TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI TOIMETISED
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ
ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

ALUSTATUD 1893. a. VIHIK 150 ВЫПУСК ОСНОВАНЫ в 1893 г.

MATEMAATIKA- JA MEHHAANIKA-ALASEID TÖID
ТРУДЫ ПО МАТЕМАТИКЕ И МЕХАНИКЕ

IV

TARTU 1964

TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI TOIMETISED
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ
ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ALUSTATUD 1893. a. VIHIK **150** ВЫПУСК ОСНОВАНЫ в 1893 г.

11004

MATEMAATIKA- JA MEHHAANIKA-ALASEID TÖID
ТРУДЫ ПО МАТЕМАТИКЕ И МЕХАНИКЕ

IV

ТАРТУ 1964

К ПЯТИДЕСЯТИЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ проф. Г. КАНГРО

Заведующий кафедрой математического анализа Тартуского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор Гуннар Фромхолдович Кангро родился 21 ноября 1913 года в городе Тарту в семье инженера-строителя.

После окончания Тартуского Реального училища в 1931 году Г. Кангро поступил в Тартуский университет, который он окончил в 1935 году. До Великой Отечественной войны Г. Кангро работал ассистентом в Таллинском Политехническом институте. В 1938 г. ему присуждена ученая степень магистра (кандидата) математических наук за работу [1]. С начала Великой Отечественной войны до января 1942 года он служил в рядах Красной Армии, после чего был направлен стипендиатом Совнаркома ЭССР в Челябинский Институт Механизации Сельского хозяйства (с февраля 1942 по сентябрь 1943) и Московский Государственный университет (с октября 1943 по август 1944). С ноября 1944 года он работает в Тартуском Государственном университете.

Решением Высшей Аттестационной Комиссии в 1946 г. Г. Кангро присуждено ученое звание доцента по кафедре математического анализа, с 1948 года он доктор физико-математических наук, а в 1951 году ему присуждено ученое звание профессора.

В 1961 году Г. Кангро избран членом-корреспондентом Академии наук Эстонской ССР.

Основная научная деятельность Г. Кангро посвящена теории суммируемости расходящихся рядов, где он по праву считается одним из крупнейших специалистов СССР. На эту теорию натолкнула Г. Кангро кандидатская диссертация «О рядах многочленов и возможностях их применения», тема которой предложена его учителем профессором Х. Яаксон. В этой работе рассматривалось аналитическое продолжение функций рядами многочленов. Здесь возникла проблема о применении методов суммирования расходящихся рядов к аналитическому продолжению функций, заданных степенными рядами. Первых значительных результатов в этой области он достиг накануне Великой Отечественной войны и с тех пор теория расходящихся рядов стала его избранным предметом. В сороковых годах внимание Г. Кангро привлек метод суммирования Бореля. Как известно, Ле Руа и Майе в 1900—1903 гг. обобщили понятие суммирования методом Бореля, вводя понятие B_α-суммируемости. Ряд Σu_n называется B_α-суммируемым к сумме U, если

$$U = \int_0^\infty e^{-x} U(x^\alpha)\, dx,$$

где

$$U(t) = \sum \frac{u_n}{\Gamma(n\alpha+1)} t^n.$$

Борель рассматривал случай $\alpha = 1$. Теорию Ле Руа и Майе нельзя считать полной, так как на функцию $U(t)$ ими наложены ограничения, отсутствующие в теории Бореля (т. е. при $\alpha = 1$). Кроме того, доказательства Ле Руа и Майе не строги. В работе [2] Г. Кангро освобождает теорию метода B_α от ограничений этих авторов и приводит строгие доказательства, считая $\alpha \geqslant 0$ произвольным вещественным числом. В работе [3], составляющей вместе с работой [2] докторскую диссертацию Г. Кангро, метод B_α в свою очередь обобщается на метод B_α^λ, где $\alpha > 0$, λ — произвольное вещественное число. Метод B_α^λ получается из метода B_α, если в последнем функцию $U(t)$ заменить на

$$U_\lambda(t) = \sum \frac{u_n}{\Gamma[(n-\lambda)\alpha+1]} t^{n-\lambda}.$$

Метод B_α^λ рассматривал при $\alpha = 1$ и целочисленных значениях λ Санниа.

В работах [2, 3] свойства методов B_α и B_α^λ Г. Кангро исследует всесторонне. Перечислим наиболее важные проблемы из решенных в них: определяется поле B_α^λ-суммируемости, исследуется поле абсолютной B_α^λ-суммируемости, выясняется мощность и включение методов B_α^λ в зависимости от λ, изучаются применения рассматриваемых методов Бореля к степенным рядам (непрерывность суммы, дифференцирование, интегрирование, звезды суммируемости и абсолютной суммируемости, аналитическое продолжение). В результате этого значительно расширилась сфера применения метода Бореля, в частности при решении функциональных уравнений.

В ряде своих работ [2, 3, 5, 9] Г. Кангро много внимания уделяет проблемам умножения рядов по правилу Коши. В основном эти работы посвящены следующим двум проблемам.

Проблема I. Пусть один ряд-сомножитель суммируем некоторым методом A к сумме U, второй — методом B к сумме V. Каким должен быть метод C для того, чтобы ряд-произведение любых таких рядов был C-суммируем к числу UV (или к другому числу)?

Проблема II. Пусть один ряд-сомножитель — произвольный абсолютно сходящийся ряд. Каким условиям должен удовлетворять второй ряд-сомножитель, чтобы их ряд-произведение был суммируем заданным методом C?

Для метода Бореля проблема I решается уже в работе [3].

В статье [9] решается проблема II для метода взвешенных средних Рисса, т. е. для метода Рисса первого порядка (попутно решается для этого метода и проблема абсолютной транслятивности). Тем самым Г. Кангро обобщил на ряды, суммируемые методом Рисса, классические теоремы умножения Коши и Мертенса.

В статьях [7, 9] классические теоремы относительно сходимости, непрерывности, интегрирования и дифференцирования комплексных степенных рядов обобщаются на ряды, суммируемые некоторым нормальным матричным методом. В частности, на суммируемые ряды обобщаются первая и вторая теоремы Абеля о степенных рядах. Из общих теорем выводятся новые результаты для метода Рисса первого порядка, содержащие в частном случае теорему Гарабедяна-Рандельса о включении двух методов Рисса, теорему Хилла о транслятивности метода Рисса и др.

Исключительно большое место в исследованиях Г. Кангро занимает проблема множителей суммируемости. Этой проблеме прямо или косвенно посвящено большинство его исследований.

Найти множители суммируемости в ряде типа (X, Y) означает: дать эффективные необходимые и достаточные условия, которым должна удовлетворять последовательность $\{\varepsilon_n\}$, чтобы для любого ряда Σx_n из класса X ряд $\Sigma \varepsilon_n x_n$ принадлежал классу Y. В этом случае говорят также о множителях суммируемости второго рода. Если последний ряд заменить рядом $\Sigma \varepsilon_n X_n$, где $X_n = \sum\limits_{k=0}^{n} x_k$, то говорят о множителях суммируемости первого рода. Класс X можно при помощи некоторого метода суммирования A образовать из всех A-суммируемых, A-ограниченных или $|A|$-суммируемых рядов, а класс Y — из всех B-суммируемых или $|B|$-суммируемых рядов. В частности, если B означает обыкновенную сходимость, то получаем множители сходимости или абсолютной сходимости. В простейшем случае, если X и Y состоят лишь из сходящихся рядов, мы получаем классический признак сходимости рядов Дедекинда-Адамара, первое обобщение которого на Чезаро-суммируемые ряды дано Х. Бором и Г. Харди в 1907—1909 годах. Следует отметить, что с тех пор теория множителей суммируемости развивается по сей день. Теория множителей суммируемости получила многочисленные применения в теории рядов и вне ее (при нахождении областей сходимости и суммируемости функциональных рядов, при изучении сходимости и суммируемости ортогональных рядов, свойств коэффициентов рядов Фурье, мультипликаторов и др.), она стала одной из центральных проблем теории рядов. Для метода Чезаро (случай $A=C^{\alpha}$, $B=C^{\beta}$) множителями суммируемости занимались и занимаются многие математики в разных странах, вследствие чего под множителями суммируемости долгое время понимали множители суммируемости только для метода Чезаро.

Большой заслугой проф. Г. Кангро является то, что он в 1954 году методом обратного преобразования решил в самом общем виде проблему множителей суммируемости обоих вышеупомянутых родов для метода взвешенных средних Рисса, причем B — любой регулярный метод суммирования [8, 10]. Ценность этих результатов Г. Кангро становится тем более очевидной, если вспомнить, что разработанная Пейеримхоффом и Юркатом методами функционального анализа общая теория нахождения множителей сходимости и некоторых типов множителей суммируемости для методов суммирования, удовлетворяющих теореме о среднем значении, примененная к методам Чезаро и Рисса, давала лишь частичные результаты, которые получаются как частные случаи из теорем Кангро [8, 10].

Наряду с теорией числовых рядов В. Л. Феррар, Н. Обрешков, И. Е. Огиевецкий, Б. З. Вулих, Е. Божоров и др. исследовали вопросы равномерной сходимости и Чезаро-суммируемости функциональных рядов на некотором множестве. Вопросы обыкновенной и равномерной суммируемости, однако, как видно из работ Г. Кангро, можно изучать с единой точки зрения и тем самым развивать теорию суммирования также для других видов суммируемости (суммируемость в среднем и т. д.) функциональных рядов, если рассматривать вопросы суммируемости рядов в произвольном банаховом пространстве, т. е. вопросы суммируемости абстрактных рядов. В 1951—52 гг. Мелвин-Мелвин и Целлер обобщили теорему Кожима-Шура, а в 1956 г. Г. Кангро [12] — теоремы Шура, Хана и Кноппа-Лоренца для линейных преобразований абстрактных последовательностей и рядов; он также [14, 23] установил условия билинейных преобразований абстрактных рядов. Этими теоремами созданы общие основы для постановки в банаховых пространствах ряда классических проблем теории расходящихся рядов и решения их.

Уже в статьях [12, 14, 23] Г. Кангро решает проблему абстрактных множителей суммируемости (ε_n — последовательность непрерывных линейных операторов из банахова пространства X в банахово пространство Y) для метода Чезаро, причем в статье [12] он также получает ряд теорем (обобщения теорем Меарс) относительно умножения абстрактных рядов, суммируемых методом Вороного-Нерлунда (решение проблемы I). В статье [24] совместно с Ф. Вихманном Г. Кангро обобщает на абстрактные ряды свои результаты о множителях суммируемости для метода Рисса первого порядка из статей [8, 10], одновременно упрощая доказательства и условия некоторых теорем.

Далее следует отметить обобщение результатов Ч. Мура. В своей известной монографии 1938 года Мур нашел условия одного типа множителей сходимости числовых рядов только для метода Вороного-Нерлунда, удовлетворяющего некоторым ограничениям (в частности для метода Чезаро). В 1956 году Г. Кангро [17] обобщает метод Мура для произвольного нормального метода суммирования $A = (a_{nk})$, удовлетворяющего условию $\Sigma\, nD_n < \infty$, где $D_n = \sup\limits_k |a_{n+k,\, n+k} a'_{n+k,\, k}|$, $(a'_{nk}) = A^{-1}$. Полученным методом (который по праву следует назвать методом Мура-Кангро) Г. Кангро находит для упомянутого здесь метода суммирования A все основные типы абстрактных множителей сходимости, причем условиям, наложенным на A, удовлетворяет не только метод Вороного-Нерлунда, но также, например, метод Рисса любого порядка α, определяемый в виде преобразования ряда в последовательность матрицей

$$a_{nk} = \left(1 - \frac{P_{k-1}}{P_n}\right)\left(1 - \frac{P_{k-1}}{P_{n+1}}\right) \ldots \left(1 - \frac{P_{k-1}}{P_{n+\alpha}}\right).$$

В докладе [14] Г. Кангро фактически впервые поставил проблему обобщенных множителей суммируемости (рассматриваются ряды $\Sigma\, \varepsilon_n x_n y_n$, где $\Sigma\, y_n$ также суммируем, ограничен или абсолютно суммируем некоторым методом суммирования) и решил ее в банаховых пространствах в общем виде для одного типа обобщенных множителей суммируемости.

В последнее время (Бозанкет, Тайлер) начала развиваться теория множителей суммируемости в последовательности (определения те же, что и в ряде, с заменой всех рядов на последовательности). В статье [25] совместно с М. Тынновым проф. Кангро дал полное решение проблемы множителей суммируемости в последовательности для метода взвешенных средних Рисса, в случае абстрактных рядов. Кроме того, в этой статье показано, что теория Пейеримхоффа-Юрката для множителей суммируемости в ряде вытекает как следствие из теории множителей суммируемости в последовательности. Тем самым в статье [25] дано обобщение теории Пейеримхоффа-Юрката и на абстрактные ряды.

Велики заслуги Г. Кангро и в теории двойных рядов, в частности в решении проблемы множителей суммируемости. В то время, когда теория множителей суммируемости простых рядов интенсивно развивалась, исследования по множителям суммируемости двойных рядов остановились (после появления в 1938 г. монографии Мура) на множителях сходимости. Главная трудность для двойных рядов заключалась, повидимому, в нахождении эффективных необходимых условий для множителей суммируемости. И только благодаря работам Г. Кангро решение проблемы множителей суммируемости для двойных рядов сдвинулось с застоя. В статьях [11, 13, 21] Г. Кангро разработал метод нахождения эффективных необходимых условий для множителей суммируемости двойных рядов. При помощи этих результатов в статьях [11, 13] Г. Кангро находит множители суммируемости первого рода и множители сходимости второго рода для произвольных методов, удовлетворяющих теоремам о среднем значении. Затем в статьях [18, 21] совместно с С. Бароном доказано, что условия Г. Кангро из [11, 13, 21] также достаточны для метода Чезаро целочисленного порядка. Позднее совместно с С. Бароном [28], аналогичная теория развивается для абсолютного суммирования и применяется к факторизируемому методу взвешенных средних Рисса. Результаты статей [11, 13, 21, 28] тем самым обобщают на двойные ряды теорию Пейеримхоффа-Юрката. В статье [13] Г. Кангро обобщает на двойные ряды одну теорему о среднем значении.

В статье [5] основные результаты работ [2, 3] также обобщаются на двойные ряды.

Научные интересы Г. Кангро не ограничиваются только теорией рядов. Проф. Г. Кангро руководил и руководит аспирантами, работающими в области теории алгебр, теории топологических выпуклых пространств, теории тригонометрических рядов, теории приближенных методов функционального анализа и др.

Неоценима педагогическая деятельность проф. Кангро в развитии математики в Советской Эстонии. В связи с назначением Г. Кангро в Тартуский Государственный университет, он стал душой в математической жизни университета. В этот период, когда кадры преподавателей были еще малочисленны, Г. Кангро в течение ряда лет пришлось читать дисциплины весьма различного характера (математический анализ, высшую алгебру, современную алгебру, теорию функций вещественной переменной, интегральные уравнения и др.). В то же время он руководил различными спецсеминарами, направляя молодежь на ту или иную специальность, ибо перед глазами Г. Кангро несомненно стояла структура университета через 10—15 лет с большими кадрами молодых специалистов по многим математическим специальностям. В этой огромной работе выявились его педагогический талант, требовательность к студентам и особенно к себе. Его лекции крайне тщательно подготовлены, стоят на высоком уровне и ведут студентов к современным математическим проблемам. Поэтому, зная ближе личность проф. Кангро, не приходится удивляться, что человек, постоянно работавший над проблемами теории рядов, написал столь ценный двухтомный учебник [4, 6] по высшей алгебре в 1948—50 гг. В 1962 году вышло новое всецело переработанное издание учебника по высшей алгебре [26].

В настоящее время, когда кадры математического отделения университета значительно пополнились новыми специалистами, проф. Кангро уделяет главное внимание преподаванию основной дисциплины кафедры — математического анализа. В ближайшее время выйдет из печати первый том его учебника по математическому анализу [29]. Знакомство с рукописью показывает, что эстонская математическая литература обогатится еще одним его первоклассным произведением.

Особенно выдающимися являются заслуги проф. Кангро в деле подготовки молодых научных кадров. Для этой цели проф. Кангро в течение ряда лет читал разнообразные факультативные и спецкурсы, как например, теорию рядов, тригонометрические ряды, функциональный анализ и руководил рядом спецсеминаров. Его лекции по расходящимся рядам очень объемисты и используют аппарат функционального анализа, что значительно упростило изложение материала. И этим его лекции по теории рядов значительно отличаются от классического изложения и существующих руководств по расходящимся рядам. На лекциях, семинарах и в личных беседах со студентами и аспирантами проф. Кангро часто выдвигал различные новые проблемы и идеи, которые позднее служили для разработки дипломных работ и кандидатских диссертаций. Некоторые из его работ [16, 22] не были им опубликованы, но служили руководством студентам и аспирантам в их научной работе. Удивительна способность проф. Кангро находить в каждом молодом человеке как раз его сильные стороны, чтобы затем направить его к решению таких задач, в которых он может проявить максимум своих способностей. Если еще учесть внимательность Г. Кангро как руководителя и его требовательность к своим ученикам, то становится ясным секрет, почему большинство его аспирантов защищает свои диссертации в срок.

Начиная с 1950 г., проф. Кангро руководил 15 аспирантами, из которых до сих пор защитило диссертации 12. Так как основные научные интересы проф. Кангро направлены к проблемам теории рядов, то по этой специальности он руководил большинством своих учеников-аспирантов (9), которые развили дальше его идеи и дали свой вклад в развитие этой важной, в СССР сравнительно мало исследуемой, области анализа.

Другой важной областью, над которой работали аспиранты проф. Кангро, являются приближенные методы функционального анализа. Его ученики Ю. Каазик, Э. Тамме и др. достигли в этой области значительных успехов. Ими были, например, разработаны основы общей теории итерационных методов в банаховом пространстве. Из работ, сделанных в нашем университете по приближенным методам функционального анализа, выросло направление вычислительной математики в ЭССР, основоположником которого поэтому справедливо считают проф. Кангро. К тому же проф. Кангро — один из первых пропагандистов электронно-вычислительных машин и кибернетики в ЭССР.

Наконец, отметим еще одну важную сторону разнообразной деятельности Г. Кангро: он активный популяризатор науки. Он неоднократно выступал с докладами на научно-педагогических конференциях математиков и физиков ЭССР, общества естествоиспытателей при АН ЭССР и перед самой широкой аудиторией.

Г. Кангро много внимания уделяет реферированию научных работ и учебников для Реферативного журнала по математике и бюллетеня «Новые книги за рубежом».

Партия и правительство высоко оценили многостороннюю деятельность проф. Г. Кангро, наградив его медалью «За доблестный труд в Великой Отечественной войне 1941—1945 гг.» и двумя Почетными Грамотами Президиума Верховного Совета ЭССР.

С. Барон, Э. Юримяэ, Э. Реймерс, Т. Сырмус

Труды проф. Г. Кангро

1. Polünoomide ridadest ja nende rakendusvõimalustest. Диссертация, Тарту, 1938, 68 стр.
2. Verallgemeinerte Theorie der absoluten Summierbarkeit. Уч. зап. Тартуск. ун-та, сер. А, 1942, **37**, 101 стр.
3. B_α-суммирование произвольного порядка и его применение к степенным рядам. Уч. зап. Тартуск. ун-та, Матем. науки, 1946, **3**, 42 стр.
4. Kõrgem algebra, I. Tartu, 1948, 337 lk.
5. Метод суммирования Ле-Руа и его применения. Научн. сессия АН Эст. ССР 1947 г., сер. В. Тарту, 1948, 132—143.
6. Kõrgem algebra, II. Tallinn-Tartu, 1950, 427 lk.
7. О суммировании степенных рядов нормальными линейными методами. Научн. труды, посвященные 150-летию Тартуск. ун-та, 1952, 223—247.
8. Множители суммируемости для метода взвешенных средних арифметических. Докл. АН СССР, 1954, **99**, 9—11.

9. О суммировании бесконечных рядов при помощи матричных методов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1955, **37**, 150—190.
10. О множителях суммируемости. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1955, **37**, 191—232.
11. О распространении метода Пейеримхоффа на двойные ряды. Докл. АН СССР, 1956, **107**, 629—632.
12. О матричных преобразованиях последовательностей в банаховых пространствах. Изв. АН Эст. ССР, сер. техн. и физ.-матем. наук, 1956, **5**, 108—128.
13. О множителях суммируемости для двойных рядов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1957, **46**, 3—42.
14. О линейных и билинейных преобразованиях последовательностей в банаховых пространствах. Успехи матем. наук, 1957, **12**, № 1, 199—201.
15. О развитии математики в Эстонии в 1917—1957 гг. Научная сессия, посвященная 40-ой годовщине Великой Октябрьской Социалистической революции, Тезисы докладов, 1957, 39—40.
16. О некоторых теоремах типа Мерсера для обобщенных матричных методов суммирования (рукопись), 1957, 17 стр.
17. Об обобщении одной теоремы Мура. Докл. АН СССР, 1958, **121**, 967—969.
18. Множители суммируемости для двойных рядов, суммируемых методом Чезаро. Докл. АН СССР, 1959, **124**, 751—753 (совм. с С. Бароном).
19. Matemaatika arengust Tartus aastail 1917—1957. Eesti NSV TA Loodusuurijate Seltsi täppisteaduste sektsiooni esimene konverents, 1959, 5—14.
20. Kaasaegse algebra küsimustest. ENSV matemaatikute ja füüsikute teaduslik-pedagoogilise konverentsi ettekannete teesid, 1959, 13—14 (rotaprint).
21. Множители суммируемости для Чезаро-суммируемых и Чезаро-ограниченных двойных рядов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1959, **73**, 3—49 (совм. с С. Бароном).
22. Об общей теории абстрактных множителей суммируемости (рукопись), 1959, 6 стр.
23. On linear and bilinear transformations of sequences in a Banach space. Amer. Math. Soc. Transl. (2), 1960, **16**, 414—416 (перев. на англ. яз.).
24. Об абстрактных множителях суммируемости для метода взвешенных средних Рисса. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1961, **102**, 209—225 (совм. с Ф. Вихманном).
25. Множители суммируемости в последовательности для метода взвешенных средних Рисса. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1961, **102**, 249—262 (совм. с М. Тынновым).
26. Kõrgem algebra. Tallinn, 1962, 555 lk.
27. Funktsiooni mõiste üldistamisest kaasajal. ENSV matemaatikute ja füüsikute II teaduslik-pedagoogilise konverentsi lühiettekannete kogumik, 1962, 27—32 (rotaprint).
28. Множители суммируемости и абсолютной суммируемости для двойных рядов, абсолютно суммируемых методом взвешенных средних Рисса. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1962, **129**, 155—169 (совм. с С. Бароном).
29. Matemaatiline analüüs I (в печати).
30. Kaasaegse algebra küsimustest. Loodus ja Matemaatika, 1963, **3**, 85—95.

МАТЕМАТИКА В СОВЕТСКОЙ ЭСТОНИИ ЗА ПОСЛЕДНИЕ ДВАДЦАТЬ ЛЕТ

С. Барон, Я. Габович, Ю. Каазик, Ю. Лумисте, А. Руубель, Э. Тамме, Я. Хион

Под редакцией Ю. Лумисте и Э. Тамме

После освобождения Советской Эстонии от немецкой оккупации в 1944 году перед наукой и высшим образованием в республике открылись широкие перспективы. В частности, началось быстрое развитие математических наук. Благодаря неустанной заботе партии и правительства за прошедшие 20 лет выросли новые кадры эстонских математиков, расширилась сеть научных учреждений, достигнуты первые значительные успехи в научной работе. Современные достижения оставляют далеко позади тот скромный уровень, на котором находились математические науки в 1940 году за более чем 20-летний период их развития в условиях буржуазной Эстонии.

Нижеследующие очерки ставят своей целью ознакомить читателя с развитием математики в Эстонской ССР в течение 20 лет после освобождения территории республики от немецко-фашистской оккупации.

В первой части статьи характеризуются изменения в организации математической жизни в республике, показывается рост научных кадров. Вторая часть дает представление о направлениях научной работы эстонских математиков. Третью часть составляет биобиблиография, содержащая список математических работ эстонских ученых за 1944—1963 годы и краткие биографические данные об авторах.

Следует отметить, что в статье остались совершенно незатронутыми вопросы преподавания математики в средней школе. Из работ по применению математики в смежных науках выбраны только те, которые представляют непосредственный интерес с точки зрения самих математических методов.

Первую часть написали и биобиблиографию составили Ю. Лумисте и Э. Тамме. Авторами отдельных разделов второй части являются Я. Хион (алгебра), Ю. Лумисте (аналитическая и дифференциальная геометрия), А. Руубель (начертательная геометрия), С. Барон (теория рядов), Э. Тамме (методы вычислений), Ю. Каазик (кибернетика), Я. Габович (другие направления). Кроме них большую помощь при составлении статьи оказали А. Гаршнек, Э. Коэметс, И. Петерсен, Р. Самел, С. Ульм, Х. Ыйглане, А. Яансон и др., которые любезно предоставили разного рода материалы или содействовали получению отдельных данных. При составлении биобиблиографии принимали личное участие большинство авторов, труды которых вошли в список литературы.

I. ЦЕНТРЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЖИЗНИ В РЕСПУБЛИКЕ

Начало оригинальных математических исследований в Эстонии относится к началу XIX века и связано с основанием в 1802 году Тартуского (б. Дерптского, Юрьевского) университета, одного из старейших университетов Советского Союза. В Тартуском университете работали в прошлом столетии такие видные представители математических наук, как М. Бартельс, Ф. Миндинг, К. Петерсон, Ф. Молин и др. (см. Г. Ряго [2]). Долгое время Тарту был единственным центром математической жизни как для Эстонии, так и для Латвии.

В 1919 году в Тартуском университете было введено преподавание на эстонском языке. К работе приступили первые эстонские профессора математики: Я. Сарв, Х. Яаксон и Г. Ряго, положившие начало коллективу эстонских математиков.

Другой математический центр в Эстонии возник в г. Таллине, где в 1936 году был основан технический институт (в 1938—1940 гг. технический университет) — предшественник Таллинского политехнического института. В Советской Эстонии новые математические центры в Таллине и Тарту возникли в системе Академии Наук ЭССР, основанной в 1946 г., а также в связи с созданием в 1951 году в г. Тарту Эстонской сельскохозяйственной академии. Однако, ведущую роль в математической жизни республики играет попрежнему Тартуский университет, где получили свое образование почти все эстонские математики, и где работают наиболее значительные исследовательские группы.

Ниже приводятся некоторые данные об изменениях в организации указанных математических центров в Эстонской ССР за прошедшие 20 лет, показывается сильный рост научных и преподавательских кадров.

1. Сразу после освобождения г. Тарту от немецко-фашистской оккупации в августе 1944 года передовая эстонская интеллигенция приступила к восстановлению деятельности Тартуского университета. На математическом отделении к работе вернулись профессора Я. Сарв, Х. Яаксон и Г. Ряго.

Первые успехи были достигнуты в 1946 году. Отделение математики состояло тогда из трех кафедр: геометрии (зав. Я. Сарв), математического анализа (зав. Х. Яаксон) и теоретической механики (зав. Г. Ряго), на которых работали 3 профессора, 1 доцент, 2 старших преподавателя и 2 ассистента. В 1946 году был принят первый аспирант (Я. Габович); докторскую диссертацию по теории рядов закончил Г. Кангро. Оба они являются учениками проф. Х. Яаксона.

Начиная с 1950 г., развернулась плодотворная научная деятельность Г. Кангро как руководителя большинства молодых эстонских математиков, создателя первых исследовательских групп. В 1951 г. ему присвоили ученое звание профессора, а в 1952 г. проф. Г. Кангро стал заведующим кафедрой геометрии (вместо доц. А. Руубель, которая заменила на короткое время проф. Я. Сарва, вышедшего на пенсию в 1951 году). Составы математических кафедр стали быстро увеличиваться.

Под руководством или непосредственным влиянием проф. Г. Кангро были написаны первые в Эстонской ССР научные исследования по алгебре (диссертации М. Тамм (1953) и И. Петерсена (1955)). По специальности самого проф. Г. Кангро — теории рядов — защитили кандидатские диссертации его ученики И. Кулль (1958), Э. Реймерс (1958), С. Барон (1959), Э. Юримяэ (1959), С. Гейсберг (1962), Т. Сырмус (1963), Ф. Вихманн (1963), Э. Тийт (1963). Новому направлению — приближенным методам функционального анализа — положили начало своими диссертациями ученики проф. Г. Кангро Л. Выханду (1955), Ю. Каазик (1957) и Э. Тамме (1958). Из них Ю. Каазик был в 1959 году избран заведующим кафедрой геометрии (вместо Г. Кангро, который принял кафедру математического анализа от достигшего почтенного возраста проф. Х. Яаксона). Учениками доц. Ю. Каазика являются С. Ульм, Л. Кивистик и М. Левин, защитившие кандидатские диссертации, соответственно, в 1960, 1961, 1963 годах.

Молодыми эстонскими математиками были использованы также возможности усовершенствования в крупных научных центрах Советского Союза. В 1955 г. окончил аспирантуру при Московском университете Я. Хион и стал руководителем алгебраических исследований в Тарту. В Московском университете усовершенствовался также Ю. Лумисте, который руководит теперь исследованиями тартуских математиков по дифференциальной геометрии.

Важным событием в математической жизни Эстонской ССР было создание в 1959 г. при ТГУ вычислительного центра, оборудованного электронно-вычислительной машиной «Урал-1». В 1963 г. была получена еще вторая, более мощная, машина «Урал-4». В настоящее время исследовательский коллектив вычислительного центра под руководством доц. Ю. Каазика работает над многими практически важными проблемами экономической математики. В тесном контакте с вычислительным центром работают: группа вычислительной математики, руководимая доц. Э. Тамме, группа биоматематики под руководством заведующего лабораторией биофизики ТГУ доц. Л. Выханду, а также доц. И. Кулль, круг интересов которого примыкает к проблемам математической логики.

Развитие указанных выше направлений сделало необходимым учреждение в ТГУ новой кафедры — вычислительной математики, которая и была создана в 1962 году. Ею заведует доц. Ю. Каазик. Кафедра геометрии была переименована в кафедру алгебры и геометрии; ее заведующим был избран доц. Ю. Лумисте.

Кафедрой теоретической механики, члены которой работают в области теории пластичности и по методике математики, заведует с 1958 года проф. Ю. Лепик, защитивший в 1958 г. в Московском университете докторскую диссертацию по теории пластичности.

В 1963 году на четырех кафедрах математического отделения ТГУ работали 3 профессора, 13 доцентов или кандидатов наук, 9 старших преподавателей или ассистентов. В вычислительном центре работало 25 математиков.

2. В 1951 году на базе нескольких факультетов Тартуского университета было основано в г. Тарту новое высшее учебное заведение — Эстонская сельскохозяйственная академия. В 1952 году в ней были созданы кафедра высшей математики (зав. Г. Ряго) и кафедра начертательной геометрии и графики (зав. А. Руубель). В 1955 г. эти кафедры были объединены в кафедру математики.

В 1963 году коллектив математиков в ЭСХА состоял из 2 доцентов (А. Руубель, Я. Габович) и 5 старших преподавателей или ассистентов. Их научные интересы развернулись в области начертательной геометрии, методов вычислений, теории чисел и теории рядов.

