisemate geomeetriliste kujundite näitlikkus sageli väga petlik ja juhib mõnikord lausa valedele järeldustele.

Võib tuua palju näiteid sellest, kuidas joonise üldine kuju sisendab vale otsuse joonisel kujutatud kujundite vastastikuste asendite ja omaduste kohta. Sellel põhjeneb palju geomeetrilisi paradokse, mida meie aga siin ei hakka esitama.

Muistsed kreeklased, kes geomeetria said egiptlastelt, üldistasid üksikuid egiptlastele tuntud tõsiasju ning töötasid välja kindlakujulised arutlused, mille abil nad avastasid uusi geomeetrilisi tõsiasju. Umbes 300 aastat enne meie ajaarvamist andis kreeka geomeeter Eukleides oma raamatutes nimetusega «Elemendid» geomeetriale esimese teadusliku aluse.

Ta püüdis võimalikult täpselt kirjeldada sääraste lihtsaimate geomeetriliste kujundite üldisi kujutlusi, nagu: punkt, joon, pind, ja nendevahelisi seoseid, mida selle ajani loeti endastmõistetavaiks.

Rajanedes sellele, ta andis loogiliselt range geomeetria ülesehituse, mis oma vormilt nüüdisaegsegi teaduse vaatepunktist on ülimal määral täiuslik.

Ta taotles kõigepealt anda täpseid definitsioone geomeetrilistele põhimõistetele: punkt, joon, sirgjoon, pind, tasapind ja geomeetriline keha. Toome siin tema poolt antud definitsioonid:

1. *Punkt on see, millel ei ole osi.*
2. *Joon on laiuseta pikkus.*
3. *Joone piirideks on punktid.*
4. *Sirgjoon on see, mis ühteviisi asetseb kõigi oma punktide suhtes.*
5. *Pind on see, mis omab ainult pikkust ja laiust.*
6. *Pinna piirideks on jooned.*
7. *Tasapind on pind, mis ühteviisi asetseb kõigi oma sirgjoonte suhtes.*
8. *Kehaks nimetatakse seda, mis omab pikkust, laiust ja kõrgust.*
9. *Keha piirideks on pinnad.*

Nende definitsioonide eesmärgiks oli saavutada seda, et nimetused «punkt», «sirge» jne. mitte ainult ei kutsuks esile kindlat visuaalset kujutlust, vaid ühteaegu sellega määraksid kindlaks ka vastava mõiste, millele tugenedes võis teha edaspidiseid loogilisi järeldusi. Ja kuigi need definitsioonid nüüdisaja teaduse seisukohalt ei ole täiuslikud, ometi vastasid nad täielikult tolleaegse teadusliku mõtlemise seisundile ja olid kujutlustelt mõistetele ülemineku esimeseks sammuks.

Nad olid kõigi järgnevate geomeetriliste teoste lähtepunktiks ja määrasid tee geomeetria edaspidiseks arenemiseks.

Kõik geomeetrias tunnetatud tõed liigitas Eukleides kolme liiki: postulaadid, aksioomid ja teoreemid. Esimesse kahte liiki [1] kuulu-

---

[1] Missugune on põhimõtteline vahe ühtede ja teiste vahel, seda Eukleides ei näita, kuid postulaatidega on tal tavaliselt ikka seotud väide, et üht või teist konstruktsiooni on võimalik teostada:

sid lihtsaimad tõed, mis ei tekitanud mingeidki kahtlusi, olid vahenditult ilmsed ning võisid olla seepärast lähtelauseteks, milledest loogiliselt tuletati teised tõed.

Kolmas liik lauseid — teoreemid — on tõed, mille kehtivust peab tõestama, s. o. rea arutluste teel tuletama esimese kahe liigi tõdedest. Toome Eukleidese postulaadid ja aksioomid:

a) **Postulaadid.** *Nõutakse, et*

1) *igast punktist võib igasse teise punkti ehitada ühe sirgjoone;*
2) *sirglõiku ja kiirt võib pidevalt pikendada sirgjoont mööda;*
3) *mistahes keskpunkti ümber võib joonestada mistahes raadiusega ringjoone;*
4) *kõik täisnurgad on võrdsed;*
5) *kaks sirget lõikuvad teineteisega sealpool, kuspool nad kolmanda, neid lõikava sirgega moodustavad lähisnurki, millede summa on väiksem kui kaks täisnurka.*

b) **Aksioomid,**

1) *ühe ja samaga võrdsed on võrdsed üksteisega;*
2) *kui võrdsetega liita ühepalju, siis summad on võrdsed;*
3) *kui võrdsetest lahutada ühepalju, siis jäägid on võrdsed;*
4) *üksteisega ühtivad on võrdsed;*
5) *tervik on suurem kui tema osa.*

