

1120.

# Lehrbuch

der

# Stereometrie,

zum Gebrauch

bei dem

Unterrichte in Gymnasien und höheren Lehranstalten

von

**W. Nerling,**

Collegienrath und Ritter, Oberlehrer am Gymnasium  
zu Dorpat.

Dorpat.

Druck und Verlag von E. J. Karow, Universitätsbuchhändler.

1865.

ESTICA

A-5718

①  
Lehrbuch

der

Stereometrie,

zum Gebrauch

bei dem

Unterrichte in Gymnasien und höheren Unterrichtsanstalten

von

**W. Nerling,**

Collegienrath und Ritter, Oberlehrer am Gymnasium zu Dorpat.

---

Dorpat.

Druck und Verlag von C. J. Karow, Universitätsbuchhändler.

—  
1865.

Lehrbuch

1865

Lehrbuch

Lehrbuch

bei dem

Von der Censur gestattet.

Dorpat, den 3. April 1865.

Et.



6114

Dorpat

Lehrbuch

1865

## Vorrede.

Was den Plan des vorliegenden Lehrbuches der Stereometrie anlangt, so verweise ich auf die Vorrede zur ersten Auflage meines Lehrbuches der ebenen Geometrie und beschränke mich hier nur auf einige wenige Bemerkungen über einzelne Punkte, denen nach meiner Ansicht bisher in den meisten Lehrbüchern der Stereometrie zu wenig Beachtung geschenkt worden ist. Es sind dies, neben zahlreicheren Erklärungen und Lehrsätzen über die verschiedenen Ecken und neben allgemeineren Begriffen von der Entstehung der verschiedenen Flächen, die Sätze von den regelmäßigen Polyedern und den körperlichen Räumen, denen ich eine besondere Aufmerksamkeit habe zu Theil werden lassen.

Die Erklärungen und Lehrsätze von den Ecken sind in reicher Anzahl gegeben worden, namentlich in Rücksicht darauf, daß sie mit den Sätzen vom sphärischen Dreieck zusammenhängen und daher dem Schüler das Verständniß dieser letzteren wesentlich erleichtern. Die Erklärungen von der Entstehung der verschiedenen Flächen habe ich nicht allein in der gewöhnlichen Weise, sondern auch allgemeiner gegeben, und sie, so viel es

anging, den Erklärungen in der höheren Mathematik angeschlossen. Hinsichtlich der Sätze von den regelmäßigen Polyedern erwähne ich nur, daß ich den Beweis für die Anzahl der Seitenflächen direct gegeben habe. Was schließlich die Sätze von den körperlichen Räumen betrifft, so hoffe ich die Beweise derselben mit Hilfe des Cavalerischen Grundsatzes vereinfacht und somit dem Schüler das Verständniß derselben wesentlich erleichtert zu haben; statt der bisherigen schwerfälligen und weitschweifigen indirecten Beweisführung findet er kurze directe Beweise.

Endlich habe ich dem Lehrbuche noch eine Anzahl von Aufgaben mit Zahlenwerthen beigelegt, weil erst bei ihrer Lösung dem Schüler klar wird, wie weit er den im Lehrbuche enthaltenen Stoff beherrscht oder nicht beherrscht, und wo und wie er etwaige Lücken auszufüllen hat.

Dorpat, den 18. Febr. 1865.

14	.....	Aufgaben
14	.....	III. Strenghändige Körper.
14	.....	Die Regel
14	.....	Aufgaben
19	.....	Bestimmte Aufgaben
27	.....	Fragen

## Inhalt.

	Seite.
Erklärungen . . . . .	1
Grundsätze . . . . .	8

### Erster Abschnitt.

Die gegenseitige Lage der geraden Linien und Ebenen im Raume.

I. Von der Lage gerader Linien gegen eine Ebene . . . . .	9
Aufgaben . . . . .	12
II. Von der Lage der Ebenen gegen Ebenen . . . . .	13
Aufgaben . . . . .	20
III. Von den körperlichen Ecken . . . . .	21

### Zweiter Abschnitt.

Von den Körpern.

#### I. Ebenflächige Körper.

1) Das Prisma . . . . .	27
2) Die Pyramide . . . . .	30
3) Die regelmäßigen Polyeder . . . . .	34
Aufgaben . . . . .	36

#### II. Gemischtflächige Körper.

1) Der Cylinder . . . . .	37
1) Der Regel . . . . .	39

# VI

	Seite.
Aufgaben . . . . .	41
III. Krummflächige Körper.	
Die Kugel . . . . .	42
Aufgaben . . . . .	47
Verschiedene Aufgaben . . . . .	49
Fragen . . . . .	75

## Inhalt.

1		Gründungen
2		Grundsätze
Erster Abschnitt		
9	I. Von der Lage gerader Ebenen gegen eine Ebene	9
12	Aufgaben	12
13	II. Von der Lage der Ebenen gegen Ebenen	13
20	Aufgaben	20
21	III. Von den löschlichen Ebenen	21
Zweiter Abschnitt		
Von den Körpern		
I. Ebenflächige Körper		
27	1) Das Prisma	27
30	2) Die Pyramide	30
34	3) Die rechtwinkligen Körper	34
36	Aufgaben	36
II. Gemüthflächige Körper		
37	1) Der Cylinder	37
39	1) Der Kegel	39

## Erklärungen.

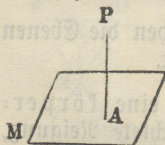
§ 1. Die Stereometrie oder körperliche Geometrie ist derjenige Theil der Geometrie, der von den ausgedehnten Größen im Raume überhaupt handelt.

§ 2. Zwei gerade Linien sind im Raume einander parallel, wenn sie in einer durch sie gelegten Ebene einander parallel sind.

§ 3. Eine Gerade wird einer Ebene parallel genannt, wenn beide, unbegrenzt verlängert, einander nirgends begegnen.

§ 4. Eine Gerade steht senkrecht auf einer Ebene, wenn alle durch ihren Treffpunkt (Fußpunkt) in der Ebene gezogenen geraden Linien rechte Winkel mit ihr einschließen. In jedem andern Falle hat die Linie eine geneigte Lage gegen die Ebene.

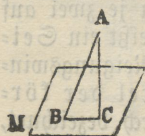
Fig. 1.



§ 5. Die Projektion eines Punktes P auf einer Ebene M ist der Fußpunkt A des von jenem Punkte P auf diese Ebene gefällten Perpendikels PA.

§ 6. Die Projektion einer gegebenen geraden Linie auf einer beliebigen Ebene findet man, wenn man die Projektionen zweier Punkte der gegebenen geraden Linie durch eine gerade Linie mit einander verbindet.

Fig. 2.

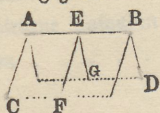


§ 7. Man nennt den Winkel, welchen eine Gerade mit ihrer Projektion auf einer Ebene bildet, den Neigungswinkel der Geraden zu dieser Ebene.  $\angle ABC$  ist der Neigungswinkel der Linie AB zur Ebene M.

§ 8. Ebenen sind einander parallel, wenn sie beliebig erweitert nirgends zusammentreffen.

§ 9. Die Neigung zweier einander schneidenden Ebenen, oder die größere oder geringere Abweichung derselben von einander, heißt Flächenwinkel, die Durchschnittslinie heißt Kante. Der Flächenwinkel wird durch vier Buchstaben bezeichnet, so daß die beiden mittlern Buchstaben die Kante bezeichnen, z. B. CABD.

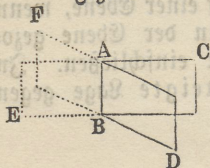
Fig. 3.



§ 10. Der Neigungswinkel zweier einander schneidenden Ebenen ist der Winkel, welchen zwei in denselben Punkte der Durchschnittslinie auf dieselbe in jeder Ebene senkrecht gezogene gerade Linien einschließen, z. B. (Fig. 3.), wenn FE in der Ebene CB senkrecht auf AB und EG in der Ebene AD senkrecht auf AB stehen, so ist  $\angle FEG$  der Neigungswinkel der Ebenen CB und AD.

§ 11. Wird eine Ebene über die Kante hinaus verlängert, so entstehen Nebenflächenwinkel (EABD und CABD), welche im Falle der Gleichheit rechte, im Falle der Ungleichheit schiefe genannt werden. Wird auch die andere Ebene über die Kante hinaus verlängert, so entstehen Scheitel-

Fig. 4.

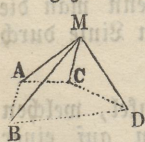


flächenwinkel (CABD u. FAE).

§ 12. Bei gleichen Nebenflächenwinkeln stehen die Ebenen auf einander senkrecht, bei ungleichen geneigt.

§ 13. Ein körperlicher Winkel oder eine körperliche Ecke (Raumeck) ist die gleichzeitig betrachtete Neigung, welche mehrere in einem Punkte zusammenstößende Ebenen an diesem Punkte gegen einander haben. Der Punkt, in welchem die Ebenen zusammenstoßen, heißt Spitze (Scheitel); die Durchschnittslinien derselben heißen Kanten, die Ebenen selbst Seitenebenen (Seitenflächen). Jeder Winkel, welchen je zwei auf einander folgende Kanten bilden, heißt ein Seitenwinkel (Kantenwinkel) oder eine Seite; jeder Neigungswinkel zweier auf einander folgender Ebenen ein Winkel der körperlichen Ecke. Eine körperliche Ecke wird dadurch bezeichnet,

Fig. 5.

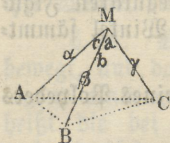


daß man entweder bloß den Buchstaben am Scheitel vorschreibt oder daß der erste den Scheitel, die folgenden die Richtungen der Kanten angeben MABCD.

§ 14. Nach der Anzahl der Seitenebenen oder der Kanten nennt man die Ecke selbst eine dreiseitige (dreikantige), vierseitige u. s. w. oder ein körperliches Dreieck (Raumdreieck) Viereck u. s. w.

§ 15. Die Winkel der körperlichen Ecke werden am zweckmäßigsten durch  $\alpha, \beta, \gamma \dots$  die Kantenwinkel (Seiten) dagegen durch  $a, b, c \dots$  angedeutet. Der Neigungswinkel der beiden Ebenen MAB und MAC ist  $= \alpha$ , der Neigungswinkel der beiden Ebenen MBA und MBC ist  $= \beta$ , der Neigungswinkel der beiden Ebenen MCA und MCB ist  $= \gamma$ ; der Kantenwinkel  $\text{CMB} = a$ ,  $\angle \text{CMA} = b$ , und  $\angle \text{AMB} = c$ .

Fig. 6.



§ 16. Die Ebenen, welche zwei Kanten oder eine Kante und eine gegenüberliegende Ecke oder auch drei und mehrere Ecken eines körperlichen Vielecks mit einander verbinden, ohne darum Seitenflächen desselben zu sein, heißen Diagonalebene. Da man jedes Raumpolygon in Raumdreiecke zerlegen kann, so betrachtet die Stereometrie vorzugsweise nur das Raumdreieck.

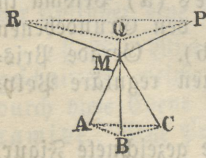
Fig. 7.



§ 17. Durch Verlängerung der Kanten und Seitenflächen einer Ecke über den Scheitel hinaus, entsteht eine, der gegebenen entgegengesetzte Vertikal- oder Scheiteleck.

§ 18. Sind alle drei Kantenwinkel einer dreiseitigen Ecke einander gleich, so heißt sie eine gleichseitige, sind aber nur zwei Kantenwinkel einander gleich, eine gleichschenklige.

Fig. 8.



§ 19. Denkt man sich aus dem Scheitel einer Ecke auf ihre Seiten Senkrechte errichtet und durch Ebenen verbunden, so entsteht eine neue Ecke, die man Polarecke (Ergänzungsecke) der ersten zu nennen pflegt. MPQR ist eine Polarecke von MABC.

§ 20. Zwei körperliche Ecken, deren Kantenvinkel (Seiten) und Flächenwinkel (Winkel) bezüglich gleich sind, aber in der einen in entgegengesetzter Ordnung auf einander folgen wie in andern, nennt man symmetrisch. Congruent sind Ecken, wenn sie in einander gelegt einander decken.

§ 21. Ein Körper heißt jeder nach allen Seiten hin von ebenen oder krummen Flächen begränzte Raum. Jeder bloß von ebenen Flächen begränzte Körper heißt ein ebenflächiger Körper oder ein Polyeder.

§ 22. Reguläre Körper oder Polyeder sind solche, welche von lauter unter einander congruenten regulären Figuren eingeschlossen werden, und deren körperliche Winkel sämtlich unter einander gleich sind.

§ 23. Gerade Linien zwischen zwei Ecken eines Polyeders heißen Diagonalen.

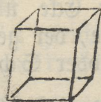
§ 24. Wenn sich eine gerade Linie (Erzeugungslinie) immer in paralleler Richtung gleichförmig fortbewegt, dabei ihr Endpunkt ein beliebiges Polygon (Leitlinie) beschreibt, so nennt man den dadurch entstandenen, nach zwei Seiten hin unbegränzten Raum einen prismatischen Raum.

§ 25. Wird ein prismatischer Raum von zwei einander parallelen Ebenen geschnitten, so heißt der dadurch abgeschlossene Körper ein Prisma. Ein Prisma

Fig. 9a.



Fig. 9b.



ist demnach ein von zwei parallelen und congruenten Netzen und  $n$  Parallelogrammen begränzter Körper. Die beiden Netze congruenten und parallelen Netze heißen Grundebenen, die Parallelogramme Seitenebenen. Jede Linie, in welcher eine

Grundebene und eine Seitenebene einander schneiden, heißt Grundkante, jede Linie, in welcher zwei Seitenebenen einander schneiden Seitkante. Die Entfernung der beiden Grundebenen von einander heißt Höhe des Prismas.

§ 26. Ein senkrecht oder gerades (a) Prisma ist dasjenige, dessen Seitenebenen senkrecht auf den Grundebenen sind; die übrigen werden schiefe genannt (b). Gerade Prismen heißen regulär, wenn die Grundebenen reguläre Polygone sind.

§ 27. Ein Netz ist die in einer Ebene gezeichnete Figur,

welche die Oberfläche eines Körpers so darstellt, daß sie unmittelbar um denselben gelegt werden kann.

§ 28. Ein Prisma, dessen Grundebenen Parallelogramme sind, heißt ein Parallelepipedum. Ein Prisma, welches von sechs Quadraten begrenzt wird, heißt ein Würfel (Cubus).

§ 29. Zur Ausmessung des Rauminhaltes der Körper bedient man sich als Maßeinheit eines Würfels, dessen Seite die Einheit eines Längenmaßes ist.

§ 30. Unter dem körperlichen oder kubischen Inhalte eines Körpers versteht man die Zahl, welche angiebt, wie viel solcher Würfel ein Körper enthält.

§ 31. Wenn eine gerade Linie sich parallel zu sich selbst bewegt, und dabei stets durch die auf einander folgenden Punkte irgend einer geschlossenen Curve (krümmigen Figur) geht, so heißt die bei dieser Bewegung erzeugte krumme Fläche eine cylindrische Fläche und der nach zwei Seiten unbegrenzte Raum, den sie umschließt ein cylindrischer Raum.

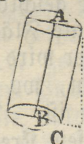
§ 32. Der von zwei parallelen Grundebenen und einer sich um dieselben herumziehenden cylindrischen Fläche begrenzte Körper heißt ein Cylinder.

§ 33. Ist die Erzeugungslinie senkrecht auf den Grundebenen, so heißt der Cylinder gerade (a), sonst schief (b). Ist die Leitlinie eine Kreislinie, so entsteht der kreisförmige Cylinder. Hier wird nur der kreisförmige gerade Cylinder betrachtet werden.

Fig. 10a.



Fig. 10b.



§ 34. Die cylindrische Fläche heißt der Mantel des Cylinders, die gerade Linie, welche die Mittelpunkte der Grundebenen verbindet, heißt die Axe AB, der senkrechte Abstand der Grundebenen die Höhe (AB, AC).

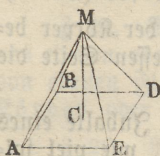
§ 35. Der kreisförmige gerade Cylinder entsteht auch durch die Umdrehung eines Rechtecks um eine Seite; daher hat der Cylinder eine Axe (Umdrehungslinie) und das Prisma keine.

§ 36. Wird eine nseitige körperliche Ecke von einer Ebene geschnitten, welche alle Seiten der Ecke schneidet, so heißt der durch diese Ebene von der Ecke abgeschnittene Körper eine Pyramide. Eine Pyramide ist demnach ein Körper, der von einem

nech und  $n$  in einem Punkte zusammenstoßenden Dreiecken begränzt wird.

§ 37. Von den die Pyramide begränzenden Ebenen heißt das nech die Grundebene und jedes der  $n$  Dreiecke eine Seitenebene oder Seitendreieck. Nach der Anzahl der Seiten der Grundebene heißt die Pyramide drei-, vier-, überhaupt  $n$ seitig. Der Punkt, in welchem alle Seitendreiecke zusammenstoßen, heißt die Spitze ( $M$ ), und die senkrechte Entfernung der Spitze von der Grundebene die Höhe ( $MC$ ), der Pyramide.

Fig. 11.



§ 38. Sind bei einer Pyramide die Seitenkanten einander gleich, so heißt die Pyramide gleichseitig (gerade), im entgegengesetzten Falle ungleichseitig (schief). Gerade Pyramiden mit regulären Grundebenen heißen reguläre.

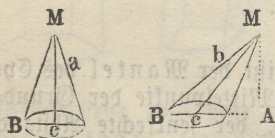
Fig. 12.



§ 39. Wird eine Pyramide durch eine Ebene parallel zur Grundebene geschnitten, so heißt der Theil der Pyramide, welcher zwischen den beiden parallelen Ebenen liegt, eine abgekürzte Pyramide (Pyramidenstumpf).

§ 40. Wenn sich eine unbegränzte Gerade dergestalt bewegt, daß sie stets durch einen fixen Punkt geht, und dabei längs einer gegebenen geschlossenen Curve fortgleitet, so nennt man die dadurch erzeugte Fläche eine Kegelfläche. Hier wird nur der Fall betrachtet werden, wo die Leitlinie eine Kreislinie ist. Der Körper, welcher von diesem Kreise und demjenigen Theil dieser krummen Fläche begränzt wird, welcher zwischen der Kreisebene und dem festen Punkte liegt, heißt ein Kegel. Der feste

Fig. 13.

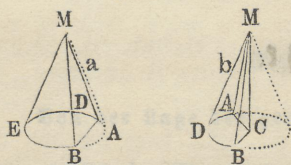


Punkt heißt die Spitze ( $M$ ), die den Kegel begränzende krumme Fläche der Mantel. Die Gerade von der Spitze des Kegels nach dem Mittelpunkte der Grundebene heißt die Axe ( $MC$ ) des Kegels, die von der Spitze auf die Grundfläche gefällte Senkrechte heißt Höhe ( $MC$ ,  $MA$ ). Jede Linie, die von der Spitze des Kegels nach irgend einem Umfangspunkt der Grundfläche gezogen wird, heißt Seitenlinie ( $MB$ ) oder Seite des Kegels.

§ 41. (Fig. 13.). Ein senkrechter (gerader) Kegel (a) ist derjenige, dessen Axe senkrecht auf der Grundebene steht; ein schiefer (b) derjenige, wo dies nicht der Fall ist. Ein gleichseitiger Kegel ist ein solcher, worin jede Seitenlinie dem Durchmesser der Grundfläche gleich ist.

§ 42. Der kreisförmige gerade Kegel entsteht auch durch die Umdrehung eines rechtwinkligen Dreiecks um eine Kathete.

Fig. 14.



§ 44. Wird ein Kegel durch eine Ebene parallel zur Grundebene geschnitten, so heißt der Theil des Kegels zwischen den beiden parallelen Ebenen ein abgekürzter Kegel (Kegelstumpf).

§ 45. Eine Kugel ist ein Körper, der von einer einzigen Fläche so begränzt wird, daß jeder Punkt derselben von einem innern Punkte dieses Körpers gleich weit entfernt ist. Die begränzende krumme Fläche heißt Kugelfläche, der Punkt im Innern heißt der Mittelpunkt der Kugel und der Kugelfläche. Jede gerade Linie vom Mittelpunkt einer Kugel nach irgend einem Punkte ihrer Oberfläche heißt Halbmesser. Eine gerade Linie, welche zwei Punkte der Kugelfläche verbindet, heißt eine Sehne derselben, geht die Sehne durch den Mittelpunkt, so heißt sie ein Durchmesser (Axe) der Kugel. Der Theil einer die Kugel schneidenden Ebene, welcher vom Durchschnitte der Ebene mit der Kugel begränzt wird, heißt ein Kugelschnitt. Eine Ebene, welche die Kugelfläche nur in einem einzigen Punkte trifft und sonst ganz außerhalb der Kugel liegt, heißt eine Berührungsebene oder Tangentialebene der Kugel und der Punkt, in welchem sie die Kugelfläche trifft, der Berührungspunkt. Eine gerade Linie, welche eine Kugelfläche nur in einem einzigen Punkte trifft, heißt eine Tangente.

§ 46. Eine Kugel entsteht auch durch die Umdrehung eines Halbkreises um seinen Durchmesser.

§ 47. Zwei Körper sind einander gleich, wenn sie einen gleich großen Raum einnehmen; dagegen congruent, wenn sie in einander gelegt einander decken, und ähnlich, wenn sie von gleich vielen ähnlichen und ähnlich liegenden Figuren unter gleichen Flächenwinkeln eingeschlossen werden.

## Grundsätze.

1. Durch zwei Punkte im Raume, folglich auch durch eine gerade Linie im Raume sind unendlich viele Ebenen denkbar.

2. Drei Punkte, die nicht in gerader Linie liegen, bestimmen die Lage einer Ebene im Raume.

Zs. 1. Zwei einander schneidende gerade Linien, sowie zwei Parallellinien liegen stets in einer Ebene und es läßt sich durch sie jedesmal nur eine Ebene legen.

Zs. 2. Drei Punkte im Raume liegen immer, vier und mehr Punkte liegen nicht nothwendig in einer und derselben Ebene.

Zs. 3. Liegen zwei gerade Linien nicht in derselben Ebene, so schneiden sie weder einander, noch sind sie einander parallel.

3. Körper über gleichen Grundebenen und von gleichen Höhen sind einander gleich, wenn die parallelen Schnitte in gleicher Höhe überall bezüglich gleich sind. (Bonaventura Cavalieri, Professor der Mathematik zu Bologna. 1598—1647.)

## I. Abschnitt.

### Die gegenseitige Lage der geraden Linien und Ebenen im Raume.

#### Erste Abtheilung.

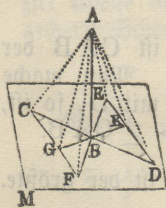
##### Von der Lage der geraden Linien gegen eine Ebene.

1. Lhrs. Wenn eine gerade Linie und eine Ebene einander durchschneiden, so kann dieses nur in einem Punkte geschehen.

Bw. Denn angenommen, sie hätten noch einen zweiten Punkt mit einander gemein, so würde die Gerade völlig in die Ebene fallen, welches gegen die Bdg. ist.

2. Lhrs. Eine gerade Linie  $AB$ , welche auf zwei einander schneidenden geraden Linien  $CD$ ,  $EF$  in ihrem Durchschnittspunkte senkrecht steht, ist eine Senkrechte auf der durch diese beiden Linien gelegten Ebene.

Fig. 16.



Bw. Man mache  $BF = BE$  und  $BD = BC$ , verbinde  $E$  mit  $D$ ,  $C$  mit  $F$ , ziehe willkürlich eine Linie  $GK$  durch den Punkt  $B$  und verbinde  $A$  mit  $C$ ,  $G$ ,  $F$ ,  $E$ ,  $K$  und  $D$ , so ist  $\triangle CBF \cong \triangle EBD$ , also  $CF = ED$   
 $\triangle ABC \cong \triangle ADB$ , „  $AC = AD$   
 $\triangle ABF \cong \triangle ABE$ , „  $AF = AE$   
 $\triangle ACF \cong \triangle ADE$ , also  $\angle ACG = \angle ADK$   
 $\triangle CBG \cong \triangle DBK$ , „  $CG = KD$   
 $\triangle ACG \cong \triangle ADK$ , „  $AG = AK$   
 $\triangle ABG \cong \triangle ABK$ , „  $\angle ABG = \angle ABK$

Nun sind  $\angle ABG$  und  $\angle ABK$  Nebenwinkel, also jeder  $R$ , folglich  $AB \perp GK$  und auf der ganzen Ebene  $M$  (Erlg. 4).

3s. 1. Die Senkrechte  $AB$  ist die kürzeste aller vom Punkte  $A$  auf die Ebene gezogenen Linien; also mißt sie die Entfernung des Punktes  $A$  von der Ebene  $M$ .

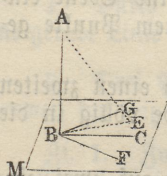
Zf. 2. Durch einen Punkt  $A$  läßt sich nur eine Senkrechte auf die Ebene  $M$  ziehen und aus  $B$  nur eine errichten.

Zf. 3. Wenn von irgend einem Punkte  $A$  auf eine Ebene  $M$  eine Senkrechte  $AB$  und mehrere geneigte Linien ausgehen, so sind die von jener gleich entfernten Geneigten einander gleich, von den ungleich entfernten aber ist die entfernteste auch die längste Linie.

Zf. 4. Je größer die Linie, desto kleiner ist der Winkel, den die Linie mit der Projektion bildet.

3. Zhrs. Wenn eine gerade Linie  $AB$  senkrecht auf drei andern steht, die von dem nämlichen Punkte  $B$  ausgehen, so liegen diese in einer Ebene.

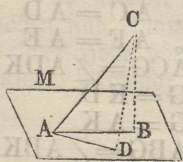
Fig. 17.



Bw.  $BG, BC, BF$  seien die drei Linien,  $AB$  stehe auf ihnen senkrecht. Man lege durch  $CBF$  die Ebene  $M$  und nehme an,  $BG$  liege außerhalb der Ebene, so verbinde man  $A$  mit  $G$  und verlängere sie bis zur Ebene  $M$ , etwa in den Punkt  $E$ , verbinde  $E$  mit  $B$ , so liegt  $BE$  in der Ebene, dann ist  $\angle ABE = R$  (Zhrs. 2) und  $\angle ABG$  laut Bdg.  $= R$ , was unmöglich ist; also kann  $BG$  nicht außerhalb der Ebene liegen.

4. Zhrs. Der Neigungswinkel  $CAB$  einer Linie  $CA$  gegen eine Ebene  $M$  ist kleiner als jeder andere Winkel, welchen die Linie  $CA$  mit irgend einer andern durch  $A$  in der Ebene  $M$  gezogenen Linie einschließt.