3. В Таллинском политехническом институте большой коллектив математиков работает на кафедре математики. Кафедра возобновила свою работу в 1944 году, сразу после освобождения г. Таллина. Первым ее заведующим был проф. А. Хумал. Кафедра, в составе которой в 1944 году работали 12 преподавателей, стала быстро пополнятся новыми кадрами. К концу 1947 г. от нее отделилась кафедра графики (которая с 1960 г. называется кафедрой технического черчения и начертательной геометрии), а затем, в 1953 году, кафедра теоретической механики.

В Таллинском политехническом институте преподавали представители старшего поколения эстонских математиков А. Борквель и К. Ратассепп, а также молодые кандидаты физико-математических наук, нынешние сотрудники Института кибернетики АН ЭССР И. Петерсен, М. Тамм, Л. Айнола.

В 1963 году на кафедре математики ТПИ работали 27 преподавателей, среди них 1 профессор (А. Хумал) и 4 доцента или кандидата наук (А. Сярев, А. Гаршнек, К. Аллик, Ф. Вихманн). Их научная работа развивается под руководством доц. А. Сярева (заведующего кафедрой с 1953 года) в области теории дифференциальных уравнений с частными производными, функционального анализа и прикладных методов. При кафедре имеется аспирантура. Под руководством проф. А. Хумала приобрели степень кандидата наук И. Петерсен (1955), Л. Айнола (1956), К. Аллик (1959) и С. Ульм (1960).

Из членов других кафедр ТПИ математическими исследованиями занимаются О. Рюнк и Н. Палувер (в области аксонометрии), О. Сильде и Б. Тийкма (проблемы теории относительности и единой теории поля).

4. Важным событием в научной жизни республики было создание Академии наук Эстонской ССР в 1946 году. Первым академиком по математике был избран Ю. Нут, который в послевоенные годы завершил свой цикл работ по геометрии Лобачевского и ее применению в теории пространства и времени. В 1951 году академиком АН ЭССР был избран А. Хумал, исследования которого принадлежат разным областям прикладной математики. Членом-корреспондентом АН ЭССР является с 1961 г. профессор Тартуского университета Г. Кангро. Разными математическими проблемами занимаются также некоторые физики АН ЭССР (академик АН ЭССР Х. Керес, ст. научный сотрудник Х. Ыйглане и др.).

В последние годы в Институте кибернетики АН ЭССР, созданном в г. Таллине в 1960 году, возник новый математический центр. В нем в 1963 году работали 25 математиков, среди них 4 кандидата наук (И. Петерсен, М. Тамм, С. Ульм, М. Левин). Вычислительный центр института был в 1961 г. оборудован усовершенствованной электронной вычислительной машиной М-3. Основными направлениями исследовательской работы коллектива вычислительного центра, руководимого заведующим центром И. Петерсеном, являются: разработка методов вычислительной математики (И. Петерсен, С. Ульм, М. Левин), автоматизация конструкторских расчетов, применение статистических методов исследования к оптимизации технологических процессов и развитие методов автоматизации программирования.

В секторе прикладной математики и механики работает группа математической экономики под руководством М. Тамм. Ряд исследований этого сектора по теории упругости (Л. Айнола) и сектора автоматики и телемеханики по проблемам автоматизации программирования металлорежущих станков с программным управлением (Б. Тамм) также связан с развитием математических методов.

В самые последние годы небольшая исследовательская группа молодых математиков, воспитанников Тартуского университета (Э. Тийт, Р. Юргенсон и др.), возникла в рамках Института физики и астрономии АН ЭССР.

II. НАПРАВЛЕНИЯ НАУЧНОЙ РАБОТЫ

Алгебра

Первой крупной алгебраической работой, выполненной в Тартуском университете, является работа Ф. Э. Молина «Ueber Systeme höherer complexer Zahlen» (Math. Ann., 1893, **41**, 83—156). После нее наступает перерыв и алгебраические работы начинают появляться в Тарту только в пятидесятых годах текущего столетия. Возрождение интереса к алгебре в Тартуском Государственном Университете связано с деятельностью Г. Кангро, читавшего в течение ряда лет курс высшей алгебры и опубликовавшего двухтомный учебник по высшей алгебре [4, 6], написанный на высоком научном и педагогическом уровне. Он прочел также некоторые алгебраические специальные курсы, например, курс по современной алгебре весной 1950 г., вызвавший живой интерес у студентов.

Под руководством Г. Кангро работала М. Тамм, в диссертации [1] которой разбирается довольно сложная диссертация Молина и устанавливается, что в ней получен ряд известных в теории алгебр теорем, иногда приписываемых другим авторам. Далее, в диссертации рассматриваются условия ассоциативности некоторых типов нильпотентных алгебр конечного ранга и свойства расширений таких алгебр.

В диссертации И. Петерсена [1, 2] рассматриваются косые произведения групп (группы, разлагающиеся в произведение конечного числа попарно перестановочных подгрупп). Показывается, как косые произведения можно задавать при помощи систем *e*-отображений сомножителей (взаимно однозначные отображения на себя, сохраняющие единицу). Используя эти результаты, автор дает описание всех конечных разрешимых групп с абелевыми силовскими подгруппами при помощи систем целочисленных матриц. Подробнее рассмотрены косые произведения двух сомножителей.

Дальнейшее развитие алгебры в Тартуском университете связано с деятельностью Я. Хиона. Он также был среди слушателей упомянутого выше курса Г. Кангро, но в 1950 г. перешел в Московский университет, где работал под руководством А. Г. Куроша и защитил кандидатскую диссертацию в 1955 г. Работы Я. Хиона посвящены главным образом упорядоченным алгебраическим системам. В работе [1] он исследует архимедовски упорядоченные кольца, не предполагая их ассоциативности и отсутствия делителей нуля. Все такие кольца оказываются подкольцами поля действительных чисел или подгруппами его аддитивной группы с нулевым умножением. В [5] рассмотрены линейно упорядоченные полугруппы с нулем и ослабленным знаком сокращения. Изучение таких полугрупп сводится к исследованию ниль-полугрупп, так называемых целых полугрупп, простых упорядоченных полугрупп и к теории расширений. Работы Я. Хиона [2, 4, 6] посвящены кольцам, нормированным при помощи упорядоченных полугрупп. Используя понятие выпуклого подкольца и выпуклого идеала, можно теорию произвольных нормированных колец свести к рассмотрению нормированных колец трех типов, соответствующих типам упорядоченных полугрупп. Так как все линейно упорядоченные кольца нормируемы, то отсюда вытекает ряд результатов и для упорядоченных колец. В этих работах и в статье [3] рассматриваются также некоторые свойства, которые верны только для упорядоченных колец.

В работах Я. Хиона [7, 10] исследованы частично упорядоченные полугруппы, в которых собственные выпуклые подполугруппы не пересекаются. Оказывается, что все они либо не содержат более двух элементов, либо являются тривиально упорядоченными циклическими группами простого порядка. Работа [9] Я. Хиона дает необходимое и достаточное условие продолжения частичной упорядоченности полугруппы до линейной.

В заметках Е. Габовича [1, 2], ученика Я. Хиона, доказывается, что любая абелева частично упорядоченная группа, лишенная выпуклых подгрупп, изоморфна либо подгруппе аддитивной группы вещественных чисел с ослабленной упорядоченностью, либо циклической группе простого порядка. В работе Е. Габовича [3] дается необходимое и достаточное условие упорядочиваемости Ω-групп и доказываются теоремы о гомоморфизмах и изоморфизмах для Ω-групп, чем обобщаются известные результаты Шимбиревой, а также некоторые результаты Я. Хиона [7]. В статье [6] Е. Габович обобщает свои ранние результаты [1, 2] на коммутативные Ω-группы. Его работы [4, 5] посвящены эндоморфизмам полугрупп. Даются теоремы, сводящие изучение эндоморфизмов прямого произведения и объединения непересекающихся полугрупп к исследованию эндоморфизмов и гомоморфизмов компонент. Найдены также эндоморфизмы некоторых конкретных полугрупп. В статье [8] Е. Габович находит эндоморфизмы некоторых упорядоченных полугрупп, в частности циклических при любом их упорядочении.

У. Кальюлайд, работавший также у Я. Хиона, рассматривает в [1] группы с отношением промежуточности. Им даны необходимые и достаточные условия для введения в группе промежуточности, доказаны теоремы о гомоморфизмах и изоморфизмах и теорема о продолжении промежуточности с нормального делителя на группу.

Отметим еще, что в последнее время вышли учебник проф. Г. Кангро [26] по высшей алгебре, содержащий ряд новшеств, и учебное пособие Я. Хиона [8] по теоретической арифметике.

Аналитическая и дифференциальная геометрия

Традиции применения аналитических методов в геометрии пространства восходят в Тартуском университете еще к первой половине XIX в. и связаны с трудами М. Бартельса, К. Э. Зенфа, Ф. Миндинга и К. Петерсона (см. Ю. Лумисте, [17, 20]). Однако в конце XIX и в первой половине XX века интересы работавших в Тарту геометров (Ф. Шур, Я. Сарв, Ю. Нут и др.) обратились к вопросам обоснования геометрии. Возрождение интереса к аналитической и дифференциальной геометрии происходит только в 40—50 годах текущего столетия.

Немногочисленные работы эстонских математиков по аналитической геометрии трехмерного эвклидова пространства носят в основном научно-методический характер.

Я. Сарв [1, 2], следуя идеям Мёбиуса, исследовал возможности непосредственного применения в обычной аналитической геометрии исчисления аналитических точек, основанного на применении неоднородных декартовых координат. Я. Габович в заметке [4] предлагает отличный от общепринятого прием построения параболы по её общему уравнению. В [11, 13] он дает новое простое доказательство формулы Юнгиуса-Эйлера для вычисления объема V тетраэдра как функции длин ребер и выводит ряд новых формул для V, в которых аргументами являются (наряду с ребрами) медианы, бимедианы или боковые медианы, площади боковых граней и боковые двугранные углы.

Следует отметить также учебник по аналитической геометрии А. Борквеля [1] и учебное пособие А. Гаршнека [4].

К высшей аналитической геометрии относятся исследования академика АН ЭССР Ю. Нута по аналитическому изложению n-мерной геометрии Лобачевского, связанные с применениями этой геометрии в теории пространства и времени (Ю. Нут[1], [1, 5]). Часть результатов его многолетней работы содержатся в монографии [6], выпущенной в 1961 г. (посмертно) Издательством Академии Наук СССР. В ней n-мерная геометрия Лобачевского строится на чисто арифметической основе в пространстве однородных аналитических точек с выделенным абсолютом особой сигнатуры (т. е. в интерпретации Кэли-Клейна). Тщательно разработаны тригонометрия, теория площадей и

---

[1] См. также А. Хумал [6].

объемов, теория кривых второго порядка. Имеется ряд новых частных результатов.

Некоторые вопросы математического характера (интегрирование по ${}^1R_4$, представления группы вращения), примыкающие к проблемам геометрии эвклидовых пространств (и теории представлений групп), разрабатывали в связи с задачами квантовой электродинамики и классификации элементарных частиц Х. Ыйглане [1, 2, 3] и Я. Лыхмус [1].

В дифференциальной геометрии первым значительным исследованием, сделанным в ЭССР после длительного перерыва, является кандидатская диссертация О. Сильде [2]. В ней с помощью метода прямого исчисления векторного и тензорного анализа (являющегося фактически некоторым видоизменением метода внешних дифференциальных форм) выводятся интегральные формулы типа формулы Стокса. Указывается также на возможность их разнообразного применения как в n-мерных эвклидовых или аффинных пространствах, так и в пространстве аффинной связности и в пространстве с асимметрическим метрическим тензором.

Более близка к физическим применениям статья [4] О. Сильде, в которой с помощью понятий римановой геометрии строится новая концепция для изучения гравитационного поля. Аналогичным проблемам, относящимся к центрально-симметрическим полям, посвящены работы его коллеги по Таллинскому политехническому институту Б. Тийкма [1, 2].

Проблемы гравитации были отправным пунктом также в работе Х. Кереса [2], в которой строится абстрактная система аксиом, которая должна служить основой теории, изучающей общие свойства пространства-времени.

Развитие дифференциальной геометрии в Тартуском университете связано с деятельностью Ю. Лумисте. В 1954 г. и 1956/57 уч. г. он усовершенствовался при кафедра дифференциальной геометрии Московского университета и защитил там в 1958 г. кандидатскую диссертацию.

Предметом первых исследований Ю. Лумисте являются многомерные поверхности особого проективного строения — поверхности, обладающие сопряженными или асимптотическими распределениями. Подробное изложение результатов, полученных с помощью метода Картана, содержится в его диссертации [4]. Их проективные основы излагаются в статье [6]. Специально рассматриваются многомерные поверхности в эвклидовых или неэвклидовых пространствах, которые обладают свойствами, обобщающими те или иные свойства минимальных поверхностей трехмерного пространства в [2, 3, 7]. Подробному исследованию минимальных n-мерных поверхностей с $(n-1)$-мерным асимптотическим распределением посвящена статья Ю. Лумисте [5].

Аналогичные исследования метрического характера, относящиеся к главным направлениям многомерной поверхности в эвклидовом пространстве, провел Р. Муллари [1, 2]. В [2] он с новой точки зрения анализирует само понятие главного направления, а в [1] вводит новое понятие абсолютно главного направления и исследует поверхности с соответствующими распределениями.

Основы теории двумерных минимальных поверхностей в многомерных эвклидовых или неэвклидовых пространствах и некоторые специальные результаты об этих поверхностях излагаются в статьях Ю. Лумисте [12—15]. Некоторым из этих результатов дал далеко идущие обобщения Р. Муллари [3], который исследовал возможности погружения пространств постоянной кривизны в эвклидовы пространства в виде поверхностей, допускающих свободные движения в себя (и обобщающих в этом смысле плоскости и сферы обычного пространства).

Ряд результатов о многомерных линейчатых поверхностях эвклидова пространства получили Ю. Лумисте и Л. Туулметс. В статье [9] Ю. Лумисте дал основную теорему и классификацию для линейчатых гиперповерхностей четырехмерного эвклидова пространства по поведению нормали поверхности вдоль прямолинейной образующей и по наличию семейств торсов. Поверхности соответствующих трех классов были впоследствии названы 1) конгруэнциями, 2) демиконгруэнциями и 3) псевдоконгруэнциями (Л. Туулметс [2]).

Конгруэнции, являющиеся одновременно минимальными гиперповерхностями, рассматривали в совместной статье Ю. Лумисте [16] и Л. Туулметс [1]. Оказалось, что минимальность конгруэнции равносильна её изотропности. Минимальные демиконгруэнции описывала Л. Туулметс [2].

Ю. Лумисте [10, 11] обобщил некоторые построения и результаты из своей статьи [9] на случай n-мерных линейчатых поверхностей эвклидова пространства и ввел новые понятия псевдоторса и псевдофокуса (полученные при $n=3$ в том же 1960 г. независимо чешским геометром А. Швецом).

Недавние исследования М. Рахула [3, 4] посвящены некоторым общим вопросам оснований дифференциальной геометрии. В статье [3] он дает анализ основной идеи неголономной геометрии, вводит понятие линейной связи между двумя дифференцируемыми многообразиями и определяет форму кривизны линейной связи. В работе [4] М. Рахула строит последовательность дериваций на аналитическом многообразии, используя идею продолжения в дифференциальной геометрии и идею дифференцирования Ли.

Более ранние работы М. Рахула [1, 2, 5], проведенные в Томском университете, посвящены изучению подвижной связки прямых и плоскостей в трехмерном проективном, аффинном или эвклидовом пространстве, центр которой движется вдоль кривой или по поверхности. Характеристики образуют при этом ряд квадрик, коник и кубик, которые позволяют рассматривать понятия теории поверхностей с новых точек зрения.

Начертательная геометрия

Исследовательская работа по начертательной геометрии развивается в ЭССР в двух центрах.

Первые исследования А. Хумала и написанный под его руководством учебник в трех частях (см. А. Хумал [1, 2, 7]) положили начало возникновению небольшой исследовательской группы в Таллинском политехническом институте, работающей над проблемами центральной аксонометрии, связанными с обобщением теоремы Польке-Шварца. А. Хумал [7], применяя оригинальный способ последовательных графических приближений, показал, что для определения положения центра проектирования относительно картинной плоскости и длины масштабной единицы достаточно задать перспективу масштабного тетраэдра прямоугольной равномасштабной системы координат и след одной координатной плоскости.

О. Рюнк в своей диссертации [4] установил, что перспектива равнобедренного ортогонального масштабного тетраэдра и точка схода одной координатной оси определяют не только положение центра проектирования, но также систему координатных осей в пространстве. В его исследованиях важную роль играет особая циклическая поверхность, названная им «хомутовой поверхностью».

Н. Палувер [3, 7] дал простое аналитическое решение известной проблемы Круппа в центральной аксонометрии. Предложенные им аналитические условия для решения проблемы Круппа равносильны условиям Н. М. Бескина, но проще их.

В своей диссертации [6] Н. Палувер вывел зависимость, которая является аналогом в центральной аксонометрии известной зависимости между коэффициентами искажения в параллельной аксонометрии. Кроме того, им детально исследованы все 9 типов так называемой основной задачи в центральной аксонометрии и даны их аналитические, а в более простых случаях также и графические решения.

А. Хумал [11] исследовал и решил, в частности, тот случай основной задачи в центральной аксонометрии, когда одна координатная ось расположена на картинной плоскости, и дал сравнительно простое аналитическое решение задачи Польке (рассмотренной им также в [12]).

Некоторые возможности практического применения центральной аксонометрии для построения перспектив исследовали О. Рюнк [4, 5, 6] и Н. Палувер [2, 4, 5].

Следует отметить еще их совместный учебник (см. Рюнк [8]) и работу методического характера О. Рюнка [7] об ортогональной проекции угла.

Второй небольшой центр по начертательной геометрии в ЭССР возник в Эстонской сельскохозяйственной академии. Здесь А. Руубель в ряде работ разрабатывает методы обобщенных проекций, рассматривая различные криволинейные проектирования и их применения при решении задач на пересечение. Ею в качестве проектирующих введены (вместо обычно применяемых параллельных и центральных прямых): окружности [4, 5], скрещивающиеся прямые [3, 7], цилиндрические, конические или сферические винтовые линии, спирали Архимеда и др. [8, 9, 11]. Общее аналитическое изучение свойств ряда таких новых видов проекций — так называемых линейных проектирований в криволинейных координатах — проведено в статьях А. Руубель [6, 8, 9, 11]. В них различного рода проектирующие определяются одной и той же системой линейных уравнений в разных системах координах (в декартовой, цилиндрической, сферической) при том или ином расположении координат в уравнениях.

А. Руубель [9, 11, 12] проведены также теоретические исследования комплексных чертежей, состоящих из двух обобщенных проекций разного вида [9, 11] или из двух проекций одного вида, но полученных при различном задании проекторов. Определяется направленная связывающая — линия плоскости комплексного чертежа, которая проходит через одно изображение точки и любую точку, которую можно принять за второе изображение той же точки, и даются уравнения таких связывающих в общем виде [11]. Для тех случаев, когда связывающие оказываются лекальными кривыми, в статьях [4, 5, 7, 9] разработан способ движущихся вспомогательных фигур, позволяющий проще устанавливать связи между этими двумя проекциями точки.

Свои новые методы А. Руубель [4, 7, 9, 11] успешно применяет при решении задач на пересечение. Использование криволинейных проектирований открывает здесь новые возможности. Для пересекающихся поверхностей (например, для геликоида и поверхности вращения) можно выбрать такие обобщенные проектирования, при которых поверхности состоят из проектирующих и поэтому определяются на картинной плоскости двумя линиями. Последние на соответствующем комплексном чертеже и задают линию пересечения поверхностей.

В работах З. Риивес [1, 2] рассматриваются проекционные свойства многогранников, позиционная и метрическая полноты монопроекций многогранников и реконструирование тетраэдра на основании его условного изображения. На примерах показана необходимость применения теории полноты изображений и параметрического метода Н. Ф. Четверухина при анализе и построении сеток многогранников. В частности, исходя из теоремы Польке-Шварца, исследуются области существования замечательных точек тетраэдров (общих и ортоцентрических).

Теория рядов

Основным направлением исследований по математическому анализу в Тартуском университете является разработка на основе методов функционального анализа общей теории суммируемости расходящихся рядов (простых и двойных, числовых, функциональных и вообще абстрактных). Это направление развивается профессором Г. Кангро и под его руководством его учениками. Так как в статье «К пятидесятилетию со дня рождения проф. Г. Кангро» (стр. 3—11 настоящего сборника) уже говорилось о результатах проф. Г. Кангро, то здесь коснемся лишь результатов его учеников, не повторяя объяснения проблем, приведенных в названной статье.

Решение многих проблем теории рядов сводится к применению необходимых и достаточных условий, которым должны удовлетворять разные линейные или билинейные матричные преобразования одних классов последовательностей в другие классы. При этом часто важны и формулы для вычислений пределов преобразованных последовательностей. Для двойных последовательностей такие условия и формулы в ряде случаев нашел И. Кулль [1, 2, 5], для чего он обобщает на двойные последовательности полилинейных непрерывных операторов ряд теорем функционального анализа и, в частности, основную в функциональном анализе теорему Хана-Банаха-Штейнгауза. И. Куллем [1, 2] впервые показано, что все классы последовательностей, называемые классами Челидзе, можно исследовать методами функционального анализа. Все свои и ранее известные результаты для линейных преобразований (кроме $a \to l$) числовых последовательностей И. Кулль [7] обобщает и на абстрактные двойные последовательности.

Большую общность имеют исследования абстрактных матричных преобразований. Методы суммирования, определяемые матрицами, элементы которых — непрерывные линейные операторы из одного банахова пространства в другое, обычно называют обобщенными (абстрактными) матричными методами. Как показал Э. Юримяэ [2, 3], ряд известных для числовых последовательностей свойств полей суммируемости матричных методов, заданных преобразованием последовательности в последовательность, переносятся и на обобщенные матричные методы. Найден [2] общий вид непрерывного линейного функционала в поле суммируемости таких методов.

Препятствием к развитию общей теории обобщенных матричных методов, очевидно, служило отсутствие для них понятия конулевых и корегулярных методов. Эти понятия введены Э. Юримяэ [2], причем даны необходимые и достаточные условия для того, чтобы обобщенный метод был конулевым, а также произведено сравнение конулевых и корегулярных методов. При помощи этих понятий исследованы [3] вопросы совместности обобщенных методов и существования неограниченной последовательности в поле их суммируемости. В статье [3] Э. Юримяэ для довольно широкого класса обобщенных методов суммирования, кроме этих вопросов, более подробно рассматривает также проблемы суммирования ограниченных расходящихся последовательностей и совершенности.

Те же вопросы изучаются Э. Юримяэ [5] для методов Сикорского. Из его результатов, в частности, вытекают условия совместности, совершенности и включения для матричных и полунепрерывных преобразований рядов, интегральных преобразований функций и др.

Как показал Штейнгауз в 1911 году, никакой регулярный матричный метод не может суммировать всех ограниченных последовательностей. Их можно суммировать лишь некоторым множеством регулярных матричных методов. В статье [9] Э. Реймерс ввел новые обобщенные методы суммирования, являющиеся обобщениями матричных методов, дал условия для регулярности их, причем оказалось, что среди регулярных методов суммирования Э. Реймерса существуют и такие, которые суммируют все ограниченные последовательности. Для таких методов даются необходимые и достаточные условия и приводятся соответствующие примеры. Используя свои методы суммирования, Э. Реймерс выводит удобный для применений общий вид непрерывного линейного функционала в пространстве ограниченных последовательностей и дает выражение для нормы этого функционала.

Важным методом решения многих проблем теории рядов является также метод теорем о среднем значении (коротко метод ТСЗ). Для методов Рисса и Чезаро в 1913 г. Рисс и в 1941 г. Бозанкет ввели некоторые неравенства, получившие название ТСЗ. Общую теорию ТСЗ для обычного суммирования создали Юркат и Пейеримхофф в 1951 г., а для абсолютной суммируемости эту теорию создал в 1953 г. Пейеримхофф. С лучшими свойствами новую ТСЗ для абсолютного суммирования под руководством Г. Кангро нашел Э. Реймерс [1]. Теория ТСЗ для двойных рядов создана Э. Реймерсом [2] (в частном случае уже Г. Кангро [13]).

Коснемся результатов в решении проблем I и II умножения рядов (см. настоящий сборник, стр. 5). Как известно, при произвольных методах суммирования общее решение этих проблем приводит к очень сложным условиям, которые уже для ряда классических методов трудно проверять. Поэтому важно выделить такие классы методов суммирования, для которых решение было бы эффективным (т. е. практически легко применимым). Такие классы, как для простых, так и для двойных рядов, удалось выделить Э. Реймерсу [3—5] при помощи ТСЗ. В частности, сюда относятся методы суммирования взвешенных средних Рисса и Вороного-Нерлунда (в частности Чезаро). Проблему I умножения двойных рядов для методов суммирования Вороного-Нерлунда и взвешенных средних Рисса решает также И. Кулль [1, 2] при помощи разработанного им метода билинейных преобразований. Формулировки теорем упрощаются при помощи попутно найденных условий включения методов суммирования. В статье [6] И. Кулль изучает умножение двойных рядов по правилу Дирихле. Некоторые свойства правил умножения исследуются И. Куллем в [1, 2].

Значительные результаты получены учениками Г. Кангро в теории теорем тауберова и мерсерова типов.

Ряд общих теорем тауберова типа для матричных методов суммирования доказал Э. Реймерс [8], получив необходимые и достаточные условия, чтобы суммируемость последовательности одним методом влекла за собой ее суммируемость другим, более слабым.

Лакунарные тауберовы теоремы относительно абсолютного суммирования рассматривал С. Гейсберг. Пусть $A = (a_{nk})$ — метод суммирования Чезаро, Абеля, Эйлера-Кноппа или (интегральный) метод Бореля. С. Гейсберг [1, 2] установил необходимые и достаточные условия для того, чтобы метод $A^{\varphi} = (a_{n\varphi_k})$, где $\{\varphi_k\}$ — некоторая подпоследовательность последовательности натуральных чисел, абсолютно суммировал лишь абсолютно сходящиеся ряды (для случая, когда A — метод Чезаро, достаточные условия нашел ранее Н. Обрешков). Из этих результатов С. Гейсберг [1, 3] выводит, что матрицы A^{φ} методов Чезаро и Эйлера-Кноппа абсолютно суммируют все абсолютно сходящиеся ряды и только их, если они абсолютно суммируют лишь ограниченные последовательности.

Основой исследований С. Гейсберга являются некоторые неравенства (см. [1—4]) между нормами матриц и последовательностей, характеризующие поля ограниченности, суммируемости и абсолютной суммируемости в случае включения. Исходным для этого были неравенства Брудно для включения полей суммируемости ограниченных последовательностей. На основе своих неравенств С. Гейсберг [5] дал для абсолютной суммируемости два аналога теорем Мазура-Орлича. Для этой цели он выделил класс S-совершенных методов, для которых имеют место теоремы: а) методы A и B совместны на множестве рядов с ограниченными частичными суммами, если метод B суммирует (или абсолютно суммирует) все ряды с ограниченными частичными суммами, абсолютно суммируемые методом A; б) если метод абсолютно суммирует лишь ряды с ограниченными частичными суммами, то он не может абсолютно суммировать расходящихся рядов.

К теоремам тауберова типа примыкают теоремы типа Мерсера, которые в их самой общей формулировке характеризуются как теоремы тауберова типа без тауберовых условий.

В теоремах типа Мерсера исследуется, при каких условиях из сходимости последовательности

$$t_n = \alpha s_n + (1-\alpha) \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-1,k}\, s_k$$

или

$$u_n = \alpha s_n + (1-\alpha) \sum_{k=0}^{n} a_{nk} s_k,$$

где $A = (a_{nk})$ — некоторый метод суммирования, следует сходимость последовательности $\{s_n\}$. И. Мерсер в 1907 г. впервые рассматривал такую теорему с последовательностью $\{t_n\}$, где A — метод средних арифметических и $\alpha > 0$. Этот же случай для комплексного α был в 1912 г. рассмотрен еще Г. Харди. Многие же другие математики (Шур, Кнопп, Польняковский, Лезли, Лав и др.) рассматривали теоремы типа Мерсера с последовательностью $\{u_n\}$ для различных методов A. Новые обобщения теоремы Мерсера с последовательностью $\{t_n\}$ получила Т. Сырмус [8] для довольно большого класса нормальных методов A. Отсюда, как показала Т. Сырмус [3, 5], в частности вытекают теоремы типа Мерсера для случая, когда A — метод Хаусдорфа (H, μ_n) с абсолютно монотонной последовательностью $\{\mu_n\}$. При этом теоремы доказаны при самом общем возможном предположении относительно α.

Все свои теоремы типа Мерсера (случаи с $\{t_n\}$), а также большинство теорем типа Мерсера других авторов (случаи с $\{u_n\}$) Т. Сырмус [2, 4—8] распространяет на двойные последовательности, рассматривая не только ограниченную сходимость и сходимость в смысле Прингсхейма, но и стесненную сходимость. Т. Сырмус [5, 8] распространяет на двойные последовательности еще и так называемые обобщенные теоремы типа Мерсера (теоремы Питта и Питергауса, а также теоремы Агнью).

Ряд учеников Г. Ф. Кангро под его руководством работал по проблеме множителей суммируемости, как простых, так и двойных рядов.

Хотя для метода Чезаро к 1956 году были уже разными авторами (Шур, Бозанкет, Чжоу, Пейеримхофф и др.) найдены все основные типы множителей суммируемости, но доказательства соответствующих теорем были очень сложны и сильно отличались друг от друга. Простое доказательство для типов (C^α, C^β) и (C_0^α, C^β) дал в 1949 году К. Кнопп, однако при целом $\alpha \geqslant 0$. Для двойных рядов были известны лишь некоторые типы множителей сходимости. Чтобы возможно было полностью обобщить теорию множителей суммируемости для метода Чезаро на двойные ряды, Г. Кангро поставил задачу разработать более простой и однообразный метод нахождения всех основных типов множителей суммируемости для метода Чезаро при произвольных $\alpha, \beta \geqslant 0$. Эту задачу решил в 1959 году С. Барон [6], отправляясь от работы К. Кноппа и применяя отдельные моменты из статей Чжоу, Бозанкет, Харди и Андерсена. Разработанным методом С. Барон [2—5, 7—9] полностью решает проблему множителей суммируемости двойных рядов, когда A и B — методы Чезаро произвольных неотрицательных порядков. Тем же методом результаты статей [8, 9] обобщаются далее С. Бароном [10, 11], Т. Таммай [1], Э. Паллум [1] и М. Петерсон [1] (в последней статье также упрощается доказательство основной теоремы статьи С. Барона [9]). Множители суммируемости двойных рядов для метода взвешенных средних Рисса находит С. Барон [12, 13], обобщая на двойные ряды теоремы Г. Кангро [8, 10]. При помощи множителей суммируемости С. Барон [2—10, 14] получает некоторые теоремы для рядов Дирихле, факториальных рядов и др.