Need Eukleidese aksioomid ja postulaadid olid sajandeid aluseks, millele ehitati kogu geomeetria.

2. Juba lähemad Eukleidese järglased pöörasid erilist tähelepanu Eukleidese viiendale postulaadile. See tõmbas endale tähelepanu oma sõnastuse keerulisusega ja sellega, et ta kehtivus ei olnud kaugeltki täiesti ilmne.

Viimane asjaolu põhjustas püüdeid postulaadi kehtivust ühte- või teistviisi tõestada, s. o. järeldada teda teistest, mitte kahtlust äratavatest tõdedest. Viienda postulaadi tõestamise katsed kestsid enam kui 2000 aastat, kuid ei viinud, ja nagu hiljem selgus, ei võinudki viia positiivsele tulemusele. Õnnestus vaid postulaati asendada teise, temaga samaväärse lausega, mis oli aga sama silmanähtamatu ning mis ei järeldunud teistest geomeetrilistest aksioomidest ja postulaatidest.

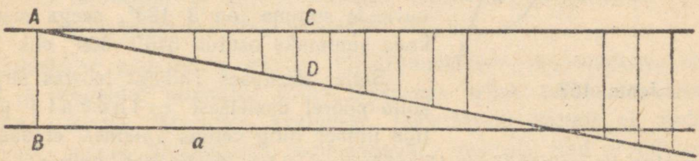
On kerge näidata, et Eukleidese postulaat on samaväärne väitega, et antud tasapinnas võib igast punktist igale sirgele joonestada üheainsa paralleelsirge (s. o. antud sirgega mitte lõikuva sirge). Tõesti, kui see oletus võtta aksioomiks, siis planimeetrias tõestatud teoreemidest järeldub otseselt Eukleidese postulaat. See lause ainsast paralleelsirgest võetaksegi harilikult aksioomiks Eukleidese postulaadi asemel (nagu see on tehtud ka selle raamatu esimeses osas).

Teiseks Eukleidese postulaadiga samaväärseks lauseks on kolmnurga nurkade summa teoreem.

Geomeetrite pingutused olid mitme sajandi vältel sihitud sellele, et tõestada kas Eukleidese postulaati ennast või mõnd sellega samaväärset lauset.

Toome siin illustratsiooniks mõned säärased tõestused.

P r o k l o s e t õ e s t u s (V sajandil). Võtame antud tasapinnal sirge *a* ja väljaspool seda punkti *A* (joon. 156). Joonestame punktist *A* sirgeni *a* ristlõigu *AB* ning punktist *A* joonestame sirgele *AB* rist-

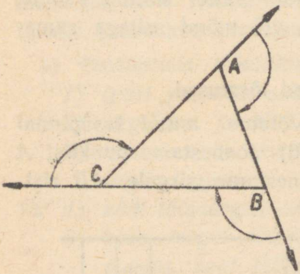


Joon. 156.

sirge *AC*. Sirged *a* ja *AC* ei lõiku, sest vastasel korral oleks nende lõikepunktist sirgele *AB* joonestatud kaks ristsirget. Olgu nüüd läbi punkti *A* joonestatud veel mingi sirge *AD*. Proklos tõestab, et see sirge peab lõikuma sirgega *a*. Siin on tema tõestus.