Fig. 18.



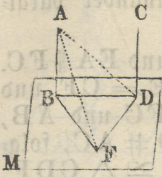
Bw.  $CB \perp M$ , so ist  $CAB$  der Neigungswinkel (Erflg. 7.). Man mache  $AD = AB$  und verbinde  $C$  mit  $D$ , so ist, da  $CD > CB$ ,  $\angle CAD > \angle CAB$ .

Zf. Der Nebenwinkel ist der größte.

5. Zhrs. Zwei auf einer Ebene senkrechtstehende Linien sind einander parallel.

Bw.  $AB, CD$  seien senkrecht auf  $M$ . Man ziehe  $DF$  in der Ebene  $M$ , so daß  $\angle BDF = R$  und  $DF = AB$ , verbinde  $AD, AF, BF, BD$ , so ist  $\triangle FDB \cong \triangle BDA$ , also  $FB = AD$  und  $\triangle AFB \cong \triangle ADF$ , folglich  $\angle FDA$

Fig. 19.



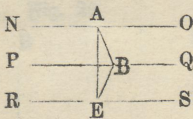
$= \angle ABF = R$  oder  $DF$  senkrecht auf  $DA$ ,  $DB$  und  $DC$ , somit auf der Ebene  $ABCD$  (Zhrs. 3); also liegen  $BA$  und  $DC$  in einer Ebene und sind einander parallel.

6. Zhrs. Steht eine Linie  $AB$  senkrecht auf einer Ebene, so ist dieses auch mit jeder ihr parallelen  $DC$  der Fall.

Bw. Fig. 19. Da  $DC$  mit  $AB$  parallel ist, so liegen sie in einer Ebene (Erslg. 2), folglich ist  $\angle CDB = R$  und nach der vorigen Konstruktion (Zhrs. 5) steht  $FD$  senkrecht auf der Ebene  $ADB$ , folglich auch auf  $DC$ , also steht  $CD \perp DB$  und  $DF$ ; folglich auch auf der ganzen Ebene  $M$  (Zhs. 2).

7. Zhrs. Zwei Linien sind parallel, wenn sie einer dritten im Raume parallel sind.

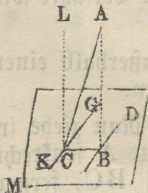
Fig. 20.



Bw.  $NO$  sei  $\parallel PQ$  und  $RS \parallel PQ$ . Man nehme in der Linie  $NO$  irgend einen Punkt  $A$  an, ziehe von  $A$  auf  $PQ$  die Senkrechte  $AB$ , errichte von  $B$  die Senkrechte  $BE$  und lege durch  $ABE$  eine Ebene, so steht  $OA$ ,  $SE$ ,  $QP$  senkrecht auf der Ebene  $ABE$  (Zhrs. 6), folglich  $OA \parallel SE$  (Zhrs. 5).

8. Zhrs. Wenn eine Gerade  $GK$  in der Ebene  $M$  auf einem der Schenkel eines Neigungswinkels  $ACB$  einer Linie  $AC$  zur Ebene  $M$  senkrecht steht, so steht sie auch senkrecht auf dem andern Schenkel.

Fig. 21.

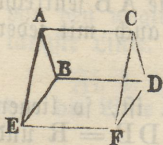


Bw.  $ACB$  sei der Neigungswinkel, so steht  $AB \perp M$  und  $GK$  sei die Gerade. Nun kann 1)  $\angle GCB = R$  sein, dann ziehe man in der Ebene  $M$   $BD \parallel CG$ , so ist  $\angle DBC = \angle DBA = R$ , folglich  $DB$  senkrecht auf der Ebene  $ACB$ , mithin auf  $GC$ , also  $\angle GCA = R$ .

2) Ist  $\angle GCA = R$ , so ziehe man  $LC \perp M$ , dann liegen  $LG$ ,  $CB$ ,  $BA$  in einer Ebene und da  $LC \perp M$  steht, also  $\angle GCL = \angle GCA = R$ , so steht auch  $GC$  senkrecht auf der Ebene  $LCBA$ , folglich  $\angle GCB = R$ .

9. *Uhrs.* Zwei Winkel im Raume sind einander gleich, wenn ihre Schenkel nach derselben Richtung einander parallel sind.

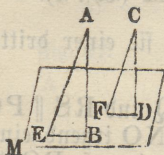
Fig. 22.



*Bw.* Es sei  $EB \parallel FD$  und  $EA \parallel FC$ . Man mache  $EB = FD$ ,  $AE = CF$  und lege durch  $EB$ ,  $FD$ ,  $AE$ ,  $FC$  und  $AB$ ,  $CD$  Ebenen, so ist  $EF \parallel BD \parallel AC$ , folglich  $AB = CD$  und  $\triangle AEB \cong \triangle CDF$ , also  $\angle AEB = \angle CFD$ .

10. *Uhrs.* Zwei Parallelen haben gegen eine schneidende Ebene gleiche Neigung.

Fig. 23.



*Bw.* Es sei  $AE \parallel FC$ . Man ziehe die Senkrechten  $AB$ ,  $CD$ , so ist der Winkel  $\angle EAB = \angle FCD$  (*Uhrs.* 9), folglich auch  $\angle AEB = \angle CFD$ .

## Aufgaben.

1. *Afg.* Durch einen im Raume gegebenen Punkte  $A$  mit einer gegebenen Geraden  $BC$  eine Parallele zu ziehen.

*Afl.* Man lege durch  $ABC$  eine Ebene und verfähre wie in der Planimetrie.

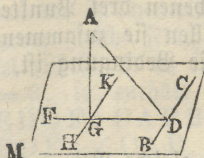
2. *Afg.* Von einem im Raume gegebenen Punkte  $A$  auf eine gegebene Gerade  $BC$  eine Senkrechte zu ziehen.

*Afl.* Man lege durch  $ABC$  eine Ebene und verfähre wie in der Planimetrie.

3. *Afg.* Von einem gegebenen Punkte außerhalb einer gegebenen Ebene auf diese eine Senkrechte zu fällen.

*Afl.*  $M$  sei die Ebene und  $A$  der Punkt. Man ziehe in der Ebene  $M$  eine beliebige Linie  $BC$ , errichte aus  $A$  senkrecht auf  $BC$  die  $AD$  und in der Ebene selbst  $FD \perp BC$ , ferner von  $A$  eine Senkrechte  $AG$  auf  $FD$ , so ist sie auch senkrecht auf  $M$ .

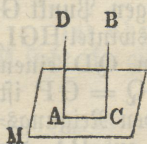
Fig. 24.



Bw. Da  $\angle BDA = \angle BDF = R$ , so steht  $BC$  senkrecht auf der Ebene  $ADF$ , zieht man  $HK \parallel BC$ , so steht  $HK$  ebenfalls  $\perp DF$ , folglich auch senkrecht auf  $AG$  (Zhrs. 6), mithin  $\angle AGH = \angle AGF = R$ , also  $AG \perp M$ .

4. Aufg. In einem gegebenen Punkte  $A$  einer gegebenen Ebene  $M$  auf diese eine Senkrechte zu errichten.

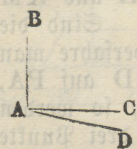
Fig. 25.



Afl. Aus einem beliebigen Punkte  $B$  außerhalb der Ebene  $M$  falle man auf diese eine Senkrechte  $BC$  (Aufg. 3) und ziehe in der Ebene  $ABC$  die Parallele  $AD$ , so ist  $AD$  die verlangte Senkrechte.

5. Aufg. Durch einen gegebenen Punkt  $A$  einer geraden Linie  $AB$  eine Ebene senkrecht auf diese Gerade zu legen.

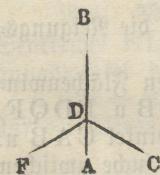
Fig. 26.



Afl. Man errichte aus  $A$  auf  $AB$  zwei Senkrechte  $AD$  und  $AC$ , so wird die durch  $AC$  und  $AD$  gelegte Ebene  $ACD$  auf  $AB$  im Punkte  $A$  senkrecht sein.

6. Aufg. Durch einen gegebenen Punkte  $F$  eine Ebene zu legen, welche gegen eine gegebene Gerade  $AB$  senkrecht ist.

Fig. 27.



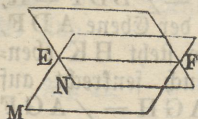
Afl. Man falle von  $F$  auf  $AB$  die Senkrechte  $FD$ , errichte dann aus  $D$  eine zweite Senkrechte  $DC$  auf  $AB$ , so wird die Ebene  $FDC$  die verlangte Ebene sein.

## Zweite Abtheilung.

Von der Lage der Ebenen gegen Ebenen.

11. Zhrs. Wenn zwei Ebenen  $M, N$  einander schneiden, so ist ihr gemeinschaftlicher Durchschnitt  $EF$  eine gerade Linie.

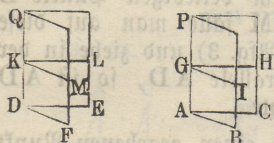
Fig. 28.



Bw. Ist der Durchschnitt keine Gerade, so müssen die Ebenen drei Punkte gemein haben, dann fallen sie zusammen (Grdf. 2), was gegen die Bedingung ist.

12. Lhrs. Gleiche Flächenwinkel haben gleiche Neigungswinkel und umgekehrt.

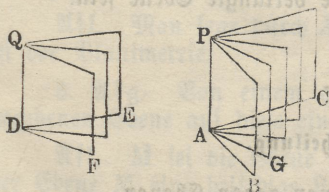
Fig. 29.



Bw. Die beiden gleichen Flächenwinkel seien  $CAPB$  und  $EDQF$ . Man nehme in der Linie  $AP$  einen beliebigen Punkt  $G$  und bilde den Neigungswinkel  $HGI$ , ferner nehme man in  $QD$  einen Punkt  $K$ , so daß  $KQ = GP$  ist und bilde gleichfalls den Neigungswinkel  $LKM$ . Nun lege man  $Q$  auf  $P$ , Linie  $QD$  auf  $PA$ , die Ebene  $QE$  auf  $PC$ , so wird laut Bedingung Ebene  $QF$  auf  $PB$  fallen, dann muß  $K$  auf  $G$ ,  $KL$  auf  $GH$  und  $KM$  auf  $GI$  fallen, folglich  $\angle LKM = \angle HGI$  sein. Sind die Neigungswinkel  $HGI$ ,  $LKM$  einander gleich, so verfähre man hinsichtlich der Construction wie oben und lege  $QD$  auf  $PA$ , so fällt  $K$  auf  $G$ , ferner lege man  $KL$  auf  $GH$ , so werden sich die beiden Ebenen  $QE$  und  $PC$  decken, da sie drei Punkte gemein haben; laut Bdg. fällt auch  $KM$  auf  $GI$ , also auch Ebene  $QF$  auf  $PB$ , folglich sind die Flächenwinkel  $EDQF$  und  $CAPB$  einander gleich.

13. Lhrs. Flächenwinkel verhalten sich wie die Neigungswinkel derselben Ebenen.

Fig. 30.



Die beiden Flächenwinkel seien  $CAPB$  u.  $EDQF$ , ihre Neigungswinkel  $CAB$  u.  $EDF$ . Man suche zwischen  $\angle CAB$  und  $\angle EDF$  das gemeinschaftliche Maaß, sie mögen commensurabel oder incommensurabel sein; im letzten Falle kann man den Rest verschwindend klein machen.

Das gemeinschaftliche Maaß sei  $\angle GAB = \angle \alpha$ , so wird  $\angle EDF = n\alpha$  und  $\angle CAB = m\alpha$  enthalten, folglich  $\angle EDF : \angle CAB$

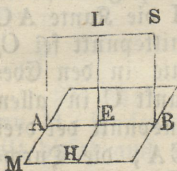
$= n : m$ . Nun lege man durch  $GAP$  u. s. w. Ebenen, so werden die Flächenwinkel  $CAPB$  und  $EDQF$  eben so viel einander gleiche Flächenwinkel enthalten, als gleiche Neigungswinkel (Zhrs. 12) da sind. Nennt man den Flächenwinkel  $GAPB = \beta$ , so enthält  $EDQF = n\beta$  und  $CAPB = m\beta$ , also  $EDQF : CAPB = n : m$ ; folglich  $EDQF : CAPB = \angle EDF : \angle CAB$ .

Zs. 1. Flächenwinkel können mittelst ihrer Neigungswinkel gemessen werden, da beide Gleichvielfache von zu einander gehörigen Flächen- und Linienwinkeln sind.

Zs. 2. Scheitelflächenwinkel sind einander gleich.

14. Zhrs. Wenn eine Linie  $LE$  senkrecht auf einer Ebene  $M$  steht, so gilt dasselbe von jeder durch  $LE$  gelegten Ebene  $AS$ .

Fig. 31.



Bw.  $LE$  stehe senkrecht auf  $M$ . Man ziehe eine Gerade  $AB$  durch  $E$  in der Ebene  $M$ , lege durch  $ABL$  die Ebene  $AS$ , und  $EH$  senkrecht auf  $AB$ . Da  $\angle LEH$  der Neigungswinkel der beiden Ebenen ist und gleich  $R$ , so ist  $AS \perp M$  (Erlg. 12).

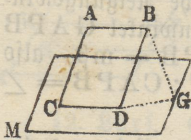
15. Zhrs. Wenn eine Ebene  $AS$  (Fig. 31) senkrecht auf einer andern  $M$  steht, so gilt dasselbe von jeder, in der ersten auf den gemeinschaftlichen Durchschnitt  $AB$  senkrecht gezogenen Linie  $LE$ .

Bw. Man ziehe aus einem beliebigen Punkte  $E$  in  $AB$  Senkrechte  $EL$  und  $EH$  auf  $AB$ , so ist  $\angle LEH$  der Neigungswinkel der beiden Ebenen  $AS$  und  $M$ . Laut Bdg. ist  $\angle LEH = R$ , also ist  $LE \perp AB$  und  $EH$ ; folglich senkrecht auf der Ebene  $M$ .

Zs. Wenn eine Ebene  $AS$  auf einer andern  $M$  senkrecht steht und auf dieser aus einem Punkte  $E$  des Durchschnitts eine Senkrechte errichtet wird, so muß dieselbe ganz in  $AS$  liegen.

16. Zhrs. Ist eine gerade Linie einer Ebene parallel, und wird durch diese eine Ebene gelegt, welche jene erstere Ebene schneidet, so ist die Durchschnittslinie beider Ebenen jener geraden Linie parallel.

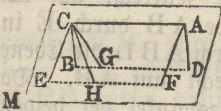
Fig. 32.



Bw. Es sei  $AB \parallel$  der Ebene  $M$  und  $CD$  die Durchschnittslinie einer durch  $AB$  gehende Ebene und der Ebene  $M$ . Wäre nun  $CD$  nicht  $\parallel AB$ , so müßte sie, verlängert, die Linie  $AB$  etwa in  $G$  treffen. Dann müßte  $G$  sowohl in der Ebene  $M$  als auch in der Linie  $AB$  liegen, was gegen die Bdg. ist.

17. Lhrs. Werden zwei einander schneidende Ebenen von einer dritten durchschnitten, so convergiren die drei Durchschnittslinien entweder in dem nämlichen Punkte oder sie sind einander parallel.

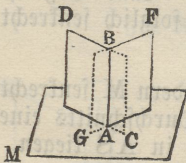
Fig. 33.



Bw. Die beiden Ebenen  $AB$  u.  $AE$  schneiden einander in der Kante  $AC$ . Die Ebene  $M$  kann nun nicht parallel oder parallel  $AC$  sein. 1) Im ersteren Falle muß die Ebene  $M$  die Kante  $AC$  schneiden, der Durchschnittspunkt sei  $C$ , und die Durchschnittslinie in den Ebenen  $CD$  und  $CF$  seien  $CG$  und  $CH$ ; da der Punkt  $C$  in allen drei Ebenen liegt, so muß er auch der Convergenzpunkt der drei Linien  $AC$ ,  $GC$  und  $HC$  sein. 2)  $M$  sei  $\parallel CA$ ; die Durchschnittslinien seien  $BD$ ,  $EF$ , dann ist  $BD \parallel CA$  und  $EF \parallel CA$ , folglich alle drei Linien parallel.

18. Lhrs. Wenn zwei schneidende Ebenen  $CD$ ,  $GF$  senkrecht auf einer dritten  $M$  stehen, so gilt dasselbe auch von der gemeinschaftlichen Durchschnittslinie  $AB$  jener beiden ersten Ebenen.

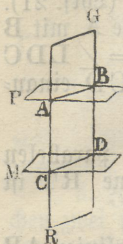
Fig. 34.



Bw. Man errichte aus dem Punkte  $A$  auf  $M$  eine Senkrechte, so muß sie in der Ebene  $CD$ , wie auch in  $GF$  liegen (15. Lhrs. 3i.), folglich mit der Durchschnittslinie  $AB$  zusammenfallen.

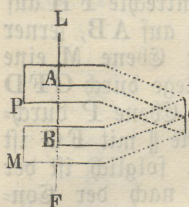
19. Lhrs. Werden zwei einander parallele Ebenen  $M$ ,  $P$  durch eine dritte  $RS$  geschnitten, so sind die beiden Durchschnittslinien einander parallel.

Fig. 35.



Bw. AB u. CD seien die Durchschnittslinien; angenommen sie wären einander nicht parallel, so müßten auch die Ebenen M, P einander irgend wo treffen, was gegen die Bedingung ist, folglich ist  $AB \parallel CD$ .

Fig. 36.

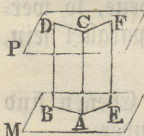


20. Zhrs. Werden zwei Ebenen M, P von einer Geraden LF senkrecht durchschnitten, so sind sie einander parallel.

Bw. Wären die Ebenen M und P nicht parallel, so müßten sie erweitert sich in einer geraden Linie, etwa DE schneiden. Verbindet man einen beliebigen Punkt der Linie DE etwa C mit den Durchschnittspunkten A und B, so müssen nach der Bdg.  $\angle CAL = \angle CBL = R$  sein, was unmöglich ist, also können die Ebenen einander nicht schneiden.

21. Zhrs. Wird eine von zwei einander parallelen Ebenen M, P senkrecht von einer Geraden AC durchschnitten, so gilt dieses auch von der andern.

Fig. 37.



Bw. AC sei senkrecht auf M. Man lege durch AC eine Ebene, so sind die Durchschnittslinie AE, CF einander parallel (Zhrs. 19), folglich  $\angle ACF = R$ , nun lege man durch AC eine zweite Ebene, die Durchschnittslinien seien AB, CD, so wird ebenfalls  $\angle ACD = R$  sein, folglich  $AC \perp P$ .

22. Zhrs. Wird eine von zwei parallelen Ebenen M, P senkrecht von einer dritten Ebene AF durchschnitten, so gilt dieses auch von der andern.

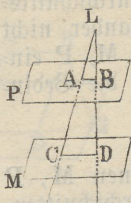
Fig. 38.



Bw. Man nehme in der Durchschnittslinie AD einen Punkt C und errichte  $BC \perp M$ , so steht sie auch auf P senkrecht, folglich auch die Ebene  $AF \perp P$  (Zhrs. 14).

23. Zhrs. Eine zwei einander parallelen Ebenen M, P durchschneidende gerade Linie LG ist gegen beide gleich geneigt.

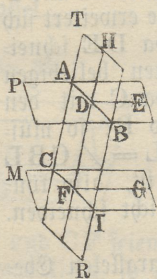
Fig. 39.



Bw. Man errichte von L eine Senkrechte auf M, so ist sie auch auf P senkrecht (Zhrf. 21). Man verbinde die Durchschnittspunkte A mit B und C mit D, so sind, da  $\angle LBA = \angle LDC = R$  ist, die Winkel  $\angle LAB$  und  $\angle LCD$  einander gleich.

24. Zhrf. Eine zwei einander parallelen Ebenen M, P durchschneidende Ebene RT ist gegen beide gleich geneigt.

Fig. 40.



Bw. Die beiden Durchschnittslinien AB und CI sind einander parallel. Man errichte aus einem Punkte F eine Senkrechte FH auf CI, so steht sie auch senkrecht auf AB, ferner errichte man aus F in der Ebene M eine Senkrechte FG auf CI und lege durch GFD eine Ebene, so wird sie die Ebene P durchschneiden in DE, welche Linie  $\parallel$  mit FG ist und daher senkrecht auf AB, folglich ist der  $\angle HDE = \angle DFG$ , und nach der Konstruktion ist  $\angle DFG$  der Neigungswinkel der Ebenen M und RT, und  $\angle HDE$  der Neigungswinkel der Ebenen P und RT.

25. Zhrf. Die zwischen zwei parallelen Ebenen M, P (Fig. 38) liegenden Parallelen BC, FD sind einander gleich.

Bw. Man lege durch BC und FD eine Ebene, so werden die Durchschnittslinien BF und CD einander parallel sein, folglich CF ein Parallelogramm und  $BC = FD$ .

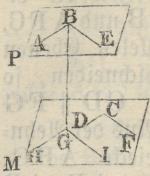
1. Zf. Alle Senkrechten zwischen parallelen Ebenen sind einander gleich und messen deren Abstand von einander.

2. Zf. Parallele Ebenen sind überall gleich weit von einander entfernt.

26. Zhrf. Winkel im Raume mit parallelen Schenkeln, wie  $\angle BAE$  und  $\angle DCF$  liegen in parallelen Ebenen.

Bw. Man lege durch ABE und DCF Ebenen P u. M, errichte vom Punkte B zur Ebene P eine Senkrechte und verlängere sie bis sie die Ebene M schneidet, etwa in G; nun ziehe man  $GH \parallel CD$  und  $GI \parallel CF$ , so steht BG auch senkrecht auf der Ebene M und somit sind die Ebenen P und M einander parallel.

Fig. 41.

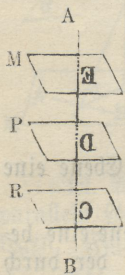


1. Zf. Durch jeden, außer einer Ebene M gegebenen Punkt C läßt sich nur eine derselben parallele Ebene legen.

2. Zf. Sind drei oder mehrere Parallelen, welche nicht in derselben Ebene liegen, zwischen zwei Ebenen einander gleich, so sind diese Ebenen parallel.

3. Zf. Durch Verbindung der Durchschnittspunkte, in welchen zwei parallelen Ebenen von parallelen Linien getroffen werden, entstehen congruente Figuren.

Fig. 42.



27. Zhrs. Zwei einer dritten Ebene P parallele Ebenen M, R sind einander parallel.

Bw. Man errichte auf P eine Senkrechte AB, so steht sie auch senkrecht auf M und R (Zhrs. 21), folglich ist  $M \parallel R$  (Zhrs. 20).

28. Zhrs. Zwei gerade Linien (Fig. 43) AB, CD werden durch drei parallele Ebenen M, P, R in proportionale Theile geschnitten.

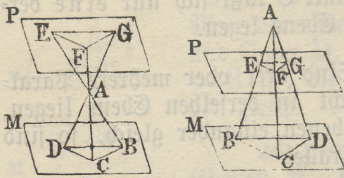
Bw. Man verbinde die Punkte A und D und ziehe dann die Geraden BD, EF, FG, AC. Die Linien EF und BD sind einander parallel, desgleichen die Linien AC und FG. Man hat also

$$\frac{AE:EB = AF:FD}{CG:GD = AF:FD} \\ \hline AE:EB = CG:GD.$$

Zf. Der von zwei geraden Linien bewiesene Satz gilt von jeder beliebigen Anzahl solcher Linien.

29. Zhrs. Wenn man durch einen Punkt A im Raume zwei oder mehrere Geraden zieht, welche in ihren Verlängerungen zwei einander parallele Ebenen treffen, so werden diese Linien von den Ebenen in proportionale Stücke getheilt und die Verbindungslinien der Durchschnittspunkte in beiden Ebenen bilden ähnliche Vielecke.

Fig. 44.



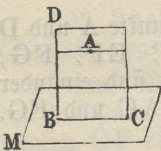
Bw. Es seien die Linien  $AGD$ ,  $AEB$  und  $AFC$ , welche die parallelen Ebenen  $MN$ ,  $PQ$  durchschneiden, so sind  $BC \parallel EF$ ,  $CD \parallel FG$  und  $BD \parallel EG$ . Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke  $ABC$ ,  $AEF$  u. s. w. folgt  $AE : AB = AF : AC = AG : AD$ .

Verbindet man  $B$  mit  $D$  und  $C$ , ebenso  $E$  mit  $G$  und  $F$ , so sind diese Linien ebenfalls proportional, folglich die Dreiecke  $BCD$ ,  $EFG$  einander ähnlich.

## Aufgaben.

7. Afg. Durch einen Punkt  $A$  außerhalb einer Ebene eine mit dieser parallele Gerade zu ziehen.

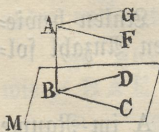
Fig. 45.



Afl. Man ziehe in der Ebene eine beliebige Gerade  $BC$  und ziehe in der durch dieselbe und den gegebenen Punkt bestimmten Ebene eine Gerade parallel mit der willkürlich gezogenen, so ist diese der ersteren Ebene  $M$  parallel (Zhrs. 16).

8. Afg. Durch einen gegebenen Punkt  $A$  außerhalb einer Ebene zu dieser eine parallele Ebene zu legen.

Fig. 46.



Afl. Man falle von dem gegebenen Punkte  $A$  die Senkrechte  $AB$  auf die Ebene  $M$ , ziehe von  $B$  zwei beliebige Geraden  $BD$  und  $BC$ , ziehe in der Ebene  $ABC$ ,  $AF \parallel BC$  und in der Ebene  $ABD$ ,  $AG \parallel BD$ , so ist die Ebene  $AGF \parallel M$  (Zhrs. 26).

9. Afg. Durch eine Gerade  $CB$  in der Ebene  $M$  eine auf  $M$  senkrechte Ebene zu legen.

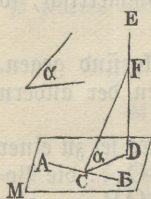
Afl. Fig. 45. Man errichte von  $B$  eine Senkrechte und lege durch  $BDC$  eine Ebene, so steht sie auf  $M$  senkrecht (Zhrs. 14.)

10. Afg. Durch eine gegen die Ebene  $M$  geneigte Gerade  $AB$  eine auf  $M$  senkrechte Ebene zu legen.

Afl. Fig. 2. Man errichte aus dem Punkte  $A$  die Senkrechte  $AC$ , so ist die Ebene  $CAB$  die verlangte Ebene (Zhrs. 14).

11. Afg. Durch eine innerhalb einer Ebene  $M$  liegende gerade Linie  $AB$  eine Ebene zu legen, deren Neigungswinkel mit der gegebenen Ebene  $M$  einem gegebenen Winkel  $\alpha$  gleich sei.

Fig. 47.