Важные результаты получены для множителей суммируемости относительно других методов суммирования. Х. Тюрнпу [1] под руководством Г. Кангро нашел все основные типы множителей суммируемости первого рода, когда A — метод Рисса второго порядка и B — произвольный регулярный метод. Для метода Эйлера-Кноппа E_λ Х. Эспенберг [1, 3] нашел все основные типы множителей сходимости в последовательности (для любых ε_n) и множителей суммируемости в последовательности (в случае $A = E_\lambda, B = E_\mu, \varepsilon_n = x^n$). Х. Эспенберг [1] также нашел в случае $\varepsilon_n = x^n$ множители сходимости первого рода типа (E_λ, E). Необходимые условия для множителей суммируемости в последовательности, когда A и B — регулярные методы Хаусдорффа и $\varepsilon_n = x^n$, найдены Х. Эспенбергом в [2].

Для произвольных методов суммирования отметим результаты Ф. Вихманна, относящиеся к двойным рядам. По предложению Г. Кангро, Ф. Вихманн [4, 5, 7] нашел все основные типы множителей суммируемости двойных рядов для случая $A = B$, если A — произвольный факторизируемый метод, удовлетворяющий ТСЗ. Присоединив сюда результаты Г. Кангро [11, 13, 21, 28], получим полное обобщение на двойные ряды теории А. Пейеримхоффа.

Ф. Вихманн [2, 4, 6, 7] под руководством Г. Кангро нашел обобщенные множители суммируемости в ряде обоих типов для методов Рисса и Чезаро (рассматривая двойные ряды $\sum\limits_{m,n} \varepsilon_{mn} x_m y_n$ и $\sum\limits_{m,n} \varepsilon_{mn} X_m Y_n$) и, кроме того, распространил [4, 7] на обобщенные множители суммируемости теорию А. Пейеримхоффа. Для метода Эйлера-Кноппа (который не удовлетворяет ТСЗ) Ф. Вихманн [3] рассматривает случай $\varepsilon_n = x^n$.

Согласно известной теореме Римана областью сумм сходящегося числового ряда с действительными членами является либо единственная точка (для абсолютно сходящегося ряда), либо вся числовая прямая (для условно сходящегося ряда). Эту теорему обобщили Леви и Штейниц для рядов в n-мерном эвклидовом пространстве, Х. Хадвигер — в гильбертовом, а М. И. Кадец — в пространстве L_p. Какие области сумм может иметь ряд в произвольном линейном нормированном пространстве показала Э. Тийт [2, 7].

Другое направление обобщений теоремы Римана возникло при переходе от сходящихся числовых рядов к рядам, суммируемым некоторым заданным методом. В этом направлении известны лишь отдельные работы, например, результаты Мазура и Багемиля-Эрдеша для метода арифметических средних. Э. Тийт [3—5, 7] изучала области сумм рядов, суммируемых мультипликативным методом, т. е. корегулярным с $\lim a_{nk} = 0$. При этом Э. Тийт рассматривает, главным образом, ряды, члены которых сходятся к нулю [5], ограничены или содержат две подпоследовательности постоянных чисел [3, 4]. Для последнего типа рядов даются [3] также достаточные условия, чтобы их областью сумм была числовая прямая, и доказывается [4] существование треугольного мультипликативного метода с наперед заданной областью сумм.

Методы вычислений

Начиная с 1955 года эстонские математики опубликовали ряд исследований по методам вычислений. Во многих из них играет существенную роль применение методов функционального анализа, делающих возможным изучить с единой точки зрения приближенные методы решения как обыкновенных уравнений и их систем, так и интегральных и дифференциальных уравнений. При формировании этого направления имеет важное значение деятельность проф. Г. Кангро, читавшего в течение ряда лет спецкурс по функциональному анализу и являющегося руководителем многих работ.

Большой цикл работ посвящен построению и исследованию итерационных методов (близких к методу Ньютона) решения нелинейного операторного уравнения $P(x)=0$. Отправным пунктом для этих работ является работа Л. В. Канторовича «Функциональный анализ и прикладная математика» (Успехи матем. наук, 1948, **3**, № 6, 89—185), в которой для решения операторных уравнений обобщаются метод наискорейшего спуска и метод Ньютона и исследуется сходимость этих методов.

Одним направлением является создание итерационных алгоритмов, сходящихся быстрее метода Ньютона. Это получается за счет применения производных оператора P высших порядков и соответствующего усложнения формул. В работе С. Ульма [1], проведенной под руководством Ю. Каазика, исследуется сходимость одного итерационного метода, содержащего производные оператора P до третьего порядка. Ю. Каазик в [2] дает теорему сходимости для одного класса итерационных методов, пользующихся производными P до второго порядка. В работах Ю. Каазика [3, 4, 6] строится в некотором смысле общая теория итерационных процессов, содержащих производные P до любого заданного порядка. Некоторые дополнения к этим результатам содержатся в работах Ю. Каазика [7, 8], У. Малкова [1] и А. Йыги [1]. Э. Тамме [5, 6, 8] исследует упомянутые итерационные методы при помощи принципа мажорант, а С. Ульм [2—5] доказывает для них теоремы сходимости другого типа. Л. Выханду [3] дает выражение для приближенной погрешности итерационных методов.

В совместных работах Ю. Каазика [1, 5] и Э. Тамме [1, 4] исследуются итерационные процессы несколько иного характера (процессы с изменяющимся оператором итерирования), составленных из ряда вышеуказанных формул. В статье Э. Тамме [7] и Л. Хейнла [1] эти результаты обобщаются для уравнений, зависящих от параметра. Близкие к упомянутым процессам являются методы, основывающиеся на разложении в степенной ряд обратного или неявного оператора. Условия сходимости последних устанавливает Э. Тамме [2, 3, 5, 8]. Эти результаты применяются также для исследования сходимости метода возмущений при решении задачи о собственных значениях.

Другим направлением создания новых итерационных методов является обобщение градиентных методов. Ю. Лумисте [1] и Л. Кивистик [1] рассматривают обобщение метода наискорейшего спуска для решения нелинейных уравнений. В работах Л. Кивистика [2, 4—7] (последняя совместно с А. Устаалом [1]) содержится глубокое исследование некоторых классов итерационных методов, близких к методу наискорейшего спуска. Эти методы обычно сходятся медленнее метода Ньютона, но зато их применение проще, ибо здесь не надо вычислять обратные операторы. В [3] Л. Кивистик исследует одно обобщение метода Ньютона.

Еще дальше в направлении упрощения итерационного алгоритма пошли И. Петерсен и С. Ульм. Они предлагают алгоритмы для решения уравнения $P(x)=0$, при которых надо вычислить только некоторые значения оператора $P(x)$ (отметим, что градиентные методы используют также значения $P'(x)$). И. Петерсен [7, 9] получает такие алгоритмы, заменяя операторное уравнение операторно-дифференциальным и решая последнее методами типа Рунге-Кутта. С. Ульм [6—10] заменяет в методах типа Ньютона и в градиентных методах производные соответствующими разделенными разностями.

И. Петерсен [8] дает некоторые градиентные методы для нахождения локального условного минимума и исследует их сходимость.

Отметим еще некоторые работы, связанные с решением обыкновенных уравнений. В статьях Ю. Каазика [9], Я. Габовича [9] и Э. Тамме [12] рассматривается один итерационный метод для решения алгебраических уравнений. Л. Выханду [1] предлагает итерационный алгоритм для решения нелинейных систем. Н. Палувер [1] и Л. Выханду [2, 4] предлагают новые итерационные методы разложения многочленов на множители, а Я. Габович [6] дает алгоритм точного нахождения квадратных множителей многочлена с целыми коэффициентами. А. Хумал [9] и К. Аллик [1] рассматривают номографическое решение алгебраических уравнений.

Ряд работ посвящен исследованию приближенных методов решения дифференциальных уравнений. А. Руубель в работе [1] предлагает способ графического интегрирования дифференциальных уравнений первого порядка, а в работе [10] дает оценку погрешности для экстраполяционного метода Адамса. И. Петерсен [5, 6] исследует сходимость некоторых методов интерполяционного типа для решения краевых задач обыкновенных уравнений. Л. Айнола [4] предлагает вариационный метод решения дифференциальных уравнений с частными производными. Г. Вайникко [1, 2] дает априорные оценки погрешности приближенных решений краевых задач, найденных методом Галеркина, и приближенных собственных значений и собственных функций, найденных методом Ритца. В работах Э. Тамме [9] и Р. Юргенсона [1, 2] даются оценки погрешности (применимые главным образом апостериорными) для приближенных решений дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений. В работе [3] Р. Юргенсон выводит довольно общую оценку погрешности для метода конечных разностей при решении краевых задач обыкновенных линейных дифференциальных уравнений.

Х. Яаксон [1] исследует сходимость метода редукции (метода Фурье) решения бесконечных систем. В статьях Э. Тамме [10, 11] содержатся оценки погрешности для приближенных решений линейных уравнений и для приближенных собственных значений и элементов. Более подробно рассматривается применение этих оценок для метода редукции в случае бесконечных систем и для метода моментов в случае интегральных уравнений.

В работах М. Левина [1, 3—11] выводится ряд новых формул для приближенного вычисления одно- и многократных интегралов и исследуется точность этих и других формул.

Отметим еще, что по методам вычислений написаны учебные пособия Л. Выханду [5] и Э. Тамме [13, 14].

Кибернетика

Исследования в области кибернетики начались в Советской Эстонии в 1958 году. Первым направлением являлось изучение проблем автоматического перевода в ТГУ, где под руководством Ю. Каазика выполнялось ряд дипломных работ. Из них получили свое начало работы Ю. Каазика [11, 12, 14], А. Корьюса [1—3], Т. Аккела [1], А. Лауметса [1] и Р. Пальма [3] по переводу с русского языка на эстонский и работы Т. Тобиаса [1—3] по изучению структуры эстонского языка. По общим проблемам составления алгоритмов автоматического перевода работает Р. Пальм [1, 2, 4]. А. Корьюс [4] дает обзор работ по машинному переводу, выполненных в Тартуском университете.

Работы по методам программирования ведутся главным образом работниками вычислительного центра Тартуского университета и Института кибернетики АН ЭССР. Программы для электронной вычислительной машины Урал-1 опубликовали Т. Аккел [4, 5], А. Корьюс [5, 6], М. Крулль [1, 2], А. Лауметс [2], М. Левин [2], С. Лухт [1, 2], а для машины М-3 М. Котли [1—3], В. Куусик [1], В. Полль [1] и Х. Полль [1].

Сравнительно новым направлением является изучение возможностей применения математических методов в экономике. Работы ведутся в трех основных направлениях. И. Куллем [8] и другими исследуются различные методы решения транспортных проблем. Т. Аккел [2, 3] и Ю. Каазик [15, 16] разрабатывают методику вычисления оптимальной структуры посевных площадей. Ю. Каазик [18], Л. Выханду [6], Р. Муллари [4, 5], М. Крулль [3] и др. исследуют применение математики при решении проблем внутризаводского планирования.

Другие направления

Кроме вышеописанных основных направлений работ эстонских математиков имеются отдельные работы по теории чисел, математической логике, топологии, математическому анализу и истории математики.

Теория чисел. В работе О. Сильде [1] дано доказательство формулы Ю. Нута

$$\sum_{\nu=0}^{n-1}(-1)^{\nu}\binom{n-1}{\nu}(n-\nu)^{n}=\frac{(n+1)!}{2},$$

а также рассмотрены некоторые свойства чисел Стирлинга первого рода. Более простое доказательство формулы Ю. Нута и ее обобщения дает Я. Габович [17].

Цепным дробям и их обобщениям посвящены работы Я. Габовича [1, 3, 7, 15]. В первой из них рассматривается видоизмененный алгоритм Якоби, который применяется к решению следующих теоретико-числовых задач: решение линейного диофантова уравнения со многими неизвестными, совместные диофантовы приближения, решение уравнения Пелля третьей степени. В работе [3] дается удобный алгоритм для разложения в обыкновенную цепную дробь любого элемента чисто кубического числового поля. В работе [7] (совм. с А. Н. Хованским) подробно рассматривается связь между цепными дробями и методом матриц; полученные формулы применяются при сжатии цепных дробей и решении некоторых диофантовых уравнений. Наконец, в работе [15] дан эффективный метод вычисления квадратных корней путем их разложения в одночленно-периодические цепные дроби.

Диофантовым уравнениям посвящены работы Х. Яаксона [3] и Я. Габовича [5, 8, 16, 18]. В работе первого автора даны решения в целых числах диофантовых уравнений

$$x^2+xy+y^2=z^3,\quad x^2+xy+y^2=3z^3,\quad x^3-y^3=u^2v,$$

а также доказывается теорема Ферма в случае $n=3$. В работах второго автора для решения целого ряда диофантовых уравнений применяется метод определителей. В работе [5], между прочим, дано полное решение задачи нахождения трех рациональных чисел, сумма которых равна сумме их кубов, а в [16] дано теоретико-числовое доказательство рациональности алгебраической поверхности

$$x^3+y^3+z^3+axyz=1$$

и указан метод ее параметризации. В заметке [18] в положительном смысле решается вопрос, поставленный В. Серпинским: имеет ли диофантово уравнение

$$x^3+y^3+z^3-t^3=1$$

бесчисленное множество решений в натуральных числах?

Математическая логика. И. Кулль [4] дает краткое изложение исчисления высказываний и рассматривает его применение к теории топологических карт и к теории автоматов. А. Таутс [1] доказывает ряд теорем и формул универсальной логики, определяет понятие логического уравнения и дает метод для решения логического уравнения с одним неизвестным. В работе [2] А. Таутс дает универсальный метод для решения логических уравнений, пригодный также для решения систем логических уравнений. Отметим еще обзорный доклад И. Кулля [10], освещающий историческое развитие математической логики, ее методику и ее применения к различным областям математики и многих других наук.

Топология. Работы по топологии связаны с известной проблемой о четырех красках. Надо отметить, что эта задача издавна интересовала эстонских математиков. Уже в период 1920—1940 появляется целый ряд работ Я. Сарва, Ю. Нута и Э. Крана, посвященных этой теме (см. А. Хумал [6]).

Аналитическая теория топологических карт подробно разработана в статье Ю. Нута [2]. Х. Яаксоном [2, 4] поставлена и полностью решена задача о двух красках для нормальных топологических карт (из каждой узловой точки которых исходят три стороны многоугольников). Показана тесная связь между топологическими задачами о двух и четырех красках. Эффективный логический метод нахождения всех решений задачи Яаксона для конкретно заданной топологической карты дан И. Куллем [4].

Математический анализ. Кроме работ по теории суммируемости рядов к математическому анализу относятся следующие статьи. Я. Габович [2] выводит практически удобные формулы для вычисления координат моментов различных порядков плоских и пространственных геометрических фигур. В работе Я. Габовича [12] дана таблица 200 новых определенных интегралов, многие из которых находят применение в механике. С. Барон [1], обобщив на двойные ряды схему Г. С. Салехова, получил ряд новых признаков сходимости двойных рядов. В статье Я. Габовича [10] выводятся три формулы для вычисления сумм арифметико-геометрических прогрессий любого порядка.

Отметим еще учебники А. Борквеля [4, 5] и Г. Ряго [1, 3, 4].

История математики. Статья Г. Ряго [2] подробно освещает научную и педагогическую деятельность четырех выдающихся тартуских математиков прошлого века: М. Бартельса, Ф. Миндинга, Ф. Молина и Г. Колосова. Автор также прослеживает их влияние на дальнейшее развитие математики в Эстонии и вне ее.

Ряд работ по истории математики в Эстонии опубликовал Ю. Лумисте. В статье [8] он раскрывает тесные контакты некоторых тартуских математиков с великим русским ученым Н. И. Лобачевским и его творчеством. В статьях [18, 20] впервые дается краткий обзор жизни и деятельности тартуского математика, физика и астронома К. Э. Зенфа. Заметка Ю. Лумисте [17] показывает основополагающую роль тартуских математиков М. Бартельса, К. Э. Зенфа, Ф. Миндинга и К. Петерсона в развитии дифференциальной геометрии в России в XIX веке. Особый интерес представляет статья Ю. Лумисте [20], в которой установлено, что М. Бартельс за 17 лет до Френе использовал в своих лекциях подвижный трехгранник кривой и формулы, равносильные формулам Френе (которые, следовательно, было бы правильно назвать формулами Бартельса-Френе).

III. БИОБИБЛИОГРАФИЯ

В настоящий указатель вошли научные статьи, учебники и учебные пособия по высшей математике, опубликованные учеными Эстонской ССР в 1944—1963 гг., а также диссертации по математике, защищенные за этот период [2].

Работы, напечатанные на ротапринте, отмечены звездочкой. Двумя звездочками отмечены те работы, для которых имеется резюме на русском языке. Годы присуждения ученых степеней в порядке переаттестации заключены в квадратные скобки.

Айнола Лео Янович, род. 18 июля 1929 в г. Вильянди, окончил Таллинский политехн. ин-т (1953), аспирантуру там же (1956), канд. физ.-матем. наук (1957), в 1956—1961 работал в Таллинском политехн. ин-те, с 1961 работает в Ин-те кибернетики АН Эст. ССР.

1. Вариационные задачи в нелинейной теории упругих оболочек. Диссертация, Таллин, 1957, 80 стр.
   — Автореферат дисс., Таллин, 1957.
2. Вариационные задачи в нелинейной теории упругих оболочек. Прикл. матем. и механ., 1957, **21**, 399—405.
3. О возможностях формулировки вариационной задачи в нелинейной теории упругих оболочек. Тр. Таллинск. политехн. ин-та, сер. А, 1957, **104**, 31 стр.
4. Об одном вариационном методе приближенного решения дифференциальных уравнений с частными производными. Изв. АН Эст. ССР, сер. физ.-матем. и техн. наук, 1962, **11**, 172—177.

Аккел Тыну Ханс-Фридрихович, род. 1 марта 1936 в г. Тарту, окончил Тартуский ун-т (1959), с 1961 аспирант Тартуского ун-та.

1. См. Ю. Каазик [12].
2. Elektronarvutustehnika hõlbustab reservide arvestamist. Sotsialistlik Põllumajandus, 1962, № 1, 7—13 (kaasautorid H. Sarv ja Ü. Kaasik).
3. Эффективный метод планирования сельского хозяйства. Коммунист Эстонии, 1962, № 2, 78—87 (совм. с Ю. Каазиком и Х. Сарвом).
4.* Стандартная программа решения транспортной задачи. Тр. вычисл. центра Тартуск. ун-та, 1962, **2**, 40—55.
5.* Стандартная программа решения общей задачи линейного программирования. Тр. вычисл. центра Тартуск. ун-та, 1962, **2**, 56—64.

Аллик Карл Карлович, род. 9 нояб. 1918 в г. Таллине, окончил Таллинский политехн. ин-т (1951), канд. техн. наук (1959), с 1951 работает в Таллинском политехн. ин-те.

1.** Kompleksse te kordajatega kuupvõrrandi nomograafiline lahendamine. Изв. АН Эст. ССР, сер. техн. и физ.-матем. наук, 1957, **6**, 18—27.
2. О методах математического исследования переходных процессов в асинхронных машинах при параллельной работе с конденсаторной батареей. Тр. Таллинск. политехн. ин-та, сер. А, 1959, **154**, 18 стр.
3. Matemaatilisi meetodeid kondensaatorpatareiga paralleelselt töötava asünkroonmootodi siirdenähtuste uurimiseks. Диссертация, Таллин, 1959, 136 стр.

---

[2] Список научных работ эстонских математиков за 1917—47 годы приведен в работе А. Хумала [6].

3*

Математические методы исследования переходных процессов в асинхронных машинах при параллельной работе с конденсаторной батареей. Автореферат дисс., Таллин, 1959.

Барон Симсон Абрамович, род. 20 апр. 1929 в г. Тарту, окончил Тартуский ун-т (1956), аспирантуру там же (1959), канд. физ.-матем. наук (1959), доцент (1963), с 1960 работает в Тартуском ун-те.

1. Вывод признаков сходимости двойных числовых рядов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1958, **55**, 9—20.
2. О множителях суммируемости для двойных рядов, абсолютно суммируемых методом Чезаро. Научн. докл. высш. школы, физ.-матем. н., 1958, № 5, 19—20.

3—4. См. Г. Кангро [18, 21].

5. Множители суммируемости для двойных рядов. Диссертация, Тарту, 1959, 142 стр.
   — Автореферат дисс., Тарту, 1959.
6. Новые доказательства основных теорем о множителях суммируемости. Изв. АН Эст. ССР, сер. техн. и физ.-матем. наук, 1960, **9**, 47—68.
7. Множители суммируемости для двойных рядов, суммируемых или ограниченных методом Чезаро вещественного порядка. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1961, **102**, 91—117.
8. Множители суммируемости и абсолютной суммируемости для двойных рядов, абсолютно суммируемых методом Чезаро. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1961, **102**, 118—134.
9. Множители абсолютной суммируемости для Чезаро-суммируемых и Чезаро-ограниченных двойных рядов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1961, **102**, 135—155.
10. О множителях суммируемости для метода Чезаро отрицательного порядка. Изв. АН Эст. ССР, сер. физ.-матем. и техн. наук, 1962, **11**, 33—36 (совм. с Т. Таммай).
11. О двух теоремах Чжоу и их обобщениях на двойные ряды. Изв. АН Эст. ССР, сер. физ.-матем. и техн. наук, 1962, **11**, 277—287 (совм. с Э. Паллум и М. Петерсон).
12. См. Г. Кангро [28].
13. Множители суммируемости для двойных рядов, суммируемых или ограниченных методом взвешенных средних Рисса. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1962, **129**, 225—240.
14. Об обобщениях одной теоремы Э. Ландау. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1962, **129**, 357—364.

Борквель Альберт Александрович, род. 19 янв. 1890 в Раквереском р-не Эст. ССР — ум. 14 июля 1963 в г. Таллине, окончил Тартуский ун-т (1920), магистр (1922), канд. физ.-матем. наук [1946], доцент (1936), профессор (1949), в 1936—1952 работал в Таллинском политехн. ин-те и в 1947—1961 в Таллинском пед. ин-те.

1. Analüütiline geomeetria. Tartu, 1949, 573 lk.
2. Arvutuslükati teooria ja käsitsemine. Tallinn, 1950, 136 lk.
   — 2. ümbertöötatud tr. Tallinn, 1956, 159 lk.
   — 3. tr. Tallinn, 1963, 160 lk.
3. Tõenäosusteooria põhijooni. Tallinn, 1958, 132 lk.
4. Matemaatilise analüüsi kursus, I. Tallinn, 1958, 456 lk.
5. Matemaatilise analüüsi kursus, II. Tallinn, 1960, 480 lk.

Вайникко Геннадий Михайлович, род. 31 мая 1938 в г. Гондопога Карельской АССР, окончил Тартуский ун-т (1961), с 1963 работает в Тартуском ун-те.

1. Оценки погрешности метода Галеркина для линейного дифференциального уравнения. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1962, **129**, 394—416.
2. Оценки погрешности метода Ритца для линейного однородного уравнения Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1962, **129**, 417—427.

Вихманн Фредерик Артурович, род. 22 апр. 1935 в г. Пярну, окончил

Тартуский ун-т (1958), аспирантуру там же (1961), канд. физ.-матем. наук (1963), с 1962 работает в Таллинском политехн. ин-те.

1. См. Г. Кангро [24].
2. Об обобщенных множителях суммируемости. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1961, **102**, 226—248.
3. Обобщенные множители сходимости для метода Эйлера-Кноппа, Изв. АН Эст. ССР, сер. физ.-матем. и техн. наук, 1962, **11**, 107—113.
4. Распространение метода Пейеримхоффа на случай обобщенных множителей суммируемости. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1962, **129**, 170—193.
5. Теоремы типа Бора-Харди для двойных рядов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1962, **129**, 194—198.
6. Обобщенные множители суммируемости для метода взвешенных средних Рисса. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1962, **129**, 199—224.
7. Обобщенные множители суммируемости. Диссертация, Тарту, 1963, 114 стр.
   — Автореферат дисс., Таллин, 1963.

Выханду Лео Карлович, род. 2 сент. 1929 в г. Таллине, окончил Тартуский ун-т (1952), аспирантуру там же (1955), канд. физ.-матем. наук (1955), доцент (1963), с 1955 работает в Тартуском ун-те.

1. Обобщение метода Ньютона для решения нелинейных систем уравнений. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1955, **37**, 114—117.
2. Iteratsioonimeetoditest võrrandite lahendamisel. Диссертация, Тарту, 1955, 58 стр.
   Об итерационных методах решения уравнений. Автореферат дисс., Тарту, 1955.
3. Об одной возможности оценки погрешности итерационных методов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1959, **73**, 139—145.
4. О разложении многочленов на множители. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1959, **73**, 146—156.

5.* Arvutusmeetodid, I. Tartu, 1961, 147 lk.
   — 2. tr. Tartu, 1962, 147 lk.

6. О применении математических методов при внутризаводском планировании. Коммунист Эстонии, 1962, № 7, 44—51 (совм. с Р. Муллари).
7. О некоторых возможностях количественной характеристики комплекса QRS. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1963, **134**, 48—49 (совм. с М. Лутс).
8. Matemaatilise uurimismeetodi rakendusvõimalustest bioloogias. Loodus ja Matemaatika, 1963, **3**, 96—100.

Габович Евгений Яковлевич, род. 30 авг. 1938 в г. Тарту, окончил Тартуский ун-т (1962), с 1963 аспирант Московского ун-та.

1. Частично упорядоченные группы и кольца, лишенные нетривиальных выпуклых подгрупп. Успехи матем. наук, 1961, **16**, № 2, 238.
2. Частично упорядоченные группы, лишенные нетривиальных выпуклых подгрупп. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1961, **102**, 289—293.
3. Частично упорядоченные Ω-группы. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1961, **102**, 294—300.
4. Об эндоморфизмах полугрупп. Успехи матем. наук, 1962, **17**, № 6, 210.
5. Об эндоморфизмах полугрупп. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1962, **129**, 3—18.
6. Об архимедовски упорядоченных Ω-группах. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1962, **129**, 19—22.

7.* Tartu algebraistide tööd järjestatud algebraliste süsteemide alal. Tead. konv. «Kaasaegne matem. ja tema rakendusalad». Tartu, 1963, 51—56.

8. Эндоморфизмы некоторых упорядоченных полугрупп. Литовск. матем. сб., 1963, **3**, № 2, 69—76.

Габович Яков Абрамович, род. 30 авг. 1914 в г. Тарту, окончил Тартуский ун-т (1945), аспирантуру там же (1949), канд. физ.-матем. наук (1950), доцент (1960), в 1950—1952 работал в Тартуском ун-те, с 1952 работает в Эст. с.-х. академии.

1. Периодические «непрерывные дроби» высших иррациональностей. Диссертация, Тарту, 1950, 82 стр.

2. О вычислении некоторых механических величин. Сб. научн. тр. Эст. с.-х. акад., 1959, **11**, 159—170.
3. О разложении в непрерывную дробь некоторых кубических иррациональностей. Сб. научн. тр. Эст. с.-х. акад., 1959, **11**, 171—177.
4. О построении параболы. Сб. научн. тр. Эст. с.-х. акад., 1959, **11**, 178—183.
5.** Ühest üldisest meetodist diofantiliste võrrandite lahendamiseks. Loodus ja Matemaatika, 1959, **1**, 123—133.
6.** Polünoomi ratsionaalsete ruuttegurite leidmisest. Loodus ja Matemaatika, 1960, **2**, 114—123.
7. О связи между методом матриц и цепными дробями. Сб. научн. тр. Эст. с.-х. акад., 1961, **22**, 119—139 (совм. с А. Н. Хованским).
8. Решение диофантовых уравнений методом определителей. Сб. научн. тр. Эст. с.-х. акад., 1961, **22**, 140—165.
9. О приближенном решении алгебраических уравнений. Сб. научн. тр. Эст. с.-х. акад., 1963, **25**, 118—125 (совм. с Э. Тамме).
10. О суммировании арифметико-геометрических рядов. Сб. научн. тр. Эст. с.-х. акад., 1963, **25**, 126—135.
11. Объем тетраэдра как функция некоторых его элементов. Сб. научн. тр. Эст. с.-х. акад., 1963, **25**, 136—146.
12. Таблица некоторых новых определенных интегралов. Сб. научн. тр. Эст. с.-х. акад., 1963, **25**, 147—170.
13. О вычислении объема тетраэдра. Математика в школе, 1963, № 6, 58.
14. О степени алгебраического числа. Сб. научн. тр. Эст. с.-х. акад., 1963, **31**, 82—87.
15. О вычислении квадратных корней с помощью одночленно-периодических цепных дробей. Сб. научн. тр. Эст. с.-х. акад., 1963, **31**, 88—96.
16. Об одном кубическом диофантовом уравнении. Сб. научн. тр. Эст. с.-х. акад., 1963, **31**, 97—103.
17. Об одной задаче Ю. Нута и ее обобщениях. Сб. научн. тр. Эст. с.-х. акад., 1963, **31**, 104—110.
18. O rozwiazaniach równania $x^3 + y^3 + z^3 - t^3 = 1$ w liczbach naturalnych. Wiadomości Matematyczne, 1963, **7**, 63—64.

Гаршнек Александр Александрович, род. 19 апр. 1911 в Печорском р-не Псковской области РСФСР, окончил Тартуский ун-т (1936), магистр (1939), канд. физ.-матем. наук [1949], доцент (1951), с 1940 работает в Таллинском политехн. ин-те.

1.—3. См. А. Хумал [1, 2, 7].
4.* Аналитическая геометрия в векторным изложении. Таллин, 1963, 107 стр.

Гейсберг Самуил Пейсахович, род. 20 мая 1936 в г. Ленинграде, окончил Тартуский ун-т (1957), аспирантуру там же (1960), канд. физ.-матем. наук (1962), с 1960 года работает в Ленинградском инженерно-экономическом ин-те.

1. О некоторых свойствах методов суммирования. Докл. АН СССР, 1961, **137**, 265—267.
2. Лакунарные тауберовы теоремы для абсолютного суммирования. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1961, **102**, 52—77.
3. О некоторых свойствах матричных преобразований. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1961, **102**, 78—90.
4. Включение ограниченных полей суммирования. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1962, **129**, 283—296.
5. Аналоги теорем Мазура-Орлича для абсолютного суммирования. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1962, **129**, 297—307.
6. О включении методов суммирования. Диссертация, Тарту, 1962, 125 стр. — Автореферат дисс., Ленинград, 1962.

Драгилев Анатолий Владимирович, род. 13 нояб. 1923 в г. Москве, окончил Московский ун-т (1948), с 1961 работает в Тартуском ун-те.

1. Периодические решения дифференциального уравнения нелинейных колебаний. Прикл. матем. и механ. 1952, **16**, № 1, 85—88.

2. Периодические решения уравнения типа Рэлея. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1962, **102**, 453—459.

Йыги Аксел Рудольф-Вольдемарович, род. 23 марта 1934 в Йыгеваском р-не Эст. ССР, окончил Тартуский ун-т (1958), аспирантуру там же (1961), с 1961 работает в Таллинском политехн. ин-те.

1. См. Ю. Каазик [8].

Каазик Юло Янович, род. 9 нояб. 1926 в г. Таллине, окончил Тартуский ун-т (1953), канд. физ.-матем. наук (1957), доцент (1959), с 1953 работает в Тартуском ун-те.