Hakkame joonestama sirge *AC* punktidest sellele sirgele ristlõike, pikendades neid kuni lõikumiseni sirgega *AD*. Ristlõigu aluspunkti kaugenedes punktist *A* tema pikkus kasvab, ning küllaldasel kaugusel punktist *A* see pikkus saab suuremaks kui paralleelide *a* ja *AC* vaheline kaugus. Sirge *AD* vastavad punktid asetsevad niisiis teisel pool sirget *a*, nii et sirge *AD* kulgeb sirge *a* ühelt poolt teisele poole. Kuid see võib juhtuda ainult siis, kui ta lõikub sirgega *a*. Proklos toetub oma tõestuses oletusele, et ühe paralleelsirge punktide kaugus teisest paralleelsirgest ei või piiramatult kasvada. Kuid see oletus on omakorda uus postulaat, mis on samaväärne Eukleidese postulaadiga.

Toome veel kolmnurga nurkade summa teoreemi tõestamise katse, mis ei rakenda paralleelsirgete omadusi. See tõestus on pärit alles XIX sajandist ja kuulub Göttingeni ülikooli professorile Thibaut'le (l. *tiboo)*. Olgu antud $\triangle ABC$ (joon. 157). Pikendame külge *CA* punktist *A*, külge *AB* punktist *B* ja külge *BC* punktist *C*. Tõestame, et sel teel tekkinud välisnurkade summa on 360°. Pöörame sigret *AC* punkti *A* ümber välisnurga *A* võrra. Pärast seda pööramist ühtib ta sirgega *AB*. Pöörame nüüd edasi seda sirget punkti *B* ümber tema uuest asendist välisnurga *B* võrra; pärast pööramist ühtib ta sirgega *BC*. Pöörame seda sirget nüüd tema viimasest asendist punkti *C* ümber välisnurga *C* võrra. Pärast kolme pööramist sirge tuleb oma esialgsesse asendisse. Järelikult, üldse pöördub ta täispöörde võrra, s. o. 360° võrra, kuid tema kolm pööret koosnesid kolmnurga kolme välisnurga suurustest pööretest. Järelikult on nende välisnurkade summa 360°. Kuid on ilmne, et kolmnurga kõigi välis- ja sisenurkade summa on $3 \cdot 180°$, seega sisenurkade summaks osutub $540°—360°$ ehk 180°.



Joon. 157.

Selles tõestuses Thibaut teostas sirgega kolm pööret üksteisest e r i n e v a t e punktide ümber ning eeldas vaikides, et säärane pööramine on samaväärne täispöördega ü h e keskpunkti ümber.

Niisugune oletus on omakorda teatav postulaat. Selle postulaadi lähem uurimine näitab, et ta on samaväärne Eukleidese postulaadiga.

Vaatamata Eukleidese postulaadi arvukate tõestamiskatsete ebaõnnestumisele, selle tõestamise katsed ei lakanud, ning selle põhjuseks oli geomeetrite täielik veendumus selles, et ilma selle postulaadita on geomeetria ülesehitus võimatu.

3. XIX sajandi esimesel poolel geniaalne vene matemaatik, Kaasani ülikooli professor Nikolai Lobatševski avaldas julge mõtte, et Eukleidese postulaat ei ole geomeetria teiste aksioomide loogiline järeldus ning seepärast ei olegi võimalik teda tõestada ja et selle postulaadi tarvitusele võtmine ei ole geomeetria ülesehitamiseks vajalik.

Oma väite kinnitamiseks ta ehitas uue geomeetria, milles Eukleidese postulaat oli asendatud teise oletusega, nimelt et antud tasapinnal antud punktist võib joonestada kuitahes palju sirgeid, mis ei lõiku antud sirgega.

Selle geomeetria laused erinesid oluliselt Eukleidese geomeetria teoreemidest. Nii osutus kolmnurga nurkade summa väiksemaks kui 360°, kolmnurga kongruentsuse teoreemidele lisandus uus: «kolmnurgad on kongruentsed, kui kolm nurka ühes on võrdsed kolme nurgaga teises». Seega selles geomeetrias ei ole kolmnurki, mis on sarnased, kuid ühtimatud.

Lobatševski esitas enda loodud geomeetria esmakordselt 1826. aastal. Lobatševski ideed olid ülimal määral uued ja üllatavad. Vaatamata uue geomeetria sääraste lausete uudsusele, oli tal siiski harmooniline ja täiuslik kuju nagu Eukleidese geomeetrialgi. Hiljem hakati teda nimetama m i t t e - e u k l e i d i l i s e k s geomeetriaks.