Afl. Aus einem beliebigen Punkte  $C$  der Linie  $AB$  errichte man in der Ebene  $M$  die Senkrechte  $CD$ , ferner die Senkrechte  $DE$  auf  $CD$  und mache  $\angle DCF = \angle \alpha$ , lege durch  $FAB$  eine Ebene, so ist diese die verlangte Ebene.

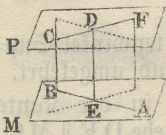
Bw.  $\angle FCD$  ist der Neigungswinkel der Linie  $FC$  zur Ebene  $M$  und steht senkrecht auf  $AB$  (Zhrs. 8), folglich ist  $\angle \alpha$  der Neigungswinkel der beiden Ebenen  $M$  und  $AFB$ .

12. Afg. Durch zwei einander nicht schneidende und nicht parallele Geraden  $AB$ ,  $CF$  zwei einander parallele Ebenen zu legen. Fig. 41.

Afl. Man ziehe aus einem Punkte der Linie  $AB$ , etwa aus  $B$  eine Linie  $BE \parallel CF$  und ebenso aus  $C$  eine Linie  $CD \parallel AB$ , lege durch  $ABE$  und  $DCF$  Ebenen, so sind sie einander parallel (Zhrs. 26).

13. Afg. Auf zwei einander nicht schneidende und nicht parallele Geraden  $AB$ ,  $CF$  eine gemeinschaftliche Senkrechte zu ziehen.

Fig. 48.



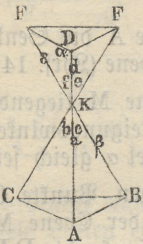
Afl. Man lege durch  $BA$  und  $CF$  Ebenen senkrecht auf die durch  $AB$  und  $CF$  parallel gelegten Ebenen  $M$  und  $P$ ; so ist der jenen Ebenen gemeinsame Durchschnitt  $DE$  die einzige auf  $BA$  und  $CF$  senkrechte Linie (Zhrs. 18).

### Dritte Abtheilung.

Von den körperlichen Eten.

30. Zhrs. Scheiteleken sind symmetrisch.

Fig. 49.

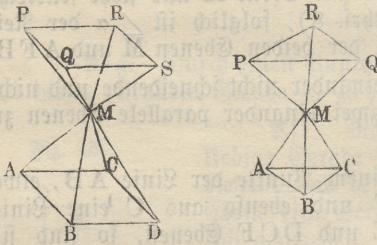


Bw.  $\angle a = \angle d, \angle b = \angle e, \angle c = \angle f$  (Scheitelwinkel), ferner der Flächenwinkel  $\beta$  gleich dem Flächenwinkel  $\varepsilon$  (Scheitel-flächenwinkel, Zhrs. 13, Zf. 2) u. s. w. Es folgen aber in der Ecke KACB die gleichen Größen rechts herum gerechnet in derselben Ordnung auf einander, wie sie in der Ecke KEDF auf einander folgen, wenn man links herum rechnet (Erlg. 20).

Zf. Sind zwei Ecken symmetrisch, so sind es auch ihre Scheitelecken.

31. Zhrs. In einer Ecke und ihrer Polarecke sind gegen- seitig die Kanten der einen auf den Seitenebenen der andern senkrecht.

Fig. 50.



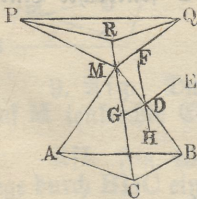
Bw. Es sei zu einer Ecke  $MABC \dots$  die Polarecke  $MPQR \dots$ , also  $PM \perp AMB, QM \perp BMC, RM \perp AMC$  u. s. w., so ist  $BM$  senkrecht auf  $MP$  und  $MQ$ , folglich auf der Seitenebene  $PMQ$ , ebenso  $CM$  senkrecht auf  $MQ$  und  $MR$ , folglich auf  $QMR$  u. s. w.

Zf. 1. Stehen die Kanten einer Ecke senkrecht auf den Seitenebenen einer andern, so ist jede die Polarecke der andern.

Zf. 2. Zu einer gegebenen Ecke ist aus dem Scheitel nur eine Polarecke möglich.

32. Zhrs. In einer Polarecke sind die Kantenwinkel Sup- plemente von den Winkeln der gegebenen Ecke und umgekehrt.

Fig. 51.



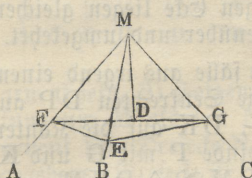
Bw. Man nehme in der Kante  $MB$  einen Punkt  $D$  und ziehe  $DE \parallel MQ, DF \parallel MR$ , so ist  $\angle FDE = \angle p$  (Zhrs. 9). Nun lege man durch  $DFE$  eine Ebene so wird sie die Ebene  $MBC$  und  $MBA$  durchschneiden in  $DH$  und  $DG$ . Nach Zhrs. 31, 26, 21 steht  $MB \perp FDE$  und  $\angle BDH = \angle BDG = R$  (Zhrs. 2, Zf. 5), also  $\angle GDH$  der Neigungswinkel der Ebenen  $MBA$  und  $MBC$ . Da nun

$MQ \perp MBC$  steht, so ist auch  $ED \perp BMC$  (Zhrs. 5) und also  $\angle EDH = R$ , ebenso  $\angle FDG = R$  und die Winkel um den Punkt  $D$  in der Ebene gleich  $4R$ , folglich  $\angle FDE + \angle GDH = 2R$  oder  $\angle p + \angle \beta = 2R$ . Will man den umgekehrten Lehrsatz beweisen, so nimmt man in der Kante  $MQ$  einen Punkt und führt den Beweis ebenso.

3f. Durch die drei Winkel einer Ecke werden zugleich die drei Kantenwinkel ihrer Polarecke bestimmt und umgekehrt.

33. Zhrs. In jedem körperlichen Dreiecke ist die Summe je zweier Kantenwinkel (Seiten) größer, als der dritte.

Fig. 52.



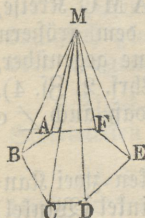
Bw. Sind die Kantenwinkel einander gleich, so bedarf er keines Beweises, nur wenn ein größerer zwei kleineren gegenübersteht, bedarf es eines solchen. Es sei also  $\angle AMG$  der größte. Man nehme in der Kante  $MA$  einen Punkt  $F$  und ziehe eine beliebige Gerade  $FG$  nach  $MC$ , mache  $\angle FMD = \angle AMB$  und  $ME = MD$ , so ist

$$\begin{array}{r} \triangle MFD \cong \triangle MFE \\ \hline FD = FE \\ FE + EG > FD + DG \\ \hline EG > DG, \text{ also } \angle EMG > \angle DMG; \text{ folglich} \\ \angle FME + \angle EMG > \angle FMD + \angle DMG \text{ oder } \angle FMG. \end{array}$$

34. Zhrs. Die Summe aller Kantenwinkel einer Ecke ist kleiner als  $4R$ .

Bw. Man lege durch  $A$  eine Ebene, welche die Kanten durchschneidet, so entsteht, wenn  $n$  Kanten sind, ein  $n$ eck. Nennt man die Summe der Polygonwinkel des  $n$ ecks  $\sigma$ , die der Kantenwinkel um  $M$ s und die der Kantenwinkel der Seitendreiecke am  $n$ eck  $s'$ , so ist

Fig. 53.



$$\begin{array}{r} s + s' = 2nR \\ s' > \sigma \\ \hline s < 2nR - \sigma \\ \sigma = 2nR - 4R \\ \hline s < 4R. \end{array}$$

35. *Thrsf.* Die Summe aller Winkel einer  $n$ -kantigen Ecke ist größer als  $(2n - 4)R$  und kleiner als  $2nR$ .

*Bw.* Man denke sich eine  $n$ -kantige Ecke und die Polarecke derselben. Die Summe aller Winkel der gegebenen Ecke sei  $\sigma$  und die aller Kantenwinkel der Polarecke  $s$ , so ist

$$\sigma + s = 2nR \quad (\text{Thrsf. 32.})$$

$$s < 4R$$

$$\sigma > 2nR - 4R$$

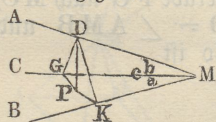
$$\text{und } \sigma < 2nR.$$

35. Die Summe aller Winkel eines körperlichen Dreiecks ist daher größer als  $2R$  und kleiner als  $6R$ , die eines körperlichen Vierecks größer als  $4R$  und kleiner als  $8R$  u. s. w.

36. *Thrsf.* In einer gleichschenkligen Ecke liegen gleichen Kantenwinkeln gleiche Flächenwinkel gegenüber und umgekehrt.

*Bw.* 1) Es sei  $\angle b = \angle c$ . Man falle aus irgend einem Punkte der Linie  $MA$ , etwa aus  $D$  die Senkrechten  $DP$  auf  $BMC$  und  $DG, DK$  auf die Kanten  $MC, MB$ , verbinde  $P$  mit  $G$  und  $K$ ,

Fig. 54.



so ist, da  $\triangle DGM \cong \triangle DKM$ , auch  $\triangle DGP \cong \triangle DPK$ , folglich  $\angle DGP = \angle DKP$ .  $\angle DGP$  ist der Neigungswinkel der Linie  $DG$  zur Ebene  $MCB$  und da  $MG$  senkrecht auf dem einen Schenkel dieses Neigungswinkels steht, so steht sie auch auf  $GP$ , also ist  $\angle DGP = \angle \gamma$ , ebenso  $\angle DKP = \angle \beta$ . 2) Es sei  $\angle \gamma = \angle \beta$ . Der Beweis ist leicht zu führen.

35. In einer gleichseitigen Ecke sind alle Winkel einander gleich und umgekehrt.

37. *Thrsf.* Dem größern Kantenwinkel einer Ecke liegt auch der größere Winkel gegenüber und umgekehrt.

*Bw.* 1) Es sei  $\angle c > \angle b$  (Fig. 54). Beschreibt man mit dem Radius  $MD$  in den beiden Ebenen  $AMB, AMC$  Kreise, so sind  $DK$  und  $DG$  halbe Sehnen, nun steht dem größern Centralwinkel in gleichen Kreisen eine größere Sehne gegenüber, folglich ist  $DK > DG$ ; also auch  $\angle \gamma > \angle \beta$  (*Thrsf.* 2, 35. 4). 2) Es sei  $\angle \gamma > \angle \beta$ , so ist leicht zu beweisen, daß auch  $\angle c > \angle b$ .

38. *Thrsf.* Sind in zwei körperlichen Dreiecken zwei Kantenwinkel (Seiten) und der eingeschlossene Flächenwinkel (Winkel)

bezüglich gleich, so sind die Dreiecke einander congruent, wenn in ihnen die gleichen Seiten in derselben Richtung um den Scheitel liegen; wenn in entgegengesetzter Richtung, so symmetrisch.

Bw. 1) Es sei  $\angle c = \angle f$ ,  $\angle b = \angle e$  und  $\angle a = \angle d$ . Folgen nun die Kantenwinkel  $c$ ,  $b$  in derselben Richtung um  $M$ ,

Fig. 55.



als  $f$  und  $e$  um  $N$ , so lege man das körperliche Dreieck  $M$  so in  $N$ , daß Punkt  $M$  auf  $N$ , Kante  $MA$  auf  $ND$ ,  $\angle c$  auf  $\angle f$  und  $\angle a$  in  $\angle d$ , so werden  $\angle b$  auf  $\angle e$ , die Kanten  $MB$  auf  $NE$ ,  $MC$  auf  $NF$  fallen, und da zwei einander durchschneidende Linien eine Ebene bestimmen, so wird auch  $\angle a$  auf  $\angle d$  fallen, folglich werden die Ecken einander congruent sein.

2) Folgen die Kantenwinkel in entgegengesetzter Richtung um  $M$  als um  $N$ , so ist das Scheiteldreieck von  $M$  congruent dem Dreiecke  $N$ . Da das Scheiteldreieck symmetrisch dem gegebenen Dreiecke ist, so ist auch  $M$  symmetrisch  $N$  (Thrs. 30, Zf.).

Zf. 1. In congruenten körperlichen Dreiecken liegen gleichen Seiten (Kantenwinkeln) gleiche Winkel und gleichen Winkeln gleiche Seiten gegenüber.

Zf. 2. Ist eine Ecke einer zweiten symmetrisch und diese wieder einer dritten symmetrisch, so ist die erste der dritten congruent.

Zf. 3. Sind zwei Ecken einander congruent oder symmetrisch, so sind es auch ihre Scheitecken.

Zf. 4. Sind zwei Ecken einander congruent, so ist jede der Scheitecke der andern Ecke symmetrisch, und sind zwei Ecken symmetrisch, so ist jede der Scheitecke der andern Ecke congruent.

Zf. 5. Wenn in zwei gleichschenkligen Ecken die Seiten bezüglich gleich sind, so sind die Ecken nicht symmetrisch, sondern congruent.

Zf. 6. Gleichseitige und gleichschenklige Ecken sind ihren Scheitecken congruent.

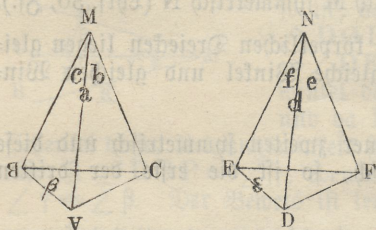
Zf. 7. Sind zwei Ecken einander congruent oder symmetrisch, so sind es auch ihre Polarecken.

39. *Urs.* Sind in zwei körperlichen Dreiecken ein Kantenwinkel (eine Seite) und die beiden anliegenden Winkel bezüglich einander gleich, so sind die Dreiecke einander congruent, wenn in ihnen die gleichen Winkel in derselben Richtung um den Scheitel liegen; wenn in entgegengesetzter Richtung, so symmetrisch. Fig. 55.

*Bw.* 1) Es sei  $\angle c = \angle f$ ,  $\angle \alpha = \angle \delta$  und  $\angle \beta = \angle \varepsilon$ . Man lege die Ecke  $NDEF$  so in die Ecke  $MABC$ , daß  $\angle f$  auf  $\angle c$  fällt, dann muß auch die Ebene  $DMF$  auf  $AMC$  und  $ENF$  auf  $BMC$  fallen, weil die Winkel einander gleich sind, also auch  $NF$  auf  $MC$ , folglich sind die Ecken  $M$  und  $N$  einander congruent. 2) Wie im *Urs.* 38, Zf. 2.

40. *Urs.* Sind in zwei körperlichen Dreiecken die drei Kantenwinkel (Seiten) bezüglich gleich, so sind die Dreiecke einander congruent, wenn in ihnen die gleichen Seiten in derselben Richtung um den Scheitel liegen; wenn in entgegengesetzter Richtung, so symmetrisch. Fig. 56.

Fig. 56.



*Bw.* 1) Es sei  $\angle c = \angle f$ ,  $\angle b = \angle e$  und  $\angle a = \angle d$ . Man nehme  $NE = MB$  und lege auf  $MB$  in  $B$  und auf  $NE$  in  $E$  Ebenen senkrecht, so ist  $\triangle MBA \cong \triangle NED$ , also  $MA = ND$  und  $BA = ED$ , auch ist

$$\begin{array}{l} \text{also } \triangle AMC \cong \triangle DNF \\ \quad \quad \quad \underline{AC = DF} \\ \triangle ABC \cong \triangle EDF \\ \quad \quad \quad \underline{\angle \beta = \angle \varepsilon} \end{array}$$

Da  $BC$  und  $BA \perp MB$ , so wie  $EF$  und  $DE \perp NE$ , so sind  $\angle \beta$  und  $\angle \varepsilon$  die Neigungswinkel; folglich  $MABC \cong NDEF$ . 2) Wie im *Urs.* 38 Zf. 2.

41. *Urs.* Sind in zwei körperlichen Dreiecken die drei Winkel bezüglich gleich, so sind die Dreiecke einander congruent, wenn in ihnen die gleichen Winkel in derselben Richtung um den Scheitel liegen; wenn in entgegengesetzter Richtung, so symmetrisch.

Bw. Man construirt ihre Polarecken, diese sind, da die Kantenwinkel einander gleich sind (Zhrs. 32, 3f.), einander congruent (Zhrs. 40), folglich auch (Zhrs. 38, 3f. 7) die gegebenen Ecken.

## II. Abschnitt.

### Von den Körpern.

Da die einen Körper begrenzenden Flächen eben und gekrümmte sein können, so giebt es drei Hauptklassen von Körpern.

1) Körper, deren begrenzende Flächen sämmtlich ebene sind, heißen ebenflächige Körper, dazu gehören: das Prisma, die Pyramide und die regelmäßigen Polyeder.

2) Körper, deren begrenzende Flächen theils ebene, theils gekrümmte sind, heißen gemischtflächige Körper, dazu gehören: der Cylinder und der Kegel.

3) Körper, deren begrenzende Flächen alle gekrümmte sind, heißen krummflächige Körper, dazu gehört die Kugel.

### Erste Abtheilung.

#### Ebenflächige Körper.

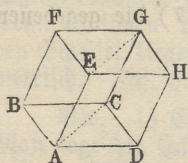
##### 1) Das Prisma.

42. Zhrs. Ein vielseitiges Prisma von  $n$  Seiten läßt sich in  $n-2$  dreieckige zerlegen.

Bw. Jedes congruente  $n$ Eck wird durch Diagonalen in  $n-2$  Dreiecke zerlegt; nun lege man durch diese Diagonalen Ebenen, so zerfällt das gegebene Prisma in  $n-2$  dreieckige Prismen.

43. Zhrs. In jedem Parallelepipedum sind die gegenüberliegenden Parallelogramme einander congruent.

Fig. 57.



Bw. Aus dem Begriffe des Parallelepipeds (Einltg. 25), folgt, daß die Seiten und Winkel der gegenüberliegenden Parallelepipeds einander gleich sind, folglich einander decken.

44. Lhrs. Prismen von gleichen Grundebenen und von gleicher Höhe sind einander gleich.

Bw. Man stelle die Prismen mit ihren Grundebenen auf einerlei Ebene, durchschneide sie in beliebiger aber gleicher Höhe durch eine Ebene, welche parallel der Grundebene ist. Die Schnitte sind bezüglich den Grundebenen congruent, folglich vermöge der Bedingung einander gleich. Was von beliebigen Schnitten in gleicher Höhe gilt, gilt von allen Schnitten in gleicher Höhe; es sind daher die parallelen Schnitte in gleicher Höhe überall bezüglich gleich, folglich auch die Prismen einander gleich (Grds. 3).

Zs. 1. Jedes schiefe Prisma ist gleich dem senkrechten Prisma über derselben Grundebene und von gleicher Höhe.

Zs. 2. Jedes Prisma läßt sich in ein dreiseitiges Prisma und dieses in ein rechtwinkliges Parallelepipeds verwandeln.

Zs. 3. Jedes Parallelepipeds ist gleich dem rechtwinkligen Parallelepipeds von gleicher Grundebene und Höhe.

45. Lhrs. Jedes Parallelepipeds wird durch eine Diagonalebene in zwei einander gleiche dreiseitige Prismen getheilt.

Bw. Fig. 57. Die dreiseitigen Prismen, in welche ein Parallelepipeds durch eine Diagonalebene ACEG getheilt wird, haben congruente Grundebenen ( $\triangle ACD \cong \triangle ABC$ ) und gleiche Höhen (zwischen parallelen Ebenen), sind daher einander gleich.

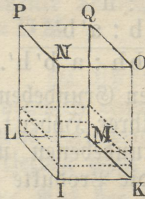
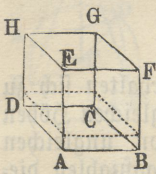
Zs. 1. Jedes dreiseitige Prisma ist die Hälfte eines Parallelepipeds von gleicher Höhe und doppelter Grundebene.

Zs. 2. Jedes vielseitige Prisma ist die Hälfte eines Parallelepipeds von gleicher Höhe und doppelter Grundebene.

46. Lhrs. Rechtwinklige Parallelepipeds über gleichen Grundebenen verhalten sich zu einander, wie die Maaßzahlen ihrer Höhen.

Bw. 1) Sind die Höhen  $AE$ ,  $IN$  commensurabel, so suche man ihr gemeinschaftliches Maaß  $\alpha$  und theile sie durch dasselbe in einander gleiche Theile. Es enthalte  $AE = m\alpha$  und  $IN = n\alpha$ , so ist  $AE : IN = m : n$ . Man lege nun durch die Theilungspunkte der Höhen Ebenen parallel den Grundebenen, so wird dadurch das Parallelepipedum  $AG$  in  $m$  und das Parallelepipedum  $IQ$  in  $n$  Parallelepipeda getheilt, welche alle einander gleich sind. Es ist daher  $AG : IQ = m : n$ , folglich  $AG : IQ = AE : IN = \frac{AE}{L} : \frac{IN}{L}$  ( $L$  Maaßeinheit). 2) Sind die Höhen  $AE$ ,  $IN$  incommensurabel, so suche man ihr gemeinschaftliches Maaß näherungsweise und verfare wie in 1.

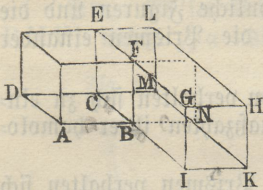
Fig. 58.



47. Lhrs. Rechtwinklige Parallelepipeda von gleichen Höhen verhalten sich zu einander wie die Maaßzahlen ihrer Grundebenen.

Bw. Man stelle beide Parallelepipeda  $AE$  und  $IL$  mit ihren Grundebenen  $AC$  und  $IM$  auf einerlei Ebene und mit

Fig. 59.



zwei ihrer Seitenebenen  $EB$  und  $EI$  so zusammen, daß die anstoßenden Seitenebenen  $DE$  und  $EM$  ebenfalls in einerlei Ebene fallen, hierauf erweitere man die Seitenebene  $AF$  so, daß sie das Parallelepipedum  $IL$  in  $FN$  schneidet. Nennt man nun  $\frac{AB}{L} = a$ ,  $\frac{SK}{L} = c$ ,  $\frac{CB}{L} = b$  und  $\frac{CI}{L} = d$ , so ist

$$\left. \begin{aligned} AE : BL &= a : c \\ BL : IL &= b : d \end{aligned} \right\} \text{Lhrs. 46.}$$

---


$$AE : IL = ab : cd.$$

48. Lhrs. Rechtwinklige Parallelepipeda verhalten sich zu einander, wie die Produkte aus den Maaßzahlen ihrer Grundebenen und Höhen.

Bw. Die beiden Parallelepipeda seien  $P$  und  $P'$ . Die Maafzahlen der Grundebenen und Höhen von  $P$  seien  $ab$  und  $h$ , von  $P'$   $a'b'$  und  $h'$ . Man verfertige ein drittes Parallelepipedium  $\varphi$  mit der Grundebene von  $P$  und der Höhe von  $P'$ , so ist

$$\begin{aligned} P : \varphi &= h : h' \\ \varphi : P' &= ab : a'b' \\ \hline P : P' &= abh : a'b'h'. \end{aligned}$$

Zs. Prismen von gleichen Grundebenen verhalten sich zu einander, wie die Maafzahlen ihrer Höhen; von gleichen Höhen wie die Maafzahlen ihrer Grundebenen und von ungleichen Grundebenen und Höhen, wie die Produkte der Maafzahlen dieser Größen.

49. Lhrs. Der körperliche Inhalt eines jeden Prismas ist gleich dem Produkte aus den Maafzahlen der Grundebene und Höhe multiplicirt mit der Maafseinheit.

Bw. Es sei  $P$  ein Prisma und  $W$  der als Maafseinheit für  $P$  dienende Würfel. Die Maafzahl der Grundebene von  $P$  sei  $g$  und die der Höhe  $h$ ; so ist  $P : W = gh : 1$ , folglich  $P = ghW$ .

Zs. Ein Würfel ist gleich der dritten Potenz der Maafzahl seiner Seite multiplicirt mit der Maafseinheit.

50. Lhrs. Gerade Prismen sind einander ähnlich, wenn ihre Grundflächen ähnliche Figuren und ihre Höhen den Seitenlinien der Grundflächen proportionirt sind.

Bw. Da die Seitenlinien der Rechtecke einander proportionirt sind, so sind die Seitenflächen ähnliche Figuren und die Flächenwinkel einander gleich, folglich die Prismen einander ähnlich (Einltg. 47).

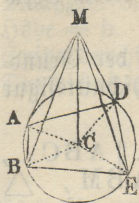
Zs. Die Inhalte ähnlicher Prismen verhalten sich zu einander wie die dritten Potenzen der Maafzahlen ihrer homologen Seiten oder ihrer Höhen.

Zs. 2. Die Oberflächen ähnlicher Prismen verhalten sich zu einander wie die zweiten Potenzen der Maafzahlen ihrer homologen Seiten oder ihrer Höhen.

## 2) Die Pyramide.

51. Lhrs. Biegt die Grundebene einer Pyramide in einem Kreise, und trifft die Höhe derselben den Mittelpunkt dieses Kreises, so sind alle Seitenkanten der Pyramide einander gleich.

Fig. 60.



Bw.  $ABED$  sei die Grundebene in einem Kreise und die Höhe  $CM$  trifft den Mittelpunkt  $C$ , so entstehen, wenn  $M$  und  $C$  mit  $A, B, E, D$  verbunden werden, congruente Dreiecke, folglich  $AM = BM = EM = DM$ .

52. Thrs. Sind alle Seitenkanten einer Pyramide einander gleich, so liegt die Grundebene derselben in einem Kreise und die Höhe derselben trifft den Mittelpunkt des Kreises.

Bw. Fig. 60. Aus der Congruenz der Dreiecke  $AMC, BMC$  u. s. w. folgt  $CA = CB = CE = CD$ .

53. Thrs. Wenn man durch die Kanten einer Pyramide auf die Grundebene senkrechte Ebenen legt, so schneiden sie einander in derselben Geraden  $MP$ .

Fig. 61.

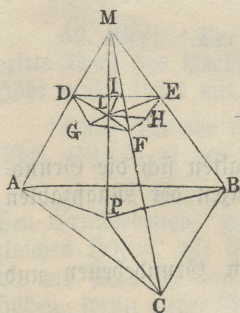


Bw. Da der Durchschnitt je zwei senkrechter Ebenen  $AMP, BMP$  auf der Grundebene senkrecht steht, und alle durch den Scheitelpunkt  $M$  gehen, so fallen sie nothwendig in eine Linie zusammen.

54. Thrs. Legt man durch die Kanten einer dreiseitigen Pyramide Ebenen, welche die Winkel halbiren, so schneiden sie einander in derselben Geraden  $MP$ .

Bw. Es sei  $MP$  der Durchschnitt der Ebenen  $AMP, BMP$ , welche  $\angle \alpha$  und  $\angle \beta$  halbiren. Man fälle aus einem beliebigen Punkte  $L$  der Linie  $MP$

Fig. 62.