1. Об одном методе приближенного решения функциональных уравнений. Докл. АН СССР, 1955, **101**, 981—984 (совм. с Э. Тамме).
2. Об одном классе итерационных процессов для приближенного решения операторных уравнений. Докл. АН СССР, 1957, **112**, 579—582.
3. О приближенном решении нелинейных операторных уравнений итеративными методами. Успехи матем. наук, 1957, **12**, № 1, 195—199.
4. Iteratsioonimeetoditest Banachi ruumis. Диссертация, Тарту, 1956, 53 стр Об итерационных методах в пространстве Банаха. Автореферат дисс., Тарту, 1957.
5. Об одном методе приближенного решения нелинейных операторных уравнений. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1958, **62**, 99—116 (совм. с Э. Тамме).
6. О сходимости итерационных методов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1958, **62**, 80—98.
7. Об общем виде некоторых итеративных методов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1959, **73**, 119—129 (совм. с У. Малковым).
8. Сходимость итеративных методов в случае неаналитического оператора. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1959, **73**, 130—133 (совм. с А. Йыги).

9.** Algebraliste võrrandite ligikaudsest lahendamisest. Loodus ja Matemaatika, 1959, **1**, 134—141.

10.* Funktsionaalanalüüs. Tartu, 1959, 147 lk.

11. Automaatsest tõlkimisest. Keel ja Kirjandus, 1959, 663—673 (kaasautor A. Korjus).

12.** Matemaatilise teksti automaatsest tõlkimisest vene keelest eesti keelde. Loodus ja Matemaatika, 1960, **2**, 102—113 (kaasautorid T. Akkel, A. Korjus, A. Laumets).

13. Elektron-arvutusmasinad. Tallinn, 1960, 196 lk. (kaasautorid H. Salum ja M. Sinisoo).

14. Automaatse tõlkimise keeleteaduslikke küsimusi. Keel ja Kirjandus, 1960, 545—555 (kaasautor A. Korjus).

15—16. См. Т. Аккел [2, 3].

17.* Kompleksmuutuja funktsioonide teooria. Tartu, 1962, 182 lk.

18. О планировании работы механических цехов. Научн. тр. Моск. инж.-экон. ин-та, 1962, **19**, 186—191 (совм. с Р. Муллари).

19. Küberneetika põhisuundadest. Tallinn, 1963, 36 lk. (kaasautor A. Oja).

Кальюлайд Уно Эльмарович, род. 22 авг. 1941 в Вильяндиском р-не Эст. ССР, с 1959 студент Тартуского ун-та.

1. О группах с отношением промежуточности. Успехи матем. наук, 1962, **17**, № 6, 226.

Кангро Гуннар Фромхолдович (см. настоящий сборник, стр. 3—11).

Керес Харальд Петрович, род. 15 нояб. 1912 в г. Пярну, окончил Тартуский ун-т (1936), магистр (1938), д-р физ.-матем. наук (1949), профессор (1954), академик АН Эст. ССР (1961), в 1936—1960 работал в Тартуском ун-те, с 1947 работает в Ин-те физики и астрон. АН Эст. ССР.

1. Верхняя и нижняя «интегральные кривые» в общем поле направлений и их применение к доказательству теоремы Пеано. Уч. зап. Тартуск. ун-та Матем. науки, 1950, **6**, 32 стр.
2. Система аксиом геометрии пространства и времени. Публ. Тартуск. астрон. обсерв., 1952, **32**, 139—209.

Кивистик Лембит Аугустович, род. 26 янв. 1930 в Вильяндиском р-не

Эст. ССР, окончил Тартуский ун-т (1955), аспирантуру при Ин-те кибернетики АН Эст. ССР (1960), канд. физ.-матем. наук (1961), с 1960 работает в Тартуском ун-те.

1. О методе наискорейшего спуска для решения нелинейных уравнений. Изв. АН Эст. ССР, сер. физ.-матем. и техн. наук, 1960, **9**, 145—159.
2. О некоторых итерационных методах для решения операторных уравнений в пространстве Гильберта. Изв. АН Эст. ССР, сер. физ.-матем. и техн. наук, 1960, **9**, 229—241.
3. Об одном обобщении метода Ньютона. Изв. АН Эст. ССР, сер. физ.-матем. и техн. наук, 1960, **9**, 301—312.
4. Iteratsioonimeetoditest Hilberti ruumis. Диссертация, Тарту, 1960, 106 стр. Об итерационных методах в пространстве Гильберта. Автореферат дисс., Тарту, 1961.
5. Об одной модификации итерационного метода с минимальными невязками для решения нелинейных операторных уравнений. Докл. АН СССР, 1961, **136**, 22—25.
6. Об одном классе итерационных процессов в гильбертовом пространстве. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1962, **129**, 365—381.
7. Некоторые теоремы сходимости для итерационных процессов с минимальными невязками. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1962, **129**, 382—393 (совм. с А. Устаалем).

Корьюс Айн Хербертович, род. 8 мая 1935 в Тартуском р-не Эст. ССР, окончил Тартуский ун-т (1959), с 1961 аспирант Тартуского ун-та.

1.—3. См. Ю. Каазик [11, 12, 14].

4.* Обзор работы по МП в Тартуском государственном университете. Сообщ. маш. перев. Ин-та яз. и лит. АН Эст. ССР, 1962, **1**, 90—94.

5.* Программа для вычисления экваториальных координат искусственных спутников Земли. Тр. вычисл. центра Тартуск. ун-та, 1962, **2**, 18—35.

6.* Программа перевода углов из радианной меры в градусную или часовую. Тр. вычисл. центра Тартуск. ун-та, 1962, **2**, 36—39.

Котли Малле Аларовна, род. 15 марта 1932 в г. Таллине, окончила Тартуский ун-т (1955), с 1960 работает в Ин-те кибернетики АН Эст. ССР.

1.* Интерпретирующая программа для вычислений с комплексными числами с фиксированной запятой. Матер. эл. вычисл. маш. М-3. Ин-та киб. АН Эст. ССР, 1962, **1**, 10—16.

2.* Переадресующая программа. Матер. эл. вычисл. маш. М-3 Ин-та киб. АН Эст. ССР, 1962, **2**, 61—70.

3.* Замечание к работе «Интерпретирующая программа для вычислений с комплексными числами с фиксированной запятой». Матер. эл. вычисл. маш. М-3 Ин-та киб. АН Эст. ССР. **2**, 71—72.

4. Elektronarvuti teadust ja rahvamajandust abistamas. Tallinn, 1963, 61 lk. (kaasautorid U. Oper ja I. Petersen).

Крулль Мати Хуго-Александрович, род. 5 апр. 1937 в Пайдеском р-не Эст. ССР, окончил Тартуский ун-т (1961), с 1961 робтает в Тартуском ун-те.

1.* Интерполяция по схеме Эйткина. Тр. вычисл. центра Тартуск. ун-та, 1962, **2**, 3—10.

2.* Стандартные подпрограммы вычисления значений элементарных функций с четырьмя десятичными знаками. Тр. вычисл. центра Тартуск. ун-та, 1963, **3**, 3—28.

3.* Juhised koormusarvutusteks tehases. Tallinn, 1963, 52 lk. (kaasautor E. Puusepp).

Кулль Ивар Георгиевич, род. 25 нояб. 1928 в г. Таллин, окончил Тартуский ун-т (1953), аспирантуру там же (1958), канд. физ.-матем. наук (1958), доцент (1963), с 1956 работает в Тартуском ун-те.

1. Kahekordsete summeeruvate ridade korrutamine. Диссертация, Тарту, 1956. 128 стр.

   Умножение суммируемых двойных рядов. Автореферат дисс., Тарту, 1956.
2. Умножение суммируемых дройных рядов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1958, **62**, 3—59.

3.** Mõningaid tunnetusteoreetilisi küsimusi seoses lõplike automaatide teooriaga. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1960, **89**, 109—115.

4.** Lausearvutusest matemaatilises loogikas. Eesti Loodus, 1960, 1—5 ja 65—71.

5. Линейные преобразования некоторых классов двойных последовательностей. Изв. АН Эст. ССР, сер. физ.-матем. и техн. наук, 1961, **10**, 13—21.

6. Умножение двойных рядов по правилу Дирихле. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1961, **102**, 185—192.

7. Матричные преобразования классов двойных последовательностей в банаховых пространствах. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1961, **102**, 193—208.

8. Метод решения обобщенной транспортной задачи. Изв. АН Эст. ССР, сер. физ-матем. и техн. наук, 1962, **11**, 120—127 (совм. с Э. Ландра).

9.* Reaalmuutuja funktsioonide teooria. Tartu, 1962, 157 lk.

10.* Matemaatiline loogika ja tema rakendused. Tead. konv. «Kaasaegne matem. ja tema rakendusalad». Tartu, 1963, 57—64.

Куусик Велло Аугустович, род. 6. мая 1938 в Вильяндиском р-не Эст. ССР, окончил Московский ун-т (1961), с 1961 работает в Ин-те кибернетики АН Эст. ССР.

1.* Интерпретирующая программа для вычислений с трансформируемой запятой. Матер. эл. вычисл. маш. М-3 Ин-та киб. АН Эст. ССР, 1962, **2**, 46—60.

Лауметс Антс Артурович, род. 14 июня 1935 в Йыгеваском р-не Эст. ССР окончил Тартуский ун-т (1959), с 1959 работает в Тартуском ун-те.

1. См. Ю. Каазик [12].

2.* Программа решения уравнений 4-ой степени. Тр. вычисл. центра Тартуск. ун-та, 1962, **2**, 11—17.

Левин Мейше Исакович, род. 30 июля 1934 в г. Валга, окончил Тартуский ун-т (1957), аспирантуру при Ин-те кибернетики АН Эст. ССР (1963), канд. физ.-матем. наук (1963), с 1963 работает в Ин-те кибернетики АН Эст. ССР.

1. Об одном способе вычисления двойных интегралов. Уч. зап. Тартуского ун-та, 1961, **102**, 338—341.

2.* Стандартные программы ЭВМ Урал-1. Бюлл. вычисл. центра Тартуск. ун-та, 1961, **1**, 5—45.

3. Об оценке погрешности кубатурных формул. Изв. АН Эст. ССР, сер. физ.-матем. и техн. наук, 1962, **11**, 114—119.

4. Некоторые формулы для приближенного вычисления двойных интегралов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1962, **129**, 428—436.

5. Некоторые оценки кубатурных формул для аналитических функций. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1962 **129**, 437—441.

6. Обобщение квадратурной формулы Гаусса для функций многих переменных. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1962, **129**, 442—448.

7. Квадратурные формулы для одного класса функций. Уч. зап. Тартуского ун-та, 1962, **129**, 449—452.

8. Об экстремальных задачах, связанных с одной квадратурной формулой. Изв. АН Эст. ССР, сер. физ.-матем. и техн. наук, 1963, **12**, 44—56.

9. Экстремальная задача для одного класса функций. Изв. АН Эст. ССР, сер. физ-матем. и техн. наук, 1963, **12**, 141—145.

10. О приближенном вычислении интегралов. Диссертация, Таллин, 1963, 114 стр.

— Автореферат, дисс., Таллин, 1963.

11. Построение некоторых наилучших квадратурных формул. Изв. АН Эст. ССР, сер. физ.-матем. и техн. наук, 1963, **12**, 376—383.

Лумисте Юло Гориевич, род. 30 июня 1929 в Вяндраском р-не Эст. ССР, окончил Тартуский ун-т (1952), канд. физ-матем. наук (1958), доцент (1960), с 1952 работает в Тартуском ун-те.

1. Метод наискорейшего спуска при нелинейных уравнениях. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1957, **37**, 106—111.

2. О геометрическом строении комплексно-аналитической поверхности V_{2n} в пространстве R_{2N}. Докл. АН СССР, 1957, **114**, 259—262.
3. О поверхностях V_n с многомерными изотропными сопряженными направлениями в пространствах R_N или S_N. Докл. АН СССР, 1957, **114**, 702—705.
4. О n-мерных поверхностях с сопряженными или асимптотическими полями p-направлений. Диссертация, Москва—Тарту, 1957, 121 стр.
— Автореферат дисс., Москва, 1958.
5. Минимальные n-мерные поверхности, имеющие в каждой точке $(n - 1)$-мерное асимптотическое направление. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1958, **62**, 117—138.
6. О n-мерных поверхностях с асимптотическими полями p-направлений. Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1959, № 1 (8), 105—113.
7. О трехмерных поверхностях с тремя ортогональными семействами асимптотических. Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1959, № 3 (10), 173—185.
8.** Kilde Tartu Ülikooli XIX sajandi matemaatikute kokkupuuteist Lobatševskiga ja tema loominguga. Eesti Loodus, 1959, 162—165.
9. Дифференциальная геометрия линейчатых гиперповерхностей V_3 в R_4. Матем. сб., 1960, **50 (92)**, 203—220.
10. Многомерные линейчатые поверхности эвклидова пространства. Докл. научн. конф. по теор. и прикл. вопросам матем. и мех. (Томский гос. ун-т). Томск., 1960, 62—63.
11. Многомерные линейчатые поверхности эвклидова пространства. Матем. сб., 1961, **55 (97)**, 411—420.
12. К теории двумерных минимальных поверхностей, I. Теория кривизны. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1961, **102**, 3—15.
13. К теории двумерных минимальных поверхностей, II. Поверхности постоянной кривизны. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1961, **102**, 16—28.
14. К теории двумерных минимальных поверхностей, III. Основная теорема и изгибание. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1962, **129**, 74—89.
15. К теории двумерных минимальных поверхностей, IV. Поверхности с окружностями кривизны. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1962, **129**, 90—102.
16. Минимальные конгруэнции V_3 в эвклидовом пространстве R_4. Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1962, № 1 (26), 74—82 (совм. с Л. Туулметс).
17. Тартуский университет и начало дифференциально-геометрических исследований в России. Наука в Прибалтике в XVIII — начале XX века. Рига, 1962, 47—50.
18.** Karl Eduard Senff. Eesti Loodus, 1962, 282—283.
19.* Kaasaja diferentsiaalgeomeetria meetodid ja rakendusalad. Tead. konv. «Kaasaegne matem. ja tema rakendusalad». Tartu, 1963, 43—47.
20. Предвосхищение формул Френе в сочинении К. Э. Зенфа. Вопросы истории физико-математических наук. Москва, 1963, 141—147.
21. Liikumise osast geomeetrias. Loodus ja Matemaatika, 1963, **3**, 107—113.
22. Diferentsaalgeomeetria. Tallinn, 1963, 236 lk.

Лухт Сяде Карловна, род. 8 авг. 1938 в г. Пярну, окончила Тартуский ун-т (1961), с 1961 работает в Тартуском ун-те.

1.* Стандартная программа решения транспортной задачи. Тр. вычисл. центра Тартуск. ун-та, 1963, **3**, 29—42.
2.* Обобщенная транспортная задача. Тр. вычисл. центра Тартуск. ун-та, 1963, **3**, 43—60.

Лыхмус Яак Херман-Карлович, род. 28 сент. 1937 в г. Тарту, окончил Тартуский ун-т (1961), с 1961 аспирант Ин-та физики и астрон. АН Эст. ССР.

1. О построении векторов типа спина и представлениях групп вращений. Тр. Ин-та физ. и астрон. АН Эст. ССР, 1962, **19**, 141—142.

Малков Устав Херманович, род. 7 окт. 1933 в Тартуском р-не Эст. ССР, окончил Тартуский ун-т (1958), аспирантуру в Москве при Вычислительном центре АН СССР (1961), канд. физ.-матем. наук (1963), с 1963 работает в Москве в Центральном экономико-математическом ин-те.

1. См. Ю. Каазик [7].
2. Алгоритм решения распределительной задачи. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1962, **2**, 358—366.
3. Метод решения распределительной задачи. Тр. научн. конф. по определению потребности населения в товарах. Киев, 1962.
4.* Подпрограмма симплекс-метода. Стандартные и типовые программы БЭСМ-2 ВЦ АН СССР, 1962, **5**, 54 стр.
5. Решение некоторых задач линейного программирования. Диссертация, Москва, 1962.
— Автореферат дисс., Москва, 1962.
6.* О решении больших задач линейного программирования на ЭВМ по принципу разложения Данцига-Вульфа. Применение матем. методов в экон. иссл. по сельск. хозяйству. Москва, 1963, 130—139.

Муллари Рюнно Райувич, род. 7 дек. 1931 в г. Таллине, окончил Тартуский ун-т (1960), с 1960 работает в Тартуском ун-те.

1. О поверхностях с полями абсолютно главных направлений. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1961, **102**, 275—288.
2. О главных направлениях m-мерной поверхности. Докл. АН СССР, 1962, **144**, 989—992.
3. О максимально симметричных поверхностях многомерного эвклидова пространства. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1962, **129**, 62—73.
4. См. Ю. Каазик [18].
5. См. Л. Выханду [6].

Нут[3] **Юрий Юрьевич**, род. 10 июля 1892 в г. Петербурге — ум. 31 мая 1952 в г. Таллине, окончил Петербургский ун-т (1914), доктор (dr. phil. nat., 1927), д-р физ.-матем. наук [1946], доцент (1928), профессор (1936), академик АН Эст. ССР (1946), в 1926—1936 работал в Тартуском ун-те и в 1936—1941 в Таллинском политехн. ин-те.

1. О приложениях геометрии Лобачевского в современном естествознании. Научн. сессия АН Эст. ССР 1947 г., сер. А. Тарту, 1948, 358—372.
2. Некоторые результаты аналитической теории нитевых сетей. Научн. сессия АН Эст. ССР 1947 г., сер. В. Тарту, 1948, 125—132.
3. К вопросу о неизменности мировых констант. Научн. сессия АН Эст. ССР 1948 г., сер. А. Тарту, 1949, 222—238.
4. Критика идеалистического толкования волновой механики. Kogumikus «Nõukogude teaduse arengust Eesti NSV-s 1940—1950». Tallinn, 1950, 328—340.
5. О гиперболической механике и вопросах космогонии. Изв. АН Эст. ССР, 1952, **1**, 90—107.
6. Геометрия Лобачевского в аналитическом изложении. Москва, 1961, 310 стр.

Опер Урве Оскаровна, род. 20 нояб. 1936 в г. Таллине, окончила Тартуский у-т (1960), с 1960 работает в Ин-те кибернетики АН Эст. ССР.

1.* Программа регрессивного анализа. Матер. эл. вычисл. маш. М-3 Ин-та киб. АН Эст. ССР, 1962, **2**, 1—10.
2. См. М. Котли [4].

Паллум Эльги Прийдиковна, род. 26 дек. 1936 в Хаапсалуском р-не Эст. ССР, окончила Тартуский ун-т (1960), с 1960 работает в Ин-те кибернетики АН Эст. ССР.

1. См. С. Барон [11].

Палувер Николай Васильевич, род. 3 дек. 1910 в Печорском р-не Псковской области РСФСР, окончил Тартуский ун-т (1935), канд. техн. наук (1959), доцент (1963), с 1948 работает в Таллинском политехн. ин-те.

---

[3] См. также «Математика в СССР за сорок лет», т. II (Биобиблиография). Москва, 1959.

1. Об одном итерационном методе разложения многочленов на множители. Тр. Таллинск. политехн. ин-та, сер. А, 1955, **62**, 9 стр.
2. Определение системы координатных осей в пространстве по ее центральной проекции. Тр. Таллинск. политехн. ин-та, сер. А, 1957, **100**, 14 стр.
3. Аналитический метод для построения аксонометрических систем в центральной проекции. Тр. Таллинск. политехн. ин-та, сер. А, 1957, **120**, 22 стр.
4. См. О. Рюнк [5].
5. Об аксонометрическом методе построения перспектив. Тр. Таллинск. политехн. ин-та, сер. А, 1959, **158**, 30 стр.
6. Исследование некоторых основных вопросов центральной аксонометрии. Диссертация, Таллин, 1959, 117 стр.
   — Автореферат дисс., Таллин, 1959.
7. Об аналитическом решении проблемы Круппа в центральной аксонометрии. В сборнике «Вопросы теории, прилож. и методики препод. начерт. геом.». Рига, 1960, 266—269.
8. См. О. Рюнк [8].

Пальм Реэдик Аугустович, род. 27 авг. 1933 в г. Тарту, окончил Тартуский ун-т (1960), с 1960 работает в Ин-те языка и литературы АН Эст. ССР.

1.* Некоторые замечания о задачах и перспективах МП. Сообщ. маш. перев. Ин-та яз. и лит. АН Эст. ССР, 1962, **1**, 3—17.
2.* Об одном методе «сжатого» побуквенного кодирования. Сообщ. маш. перев. Ин-та яз. и лит., 1962, **1**, 49—58.
3.* О морфологическом анализе русской фразы. Сообщ. маш. перев. Ин-та яз. и лит., 1962, **1**, 59—83.
4.* Об одном схеме автоматического составления бинарного переводного алгоритма на основе изучения параллельных текстов. Сообщ. маш. перев. Ин-та яз. и лит., 1962, **1**, 84—89.

Петерсен Ивар Фердинандович, род. 26 июля 1929 в г. Таллине, окончил Тартуский ун-т (1952), канд. физ.-матем. наук (1955), в 1952—1960 работал в Таллинском политехн. ин-те, с 1960 работает в Ин-те кибернетики АН Эст. ССР.

1. Vahetatavate rühmade poolt moodustatud rühmade korrutiste konstruktsioonist. Диссертация, Тарту, 1955, 50 стр.
   О построении групп, порождаемых перестановочными группами. Автореферат дисс., Тарту, 1955.
2. О построении произведений двух перестановочных групп. Изв. АН Эст. ССР, сер. физ.-матем. и техн. наук, 1960, **9**, 296—300.
3. Kõrgema matemaatika ülesannete kogu, I. Tallinn, 1960, 302 lk. (kaasautor H. Roos).
   — 2. tr. Tallinn, 1962, 302 lk.
4. Kõrgema matemaatika ülesannete kogu, II. Tallinn, 1961, 252 lk. (kaasautor H. Roos).
5. О сходимости приближенных методов интерполяционного типа для обыкновенных дифференциальных уравнений. Изв. АН Эст. ССР, сер. физ.-матем. и техн. наук, 1961, **10**, 3—12.
6. О кусочно-полиномиальной аппроксимации. Изв. АН Эст. ССР, сер. физ. матем. и техн. наук, 1962, **11**, 24—32.
7. Методы типа Рунге-Кутта для решения нелинейных уравнений в гильбертовом пространстве. Изв. АН Эст. ССР, сер. физ.-матем. и техн. наук, 1963, **12**, 123—131.
8. О сходимости градиентных методов для нахождения локального условного минимума нелинейного функционала при линейных условиях в гильбертовом пространстве. Докл. АН СССР, 1963, **151**, 45—47.
9.* Mittelineaarsete võrrandite numbrilise lahendamise alasest uurimistööst ENSV TA Küberneetika Instituudis. Tead. konv. «Kaasaegne matem. ja tema rakendusalad». Tartu, 1963, 78—82.
10. См. М. Котли [4].

Петерсон Марет Рихардовна, род. 7 окт. 1936 в Выруском р-не Эст.

ССР, окончила Тартуский ун-т (1962), с 1960 работает в Ин-те кибернетики АН Эст. ССР.

1. См. С. Барон [11].

Пийр Ивар Рихардович, род. 20 окт. 1929 в г. Тарту, окончил Тартуский ун-т (1952), аспирантуру там же (1955), канд. физ.-матем. наук (1955), с 1955 работает в Тартуском ун-те.

1.* Методы математической физики (Дифференциальные уравнения в частных производных). Тарту, 1960, 204 стр.

Полль Валдур Вальтерович, род. 16 июня 1936 в г. Таллин-Нымме, окончил Московский ун-т (1960), с 1960 работает в Ин-те кибернетики АН Эст. ССР.

1.* Программа аппроксимации функций одной переменной полиномами. Матер. эл. вычисл. маш. М-3 Ин-та киб. АН Эст. ССР, 1962, **2**, 11—19.

Полль Хельги Эдуардовна, род. 21 июня 1936 в г. Выру, окончила Тартуский ун-т (1960), с 1960 работает в Ин-те кибернетики АН Эст. ССР.

1.* Программа для решения системы линейных алгебраических уравнений с экономией памяти. Матер. эл. вычисл. маш. М-3 Ин-та киб. АН Эст. ССР, 1962, **2**, 1—10.

Ратассепп Калев Хансович, род. 1 марта 1898 в г. Таллине — ум. 20 янв. 1960 в Таллине, окончил Тартуский ун-т (1926), канд. физ.-матем. наук (1949), доцент (1951), в 1945—1960 работал в Таллинском политехническом ун-те.

1. Statistiliste põhisuuruste mehhaniseeritud arvutamine. Диссертация, Таллин, 1948, 43 стр.
2.** Üksteisest sõltuvate sündmuste ristumuste tõenäosusest. Уч. зап. Таллинск. пед. ин-та, 1960, **3**, 77—97.

Рахула Майдо Оскарович, род. 20 мая 1936 в Пайдеском р-не Эст. ССР, окончил Томский ун-т (1959), аспирантуру при Тартуском ун-те (1962), с 1962 работает там же.

1. Связка прямых и плоскостей, ассоциированная с репером линии на поверхности. Докл. научн. конф. по теор. и прикл. вопросам матем. и мех. (Томский гос. ун-т). Томск, 1960, 76—78.
2. К эквиаффинной теории неголономного многообразия. Тр. Томск. ун-та, 1962, **160**, 82—89 (совм. с Р. Н. Щербаковым).
3. Об одном аспекте неголономной геометрии. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1962, **129**, 23—36.
4. Последовательность деривации на многообразии. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1962, **129**, 37—62.
5. О связке прямых и плоскостей, ассоциированной с репером линии на поверхности. Изв. высш. уч. заведений. Математика, 1963, № 1 (32), 124—134.
6.* Liikumiste geomeetriast. Tead. konv. «Kaasaegne matem. ja tema rakendusalad». Tartu, 1963, 48—50.

Реймерс Эльмар Густавович, род. 11 марта 1929, в г. Гатчине, окончил Тартуский ун-т (1954), аспирантуру там же (1957), канд. физ.-матем. наук (1958), доцент (1963), с 1957 работает в Тартуском ун-те.

1. Теорема о среднем значении для абсолютного суммирования. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1956, **42**, 113—134.
2. Теоремы о среднем значении для двойных рядов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1958, **62**, 60—79.
3. Теорема о среднем значении и умножение суммируемых рядов. Докл. АН СССР, 1958, **120**, 1196—1199.
4. Keskväärtusteoreemid kahekordsete ridade teoorias. Диссертация, Тарту, 1957, 70 стр.
   Теоремы о среднем значении в теории двойных рядов. Автореферат дисс., Тарту, 1958.
5. Теоремы о среднем значении и умножение суммируемых двойных рядов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1959, **73**, 50—83.
6.* Matemaatilise füüsika võrrandid. Tartu, 1960, 110 lk.

7. Сходимость по отрезкам и умножение суммируемых рядов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1961, **102**, 29—42.
8. Тауберовы теоремы для матричных методов суммирования. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1961, **102**, 43—51.
9. Новые общие методы суммирования. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1962, **129**, 119—154.

Рельвик Хейно Александрович, род. 9 янв. 1922 в г. Пайде, окончил Таллинский политехн. ин-т 1953), аспирантуру там же (1957), с 1959 работает в Таллинском политехн. ин-те.

1. См. О. Сильде [3].

Рийвес Зинаида Юлиусовна, род. 11 нояб. 1919 в г. Нарва, окончила Тартуский ун-т (1945), 1945—1951 работала в Тартуском ун-те, с 1951 работает в Эст. с.-х. академии.

1. О проекционных свойствах ортоцентрического тетраэдра. Изв. АН Эст. ССР, сер. техн. и физ.-матем. наук, 1960, **9**, 69—74.
2. О применении параметрического метода для исследования проекций многогранников. Сб. научн. тр. Эст. с.-х. акад., 1961, **22**, 77—91.
3. Реконструкция тетраэдра по его метрически определенному изображению. Сб. докл. Московск. сем. по начерт. геом. и инж. графики, Москва, 1963. **2**. 158—161.

Роос Хильда Оттовна, род. 17 июля 1906 в г. Таллине, окончила Тартуский ун-т (1931), с 1944 работает в Таллинском политехн. ин-те.

1.—2. См. И. Петерсен [3—4].

Руубель Альма Иохановна, род. 28 сент. 1899, в Вильяндиском р-не Эст. ССР, окончила Тартуский ун-т (1932), магистр (1936), канд. физ.-матем. наук [1946], доцент (1949), в 1929—1955 работала в Тартуском ун-те, с 1952 работает в Эст. с.-х. академии.

1. Способ графического интегрирования дифференциальных уравнений. Сб. научн. тр. Эст. с.-х. акад., 1955, **1**, 201—213.
2.** Tsentraalprojekteerimise kasutamine lõikumisülesannete lahendamisel epüüris. Сб. научн. тр. Эст. с.-х. акад., 1957, **3**, 385—396.
3. Проектирование при помощи скрещивающихся лучей. Сб. научн. тр. Эст. с.-х. акад., 1958, **6**, 246—256.
4. Ортогональная окружностная проекция. Изд. Эст. с.-х. акад., Тарту, 1958, 32 стр.
5. Осевая окружностная проекция на плоскость, параллельную оси центров. Сб. научн. тр. Эст. с.-х. акад., 1959, **11**, 151—158.
6 Проектирование при помощи координатных линий некоторых пространственных систем координат. Сб. научн. тр. Эст. с.-х. акад., 1960, **13**, 90—98.
7. Об осевой прямолинейной проекции. Сб. научн. тр. Эст. с.-х. акад., 1960, **17**, 176—181.
8. Об обобщенном проектировании типа $R^{11}_{k0,\,lm0}$. Сб. научн. тр. Эст. с.-х. акад., 1960, **17**, 182—189.
9. О комплексных чертежах, состоящих из двух обобщенных проекций. Сб. научн. тр. Эст. с.-х. акад., 1961, **22**, 108—118.
10.** Adamsi meetodi jaoks antud Misese veavalemi täpsustamisest. Сб. научн. тр. Эст. с.-х. акад., 1961, **22**, 92—107.
11.* Комплексные чертежи криволинейных проекций. Изд. Эст. с.-х. акад., 1961, 8 стр.
12. Комплексные чертежи вторичных проекций. Сб. научн. тр. Эст. с.-х. акад., 1963, **31**, 111—121.
13. Projektsiooni mõiste üldistamisest kujutavas geomeetrias. Loodus ja Matemaatika, 1963, **3**, 114—124.
14. Применение колебательного сжатия-растяжения плоскости проекции при решении задач на пересечение поверхностей. Сб. научн. тр. Эст. с.-х. акад., 1963, **31**, 111—121.
15. О проектировании при помощи координатных линий некоторых простран-

ственных координатных систем и о применении его при решении задач на пересечение. Сб. докл. Московск. сем. по начерт. геом. и инж. графики, Москва, 1963, **2**, 75—78.

Рюнк Отт Янович, род. 23 июля 1914 в г. Таллине, окончил Тартуский ун-т (1938), канд. техн. наук (1956), доцент (1961), с 1944 работает в Таллинском политехн. ин-те.

1.—3. См. А. Хумал [1, 2, 7].

4\. Tsentraalaksonomeetria fundamentaalülesanne. Диссертация, Таллин, 1956, 60 стр.
Фундаментальная задача аксонометрии в центральной проекции. Автореферат дисс., Таллин, 1956.

5\. Об одном практическом приеме в центральной аксонометрии. Тр. Таллинск. политехн. ин-та, сер. А, 1958, **145**, 14 стр. (совм. с Н. Палувером).

6\. О применении центральной аксонометрии на практике. В сборнике «Вопросы теории, прилож. и методики препод. начерт. геом.». Рига, 1960, 280—282.