Ühteaegu mitte-eukleidilise geomeetria avastamisega kerkis küsimus, milline geomeetria vastab tõelisele materiaalsele maailmale ja millist geomeetriat tuleb rakendada rakendusteaduste — füüsika, astronoomia jt. probleemide lahendamisel. Lobatševski püüdis seda küsimust lahendada katselisel teel — astronoomiliste vaatluste abil. Kuid selle küsimuse lahendamine lihtsate vahenditega osutus võimatuks. Meie ruumilised tajumused ei ole absoluutselt täpsed ja peegeldavad ainult ligikaudu materiaalse maailma ruumilisi suhteid.

Eukleidese geomeetria arenes tähelepanekutest materiaalses maailmas ja peegeldab seepärast suure täpsusega selles esinevaid seoseid, vähemalt nende lihtsamais avaldusis. Lobatševski katsed ei andnud seepärast seatud küsimustele ammendavat vastust: nad ei näidanud märgatavaid kõrvalekaldumisi sellest, mida andis Eukleidese geomeetria, kuid nad ei saanud ka kindlaks teha selle geomeetria lausete ja materiaalse maailma ruumiliste suhete absoluutset vastavust.

Mitte-eukleidilise geomeetria avastamine mõjutas sügavalt geomeetrite teadvust. Juba see tõsiasi, et on olemas harmooniline ja vasturääkivusteta mitte-eukleidiline geomeetria, purustas sajandeid kestnud usalduse «kaemusse» ja «silmanähtavusse», mis juhtisid muistsete geomeetrite mõtlemist. Viienda postulaadi sajanditepikkune analüüs pani vankuma geomeetriliste põhikujutluste alustoed, milledel rajanes Eukleidese geomeetria. See analüüs avastas üksikute, näiliselt üksteisest kaugete geomeetriliste tõdede sügavad sõltumused ja näitas materiaalse maailma ruumilisi suhteid uues valguses.

Seepärast osutus Eukleidese aksioomide ja definitsioonide süsteem kui geomeetria ülesehituse alus puudulikuks ja ei vastanud enam teadusliku ranguse kasvavaile nõudeile.

Säärane definitsioon, nagu näiteks «joon on laiuseta pikkus», ei rahuldanud enam geomeetreid, sest pikkuse ja laiuse mõisted ise kaotasid nende teadvuses selle absoluutse selguse ja aprioorsuse iseloomu, mis neil mõistetel oli Eukleidese ajal. Uue aja geomeetrid ei pidanud küllaldaseks mitmeid Eukleidese definitsioone ilma mõningate täiendusteta, mida ei olnud selgesti väljendatud, kuid vaikides ja märkamatult tunnustati muistsete geomeetrite poolt. Teisiti on raske seletada, miks näiteks definitsiooni 4 ei tohi rakendada ringjoone puhul ning definitsiooni 7 silindri või koonuse pinna puhul.

Geomeetriliste definitsioonide ja aksioomide täiuslikkuse nõudlus viis selleni, et XIX sajandi lõpul seati üles kogu geomeetria aksiomaatilise aluse revideerimise ja täpsustamise küsimus. Töödega sel alal loodi geomeetria uus aksiomaatika, mis täielikult vastab matemaatika nüüdisaegseile rangeile nõudeile.

Alamal anname lühikese ülevaate selle küsimuse nüüdisaja seisundi kohta.

4. Kõige esmalt seame küsimuse, kuidas defineerida geomeetrilisi põhikujundeid: punkti, sirgjoont ja tasapinda. Märgime, et defineerida mingit mõistet tähendab kirjeldada teda varem kindlaks määratud mõistete abil. Kui aga otsida l i h t s a i m a t e mõistete definitsiooni, siis jõuame vältimatult ainult ühe nimetuse asendamisele teisega, mis omakorda nõuab defineerimist. Nii oli lugu ka Eukleidesega, kes mõistet «joon» defineeris «pikkuse» või «piiri» mõistete abil, jättes viimased defineerimata.