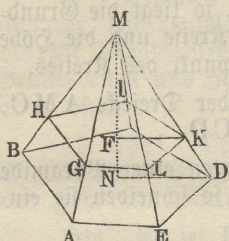
auf jede Seite die Senkrechten  $LG, LI, LH$ , lege durch  $GI, IH$  Ebenen, welche auf  $MA$  und  $MB$  senkrecht stehen, so ist  $\triangle LGD \cong \triangle LID$  und  $\triangle LIE \cong \triangle LHE$ , also  $LG = LI = LH$ , nun lege man durch  $GH$  eine Ebene senkrecht auf  $MC$ , so ist  $\triangle LGF \cong \triangle LHF$ , folglich  $LF$  die Halbirlungslinie des  $\angle \gamma$ ; also halbirt auch die durch  $MLF$  gelegte Ebene  $CMP$  den  $\angle \gamma$ .

3f. Wenn durch die Kanten einer dreiseitigen Pyramide Ebenen

so gelegt werden, daß sie die Winkel oder Seiten des Grunddreiecks halbiren, so schneiden sie einander in derselben Geraden MP.

55. Uhrs. Wird eine Pyramide durch eine der Grundebene parallele Ebene geschnitten, so ist die Durchschnitzzfigur ein der Grundebene ähnliches Vieleck.

Fig. 63.



Bw. Es sei  $GHI... \parallel ABC...$ , so ist  $\triangle GHM \sim \triangle ABM$ ,  $\triangle HLM \sim \triangle BCM$  u. s. w., also

$$HG : BA = HM : BM$$

$$HI : BC = HM : BM$$

$$HG : BA = HI : BC = IK : CD \dots$$

auch ist  $\angle IHG = \angle ABC$ ,  $\angle HIK = \angle BCD \dots$ ; folglich ist das Vieleck  $GHI... \sim ABC...$

3f. Eine Pyramide wird durch eine, der Grundebene parallele Ebene in zwei einander ähnliche Pyramiden zerlegt.

56. Uhrs. In jeder Pyramide verhalten sich die parallelen Schnitte zu einander wie die zweiten Potenzen der Maßzahlen ihrer Entfernungen von der Spitze.

Bw. Fig. 63. Man ziehe von M eine Senkrechte auf die Ebene ABCDE, so steht sie auch senkrecht auf GHIKL. Die Durchschnittpunkte seien N und F, verbinde man diese Punkte mit D und K, so ist  $\triangle MDN \sim \triangle MKF$ , also  $MD : MK = MN : MF$ .

Sei  $ABC... = V$  und  $GHI... = v$ , die Maßzahlen der homologen Seiten CD, IK, a und a', so wie die von MN, MF, h und h'; so ist

$$V : v = a^2 : a'^2$$

$$\triangle a : a' = MD : MK$$

$$MD : MK = h : h'$$

$$V : v = h^2 : h'^2$$

3f. In ähnlichen Pyramiden verhalten sich die Grundebenen zu einander wie die zweiten Potenzen der Maßzahlen ihrer Höhen.

57. Uhrs. Pyramiden über gleichen Grundebenen und von gleichen Höhen sind einander gleich.

Bw. Man denke sich zwei Pyramiden  $P$  und  $P'$ , die Maafzahl der Grundebenen einer jeden sei  $= g$  und die der Höhe  $= h$ . In beliebiger aber gleicher Entfernung  $x$  von der Spitze durchschneide man jede Pyramide durch eine Ebene; die Durchschnittsfiguren seien  $d$  und  $d'$ , so verhalten sich

$$g : d = h^2 : x^2$$

$$g : d' = h^2 : x^2$$

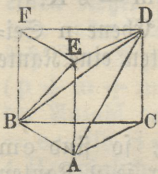
$$d = d'$$

Es sind daher in den Pyramiden  $P$  und  $P'$  die parallelen Schnitte in gleicher Höhe überall einander gleich, daher  $P = P'$  (Grds. 3).

58. Zhrs. Jede dreiseitige Pyramide ist der dritte Theil eines dreiseitigen Prismas von gleicher Höhe und Grundebene.

Bw. Die dreiseitige Pyramide sei  $DBAC$ , man verfertige das dreiseitige Prisma  $ABCDEF$ , welches dieselbe Grundebene und Höhe wie die Pyramide  $DBAC$  hat und lege durch  $EBD$  eine Ebene, so wird das Prisma in drei Pyramiden  $DBAC$ ,  $BFED$ ,  $BEDA$  zerlegt. Da  $\triangle BAC = \triangle FED$  ist, so ist Pyramide  $DBAC = BFED$ , ferner ist Pyramide  $DBAC = BEDA$ , weil  $\triangle ADC = \triangle EAD$  und man statt  $DBAC$  setzen kann  $BACD$ , wenn die Spitze in  $B$  und nicht in  $D$  genommen wird; folglich sind die Pyramiden  $DBAC$ ,  $BFED$ ,  $BEDA$  einander gleich, jede derselben also  $= \frac{1}{3}$  Prisma  $ABCDEF$ .

Fig. 64.



Zs. Jede Pyramide ist der dritte Theil eines beliebigen vielseitigen Prismas von gleicher Höhe und Grundfläche (Zhrs. 44, Zs. 2).

59. Zhrs. Der körperliche Inhalt einer Pyramide ist der dritte Theil des Produktes der Maafzahlen der Grundebene und Höhe multiplicirt mit der Maafseinheit.

Bw. Da der körperliche Inhalt eines Prismas  $= ghW$  (Zhrs. 49), so ist der Inhalt einer Pyramide  $= \frac{1}{3} ghW$ .

Zs. 1. Pyramiden verhalten sich zu einander 1) bei gleichen Grundebenen, wie die Maafzahlen ihrer Höhen, 2) bei gleichen Höhen, wie die Maafzahlen ihrer Grundebenen und 3) wie die Produkte aus den Maafzahlen ihrer Grundebenen und Höhen, wenn weder Grundebenen und Höhen einander gleich sind.

Zs. 2. Ähnliche Pyramiden verhalten sich zu einander, wie die dritten Potenzen der Maaßzahlen ihrer Höhen oder homologen Kanten.

### 3) Die regelmäßigen Polyeder.

60. Zhrs. Die Anzahl der Neigungswinkel eines Polyeders ist so groß als die Anzahl seiner Kanten.

Bw. Da zu jeder Kante zwei Ebenen nöthig sind, und je zwei Ebenen einen Neigungswinkel bilden, so sind so viel Neigungswinkel als Kanten.

61. Zhrs. Die Anzahl der Kantenwinkel  $n$  eines Polyeders ist doppelt so groß, als die Anzahl seiner Kanten  $K$ .

Bw. Da an jeder Kante 4 Kantenwinkel liegen, in der Anzahl  $4K$  aber jeder Winkel doppelt vorkommt, so ist  $n = 2K$ .

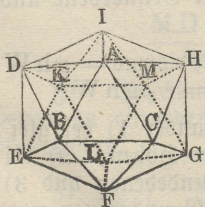
62. Zhrs. Ist  $f$  die Anzahl der Ebenen eines Polyeders  $K$  die Anzahl seiner Kanten und  $e$  die Anzahl seiner Ecken, so hat man 1) wenn jede Ebene  $n$  Seitenlinien enthält:  $nf = 2K$ , und 2) wenn jede Ecke  $m$  Kanten enthält:  $em = 2K$ .

Bw. 1) Sind  $f$  Ebenen und enthält jede Ebene  $n$  Seiten, so sind im Ganzen  $nf$  Seiten, da nun 2 Seiten eine Kante bilden, so sind  $\frac{nf}{2} = K$  oder  $nf = 2K$ .

2) Jede Ecke hat  $m$  Kanten, sind  $e$  Ecken, so sind  $em$  Kanten, da aber zu jeder Kante 2 Ecken sind oder je 2 Kanten zusammen fallen, so ist die Anzahl der vorhandenen Kanten gleich der Hälfte von  $me$ , oder  $me = 2K$ .

63. Zhrs. An jedem Polyeder ist die Anzahl der Kanten ( $K$ ), um 2 vermehrt, gleich der Summe der Seitenebenen ( $f$ ) und der Ecken  $e$ , also  $K + 2 = e + f$  (der Eulersche Satz).

Fig. 65.



Bw. Es sei  $ABCDE\dots$  ein Polyeder, dasselbe soll  $f$  Seitenebenen und jede Seitenebene  $n$  Seitenlinien haben, nennt man die sämtlichen Polygonwinkel dieses Polyeders  $S$ , so ist, da eine Seitenebene  $2nR - 4R$  enthält,  $f$  Seitenebenen  $(2nR - 4R) f$ , also  $S = 2nfR - 4fR = 4KR - 4fR = (K - f) 4R$ . (Zhrs. 62.)

Durchschneidet man das Polyeder z. B. durch  $EFGKM$ , so erhält man zwei Theile. Nimmt man außerhalb des

Polyeders im Raume einen Punkt an und projecire aus demselben die Oberfläche eines jeden Theils des Polyeders auf eine beliebige Ebene, so wird das auf diese Weise erhaltene Projectionenetz offenbar ebenso viele Vielecke derselben Art, ebenso viele gerade Linien und ebenso viele Punkte enthalten, wie die Oberfläche des Polyeders

Fig. 65 a.

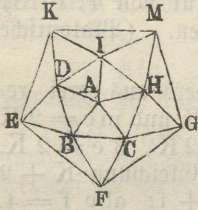
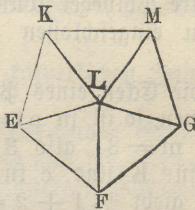


Fig. 65 b.



respective Seitenflächen, Kanten und Ecken enthält, folglich ist die Anzahl der Winkel der beiden Netze gleich  $S$ . Wenn  $p$  die Anzahl der Punkte in dem gemeinschaftlichen Umfange beider Netze,  $m$  und  $m'$  die Anzahl

der innerhalb des einen und des andern Theils des Netzes liegenden Punkte bezeichnet, so ist die Summe aller Winkel des einen Netzes gleich (Fig. 65 a)  $(2p - 4)R + 4mR$  und in dem andern Theile  $(2p - 4)R + 4m'R$  (Fig. 65 b), folglich  $S = 2pR - 4R + 4mR + 2pR - 4R + 4m'R = (p + m + m' - 2)4R$ . Da nun die Anzahl der Ecken gleich der Anzahl der Punkte in der Ebene sind, so ist  $p + m + m' = e$ , also  $S = (e - 2)4R$ . Es ist aber auch  $S = (K - f)4R$ ; folglich  $e - 2 = K - f$  oder  $K + 2 = e + f$ .

64. Thrsf. Reguläre Polyeder können nur dreierlei Figuren, das gleichseitige Dreieck, das Quadrat und das reguläre Fünfeck zu Seitenebenen haben.

Bw. Zu einer Ecke sind wenigstens 3 Kantenwinkel erforderlich und die Summe sämtlicher Kantenwinkel einer Ecke ist kleiner als  $4R$ . Ist die Ecke aus regulären Dreiecken, Vierecken und Fünfecken gebildet, so ist die Summe solcher 3 Kantenwinkel gleich  $2R, 3R, 3\frac{3}{5}R$ . Hingegen ist die Ecke aus 3 regulären Sechsecken, Siebenecken u. s. w. gebildet, so entstehen  $4R, 4\frac{2}{7}R$  u. s. w., was nicht möglich ist.

66. Thrsf. Es kann der regulären Polyeder nicht mehr als fünf geben.

Bw. Nimmt man als Seitenebenen

1) das reguläre Dreieck, so läßt sich daraus, weil  $3 \cdot \frac{2}{3}R, 4 \cdot \frac{2}{3}R$  und  $5 \cdot \frac{2}{3}R$  sämtlich weniger als  $4R$  be-

tragen, eine drei-, vier- und fünfseitige Ecke bilden. Aber  $6 \cdot \frac{2}{3} R$  ist  $= 4 R$ , also unmöglich;

2) das Quadrat, so kann man, weil  $3 R < 4 R$ , davon drei zu einer Ecke zusammensetzen, jedoch nicht mehr;

3) das reguläre Fünfeck, so geben ebenfalls nur drei eine Ecke, weil  $3 \cdot \frac{6}{5} R < 4 R$ , hingegen  $4 \cdot \frac{6}{5} R > 4 R$ .

66. Uhrs. Reguläre Polyeder können nur von 4, 6, 8, 12 und 20 Seitenebenen eingeschlossen werden. (Platonische Körper.)

Bw. Setzt man die Ecken eines Polyeders aus drei regulären Dreiecken zusammen, so ist in  $nf = 2 K$  und  $me = 2 K$  (Uhrs. 62),  $n = 3$  und  $m = 3$ , also  $3f = 2K$ ,  $3e = 2K$ . Hieraus die Ausdrücke für  $K$  und  $e$  in die Gleichung  $K + 2 = e + f$  hineingesetzt, giebt  $\frac{3}{2}f + 2 = f + f$ ; also  $f = 4$ . (Tetraeder.)

Besteht die Ecke aus 4 regulären Dreiecken, so ist  $n = 3$ ,  $m = 4$ , also  $K = \frac{3}{2}f$ ,  $e = \frac{3}{4}f$  und aus der Gleichung  $K + 2 = e + f$  wird  $\frac{3}{2}f + 2 = \frac{3}{4}f + f$ ; folglich  $f = 8$  (Octaeder).

Hat die Ecke 5 reguläre Dreiecke, so ist  $n = 3$ ,  $m = 5$ , also  $K = \frac{3}{2}f$ ,  $e = \frac{3}{5}f$ , giebt  $\frac{3}{2}f + 2 = \frac{3}{5}f + f$ ; folglich  $f = 20$  (Icosaeder).

Hat die Ecke 3 reguläre Vierecke, so ist  $n = 4$ ,  $m = 3$ , also  $K = 2f$ ,  $e = \frac{4}{3}f$ , giebt  $2f + 2 = \frac{4}{3}f + f$ ; folglich  $f = 6$  (Hexaeder, Cubus).

Hat die Ecke 3 reguläre Fünfecke, so ist  $n = 5$ ,  $m = 3$ , also  $K = \frac{5}{2}f$  und  $e = \frac{5}{3}f$ , giebt  $\frac{5}{2}f + 2 = \frac{5}{3}f + f$ ; folglich  $f = 12$  (Dodekaeder).

## Aufgaben.

14. Aufg. Die Oberflächen eines geraden Prisma zu finden.

Afl. Man multiplicire die Maaszahl des Perimeters der Grundfläche mit der Maaszahl einer Seitenkante, so erhält man die Summe der Seitenflächen und dazu addire man die doppelte Grundfläche.

15. Aufg. Die Seitenoberfläche einer regulären Pyramide zu finden.

Afl. Man multiplicire die Maaßzahl des Perimeters der Grundebene mit der Maaßzahl der halben Seitenhöhe.

16. Aufg. Die Seitenoberfläche einer abgestumpften regulären Pyramide zu finden.

Afl. Man multiplicire die Summe der Maaßzahlen der Perimeter beider Grundebenen mit der Maaßzahl der halben Seitenhöhe.

17. Aufg. Den körperlichen Inhalt einer abgestumpften Pyramide zu finden.

Afl. Fig. 12. Die beiden Grundebenen des Pyramidenstumpfes seien  $g'Q$ ,  $gQ$  und die Höhe  $hL$ . Man ergänze den Stumpf zu einer vollständigen Pyramide und nenne die Höhe  $xL$ , so ist  $\text{Pyrst.} = \frac{1}{3} [g'(h+x) - gx] W = \frac{1}{3} [g'h + (g' - g)x] W$ . Nun verhält sich  $g' : g = (h+x)^2 : x^2$  (56. Thrl., 3f.) oder  $\sqrt{g'} : \sqrt{g} = h+x : x$ , also ist

$$x = \frac{h\sqrt{g}}{\sqrt{g'} - \sqrt{g}}; \text{ folglich } \text{Pyrst.} = \frac{1}{3} [g'h + \frac{(g' - g)h\sqrt{g}}{\sqrt{g'} - \sqrt{g}}]$$

$$W = \frac{1}{3} [g'h + (\sqrt{g'} + \sqrt{g})h\sqrt{g}] W = \frac{h}{3} (g' + \sqrt{g'}g + g) W.$$

18. Aufg. Den Inhalt eines regulären Polyeders zu finden.

Afl. Man multiplicire die Maaßzahl der Oberfläche des Polyeders mit dem dritten Theil der Maaßzahl des Radius der eingeschriebenen Kugel.

## Zweite Abtheilung.

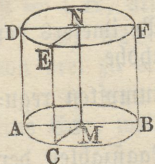
### Gemischtlächige Körper.

#### 1) Der Cylinder.

67. Thrl. Wird ein Cylinder (§ 33) durch eine dem Grundkreise parallele Ebene geschnitten, so ist die Durchschnittsfigur ein Kreis, der dem Grundkreise gleich ist.

Bw. Durch den Mittelpunkt  $M$  des Grundkreises ziehe man eine Linie  $MN \parallel AD$  bis sie die schneidende Ebene  $DEFD$  trifft; legt man nun durch  $ADMN$ ,  $ECMN$  und  $BFMN$

Fig. 66.



Ebenen, so ist  $DN = AM = EN = CM = MB = NF$ , folglich N der Mittelpunkt und  $DEFD =$  dem Kreise  $ABCA$ .

68. Lhrs. Der Inhalt eines Cylinders ist gleich dem Produkte aus den Maaßzahlen der Grundebene und Höhe multiplicirt mit der Maaßeinheit.

Bw. Es sei  $g$  die Maaßzahl der Grundebene und  $h$  die der Höhe des Cylinders  $C_y$ . Man denke sich ein Prisma  $P_r$ , welches mit dem  $C_y$  gleiche Grundebene und Höhe hat. In beliebiger, aber gleicher Höhe durchschneide man beide Körper durch Ebenen, welche den Grundebenen parallel sind. Die Durchschnitzzfiguren sind den Grundebenen bezüglich gleich, folglich einander selbst gleich; daher (Grds. 3) sind beide Körper an Inhalt einander gleich. Da nun der Inhalt von Pr.  $= ghW$  ist, so ist der Inhalt von  $C_y$  auch gleich  $ghW$ ,  $g$  ist aber, wenn  $r$  die Maaßzahl des Radius des Grundkreises ist, gleich  $r^2\pi$ , folglich  $C_y = r^2h\pi W$ .

Zs. 1. Cylinder von gleichen Grundebenen verhalten sich zu einander, wie die Maaßzahlen ihrer Höhen.

Zs. 2. Cylinder von gleichen Höhen verhalten sich zu einander, wie die zweiten Potenzen der Maaßzahlen der Radien oder Durchmesser ihrer Grundebenen.

Zs. 3. Cylinder verhalten sich zu einander wie die Produkte aus den zweiten Potenzen der Maaßzahlen der Radien ihrer Grundebenen mit ihren Höhen.

69. Lhrs. Die Mantelfläche eines geraden Cylinders ist gleich dem Produkt aus den Maaßzahlen der Peripherie der Grundebene mit der Höhe des Cylinders multiplicirt mit der Maaßeinheit.

Bw. Wenn man die Cylinderfläche in eine Ebene abwickelt, so entsteht ein Rechteck, dessen Grundlinie die Peripherie und dessen Höhe die des Cylinders ist; folglich ist die Mantelfläche  $M = 2r\pi hQ$ .

70. Lhrs. Gerade Cylinder sind einander ähnlich, wenn ihre Radien ihren Höhen proportionirt sind.

Bw. Da die Mantelflächen wie die Grundkreise ähnliche Figuren sind und die Neigungswinkel einander gleich, so sind auch die Körper einander ähnlich. (Erflg. 47)

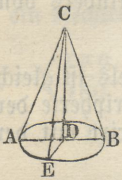
Zi. 1. Ähnliche gerade Cylinder verhalten sich zu einander wie die dritten Potenzen der Maaßzahlen ihrer Radien oder Höhen.

Zi. 2. Die Mantelflächen ähnlicher, gerader Cylinder verhalten sich zu einander wie die zweiten Potenzen der Maaßzahlen ihrer Radien oder Höhen.

## 2) Der Kegel.

71. Thrsf. Alle Seiten (Seitenlinien) eines senkrechten Kegels sind einander gleich.

Fig. 67.



Bw. Man lege durch beliebige Punkte A, E u. s. w. in der Peripherie der Grundebene und die Axe CD Ebenen, so ist  $\triangle ADC \cong \triangle EDC$  folglich  $AC = EC$  u. s. w.

Anmerkfg. Hier wird unter Kegel nur der senkrechte verstanden.

72. Thrsf. Wird ein Kegel durch eine Ebene parallel zur Grundebene geschnitten, so ist die Durchschnittsfigur ein Kreis.

Bw. Man ziehe die Axe des Kegels DC, welche die Durchschnitzebene in E schneidet, lege durch DCH, DCA und DCB Ebenen, so durchschneiden sie die Durchschnitzebene in EI, EF und EG. Da nun  $FE \parallel AC$ ,  $EI \parallel CH$  und  $EG \parallel CB$ , so sind  $\triangle ADC \sim \triangle FDE$ ,  $\triangle HDC \sim \triangle IDE$  und  $\triangle BDC \sim \triangle GDE$ , also

Fig. 68.



$$AC : FE = DC : DE$$

$$CH : IE = DC : DE$$

---


$$AC : FE = CG : IE$$

$$AC = CH$$

---


$$FE = IE, \text{ ebenso ist } EG = EF,$$

folglich ist E der Mittelpunkt der durch F, I, G gezogenen Figur und diese Figur FIGF ein Kreis.

3f. Die der Grundebene parallelen Kegelschnitte verhalten sich zu einander wie die zweiten Potenzen der Maaßzahlen ihrer Entfernungen von der Spitze.

73. Lhrs. Der körperliche Inhalt eines Kegels ist der dritte Theil des Produkts aus den Maaßzahlen der Grundebene und Höhe multiplicirt mit der Maaßeinheit.

Bw. Man denke sich eine Pyramide  $P_y$ , welche mit dem Kegel  $K$  gleiche Grundebene  $g$  und gleiche Höhe  $h$  hat, legt man nun durch  $P_y$  und  $K$  in der Entfernung  $x$  von der Spitze Ebenen parallel mit den Grundebenen und sind die Durchschnitsfiguren  $d$  und  $\delta$ , so verhält sich  $g : d = h^2 : x^2$   
 $g : \delta = h^2 : x^2$

$d = \delta$ , folglich sind beide Körper an Inhalt gleich. Da  $P_y = \frac{gh}{3} W$  und beim Kegel  $g = r^2 \pi$  ist, so ist  $K = \frac{1}{3} r^2 \pi h W$ .

3f. Der Kegel ist der dritte Theil eines Cylinders von gleicher Grundebene und Höhe.

74. Lhrs. Der Inhalt des Mantels eines Kegels ist gleich dem Produkte aus den Maaßzahlen der halben Peripherie der Grundebene mit der Seitenlinie des Kegels multiplicirt mit der Maaßeinheit.

Bw. Die Fläche des Kegelmantels ist abgewickelt ein Kreisabschnitt, dessen Radius die Seite des Kegels, und dessen Bogen gleich der Peripherie des Grundkreises ist, folglich ist, wenn  $s$  die Maaßzahl der Seitenlinie und  $r$  die des Radius des Grundkreises  $M : s^2 \pi Q = 2r\pi : 2s\pi$ , also  $M = rs\pi Q$ .

75. Lhrs. Zwei Kegel sind einander ähnlich, wenn die Radien ihrer Grundkreise ihren Höhen proportionirt sind.

Bw. Da die Mantelflächen, wie auch die Grundkreise ähnliche Figuren sind, so sind die Körper selbst einander ähnlich.

3f. 1. Ähnliche Kegel verhalten sich zu einander wie die dritten Potenzen der Maaßzahlen ihrer Radien oder Höhen.

3f. 2. Die Mantelflächen ähnlicher Kegel verhalten sich zu einander wie die zweiten Potenzen der Maaßzahlen ihrer Radien oder Höhen.

## Aufgaben.

19. Aufg. Die Oberfläche eines geraden Cylinders aus dem Radius  $rL$  des Grundkreises und der Höhe  $hL$  des Cylinders zu berechnen.

$$O_c = 2r\pi(r+h)Q.$$

20. Aufg. Die Oberfläche und den körperlichen Inhalt eines geraden Cylinderausschnitts aus dem Radius  $r$  des Grundkreises, der Höhe  $h$  des Cylinders und den zugehörigen Centriwinkel  $\text{AMC} = n^\circ$  zu berechnen.

Aufg. Fig. 66. Die Oberfläche besteht aus 2 Rechtecken, 2 Kreisabschnitten und der krummen Oberfläche  $\text{ACDE}$ , welche ein Rechteck ist.  $O_{ca} = (2rh + \frac{2r^2\pi n}{360} + \frac{2r\pi hn}{360})Q$

$$= \left( \frac{r\pi n}{180} (h+r) + 2rh \right) Q.$$

$$I_{ca} = \frac{r^2\pi hn}{360} W.$$

21. Aufg. Die Oberfläche und den Inhalt eines geraden Cylinderschnitts aus dem Radius  $rL$  des Grundkreises, der Höhe  $hL$  des Cylinders und dem zugehörigen Centriwinkel  $\text{AMC} = n$  zu berechnen.

Aufg. Fig. 66. Die Oberfläche besteht aus 2 Kreisabschnitten, dem Rechteck  $\text{ACDE}$  und der krummen Oberfläche  $\text{ACDE}$ . Die Sehne  $\text{AC} = 2r \sin \frac{1}{2}n$ , also das  $\triangle \text{ABC}$

$$= \frac{r^2 \sin . n}{2} \text{ folglich}$$

$$\text{der Kreisabschnitt} = \frac{r^2 \pi n}{360} - \frac{r^2 \sin . n}{2}$$

$$\text{das Rechteck ACDE} = 2rh \sin \frac{1}{2}n$$

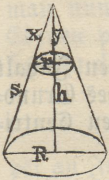
$$\text{die krumme Oberfläche} = \frac{2r\pi hn}{360}$$

$$O_{c.ab} = \left[ \frac{r\pi n}{180} (r+h) + r(2h \sin \frac{1}{2}n - r \sin . n) \right] Q.$$

$$I_{cab} = r^2 h \left( \frac{\pi n}{360} - \frac{\sin . n}{2} \right) W.$$

22. Aufg. Den Mantel und den Inhalt eines Kegelstumpfes zu berechnen, wenn die Radien  $RL$ ,  $rL$  der beiden Grundkreise und die Seite  $sL$  oder die Höhe  $hL$  des abgekürzten Kegels gegeben sind.

Fig. 69.



Aufl. 1) Man ergänze den Kegelsumpf zu einem ganzen Kegel und bezeichne die Seite des Ergänzungskegels mit  $x$ , so ist  $M_{kst} = (R\pi(s+x) - r\pi x) Q = \pi [sR + (R-r)x] Q$ .