7\. Об ортогональной проекции угла. Тр. Таллинск. политехн. ин-та, сер. А, 1961, **183**, 16 стр.

8\. Kujutav geomeetria. Tallinn, 1961, 297 lk. (kaasautor N. Paluver).

Ряго Герхард Августович, род. 5 дек. 1892 в Выруском р-не Эст. ССР, окончил Тартуский (Юрьевский) ун-т (1913), канд. физ.-матем. наук (1913), [1945], профессор (1920), в 1915—1920 работал в Донском политехн. ин-те в г. Новочеркасске, с 1920 работает в Тартуском ун-те.

1\. Kõrgem matemaatika. Tartu, 1948, 761 lk.
— 2. ümbertöötatud tr. Tallinn, 1952, 760 lk.

2\. Из жизни и деятельности четырех замечательных математиков Тартуского университета. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1955, **37**, 74—105.

3\. Kõrgem matemaatika, I. Tallinn, 1962, 739 lk.

4\. Kõrgem matemaatika, II. Tallinn, 1963, 588 lk.

Сарв[3] **Яан Хеннович**, род. 21 дек. 1877 в Выруском р-не Эст. ССР — ум. 23 авг. 1954 в г. Тарту, окончил Тартуский (Юрьевский) ун-т (1907), профессор (1919), доктор (dr. phil. nat., 1931), д-р физ.-матем. наук [1946], в 1919—1951 работал в Тартуском ун-те.

1.** Punktarvutus analüütilises geomeetrias. Уч. зап. Тартуск. ун-та. Матем. науки, 1946, **1**, 32 стр.

2\. Уравнение прямой в пространстве. Уч. зап. Тартуск. ун-та, Матем. науки, 1948, **5**, 25 стр.

Сильде Оскар Михкелевич, род. 25 авг. 1900 в Хийумааском р-не Эст. ССР, окончил Тартуский ун-т (1925), канд. физ.-матем. наук (1955), с 1944 работает в Таллинском политехн. ин-те.

1\. Две теоремы теории чисел. Тр. Таллинск. политехн. ин-та, сер. А, 1948, **24**, 10 стр.

2\. Ruumtuletiste integraalvalemid. Диссертация, Таллин, 1955, 105 стр.
Интегральные формулы пространственных производных. Автореферат дисс., Тарту, 1955.

3.* Vektoranalüüsi algmed. Tallinn, 1961, 77 lk. (kaasautor H. Relvik).

4\. К вопросу теории физического поля. Тр. Таллинск. политехн. ин-та, сер. А, 1962, **194**, 21—32.

Сырмус Тамара Иоханнесовна, род. 29 нояб. 1926 в г. Тарту, окончила Тартуский ун-т (1954), аспирантуру там же (1961), канд. физ.-матем. наук (1963), в 1954—1959 работала в Тартуском ун-те, с 1961 работает там же.

1.** Tõkestamata osasummadega read maatriksmenetluse summeerimisväljas. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1956, **42**, 143—151.

2\. Об одном обобщении теоремы Мерсера на случай двойных последовательностей. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1961, **102**, 156—168.

3\. О некоторых обобщениях теоремы Мерсера. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1961, **102**, 169—184.

4\. О некоторых обобщениях теоремы Мерсера для двойных последовательностей. Изв. АН Эст. ССР, сер. физ.-матем. и техн. наук, 1962, **11**, 37—49.

5. Об обобщенной теореме Мерсера. Изв. АН Эст. ССР, сер. физ.-матем. и техн. наук, 1962, **11**, 99—106.
6. О некоторых теоремах типа Мерсера для стесненной сходимости. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1962, **129**, 264—273.
7. Теоремы типа Мерсера для стесненной и обыкновенной сходимости. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1962, **129**, 274—282.
8. Теоремы типа Мерсера для двойных последовательностей. Диссертация, Тарту, 1963, 131 стр.

— Автореферат дисс., Тарту, 1963.

Тамм Борис Георгиевич, род. 23 июня 1930 в г. Таллине, окончил Таллинский политехн. ин-т (1954), аспирантуру в Москве при Ин-те автоматики и телемеханики АН СССР (1960), канд. техн. наук (1961), в 1954—1957 работал в Таллинском политехн. ин-те, с 1960 работает в Ин-те кибернетики АН Эст. ССР.

1. Линейные методы интерполирования кривых третьего порядка для станков с программным уравлением. Изв. АН Эст. ССР, сер. физ.-матем. и техн. наук, 1960, **9**, 160—175.
2. Система автоматического программирования для станков с программным управлением. Автоматика и телемеханика, 1961, **22**, 1038—1054.

Тамм Марет Иохановна, род. 1 янв. 1926 в г. Таллине, окончила Тартуский ун-т (1950), аспирантуру там же (1953), канд. физ.-матем. наук (1953), в 1953—1956 работала в Тартуском ун-те, в 1956—1963 в Таллинском политехн. ин-те, с 1963 работает в Ин-те кибернетики АН Эст. ССР.

1. Nilpotentseist algberaist ühenduses Molieni uurimustega. Диссертация, Тарту, 1953, 40 стр.

   О нильпотентных алгебрах в связи с исследованиями Молина. Автореферат дисс., Тарту, 1953.
2.* Lineaaralgebra ja lineaarprogrammeerimine, I. Lineaaralgebra. Tallinn, 1962, 40 lk.
3.* Lineaaralgebra ja lineaarprogrammeerimine, II. Lineaarprogrammeerimine. Tallinn, 1962, 116 lk.

Таммай Тийу Виллемовна, род. 9 июня 1936 в Пярнуском р-не Эст. ССР, окончила Тартуский ун-т (1959), с 1960 работает в Таллинском политехн. ин-те.

1. См. С. Барон [10].

Тамме Энн Эдуардович, род. 1 июня 1930 в г. Тарту, окончил Тартуский ун-т (1955), аспирантуру там же (1958), канд. физ.-матем. наук (1958), доцент (1962), с 1958 работает в Тартуском ун-те.

1. См. Ю. Каазик [1].
2. О приближенном решении функциональных уравнений методом разложения в ряд обратного оператора. Докл. АН СССР, 1955, **103**, 769—772.
3. О неявных операторах. Докл. АН СССР, 1958, **120**, 259—261.
4. См. Ю. Каазик [5].
5. Majorantprintsiip iteratsioonimeetodite üldises teoorias. Диссертация, Тарту, 1958, 89 стр.

   Принцип мажорант в общей теории итерационных методов. Автореферат дисс., Тарту, 1958.
6. Об одном классе сходящихся итерационных методов. Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1958, № 5, 115—121.
7. О приближенном решении операторных уравнений, зависящих от параметра. Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1959, № 3, 229—232 (совм. с Л. Хейнла).
8. О принципе мажорант для итерационных методов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1959, **73**, 84—118.
9. О приближенном решении дифференциальных уравнений. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1961, **102**, 301—316 (совм. с Р. Юргенсоном).
10. О точности метода моментов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1961, **102**, 317—328.

11. О точности приближенных методов разыскания собственных значений и собственных элементов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1961, **102**, 329—337.
12. См. Я. Габович [9].
13.* Arvutusmeetodid, III. Funktsioonide lähendamine. Tartu, 1963, 110 lk.
14.* Arvutusmeetodid, IV. Lineaarsed võrrandisüsteemid. Tartu, 1963, 142 lk.
15.* Veahindamisest diferentsiaalvõrrandite ligikaudsel lahendamisel. Tead. konv. «Kaasaegne matem. ja tema rakendusalad». Tartu, 1963, 83—85.
16. Iteratsioonimeetodite kasutamine võrrandite ligikaudseks lahendamiseks. Loodus ja Matemaatika, 1963, **3**, 101—106.

Таутс Антс Иоханнесович, род. 22 июля 1936 в г. Тырва, окончил Тартуский ун-т (1960), с 1961 аспирант Ин-та физики и астрон. АН Эст. ССР.
1. Универсальная логика. Тр. Ин-та физ. и астрон. АН Эст. ССР, 1962, **19**, 3—23.
2. Решение логических уравнений типа высказываний. Тр. Ин-та физ. и астрон. АН Эст. ССР, 1963, **20**, 3—12.

Тийкма Борис Адольфович, род. 6 июня 1908 в г. Таллине, окончил Тартуский ун-т (1932), с 1945 работает в Таллинском политехн. ин-те.
1. Свойства некоторых линейных элементов. Тр. Таллинск. политехн. ин-та, сер. А, 1959, **156**, 73—82.
2. Одно свойство тензора кривизны. Тр. Таллинск. политехн. ин-та, сер. А, 1962, **194**, 33—41.

Тийт Эне Арнольдовна, род. 22 апр. 1934 в г. Тарту, окончила Тартуский ун-т (1957), аспирантуру там же (1962), канд. физ.-матем. наук (1963), с 1962 работает в Институте физики и астрон. АН Эст. ССР.
1.* Steinitzi teoreemist. TRÜ Matemaatika-Loodusteaduskonna Üliõpilaste Teaduslikke Töid, 1960, **1**, 3—12.
2. Об области сумм в линейных нормированных пространствах. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1962, **129**, 308—322.
3. *А*-области сумм одного типа суммируемых рядов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1962, **129**, 323—337.
4. Некоторые новые *А*-области сумм суммируемых рядов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1962, **129**, 338—356.
5. *А*-области сумм некоторых суммируемых рядов. Тр. Ин-та физ. и астрон. АН Эст. ССР, 1963, **20**, 14—33.
6.* Faktoranalüüsi rakendamisest astronoomias. Tead. konv. «Kaasaegne matem. ja tema rakendusalad», Tartu, 1963, 15—18.
7. Ridade ümberjärjestamisest. Диссертация, Тарту, 1963, 167 стр.
О перестановке рядов. Автореферат дисс., Тарту, 1963.
8.** Faktoranalüüsist. Сб. научн. тр. Эст. с.-х. акад., 1963, **31**, 122—135.

Тобиас Теэт Аугустович, род. 15 нояб. 1938 в г. Таллине, окончил Тартуский ун-т (1961), с 1961 аспирант Ин-та кибернетики АН Эст. ССР.
1.* О частях речи эстонского языка. Сообщ. маш. перев. Ин-та яз. и лит. АН Эст. ССР, 1962, **1**, 18—23.
2.* О синтаксическом анализе оборотов речи эстонского языка. Сообщ. маш. перев. Ин-та яз. и лит. АН Эст. ССР, 1962, **1**, 24—31.
3.* О соединении слов в эстонском предложении. Сообщ. маш. перев. Ин-та яз. и лит. АН Эст. ССР, 1962, **1**, 32—43.

Туулметс Лейда Аугустовна, род. 31 окт. 1933 в Йыгеваском р-не Эст. ССР, окончила Тартуский ун-т (1959), аспирантуру там же (1963), с 1963 работает в Тартуском ун-те.
1. См. Ю. Лумисте [16].
2. Минимальные демиконгруэнции в эвклидовом пространстве R_4. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1962, **129**, 103—118.

Тыннов Маргус Михкелевич, род. 25 апр. 1936 в Тартуском р-не Эст. ССР, окончил Тартуский ун-т (1960), с 1961 аспирант Тартуск. ун-та.
1. См. Г. Кангро [25].

Тюрнпу Хейно Альбертович, род. 5 июня 1936 в Хийумааском р-не Эст. ССР, с 1959 студент Тартуского ун-та.

1. Некоторые типы множителей суммируемости для метода Рисса второго порядка. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1962, **129**, 253—263.

Ульм Сулев Юханович, род. 26 июля 1930 в Хаапсалуском р-не Эст. ССР, окончил Тартуский ун-т (1955), аспирантуру Таллинского политехн. ин-та (1959), канд. физ.-матем. наук (1960), с 1960 работает в Ин-те кибернетики АН Эст. ССР.

1. О сходимости некоторых итерационных процессов в пространстве Банаха. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1956, **42**, 135—142.
2. К теории сходимости итерационных способов. Изв. АН Эст. ССР, сер. техн. и физ.-матем. наук, 1959, **8**, 153—165.
3. О сходимости способа касательных парабол для вещественного уравнения при условиях типа Коши. Изв. АН Эст. ССР, сер. техн. и физ.-матем. наук, 1959, **8**, 296—299.
4. О сходимости итерационных способов в обобщенно-нормированных пространствах. Изв. АН Эст. ССР, сер. физ.-матем. и техн. наук, 1959, **8**, 300—303.
5. Iteratsioonimenetluste koonduvusküsimuste käsitlusest majorantide printsiibil. Диссертация, Таллин, 1959, 84 стр.

   Исследование некоторых вопросов сходимости итерационных способов по принципу мажорант. Автореферат дисс., Таллин, 1960.
6. Об интерполяционных методах решения нелинейных уравнений в пространстве Банаха. Изв. АН Эст. ССР, сер. физ.-матем. и техн. наук, 1963, **12**, 24—30.
7. Об одном классе итерационных методов в пространстве Гильберта. Изв. АН Эст. ССР, сер. физ.-матем. и техн. наук, 1963, **12**, 132—140.
8. См. И. Петерсен [9].
9. Об интерполяционном аналоге метода градиент. Изв. АН Эст. ССР, сер. физ.-матем. и техн. наук, 1963, **12**, 238—243.
10. Об итеративных методах решения нелинейного уравнения, основанного на линеаризации при помощи интерполяционной формулы Ньютона. Изв. АН Эст. ССР, сер физ.-матем. и техн. наук, 1963, **12**, 383—390.

Устаал Ааре Янович, род. 15 февр. 1938 в г. Тарту, окончил Тартуский ун-т (1961), с 1961 работает в Ин-те кибернетики АН Эст. ССР.

1. См. Л. Кивистик [7].

Ханко Пийа Аугустовна, род. 14 янв. 1932 в г. Таллине, окончила Тартуский ун-т (1955), аспирантуру Ин-та кибернетики АН Эст. ССР (1961), с 1961 работает там же.

1. О квазибесповторности релейно-контактных схем. Изв. АН Эст. ССР, 1963, **12**, 244—262.

Хейнла Лео Эдуардович, род. 6 мая 1933 в г. Кярдла, окончил Тартуский ун-т (1958), аспирантуру там же (1963), в 1958—1960 работал в Ин-те кибернетики АН Эст. ССР, с 1963 работает там же.

1. См. Э. Тамме [7].

Хион Яак Викторович, род. 24 июля 1929 в г. Тарту, окончил Московский ун-т (1952), аспирантуру там же (1955), канд. физ.-матем. наук (1955), с 1955 работает в Тартуском ун-те.

1. Архимедовски упорядоченные кольца. Успехи матем. наук, 1954, **9**, № 4, 237—242.
2. Кольца, нормированные при помощи полугрупп. Диссертация, Москва, 1955, 60 стр.

   — Автореферат дисс., Москва, 1955.
3. Упорядоченные ассоциативные кольца. Докл. АН СССР, 1955, **101**, 1005—1007.
4. Кольца, нормированные при помощи полугрупп. Тр. 3-го Всес. матем. съезда, **1**. Москва, 1956, 36—37.
5. Упорядоченные полугруппы. Изв. АН СССР, сер. матем., 1957, **21**, 209—222.
6. Кольца, нормированные при помощи полугрупп. Изв. АН СССР, сер. матем., 1957, **21**, 311—328.

7. Частично упорядоченные полугруппы с условием пересечения. Успехи матем. наук, 1961, **16**, № 2, 218.

8.* Elementaarmatemaatika kõrgemalt vaatekohalt, I. Algebra. Tartu, 1962, 139 lk.

9. О продолжении частичной упорядоченности полугрупп. Успехи матем. наук, 1962, **17**, № 6, 208.

10. О частично упорядоченных полугруппах, в которых собственные выпуклые подполугруппы не пересекаются. Изв. АН СССР, сер. матем., 1963, **27**, 67—74.

Хумал[3] **Арнольд Константинович**, род. 10 марта 1908 в г. Таллине, окончил Тартуский ун-т (1930), доктор (dr. phil. nat., 1934), д-р физ.-матем. наук [1946], доцент (1936), профессор (1945), академик АН Эст. ССР (1951), в 1928—1941 работал в Тартуском ун-те, с 1944 работает в Таллинском политехн. ин-те, с 1953 — вице-президент АН Эст. ССР.

1. Kujutav geomeetria, I. Tartu, 1946, 103 lk. (kaasautorid O. Rünk ja A. Garšnek).
— 2. ümbertöötatud tr. Tallinn, 1951, 104 lk.

2. Kujutav geomeetria, II. Tartu, 1947, 137 lk. (kaasautorid O. Rünk ja A. Garšnek).

3.** Funktsioonide vahe graafiline integreerimine. Тр. Таллинск. политехн. ин-та, сер. А, 1947, **27**, 3—8.

4.** Ruutvõrrandi geomeetriline lahendamine. Тр. Таллинск. политехн. ин-та, сер. А, 1947, **27**, 9—14.

5.** Uusi praktilisi võtteid dimeetrilises ristaksonomeetrias. Научн. сессия АН Эст. ССР 1947 г., сер. В. Тарту, 1948, 117—124.

6. Работы эстонских математиков за тридцать лет. В сборнике «Математика в СССР за тридцать лет». Москва-Ленинград, 1948, 1031—1034.

7. Kujutav geomeetria, III. Tartu, 1949, 145 lk. (kaasautorid O. Rünk ja A. Garšnek).

8.** Füüsikalis-matemaatilised teadused Nõukogude Eestis. Kogumikus «Nõukogude teaduse arengust Eesti NSV-s 1940—1950». Tallinn, 1950, 52—67.

9.** Algebraliste võrrandite nomograafilisest lahendamisest. Изв. АН Эст. ССР, 1954, **3**, 69—88.

10. Доказательство теоремы Помпейю в n-мерном пространстве. Изв. АН Эст. ССР, сер. техн. и физ.-матем. наук, 1958, **7**, 154—155.

11. Решение некоторых вариантов задачи Польке. Изв. АН Эст. ССР, сер. физ.-матем. и техн. наук, 1960, **9**, 283—295.

12. Аналитическое решение задачи Польке. Изв. АН Эст. ССР, 1961, **10**, 105—109.

13. Разделение прироста произведения. Изв. АН Эст. ССР, сер. физ.-матем. и техн. наук, 1962, **11**, 3—9.

14. Matemaatika osast inimkonna arenemises ja matemaatika ajaloo periodiseerimisest. Loodus ja Matemaatika, 1963, **3**, 76—84.

Ыйглане Харри Хейнрихович, род. 5 марта 1927 в Раквереском р-не Эст. ССР, окончил Тартуский ун-т (1950), аспирантуру при Ин-те физики и астрон. АН Эст. ССР (1953), канд. физ.-матем. наук (1954), ст. научный сотрудник (1957), с 1947 работает в Ин-те физики и астрон. АН Эст. ССР.

1. Интегрирование по четырехмерному псевдоевклидову пространству. Тр. Ин-та физ. и астрон. АН Эст. ССР, 1957, **5**, 85—92.

2. О некоторых возможных обобщениях понятия представления группы. Тр. Ин-та физ. и астрон. АН Эст. ССР, 1961, **16**, 90—105.

3. Релятивистски инвариантный ортогональный базис матриц Кеммэра-Дэффина. Тр. Ин-та физ. и астрон. АН Эст. ССР, 1963, **20**, 138—144.

Эспенберг Харри Альфонсович, род. 12 июня 1931 в Хийумааском р-не, окончил Тартуский ун-т (1954), в 1956—1962 работал в Тартуском ун-те, с 1962 работает в Эст. с.-х. академии.

1. О множителях суммируемости для метода Эйлера-Кноппа. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1962, **129**, 241—249.

2. О множителях суммируемости для метода Хаусдорфа. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1962, **129**, 250—252.
3. О множителях суммируемости в последовательности для метода Эйлера-Кноппа. Сб. научн. тр. Эст. с.-х. акад., 1963, **31**, 73—81.

Юргенсон Рейн Рейнхольдович, род. 28 июня 1936 в г. Пярну, окончил Тартуский ун-т (1960), аспиратуру при Ин-те физики и астрон. АН Эст. ССР (1963), с 1963 работает там же.

1. См. Э. Тамме [9].
2. Об оценке погрешности приближенного решения линейного интегро-дифференциального уравнения. Тр. Ин-та физ. и астрон. АН Эст. ССР, 1963, **20**, 34—38.
3. Об оценке погрешности метода конечных разностей при решении краевых задач для дифференциальных уравнений произвольного порядка. Изв. АН Эст. ССР, сер. физ.-матем и техн. наук, 1963, **12**, 391—398.

Юримяэ Эндель Иоханнесович, род. 22 февр. 1931 в Харьюском р-не Эст. ССР, окончил Тартуский ун-т (1955), аспирантуру там же (1959), канд. физ.-матем. наук (1959), с 1959 работает в Тартуском ун-те.

1.** Funktsionaalanalüüsi meetodid kahekordsete ridade teoorias. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1958, **55**, 3—8.
2. Некоторые вопросы обобщенных матричных методов суммирования, корегулярные и конулевые методы. Изв. АН Эст. ССР, сер. техн. и физ.-матем. наук, 1959, **8**, 115—121.
3. Об одном классе обобщенных матричных методов суммирования. Изв. АН Эст. ССР, сер. техн. и физ.-матем. наук, 1959, **8**, 166—172.
4. Üldistatud summeerimismenetluste mõningaist omadusist. Диссертация, Тарту, 1959, 75 стр.
   О некоторых свойствах обобщенных методов суммирования. Автореферат дисс., Тарту, 1959.
5. Методы суммирования, сохраняющие сходимость. Изв. АН Эст. ССР, сер. физ.-матем. и техн. наук, 1960, **9**, 257—267.
6.* Integraalvõrrandid. Tartu, 1963, 103 lk.

Яаксон[3] **Херман Янович,** род. 25 янв. 1891 в Вильяндиском р-не Эст. ССР, окончил Тартуский (Юрьевский) ун-т (1913), канд. физ.-матем. наук (1913), доктор (dr. phil. nat., 1925), д-р физ.-матем. наук [1946], доцент (1919), профессор (1926), в 1919—1961 работал в Тартуском ун-те.

1. Sur la légtimé d'une méthode de Fourier. Уч. зап. Тартуск. ун-та. Матем. науки, 1946, **2**, 14 стр.
2. О решениях топологической проблемы о двух красках. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1957, **46**, 43—62.
3. О симметрических решениях одного диофантова уравнения. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1957, **46**, 63—84.
4. О решениях топологической задачи о четырех красках. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1961, **102**, 263—274.

О СВЯЗИ ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛЫХ ПРОСТРАНСТВ С ПОЛУНОРМИРОВАННЫМИ ПРОСТРАНСТВАМИ

Х. Эплер

Кафедра математического анализа

Введение

При изучении локально выпуклых пространств в последнее время широкое применение нашли операции перехода к проективному и индуктивному пределам пространств. Этот метод оказался весьма плодотворным — следует только упомянуть о работах Дьёдонне, Гротендика, Кёте, Райкова, Шварца и др. Характерно, что в исследованиях этого направления переход к проективному и индуктивному пределам используется как орудие для того, чтобы, отправляясь от более простых пространств, построить новые классы более сложных пространств, стремясь к тому, чтобы этими классами было охвачено как можно больше наиболее важных пространств.

Но мыслима и другая точка зрения. Мы можем поставить себе задачу представлять любое данное локальное выпуклое пространство в виде некоторой системы более простых пространств[1]. Естественным и притом существенным дополнительным условием является при этом требование, чтобы сопряженные пространства к пространствам полученной системы, в свою очередь, образовали некоторую систему пространств, совпадающую с сопряженным пространством к данному пространству, система из вторых сопряженных совпадала бы со вторым сопряженным и т. д. Цель настоящей статьи — указать одно из возможных решений поставленной проблемы, осуществимое при помощи перехода к проективному и индуктивному пределам полунормированных пространств.

Как известно, топология любого локально выпуклого пространства определима некоторой системой полунорм. Исходя из

---

[1] Так, например, для отделимых пространств О. Такеноути доказал [6], что *всякое отделимое полное локально выпуклое пространство является проективным пределом банаховских пространств.*

данного (в общем случае неотделимого) локально выпуклого пространства, в п. 4 строится множество пространств, каждое из которых алгебраически изоморфно данному пространству и снабжено одной полунормой, зависящей от определяющей системы полунорм. Доказывается, что данное пространство гомеоморфно проективному пределу таких полунормированных пространств. Далее, в п. п. 5 и 6 показывается, что сильное сопряженное и второе сильное сопряженное к данному пространству соответственно совпадают с индуктивным пределом сильных сопряженных и проективным пределом вторых сильных сопряженных к вышеуказанным полунормированным пространствам.

При таком подходе оказывается необходимым предварительно изучить некоторые вопросы, относящиеся к полунормированным пространствам. В п. 2 даны необходимые и достаточные условия для того, чтобы топологическое векторное пространство было полунормируемым. В п. 3 изложены вопросы, связанные с пространствами, сопряженными к полунормированным пространствам.

Предварительные сведения о проективных и индуктивных пределах даны[2] в п. 1.

В работе рассматриваются локально выпуклые пространства над полем вещественных чисел. Следует отметить, что такое ограничение не является существенным.

1. Предварительные понятия и обозначения

Мы будем рассматривать векторные пространства E над полем $\mathbf{R}$ вещественных чисел. Если пространство E наделено топологией, согласующейся со структурой векторного пространства, то полученное топологическое векторное пространство обозначим той же буквой E. Топология пространства E в общем случае не предполагается отделимой.

Пусть A и B — множества из E. Говорят, что A *поглощает* B, если существует $\alpha > 0$ такое, что $\lambda A \supseteq B$, когда $|\lambda| \geqslant \alpha$. Множество A из E называют *поглощающим*, если оно поглощает каждое одноточечное множество. Множество $A \subseteq E$ называется *ограниченным*, если оно поглощается каждой окрестностью нуля.

Множество A из E называется *симметричным*, если из $x \in A$ следует, что $-x \in A$.

Наименьшее абсолютно выпуклое множество, содержащее A, называется *абсолютно выпуклой оболочкой множества* A и обозначается через $\Gamma(A)$. Если $\{A_\alpha\}$ — семейство выпуклых подмножеств пространства E, то абсолютно выпуклая оболочка

---

[2] См., например, [2] или [4].

множества $\bigcup_{\alpha} A_{\alpha}$ совпадает со множеством всех линейных комбинаций $\sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} x_{\alpha}$, где $x_{\alpha} \in A_{\alpha}$, $\lambda_{\alpha} \geqslant 0$. для всех α (причем $\lambda_{\alpha} \neq 0$ лишь для конечного числа индексов α) и $\sum_{\alpha} |\lambda_{\alpha}| = 1$.

Конечную числовую функцию $p(x)$, определенную на пространстве E, называют *полунормой*, если она удовлетворяет следующим аксиомам:

(SN 1) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ для всех $x \in E$ и $\lambda \in \mathbf{R}$,
(SN 2) $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$ для всех $x, y \in E$.

Из этих аксиом следует, что $p(0) = 0$ и $p(x) \geqslant 0$ для всех $x \in E$.

Пространство всех линейных форм $< x, u >$ на пространстве E будем обозначать через E'; сопряженное к E пространство всех непрерывных линейных функций обозначается через $\overline{E}$. Если в сопряженном пространстве определена топология, то мы всегда предполагаем, что это *топология ограниченной сходимости (сильная топология)* при которой системой окрестностей нуля образуются множества вида

$$V^{A, \varepsilon} = \{u: |< x, u >| \leqslant \varepsilon, \ x \in A\},$$

где $A \subseteq E$ — ограниченное множество.

Пусть, далее, A — *множество, направленное вправо*; под этим мы подразумеваем, что для некоторых пар элементов α, β из A определено отношение $\alpha \leqslant \beta$, удовлетворяющее следующим условиям:

(SO 1) если $\alpha \leqslant \beta$ и $\beta \leqslant \gamma$, то $\alpha \leqslant \gamma$;
(SO 2) если $\alpha \leqslant \beta$ и $\beta \leqslant \alpha$, то $\alpha = \beta$ и обратно;
(SO 3) каковы бы ни были $\alpha, \beta \in \mathrm{A}$, всегда существует $\gamma \in \mathrm{A}$ такое, что $\alpha \leqslant \gamma$, $\beta \leqslant \gamma$.

Пусть каждому $\alpha \in \mathrm{A}$ отнесено топологическое векторное пространство E_{α} и каждой паре α, β с $\alpha \leqslant \beta$ непрерывное линейное отображение $g_{\alpha\beta}$ пространства E_{β} в E_{α}, причем $g_{\alpha\gamma} = g_{\alpha\beta} g_{\beta\gamma}$, если $\alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma$. Говорят, что при этих условиях пространства E_{α} образуют *проективный спектр* относительно отображений $g_{\alpha\beta}$. Обозначим через $\mathring{E}$ тихоновское произведение $\prod_{\alpha \in \mathrm{A}} E_{\alpha}$ всех E_{α} и выделим совокупность элементов $x^* = (x_{\alpha})$ из $\mathring{E}$, которые удовлетворяют условию $x_{\alpha} = g_{\alpha\beta}(x_{\alpha})$, когда $\alpha \leqslant \beta$. Такие элементы будем называть *нитями*. Множество всех нитей обозначим через E^*; оно образует в $\mathring{E}$ замкнутое линейное подпространство. Топологическое векторное пространство E^*, наделенное топологией, индуцированной из $\mathring{E}$, называют *проективным пределом* пространств E_α относительно отображений $g_{\alpha\beta}$. Обозначим через g_α непрерывное линейное отображение (*проекцию*) пространства E^* в E_α, относящее каждой нити $x^* = (x_\alpha)$ из E^* его «координату» с индексом α. Окрестностями нуля пространства E^* будут тогда прообразы $g^{-1}(U_\alpha)$ окрестностей нуля U_α всевозможных пространств E_α.

Отметим, что проективный предел локально выпуклых пространств является локально выпуклым пространством.

Пусть А — множество, направленное вправо. Предположим, что каждому $\alpha \in \mathrm{A}$ отнесено топологическое векторное пространство E_α и каждой паре α, β с $\alpha \leqslant \beta$ — непрерывное линейное отображение $g^{\alpha\beta}$ пространства E_α в E_β, причем $g^{\alpha\gamma} = g^{\beta\gamma} g^{\alpha\beta}$, когда $\alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma$. Говорят, что пространства E_α образуют *индуктивный спектр* относительно отображений $g^{\alpha\beta}$. Рассмотрим совокупность всех пар (x, α), где каждому $\alpha \in \mathrm{A}$ отнесен произвольный элемент $x = x_\alpha$ из E_α. Пары (x, α) и (x, β) считаем эквивалентными, если существует по крайней мере один $\gamma \in \mathrm{A}$ и один $x_\gamma \in E_\gamma$ такие, что $x_\gamma = g^{\alpha\gamma}(x_\alpha)$ и $x_\gamma = g^{\beta\gamma}(x_\beta)$. Обозначим через E_* множество пар эквивалентных классов, порождаемое этим отношением эквивалентности. Пусть g^α — каноническое отображение (*инъекция*) E_α в E_*, переводящее $x_\alpha \in E_\alpha$ в класс эквивалентных элементов в E_*. *Индуктивным пределом* пространств E_α относительно отображений $g^{\alpha\beta}$ называют топологическое векторное пространство E_*, наделенное сильнейшей локально выпуклой топологией, при которой все отображения g^α непрерывны. Фундаментальную систему окрестностей нуля в E_* образуют все множества $\Gamma(\bigcup\limits_\alpha U^\iota_\alpha)$, где U^ι_α — произвольный элемент из системы окрестностей нуля пространства E_α. В случае, когда семейство пространства E_α таково, что $E_\alpha \subseteq E_\alpha$ при $\alpha \leqslant \beta$ и индуктивный предел образует относительно непрерывных канонических отображений, множество E отождествимо с $\bigcup\limits_\alpha E_\alpha$.