Seepärast võib algusest peale jätta defineerimata lihtsaimad geomeetrilised mõisted ja võtta nad algmõisteteks, mida ei saa väljendada lihtsamate mõistete abil. «Punkt», «sirge» ja «tasapind» võetaksegi sellisteks ürgseteks, mittedefineeritavaiks geomeetrilisteks mõisteteks. Vastavalt nendele määratakse terve põhioletuste, «aksioomide» süsteem, mida tunnustatakse tõestamatute lähtetõdedena. Oma olemuselt on need aksioomid materiaalse maailma ruumiliste seoste otstarbekohased abstraktsioonid.

Toome siin saksa matemaatiku Hilbert'i poolt loodud aksioomide süsteemi. Selle süsteemi geomeetria aksioomid liigitatakse 5 rühma.

Esimene rühm — **«ühendamisaksioomid»**. Selle rühma aksioomide ülesandeks on kindlaks määrata mõistete: p u n k t, s i r g e ja t a s a p i n d need suhted, mida harilikult iseloomustatakse sõnadega: «sirge läbib punkti», «punkt asetseb sirgel või tasapinnal» jne. See rühm koosneb järgmistest aksioomidest:

1. *Kaks punkti määravad üheainsa neid läbiva sirge.*
2. *Igal sirgel asetseb vähemalt kaks punkti; on olemas vähemalt kolm punkti, mis ei asetse ühel sirgel.*
3. *Kolme mitte ühel sirgel asetsevat punkti läbib üksainus tasapind. Igas tasapinnas asetseb vähemalt üks punkt.*
4. *Kui sirge kaks punkti asetsevad ühel tasapinnal, siis selle sirge kõik punktid asetsevad samal tasapinnal.*

5. *Kui kahel tasapinnal on üks ühine punkt, siis on neil veel vähemalt üks ühine punkt.*

6. *On olemas vähemalt neli punkti, mis ei asetse ühel tasapinnal.*

Esimesel pilgul mõned neist aksioomidest võivad näida puudulikud või üldse mittevajalikud. Näiteks aksioom 2 oleks nagu vastuoludes hariliku kujutlusega sirgest, millel me kujutleme loendamatut hulka punkte. Kuid ei tohi unustada, et punkti ja sirge mõisted on siin tarvitusele võetud kui ürgsed teineteisest sõltumatud mõisted. Nad võivad esineda üksikult. Seepärast, kui meie ütlesime, et punkt asetseb sirgel, või et sirge läbib punkti, siis meie anname punktile ja sirgele omaduse olla teineteisega mingis ühenduses. Et selgemini ette kujutada säärast punktide, sirgete ja tasapindade olemasolu üksikult ja nendevahelisi seoseid, kujutleme neid kui konkreetseid füüsikalisi esemeid. Punkte kujutleme kui mingi kindla suurusega herneteri. Oletame, et need herneterad on kerakujulised ja küllalt pehmed (näiteks vees leotatud), et neid saab nõelaga läbi torgata ja tükkideks lõigata. Sirgeid kujutleme kui hästi peeni terasvardaid ja tasapindu kui hästi õhukesi lesti. Esmalt kujutleme, et need lestad, vardad ja herneterad ei ole millegagi seotud ja et nad asetsevad koguni eri kohtades: ühes kohas kuhi herneid, teises — kimp terasvardaid ja kolmandas — virn lesti. Hakkame nüüd neid allutama nendele tingimustele, mida sisaldavad meie aksioomid. Meie ütleme, et punkt asetseb sirgel, kui varras on hernest läbi torgatud või vähemalt osaliselt tungib temasse. Meie ütleme, et punkt asetseb tasapinal, kui õhuke lest lõikab hernetera pooleks või tungib ainult servaga herneterasse. Lõpuks ütleme, et sirge asetseb tasapinnal, kui peenike varras on lesta servaks, s. o. kui varras kogu ulatuses liibub lesta servale, ei ühele ega teisele poole välja ulatudes. Mida tähendavad neil tingimustel aksioomid? Nad nõuavad, et meie herneterad, vardad ja lestad asetseksid ruumis nii, et iga paar herneteri oleks läbi torgatud vähemalt ühe vardaga või oleks ühele vardale lükitud (aksioom 1); et iga varras läbiks vähemalt kahte hernetera (aksioom 2); et iga kolmik herneteri oleks ühe lestaga läbi lõigatud ja et iga lest läbiks vähemalt ühte hernetera (aksioom 3); et kui ühele vardale lükitud kaks hernetera mingi lestaga läbi lõigata, siis see lest lõikab kõiki herneteri, mis võiksid veel olla lükitud sellele vardale (aksioom 4); et kui kaks lesta lõikavad ühte ja sama hernetera, siis lõikavad nad veel vähemalt ühte hernetera (aksioom 5); et on olemas vähemalt neli hernetera, mida üks ja sama lest ei lõika (aksioom 6). Neile nõudeile peavad vastama meie herneterad, vardad ja lestad. Säärast herneterade, varraste ja lestade kombinatsiooni ei ole raske ehitada. Tõesti, eraldame lestade virnast neli lesta. Lõikame neid servi mööda nii, et igaühel oleks kindla suurusega võrdkülgse kolmnurga kuju. Varraste kimbust võtame 6 varrast ja murrame otstest tükid ära nii, et kõik vardad oleksid võrdkülgse kolmnurga küljega ühepikkused. Edasi võtame 4 hernetera ja moodustame järgmise kujundi: 4-st lestast koostame korrapärase tetraeedri; lestade servade liitekohtadele paigutame vardad ning tetraeedri tippudesse asetame herneterad nii, et lestade servad oleksid neile sisse lõigatud ja vardad otsapidi neisse torgatud.