Nun ist  $s + x \cdot x = R : r$ , also  $x = \frac{rs}{R-r}$ ,

folglich  $M_{kst} = \pi s (R+r) Q$ .

Ist  $s$  nicht gegeben, sondern  $h$ , so wird

$s = \sqrt{h^2 + (R-r)^2}$  und  $M_{kst} = \pi (R+r) \sqrt{h^2 + (R-r)^2} Q$ .

2) Nennt man die Höhe des Ergänzungskegels  $y$ , so ist  $I_{kst} = [ \frac{1}{3} \pi R^2 (h+y) - \frac{1}{3} \pi r^2 y ] W = \frac{1}{3} \pi [ R^2 h + (R^2 - r^2) y ] W$ . Nun ist  $y = \frac{rh}{R-r}$ , also  $I_{kst} = \frac{1}{3} \pi h (R^2 + Rr + r^2) W$ .

Ist  $h$  nicht gegeben, sondern  $s$ , so ist  $h = \sqrt{s^2 - (R-r)^2}$  folglich  $I_{kst} = \frac{1}{3} \pi (R^2 + Rr + r^2) \sqrt{s^2 - (R-r)^2} W$ .

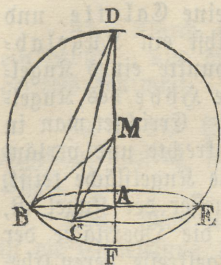
### Dritte Abtheilung.

#### Krummflächige Körper.

#### Die Kugel.

76. Uhrs. Wird eine Kugel durch eine Ebene geschnitten, so ist die Durchschnitsfigur ein Kreis.

Bw. Die schneidende Ebene geht entweder durch den Mittelpunkt oder nicht. 1) Geht die Ebene durch den Mittelpunkt der Kugel, so ist laut Erklärung die Durchschnitsfigur ein Kreis. 2) Geht die schneidende Ebene  $BCD$  nicht durch den Mittelpunkt der Kugel, so fälle man aus dem Mittelpunkt  $M$  der Kugel eine Senkrechte  $MA$  auf die Ebene des Schnitts,



und verbinde zwei beliebige Punkte B, C derselben mit A, so ist  $\triangle BAM \cong \triangle CAM$ , also  $AB = AC$  u. s. w., folglich BCD ein Kreis.

Zs. 1. Schneidet eine Ebene eine Kugel, so ist die Entfernung derselben vom Mittelpunkte der Kugel kleiner als der Halbmesser der Kugel, und die vom Mittelpunkte der Kugel auf den Durchschnittskreis gefällte Senkrechte trifft den Mittelpunkt dieses Kreises.

Zs. 2. Die gerade Linie, welche den Mittelpunkt einer Kugel mit dem Mittelpunkte eines Durchschnittskreises verbindet, steht senkrecht auf der Ebene dieses Kreises.

Zs. 3. Die gerade Linie, welche in dem Mittelpunkte eines Durchschnittskreises auf der Ebene desselben senkrecht steht, geht durch den Mittelpunkt der Kugel.

Zs. 4. Ein Kugelkreis ist desto größer, je kleiner seine Entfernung vom Mittelpunkte der Kugel ist, und ist am größten, wenn er durch den Mittelpunkt der Kugel geht.

Zs. 5. Alle Kugelkreise, die durch den Mittelpunkt der Kugel gehen, sind einander gleich.

Erklärung. Jeder Kugelkreis, dessen Ebene durch den Mittelpunkt der Kugel geht, heißt ein größter Kugelkreis.

77. Lhrs. Ein größter Kugelkreis theilt die Kugel und die Kugelfläche in zwei einander congruente Theile.

Bw. Man bringe die Theile so in einander, daß sie den sie begrenzenden Kugelkreis wieder gemeinschaftlich haben, aber auf eine Seite desselben fallen. Dann ergiebt sich leicht, daß auch beide Theile der Kugelfläche in allen Punkten zusammenfallen müssen, da alle Radien einander gleich sind.

Zs. 1. Alle größten Kreise einer Kugel halbiren einander.

Zs. 2. Ein kleinerer Kugelkreis theilt die Kugel und die Kugelfläche in zwei ungleiche Theile, von welchen derjenige der größere ist, in welchem der Mittelpunkt der Kugel liegt.

Erklärung. Der von einem größten Kugelkreise und der Hälfte der Kugelfläche begränzte Theil der Kugel heißt eine Halbkugel. Jeder von den beiden Theilen, in welche ein klei-

nerer Kugelfreis die Kugelfläche theilt, heißt eine Calotte, und jeder von den beiden Theilen der Kugel selbst ein Kugelabschnitt. Eine Senkrechte aus dem Mittelpunkte eines Kugelfreises bis zur Kugelfläche gezogen, heißt die Höhe des Kugelabschnittes und der ihn begrenzenden Calotte. Errichtet man in dem Mittelpunkte eines Kugelfreises eine Senkrechte und verlängert man diese auf beiden Seiten, bis sie die Kugelfläche trifft, so heißt diese Senkrechte, welche ein Durchmesser der Kugel ist, die Aze, und die Punkte, in welchen sie die Oberfläche der Kugel trifft, die Pole des Kugelfreises. Kugelfreise, deren Ebenen parallel sind, heißen Parallelkreise. Der von zwei Parallelkreisen begrenzte Theil der Kugelfläche heißt Zone, und jeder von den Ebenen zweier Parallelkreise und der dazu gehörigen Zone begrenzte Theil der Kugel eine Kugelscheibe (körperliche Zone). Die Entfernung der beiden Parallelkreise von einander heißt die Höhe der Kugelscheibe und der sie begrenzenden Zone. Der von einer Calotte und dem Mantel eines senkrechten Kegels, dessen Spitze der Mittelpunkt der Kugel und dessen Grundfläche der zur Calotte gehörige Kugelfreis ist, begrenzte Theil einer Kugel heißt ein Kugelausschnitt.

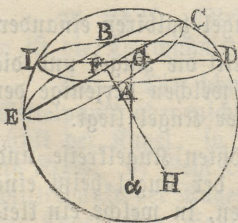
78. Uhrs. Jeder Pol eines Kugelfreises ist von allen Punkten in der Peripherie desselben gleich weit entfernt.

Bw. Fig. 69. Ist  $DF$  die Aze des Kugelfreises  $ACE$ , so sind  $D$  und  $F$  die Pole desselben, und verbindet man zwei beliebige Punkte  $B, C$  der Peripherie dieses Kugelfreises mit  $D$  und  $A$ , so ist  $\triangle CBD \cong \triangle ACD$ , folglich  $BD = CD$ .

79. Parallelkreise haben eine gemeinschaftliche Aze und gemeinschaftliche Pole.

79. Uhrs. Durch 4 Punkte, welche nicht in einer Ebene liegen, ist der Mittelpunkt und Halbmesser einer Kugel bestimmt, deren Oberfläche durch jene 4 Punkte geht.

Fig. 70.



Bw.  $A, B, C, D$  seien die 4 Punkte. Man lege durch  $ABD$  und  $ABC$  Kreise, errichte aus ihren Mittelpunkten  $G$  und  $F$  die Senkrechten  $GL$  und  $FH$ , so ist, da  $CE$  und  $DI$  in einer Ebene liegen, der Durchschnittspunkt  $M$  dieser beiden Linien der Mittelpunkt der Kugel (76. Uhrs., Zi. 3). Da die Dreiecke  $MAG, MBG, MGD, MFB$  und  $MFC$  einander congruent sind, so ist  $MA = MB = MC = MD$ .

Zf. Durch zwei Punkte der Oberfläche einer Kugel ist ein größter, und durch drei Punkte derselben ein kleinerer Kugelfreis bestimmt.

80. Uhrs. Eine Ebene, welche auf dem Endpunkte eines Kugelhalbmessers senkrecht steht, ist eine Tangentialebene der Kugel.

Bw. Man nehme einen zweiten Berührungspunkt an, so ist die Entfernung dieses Punktes vom Mittelpunkte größer als der Radius der Kugel.

Zf. 1. Die gerade Linie, welche den Berührungspunkt einer Berührungsebene mit dem Mittelpunkte der Kugel verbindet, steht auf der Berührungsebene senkrecht.

Zf. 2. Die aus dem Mittelpunkte einer Kugel auf eine Berührungsebene gefällte Senkrechte trifft diese im Berührungspunkte.

Zf. 3. Die in dem Berührungspunkte einer Berührungsebene auf derselben errichtete Senkrechte geht, verlängert, durch den Mittelpunkte der Kugel.

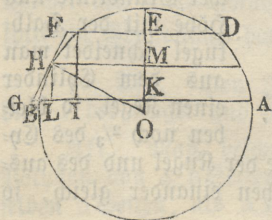
Zf. 4. In einem Punkte der Kugelfläche giebt es nur eine Berührungsebene.

Zf. 5. Zieht man in einer Berührungsebene durch den Berührungspunkt eine gerade Linie, so ist dieselbe eine Tangente der Kugel.

Zf. 6. Durch einen Punkt einer Kugelfläche giebt es unendlich viele Tangenten derselben.

81. Uhrs. Die Oberfläche einer Kugelzone ist gleich dem Produkte der Maaßzahlen der Peripherie eines größten Kugelfreises und der Höhe der Zone multiplicirt mit der Maaßeinheit.

Fig. 71.



Bw. ABCD sei die Kugelzone, deren Höhe  $EK = h$  und  $OH = r$  ist. Man lege durch die Mitte der Höhe der Zone eine Ebene  $MH$   $\parallel$  zur Grundfläche der Zone, falle aus dem Mittelpunkte der Kugel die Senkrechte  $OM$ , lege durch  $OM$  eine Ebene und ziehe in dieser eine Tangente  $FG$  durch den Punkt  $H$ . Denkt man sich denn  $FG$  um  $MO$

als Axc herumbewegt, so beschreibt FG die Mantelfläche eines abgekürzten Kegels und ist  $= FG \pi (GK + FE) = 2 FG \cdot HM \pi$ . Weil  $HM = GK - GL$ ,  $GL = LI = HM - FE$ , ist  $HM = GK - HM + FE$ , folglich  $2 HM = GK + FE$ . Da  $\angle GIF = \angle HMO$  und  $\angle GFI = \angle MHO$ , so ist  $\triangle FGI \sim \triangle MOH$ , daher  $FI : FG = MH : HO$ , und  $FI \cdot HO = FG \cdot MH$ , folglich die Mantelfläche des abgekürzten Kegels  $= 2 FI \cdot HO \pi = 2 rh \pi Q$ .

Die Mantelfläche des abgekürzten Kegels nähert sich der Oberfläche der Kugelzone um so mehr, je kleiner FI genommen wird, und denkt man sich FI keiner als jede denkbare gerade Linie, so weicht auch die Oberfläche der Zone von der Mantelfläche des Kegels um nichts ab. Zerschneidet man daher die Höhe FI der Kugelzone in eine sehr große Menge äußerst kleiner Theile  $h_1, h_2, h_3 \dots$  und legt durch die Theilpunkte Parallelebenen zu den Grundflächen der Zone, so zerfällt die Kugelzone dadurch in unendlich viele Kegelmäntel, deren Gesamtoberfläche  $= 2 r \pi (h_1 + h_2 + h_3 \dots)$  gleich der Oberfläche der Kugelzone von der Höhe FI ist. Da nun aber  $h_1 + h_2 + h_3 \dots = h$  ist, so ist auch die Oberfläche der Kugelzone  $z = 2 rh \pi Q$ .

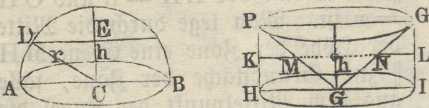
31. Die krumme Oberfläche einer Calotte ist gleich der Oberfläche der Zone von derselben Höhe.

82. Lhrs. Die Oberfläche einer Kugel ist gleich dem Vierfachen eines größten Kugelkreises.

Bw. Die Oberfläche einer Halbkugel ist gleich einer Calotte von der Höhe r, also  $= 2 r \pi r = 2 r^2 \pi$ , daher die Oberfläche der ganzen Kugel  $O = 4 r^2 \pi Q$ .

83. Lhrs. Der Inhalt einer Kugel ist gleich dem Produkte der Maaßzahlen ihrer Oberfläche und des dritten Theiles ihres Radius multiplicirt mit der Maaßeinheit.

Fig. 72.



Bw. HIPQ sei ein Cylinder von gleicher Grundlinie und Höhe mit der Halbkugel, schneidet man aus dem Cylinder einen Kegel, so bleiben noch  $\frac{2}{3}$  des Cy-

linders nach. Sind nun die Durchschnitte der Kugel und des ausgeschnittenen Cylinders in gleichen Höhen einander gleich, so sind die Körper selbst einander gleich.

Die Durchschnitsfigur der Halbkugel in der Höhe  $h$  ist  $= DE^2 \pi = (r^2 - h^2) \pi$ , die Durchschnitsfigur des ausgeschnittenen Cylinders in der Höhe  $h = r^2 \pi - MO^2 \pi = (r^2 - h^2) \pi$ , folglich einander gleich, also der Inhalt der Halbkugel  $= r^3 \pi - \frac{2}{3} r^3 \pi = \frac{1}{3} r^3 \pi$  und  $K = \frac{4}{3} r^3 \pi W$ .

31. Kegel, Kugel und Cylinder von gleicher Grundfläche und Höhe verhalten sich zu einander wie 1 : 2 : 3.

Wenn  $h = 2r$ , so ist der Inhalt des Kegels  $= \frac{2}{3} r^3 \pi$   
 " " " " " " der Kugel  $= \frac{4}{3} r^3 \pi$   
 " " " " " " des Cylinders  $= \frac{6}{3} r^3 \pi$   
 folglich  $\frac{2}{3} r^3 \pi : \frac{4}{3} r^3 \pi : \frac{6}{3} r^3 \pi = 2 : 4 : 6 = 1 : 2 : 3$ .

## Aufgaben.

23. Afg. Die Oberfläche eines Kugelsegments aus dem Radius  $r$  der Kugel und der Calottenhöhe  $h$  zu finden.

Afl. Die Oberfläche des Kugelsegments besteht aus der Fläche der Calotte und dem Kugelkreise, welche die Grundfläche des Segments bildet. Der Radius der Grundfläche des Segments  $= \sqrt{r^2 - (r - h)^2} = \sqrt{2rh - h^2}$ , die Grundfläche selbst also  $= (2rh - h^2) \pi$ , die Fläche der Calotte  $= 2r\pi h$ , folglich  $O_{ksg} = (4r - h) h \pi Q$ .

24. Afg. Die Oberfläche eines Kugelsektors aus dem Radius  $r$  der Kugel und der Calottenhöhe  $h$  zu finden.

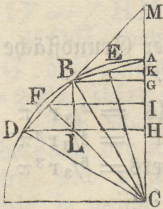
Afl. Die Oberfläche des Kugelsektors besteht aus der Fläche der Calotte und der Mantelfläche des senkrechten Kegels, welcher den Kugelradius zur Seite und die Grundfläche der Calotte zur Grundfläche hat, also  $O_{kse} = r\pi(2h + \sqrt{2rh - h^2}) Q$ .

25. Afg. Den Inhalt eines Kugelsektors aus dem Radius  $r$  der Kugel und der Calottenhöhe  $h$  zu finden.

Afl. Man beschreibe in einen Kreis ein regelmäßiges Polygon von  $4n$  Seiten, so kommen auf einen Quadranten derselben  $n$  Seiten, als  $AB = BD \dots$ ; zieht man  $BC, DC \dots$ ,

so erhält man  $n$  neben einander liegende Dreiecke, welche zusammengenommen die Fläche des Quadranten desto genauer aus-

Fig. 73.



machen, je größer die Zahl  $n$  genommen wird. Denkt man sich nun den Theil ABD des regelmäßigen Polygons um AC herumgedreht, bis derselbe in seine ursprüngliche Lage zurückgekehrt ist, so beschreibt derselbe einen Körper, der um so weniger von dem Kugelsektor abweichen wird, je größer  $n$  genommen worden ist. Nun beschreibt das Dreieck BAC bei dieser Bewegung einen Doppelkegel, dessen gemeinschaftliche Grundfläche, der von BG beschriebene Kreis ist. Der Inhalt

dieses durch Rotation des Dreiecks CAB um die Seite AC entstandenen Körpers ist daher  $\frac{\pi}{3} BG^2 \cdot AC + \frac{\pi}{3} BG^2 \cdot GC = \frac{\pi}{3} BG^2 \cdot AC$  (1). Man halbire nun die Seiten des Polygons

und verbinde die Mittelpunkte derselben mit dem Mittelpunkte C, so ist  $CE = CF = \dots$  und  $\triangle EAC \sim \triangle ABG$ , es verhält sich daher  $AC : EC = BA : BG$ , folglich  $AC \cdot BG = EC \cdot BA$ . Setzt man diesen Werth in obigen Ausdruck (1) ein, so erhält man, wenn man der Kürze wegen den durch die Rotation des Dreiecks BCA entstandenen Körper mit  $S_1$  bezeichnet:  $S_1 = \frac{1}{3} \pi BG \cdot EC \cdot BA$  (2). Nun verhält sich auch, wenn man EK

|| BG zieht, wegen Ähnlichkeit der Dreiecke ABG und CEK,  $BA : AG = EC : EK$ , folglich  $BA = \frac{AG \cdot EC}{EK}$ . Setzt man

diesen Ausdruck statt BA in (2) ein, und für  $EK = \frac{1}{2} BG$ , so erhält man  $S_1 = \frac{2}{3} \pi AG \cdot EC^2$ . Der Inhalt des durch Rotation des zweiten Dreiecks CDB um die Arc AC entstandenen Körpers, der mit  $S_2$  bezeichnet werden mag, wird auf folgende Weise gefunden. Verlängert man BD, bis sie die Verlängerung von CA in M schneidet, so beschreibt bei der Rotation des Quadranten um CA das Dreieck CDM wieder einen Doppelkegel, dessen gemeinschaftliche Grundebene der von DH beschriebene Kreis ist. Der Inhalt dieses Doppelkegels ist

$\frac{\pi}{3} \cdot DH^2 \cdot MC$ . Der Inhalt des durch das  $\triangle CBM$  bei der Umdrehung beschriebenen Doppelkegels ist  $\frac{\pi}{3} BG^2 \cdot MC$ , folglich  $S_2 = \frac{\pi}{3} MC (DH^2 - BG^2) = \frac{\pi}{3} MC (DH + BG) (DH$

—BG). Es ist aber  $DH + BG = 2FI$ , wenn man durch  $F$  zu  $DH$  die Parallele  $FI$  zieht und  $DH - BG = DH - LH = DL$ , folglich  $S_2 = \frac{2}{3} \pi \cdot MC \cdot FI \cdot DL$ . Nun ist  $\triangle MFC \sim \triangle DBL$ , also verhält sich  $MC : FC = BD : DL$ , daher  $MC \cdot DL = FC \cdot BD$ , mithin  $S_2 = \frac{2}{3} \pi FC \cdot BD \cdot FI$ . Es ist auch  $\triangle DBL \sim \triangle FCI$ , daher  $BD : BL = FC : FI$  und  $BD \cdot FI = BL \cdot FC$ , also  $S_2 = \frac{2}{3} \pi FC^2 \cdot BL = \frac{2}{3} \pi FC^2 \cdot GH$ . Ganz denselben Ausdruck erhält man für die von jedem der folgenden Dreiecke beschriebenen Umdrehungskörper. Bezeichnet daher  $S_n$  den  $n$ ten Körper in der Reihe der Umdrehungskörper,  $p_n$  die Senkrechte vom Mittelpunkte auf die Seite des Polygons und  $x_n$  die Projektion der Polygonsseite auf den senkrechten Radius, so ist  $S_{n-r} = \frac{2}{3} \pi p_{n-r}^2 x_{n-r}$ . Nun ist aber, da das Polygon ein regelmäßiges ist,  $p_1 = p_2 = p_3 \dots = p_{n-r}$  und die Summe von  $x_1 + x_2 + x_3 \dots x_{n-r} = h$  der Höhe der Calotte. Ist  $n$  daher unendlich groß, so nähert sich das Polygon dem Kreise,  $p_n$  dem Radius und der Umdrehungskörper dem Kugelsektor, folglich  $S = \frac{2}{3} \pi r^2 x_{n-r} (x_1 + x_2 + x_3 \dots x_{n-r}) W = \frac{2}{3} \pi r^2 h W$ .

26. Aufg. Den Inhalt eines Kugelsegments zu berechnen, wenn der Radius  $rL$  der Kugel und die Höhe  $hL$  der Calotte gegeben sind.

Afl. Der Inhalt des Kugelsegments ist gleich der Differenz des Inhalts des Kugelsektors und des Kegels, dessen Grundebene der zugehörige Kugelkreis und dessen Spitze den Mittelpunkt der Kugel ist.

Inhalt des Kugelsektors, dessen Höhe  $h$  ist  $= \frac{2}{3} \pi r^2 h$ ; Inhalt des Kegels  $= \frac{1}{3} \pi h (2r - h) (r - h) = \frac{1}{3} \pi h (2r^2 - 3rh + h^2)$ , mithin Inhalt des Kugelsegments  $Sg = \frac{2}{3} \pi r^2 h (2r^2 - 3rh + h^2) W = \frac{1}{3} \pi h^2 (3r - h) W$ .

## Verschiedene Aufgaben.

27. Aufg. Die Seite eines Würfels sei  $aL = a$ ) 4 Faden 5 Fuß, b) 3,08 Arschin; wie viel beträgt der Kubikinhalte und die Oberfläche desselben?

Afl.  $KW = a^3 W = a)$  104 C. = Fd. 265 C. = Fuß; b) 29 C. = Arschin 893,39 C. = Werschok.  $fQ = 6a^2 Q = a)$  133 □ Fd. 17 □ Fß; b) 56 □ Arschin 235,11 □ Werschok.

28. Aflg. Ein Würfel habe zur Seitenlinie  $aL = 2,5$  Ellen; wie groß ist dessen Diagonale, von einer körperlichen Ecke bis zur gegenüberliegenden?

Afl.  $dL = a\sqrt{3} \cdot L = 4,33$  Ellen.

29. Aflg. Wenn die Diagonale eines Würfels  $dL = 4,08$  Faden ist; wie groß ist die Seitenlinie  $aL$  und der Inhalt des Würfels  $KW$ ?

Afl.  $aL = \frac{d\sqrt{3}}{3} \cdot L = 2,35$  Fd. = 2 Fd. 2 Fß. 5,4 Zoll.  
 $KW = \frac{d^3\sqrt{3}}{9} \cdot W = 13$  C. = Fd. 136 C. = Fß. 176,95 C. = Zoll.

30. Aflg. Es soll ein Würfel gefertigt werden, dessen Inhalt  $KW = 2$  C. = Faden enthält; welche Länge hat eine Seite desselben?

Afl.  $aL = \sqrt[3]{K} \cdot L = 1,25$  Fd. = 1 Fd. 1 Fß. 9 Zoll.

31. Aflg. Wie groß ist der Inhalt und die Seitenlinie eines Kubus, dessen Oberfläche  $fQ = a)$  3500 □ Fuß; b) 8 □ Ellen ist?

Afl.  $aL = \sqrt{\frac{f}{6}} \cdot L = a)$  24,152 Fuß = 3 Fd. 3 Fß. 1,82 Zoll. b) 1,15 Ellen.

$KW = \left(\frac{f}{6}\right)^{3/2} \cdot W = a)$  14088,3 C. = Fuß = 41 C. = Fd. 25 C. = Fuß 518,4 C. = Zoll; b) 1,5396 C. = Ellen.

32. Aflg. Drei Würfel, wovon der erste zur Seitenlinie  $aL = 7$  Fß., der zweite  $bL = 6$  Fß. und der dritte  $cL = 5$  Fß. hat, sollen in einen Würfel verwandelt werden; wie groß ist dessen Seitenlinie anzunehmen?

Afl.  $xL = \sqrt[3]{a^3 + b^3 + c^3} \cdot L = 8,81$  Fuß = 8 Fuß 9,72 Zoll.

33. Aflg. Ein Parallelepipedum hat zur Länge  $1L = 9\frac{1}{2}$

Fuß, zur Breite  $bL = 5$  Fß. und zur Höhe  $hL = 2\frac{1}{3}$  Fuß; wie viel beträgt der Inhalt und die Oberfläche desselben?

$$\text{Afl. } KW = lbh. W = 108\frac{8}{9} \text{ C.} = \text{Fuß} = 108 \text{ C.} = \text{Fuß}$$

$$fQ = 2(1b + 1h + bh) Q = 160,2 \square \text{Fuß} = 160$$

$$\square \text{Fß } 28,8 \square \text{Zoll.}$$

34. Afg. Aus der Länge eines Prllpd.  $1L = 3\frac{5}{6}$  Ellen, aus der Breite  $bL = 1\frac{1}{2}$  Ellen und der Höhe  $hL = \frac{3}{4}$  Ellen, soll die Diagonale und der Inhalt desselben gefunden werden.

$$\text{Afl. } dL \sqrt{1^2 + b^2 + h^2}. L = 4,18 \text{ Ellen; } LW = lbh$$

$$. W = 4,31 \text{ C.} = \text{Ellen.}$$

35. Afg. Den Inhalt der Wände und Böden einer Kiste zu finden, wenn die Länge  $1L = 3$  Fß., die Breite  $bL = 7$  Fß., die Höhe  $hL = 5$  Fuß und die Dicke der Bretter  $aL = \frac{1}{8}$  Fß. gegeben sind.

$$\text{Afl. } KW = lbh - (1 - 2a)(b - 2a)(h - 2a). W$$

$$= 16\frac{53}{64} \text{ C.} = \text{Fß.} = 16 \text{ C.} = \text{Fß. } 1431 \text{ C.} = \text{Zoll.}$$

36. Afg. Die Seite eines Würfels ist um  $mL = 2\frac{1}{2}$  Fuß länger, als die eines andern, der  $aW = 2501\frac{1}{8}$  C. = Fß. weniger Inhalt hat. Wie groß ist jeder Würfel?

Afl. Die Seite des kleinern Würfels  $x$

$$= \frac{-m + \sqrt{\frac{4a - m^3}{3m}}}{2}, \text{ also}$$

Ex Bibl. univ. Tur.

$$KW = \left( -\frac{a}{2} + \frac{2m^3 + a}{6m} \sqrt{\frac{4a - m^3}{3m}} \right) W = 4913 \text{ C.} = \text{Fß.}$$

$$K_1W = \left( \frac{a}{2} + \frac{2m^3 + a}{6m} \sqrt{\frac{4a - m^3}{3m}} \right) W = 7414\frac{1}{8} \text{ C.} = \text{Fß.}$$

37. Afg. Ein senkrechtcs Prllpd. dessen Länge  $1L = 4\frac{1}{2}$  Fuß, Breite  $bL = 3\frac{2}{3}$  Fuß und Höhe  $hL = 1$  Fuß ist, in einen Würfel zu verwandeln; wie groß ist die Seitenlinie  $xL$ ?

$$\text{Afl. } xL = \sqrt[3]{1bh}. L = 2 \text{ Fß. } 6,5 \text{ Zoll.}$$

38. Afg. Ein senkrechtcs Prllpd., welches zur Länge  $1L = 3$  Saschen 2 Arschin, zur Breite  $bL = 4$  Saschen 10 Werschok und zur Höhe  $hL = 7$  Saschen 1 Ar. hat, soll in einen

Würfel verwandelt werden; wie groß muß die Seite des Würfels sein und welche Oberfläche ist um wie viel größer?