2. Полунормируемые пространства

Пусть E — векторное пространство над $\mathbf{R}$, на котором определена некоторая полунорма $p(x)$. При помощи полунормы можно ввести в пространство E топологию, определяя окрестности нуля U^{ε} как множества

$$U^{\varepsilon}=\{x:p(x)\leqslant\varepsilon\},\tag{1}$$

где $\varepsilon>0$. Такая топология согласуется со структурой пространства E и полученное окрестностное пространство оказывается топологическим векторным пространством. Векторное пространство, топология которого определена полунормой вышеуказанным способом, называем *полунормированным* или *sn-пространством*, его топологию — *sn-топологией*. Отметим, что в *sn*-пространстве фундаментальную систему окрестностей нуля образуют множества $\frac{1}{n}U^{1}=\left\{\frac{1}{n}x:p(x)\leqslant 1,\ i=1,2,\ldots\right\}$.

Выясним теперь условия, при которых топологическое векторное пространство E над $\mathbf{R}$ является полунормируемым, т. е. когда в E можно ввести такую полунорму, что *sn*-топология в E, определенная этой полунормой, будет совпадать с исходной топологией в E. Ниже мы увидим, что ответ на поставленную проблему согласуется с известным критерием А. Н. Колмогорова о нормируемости топологических векторных пространств [5], который является решением заданной задачи для частного случая — отделимого пространства. Доказательство, данное А. Н. Колмогоровым, в основном сохраняет силу; остается лишь дополнительно рассмотреть некоторые вопросы, возникающие в случае неотделимого пространства. Для этого нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 1. *Пусть U — выпуклая окрестность нуля в E и $a\neq 0$; тогда $M=\bigcap\limits_{a}aU$ является подпространством в E.*

Доказательство. Если $x\in M$, то из определения пересечения следует, что $\lambda x\in M$. Если $x,y\in M$, то $2x$, $2y\in M$; так как U выпукло, то $\frac{1}{2}\cdot 2x+\frac{1}{2}\cdot 2y=x+y\in M$.

Лемма 2. *Пусть в пространстве E дана фундаментальная система окрестностей нуля aU, где U — замкнутое выпуклое множество и $a\neq 0$; если в окрестности U содержится подпространство M, то вместе с каждой $x\in U$ принадлежит к U и смежный класс $x+M$.*

Доказательство. Пусть $x\in U$ и $y\in M$. Тогда $ny\in M$ при любом целом положительном n. Из выпуклости U следует, что $\left(1-\frac{1}{n}\right)x+\frac{1}{n}\cdot ny=\frac{n-1}{n}x+y\in U$. Так как $(x+y)-\left(\frac{n-1}{n}x+\right.$

$+y\Big) = \frac{1}{n} x \in \frac{1}{n} U$, то каждая окрестность точки $x+y$ содержит точки из U и, следовательно, $x+y$ является точкой прикосновения множества U. Ввиду замкнутости U, можем заключить, что $x+y \in U$.

Докажем теперь, что имеет место

Теорема 1. *Топологическое векторное пространство E над* $\mathbf{R}$ *является sn-пространством тогда и только тогда, когда в E существует фундаментальная система окрестностей нуля, элементами которой являются множества вида aU, где a пробегает все положительные и отрицательные числа и U — замкнутое, выпуклое и поглощающее множество.*

Доказательство. Необходимость. В *sn*-пространстве фундаментальной системой окрестностей нуля является система (1), которая удовлетворяет условиям теоремы 1.

Достаточность. Пусть дана фундаментальная система окрестностей нуля

$$\{aU\}, \tag{2}$$

удовлетворяющая условиям теоремы 1. Определим на E числовую функцию

$$p(x) = \sup_{x \in E \setminus aU} |a|. \tag{3}$$

Докажем, что $p(x)$ удовлетворяет аксиомам (SN 1) и (SN 2).

Из определения (3) непосредственно вытекает, что

$$p(\lambda x) = |\lambda| p(x).$$

Кроме того, функция $p(x)$ по лемме 1 обращается в нуль на максимальном подпространстве $M = \bigcap\limits_{a} aU$, содержащемся в U, и только на нем.

При проверке аксиомы (SN 2) следует различать три случая.

Пусть, во-первых, $x, y \in aU$, но $x \,\overline{\in}\, M$, $y \,\overline{\in}\, M$. Если $\lambda \geqslant 0$, $\mu \geqslant 0$, то из выпуклости U следует, что

$$\frac{\lambda x + \mu y}{\lambda + \mu} \in aU.$$

Отсюда вытекает, что при $p(x) \leqslant a$ и $p(y) \leqslant a$ имеем

$$p\left(\frac{\lambda x + \mu y}{\lambda + \mu}\right) \leqslant a.$$

Пусть $p(x) = \lambda$ и $p(y) = \mu$. Так как $x, y \in U \setminus M$, то $\lambda \neq 0$, $\mu \neq 0$. Положим $\alpha = \lambda + \mu$ и рассмотрим точки $x' = \frac{\alpha}{\lambda} x$ и $y' = \frac{\alpha}{\mu} y$. Тогда

$$p(x') = \frac{\alpha}{\lambda} \cdot p(x) = \alpha, \quad p(y') = \frac{\alpha}{\mu} \cdot p(y) = \alpha$$

и

$$p(x+y) = p\left(\frac{\lambda x' + \mu y'}{\lambda + \mu}\right) \leqslant \alpha = \lambda + \mu = p(x) + p(y),$$

чем доказано, что в данном случае имеет место (SN 2).

Во втором случае, когда $x, y \in M$, ясно, что (SN 2) удовлетворена. Остается рассмотреть третью возможность, когда одна точка, например, $x \in U \setminus M$, другая же $y \in M$. Из леммы 2 можно тогда вывести, что $p(x+y) \leqslant p(x)$. Таким образом, функция $p(x)$ является полунормой в пространстве E.

Построим теперь систему окрестностей из множеств

$$U^{\varepsilon} = \{x : p(x) \leqslant \varepsilon\} \tag{4}$$

и покажем, что полученное *sn*-пространство совпадает с исходным пространством.

Пусть aU — произвольная окрестность из (2) и $\varepsilon < a$. Рассмотрим окрестность U^{ε} из системы (4). Если $x \in U^{\varepsilon}$, то из определения $p(x)$ вытекает, что $x \in aU$, т. е. $U^{\varepsilon} \subseteq aU$. С другой стороны, рассмотрим окрестность U^{ε} из (4). Эта окрестность всегда содержит пересечение окрестностей $\frac{1}{2}\varepsilon U$ и $-\frac{1}{2}\varepsilon U$. Действительно, если $x \in \frac{1}{2}\varepsilon U$ и одновременно $x \in -\frac{1}{2}\varepsilon U$, то x принадлежит и ко всякой окрестности bU, где $|b| \geqslant \frac{1}{2}\varepsilon$. Отсюда следует, что $p(x) \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon$, т. е.

$$-\frac{1}{2}\varepsilon U \cap \frac{1}{2}\varepsilon U \subseteq U^{\varepsilon}.$$

Теорема 1 доказана.

3. Пространства, сопряженные к полунормированным пространствам

Пусть E — векторное пространство над $\mathbf{R}$. Наделим пространство E двумя *sn*-топологиями. Полученные *sn*-пространства обозначим через E_{α}, E_{β} и полунормы, определяющие в E_{α} и E_{β} фундаментальные системы окрестностей нуля, соответственно через $p_{\alpha}(x)$ и $p_{\beta}(x)$.

Предположим, что каноническое отображение $g_{\alpha\beta}$ пространства E_{β} на E_{α} является непрерывным. Тогда топология пространства E_{β} сильнее топологии пространства E_{α} и, следовательно, сопряженное пространство $\overline{E}_{\beta}$ содержится в сопряженном пространстве $\overline{E}_{\alpha}$: $\overline{E}_{\beta} \subseteq \overline{E}_{\alpha}$.

Пусть, с другой стороны, $<x, u>$ непрерывная линейная функция из пространства $\overline{E}_\alpha$. Тогда при каждом $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$|<x, u>| \leqslant \varepsilon, \text{ если } x \in U_\alpha^\delta = \{x : p_\alpha(x) \leqslant \delta\}.$$

Ввиду непрерывности $g_{\alpha\beta}$ в пространстве E_β при каждой U_α^δ существует окрестность $U_\beta^{\delta'} = \{x : p_\beta(x) \leqslant \delta'\}$ такая, что $g_{\alpha\beta}(U_\beta^{\delta'}) \subseteq \subseteq U_\alpha^\delta$. Но так как $g_{\alpha\beta}$ — каноническое отображение, то на пространстве E_β

$$|< x, u >| \leqslant \varepsilon, \text{ если } x \in U_\alpha^{\delta'}.$$

Таким образом, каждая линейная функция, непрерывная на E_α, непрерывна и на E_β, т. е. $\overline{E}_\alpha \subseteq \overline{E}_\beta$. Следовательно, мы можем заключить, что имеет место

Предложение 1. *Пусть E — векторное пространство над $\mathbf{R}$, которое наделено двумя sn-топологиями; если эти топологии сравнимы, то соответствующие сопряженные пространства совпадают.*

Относительно канонических отображений мы имеем

Предложение 2. *Пусть топологическое векторное пространство E отображается на себя каноническим отображением g; тогда сопряженное к g отображение g^* является каноническим отображением сопряженного пространства $\overline{E}$ на себя.*

Доказательство. Действительно, если $g(x) = x$, то при каждой $u \in \overline{E}$ и $x \in E$ имеет место $<x, g^*u> = <x, u>$, что является возможным только тогда, когда g^* каноническое отображение.

Предложение 3. *Пусть E — векторное пространство над $\mathbf{R}$ и $\overline{E}_\alpha$, $\overline{E}_\beta$ — sn-пространства, топологии которых согласуются со структурой пространства E; если каноническое отображение $g_{\alpha\beta}$ пространства E_β на E_α непрерывно, то сопряженное отображение $g_{\alpha\beta}^*$ сильного сопряженного $\overline{E}_\alpha$ на сильное сопряженное $\overline{E}_\beta$ непрерывно.*

Доказательство. Рассмотрим в пространстве $\overline{E}_\beta$ какую-нибудь окрестность нуля

$$V_\beta^{A,\varepsilon} = \{u : |< x, u >| \leqslant \varepsilon, \quad x \in A\}, \tag{1}$$

где A — ограниченное множество, т. е. A поглощается каждой окрестностью нуля λU_β, где

$$U_\beta = \{x : p_\beta(x) \leqslant 1\}.$$

Докажем, что A является ограниченным множеством и в пространстве E_α. Пусть U_α — произвольная окрестность нуля в пространстве E_α. В силу непрерывности $g_{\alpha\beta}$ существует окрестность $\lambda' U_\beta$ такая, что $g_{\alpha\beta}(\lambda' U_\beta) = \lambda' U_\beta \subseteq U_\alpha$. Так как A поглощается окрестностью $\lambda' U_\beta$, то оно поглощается и окрестностью U_α. Следовательно, $V_\beta^{A,\varepsilon}$ является окрестностью нуля также в пространстве E_α. Из

$$\overset{*}{g}_{\alpha\beta}(V_\beta^{A,\varepsilon}) = V_\beta^{A,\varepsilon}$$

сразу вытекает непрерывность $\overset{*}{g}_{\alpha\beta}$.

Сделаем еще одно замечание относительно определяющей системы окрестностей нуля для сильной топологии в пространстве, сопряженном к *sn*-пространству. Фундаментальную систему окрестностей нуля в таком пространстве образуют множества вида (1). Рассмотрим совокупность множеств

$$\{aV\}, \text{ где } V = \{u : |<x, u>| \leqslant 1, \ x \in U\} \text{ и } a > 0. \qquad (2)$$

С одной стороны, любое множество aV принадлежит к множествам системы (1). С другой стороны, при заданном $V^{A,\varepsilon}$ существует λ_A такое, что $A \subseteq \lambda_A U$ и поэтому $V^{\lambda_A U,\varepsilon} \subseteq V^{A,\varepsilon}$. Так как $V^{\lambda_A U,\varepsilon} = \frac{1}{\lambda_A} V^{U,\varepsilon} = \frac{1}{\lambda_A} \cdot \varepsilon V$, то можно заключить, что система (2) равносильна системе множеств (1).

Непосредственно проверяется, что система (2) удовлетворяет условиям теоремы 1 и, следовательно, имеет место

Предложение 4. *Сильное сопряженное к sn-пространству является sn-пространством.*

4. Проективные пределы полунормированных пространств

В дальнейшем будем рассматривать проективные спектры и пределы в том случае, когда все пространства E_α являются *sn*-пространствами. Так как каждое *sn*-пространство является локально выпуклым пространством, то имеет место

Предложение 5. *Проективный предел sn-пространств является локально выпуклым пространством.*

Покажем, что верно и обратное:

Теорема 2. *Каждое локально выпуклое пространство является проективным пределом sn-пространств.*

Доказательство. Пусть E — локально выпуклое пространство над **R**, топология которого задана некоторой системой $\Gamma = \{p_\alpha(x)\}$ полунорм на E. Исходя из системы Γ, мы можем построить такую фундаментальную систему окрестностей нуля, которая направлена вправо.

Известно, что в множество полунорм можно ввести отношение порядка следующим образом. Если p и q две полунормы и существует такое постоянное $a > 0$, что $p(x) \leqslant aq(x)$ во всех точках пространства E, то считаем, что $p \leqslant q$. Множество Γ_0 полунорм оказывается направленным вправо, если для любых двух полунорм $p_1, p_2 \in \Gamma_0$ существует полунорма $q \in \Gamma_0$ такая, что $p_1 \leqslant q$ и $p_2 \leqslant q$. Фундаментальную систему окрестностей нуля для топологии, заданной множеством Γ_0, образуют тогда множества λU, где $\lambda > 0$ и

$$U = \{x : p(x) \leqslant 1, \quad p \in \Gamma_0\}.$$

Каково бы ни было множество Γ полунорм на E, можно получить направленное вправо множество полунорм, определяющее ту же топологию, что и Γ, образовав множество Γ_0 верхних граней всевозможных конечных наборов полунорм, принадлежащих к Γ (ср. [1]).

Таким образом, мы можем предположить, что заданное в пространстве E множество Γ полунорм является направленным вправо; фундаментальная система окрестностей нуля состоит из множеств λU_α, где $\lambda > 0$ и

$$U_\alpha = \{x : p_\alpha(x) \leqslant 1\}.$$

Как видно, система $\{\lambda U_\alpha\}$ подразделяется на подсистемы; элементы каждой подсистемы являются произведениями одного фиксированного множества U_α на всевозможные $\lambda > 0$. Обозначим такие подсистемы через (U_α, λ).

В множество подсистем (U_α, λ) можно ввести направление вправо. Мы говорим, что $(U_\alpha, \lambda) \leqslant (U_\beta, \mu)$, если при любом λ существует μ такое, что $\lambda U_\alpha \supseteq \mu U_\beta$. Из направленности вправо множества Γ полунорм сразу вытекает, что и множество подсистем (U_α, λ) направлено вправо. В результате получаем направленное вправо множество индексов α, через которые обозначены подсистемы (U_α, λ). Каждому индексу α отнесем пространство E_α, полученное из векторного пространства E при наделении последнего топологией, определяемой системой окрестностей (U_α, λ). Из теоремы 1 вытекает, что пространства E_α являются sn-пространствами.

Если $\alpha \leqslant \beta$, то каноническое отображение $g_{\alpha\beta}$ пространства E_β на E_α непрерывно: при каждом λU_α найдется μU_β такое, что $g_{\alpha\beta}(\mu U_\beta) = \mu U_\beta \supseteq \lambda U_\alpha$. Таким образом, пространства E_a образуют относительно канонических отображений $g_{\alpha\beta}$ проективный спектр. Рассмотрим проективный предел пространств E_α. Выберем из произведения $\underset{\alpha}{\Pi} E_\alpha = \overset{\circ}{E}$ все нити $x^* = (x_\alpha)$; так как отображения $g_{\alpha\beta}$ канонические, то в каждой нити все «координаты» равны, т. е. $x^* = (x)$. Совокупность всех нитей является проективным пределом E^* sn-пространств, в котором топология пространства $\overset{\circ}{E}$ индуцирует некоторую топологию. Покажем, что отображение φ пространства E^* на E, относящее каждой нити $x^* = (x)$ точку x, будет гомеоморфизмом. Действительно, отображение φ взаимно однозначно. Оно непрерывно: если U_α — произвольная окрестность нуля в E, то рассмотрим в пространстве $\overset{\circ}{E}$ окрестность нуля U, которая получается при фиксировании U_α; в пространстве E^* окрестность U индуцирует окрестность $U^*_\alpha = \{x^* = (x) : x \in U_\alpha\}$. Но тогда $\varphi(U^*_\alpha) = U_\alpha$. Докажем, наконец, что обратное отображение φ^{-1} является непрерывным. Пусть в пространстве E^* задана окрестность нуля U^*. По определению U^* является пересечением пространства E^* с некоторой окрестностью нуля $\overset{\circ}{U}$ пространства $\overset{\circ}{E}$. Предположим, что в топологическом произведении $\overset{\circ}{E}$ окрестность $\overset{\circ}{U}$ получается при зафиксировании базисных элементов $U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_n}$. В таком случае, U^* состоит из нитей, «координаты» которых содержатся в пересечении всех U_{α_i}:

$$U^* = \{x^* = (x) : x \in U_{\alpha_i}, \quad i = 1, \ldots, n\}.$$

Выбирая в пространстве E окрестность $U \subseteq U_{\alpha_1} \cap \ldots \cap U_{\alpha_n}$, получаем, что $\varphi^{-1}(U) \subseteq U^*$, откуда следует непрерывность φ^{-1}. Теорема 2 доказана.

5. Индуктивные пределы пространств, сопряженных к полунормированным пространствам

По теореме 2 каждое локально выпуклое пространство E является проективным пределом *sn*-пространств E_α относительно канонических отображений $g_{\alpha\beta}$. На основе предложения 3 можно вывести, что сопряженные пространства $\bar{E}_\alpha$ образуют относительно сопряженных отображений $\overset{*}{g}_{\alpha\beta}$ индуктивный спектр, который мы будем называть *сопряженным к пространству E индуктивным спектром*. Индуктивный предел пространств $\bar{E}_\alpha$ относительно отображений $\overset{*}{g}_{\alpha\beta}$ назовем *сопряженным к E индуктивным пределом пространств* $\bar{E}_\alpha$ и обозначим через E_*. Так как $\bar{E}_\alpha = \bar{E}_\beta$ при $\alpha \leqslant \beta$, то сопряженный индуктивный предел E_* отождествим с $\bigcup\limits_\alpha E_\alpha$. Из аксиомы (SO 3) и предложения 1 следует, что все $\bar{E}_\alpha$ совпадают, т. е. $\bigcup\limits_\alpha E_\alpha = \bar{E}_\alpha$. Таким образом, пространство E_* алгебраически изоморфно любому из пространств $\bar{E}_\alpha$.

Относительно индуктивного предела пространств $\bar{E}_\alpha$ докажем следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть локально выпуклое пространство E является проективным пределом вышеуказанных sn-пространств E_α; тогда сопряженный к E индуктивный предел E_* гомеоморфен с сопряженным к E пространством $\bar{E}$.*

Доказательство. Если $u \in E_*$, то она непрерывна по крайней мере на одном E_α: при любом $\varepsilon > 0$ существует $\lambda > 0$ такое, что

$$|\langle x, u\rangle| \leqslant \varepsilon, \text{ если } x \in \lambda U_\alpha.$$

Но λU_α является окрестностью нуля и в пространстве E. Значит, если рассматривать u как функцию на E, то при любом $\varepsilon > 0$ существует окрестность нуля $U = \lambda U_\alpha$, так что

$$|\langle x, u\rangle| \leqslant \varepsilon, \text{ если } x \in U,$$

т. е. $u \in E$, и, тем самым, $E_* \subseteq \bar{E}$.

Предположим, далее, что $u \in \bar{E}$. Тогда при данном $\varepsilon > 0$ существуют α и λ такие, что если

$$y \in \lambda U_\alpha = \{\lambda x : p_\alpha(x) \leqslant 1\},$$

то

$$|\langle y, u\rangle| = |\langle \lambda x, u\rangle| \leqslant \varepsilon.$$

Докажем, что тогда u непрерывна по крайней мере на пространстве E_α (и, следовательно, на всех E_α). Рассмотрим при любом $\varepsilon' > 0$ окрестность $\lambda' U_\alpha$, где $\lambda' = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\lambda$. Если $z \in \lambda' U_\alpha$, то

$$|< z, u >| = |< \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \lambda x, u >| = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} < \lambda x, u > \leqslant \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \cdot \varepsilon = \varepsilon'.$$

Таким образом, $\bar{E} \subseteq E_*$, и в силу предыдущего результата мы можем заключить, что $E_* = \bar{E}$.

Для дальнейшего доказательства теоремы предположим, что в пространстве $\bar{E}$ определена сильная топология при помощи системы $\{V^{A,\varepsilon}\}$ окрестностей, где

$$V^{A,\varepsilon} = \{u : |< x, u >| \leqslant \varepsilon, \quad x \in A\}$$

и A — ограниченное множество. Рассмотрим каноническое отображение ψ пространства E' на себя и докажем, что ψ гомеоморфно отображает E_* на $\bar{E}$. Для этого требуется лишь показать, что отображение ψ взаимно непрерывно.

Непрерывность ψ. Пусть в пространстве $\bar{E}$ задана окрестность нуля $V^{A,\varepsilon}$, где A — ограниченное множество, т. е. при каждом U_α существует λ_α такое, что $A \subseteq \lambda_\alpha U_\alpha$. В пространстве $\bar{E}_\alpha$ рассмотрим сильную окрестность

$$V_\alpha^{\lambda_\alpha U_\alpha, \varepsilon} = \{u : |< x, u >| \leqslant \varepsilon, \quad x \in \lambda_\alpha U_\alpha\}.$$

Так как $A \subseteq \lambda_\alpha U_\alpha$, то

$$\psi(V_\alpha^{\lambda_\alpha U_\alpha, \varepsilon}) = V_\alpha^{\lambda_\alpha U_\alpha, \varepsilon} \subseteq V^{A,\varepsilon}$$

при каждом α и, следовательно,

$$\psi(\bigcup_\alpha V_\alpha^{\lambda_\alpha U_\alpha, \varepsilon}) \subseteq V^{A,\varepsilon}.$$

Окрестность $\Gamma(\bigcup_\alpha V^{\lambda_\alpha U_\alpha, \varepsilon})$ состоит из элементов вида

$$v = \mu_1 u_{\alpha_1} + \ldots + \mu_n u_{\alpha_n}, \text{ где } u_{\alpha_i} \in V_{\alpha_i}^{\lambda_{\alpha_i} U_{\alpha_i}, \varepsilon} \quad \text{и} \quad \sum_1^n |\mu_i| = 1.$$

Но тогда при $x \in A$

$$|< x, v >| = |\mu_1 \cdot < x, u_{\alpha_i} > + \ldots + \mu_n \cdot < x, u_{\alpha_n} >| \leqslant$$
$$\leqslant |\mu_1 + \ldots + \mu_n| \cdot \varepsilon = \varepsilon,$$

т. е.

$$\psi[\Gamma(\bigcup_\alpha V_\alpha^{\lambda_\alpha U_\alpha,\varepsilon})] = \Gamma(\bigcup_\alpha V_\alpha^{\lambda_\alpha U_\alpha,\varepsilon}) \subseteq V^{A,\varepsilon},$$

что и требовалось доказать.

Непрерывность ψ^{-1} доказывается следующим образом: если $V = \Gamma(\bigcup_\alpha V_\alpha^{A_\alpha,\varepsilon_\alpha})$ произвольная окрестность в E_*, то каждая $V_\alpha^{A_\alpha,\varepsilon_\alpha}$ является и окрестностью нуля в $\bar{E}$, и поэтому

$$\psi^{-1}(V_\alpha^{A_\alpha,\varepsilon_\alpha}) = V_\alpha^{A_\alpha,\varepsilon_\alpha} \subseteq V.$$

Теорема 3 полностью доказана.

6. Второе сопряженное пространство

Мы видели, что проективный предел E^* пространств E_α относительно отображений $g_{\alpha\beta}$ совпадает с E и индуктивный предел E_* сильных сопряженных $\bar{E}_\alpha$ относительно отображений $\overset{*}{g}_{\alpha\beta}$ отождествим с $\bar{E}$. На основе предложений 3 и 4 можно заключить, что вторые сильные сопряженные $\bar{\bar{E}}_\alpha$ являются sn-пространствами, алгебраически изоморфными между собою, и образуют проективный спектр относительно отображений $(g^*_{\alpha\beta})^* = g^{**}_{\alpha\beta}$. Докажем теперь, что имеет место

Теорема 4. *Проективный предел E^{**} вторых сильных сопряженных $\bar{\bar{E}}_\alpha$ относительно отображений $g^{**}_{\alpha\beta}$ гомеоморфен $\bar{\bar{E}}$.*

Доказательство. О. Такеноути [6] и Ж. Себаштьян-и-Силва показали [3], *что пространство, сопряженное к индуктивному пределу локально выпуклых пространств относительно отображений $g_{\alpha\beta}$, алгебраически изоморфно проективному пределу сопряженных пространств относительно сопряженных отображений $g^*_{\alpha\beta}$*. Таким образом, пространство $\bar{\bar{E}}$ изоморфно пространству E^{**}. Взаимно однозначное отображение χ пространства $\bar{\bar{E}}$ на E^{**} осуществляется при этом следующим образом. Пусть f — произвольный элемент из $\bar{\bar{E}}$ и g^α — инъекция $\bar{E}_\alpha$ в $\bar{E}$. Положим $< u_\alpha, f_\alpha > = < g^\alpha(u_\alpha), f >$ для каждого $u_\alpha \in \bar{E}_\alpha$ и каждого $\alpha \in$ A; тогда f_α будет элементом пространства $\bar{\bar{E}}_\alpha$. С другой стороны, $f_\alpha = g_\alpha(f)$, где g_α — линейное отображение $\bar{\bar{E}}$ в $\bar{\bar{E}}_\alpha$. Тогда f можно отождествить с элементом (f_α) из проективного предела пространств $\bar{\bar{E}}_\alpha$ относительно отображений $g^{**}_{\alpha\beta}$. Нам остается доказать, что χ — взаимно однозначное отображение.

Пусть, с одной стороны, в E^{**} дана некоторая окрестность W^{**}, которая получена при фиксировании множеств $W^{M_{\alpha_1},\mu_1}, \ldots, W^{M_{\alpha_n},\mu_n}$, где $W^{M_{\alpha_i},\mu_i}$ — окрестность в пространстве $\bar{\bar{E}}_{\alpha_i}$, определенная как множество

$$W^{M_{\alpha_i},\mu_i} = \{f : |<u, f>| \leqslant \mu_i, \quad u \in M_{\alpha_i}\},$$

где M_{α_i} — ограниченное множество в $\bar{E}_{\alpha_i}$. Так как топология пространства E мажорируется топологией каждого пространства E_α, то множества M_{α_i} являются ограниченными в пространстве $\bar{E}$ и, следовательно, множества $W^{M_{\alpha_i},\mu_i}$ оказываются окрестностями нуля и в пространстве $\bar{\bar{E}}$. Выбирая в $\bar{\bar{E}}$ окрестность $W \subseteq \bigcap_i W^{M_{\alpha_i},\mu_i}$, мы видим, что $\chi(W) \subseteq W^{**}$.

Предположим, с другой стороны, что в $\bar{\bar{E}}$ дана какая-нибудь окрестность нуля

$$W^{M,\mu} = \{f : |<u, f>| \leqslant \mu, \quad u \in M\},$$

где M поглощается каждой окрестностью нуля $V^{A,\varepsilon}$, в том числе и окрестностями $V^{\lambda U_\alpha,\varepsilon}$ при всяких $\lambda > 0$ и U_α. Докажем, что $W^{M,\mu}$ является окрестностью нуля в каждом пространстве $\bar{\bar{E}}_\alpha$. Для этого покажем, что M ограничено во всяком пространстве $\bar{E}_\alpha$. Рассмотрим в пространстве $\bar{E}_\alpha$ произвольную окрестность

$$V_\alpha^{B,\varepsilon} = \{u : |<x, u>| \leqslant \varepsilon, \quad x \in B\},$$

где B — некоторое ограниченное множество, т. е. имеется λ' такое, что $B \subseteq \lambda' U_\alpha$. Тогда $V^{\lambda' U_\alpha,\varepsilon} \subseteq V^{B,\varepsilon}$. Так как M ограничено в $\bar{E}$, то существует $\bar{\lambda}$ такое, что $M \subseteq \bar{\lambda} V^{\lambda' U_\alpha,\varepsilon}$ и, значит, тем более $M \subseteq \lambda V_\alpha^{B,\varepsilon}$. Итак, M ограничено в $\bar{E}_\alpha$, и, следовательно, $W^{M,\mu}$ является окрестностью нуля в $\bar{\bar{E}}_\alpha$. Выберем теперь из фундаментальной системы окрестностей нуля пространства E^{**} окрестность $W = E^{**} \cap (\prod_\alpha W_\alpha)$, где при одном произвольном индексе α взята $W_\alpha = W^{M,\mu}$, а при всех остальных $W_\alpha = \bar{\bar{E}}_\alpha$. Тогда $\chi^{-1}(W^{**}) \subseteq W^{M,\mu}$, чем и завершается доказательство теоремы 4.

Литература

1. Бурбаки Н., Топологические векторные пространства. Москва, 1959.
2. Райков Д. А., Вполне непрерывные спектры локально выпуклых пространств. Тр. Моск. матем. о-ва, 1958, **7**, 413—438.
3. Себаштьян-и-Силва Ж., О некоторых классах локально выпуклых пространств, важных в приложениях. Математика. Период. сб. перев. ин. статей, 1957, **1**, № 1, 60—77.
4. Dieudonnè, J., Recent developments in the theory of locally convex vector spaces. Bull. Amer. Math. Soc., 1953, **59**, 495—512.
5. Kolmogoroff, A., Zur Normierbarkeit eines allgemeinen topologischen linearen Raumes. Studia Math., 1934, **5**, 29—33.
6. Takenouchi, O., Sur les espaces lineaires localement convexes. Math. J. Okayama Univ., 1952, **2**, 57—84.

Поступило
1 VIII 1963

LOKAALSELT KUMERATE RUUMIDE SEOSEST POOLNORMEERITUD RUUMIDEGA

H. Epler

Resümee

Töös näidatakse, et mis tahes lokaalselt kumera ruumi korral on võimalik konstrueerida teatud ruumide hulk. Sellesse hulka kuuluvad ruumid on algebraliselt isomorfsed antud ruumiga ja igaühes neis on topoloogia määratud ühe poolnormi abil, mis sõltub antud ruumi topoloogiat määravast poolnormide süsteemist. Tõestatakse, et antud ruum on homöomorfne selliste ruumide projektiivse piiriga. Antud ruumi tugev kaasruum ühtib nimetatud ruumide tugevate kaasruumide induktiivse piiriga, teine tugev kaasruum teiste tugevate kaasruumide projektiivse piiriga jne.