See herneste, varraste ja lestade komplekt rahuldab kõiki ülemal seatud nõudeid, s. o. vastab kõigile meie aksioomidele.

Sellest näitest nähtub, et 1. rühma aksioomidele vastavate punktide, sirgete ja tasapindade hulk võib olla lõplik. Meie näites on meil ainult 4 punkti, 6 sirget ja 4 tasapinda.

Teise rühma aksioomide — **«järjestuse aksioomide»** ülesandeks on selgesti väljendada need oletused, millele toetume, kui kõneleme ühest või teisest punktide järjestusest sirgel ja tasapinnal. Tähtsamaks mõisteks on siin ühe punkti asetsemine sirgel kahe teise punkti v a h e l. Selle mõiste loogiline sisu väljendubki teise rühma aksioomides. Selle rühma aksioomid on järgmised:

1. *Kui punkt B asetseb punktide A ja C vahel, siis A, B ja C on üksteisest erinevad sirgjoone punktid ning B asetseb ka C ja A vahel.*
2. *Kui sirgel on antud kaks punkti A ja B, siis on sellel sirgel veel vähemalt üks punkt C nii, et B asetseb A ja C vahel.*
3. *Kolmest sirgel antud punktist ei asetse rohkem kui üks kahe teise vahel.*
4. *Kui antud tasapinnal on antud kolmnurk ABC ja mingi sirge a, mis ei läbi ühtegi kolmnurga tippu ja lõikub lõiguga AB, siis lõikub ta tingimata kas lõiguga BC või lõiguga AC.*

Neis aksioomides esitatud nõudeid peavad rahuldama meie punktid, sirged ja tasapinnad. See tetraeedri tahkude, servade ja tippude komplekt, mis rahuldas 1. rühma aksioomide nõudeid, ei vasta enam 2. rühma aksioomidele. Tõesti igale meie vardale oli lükitud ainult kaks hernest, kuna teise rühma 2. aksioom nõuab, et sirgel oleks vähemalt kolm punkti. Põhjalikum analüüs näitab, et igal sirgel peab asetsema loendamatu hulk punkte ning et 1. ja 2. rühma aksioome koos võetult rahuldab ainult lõpmatu hulk punkte, sirgeid ja tasapindu[1].

---

[1] Selle tõestus ei kuulu selle raamatu piiridesse.