Afl.  $xL = \sqrt[3]{1bh} \cdot L = 232,168 \text{ Weischöck} = 4 \text{ Saschen}$   
 2 Arschin 8,168 Weischöck.

$$O.P = 2(1b + 1h + bh) W = 337216 \square \text{Wr.}$$

$$O.W = 6 \sqrt[3]{(1bh)^2} \cdot W = 323411,7 \square \text{Wr.}$$

$O.P - O.W = 13804,3 \square \text{Wr.} = 5 \square \text{Saschen}$  8  $\square$  Arschin  
 236,3  $\square$  Weischöck.

39. Afg. Ein senkrechtcs Prllpd., welches zur Länge  $1L = 3 \text{ Fuß } 4 \text{ Zoll}$ , zur Breite  $bL = 4 \text{ Fuß } 3 \text{ Zoll}$  und zur Höhe  $hL = 5 \text{ Fuß } 2 \text{ Zoll}$  hat, soll mit einem Würfel gleiche Oberfläche haben; wie groß ist der Inhalt des Würfels und welcher Körper ist größer?

Afl.  $I.W = \left( \frac{1b + 1h + bh}{3} \right)^{3/2} \cdot W = 129577,4 \text{ C.} =$   
 Zoll = 74 C. = Fuß 1705,4 C. = Zoll.

$$IP = 1bh \cdot W = 126480 \text{ C.} = \text{Zoll} = 73 \text{ C.} = \text{Fß. } 336 \text{ C.} = \text{Z.}$$

Der Inhalt des Würfels ist um 1 C. = Fß. 1369,4 C. = Zoll größer als der des Prllpds.

40. Afg. Die Diagonalen dreier an einander stehenden Seitenflächen eines rechtwinkligen Prllpds. ist  $d_1L = 3 \text{ Fuß}$ ,  $d_2L = 4 \text{ Fuß}$  und  $d_3L = 2 \text{ Fuß } 8 \text{ Zoll}$ . Welchen Inhalt hat jede der drei Seitenflächen?

$$\text{Afl. } fQ = \frac{1}{2} \sqrt{d^2 - (d_1^2 - d_2^2)^2} \cdot Q = 101,5 \square \text{Zoll.}$$

$$f_1Q = \frac{1}{2} \sqrt{d_1^2 - (d_2^2 - d^2)^2} \cdot Q = 7 \square \text{Fuß}$$

$$135,94 \square \text{Zoll.}$$

$$f_2Q = \frac{1}{2} \sqrt{d_2^2 - (d^2 - d_1^2)^2} \cdot Q = 90,15 \square \text{Zoll.}$$

41. Afg. Aus einem rechth. Prllpd., dessen Höhe  $hL = 20 \text{ Fuß } 4 \text{ Zoll}$  und zur Grundfläche ein Quadrat hat, dessen Seitenlinie  $aL = 5 \text{ Fuß } 10 \text{ Zoll}$  ist, den größtmöglichen Cylinder zu drehen. Wie groß ist der Abfall?

$$\text{Afl. } KW = \frac{a^2 h (4 - \pi)}{4} \cdot W = 148 \text{ C.} = \text{Fß. } 833,4 \text{ C.} = \text{Z.}$$

42. Afg. Ein senkr. Prisma habe zur Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck, dessen Seitenlinie  $aL = 2^{5/12} \text{ Ellen}$  und

die Höhe des Prisma  $hL = 6\frac{1}{2}$  Ellen ist. Wie viel beträgt der Inhalt und die Oberfläche desselben?

$$\text{Afl. } KW = \frac{ha^2\sqrt{3}}{4}. W = 16,43 \text{ C.} = \text{Ellen}; fQ = \frac{a}{2} \\ (a\sqrt{3} + 6h) Q = 52,182 \square \text{Ellen.}$$

43. Aufg. Die Grundfläche eines senkr. Prisma ist ein Quadrat, dessen Seitenlinie  $aL = 4$  Fuß 8 Zoll, die Höhe des Prisma  $hL = 6$  Fuß 4 Zoll; wie viel beträgt der Inhalt und die Oberfläche desselben?

$$\text{Afl. } KW = a^2 h. W = 137 \text{ C.} = \text{Fuß } 1600 \text{ C.} = \text{Zoll}; fQ \\ = 2a(a + 2h) Q = 161 \square \text{Fß. } 112 \square \text{Zoll.}$$

44. Aufg. Ein senkr. Prisma hat ein reguläres Sechseck zur Grundfläche, dessen Seitenlinie  $aL = 3,5$  Fuß und die Höhe des Prisma  $hL = 9,74$  Fuß ist. Wie viel beträgt der Inhalt und die Oberfläche desselben?

$$\text{Afl. } KW = \frac{3}{2} a^2 h \sqrt{3}. W = 309,98 \text{ C.} = \text{Fuß} = 309 \\ \text{C.} = \text{Fuß } 1693,44 \text{ C.} = \text{Zoll.} \\ fQ = 3a(a\sqrt{3} + 2h) Q = 268,19 \square \text{Fß.} = 268 \square \text{Fuß} \\ 27,36 \square \text{Zoll.}$$

45. Aufg. Es soll der Inhalt und die Oberfläche eines senkr. Prisma gefunden werden, dessen Grundfläche ein reguläres Achteck ist. Die Seitenlinie  $aL = 4$  Fuß und die Höhe des Prisma  $hL = 9$  Fuß.

$$\text{Afl. } KW = 2 a^2 h (1 + \sqrt{2}). W = 695 \text{ C.} = \text{Fuß} \\ 500 \text{ C.} = \text{Zoll.} \\ fQ = (4 a^2 (1 + \sqrt{2}) + 8 ah) Q = 442 \square \text{Fß. } 73 \square \text{Zoll.}$$

46. Aufg. Die Grundfläche eines senkrechten Prisma sei ein ungleichseitiges Dreieck, wovon die eine Seitenlinie  $aL = 4$  Fuß, die zweite  $bL = 3$  Fuß und die dritte  $cL = 2$  Fuß ist, ferner betrage die Höhe des Prisma  $hL = 6$  Fuß; wie groß ist der Inhalt und die Oberfläche des Prisma?

$$\text{Afl. Es sei } a + b + c = s, \text{ so ist } KW \\ = h \sqrt{\frac{1}{2} s (\frac{1}{2} s - a) (\frac{1}{2} s - b) (\frac{1}{2} s - c)}. W = 17 \text{ C.} = \text{Fuß} \\ 747 \text{ C.} = \text{Zoll.}$$

$$fQ = h(a + b + c) + 2 \sqrt{\frac{1}{2} s (\frac{1}{2} s - a) (\frac{1}{2} s - b) (\frac{1}{2} s - c)} \\ . Q = 59 \square \text{Fuß } 116 \square \text{Zoll.}$$

47. Aufg. Ein senkr. Prisma habe ein Quadrat zur Grundfläche, dessen Seitenlinie  $aL = 5$  Fuß sich zur Höhe  $hL$  des Prisma wie  $m:n$  ( $5:9$ ) verhalte; wie groß ist der Inhalt und die Oberfläche desselben?

$$\text{Aufl. } KW = \frac{a^3 n}{m} . W = 225 \text{ C. = Fuß} ; fQ = \frac{2a^2(2n+m)}{m} \\ Q = 230 \square \text{ Fuß.}$$

48. Aufg. Die Grundfläche eines senkr. Prisma ist ein reguläres Zehneck und seine Seitenlinie  $aL = 15$  Zoll, die Höhe des Prisma  $hL = 9$  Fuß 6 Zoll; wie viel beträgt der Inhalt und die Oberfläche desselben?

$$\text{Aufl. } KW = \frac{5ha^2}{2} \sqrt{5+2\sqrt{5}} . W = 114 \text{ C. = Fuß} \\ 320,62 \text{ C. = Zoll.}$$

$$fQ = 5a(a\sqrt{5+2\sqrt{5}} + 2h) Q = 142 \square \text{ Fuß } 113,62 \square \text{ Zoll.}$$

49. Aufg. Die Seitenlinie eines regulären Fünfecks ist  $aL = 20$  Zoll und dasselbe ist die Grundfläche eines senkrechten Prisma, welcher zur Höhe  $hL = 5$  Fuß 8 Zoll hat; wie viel beträgt der Inhalt und die Oberfläche desselben?

$$\text{Aufl. } KW = \frac{5a^2h}{4} \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} . W = 26 \text{ C. = Fuß} \\ 1652 \text{ C. = Zoll.}$$

$$fQ = \left( \frac{5a^2}{2} \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} + 5ah \right) Q = 56 \square \text{ Fuß } 106 \square \text{ Zoll.}$$

50. Aufg. Die Grundebene eines senkrechten Prisma sei ein gleichseitiges Dreieck, dessen Seite  $aL = 2$  Arschin  $3\frac{3}{4}$  Werschok und die Höhe des Prisma  $m = 3\frac{2}{3}$  Mal so hoch ist wie die Seitenlinie des Dreiecks; wie groß ist der Inhalt und die Oberfläche desselben?

$$\text{Aufl. } KW = \frac{ma^3\sqrt{3}}{4} . W = 17 \text{ C. = Arschin } 2909,655 \\ \text{C. = Werschok.}$$

$$fQ = a^2 \left( 3m + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) Q = 59 \square \text{ Arschin } 61,489 \square \text{ Werschok.}$$

51. Aufg. Die Grundebene eines senkrechten Prisma sei ein gleichseitiges Dreieck, dessen Seite  $aL = 3$  Faden 4 Fuß

4,32 Zoll und die Höhe des Prismas verhält sich zur Höhe des Dreiecks wie  $m:n$  (2,4:0,5). Wie groß ist der Inhalt und die Oberfläche desselben?

Afl.  $KW = \frac{3ma^3}{8n}$ .  $W = 85$  C.=Faden 202 C.=Fuß  
1002,2 C.=Zoll.

$fQ = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \left(1 + \frac{3m}{n}\right) Q = 175 \square$  Fad.  $24 \square$  Fß.  $36,83 \square$  Zoll.

52. Afg. Die Grundebene eines senkrechten Prismas sei ein Trapez, die parallelen Seiten desselben seien  $aL = 2$  Fuß 8 Zoll und  $bL = 5$  Fuß 3 Zoll und die dritte Seite bildet die Entfernung derselben  $dL = 4$  Fuß 10 Zoll, so wie die Höhe des Prismas  $hL = 8$  Fuß 2 Zoll. Wie groß ist der Inhalt und die Oberfläche des Prismas?

Afl.  $KW = \frac{dh(a+b)}{2}$ .  $W = 156$  C.=Fß.  $422$  C.=Z.

$fQ = h(a+b+d + \sqrt{d^2 + (b-a)^2}) + (a+b)d \cdot Q$   
 $= 187 \square$  Fuß  $20,872 \square$  Zoll.

53. Afg. Die Grundebene eines senkrechten Prismas sei ein gleichseitiges Dreieck, dessen Flächeninhalt  $dQ = 44 \square$  Fuß  $20 \square$  Zoll und die Höhe des Prismas  $hL = 5$  Fuß 8 Zoll enthält. Wie groß ist der Inhalt und die Oberfläche des Prismas?

Afl.  $KW = dh$ .  $W = 250$  C.=Fuß  $208$  C.=Zoll.

$fQ = 2d + h\sqrt{12d}\sqrt{3}$ .  $Q = 259 \square$  Fuß  $131,63 \square$  Zoll.

54. Afg. Die Grundebene eines senkrechten Prismas sei ein gleichseitiges Dreieck, dessen Seite  $aL = 5$  Fuß 8,2 Zoll und die Höhe des Prismas  $hL = 8$  Fuß 2,7 Zoll enthält. Wie groß ist die Seitenlinie  $xL$  eines Würfels, der mit dem Prisma gleichen Inhalt, und wie groß die Seitenlinie  $yL$  eines Würfels, der mit dem Prisma gleiche Oberfläche hat?

Afl.  $xL = \sqrt[3]{\frac{ha^2\sqrt{3}}{4}}$ .  $L = 4$  Fuß  $10,3618$  Zoll.

$yL = \sqrt{\frac{ah}{2} + \frac{a^2\sqrt{3}}{12}}$ .  $L = 5$  Fuß  $3,53$  Zoll.

55. Afg. Die Grundebene eines senkrechten Prismas sei ein Quadrat, dessen Seite  $aL = 2$  Saschen 1 Arschin 4 Werschok

und die Höhe des Prisma  $hL = 3$  Saſchen 2 Arſchin 10 Werſchock enthält. Wie groß iſt die Seitenlinie  $xL$  eines Würfels, der mit dem Prisma gleichen Inhalt, und wie groß die Seitenlinie  $yL$  eines Würfels, der mit dem Prisma gleiche Oberfläche hat?

$$\text{Afl. } xL = \sqrt[3]{a^2 h} \cdot L = 2 \text{ S. } 2 \text{ Ar. } 7,77 \text{ Werſchock.}$$

$$yL = \sqrt{\frac{a(a+2h)}{3}} \cdot L = 2 \text{ Saſchen } 2 \text{ Ar. } 9,3 \text{ Werſchock.}$$

56. Aſg. Die Grundebene eines ſenkrechten Prisma ſei ein regelmäßiges Zehneck, der Radius des eingeschriebenen Kreiſes ſei  $rL = 14$  Fuß 10 Zoll und die Höhe des Prisma  $hL = 28$  Fuß 4 Zoll. Wie groß iſt der Inhalt und die Oberfläche des Prisma?

$$\text{Afl. Die Seite des Zehnecks iſt} = \frac{2r}{5} \sqrt{25 - 10\sqrt{5}}.$$

$$KW = 2 r^2 h \sqrt{25 - 10\sqrt{5}} \cdot W = 59 \text{ C.} = \text{Faden } 18 \text{ C.} = \text{Fuß } 1525 \text{ C.} = \text{Zoll.}$$

$$fQ = 4 r (r + h) \sqrt{25 - 10\sqrt{5}} \cdot Q = 84 \square \text{Faden } 44 \square \text{Fuß } 138 \square \text{Zoll.}$$

57. Aſg. Die Grundebene eines ſenkrechten Prisma ſei ein regelmäßiges Zwölfeck, deſſen Seite  $aL = 4\frac{1}{2}$  Zoll und die Höhe des Prisma  $hL = 10\frac{5}{9}$  Zoll beträgt. Wie groß iſt der Inhalt und die Oberfläche des Prisma?

$$\text{Afl. } KW = 3 a^2 h \sqrt{7 + 4\sqrt{3}} \cdot W = 3 a^2 h (2 + \sqrt{3}) \cdot W = 1 \text{ C.} = \text{Fuß } 665,15 \text{ C.} = \text{Zoll.}$$

$$fQ = 6 a (2h + a (2 + \sqrt{3})) \cdot Q = 7 \square \text{Fuß } 15,4 \square \text{Zoll.}$$

58. Aſg. Die Grundebene eines ſenkrechten Prisma ſei ein regelmäßiges Zwölfeck, der Radius des umſchriebenen Kreiſes ſei  $rL = 5\frac{1}{5}$  Fuß und die Höhe des Prisma  $hL = 8\frac{5}{6}$  Fuß. Wie groß iſt der Inhalt und die Oberfläche des Prisma?

$$\text{Afl. } KW = 3 h r^2 \cdot W = 891,46 \text{ C.} = \text{Fuß.}$$

$$fQ = 6 r (r + 2h \sqrt{2 - \sqrt{3}}) Q = 516,69 \square \text{Fuß.}$$

59. Aſg. Die Grundebene eines ſenkrechten Prisma ſei ein regelmäßiges Zwölfeck, der Radius des eingeschriebenen Kreiſes ſei  $rL = 5$  Arſchin 10 Werſchock und die Höhe des Prisma

$hL = 7$  Arschin 2 Werschok; wie groß ist der Inhalt und die Oberfläche des Prisma?

Afl. Die Seite des Zwölfecks  $= 2r(2 - \sqrt{3})$ .

$KW = 12hr^2(2 - \sqrt{3})$ .  $W = 750$  C. = Ar. 1736 C. = Wr.

$fQ = 24r(2 - \sqrt{3})(r + h)$ .  $Q = 464$  □Ar. 188,8 □Wr.

60. Afg. Die Grundebene eines senkrechten Prisma sei ein regelmäßiges Fünfeck, der Radius des umschriebenen Kreises  $rL = 8$  Fuß 11 Zoll, so wie die Höhe des Prisma  $hL = 10$  Fuß 4 Zoll. Wie groß ist der Inhalt und die Oberfläche des Prisma?

Afl. Die Seite des Fünfecks  $= r \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}}$ ,

der Radius des eingeschriebenen Kreises  $= \frac{r}{2} \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}}$ .

$KW = \frac{5hr^2}{8} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$ .  $W = 1953$  C. = Fß. 495,69 C. = Z.

$fQ = \frac{5r}{2} (h\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} + \frac{r}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}})$ .  $Q = 919$

□Fuß 94,5 □Zoll.

61. Afg. Die Grundebene eines senkrechten Prisma sei ein regelmäßiges Fünfeck, der Radius des eingeschriebenen Kreises sei  $rL = 3$  Faden 4 Fuß und die Höhe des Prisma  $hL = 14$  Faden 3 Fuß. Wie groß ist der Inhalt und die Oberfläche des Prisma?

Afl. Die Seite des Fünfecks  $= 2r\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$ .

$KW = 5hr^2\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$ .  $W = 668$  C. = Faden 220 C. = Fuß.

$fQ = (h + r)10r\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$ .  $Q = 467$  □Fd. 6 □Fuß.

62. Afg. Die Grundebene eines senkrechten Prisma sei ein regelmäßiges Sechseck, der Radius des eingeschriebenen Kreises sei  $rL = 3$  Fuß 4,4 Zoll und die Höhe des Prisma verhält sich zur Seite des Sechseck wie  $m:n$  ( $5:1/2$ ). Wie groß ist der Inhalt und die Oberfläche des Prisma?

Afl.  $KW = \frac{4r^3m}{n}$ .  $W = 1526$  C. = Fuß 643 C. = Zoll.

$fQ = 4r^2 \left( \frac{2m}{n} + \sqrt{3} \right) Q = 985$  □Fuß 40 □Zoll.

63. Aufg. Die Grundebene eines senkrechten Prisma sei ein regelmäßiges Achteck, der Radius des umschriebenen Kreises sei  $rL = 20$  Fuß 4 Zoll, so wie die Höhe des Prisma  $hL = 30$  Fuß 5 Zoll. Wie groß ist der Inhalt und die Oberfläche des Prisma?

Auf.  $KW = 2hr^2\sqrt{2}$ .  $W = 103$  C.-Fad. 158 C.-Fß. 622 C.-Zoll.

$fQ = 4r(r\sqrt{2} + 2h\sqrt{2} - \sqrt{2})$   $Q = 124$  □Fad. 22 □Fß. 108 □Zoll.

64. Aufg. Die Grundebene eines senkrechten Prisma sei ein regelmäßiges Achteck, der Radius des eingeschriebenen Kreises sei  $rL = 3$  Fuß 4,23 Zoll, so wie die Höhe des Prisma  $hL = 8$  Fuß 2,45 Zoll. Wie groß ist der Inhalt und die Oberfläche des Prisma?

Auf.  $KW = 8r^2h\sqrt{3-2\sqrt{2}}$   $W = 8r^2h(\sqrt{2}-1)$ .  $W = 309$  C.-Fuß 1419,2 C.-Zoll.

$fQ = 16r(\sqrt{2}-1)(r+h)$ .  $Q = 260$  □Fuß 51,5 □Zoll.

Es ist  $\sqrt{3-2\sqrt{2}} = \pm(1-\sqrt{2})$ . Hier muß man — nehmen, damit der Ausdruck positiv wird.

65. Aufg. Die Grundfläche einer senkrechten Pyramide sei ein gleichseitiges Dreieck, dessen Seitenlinie  $aL = 8$  Fuß und die Höhe der Pyramide  $hL = 16$  Fuß sein soll; wie viel beträgt der Inhalt und die Oberfläche derselben?

Auf. Die Höhe eines Seitendreiecks

$$= \sqrt{h^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2}$$

$KW = \frac{ha^2\sqrt{3}}{12}$   $W = 147$  C.-Fuß 1377 C.-Zoll.

$fQ = \left[\frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{3a}{4}\sqrt{\frac{12h^2+a^2}{3}}\right]$   $Q = 221$  □Fuß 100,224 □Zoll.

66. Aufg. Es soll der körperliche Inhalt und die Oberfläche einer senkrechten Pyramide gefunden werden, deren Grundfläche ein Quadrat ist, wovon die Seitenlinie  $aL = 3$  Fuß 4 Zoll und die Höhe der Pyramide  $hL = 8$  Fuß 6 Zoll beträgt.

Auf.  $KW = \frac{a^2h}{3}$   $W = 31$  C.-Fuß 832 C.-Zoll.

$$fQ = (a^2 + a\sqrt{4h^2 + a^2}) Q = 68 \square \text{Fuß } 120 \square \text{Zoll.}$$

67. Afg. Eine senkrechte Pyramide habe ein regelmäßiges Sechseck zur Grundfläche, wovon die Seitenlinie  $aL = 9$  Fuß und die Höhe der Pyramide  $hL = 24$  Fuß beträgt; wie groß ist der Inhalt und die Oberfläche der Pyramide?

$$\text{Afl. } KW = \frac{a^2 h \sqrt{3}}{2}. W = 1683 \text{ C.} \text{Fuß } 870 \text{ C.} \text{Zoll.}$$

$$fQ = \frac{3a}{2} (a\sqrt{3} + \sqrt{4h^2 + 3a^2}). Q = 885 \square \text{Fuß } 63 \square \text{Zoll.}$$

68. Afg. Die Grundebene einer senkrechten Pyramide sei ein gleichseitiges Dreieck, dessen Seite  $aL = 5$  Fuß 4 Zoll und die Seitenkante der Pyramide  $sL = 9$  Fuß 10 Zoll enthält. Wie groß ist der Inhalt und die Oberfläche der Pyramide?

$$\text{Afl. Die Höhe der Pyramide} = \sqrt{\frac{3s^2 - a^2}{3}}, \text{ die}$$

$$\text{Höhe des Seitendreiecks} = \frac{1}{2} \sqrt{4s^2 - a^2}.$$

$$KW = \frac{a^2}{12} \sqrt{3s^2 - a^2}. W = 38 \text{ C.} \text{Fuß } 589,84 \text{ C.} \text{Zoll.}$$

$$fQ = \frac{a^2}{4} (a\sqrt{3} + 3\sqrt{4s^2 - a^2}). Q = 88 \square \text{Fuß } 2,72 \square \text{Zoll.}$$

69. Afg. Die Grundebene einer senkrechten Pyramide sei ein gleichseitiges Dreieck, dessen Inhalt  $dQ = 4 \square$  Fuß 100 Zoll, und die Höhe der Pyramide  $hL = 5$  Fuß 11 Zoll enthält. Wie groß ist der Inhalt und die Oberfläche der Pyramide?

$$\text{Afl. } KW = \frac{dh}{3}. W = 9 \text{ C.} \text{Fuß } 446,66 \text{ C.} \text{Zoll.}$$

$$fQ = (d + \sqrt{3dh^2 \sqrt{3} + d^2}). Q = 34 \square \text{Fuß } 41,838 \square \text{Zoll.}$$

70. Afg. Die Grundebene einer senkrechten Pyramide sei ein Quadrat, dessen Seite  $aL = 3$  Werst 120 Saschen und die Seitenkante der Pyramide  $sL = 2$  Werst 200 Saschen beträgt. Wie groß ist der Inhalt und die Oberfläche der Pyramide?

$$\text{Afl. } KW = \frac{a^2}{3} \sqrt{\frac{2s^2 - a^2}{2}}. W = 2 \text{ C.} \text{Werst}$$

$$62773200 \text{ C.} \text{Saschen.}$$

$$fQ = a(a + \sqrt{4s^2 - a^2}). Q = 21 \square \text{Werst } 243031,2 \square \text{Sasch.}$$

71. Afg. Die Grundebene einer senkrechten Pyramide sei ein Quadrat, dessen Diagonale  $dL = 8$  Faden 2 Fuß 4 Zoll und die Seitenkante der Pyramide  $sL = 10$  Faden 5 Fuß 2 Zoll beträgt. Wie groß ist der Inhalt und die Oberfläche der Pyramide?

Afl.  $KW = \frac{d^2}{12} \sqrt{4s^2 - d^2}$ .  $W = 114$  C. = Faden 187 C. = Fuß 149 C. = Zoll.

$fQ = \frac{d^2 + d\sqrt{8s^2 - d^2}}{2}$ .  $Q = 156$  □ Fd. 20 □ Fuß 49,5 Zoll.

72. Afg. Die Grundebene einer senkrechten Pyramide sei ein regelmäßiges Sechseck, dessen Seite  $aL = 14$  Fuß 10 $\frac{1}{2}$  Zoll und die Seitenkante der Pyramide  $sL = 21$  Fuß 5 $\frac{3}{4}$  Zoll beträgt. Wie groß ist der Inhalt und die Oberfläche der Pyramide?

Afl.  $KW = \frac{a^2}{2} \sqrt{3s^2 - 3a^2}$ .  $W = 3097$  C. = Fuß 1040,67 C. = Zoll.

$fQ = \frac{3a}{2} (a\sqrt{3} + \sqrt{4s^2 - a^2})$ .  $Q = 1474$  □ Fuß 66,66 □ Zoll.

73. Afg. Die Eckkante einer senkrechten Pyramide sei  $cL = 60$  Fuß, die Grundfläche dieser Pyramide sei ein Rechteck, wovon die Länge  $lL = 10$  Fuß, die Breite  $bL = 8$  Fuß ist; wie viel beträgt der Inhalt und die Oberfläche der Pyramide?

Afl.  $KW = \frac{1b\sqrt{4c^2 - (l^2 + b^2)}}{6}$ .  $W = 1590$  C. = F. 1473 C. = Zoll.

$fQ = 1b + \frac{l\sqrt{4c^2 - l^2} + b\sqrt{4c^2 - b^2}}{2}$ .  $Q = 1156$  □ Fuß 118 □ Zoll.