ÜBER DEN ZUSAMMENHANG LOKALKONVEXER RÄUME MIT HALBNORMIERTEN RÄUMEN

H. Epler

Zusammenfassung

Es wird gezeigt, daß bei einem beliebigen lokalkonvexen Raum E es möglich ist, eine bestimmte Menge von Räumen zu konstruieren. Jeder zu dieser Menge gehörige Raum ist mit E algebraisch isomorph, und in jedem von ihnen ist die Topologie durch eine Halbnorm bestimmt, die von dem die Topologie von E definierenden System von Halbnormen abhängt. Es wird bewiesen, daß E zum projektiven Limes solcher Räume homöomorph ist. Der starke Dual zu E stimmt mit dem induktiven Limes der starken Duale, der starke Bidual mit dem projektiven Limes der starken Biduale genannter Räume überein usw.

К ОСНОВАНИЯМ ГЛОБАЛЬНОЙ ТЕОРИИ СВЯЗНОСТЕЙ

Ю. Лумисте
Кафедра алгебры и геометрии

Содержание

§ 1. Расслоенное пространство.

1.1. Действие группы Ли на дифференцируемом многообразии.
1.2. Главное расслоенное пространство.
1.3. Расслоенное пространство с однородными слоями.
1.4. Фактор-пространство главного расслоенного пространства.
1.5. Приведение структурной группы.
1.6. Приклеивание секущей поверхности к фактор-пространству.

§ 2. Понятие связности в расслоенном пространстве.

2.1. Путь.
2.2. Понятие связности.
2.3. Горизонтальные пути и секущие поверхности.
2.4. Группа голономии.

§ 3. Способы задания линейной связности в главном расслоенном пространстве.

3.1. Горизонтальное распределение.
3.2. Задание связности горизонтальным распределением.
3.3. Универсальная форма связности.
3.4. Формы типа ad$G$ и полубазовые формы.
3.5. Форма кривизны.
3.6. Алгебра Ли группы голономии.

§ 4. Связность в фактор-пространстве и в приведенном пространстве.

4.1. Связность в фактор-пространстве.
4.2. Связность Картана для приклеенной секущей поверхности.
4.3. Индуцированная связность в приведенном пространстве в случае редуктивного типового слоя.
4.4. Соотношения между формами.

Введение

Теория связностей в дифференцируемых расслоенных пространствах с однородными слоями является хорошо разработанной частью современной дифференциальной геометрии (см.

[2, 4, 6, 11, 16]). Однако в своих основаниях эта теория еще довольно разнообразна у различных авторов. Можно отметить следующие две основных концепции.

Чаще всего связность понимается как некоторый закон, который инфинитезимально определяет параллельное перенесение и задается или объектом связности, или 1-формой со значениями в алгебре Ли структурной группы, или горизонтальным распределением. Эта линия ведет от первых идей Леви-Чивита к глобальной формулировке связности у Эресмана [14], и развивалась дальше в работах А. Лихнеровича [4], К. Номидзу [6, 18], Ш. Чженя [11], С. Кобаяси [16] и др.

Другая концепция дана Э. Картаном [12] и развита главным образом В. В. Вагнером [1] и Г. Ф. Лаптевым [2]. Связность понимается здесь также инфинитезимально как некоторый закон, определяющий в главном отображение бесконечно близких слоев друг на друга. В этом направлении Г. Ф. Лаптев развивал в последнее время сильный аналитический аппарат [3], который, однако, носит пока еще локальный характер.

В настоящей работе при изложении глобальной теории связностей использованы достижения в обоих названных направлениях. Связность определяется здесь в рамках второй концепции сразу для общего расслоенного пространства как отображение множества путей в базе в множество диффеоморфизмов слоя на слой, удовлетворяющее определенным условиям. Такие понятия для линейной связности в главном расслоенном пространстве, как горизонтальное распределение, форма связности и др., получаются как производные понятия. Тот факт, что они, обратно, однозначно определяют связность, служит основой для соответствующих способов задания связности.

Вместо расслоенного пространства с однородным типовым слоем, присоединенного к главному, в работе систематически пользуются фактор-пространством главного расслоенного пространства по подгруппе Ли структурной группы. Рассмотрение связностей и секущих поверхностей в фактор-пространствах и индуцированных связностей в приведенных пространствах позволяет в развиваемую схему включить очень широкий класс проблем современной дифференциальной геометрии.

§ 1. Расслоенное пространство

1.1. Действие группы Ли на дифференцируемом многообразии. Пусть заданы группа Ли G и дифференцируемое[1] многообразие Γ. Гомоморфизм φ группы G в

---

[1] Всегда подразумевается дифференцируемость класса C^{∞}, хотя во многих случаях класс может быть понижен.

группу диффеоморфизмов многообразия Γ, при котором определяемое им отображение $f:\Gamma\times G\to\Gamma$ является дифференцируемым, называется *действием группы* G на многообразии Γ. Образ элемента $g\in G$ при этом гомоморфизме φ называется *действием элемента* g на Γ. Если обозначить

$$f(z, g) = z\cdot g\in\Gamma, \quad z\in\Gamma, \quad g\in G,$$

то свойство отображения φ быть гомоморфизмом означает следующее:

$$(z\cdot g)\cdot g' = z\cdot(gg'). \tag{1.1}$$

Ядро K гомоморфизма φ называется ядром неэффективности действия. Действие G на Γ называется *эффективным*, если ядро неэффективности состоит только из единицы группы G. Переходом к фактор-группе G/K можно неэффективное действие G на Γ всегда заменить эффективным действием G/K на Γ (теорема о гомоморфизме).

Две точки в Γ называются эквивалентными по действию группы G, если в G существует элемент, действие которого на Γ переводит первую точку во вторую. Аксиомы эквивалентности, очевидно, удовлетворены. Классы в Γ по этому отношению эквивалентности называются *классами интранзитивности* (или *орбитами*) действия G на Γ. Множество классов интразитивности называется фактор-множеством Γ/G. Отображение $p:\Gamma$ на Γ/G, ставящее каждому $z\in\Gamma$ в соответствие содержащий его класс интранзитивности в Γ/G, называется *канонической проекцией*.

Действие G на Γ называется *транзитивным*, если существует только один класс интразитивности, совпадающий с Γ. Если G действует на Γ эффективно и транзитивно, то Γ называется однородным пространством с группой движений G. В случае эффективного нетранзитивного действия однородным является каждый класс интранзитивности.

Множество H элементов h в группе G, действия которых на Γ оставляют неподвижной точку $x\in\Gamma$, т. е. таких, что $x\cdot h = x$, является группой Ли и называется стационарной подгруппой точки x. Эффективность действия G на Γ равносильна требованию, чтобы H не содержала нетривиальных нормальных делителей K группы G. В силу известной теоремы (см. [7], стр. 154) пара (Γ, G), состоящая из однородного пространста Γ и его группы движений G, изоморфна с парой $(G/H, G)$, где G/H является многообразием левых смежных классов в G по стационарной подгруппе H некоторой точки $x\in\Gamma$, и группа G действует на G/H левыми фактор-сдвигами.

Если стационарная подгруппа H некоторой точки $x\in\Gamma$ состоит только из единицы $e\in G$, то говорят, что действие G на Γ является *простым*. Простое действие всегда эффективно. Простое транзитивное действие называется *просто-транзитивным*. Тогда пара (Γ, G) изоморфна с парой (G, G).

1.2. Главное расслоенное пространство. Дифференцируемое многообразие E называется *главным расслоенным пространством*, если на нем определено простое действие группы Ли G, так что

E1. *Фактор-множество* $E/G = V$ *является дифференцируемым многообразием и каноническая проекция* $p : E$ *на* V *является дифференцируемым отображением* (условие фактор-дифференцируемости),

E2. *Каждая точка* $x \in V$ *имеет окрестность* $U \subset V$, *для которой существует дифференцируемый гомеоморфизм*

$$\mu : U \text{ в } p^{-1}(U)$$

со свойством:

$$p\,\mu\,(x') = x'$$

при любом $x' \in U$ (условие локальной тривиальности).

В таком случае вводится обозначение $E(V, G)$ и применяются следующие названия: V — *база*, G — *структурная группа*, $p^{-1}(x)$ — *слой* над x, μ — *локальное сечение* над U, и $\mu(U)$ — *локальная секущая поверхность* над U.

Слой $p^{-1}(x)$, проходящий через точку $z \in E$ (так, что $p(z) = x$), обозначается также через G_z.

Простое действие группы G на E определяет для каждой точки $z \in E$ диффеоморфизм

$$\gamma_z : G \text{ на } G_z,$$

который определяется формулой

$$\gamma_z(g) = z \cdot g.$$

Этот диффеоморфизм γ_z называется *фундаментальным диффеоморфизмом* в точке $z \in E$.

Вместе с локальным сечением μ над $U \subset V$ существует диффеоморфизм

$$\varphi : U \times G \text{ на } p^{-1}(U),$$

определяемый формулой

$$\varphi(x', g) = \mu(x') \cdot g \tag{1.2}$$

и называемый *локальным диффеоморфизмом* над U. При этом, в силу (1.1),

$$\varphi(x', gg') = \varphi(x', g) \cdot g'. \tag{1.3}$$

Обратно, если существует локальный диффеоморфизм $\varphi : U \times G$ *на* $p^{-1}(U)$, при котором справедливо (1.2) и $p\varphi(x', g) = x'$, то вместе с ним определена секущая поверхность над U, состоящая из точек

$$\mu(x') = \varphi(x', e), \quad x' \in U.$$

Следует отметить, что локальное сечение μ над U и локальный диффеоморфизм $\varphi : U \times G$ *на* $p^{-1}(U)$, если они существуют для данной области $U \subset V$, могут быть выбраны с большим произволом.

Вместе с локальным диффеоморфизмом φ определены еще следующие дифференцируемые отображения.

Обратный диффеоморфизм $\varphi^{-1} : p^{-1}(U)$ *на* $U \times G$ определяет, кроме проекции $p : p^{-1}(U)$ *на* U, дифференцируемое отображение $\psi : p^{-1}(U)$ *на* G, которое называется *локальной проекцией* на структурную группу G, так, что

$$\varphi(p(z),\, \psi(z)) = z \in p^{-1}(U).$$

Вместе с φ задан также диффеоморфизм

$$\varphi^x : G \textit{ на } p^{-1}(x)$$

структурной группы G на слой $p^{-1}(x)$, который определяется следующим образом:

$$\varphi^x(g) = \varphi(x, g) = \mu(x) \cdot g = \gamma_{\mu(x)} g, \qquad g \in G,$$

и, следовательно, совпадает с фундаментальным диффеоморфизмом в точке локальной секущей поверхности $\mu(x)$.

Очевидно, что

$$\psi(z) = (\varphi^{p(z)})^{-1}(z).$$

В силу условия 2) в определении главного расслоенного пространства существует открытое покрытие $\{U_\alpha\}$ базы V, так что над каждой U_α имеется локальное сечение μ_α и соответствующий локальный диффеоморфизм φ_α. Пусть $x \in U_\alpha \cap U_\beta \neq 0$; пусть задан некоторый элемент $g \in G$. Обозначив $\psi_\beta(\varphi^x_\alpha(g)) = \overline{g}$, имеем:

$$\varphi^x_\alpha(g) = \varphi^x_\beta(\overline{g}).$$

При этом, в силу (1.2),

$$\varphi^x_\beta(g') = \varphi^x_\beta(\overline{g})(\overline{g}^{-1}g') = \varphi^x_\alpha(g)(\overline{g}^{-1}g') = \varphi^x_\alpha(g\overline{g}^{-1}g').$$

Это показывает, что диффеоморфизм

$$(\varphi^x_\alpha)^{-1}\varphi^x_\beta : G \textit{ на } G$$

является левым сдвигом в группе G:

$$(\varphi^x_\alpha)^{-1}\varphi^x_\beta = l^x_{\alpha\beta},$$

который определяется элементом $g^x_{\alpha\beta} = g\overline{g}^{-1}$.

Последнее равенство можно писать также в виде:

$$\psi_\alpha(z) = g^{p(z)}_{\alpha\beta}\,\psi_\beta(z).$$

Дифференцируемые отображения

$$f_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \text{ в } G,$$

определяемые формулой

$$f_{\alpha\beta}(x) = g^x_{\alpha\beta},$$

называются *переходными функциями*. Они, очевидно, обладают свойством

$$f_{\alpha\gamma}(x) = f_{\alpha\beta}(x) f_{\beta\gamma}(x). \tag{1.4}$$

Если задано открытое покрытие $\{U_\alpha\}$ дифференцируемого многообразия V и множество дифференцируемых отображений $f_{\alpha\beta}$ всевозможных пересечений $U_\alpha \cap U_\beta \neq 0$ в группу Ли G, так что выполняются соотношения (1.4), то всегда существует главное расслоенное пространство $E(V, G)$, для которого $f_{\alpha\beta}$ являются переходными функциями (см. [6], стр. 34).

1.3. Расслоенное пространство с однородными слоями. Пусть в структурной группе Ли G главного расслоенного пространства $E(V, G)$ выделена замкнутая подгруппа Ли H. Вместе с действием G на E определено также действие подгруппы H на E. Для изучения новой структуры в E, порожденной действием подгруппы H, необходимо ввести следующее обобщение главного расслоенного пространства.

Говорят, что дифференцируемое многообразие E^* обладает структурой *расслоенного пространства с однородными слоями*, если существуют

a) дифференцируемое всюду регулярное отображение $p^* : E^*$ *на* V (*проекция*) многообразия E^* на дифференцируемое многообразие V (на *базу*),

b) пара (Γ, G), состоящая из однородного пространства Γ (*типового слоя*) и его группы движений G (*структурной группы*),

c) открытое покрытие $\{U_\alpha\}$ базы V и семейство локальных диффеоморфизмов

$$\varphi_\alpha^* : U_\alpha \times \Gamma \text{ на } p^{*-1}(U_\alpha),$$

d) дифференцируемые отображения

$$f_{\alpha\beta}^* : U_\alpha \cap U_\beta \text{ в } G$$

(*переходные функции*), так что

E* 1. $p^* \varphi_\alpha^*(x, y) = x, \quad x \in U_\alpha, \; y \in \Gamma,$

E* 2. $\varphi_\alpha^*(x, y) = \varphi_\beta^*(x, y \cdot f_{\alpha\beta}^*(x)),$

E* 3. $f_{\alpha\beta}^*(x) \, f_{\beta\gamma}^*(x) = f_{\alpha\gamma}^*(x).$

Многообразие E^* в таком случае обозначается $E^*(V, \Gamma, G, p^*, \{U_\alpha\}, \{\varphi_\alpha{}^*\})$. Прообраз $p^{*-1}(x), x \in V$, называется *слоем* над x. Слой, проходящий через точку $z \in E^*$, обозначается также через Γ_z.

Пусть в базе V задано некоторое дифференцируемое подмногообразие $V' \subset V$. *Локальным сечением* над V' называется диффеоморфизм $\mu^* : V'$ *в* $p^{*-1}(V')$ со свойством $p^*\mu^*(x) = x \in V'$, если он существует. Образ $\mu^*(V')$ называется тогда секущей поверхностью над V'. Подмногообразие $V' \subset V$ может, в частности, оказаться областью $U \subset V$, а в некоторых случаях совпадать со всей базой V. Если $V' = V$, то $\mu^*(V)$ называется глобальной секущей поверхностью в E^*.

Если существует диффеоморфизм $\varphi^* : U \times \Gamma$ *на* $p^{*-1}(U)$, то φ^{*-1} определяет, также как в п. 2, кроме проекции p^*, дифференцируемое отображение $\psi^* : p^{*-1}(U)$ *на* Γ, так что

$$\varphi^*(p^*(z),\ \psi^*(z)) = z \in p^{*-1}(U). \tag{1.5}$$

Полный прообраз $\psi^{*-1}(y_0)$ фиксированной точки типового слоя Γ является тогда примером секущей поверхности над областью U. Формулой

$$\varphi^{*x}(y) = \varphi^*(x,\ y) \tag{1.6}$$

определяется диффеоморфизм φ^{*x} типового слоя Γ на слой $p^{*-1}(x)$.

Обобщение, сделанное в настоящем пункте по сравнению с предыдущим, состоит, в частности, в том, что на общем расслоенном пространстве не всегда определено инвариантное действие структурной группы. Поэтому из существования локального сечения μ^* над $U \subset V$ в общем случае не следует локальная тривиальность, т. е. существование локального диффеоморфизма $\varphi^* : U \times \Gamma$ *на* $p^{*-1}(U)$.

Инвариантное действие структурной группы G на $E(V, \Gamma, G, p^* \{U_\alpha\}, \{\varphi^*{}_\alpha\})$ определено всегда только в том случае, если G действует на Γ просто-транзитивно, т. е. если пара (Γ, G) изоморфна с парой (G, G).

Именно, имеет место

Лемма 1. *Расслоенное пространство* $E(V, G, G, p^*, \{U_\alpha\}, \{\varphi_\alpha{}^*\})$ *является главным.*

Доказательство. Формулой

$$\varphi_\alpha{}^*(x, g') \cdot g = \varphi_\alpha{}^*(x, g'g)$$

задается действие группы G на каждом прообразе $p^{*-1}(U_\alpha)$, причем на пересечениях $U_\alpha \cap U_\beta \neq 0$ эти действия совпадают: если $\varphi_\alpha{}^*(x, g') = \varphi_\beta{}^*(x, g'')$, где $g'' = f_{\alpha\beta}(x) g'$, то

$$\varphi_\alpha^*(x, g'') \cdot g = \varphi_\beta^*(x,\ f_{\alpha\beta}(x)g'g) = \varphi_\alpha^*(x, g'\,g) = \varphi_\alpha^*(x, g') \cdot g.$$

С помощью понятия изоморфизма

$$E^*(V, \Gamma, G, p^*, \{U_\alpha\}, \{\varphi_\alpha^*\}) \sim E^{*\prime}(V', \Gamma', G', p^{*\prime}, \{U_\alpha'\}, \{\varphi_\alpha^{*\prime}\})$$

расслоенных пространств, которое можно определить естественным образом, использовав понятия диффеоморфизма базы V на базу V' и изоморфизма между парами (Γ, G) и (Γ', G'), можно сформулировать следующий результат.

Лемма 1'. *Расслоенное пространство изоморфно некоторому главному расслоенному пространству тогда и только тогда, когда G действует на Γ просто-транзитивно.*

1.4. Фактор-пространство главного расслоенного пространства. Можно указать одну общую конструкцию для получения расслоенных пространств с однородными типовыми слоями из главных.

Теорема 1. *Пусть в структурной группе G главного расслоенного пространства $E(V, G)$ выделена замкнутая подгруппа Ли H. Действие H на E определяет в E новую структуру $E(V^*, H)$ главного расслоенного пространства. Базой этой структуры является некоторое расслоенное пространство*

$$V^* = E^*(V,\ G/H,\ G/K,\ p^*,\ \{U_\alpha\},\ \{\varphi_\alpha^*\}),$$

где K — максимальный нормальный делитель группы G, содержащийся в подгруппе H.

Доказательство. Известно, что правостороннее действие подгруппы H на G определяет в G структуру главного расслоенного пространства, базой которой является аналитическое многообразие G/H левых смежных классов в G по H ([10], стр. 163, [8], стр. 42). Определяется каноническая проекция

$$\chi : G \text{ на } G/H.$$

В многообразии E определяется проекция

$$\pi : E \text{ на } E/H,$$

где $E/H = V^*$ является множеством классов интранзитивности в E по H. Очевидно,

$$\pi(z) = \pi(z \cdot h),\ z \in E,\ h \in H.$$

Оказывается, что E/H является расслоенным пространством $E^*(V,\ G/H,\ G/K,\ p^*,\ \{U_\alpha\},\ \{\varphi_\alpha^*\})$.

Прежде всего нужно доказать, что E/H является дифференцируемым многообразием.

Локальные диффеоморфизмы $\varphi_\alpha : U_\alpha \times G$ на $p^{-1}(U_\alpha)$ определяют также диффеоморфизмы

$$\varphi_\alpha{}^* : U_\alpha \times G/H \text{ на } p^{*-1}(U_\alpha), \tag{1.7}$$

где $p^* : E/H$ на V является проекцией, ставящей классу интранзитивности $z^* \in E/H$ в соответствие ту точку $x \in V$, слой $p^{-1}(x)$ над которой содержит z^*, так что

$$p(z) = p^* \pi(z).$$

Это следует из того, что в силу (1.2)

$$\varphi_\alpha(x, g) \cdot H = \varphi_\alpha(x, gH), \tag{1.8}$$

и поэтому совокупность пар $(x, gH) \in U_\alpha \times G/H$ отображается при φ_α в класс интранзитивности $\varphi_\alpha(x, g) \cdot H$ в E по H. Это отображение и определяет диффеоморфизм (1.7) (ср. [10], стр. 48, 49). При этом, в силу (1.8),

$$\varphi_\alpha{}^*(x, \chi(g)) = \pi(\varphi_\alpha(x, g)). \tag{1.9}$$

Если на аналитическом многообразии G/H ввести координатный атлас $\{W_\varrho\}$, то для множества E/H определено открытое покрытие областями типа $\varphi_\alpha{}^*(U_\alpha, W_\varrho)$. Нетрудно убедиться, что переход от координат в области $\varphi_\alpha{}^*(U_\alpha, W_\varrho)$ к координатам в области $\varphi_\beta{}^*(U_\beta, W_\sigma)$ (в случае непустого пересечения областей) совершается обратимой системой дифференцируемых функций.

Тем самым доказано, что E/H является дифференцируемым многообразием. Вместе с тем указаны понятия, предусмотренные в пунктах а) — с) определения расслоенного пространства (нужно взять $\Gamma = G/H$, а G заменить на G/K). Переходные функции $f^*_{\alpha\beta}$ определяются равенством

$$f^*_{\alpha\beta} = \varkappa f_{\alpha\beta},$$

где $\varkappa : G$ на G/K является каноническим отображением группы G на фактор-группу G/K.

Условия 1° и 2° в определении расслоенного пространства при этом удовлетворены. Действительно,

$$1^\circ \quad p^*\varphi_\alpha{}^*(x, \chi(g)) = p^*\pi\varphi_\alpha(x, g) = p\varphi_\alpha(x, g) = x,$$

$$\begin{aligned} 2^\circ \quad \varphi_\alpha{}^*(x, \chi(g)) &= \pi\varphi_\alpha(x, g) = \pi\varphi_\beta(x, f_{\alpha\beta}(x) g) = \\ &= \varphi_\beta{}^*(x, \chi(f_{\alpha\beta}(x) g)) = \varphi_\beta{}^*(x, f^*_{\alpha\beta}\chi(g)). \end{aligned}$$

Здесь использован тот факт, что при $g, g' \in G$

$$\chi(g'g) = g'\chi(g) = \varkappa(g')\chi(g),$$

потому что K является ядром неэффективности действия G на G/H.

Тем самым проверены вторая часть теоремы и условие 1) в определении главного расслоенного пространства. Нетрудно проверить и условие 2), используя то обстоятельство, что действие H на G определяет в G структуру главного расслоенного пространства, т. е. каждая точка $y \in G/H$ имеет окрестность, над которой существует локальное сечение.

Теорема доказана.

Расслоенное пространство $E^*(V, G/H, G/K, p^*, \{U_\alpha\}, \{\varphi_\alpha\})$ естественно назвать *фактор-пространством* главного расслоенного пространства $E(V, G)$ по подгруппе Ли $H \subset G$ (содержащей нормальный делитель K) и обозначить через $E(V, G)/H$.

Из теоремы 1 и леммы 1 вытекает следующее

Следствие. *Фактор-пространство $E(V, G)/K$, где K является нормальным делителем Ли структурной группы G, изоморфно некоторому главному расслоенному пространству $E'(V, G/K)$.*

Пространство $E(V, G)/K$ называется главным фактор-пространством главного расслоенного пространства $E(V, G)$ по нормальному делителю $K \subset G$.

Лемма 1 (вернее, лемма 1′) играет основную роль также при доказательстве следующей теоремы.

Теорема 2. *Каждое расслоенное пространство $E^*(V, \Gamma, G^*, p^*, \{U_\alpha\}, \{\varphi_\alpha{}^*\})$ с однородным типовым слоем Γ изоморфно фактор-пространству $E(V, G)/H$ некоторого главного расслоенного пространства $E(V, G)$ по некоторой замкнутой подгруппе Ли $H \subset G$.*

Теорема доказывается в [14] при предположении полноты системы локальных гомеоморфизмов $\{\varphi_\alpha{}^*\}$. Здесь будет дано другое доказательство, использующее понятие репера в однородном пространстве Γ.

Доказательство. Известно [9], что в однородном пространстве Γ можно ввести конечное упорядоченное множество точек, стационарная подгруппа которого состоит только из единицы e группы G^*. Такое множество называется репером R. Если теперь ввести в рассмотрение множество реперов $R \cdot g$, где g является произвольным элементом из G^*, то оно является дифференцируемым многообразием $\tilde{\Gamma}$, над которым группа G^* действует уже просто-транзитивно.

Естественным образом определяется расслоенное пространство $\tilde{E}^*(V, \tilde{\Gamma}, G^*, \tilde{p}^*, \{U_\alpha\}, \{\tilde{\varphi}_\alpha{}^*\})$, исходя из данного расслоенного пространства, которое, в силу леммы 1′, является главным расслоенным пространством $E(V, G^*)$. Исходное пространство, очевидно, изоморфно фактор-пространству $E(V, G^*)/H$, где H является стационарной подгруппой некоторой точки $y \in \Gamma$.

Теорема доказана.

Следует отметить, что главное расслоенное пространство $E(V, G)$, при котором $E(V, G)/H$ изоморфно с заданным расслоенным пространством $E^*(V, \Gamma, G^*, p^*, \{U_\alpha\}, \{\varphi_\alpha{}^*\})$, определяется далеко не однозначно. Действительно, вполне может оказаться, что H содержит нетривиальный нормальный делитель K группы G, так что G^* изоморфна с G/K (ср. теорема 1).

Однако среди всех главных расслоенных пространств с указанным свойством существует, с точностью до изоморфизма, только одно, структурная группа которого изоморфна с G^*. Это пространство $E(V, G^*)$ называется *присоединенным главным расслоенным пространством* для заданного пространства E^*. Оно фактически и было построено в доказательстве теоремы 2.

1.5. Приведение структурной группы. Пусть в базе V главного расслоенного пространства $E(V, G)$ выделено подмногообразие $V' \subset V$, над которым существует локальное сечение $\mu^* : V'$ *в* $p^{*-1}(V')$ фактор-пространства

$$E(V, G)/H \quad (H \subset G,\ p^*\mu^*(x) = x \in V').$$

Теорема 3. *Полный прообраз* $\pi^{-1}\mu^*(V') \subset (E(V, G)$ *секущей поверхности* $\mu^*(V')$ *при проекции* $\pi : E$ *на* E/H *является главным расслоенным пространством* $E'(V', H)$ *с базой* $V' \subset V$ *и структурной группой* H.

Доказательство. Множество $\pi^{-1}\mu^*(V')$, действительно, является дифференцируемым многообразием, на котором определено простое действие группы H, потому что оно состоит из классов интразитивности действия H на $E(V, G)$. Условие 1) в определении главного расслоенного пространства, очевидно, выполнено, причем проекцией является $p' = \mu^{*-1}\pi$.

Остается проверить условие 2) (условие локальной тривиальности). Известно ([10], стр. 162), что каждая точка $g^* \in G/H$ обладает окрестностью U^*, которую некоторым аналитическим гомеоморфизмом ν можно отобразить в прообраз $\chi^{-1}(U^*) \subset G$ так, что $\chi\nu(g^{*\prime}) = g^{*\prime} \in U^*$.

Пусть $\{U_\alpha\}$ есть открытое покрытие базы V и $\{\varphi_\alpha\}$ — есть семейство соответствующих локальных диффеоморфизмов $\varphi_\alpha : U_\alpha \times G$ *на* $p^{-1}(U_\alpha)$. Тогда дифференцируемое отображение

$$\psi_\alpha{}^*\mu^* : U_\alpha \cap V' \textit{ в } G/H$$

ставит каждой области $U_\alpha \cap V' \neq 0$ в соответствие некоторое дифференцируемое подмногообразие $U'_\alpha \subset G/H$.

Заданная точка $x \in U_\alpha \cap V'$ имеет всегда такую окрестность $U' \subset U_\alpha \cap V'$, что подмногообразие $\psi_\alpha{}^*\mu^*(U') \subset G/H$ принадлежит окрестности U^* точки $\psi_\alpha{}^*\mu^*(x)$ и его можно некоторым диффеоморфизмом ν отобразить в прообраз $\chi^{-1}\psi_\alpha{}^*\mu^*(U')$.

Желаемый диффереоморфизм

$$\mu' : U' \text{ в } p'^{-1}(U')$$

определяется теперь формулой

$$\mu'(x') = \varphi_\alpha(x', \nu\psi_\alpha{}^*\mu^*(x')), \quad x' \in U'.$$

При этом, в силу (1.3) и (1.6),

$$p'\mu'(x') = \mu^{*-1}\pi\varphi_\alpha(x', \nu\,\psi_\alpha{}^*\mu^*(x')) =$$

$$= \mu^{*-1}\varphi_\alpha{}^*(p^*\mu^*(x'), \psi_\alpha{}^*\mu^*(x')) = \mu^{*-1}\mu^*(x') = x'.$$

Теорема доказана.

Переход от главного расслоенного пространства $E(V, G)$ к главному расслоенному пространству $E'(V', H)$, где V' является подмногообразием базы V, а H является подгруппой Ли в G, называется *приведением* структурной группы G к подгруппе H над подмногообразием $V' \subset V$. Само пространство $E'(V', H)$ называется *приведенным главным расслоенным пространством.*

1.6. Приклеивание секущей поверхности к фактор-пространству. Пусть в фактор-пространстве $E(V, G)/H$ задана секущая поверхность $\mu^*(V')$ над $V' \subset V$. Пусть $T_x(V')$ обозначает касательное пространство к V' в точке $x \in V'$, а $T_{\mu^*(x)}(p^{*-1}(x))$ обозначает касательное пространство к слою $p^{*-1}(x)$ в точке $\mu^*(x)$.

Говорят, что секущая поверхность $\mu^*(V')$ *приклеена* к фактор-пространству $E(V, G)/H$, если для каждой точки $x \in V'$ установлено невырожденное линейное отображение (изоморфизм) a_x одного из пространств $T_x(V')$ и $T_{\mu^*(x)}(p^{*-1}(x))$ в другое (или на другое, если размерности пространств совпадают). Невырожденность отображения a_x означает, что всегда отображается пространство не бо́льшей размерности, причем его образ имеет точно такую же размерность, как и отображаемое пространство.

Множество линейных отображений $\{a_x\}$, $x \in V'$, называется *приклеиванием* a секущей поверхности $\mu^*(V')$ к фактор-пространству $E(V, G)/H$.

Приклеивание a называется *регулярным*, если изоморфными являются присоединенные к многообразию V', как к базе, расслоенные пространства, у одного из которых слоями являются отображаемые пространства, а у другого — их образы при отображениях a_x. (Структурной группой обоих этих пространств является, очевидно, полная линейная группа $GL(q, R)$, где q — размерность отображаемого пространства.)