Kolmanda rühma aksioomide — **«kongruentsuse aksioomide»** ülesandeks on kindlaks määrata lõikude ja nurkade võrdsuse põhitingimused. See rühm sisaldab järgmisi aksioome:

1. *Igale sirgele võib igast punktist paigutada antud lõiguga võrdse lõigu.*
2. *Kaks lõiku, mis on võrdsed kolmandaga, on võrdsed teineteisega.*
3. *Olgu A, B, C punktid ühel sirgel ja A_1, B_1, C_1 samuti punktid ühel sirgel ning olgu $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$; kui lõikudel AB ja BC ning samuti lõikudel A_1B_1 ja B_1C_1 ei ole ühiseid punkte, siis $AC = A_1C_1$.*
4. *Kui on antud mingi nurk, kiir mingil sirgel ja leht (pooltasapind), mille piiriks on see sirge, siis on sel lehel üksainus antud kiire otspunktist lähtuv kiir, mis antud kiirega moodustab antud nurgaga võrdse nurga; iga nurk on võrdne iseenesega.*
5. *Kui kolmnurkade ABC ja $A_1B_1C_1$ küljed $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ ja $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$, siis $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$.*

Paneme tähele viimast aksioomi.

Geomeetria õpikutes see aksioom esineb kolmnurkade kongruentsuse teise tunnuse järeldusena. Kuid kolmnurkade kongruentsus ise tõestatakse sel juhul pealepaigutamise teel ja eeldab seega kujundite ümberpaigutamise võimalust. Kuid säärane ümberpaigutamine moodustab omakorda mingi uue, seejuures meie süsteemi mittekuuluva aksioomi. Seepärast tulebki 5. lauset võtta kui uut aksioomi. Tema rakendamine asendab geomeetrias tarvitusel oleva kujundite ümberpaigutamise võtte.

Neljanda aksioomide rühma moodustab üksainus — **«paralleelide aksioom»**. Seejuures paralleelsirgete olemasolu võimalus tõestatakse ilma uute aksioomideta. Seepärast aksioom nõuab ainsa paralleelsirge võimalust:

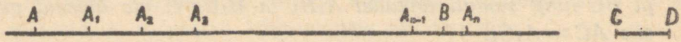
antud tasapinnal ei saa ehitada läbi antud punkti rohkem kui ühe sirge, mis ei lõiku antud sirgega. Sellest aksioomist kõnelesime juba eespool.

Lõpuks viienda ja viimase aksioomide rühma moodustavad **«pidevuse aksioomid»**. See rühm koosneb kahest aksioomist.

1. **Archimedese aksioom.** *Kui AB ja CD on mistahes lõigud, siis sirgel AB on olemas niisugune punktide hulk A_1, A_2, A_3, ... A_n, et $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = \ldots = A_{n-1}A_n = CD$ ja et B asetseb A_{n-1} ja A_n vahel* (joon. 158).

2. **Sirge täielikkuse aksioom.** *Sirge punktid moodustavad punktide süsteemi, millele ei saa lisada uusi punkte, mida võiks lugeda samale sirgele kuuluvateks, rikkumata varem üles seatud aksioome*[1].

Esimese — Archimedese aksioomi sisu on selge: aksioom nõuab, et sirge iga punktini, kui kaugel ta olekski märgitud, võib küündida, tehes lõpliku arvu võrdseid samme ja et seega on võimalik mõõta sirge iga punkti kaugust antud punktist. Seepärast seda aksioomi nimetataksegi mõnikord mõõtmise aksioomiks.



Joon. 158.

Vaatame, milles seisneb sirge täielikkuse aksioom.

Algebra kursusest on teada, et kui arvuteljel märkida kõik ratsionaalsete abstsissidega punktid, siis sellega ei ole veel arvutelje kõik punktid ammutatud: nende punktidega üksi ei ole sirge veel pidevalt täidetud. Irratsionaalsete abstsissidega punktid on veel märkimata. Kui võetakse tarvitusele algebralised irratsionaalarvud igasuguste juurijatega ratsionaalarvude juurte ja ratsionaalsete kordajatega algebraliste võrrandite lahendite näol ja märgitakse nendele vastavad punktid arvuteljel, siis arvutelg rikastub uute punktidega, millede abstsissid on irratsionaalsed. Kuid arvuteljele jääb ikka veel tühje kohti, kuhu võib paigutada veel uusi punkte. Nii näiteks on arvuteljel märkimata punktid abstsissidega π, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$, $\sqrt{\pi}$ jne. Arvutelg täitub alles siis, kui võetakse tarvitusele kõik reaalarvud. Pärast seda ei saa sinna enam uut punkti paigutada. Sirgel ei ole enam tühja kohta. Täielikkuse aksioom nõuab, et geomeetriline sirge eviks nimelt seda omadust: et temal ei oleks tühja kohta, kuhu võiks paigutada uue punkti.