74. Afg. Die Grundebene einer senkrechten Pyramide sei ein Quadrat, dessen Seite  $aL = 10$  Fuß 3 Zoll und die Höhe der Pyramide  $hL = 14$  Fuß 5 Zoll beträgt. Es soll ein Kegel von gleichem Inhalte und gleicher Höhe mit der Pyramide verfertigt werden; wie groß ist der Radius des Grundkreises des Kegels und welche Oberfläche ist um wie viel größer?

Afl. Der Radius des Grundkreises  $rL = \frac{a}{\sqrt{\pi}} L = 5$   
Fuß 9,395 Zoll.

$$fP = a(a + \sqrt{4h^2 + a^2}) \text{ u. } fK = a(a + \sqrt{\pi h^2 + a^2})$$

$$fP - f.K = a(\sqrt{4h^2 + a^2} - \sqrt{\pi h^2 + a^2}) \cdot Q = 31 \square \text{Fuß.}$$

$$68,55 \square \text{Zoll.}$$

75. Aflg. Die Grundfläche einer abgekürzten senkrechten Pyramide sei ein Quadrat, dessen Seitenlinie  $aL = 2$  Meter, ferner die Seitenlinie des obern Quadrats  $bL = \frac{3}{4}$  Meter und die Höhe  $hL = 2\frac{1}{4}$  Meter ist; wie viel beträgt der Inhalt und die Oberfläche dieses Pyramidenstumpfes? (1 Meter = 3,28 russ. Fuß.)

Afl.  $KW = \frac{h}{3} (a^2 + b^2 + ab) \cdot W = 4$  Kubikmeter  
703 Kubikdezimeter, die Höhe eines Seitentrapezes  
 $= \sqrt{h^2 + (\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b)^2}$

$$fQ = [a^2 + b^2 + (a + b)\sqrt{4h^2 + (a - b)^2}] \cdot Q = 17$$

Quadratmeter 40 Quadratdezimeter.

76. Aflg. Eine abgekürzte senkrechte Pyramide habe ein gleichseitiges Dreieck zur Grund- und Oberfläche, wovon die Seitenlinie des untern Dreieck  $aL = 6$  Fuß, die Seitenlinie des obern Dreieck  $bL = 2$  Fuß und die Höhe der abgekürzten Pyramide  $hL = 5$  Fuß ist; wie viel beträgt der körperliche Inhalt und die Oberfläche derselben?

Afl. Die Höhe des Seitentrapezes  $= \sqrt{h^2 + \frac{(a-b)^2}{12}}$

$$KW = \frac{h\sqrt{3}}{12} (a^2 + b^2 + ab) \cdot W = 37 \text{ C. - Fuß } 908 \text{ C. - Zoll.}$$

$$fQ = \left[ \frac{(a^2 + b^2)\sqrt{3}}{4} + \frac{3(a+b)}{4} \sqrt{\frac{12h^2 + (a-b)^2}{3}} \right]$$

$$Q = 78 \square \text{Fuß } 126,72 \square \text{Zoll.}$$

77. Aflg. Eine abgekürzte Pyramide habe ein gleichseitiges Dreieck zur Grund- und Oberfläche, wovon die Seitenlinie des untern Dreieck  $aL = 8$  Fuß, die Seitenlinie des obern Dreieck  $bL = 5$  Fuß und die Höhe eines Seitentrapezes  $hL$

= 10 Fuß; wie viel beträgt der körperliche Inhalt und die Oberfläche derselben?

Afl. Die Höhe der abgekürzten Pyramide

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{12h^2 - (a-b)^2}{3}}$$

$$KW = \left( \frac{a^2 + b^2 + ab}{24} \right) \sqrt{12h^2 - (a-b)^2}. W = 185$$

℄ = Fuß 846,72 ℄ = Zoll.

$$fQ = \left( \frac{3}{2}h(a+b) + \frac{a^2 + b^2}{4} \sqrt{3} \right). Q = 233 \square \text{Fuß } 77,32 \square \text{Zoll.}$$

78. Afg. Die Seitenlinie eines regulären Zehnecks sei  $aL = 2$  Fuß, und letzteres die Grundfläche einer senkrechten Pyramide, deren Höhe  $hL = 3$  Fuß beträgt; wie viel beträgt der körperliche Inhalt und die Oberfläche derselben?

$$\text{Afl. } KW = \frac{5a^2h\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{6}. W = 30 \text{ ℄ = Fuß}$$

1340 ℄ = Zoll.

$$fQ = \frac{5a}{2} [a\sqrt{5+2\sqrt{5}} + \sqrt{4h^2 + a^2(5+2\sqrt{5})}]. Q = 73 \square \text{Fuß } 28 \square \text{Zoll.}$$

79. Afg. Die Seite eines regelmäßigen Sechsecks  $aL = 5$  Arschin 11 Werschok der Grundfläche einer senkrechten Pyramide und der Winkel  $\alpha = 62^\circ 15' 33''$ , den die Kante mit der Seite  $aL$  bildet, seien gegeben; man berechne die Oberfläche und den Inhalt der Pyramide.

$$\text{Afl. } KW = \frac{a^3}{4} \sqrt{3(\text{tag}^2\alpha - 3)}. W = 62 \text{ ℄ = Arschin}$$

2026 ℄ = Werschok.

$$fQ = \frac{3}{2} a^2 (\text{tag } \alpha + \sqrt{3}). Q = 176 \square \text{Ar. } 77,1476 \square \text{Werschok.}$$

80. Afg. Die Seite eines regelmäßigen Vierecks  $aL = 10$  Fuß 5 Zoll der Grundfläche einer senkrechten Pyramide und der Winkel  $\alpha = 84^\circ 36' 32''$ , der die Kante mit der Seite  $aL$  bildet, seien gegeben; man berechne den Inhalt und die Oberfläche der Pyramide.

Afl.  $KW = \frac{a^3}{6} \sqrt{\tan^2 \alpha - 1}$ .  $W = 1987 \text{ C.} = \text{Fuß}$   
 $361 \text{ C.} = \text{Zoll.}$

$fQ = a^2(1 + \tan \alpha)$ .  $Q = 1258 \square \text{Fuß } 35 \square \text{Zoll.}$

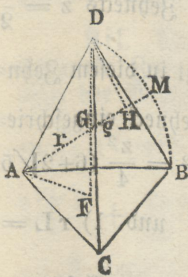
81. Afl. Aus einer abgekürzten Quadratpyramide, welche oben und unten bezüglich die Seiten  $aL = 10 \text{ Fuß } 5 \text{ Zoll}$  und  $bL = 8 \text{ Fuß } 4 \text{ Zoll}$  und zur Höhe  $hL = 6 \text{ Fuß } 3 \text{ Zoll}$  hat, soll der größtmögliche abgestumpfte Kegel gedreht werden; wie groß ist der Abfall?

Afl.  $fW = \frac{1}{3}h(1 - \frac{\pi}{4})(a^2 + ab + b^2)$   $W = 118$   
 $\text{C.} = \text{Fuß } 639 \text{ C.} = \text{Zoll.}$

82. Afl. Aus der Kante  $aL = 3 \text{ Fuß } 4,2 \text{ Zoll}$  eines Tetraeders den Radius ( $r$ ) der umschriebenen und den Radius ( $\rho$ ) der eingeschriebenen Kugel zu berechnen, ferner die Oberfläche und den Inhalt des Tetraeders.

Afl. Fällt man in dem Tetraeder  $DABC$  die Höhe  $DF$  und  $AH$ , welche sich in  $G$  schneiden, so ist  $G$  der Mittelpunkt des Tetraeders, also  $AG = DG = r$ ,  $GH = GF = \rho$ . Schneidet nun die  $AG$  verlängert die umschriebene Kugel in  $M$ , so ist  $AM$  ein Durchmesser der Kugel und daher  $DH^2 = AH \cdot HM$  oder  $DH^2 = (r + \rho)(r - \rho)$ ; also  $\frac{1}{3}a^2 = (r + \rho)(r - \rho)$ . Ferner ist  $DF^2 = DA^2 - AF^2$  oder  $(r + \rho)^2 = a^2 - \frac{1}{3}a^2 = \frac{2}{3}a^2$ , folg-

Fig. 74.



$$\text{lich } r + \rho = a \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{a}{3} \sqrt{6}$$

$$\text{und } r - \rho = \frac{a}{3} \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{a}{6} \sqrt{6}$$

$$r = \frac{a}{4} \sqrt{6} \text{ und } \rho = \frac{a}{12} \sqrt{6}.$$

$rL = 2 \text{ Fuß } 0,6149 \text{ Zoll}$ ;  $\rho L = 8,2045 \text{ Zoll.}$

$fQ = a^2 \sqrt{3}$ .  $Q = 19 \square \text{Fuß } 62,98 \square \text{Zoll.}$

$KW = \frac{a^3}{12} \sqrt{2}$ .  $M = 4 \text{ C.} = \text{Fuß } 743,03 \text{ C.} = \text{Zoll.}$

83. Afl. Aus der Kante  $aL = 5 \text{ Fuß } 4,03 \text{ Zoll}$  eines Tetraeders  $rL$  und  $\rho L$  ferner  $KM$  und  $fQ$  zu berechnen.

Afl.  $rL = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot L = 4 \text{ Fuß } 7,44998 \text{ Zoll}; \rho L = \frac{1}{2} a \cdot L = 2 \text{ Fuß } 8,015 \text{ Zoll.}$

$KW = a^3 W = 151 \text{ C.} \text{-Fuß } 1584,7 \text{ C.} \text{-Zoll}; fQ = 6a^2 \cdot Q = 170 \square \text{Fuß } 119,04 \square \text{Zoll.}$

84. Aflg. Aus der Kante  $aL = 5 \text{ Fuß } 10 \text{ Zoll}$  des Dodekaeders  $rL$  und  $\rho L$ , so wie  $KW$  und  $fQ$  zu berechnen.

Afl.  $rL = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot L = 4 \text{ Fuß } 1,49 \text{ Zoll}; \rho L = \frac{a\sqrt{6}}{6} \cdot L = 2 \text{ Fuß } 4,571 \text{ Zoll.}$

$KW = \frac{a^3\sqrt{2}}{3} \cdot W = 280 \text{ C.} \text{-Fuß } 1162 \text{ C.} \text{-Zoll}; fQ = 2a^2\sqrt{3} \cdot Q = 117 \square \text{Fuß } 125,6 \square \text{Zoll.}$

85. Aflg. Aus der Kante  $aL = 4 \text{ Arschin } 12 \text{ Werschoc}$  eines Dodekaeders  $rL$  und  $\rho L$ , ferner  $KW$  und  $fQ$  zu berechnen.

Afl. Man halbire das Dodekaeder, so bildet die Durchschnittsfigur ein Zehneck und die Seite des Zehnecks  $z = \frac{a}{2}$

$\sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}}$ . Der Mittelpunkt der Kugel liegt in diesem Zehneck und nennt man  $\rho$ , den Radius des im Zehneck eingeschriebenen Kreises, so ist  $r^2 = \rho^2 + \frac{1}{4}a^2$ , da  $\rho^2 = \frac{z^2}{4} (6 + 2\sqrt{5}) = \frac{a^2(3 + \sqrt{5})^2}{16}$ , so ist  $r^2 = \frac{a^2(9 + 3\sqrt{5})}{8}$  und 1)  $rL =$

$\frac{a}{2} \sqrt{\frac{3}{2}(3 + \sqrt{5})} \cdot L = \frac{a}{4} \sqrt{18 + 6\sqrt{5}} \cdot L = 6 \text{ Arschin}$

$10,494 \text{ Werschoc}$ . Nennt man  $r_1$  den Radius des um das Fünfeck beschriebenen Kreises, so ist  $\rho^2 = r^2 - r_1^2 = \frac{a^2(a + 3\sqrt{5})}{8}$

$-\frac{a^2(5 + \sqrt{5})}{10} = \frac{a^2}{4} \left( \frac{25 + 11\sqrt{5}}{10} \right)$  und 2)  $\rho L = \frac{a}{2}$

$\sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{10}} \cdot L = 5 \text{ Arschin } 4,626 \text{ Werschoc}$ .

Die Höhe des Fünfecks sei  $h_f$ , so ist  $h_f^2 = r_f^2 - \frac{1}{4}a^2$   
 $= \frac{a^2}{4} \left( \frac{5 + 2\sqrt{5}}{5} \right)$  und  $h_f = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}}$ , folglich 3)  
 $fQ = \frac{12 \cdot 5 a^2}{4} \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}} \cdot Q = 3 a^2 \sqrt{25 + 10\sqrt{5}}$   
 $\cdot Q = 490 \square \text{Arſchin } 167,7 \square \text{Werſchock.}$

Der Inhalt des Dodekaeders besteht aus 12 congruenten  
 Pyramiden, welche zur Grundfläche das Fünfeck und zur Höhe  
 $\rho$  hat, folglich 4)  $KW = \frac{12 \cdot 5 a^2}{3 \cdot 4} \rho \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}}$   
 $= \frac{12 \cdot 5 a^3}{24} \sqrt{\frac{(5 + 2\sqrt{5})(25 + 11\sqrt{5})}{10 \cdot 5}} = \frac{a^3}{4}$   
 $\sqrt{470 + 210\sqrt{5}} = \frac{a^3}{4} (15 + 7\sqrt{5}) \cdot W = 887 \text{ C.} \text{-Arſchin}$   
 $3339,6 \text{ C.} \text{-Werſchock.}$

86. Aſg. Aus der Kante  $aL = 18 \text{ Fuß } 5 \text{ Zoll}$  eines  
 Ikoeders  $rL$  und  $\rho L$ , ferner  $KW$  und  $fQ$  zu berechnen.

Afl. Man halbire das Ikoeder, ſo iſt die Durchſchnitts-  
 figur ein Zehneck, welches zur Seite  $\frac{1}{2}a$  hat; in dieſer Figur  
 liegt der Mittelpunkt der Kugel und  $r^2 = \rho^2 + \frac{1}{4}a^2$ ,  $\rho^2$   
 $= \frac{a^2}{16} (1 + \sqrt{5})^2 = \frac{a^2}{8} (3 + \sqrt{5})$ , folglich  $r^2 = \frac{3a^2}{8} +$   
 $\frac{a^2\sqrt{5}}{8} + \frac{2a^2}{8} = \frac{a^2}{4} \left( \frac{5 + \sqrt{5}}{2} \right)$  1)  $rL = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}}$   
 $= \frac{a}{4} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} \cdot L = 17 \text{ Fß. } 6,182 \text{ Zoll. } \rho^2 = r^2 - \frac{a^2}{3}$   
 $= \frac{5}{8} a^2 + \frac{a^2}{8} \sqrt{5} - \frac{a^2}{3} = \frac{a^2}{4} \left( \frac{7 + 3\sqrt{5}}{6} \right)$ . 2)  $\rho L =$   
 $\frac{a}{2} \sqrt{\frac{7 + 3\sqrt{5}}{6}} = \frac{a}{12} (3 + \sqrt{5}) \sqrt{3} \cdot L = 8 \text{ Fß. } 1,535 \text{ Z.}$   
 3)  $fQ = 5 a^2 \sqrt{3} \cdot Q = 2937 \square \text{Fuß } 47,5 \square \text{Zoll.}$

Der Inhalt des Ikoeders beſteht aus 20 congruenten  
 Pyramiden, welche zur Grundfläche das Dreieck und zur Höhe

$\rho$  hat. 4)  $KW = \frac{20 a^2 \sqrt{3}}{3 \cdot 4} \rho \cdot W = \frac{5 a^3}{12} \sqrt{14 + 6\sqrt{5}}$   
 $= \frac{5 a^3}{12} (3 + \sqrt{5}) \cdot W = 13627 \text{ C.} \cdot \text{Fu\ss} \ 1154 \text{ C.} \cdot \text{Zoll.}$

87. Aufg. Der Durchmesser eines Cylinders sei  $dL = 15$  Zoll und seine Höhe  $hL = 9$  Fuß 4 Zoll; wie viel beträgt der Inhalt und die Oberfläche desselben?

Auf.  $KW = \frac{d^2 \pi h}{4} \cdot W = 11 \text{ C.} \cdot \text{Fu\ss} \ 783 \text{ C.} \cdot \text{Zoll.}$   
 $fQ = \frac{d\pi}{2} (2h + d) \cdot Q = 39 \square \text{Fu\ss} \ 15 \square \text{Zoll.}$

88. Aufg. Der Umfang eines Cylinders sei  $pL = 2\frac{3}{4}$  Fuß und seine Höhe  $hL = 7$  Fuß; wie viel beträgt der Inhalt und die Oberfläche desselben?

Auf.  $KW = \frac{p^2 h}{4\pi} \cdot W = 3 \text{ C.} \cdot \text{Fu\ss} \ 1657 \text{ C.} \cdot \text{Zoll.}$   
 $fQ = \frac{p}{2\pi} (p + 2\pi h) Q = 19 \square \text{Fu\ss} \ 140 \square \text{Zoll.}$

89. Aufg. Von einem ausgehöhlten Cylinder sei der Durchmesser  $dL = 2\frac{1}{2}$  Fuß, ferner der Durchmesser der Ausböhlung  $\delta L = 1\frac{1}{2}$  Fuß und die Höhe  $hL = 10$  Fuß; wie viel beträgt sein körperlicher Inhalt?

Auf.  $KW = \frac{\pi h}{4} (d^2 - \delta^2) \cdot W = 25 \text{ C.} \cdot \text{Fu\ss} \ 153 \text{ C.} \cdot \text{Z.}$

90. Aufg. Es sei der Durchmesser eines Cylinders  $dL = 5$  Zoll und sein körperlicher Inhalt  $KW = 24$  C. · Zoll gegeben; welche Höhe  $hL$  wird derselben erhalten und wie groß ist die Oberfläche?

Auf.  $hL = \frac{4K}{d^2\pi} L = 1,222 \text{ Zoll.}$   
 $fQ = \frac{1}{2d} (8K + d^3\pi) \cdot Q = 57,4687 \square \text{Zoll.}$

91. Aufg. Wenn drei Cylinder von gleichem Durchmesser  $dL = 3$  Fuß und gleichen Höhen  $hL = 16$  Fuß berührend neben einander liegen; wie viel beträgt der leere Zwischenraum?

Afl.  $KW = \frac{d^2 h (2\sqrt{3} - \pi)}{8}$ .  $W = 5 \text{ E.} = \text{Fuß } 1391$   
 $\text{E.} = \text{Zoll.}$

92. Afl. Die Grundfläche eines cylindrischen Sektors sei ein Kreisabschnitt, dessen Halbmesser  $rL = 3 \text{ Fuß } 2 \text{ Zoll}$ , ferner der Bogen  $n^\circ = 120^\circ$  und die Höhe des Cylinderstückes  $hL = 12 \text{ Fuß}$ ; wie viel beträgt sein körperlicher Inhalt und die Oberfläche?

$$\text{Afl. } KW = \frac{nr^2\pi}{360} \cdot W = 126 \text{ E.} = \text{Fuß } 15 \text{ E.} = \text{Zoll.}$$

$$fQ = \frac{nr\pi}{180} (h+r) + 2rh \cdot Q = 176 \square \text{Fuß } 77,49 \square \text{Zoll.}$$

93. Afl. Ein Abschnitt von einem concentrisch ausgehöhlten Cylinder habe zum äußern Halbmesser  $RL = 4 \text{ Fuß}$ , ferner zum Halbmesser der Aushöhlung  $rL = 2 \text{ Fuß } 5 \text{ Zoll}$  und der Bogen  $n^\circ = 100^\circ$ , die Höhe des Cylinders  $hL = 8 \text{ Fuß}$ ; wie viel beträgt der Inhalt und die Oberfläche dieses Stückes?

$$\text{Afl. } KW = \frac{nh\pi}{180} (R^2 - r^2) \cdot W = 133 \text{ E.} = \text{Fuß}$$

$1306,62 \square \text{Zoll.}$

$$fQ = \frac{n\pi}{180} (R^2 - r^2) + \frac{n\pi}{180} (R+r) h + 2h(R-r) \cdot Q$$

$$= 178 \square \text{Fuß } 37,4 \square \text{Zoll.}$$

94. Afl. An dem ausgehöhlten Cylinderstücke sei die Länge des Bogens  $lL = 4 \text{ Fuß } 8 \text{ Zoll}$ , der Halbmesser desselben  $RL = 6 \text{ Fuß}$ , ferner der Halbmesser des ausgehöhlten Cylinders  $rL = 2 \text{ Fuß}$  und die Höhe desselben  $hL = 12 \text{ Fuß}$ ; wie viel beträgt der Inhalt und die Oberfläche des ausgehöhlten Cylinderstückes?

$$\text{Afl. } KW = \frac{hl}{2R} (R^2 - r^2) \cdot W = 149 \text{ E.} = \text{Fuß } 576$$

$\text{E.} = \text{Zoll.}$

$$fQ = \frac{l}{R} (R^2 - r^2) + h(R+r) + 2h(R-r) \cdot Q = 195$$

$$\square \text{Fuß } 80 \square \text{Zoll.}$$

95. Aufg. Von einem Cylinder-Segment, welches einen Kreisabschnitt zur Grundfläche hat, dessen Sehne  $cL = 4$  Fuß die Länge des Bogens  $lL = 5$  Fuß, die Sagitte  $mL = \frac{3}{2}$  Fuß und die Höhe des Cylinders  $hL = 8$  Fuß, soll der förperliche Inhalt und die Oberfläche gefunden werden.

$$\text{Auf. Radius} = \frac{c^2 + 4m^2}{8m}, \text{ die Ergänzung der Sagitte} \\ = \frac{c^2 - 4m^2}{8m} \cdot KW = h \left[ \frac{l(c^2 + 4m^2) - (c^2 - 4m^2)c}{16m} \right]$$

$$W = 32\frac{1}{3} \text{ C. = Fuß.}$$

$$fQ = \frac{l(c^2 + 4m^2) - (c^2 - 4m^2)c}{8m} + h(c + l) \cdot Q = 80$$

$$\square \text{Fuß } 12 \square \text{Zoll.}$$

96. Aufg. Es soll ein Cylinder von gegebenen Inhalt  $KW = 44$  C.-Arschin 100 C.-Werschok construiert werden, dessen Höhe sich zum Durchmesser der Grundfläche verhält wie  $m:n (4:3)$ . Wie groß ist die Höhe  $hL$  und die Oberfläche des Cylinders?

$$\text{Auf. } hL = \sqrt[3]{\frac{4m^2K}{n^2\pi}} \cdot L = 4 \text{ Arschin } 10,179 \text{ W.}$$

$$fQ = \frac{\pi(n+2m)}{2n} \sqrt[3]{\left(\frac{4nK}{m\pi}\right)^2} \cdot Q = 69 \square \text{Ar. } 162,84 \square \text{W.}$$

97. Aufg. Den Inhalt und die Oberfläche einer Cylinder-röhre zu berechnen, wenn der größere Halbmesser  $RL = 5$  Fuß 4 Zoll, der kleinere  $rL = 3$  Fuß 8 Zoll und die Höhe  $hL = 6$  Fuß gegeben sind.

$$\text{Auf. } KW = h\pi(R+r)(R-r) \cdot W = 282 \text{ C. = Fuß } 1284,4 \text{ C. = Zoll.}$$

$$fQ = 2\pi(R+r)(R-r+h) \cdot Q = 433 \square \text{Fuß } 75,88 \square \text{Zoll.}$$

98. Aufg. Von einer Cylinderröhre ist der Inhalt  $KW = 3$  C.-Arschin 200 C.-Werschok, der größere Radius  $\rho L = 5$  Arschin 9 Werschok und die Höhe  $hL = 8$  Arschin 2 Werschok gegeben; es wird die Dicke und der kleinere Radius derselben gesucht.

$$\text{Auf. } rL = \sqrt{\frac{h\pi\rho^2 - K}{h\pi}} \cdot L = 5 \text{ Ar. } 8,82 \text{ Werschok.}$$

$$xL = \rho - \sqrt{\frac{h\pi\rho^2 - K}{h\pi}} \cdot L = 0,18 \text{ Werschöck.}$$

99. Aufg. Wie groß ist der Durchmesser und die Höhe eines Cylinders, wenn a) sein Inhalt gleich dem einer Kugel, b) seine Oberfläche gleich der einer Kugel mit dem Radius  $rL = 7$  Faden 5 Fuß ist; und wenn sich der Durchmesser zur Höhe verhält wie  $m:n$  ( $3:4\frac{1}{2}$ )?

$$\text{Aufl. a) } dL = 2r \sqrt[3]{\frac{2m}{3n}} \cdot L = 11 \text{ Faden } 5,419 \text{ Fuß.}$$

$$hL = \frac{2nr}{m} \sqrt[3]{\frac{2m}{3n}} \cdot L = 17 \text{ Faden } 4,6 \text{ Fuß.}$$

$$\text{b) } dL = 2r \sqrt{\frac{2m}{m+2n}} \cdot L = 10 \text{ Fad. } 6,356 \text{ Fuß.}$$

$$hL = \frac{2nr}{m} \sqrt{\frac{2m}{m+2n}} \cdot L = 16 \text{ Faden } 2,534 \text{ Fuß.}$$

100. Aufg. Die Oberfläche und den körperlichen Inhalt eines geraden Cylinderauschnittes aus dem Radius  $rL = 8$  Faden 5 Fuß des Grundkreises, der Höhe  $hL = 10$  Faden 6 Fuß des Cylinders und der Sehne des Kreischnittes  $sL = 6$  Faden 4 Fuß zu berechnen.

$$\text{Aufl. } \sin \frac{1}{2}\alpha = \frac{s}{2r}; \quad \angle \alpha = 44^\circ 18' 7,2''.$$

$$fQ = \frac{r\pi\alpha}{180} (h+r)^2 + 2rh \cdot Q = 321 \text{ } \square \text{ Fd. } 4 \text{ } \square \text{ Fß. } 109,44 \text{ } \square \text{ Z.}$$

$$KW = \frac{r^2\pi h\alpha}{360} \cdot W = 318 \text{ C.} \text{ Fd. } 257 \text{ C.} \text{ Fuß } 345,6 \text{ C.} \text{ Zoll.}$$

101. Aufg. Wie viel beträgt der körperliche Inhalt eines gleichseitigen geraden Kegels, wenn dessen Oberfläche  $fQ = 36$   $\square$  Fuß sind?

$$\text{Aufl. } KW = \frac{f}{9} \sqrt{\frac{f}{\pi}} \cdot W = 13 \text{ C.} \text{ Fuß } 934 \text{ C.} \text{ Zoll.}$$

102. Aufg. Der Durchmesser der Grundfläche eines geraden Kegels sei  $dL = 14$  Zoll und die Höhe  $hL = 12$  Fuß 8 Zoll; wie viel beträgt der Inhalt und die Oberfläche desselben?

$$\text{Afl. } KW = \frac{d^2 \pi h}{12} \quad W = 4 \text{ C. Fuß } 887 \text{ C. Zoll.}$$

$$fQ = \frac{d\pi}{4} (d + \sqrt{4h^2 + d^2}) \quad Q = 24 \square \text{ Fuß } 44 \square \text{ Zoll.}$$

103. Aflg. Von der Spitze eines geraden Kegels sollen  $m = \frac{3}{4}$  seines körperlichen Inhaltes parallel mit der Grundfläche abgeschnitten werden, die Höhe des Kegels sei  $hL = 40$  Fuß; in welcher Entfernung muß der Schnitt geschehen?

$$\text{Afl. } xL = h \sqrt[3]{m} \quad L = 36 \text{ Fuß } 3 \text{ Zoll.}$$

104. Aflg. Es soll ein gleichseitiger Kegel gefertigt werden, dessen Inhalt  $KW = 180$  C. Fuß enthalten soll; wie groß ist sein Durchmesser und Mantel?

$$\text{Afl. } dL = 2 \sqrt[3]{\frac{KV^3}{\pi}} \quad L = 9 \text{ Fuß } 3 \text{ Zoll.}$$

$$mQ = 2 \sqrt[3]{3K^2 \pi} \quad Q = 134 \square \text{ Fuß } 97,488 \square \text{ Zoll.}$$

105. Aflg. Der Durchmesser eines geraden Kegels sei  $dL = 3$  Fuß, derselbe soll sich zur Höhe des Kegels wie  $m:n$  ( $2:5$ ) verhalten; wie viel beträgt der körperliche Inhalt und die Oberfläche desselben?

$$\text{Afl. } KW = \frac{n\pi d^3}{12m} \quad W = 17 \text{ C. Fuß } 1159 \text{ C. Zoll.}$$

$$fQ = \frac{d^2 \pi}{4} \left(1 + \frac{1}{m} \sqrt{4n^2 + m^2}\right) \quad Q = 43 \square \text{ Fuß } 15 \square \text{ Zoll.}$$

106. Aflg. An einem abgekürzten geraden Kegel sei der untere Durchmesser  $dL = 8$  Fuß, der obere Durchmesser  $\delta L = 4$  Fuß und die Höhe  $hL = 12$  Fuß; wie viel beträgt der Inhalt und die Oberfläche desselben?

$$\text{Afl. } KW = \frac{\pi h}{12} (d^2 + \delta^2 + d\delta) \quad W = 351 \text{ C. Fuß } 1465 \text{ C. Zoll.}$$

$$fQ = \frac{\pi h}{4} (d^2 + \delta^2 + (d + \delta) \sqrt{(d - \delta)^2 + 4h^2}) \quad Q = 229 \square \text{ Fuß } 4,87 \square \text{ Zoll.}$$

107. Aufg. Wie viel beträgt die Oberfläche und der Inhalt eines geraden abgekürzten Kegels, wenn der große Halbmesser  $\rho L = 4$  Fuß, der kleinere  $rL = 1\frac{1}{2}$  Fuß und die Seitenlinie des abgekürzten Kegels  $sL = 6$  Fuß sei?

$$\text{Auf. } fQ = \pi (\rho^2 + r^2 + s(\rho + r)) Q = 161 \square \text{Fuß} \\ 1 \square \text{Zoll.}$$

$$KW = \frac{\pi}{3} (\rho^2 + r^2 + \rho r) \sqrt{s^2 - (\rho - r)^2}. W = 138 \text{ C.} \text{-Fuß} \\ 684 \text{ C.} \text{-Zoll.}$$

108. Aufg. Der körperliche Raum eines geraden abgekürzten Kegels sei  $KW = 40$  C.-Fuß und in Hinsicht seiner Dimensionen soll sich der kleinere Durchmesser  $\delta$  zum größeren  $d$  und zur Höhe  $h$  wie  $m:n:p$  ( $2:3:5$ ) verhalten; wie lang sind diese Linien?

$$\text{Auf. } dL = n \sqrt[3]{\frac{12K}{\pi p (n^2 + m^2 + mn)}}. L = 3 \\ \text{Fuß } 6 \text{ Zoll.}$$

$$\delta L = m \sqrt[3]{\frac{12K}{\pi p (n^2 + m^2 + mn)}}. L = 2 \text{ Fuß } 4 \text{ Zoll.}$$

$$hL = p \sqrt[3]{\frac{12K}{\pi p (n^2 + m^2 + mn)}}. L = 5 \text{ Fuß } 10 \text{ Zoll.}$$

109. Aufg. Aus dem Umfange der Grundfläche  $pL = 8$  Fuß 5 Zoll und der Seitenlinie  $sL = 7$  Fuß 3 Zoll eines geraden Kegels, den Inhalt und die Oberfläche des Kegels zu berechnen.

$$\text{Auf. } KW = \frac{p^2}{24\pi^2} \sqrt{(2\pi s + p)(2\pi s - p)}. W = \\ 13 \text{ C.} \text{-Fuß } 672,61 \text{ C.} \text{-Zoll.}$$

$$fQ = \frac{p}{4\pi} (\pi s + p) Q = 36 \square \text{Fuß } 21,28 \square \text{Zoll.}$$

110. Aufg. Der körperliche Inhalt und die Oberfläche eines abgekürzten und geraden Kegels sollen gefunden werden, dessen untere Peripherie  $PL = 8$  Fuß, die obere  $pL = 4$  Fuß und die Höhe desselben  $hL = 10$  Fuß ist.

Afl.  $KW = \frac{h}{12\pi} (P^2 + p^2 + Pp) W = 29 \text{ C.} = \text{Fuß}$   
 1226 C. = Zoll.

$$fQ = \frac{P^2 + p^2 + (P + p) \sqrt{(P - p)^2 + 4\pi^2 h^2}}{4\pi} \cdot Q = 66$$

□ Fuß 69 □ Zoll.

111. Aflg. Der untere Durchmesser eines abgekürzten geraden Kegels  $\delta L = 18$  Zoll, der obere Durchmesser  $dL = 12$  Zoll und die Höhe des abgekürzten Kegels  $hL = 24$  Zoll; letzterer soll ausgehöhlt werden, so daß seine obere Dicke  $mL = 2$  Zoll und die untere  $nL = 4$  Zoll beträgt; wie viel beträgt der körperliche Inhalt des ausgehöhlten Kegels?

$$\text{Afl. } KW = \frac{\pi h}{12} [(\delta^2 + d^2 + \delta d) - ((\delta - 2n)^2 + (d - 2m)^2 + (\delta - 2n)(d - 2m))] = 1 \text{ C.} = \text{Fuß } 1036,52 \text{ C.} = \text{Zoll.}$$

112. Aflg. Aus einem abgekürzten geraden Kegel der oben und unten die Halbmesser  $rL = 6$  Fuß 4 Zoll und  $\rho L = 8$  Fuß 6 Zoll und die Höhe  $hL = 20$  Fuß 5 Zoll hat, soll die größtmögliche quadratische abgestumpfte Pyramide gehauen werden; wie groß ist der Abfall?

$$\text{Afl. } KW = \frac{1}{2} h (\pi - 2) (\rho^2 + \rho r + r^2) W = 1291 \text{ C.} = \text{Fuß } 328 \text{ C.} = \text{Zoll.}$$

113. Aflg. Den Mantel und den Inhalt eines abgekürzten geraden Kegels zu berechnen, wenn die Radien  $\rho L = 10$  Fuß 4,3 Zoll,  $rL = 7$  Fuß 8,05 Zoll und der Winkel, den die Seitenlinie mit  $\rho$  bildet  $\alpha = 20^\circ 42' 34,2''$  gegeben sind.

$$\text{Afl. } mQ = \frac{(\rho + r)(\rho - r)\pi}{\cos \alpha} \cdot Q = 162 \text{ □ Fuß. } 105,97 \text{ □ Zoll.}$$

$$KW = \frac{1}{3} \pi (\rho^2 + \rho r + r^2) (\rho - r) \text{ tag. } \alpha \cdot W = 261 \text{ C.} = \text{Fuß } 532,4 \text{ C.} = \text{Zoll.}$$

114. Aflg. Der Durchmesser einer Kugel sei  $dL = 9$  Fuß 4 Zoll; es soll eine Kugel gefertigt werden, deren körperlicher Inhalt  $m(1\frac{1}{2})$  mal so groß ist, welchen Durchmesser wird sie erhalten?

$$\text{Afl. } xL = d \sqrt[3]{m} \cdot L = 10 \text{ Fuß } 7,6 \text{ Zoll.}$$

115. Afg. □ Von drei Kugeln habe die erste zum Durchmesser  $DL = 8$  Zoll, die zweite  $dL = 6$  Zoll und die dritte  $\delta L = 3$  Zoll; es soll eine Kugel gefertigt werden, welche so viel körperlichen Inhalt als obige 3 Kugel hat; welchen Durchmesser wird sie erhalten?

$$\text{Afl. } xL = \sqrt[3]{D^3 + d^3 + \delta^3} \cdot L = 9,1 \text{ Zoll.}$$

116. Afg. □ Eine Kugel habe den körperlichen Inhalt  $KW = 20$  C.-Fuß, dieselbe soll concentrisch ausgehöhlt werden, so daß der Inhalt der Ausbuchtung  $aW = 16$  C.-Fuß beträgt; welche Dike wird die ausgehöhlte Kugel behalten?

$$\text{Afl. } xL = \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{6}{\pi} (\sqrt[3]{K} - \sqrt[3]{a})} \cdot L = 1,4 \text{ Zoll.}$$

117. Afg. □ Man soll 3 Kugeln machen, die sich zu einander verhalten wie  $n : m : p (2 : 5 : 11)$ , und welche zusammen  $KW = 30$  C.-Meilen Inhalt haben; wie groß müssen demnach die Radien dieser 3 Kugeln sein?

$$\text{Afl. } xL = \sqrt[3]{\frac{3Kn}{4\pi(n+m+p)}} \cdot L = 0,92 \text{ Meilen.}$$

$$yL = \sqrt[3]{\frac{3Km}{4\pi(n+m+p)}} \cdot L = 1,25 \text{ Meilen.}$$

$$zL = \sqrt[3]{\frac{3Kp}{4\pi(n+m+p)}} \cdot L = 1,63 \text{ Meilen.}$$

118. Afg. □ Den Inhalt und die Oberfläche einer Kugel aus der Peripherie des größten Kugelkreises  $pL = 25$  Fuß 10,5 Zoll zu berechnen.

$$\text{Afl. } KW = \frac{p^3}{6\pi^2} \cdot W = 292 \text{ C.-Fuß } 938 \text{ C.-Zoll.}$$

$$fQ = \frac{p^2}{\pi} \cdot Q = 213 \text{ □Fuß } 16,3 \text{ □Zoll.}$$

119. Afg. □ Die Oberfläche und den Inhalt eines Kugel-segments zu berechnen, wenn der Radius der Kugel  $rL = 10$

Arſchin 5 Weſchock und die Höhe der Calotte  $hL = 4$  Arſchin 11 Weſchock gegeben ſind.

Afl.  $fQ = (4r - h) h\pi$ .  $Q = 538 \square \text{Ar. } 109 \square \text{W.}$

$KW = \frac{(3r - h) h^2 \pi}{3}$ .  $W = 604 \text{ C.} = \text{Arſchin } 20 \text{ C.} = \text{Wer.}$

120. Aſg. Die Oberfläche und den Inhalt eines Kugelfektors aus dem Radius der Kugel  $rL = 8$  Fuß 4 Zoll und der Hohe der Calotte  $hL = 6$  Fuß 5 Zoll zu berechnen.

Afl.  $fQ = r\pi(2h + \sqrt{2rh - h^2})$   $Q = 548 \square \text{Fu\ss } 36,2 \square \text{Zoll.}$

$KW = \frac{2}{3} \pi r^2 h$   $W = 933 \text{ C.} = \text{Fu\ss } 460 \text{ C.} = \text{Zoll.}$

121. Aſg. Wie groß ist der Radius einer Kugel, a) deren Inhalt gleich dem Inhalte b) deren Oberfläche gleich der Oberfläche eines Parallelepipedums ist von der Länge  $lL = 3$  Faden 4 Fuß, der Breite  $bL = 2$  Faden 5 Fuß und der Hohe  $hL = 5$  Faden 6 Fuß?

Afl. a)  $xL = \sqrt[3]{\frac{3lbh}{4\pi}}$ .  $L = 16,69$  Fuß.

b)  $yL = \sqrt{\frac{lb + lh + bh}{2\pi}}$ .  $L = 19,045$  Fuß.

122. Aſg. Wie groß ist der Radius einer Kugel, a) deren Inhalt gleich dem Inhalte b) deren Oberfläche gleich der Oberfläche eines Cylinders ist von dem Radius des Grundkreiſes  $rL = 4$  Faden 6 Fuß 3,5 Zoll und der Hohe  $hL = 6$  Faden 4 Fuß 2,3 Zoll?

Afl. a)  $xL = \sqrt[3]{\frac{3r^2h}{4}}$ .  $L = 4$  Fad. 6 F. 4,9 Zoll.

b)  $yL = \sqrt{\frac{r(r+h)}{2}}$ .  $L = 5$  Faden 2 Fuß 1,77 Zoll.

## Fragen.

- 1) Was lehrt die Stereometrie?
- 2) Wann nennt man zwei gerade Linien im Raume parallel?
- 3) Wann nennt man eine gerade Linie einer Ebene parallel? wann eine Ebene einer andern?
- 4) Wann nennt man eine Linie senkrecht auf einer Ebene? wann zu ihr geneigt?
- 5) Was versteht man unter der Projektion a) eines Punktes, b) einer geraden Linie?
- 6) Welchen Winkel nennt man den Neigungswinkel a) einer Linie zur Ebene, b) zweier Ebenen?
- 7) Was ist ein Flächenwinkel, wie bezeichnet man ihn? wie entsteht a) ein Nebenflächenwinkel, b) ein rechter Winkel, c) ein Scheitelflächenwinkel?
- 8) Wann nennt man zwei Ebenen senkrecht auf einander? wann zu einander geneigt?
- 9) Was ist ein körperlicher Winkel? wie wird er auch noch genannt? und wie bezeichnet man ihn? Welche Benennungen kommen bei diesem Winkel vor? Welches sind die Seiten und Winkel einer Raumecke, und wie bezeichnet man sie gewöhnlich?
- 10) Wie theilt man die Raumecke ein?
- 11) Welche Ebenen nennt man Diagonalebene — welche Linien Diagonalen eines Polyeders?
- 12) Wie entsteht eine a) Scheitellecke b) eine Polarecke?
- 13) Wie theilt man die dreiseitigen Ecken ein?
- 14) Wann nennt man zwei körperliche Ecken einander symmetrisch — wann congruent?
- 15) Was ist ein Körper? Wie theilt man die Körper ein? Welche Körper nennt man reguläre Polyeder?
- 16) Wie entsteht ein prismatischer Raum? Was ist ein Prisma? welche Benennungen kommen bei einem Prisma vor?

wie theilt man das Prisma ein? Mit welchem Körper werden alle Körper gemessen?

17) Was ist ein Netz?

18) Wie entsteht ein cylindrischer Raum? Was ist ein Cylinder? wie theilt man die Cylinder ein? Welchen Cylinder betrachtet die Elementargeometrie? Welche Benennungen kommen beim Cylinder vor?

19) Wie entsteht eine Pyramide? was ist eine Pyramide? wie theilt man die Pyramiden ein?

20) Wie entsteht eine Kegelfläche? Was ist ein Kegel? was giebt's für Kegel? welche Benennungen kommen beim Kegel vor? Was ist a) ein Kegelabschnitt, b) ein Kegelausschnitt, c) ein Kegelstumpf?

21) Was ist eine Kugel? Welche Punkte, Linien und Ebenen kommen bei einer Kugel vor?

22) Wann nennt man zwei Körper einander gleich — wann congruent — wann ähnlich?

23) Wie heißen die Grundsätze, die in der Stereometrie noch zu den in der Planimetrie gegebenen hinzukommen?

24) Welche Lage kann eine gerade Linie mit einer Ebene haben und welche Lehrsätze lassen sich hierüber aufstellen?

25) Wie viele Linien lassen sich von einem Punkte außerhalb einer Ebene nach derselben ziehen und was wird von diesen behauptet?

26) Wenn eine Linie auf a) zwei anderen b) drei anderen Linien senkrecht steht, so wird was behauptet?

27) Wie heißen die Lehrsätze über den Neigungswinkel einer Linie zur Ebene?

28) Wie heißen die Lehrsätze über die Beziehungen zweier Linien und einer Ebene zu einander?

29) Unter welchen Bedingungen sind 2 Linien im Raume parallel?

30) Wie heißen die Lehrsätze über die Winkel im Raume?

31) Wie zieht man von einem Punkte im Raume eine Linie a) parallel einer gegebenen Geraden b) senkrecht auf eine gegebene Gerade?

32) Wie zieht man von einem Punkte im Raume eine Linie a) senkrecht auf eine Ebene, b) parallel einer Ebene?

33) Wie legt man eine Ebene senkrecht zu einer gegebenen Linie?

34) Wie heißen die Lehrsätze über zwei Ebenen, die einander schneiden?

35) Wie heißen die Lehrsätze über die Flächen- und Neigungswinkel zweier Ebenen? Wodurch werden Flächenwinkel gemessen?

36) Unter welchen Bedingungen steht eine Ebene senkrecht auf einer andern? wie heißt der umgekehrte Lehrsatz?

37) Wie heißen die Lehrsätze über drei einander schneidende Ebenen?

38) Unter welchen Bedingungen sind zwei Ebenen einander parallel? Wie heißen die Lehrsätze über parallele Ebenen?

39) Wie legt man eine Ebene a) senkrecht, b) geneigt unter einem bestimmten Winkel auf eine andere Ebene, c) parallel einer andern Ebene?

40) Wie legt man durch zwei einander nicht schneidende und nicht parallele Linien a) zwei einander parallele Ebenen, b) eine gemeinschaftliche Senkrechte?

41) Wie heißen die Lehrsätze über die a) Scheitecken, b) Polarecken?

42) Wie heißt der Lehrsatz über a) die Seiten eines körperlichen Dreiecks, b) die Kanten einer Ecke, c) die Winkel einer Ecke?

43) Wie heißen die Lehrsätze über eine a) gleichschenklige, b) gleichseitige, c) ungleichseitige Ecke?

44) Wie heißen die Lehrsätze über die a) Congruenz, b) Symmetrie zweier körperlichen Dreiecken?

45) Bestimmen in einem körperlichen Dreiecke zwei Winkel den dritten? warum nicht?

46) Welche Körper nennt man a) ebenflächige, b) gemeinschaftliche, c) krummflächige?

47) Ein  $n$ seitiges Prisma läßt sich in wie viele dreiseitige zerlegen?

- 48) Welche Prismen sind einander gleich?
- 49) Jedes Parallelepipedum wird durch eine Diagonalebene wie getheilt? und was wird von den einander gegenüber liegenden Seiten behauptet?
- 50) Jedes dreiseitige Prisma ist die Hälfte von welchem Parallelepipedum?
- 51) Wie verhalten sich a) rechtwinklige Parallelepipede, b) Prismen zu einander?
- 52) Wie findet man den körperlichen Inhalt eines Prismas?
- 53) Gerade Prismen sind unter welchen Bedingungen einander ähnlich?
- 54) Wie verhalten sich die Inhalte — wie die Oberflächen ähnlicher Prismen zu einander?
- 55) Wie heißen die Lehrsätze über die Seitenkanten einer Pyramide?
- 56) Welche Lehrsätze lassen sich aufstellen, wenn man durch die Kanten a) einer Pyramide, b) einer dreiseitigen Pyramide Ebenen legt?
- 57) Welche Lehrsätze lassen sich aufstellen, wenn eine Pyramide durch eine Ebene parallel der Grundebene geschnitten wird? was für Pyramiden entstehen durch diesen Schnitt? Wie verhalten sich in ähnlichen Pyramiden die Grundebenen zu einander?
- 58) Welche Pyramiden sind einander gleich?
- 59) Jede Pyramide ist der wie vierte Theil von welchem Prisma?
- 60) Wie findet man den körperlichen Inhalt einer Pyramide?
- 61) Wie verhalten sich Pyramiden — wie ähnliche Pyramiden zu einander?
- 62) Wie heißt der Lehrsatz über die Anzahl a) der Neigungswinkel und Kanten b) der Kantenwinkel und Kanten eines Polyheders?
- 63) Wie heißen die Lehrsätze über die Anzahl der Ebenen, Kanten und Ecken eines Polyheders?
- 64) Regulaire Polyeder können nur welche regelmäßige

Figuren zu Seitenebenen haben? Wie groß ist die Anzahl der regulären Polyeder? Regulaire Polyeder können nur wie viele Seitenebenen haben?

65) Wie findet man die Oberfläche eines geraden Prisma?

66) Wie findet man die Seitenoberfläche einer a) regulären Pyramide, b) abgestumpften regulären Pyramide?

67) Wie findet man den körperlichen Inhalt einer abgestumpften Pyramide? wie den eines regulären Polyeders?

68) Welche Lehrsätze lassen sich aufstellen, wenn ein Cylinder von einer Ebene parallel der Grundfläche geschnitten wird?

69) Wie findet man a) den Inhalt, b) die Mantelfläche c) die Oberfläche eines Cylinders? Wie verhalten sich zwei Cylinder zu einander?

70) Wie heißen die Lehrsätze über ähnliche Cylinder?

71) Was wird von den Seitenlinien — was von der der Grundebene parallelen Durchschnittsfigur eines senkrechten Kegels behauptet?

72) Wie findet man den a) Inhalt, b) Mantel eines Kegels?

73) Wann nennt man zwei Kegel einander ähnlich? wie verhalten sie sich zu einander?

74) Wie findet man die Oberfläche und den Inhalt eines a) Cylinderauschnittes, b) Cylinderabschnittes?

75) Wie findet man den Inhalt und den Mantel eines Kegelstumpfes?

76) Welche Lehrsätze lassen sich aufstellen, wenn eine Ebene eine Kugel durchschneidet? welche Benennungen kommen dabei vor?

77) Was wird von den Kugelfreisen behauptet? was von dem Pol eines Kugelfreises?

78) Durch wie viele Punkte im Raume ist eine Kugel genau bestimmt? durch wie viele Punkte auf der Oberfläche einer Kugel a) ein größter, b) ein kleinerer Kugelfreis?

79) Wie heißen die Sätze über die Tangentialebenen?

80) Wie findet man a) die Kugelzone, b) die Oberfläche c) den Inhalt einer Kugel?

81) Wie verhalten sich die Kugeln zu einander? Wie verhalten sich Kugel, Kugel und Cylindervon gleicher Grundfläche und Höhe zu einander?

82) Wie findet man die Oberfläche a) eines Kugelsegments, b) eines Kugelsektors? wie der Inhalt eines a) Kugelsektors, b) Kugelsegments?

Bei **C. J. Karow** in **Dorpat** sind erschienen:

- Döllen, Prof. Alex.**, Der erste Unterricht. Ein Rathgeber für Eltern, die ihre Kinder selbst für die Schule vorbereiten wollen. Preis 1 Rbl. 60 Kop.
- C. Schirren**, Die Capitulationen der livländischen Ritter- und Landschaft und der Stadt Riga von 1710 nebst deren Conformationen. Preis 1 Rbl.
- Carblom, Dr. August**, Zur gegenwärtigen Weltstellung der Kirche und zur Aufgabe der Theologie insbesondere dem Naturalismus gegenüber. 50 Kop.
- Lützens, J.**, Die Stadien der Aufklärung in neuester Zeit. 50 Kop.
- Christiani, Dr. A.**, Predigt im Frauergottesdienste nach dem Ableben Sr. Kaiserl. Hoheit, des Großfürsten Thronfolgers Nicolai Alexandrowitsch am 14. April 1865 in der Universitätskirche zu Dorpat gehalten. 15 Kop.
- Specht, W.**, Die Formenlehre der Geometrie nebst dem Satze des Pythagoras und seinen Stützsätzen. Preis 25 Kop.
- Spalving, J.**, Der practische Kopfrechner, enthaltend Beispiele aus dem Kinderkreise und dem bürgerlichen Leben, mit Berücksichtigung der in den Ostseeprovinzen gebräuchlichen Münzen, Maaße und Gewichte. 2. vielfach veränderte Auflage. Preis geh. 90 Kop.
- , Leitfaden für den geometrischen Anschauungsunterricht nach Lorey's Grundsätzen zusammengestellt. 8. 1863. Geh. 30 Kop.
- , Anhang zum Leitfaden für den geometrischen Anschauungsunterricht. 8. 1864. Geh. 10 Kop.
- Nerling, W.**, Sammlung von Beispielen und Aufgaben aus der Buchstabenrechnung und Algebra. 2. Auflage. 8. 1864. Geh. 60 Kop.
- , Auflösungen der Beispiele und Aufgaben aus der Buchstabenrechnung und Algebra. 2. Auflage. 8. 1864. Geh. 50 Kop.
- , Lehrbuch der ebenen Geometrie, zum Gebrauch bei dem Unterrichte in Gymnasien und höheren Unterrichtsanstalten. 2. Auflage. 8. 1864. Geh. 60 Kop.
- , Lehrbuch der Stereometrie. Geh. 60 Kop.
- Bourquin, C. A.**, Leitfaden für den Unterricht im Rechnen in Elementar- und Kreissschulen. 2. verbesserte und vermehrte Auflage. 8. 1851. Geh. 30 Kop.
- , Aufgaben für den Unterricht im Rechnen in Elementar- und Kreissschulen. 3. Auflage. 8. 1860. Geh. 30 Kop.
- , Antworten zu denselben. Geh. 30 Kop.
- , Arithmetische Denkübungen mit erklärender Auflösung. 8. 1859. Geh. 30 Kop.
- Heinrichsen, J. F.**, Lehrbuch der demonstrativen gemeinen Arithmetik für Schulunterricht und Selbststudium. Nebst Aufgaben dazu und Resultaten. 8. 1855. Geh. 1 Rbl. 20 Kop.
- Paulson, A.**, Lehrbuch der reinen Arithmetik. 1. Theil, die besondere Arithmetik. 8. 1857. Geh. 50 Kop.
- Löwis, A. v.**, Tabellarische Uebersicht der Maaße und Gewichte verschiedener Länder nebst einer Vergleichung derselben mit den früheren Maaßen und Gewichten: dem rigischen Stof, dem rigischen Lof, der revisorischen Lofstelle und dem rigischen Pfunde. Unveränderter Abdruck der Ausgabe vom Jahre 1829. 8. 1859. Geh. 50 Kop.
- Kasulinne Kogi- ja majapidamisje-ramat**, Iedda wälja andmut on Liida Pänd. makete jeadmut J. Esfeld. Preis 1 Rbl. 20 Kop.