Sellest aksioomist järeldub, et igale reaalarvule vastab valitud abstsisside lugemise alguse ja ühiku ning suuna puhul kindel sirgjoone punkt ja ümberpöördult — igale sirge punktile vastab kindel reaalarv.

Säärane on aksioomide loetelu, milledel praegusel ajal baseerub eukleidiline geomeetria.

---

[1] Täpsemalt: rikkumata kahte esimest ühendamisaksioomi, järjestuse aksioome, esimest kongruentsuse aksioomi ja Archimedese aksioomi.

5. Kui nüüd analüüsida kogu elementaargeomeetria kursust, siis märkame, et üheski tõestuses meie ei toetunud muule, kui ülaltoodud aksioomisüsteemile. Mõned meie oletused, nagu paralleelide aksioom ja mõned ühendamisaksioomid, olid sõnades otse väljendatud, teisi rakendasime vaikides kui endastmõistetavaid. Kongruentsuse aksioomid asendasime oletusega, et kujundeid on võimalik ruumis ümber paigutada. Kuid see oletus ise, nagu näitab tema põhjalikum analüüs, on komplitseeritud aksioom, mis on samaväärne kongruentsuse aksioomide rühmaga.

Sisukord.

Lk.

Stereomeetria.

Eelmärkusi 3

Esimene peatükk.

Sirged ja tasapinnad.

I. Tasapinna asendi määramine 3

II. Paralleelsed sirged ja tasapinnad 7
Paralleelsed sirged 7
Sirge ja tasapinna rööpseis 7
Paralleelsed tasapinnad 9
Konstruktsioonülesandeid 11

III. Tasapinna rist- ja kaldsirged 14

IV. Sirgete ja tasapindade rööpseisu ja ristseisu seos 18
Konstruktsioonülesandeid 20

V. Kahetahulised nurgad. Sirge ja tasapinna vaheline nurk.
Kiivsirgetevaheline nurk. Ruumnurgad 23
Kahetahulised nurgad 23
Risttasapinnad 27
Kahe kiivsirge vaheline nurk 28
Nurk sirge ja tasapinna vahel 29
Ruumnurgad 30
Kolmetahuliste nurkade võrdsuse lihtsaimad juhud 34

Harjutusi 36
Konstruktsioonülesandeid 37

Teine peatükk.

Lk.

Punkti, lõigu ja kujundi ristprojektsioonid 38

Kolmas peatükk.

Hulktahukad.

I. Rööptahukas ja püramiid 54
Rööptahuka tahkude ja diagonaalide omadused . . . 59
Püramiidi paralleelsete lõigete omadused 60
Prisma ja püramiidi külgpindala 63
Harjutusi 65

II. Prisma ja püramiidi ruumala 66
Rööptahuka ruumala 66
Prisma ruumala 73
Püramiidi ruumala 76

III. Hulktahukate sarnasus 84

IV. Korrapärased hulktahukad 87

V. Ruumiliste kujundite sümmeetria 91
Harjutusi 99

Neljas peatükk.

Ümarkehad.

I. Silinder ja koonus 101
Silindri ja koonuse pindala 105
Silindri ja koonuse ruumala 110
Sarnased silindrid ja koonused 112

II. Kera 114
Kera tasapinnaline lõige 114
Kera puutuvtasapind 116
Kera ja tema osade pindalad 118
Kera ja tema osade ruumalad 122
Harjutusi 130

Lisa. Geomeetria aksioomidest 132

2. trükk.

Tõlkinud A. Vihman.
Vastutav toimetaja A. Humal.
Tehniline toimetaja E. Lellep.

Ladumisele antud 4. I 1950. Trükkimisele antud 6. II 1950. Trükiarv 2000. Paber 56×79, 1/16. Trükipoognaid 9,25. MB-00686. Trükikoda „Tartu Kommunist“, Tartu, Ülikooli 21/23. Tellimise nr. 40.

На эстонском языке.

А. П. Киселев. Геометрия, Стереометрия для 11 класса.

Hind rbl. 3.15

Rbl. 3.15