Понятие регулярного приклеивания (soudure, soldering) было введено Эресманом [14], но только для случая, когда 1) $\dim V = \dim G/H$ и 2) $V' = V$ (т. е. если существует глобальная секущая поверхность и имеет такую же размерность, как типовой слой). В таком случае в дальнейшем говорят о *точном приклеивании.*

§ 2. Понятие связности в расслоенном пространстве

2.1. Путь. Существенную роль в дальнейшем играет понятие пути. *Путь* $\lambda(x_0, x_1) \subset V$ с началом x_0 и концом x_1 — это кусочно непрерывно дифференцируемое отображение $\varphi : I$ *в* V единичного отрезка $I = [0, 1]$ в дифференцируемое многообразие V. Произвольная точка пути обозначается $x_t = \varphi(t)$, $0 \leqslant \leqslant t \leqslant 1$.

Пути $\varphi_t : I$ *в* V, $\varphi_t^* : I$ *в* V, определяемые формулами

$$\varphi_t(\tau) = \varphi(t\,\tau), \quad \varphi_t^*(\tau) = \varphi(t + (1 - t)\tau),$$

называются, соответственно, *частью* $\lambda_t(x_0, x_t)$ и *дополнительной частью* $\lambda_t^*(x_t, x_1)$ пути λ.

Пути $\lambda \subset V$ и $\lambda' \subset V$ называются *эквивалентными* и обозначается $\lambda \sim \lambda'$, если существует кусочно непрерывно дифференцируемый гомеоморфизм $\psi : I$ на I, так что $\psi(0) = 0$, $\varphi' = \varphi\psi$, где φ и φ' являются отображениями I в V, определяющими, соответственно, пути λ и λ'. Аксиомы эквивалентности, очевидно, выполнены. Классы эквивалентных путей называются *дорогами.*

Известным образом определяются понятия единичного пути ε, обратного пути λ^{-1} и произведения путей $\lambda\lambda'$ (см. [7]).

Нетрудно проверить, что при $\lambda \sim \lambda_1$, $\lambda' \sim \lambda'_1$ имеют место $\lambda^{-1} \sim \lambda_1^{-1}$, $\lambda\lambda' \sim \lambda_1\lambda_1'$, так что указанные операции определяются также на множестве дорог. Умножение путей не является ассоциативным, но умножение дорог уже ассоциативно.

Касательный вектор X *пути* $\lambda(x_0, x_1)$ определяется формулой (ср. [10])

$$Xf = \lim_{t \to \infty} \frac{f(x_t) - f(x_0)}{t}.$$

Эквивалентные пути имеют, очевидно, касательные векторы, отличающиеся только вещественным множителем.

Путь $\lambda(x, x)$, начало и конец которого совпадают с точкой $x \in V$, называется *замкнутым* в x. В частности, каждый единичный путь является замкнутым. Класс эквивалентных замкнутых путей называется *петлей.* Множество петель в данной точке образует топологическую полугруппу с инволютивным автоморфизмом $\lambda \to \lambda^{-1}$. Петли, гомотопные нулю, образуют в ней подполугруппу. Класс единичного пути не является единицей этих полугрупп.

2.2. Понятие связности. *Связностью* в расслоенном пространстве $E(V, \Gamma, G, p^*, \{U_\alpha\}, \{\varphi_\alpha{}^*\})$ называется отображение σ множества всех путей $\{\lambda\}$ в базе в множество всех диффеоморфизмов слоя на слой, удовлетворяющее следующим условиям:

σ**1.** если задан путь $\lambda(x_0, x_1)$ в базе V, то $\sigma(\lambda) = \sigma^\lambda$ является диффеоморфизмом слоя $p^{*-1}(x_1)$ на слой $p^{*-1}(x_0)$, причем

a) из $\lambda \sim \lambda'$ следует $\sigma^\lambda = \sigma^{\lambda'}$,

b) $\sigma^{\lambda\lambda'} = \sigma^\lambda \sigma^{\lambda'}$,

c) $\sigma^{\lambda^{-1}} = (\sigma^\lambda)^{-1}$;

σ**2.** если $\lambda(x_0, x_1) \subset U_\alpha$, то $(\varphi_\alpha^{*x_0})^{-1} \sigma\, \varphi_\alpha^{*x_1} : \Gamma \to \Gamma$ является действием на Γ некоторого элемента $g_\alpha^\lambda \in G$ (единственного в силу эффективности действия);

σ**3.** отображение $F_\alpha : \lambda$ в G, которое каждой точке x_t пути $\lambda \subset U_\alpha$ ставит в соответствие элемент $F_\alpha(x_t) = g_\alpha^{\lambda t} \in G$, является кусочно непрерывно дифференцируемым и определяет, тем самым, путь $F(\lambda) \subset G$;

σ**4.** для каждого пути $\lambda \subset U_\alpha$ путь $F_\alpha(\lambda) \subset G$ имеет начало в единице $e \in G$; если пути $\lambda, \lambda' \subset U_\alpha$ с общим началом x имеют общий касательный вектор X, то пути $F_\alpha(\lambda)$, $F_\alpha(\lambda')$ также имеют одинаковый касательный вектор $\omega_\alpha(x, X)$, зависящий дифференцируемым образом как от x, так и от X.

Связность называется *линейной*, если

σ**5.** сопоставление вектору $X \in T_x(V)$ вектора $\omega_\alpha(x, X) \subset G'$ в алгебре Ли G' группы G определяет линейное отображение $T_x(V)$ *в* (или *на*) G'.

Легко проверить, что условия σ**1** — σ**5** инвариантны: если $\lambda \subset U_\alpha \cap U_\beta$, то в силу E^*2 и σ**2**

$$g_\beta^{\lambda_t} = [f_{\alpha\beta}(x_0)^{-1} g_\alpha^{\lambda_t} f_{\alpha\beta}(x_0)][f_{\alpha\beta}(x_0)^{-1} f_{\alpha\beta}(x_t)] \qquad (2.1)$$

и поэтому:

$$\omega_\beta(x, X) = (\operatorname{ad} f_{\alpha\beta}(x)^{-1})\,\omega_\alpha(x, X) + \Theta(f_{\alpha\beta}(x), (df_{\alpha\beta})_x X). \qquad (2.2)$$

Здесь используется известный факт, что умножению соответствующих элементов — образов одной и той же точки единичного отрезка $I=[0,1]$ — двух путей в группе Ли G с началом в единице e соответствует сложение их касательных векторов в алгебре Ли. G'-значная 1-форма Θ на G означает следующее: для каждого вектора Y, касательного к многообразию группы G в точке g

$$\Theta(g, Y)=(dl_{g^{-1}})_g Y, \qquad (2.3)$$

где $l_{g^{-1}}$ является левым сдвигом, который переводит g в e, а $(dl_{g^{-1}})_g$ обозначает его дифференциал в точке $g \in G$. Другими словами, Y в точке $g \in G$ и $\Theta(g, Y)$ в точке $e \in G$ являются элементами одного и того же лево-инвариантного векторного поля на G.

2.3. Горизонтальные пути и секущие поверхности. Если в расслоенном пространстве E^* задана связность σ, то слои часто называются вертикальными подпространствами, ибо связность σ позволяет в E^* ввести особые пути и секущие поверхности, которые естественно называть горизонтальными.

Пути, принадлежащие одному слою, называются вертикальными путями, их касательные векторы — вертикальными векторами.

Пусть в E^* задан путь $\Lambda(z_0, z_1)$, состоящий из точек z_t, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Тогда в слое Γ_{z^0} определяется вертикальный путь $\sigma\Lambda$, который состоит из точек

$$\sigma^{p^*(\Lambda_t)}(z_t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

и называется *разверткой* пути Λ в слое Γ_{z_0}.

Путь $\Lambda(z_0, z_1) \subset E^*$ называется *горизонтальным путем* над $p^*\Lambda \subset V$ в связности σ, если его разверткой в слое Γ_{z_0} является единичный путь, т. е. если

$$\sigma^{p^*(\Lambda_t)}(z_t)=z_0, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1. \qquad (2.4)$$

Лемма 2. *Для заданных* $\lambda(x_0, x_1) \subset V$ и $z_0 \in p^{*-1}(x_0)$ *всегда существует единственный горизонтальный путь* $\Lambda(z_0, z_1)$ *над* λ *с началом* z_0.

Действительно, этот горизонтальный путь состоит из точек $(\sigma^{\lambda_t})^{-1}(z_0)$.

Лемма 3. *Если пути* Λ *и* Λ' *в* E^* *горизонтальны для данной связности* σ *в* E^*, *то горизонтальны также пути* Λ^{-1}, Λ_t, Λ_t^* и $\Lambda\Lambda'$ (*если последний существует*).

Эти утверждения следуют непосредственно из определения горизонтального пути и из условия σ**1**.

Секущая поверхность $\mu^*(V') \subset E^*$ над некоторым подмногообразием $V' \subset V$ называется *горизонтальной*, если она вместе с каждой своей точкой содержит также исходящий из этой точки горизонтальный путь над произвольным путем в подмногообразии $V' \subset V$.

Существование многомерной горизонтальной секущей поверхности является, как правило, исключением.

Используя понятия, введенные в п. 1.3 и 2.2, можно сформулировать следующее необходимое и достаточное условие для горизонтальности пути Λ в E^*, лежащего в прообразе $p^{*-1}(U_\alpha)$ некоторой области U_α открытого покрытия $\{U_\alpha\}$ базы V.

Лемма 4. *Если* $\Lambda(z_0, z_1) \subset p^{*-1}(U_\alpha)$, *то* Λ *является горизонтальным тогда и только тогда, если*

$$\psi_\alpha{}^*(z_t) \cdot F_\alpha(x_t) = \psi_\alpha{}^*(z_0) \tag{2.5}$$

при каждом значении $t \in I$, *где* $x_t = p^*(z_t)$.

Доказательство. Равенство (2.5) в силу условия $\sigma 2$ равносильно с

$$(\varphi_\alpha^{*x_0})^{-1} \sigma^{\lambda \cdot t} \varphi_\alpha^{*x_t}(\psi_\alpha{}^*(z_t)) = \psi_\alpha{}^*(z_0),$$

но это равенство можно на основании формул (1.3) и (1.4) писать в виде (2.4).

Из леммы 4 вытекает следующее важное обстоятельство для связностей σ, заданных в главных расслоенных пространствах.

Теорема 4. *Если в главном расслоенном пространстве* $E(V, G)$ *задана связность* σ, *то группа* G, *действующая на* E, *сохраняет свойство горизонтальности путей и секущих поверхностей в* E, *т. е. преобразует горизонтальные пути в горизонтальные же пути.*

Доказательство. В случае главного расслоенного пространства $E(V, G)$ типовым слоем является многообразие группы G, над которым группа G действует левосторонним образом. Равенство (2.5) можно поэтому писать в виде следующего равенства между элементами группы G:

$$F_\alpha(x_t)\psi_\alpha(z_t) = \psi_\alpha(z_0), \tag{2.6}$$

и утверждение леммы следует непосредственно из того, что оно выдерживает умножение справа на произвольный элемент $g \in G$.

Следует отметить, что линейность связности σ нигде еще не требовалась. Это замечание относится также к следующему пункту.

2.4. Группа голономии. Если в базе V расслоенного пространства E^* задан замкнутый путь $\lambda(x, x)$, то σ^λ является, в силу условия $\sigma 1$, диффеоморфизмом слоя $p^{*-1}(x)$ на себя, который в силу $\sigma 2$ переносится локальным диффеоморфизмом

$$(\varphi_\alpha^{*x})^{-1}: p^{*-1}(x) \text{ на } \Gamma$$

в действие некоторого элемента $g_\alpha^\lambda \in G$ на Γ:

$$[(\varphi_\alpha^{*x})^{-1}\,\sigma^\lambda\,\varphi_\alpha^{*x}](y) = y \cdot g_\alpha^\lambda. \tag{2.7}$$

Из условия σ**1** следует, что умножению двух петель λ и λ' в точке $x \in V$ соответствует умножение соответствующих элементов в группе G:

$$g_\alpha^{\lambda\lambda'} = g_\alpha^\lambda g_\alpha^{\lambda'}.$$

а из σ**2** следует, что g_α^λ фактически связывается с целым классом эквивалентных замкнутых путей в точке x, т. е. с петлей. Следовательно, возникает гомоморфизм топологической полугруппы петель в точке $x \in V$ в структурную группу G. Инволютивному автоморфизму $\lambda \to \lambda^{-1}$ в полугруппе соответствует при этом, в силу условия σ**1**, переход к обратному элементу в группе G. Единичной петле соответствует, в силу условия σ**3**, единица e группы G.

Образ полугруппы петель в группе G при этом гомоморфизме является, очевидно, группой и называется *группой голономии* Φ_x в точке x для данной связности σ. Она определяется с точностью до внутреннего автоморфизма в группе G, потому что из (2.1), в котором при $t = 1$ в данном случае имеют место равенства $x_0 = x_1 = x$, следует, что $g_\beta^\lambda = f_{\alpha\beta}(x)^{-1} g_\alpha^\lambda f_{\alpha\beta}(x)$. Более того, оказывается, что при переходе от точки $x \in V$ к точке $x' \in V$ группа голономии Φ_x подвергается также лишь некоторому внутреннему автоморфизму в G (см. [4], стр. 56). Поэтому с точностью до внутренних автоморфизмов можно говорить просто о группе голономии Φ связности σ в расслоенном пространстве E^*.

Образ подполугруппы петель, гомотопных нулю, называется *ограниченной группой голономии* Φ^0. Она также определяется с точностью до внутренних автоморфизмов в группе G.

Известно, что Φ^0 есть связная подгруппа Ли структурной группы G и является нормальным делителем в группе голономии Φ (см. [4], стр. 57). Возникает натуральный гомоморфизм фундаментальной группы $\pi_1(V)$ базы V на группу Φ/Φ^0. Если V удовлетворяет второй аксиоме счетности, то группа $\pi_1(V)$, вместе с группой Φ/Φ^0, является счетной. Поэтому Φ можно рассматривать как дифференцируемое многообразие, в котором Φ^0 является открытым подмножеством, т. е. Φ можно рассматривать как группу Ли (см. [18], стр. 9). При этом ее нормальный делитель Φ^0 совпадает с ее линейно связной компонентой единицы (см. [4], стр. 57).

§ 3. Способы задания линейной связности в главном расслоенном пространстве

3.1. Горизонтальное распределение. В настоящем параграфе рассматривается связность в главном расслоенном пространстве, причем всегда предполагается, что связность является линейной.

Теорема 5. *Если в главном расслоенном пространстве $E(V, G)$ задана линейная связность σ, то векторы Z, касательные ко всевозможным горизонтальным путям с началом в точке $z \in E$, образуют в касательном к E линейном пространстве $T_z(E)$ линейное подпространство N_z, так что $T_z(E)$ является прямой суммой $T_z(E) = T_z(G_z) + N_z$, где $T_z(G_z) = (d\gamma_z)_e G'$ — касательное пространство к слою G_z в точке z.*

Доказательство. На главном расслоенном пространстве $E(V, G)$ можно строить особую G'-значную 1-форму, которая обращается в нуль на векторах Z, касательных к горизонтальным путям.

Этой формой является

$$\tilde{\omega}_\alpha(z, Z) = (\mathrm{ad}\,\psi_\alpha(z))^{-1}\omega_\alpha(p(z), (\mathrm{d}p)_z Z) + \\ + \Theta(\psi_\alpha(z), (d\psi_\alpha)_z Z), \qquad (3.1)$$

где G'-значная 1-форма ω_α над некоторой областью $U_\alpha \in p(z)$ вводится в условии $\sigma 5$, а Θ определяется в п. 2.2.

Действительно, для горизонтальных путей имеет место формула (2.6), которую можно писать в виде

$$[\psi_\beta(z)^{-1} F_\alpha(x_t)\, \psi_\alpha(z)]\,[\psi_\alpha(z)^{-1}\, \psi_\alpha(z_t)] = e.$$

Отсюда переходом на касательные векторы в G' и следует желаемое обращение в нуль формы $\tilde{\omega}_\alpha(z, Z)$.

Компоненты формы $\tilde{\omega}_\alpha$ в некотором базисе алгебры Ли G' являются линейно независимыми вещественно-значными 1-формами, потому что для вертикальных путей, очевидно, $(dp)_z Z' = 0$, и поэтому

$$\tilde{\omega}_\alpha(z, Z') = \Theta(\psi_\alpha(z), (d\psi_\alpha)_z Z'). \qquad (3.2)$$

Но форма Θ заведомо имеет линейно независимые компоненты. Следовательно, рассматриваемые векторы Z, аннулирующие форму $\tilde{\omega}_\alpha$, образуют линейное подпространство N_z в $T_z(E)$ дополнительной для $T_z(G_z)$ размерности. Так как ни один путь, отличный от единичного, не может быть одновременно горизонтальным и вертикальным, то $T_z(E) = T_z(G_z) + N_z$.

Теорема доказана.

Распределение N на главном расслоенном пространстве $E(V, G)$ с линейной связностью σ, которое каждой точке $z \in E$ ставит в соответствие подпространство $N_z \subset T_z(E)$, называется *горизонтальным распределением* (или *нормализатором*) для данной связности σ.

Горизонтальные пути и секущие поверхности являются, очевидно, интегральными для этого распределения.

Теорема 4 показывает, что горизонтальное распределение в известном смысле инвариантно по отношению к действию R_g произвольного элемента $g \in G$ на $E(V, G)$:

$$N_{zg} = (d\,R_g)_z N_z.$$

3.2. Задание связности горизонтальным распределением. Известно, что горизонтальное распределение вполне определяет линейную связность σ в главном расслоенном пространстве $E(V, G)$.

Имеет место следующая теорема, которая фактически доказывается во всех работах, в которых связность задается как некоторое распределение (см. например, [4, 6]). Ниже намечается доказательство, которое несколько отличается от обычных.

Теорема 6. *Если на главном расслоенном пространстве $E(V, G)$ задано дифференцируемое распределение N, которое*

1) *инвариантно по отношению к действию R_g произвольного элемента $g \in G$ на E, и такое, что*

2) *в каждой точке $z \in E$ касательное к E пространство $T_z(E)$ является прямой суммой $T_z(E) = T_z(G_z) + N_z$ касательного подпространства к слою G_z и подпространства N_z распределения N, то существует вполне определенная линейная связность σ в E, для которой распределение N является горизонтальным распределением.*

Доказательство. Дифференциал $(dp)_z$ проекции p определяет изоморфизм $(d_N p)_z$ подпространства N_z на касательное пространство $T_{p(z)}(V)$ к базе V, так что при $Z'' \subset N_z$ имеет место $(d_N p)_z Z'' = (dp)_z Z''$. Если в базе V задан путь $\lambda(x_0, x_1)$, то векторы $(d_N p)^{-1}_{z_t} X_t = Z_t$, $0 < t < 1$ (где X_t является касательным вектором дополнительной части $\lambda_t{}^*$ пути λ), определяют на многообразии $p^{-1}(\lambda) \setminus p^{-1}(x_0) \cup p^{-1}(x_1)$ кусочно непрерывно дифференцируемое поле направлений, инвариантное при действии группы G на E.

В силу теоремы Виноградова (см. [5], стр. 28) над каждым дифференцируемым куском $\lambda'(x'_0, x'_1)$ пути λ существует семейство интегральных путей (траекторий) этого поля направлений. Гомеоморфизм $\sigma^{\lambda'} : p^{-1}(x'_1)$ *на* $p^{-1}(x'_0)$ осуществляется с помощью этих интегральных путей. Гомеоморфизм σ^{λ} определяется как произведение этих гомеоморфизмов.

Проверка аксиом $\sigma 1 - \sigma 5$ не представляет теперь уже особого труда.

3.3. Универсальная форма связности. Форма $\tilde{\omega}_\alpha(z, Z)$, введенная формулой (3. 1), заслуживает особого внимания. Именно, оказывается что она не зависит от случайного выбора области U_α покрытия $\{U_\alpha\}$ и локального сечения μ_α над ней, и является тем самым G'-значной 1-формой ω на главном расслоенном пространстве $E(V, G)$, инвариантно связанной с данной линейной связностью σ.

Действительно, для вертикального вектора $Z' \in T_z(G_z)$, касательного к некоторому вертикальному пути, состоящему из точек $z \cdot g_t$ $(0 \leqslant t \leqslant 1,\ g_0 = e)$, имеет место формула (3.2), где правая часть, в силу определения формы Θ (см. п. 1.2), является касательным вектором пути в G, состоящего из элементов

$$\psi_\alpha(z)^{-1}\psi_\alpha(z \cdot g_t) = (\psi_\alpha(z))^{-1}\psi_\alpha(z) g_t = g_t;$$

т. е. для $Z' \in T_z(G_z)$ справедливо равенство

$$\tilde{\omega}_\alpha(z, Z') = (d\,\gamma_z^{-1})_z Z',$$

где γ_z является фундаментальным диффеоморфизмом (см. п. 1.2).

Что касается произвольного вектора $Z \in T_z(E)$, то он единственным образом разлагается на сумму $Z = Z' + Z''$, $Z' \subset \subset T_z(G_z)$, $Z'' \in N_z$, причем $\tilde{\omega}_\alpha(z, Z'') = 0$ (см. п. 3.1). Следовательно,

$$\tilde{\omega}_\alpha(z, Z) = \tilde{\omega}_\alpha(z, Z') = (d\gamma_z^{-1})_z Z',$$

и утверждение справедливо и для произвольного $Z \in T_z(E)$ (ср., например, [6], стр. 43).

Это обстоятельство полезно подчеркнуть введением нового обозначения

$$\omega = \tilde{\omega}_\alpha. \tag{3.3}$$

Учитывая вышеуказанное значение формы $\omega(z, Z) = \omega(z, Z')$, нетрудно убедиться, что имеет место формула

$$\omega(R_g z, (d\,R_g)_z Z) = (ad\,g^{-1})\,\omega(z, Z). \tag{3.4}$$

Действительно, пусть $Z = Z' + Z''$, $Z' \in T_z(G_z)$, $Z'' \in N_z$. В силу инвариантности горизонтального распределения по отношению к действию G на E, имеет место $(dR_g)_z Z'' \in N_{R_g z}$, и поэтому (3.4) сводится к такой же формуле для вертикальных векторов Z', для которых она сразу следует из равенства

$$(z \cdot g_t) \cdot g = (z \cdot g) \cdot (g^{-1} g_t g).$$

Построенная G'-значная 1-форма ω на $E(V, G)$ называется *универсальной формой связности* σ. Универсальной в том смысле, что форму ω_α для локального сечения μ_α над некоторой областью $U_\alpha \subset V$ (которая называется *формой связности над* U_α *для* μ_α), можно по формуле (3.1) получить как образ формы ω при дуальном дифференциале диффеоморфизма $\mu_\alpha : U_\alpha$ *в* $p^{-1}(U_\alpha)$, т. е.

$$\omega_\alpha = (\delta \mu_\alpha)\, \omega. \tag{3.5}$$

Например, формула (2.2) равносильна соотношению

$$\omega_\beta = (\delta \mu_\beta)\, \omega.$$

В этом нетрудно убедиться, если использовать формулы (3.3), (3.1) и очевидное равенство

$$\psi_\alpha(\mu_\beta(x)) = f_{\alpha\beta}(x). \tag{3.6}$$

Следует подчеркнуть, что универсальная форма связности ω не является произвольной G'-значной 1-формой на E, а удовлетворяет определенным условиям: 1) ее значение $\omega(z, Z')$ для вертикального вектора $Z' \in T_z(G_z)$ совпадает с $(d\gamma_z^{-1})_z Z'$ и 2) она удовлетворяет равенству (3.4).

Теперь можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 7 (ср., например, [6], стр. 44). *Если на главном расслоенном пространстве $E(V, G)$ задана G'-значная 1-форма ω, удовлетворяющая сформулированным выше условиям, то в $E(V, G)$ существует в точности одна линейная связность σ, для которой ω является универсальной формой связности.*

Для доказательства теоремы достаточно отметить, что аннулятор формы ω (т. е. распределение N на E, для которого N_z состоит из векторов Z, для которых $\omega(z, Z) = 0$) удовлетворяет всем условиям теоремы 6.

3.4. Формы типа ad$G$ и полубазовые формы. Пусть на главном расслоенном пространстве $E(V, G)$ задана G'-значная q-форма $\Theta(z, Z_1, \ldots, Z_q)$. Она ставит произвольному q-вектору $[Z_1 \ldots Z_q]$ в касательном к E пространстве $T_z(E)$ в соответствие определенный вектор Θ в алгебре Ли G', которому в свою очередь соответствует при дифференциале $d\gamma_z$ фундаментального диффеоморфизма γ_z (см. п. 1.2) некоторый вектор $\overline{\Theta}_z = (d\gamma_z)_e \Theta$ в касательном пространстве $T_z(G_z)$ слоя G_z.

Форма Θ на E называется *формой типа* ad$G$ (формой присоединенного типа), если устанавливаемое ею соответствие

$$[Z_1 \ldots Z_q] \to \overline{\Theta}(z, Z_1, \ldots, Z_q) \tag{3.7}$$

выдерживает действие группы G на E, т. е. если

$$[(d\,R_g)_z Z_1 \dots (d\,R_g)_z Z_q] \to (d\,R_g)_z\,\overline{\Theta}\,(z, Z_1, \dots, Z_q),$$

или

$$\overline{\Theta}\,(R_g z, (d\,R_g)_z Z_1, \dots, (d\,R_g)_z Z_q) = (d\,R_g)_z\,\overline{\Theta}\,(z, Z_1, \dots, Z_q).$$

Так как

$$\gamma_{R_g z}^{-1} R_g \gamma_z(g') = \gamma_{R_g z}^{-1} R_g(z \cdot g') = \gamma_{R_g z}^{-1}(R_g z \cdot g^{-1} g' g) = g^{-1} g' g,$$

то последнее равенство можно писать в виде

$$\Theta(R_g z, (d\,R_g)_z Z_1, \dots, (d\,R_g)_z Z_q) = (\mathrm{ad}\,g^{-1})\,\Theta(z, Z_1, \dots, Z_q), \quad (3.8)$$

в котором оно обычно в литературе встречается (см., например, в [6], стр. 53).

Примером формы типа $\mathrm{ad}G$, в силу (3.4), является универсальная форма связности ω.

Условие 2) для универсальной формы связности (см. п. 3.3) можно, например, сформулировать также следующим образом: 2′) ω удовлетворяет равенству

$$\overline{\omega}(R_g z,\ (d\ R_g)_z Z) = (d\,R_g)_z \overline{\omega}\,(z, Z),$$

где $\overline{\omega}(z, Z) = (d\gamma_z)_e \omega(z, Z)$.

Образ $\overline{\omega} = (d\gamma_z)_e \omega$ универсальной формы связности имеет простое геометрическое значение: если $Z \in T_z(E)$ является касательным вектором пути $\Lambda(z, z_1) \subset E$, то $\overline{\omega}(z, Z)$ является касательным вектором его развертки $\sigma\Lambda$ в слое G_z в связности σ (см. п. 2.3 и 3.3).

Это следует из того, что вертикальная компонента $Z' \in T_z(G_z)$ вектора Z в смысле прямого произведения $T_z(E) = T_z(G_z) + N_z$, является, как нетрудно видеть, касательной к $\sigma\Lambda$, а

$$\overline{\omega}\,(z, Z) = \overline{\omega}\,(z, Z') = Z'.$$

Важную роль в дальнейшем играют формы более частного типа.

G'-значная q-форма Θ на $E(V, G)$ называется *полубазовой* ([11], стр. 98), если ее значение существенно зависит только от точки $z \in E$ и от образа $[(dp)_z Z_1, \dots, (dp)_z Z_q)]$ q-вектора $[Z_1 \dots Z_q]$ при дифференциале dp проекции $p : E$ на V; точнее, если из

$$(dp)_z Z_k = (dp)_z Z'_k, \quad k = 1, \dots, q$$

всегда следует

$$\Theta\,(z, Z_1, \dots, Z_q) = \Theta\,(z, Z'_1, \dots, Z'_q).$$

Лемма 5. *G'-значная q-форма Θ типа* ad$G$ *на $E(V, G)$ является полубазовой тогда и только тогда, если на базе V в пределах каждой области локальной тривиальности U_α существует q-форма Θ_α, так что*

$$\Theta\,(z, Z_1, \ldots, Z_k) = (\mathrm{ad}\,\psi_\alpha(z)^{-1})\,\Theta_\alpha\,(x, X_1, \ldots, X_q), \qquad (3.9)$$

где $x = p(z)$, $X_k = (dp)_z Z_k$.

Доказательство. Достаточность условия (3.9) очевидна.

Необходимость условия станет ясной из следующего. Пусть Θ на E является полубазовой. Если при произвольном локальном сечении μ_α над U_α обозначить $(\delta\mu_\alpha)\Theta = \Theta_\alpha$, $R_g\mu_\alpha(x) = \mu_\alpha(x)\cdot g = z$ и $(dp)_z Z_k = X_k$, то

$$\Theta_\alpha\,(x, X_1, \ldots, X_q) = \Theta(\mu_\alpha(x), (d\,\mu_\alpha)_x X_1, \ldots, (d\,\mu_\alpha)_x X_k)$$

и в силу того, что $pR_g\mu_\alpha\,(x) = x$, имеет место

$$(dp)_z Z_k = (dp)_z((dR_g\,\mu_\alpha)_x X_k).$$

Поэтому из того, что Θ полубазова, следует

$$\Theta\,(z, Z_1, \ldots, Z_q) = \Theta\,(R_g\mu_\alpha(x), (d\,R_g)\,(d\mu_\alpha)_x X_1, \ldots, (d\,R_g)\,(d\mu_\alpha)_x X_q)$$

и так как Θ типа ad$G$, то

$$\Theta\,(z, Z_1, \ldots, Z_q) = (\mathrm{ad}\,g^{-1})\,\Theta(\mu_\alpha(x), (d\mu_\alpha)_x X_1, \ldots, (d\mu_\alpha)_x X_q) = \\ = (\mathrm{ad}\,\psi_\alpha(z)^{-1})\,\Theta_\alpha\,(x, X_1, \ldots, X_q).$$

(Здесь, действительно, $\psi_\alpha(z) = \psi_\alpha(\mu_\alpha(x)\cdot g) = g\psi_\alpha(\mu_\alpha(x)) = g$). Лемма доказана.

Необходимо отметить, что представление полубазовой формы типа ad$G$ формулой (3.9) через некоторую форму на базе возможно в общем случае только локально.

Пусть имеется область локальной тривиальности U_β с локальным сечением μ_β и с непустым пересечением $U_\alpha \cap U_\beta$. Подстановкой $z = \mu_\beta(x)$, $Z_k = (d\mu_\beta)_x X_k$, $k = 1, \ldots, p$, из (3.9) получается, в силу (3.6), формула

$$\Theta_\beta\,(x, X_1, \ldots, X_q) = (\mathrm{ad} f_{\alpha\beta}\,(x)^{-1})\,\Theta_\alpha\,(x, X_1, \ldots, X_q), \qquad (3.10)$$

связывающая формы Θ_α и Θ_β на $U_\alpha \cap U_\beta$.

3.5. Форма кривизны. С помощью универсальной формы ω связности σ в $E(V, G)$ можно составить, используя исчисление G'-значных форм ([4], п. 24; [11], п. 12), следующую G'-значную 2-форму

$$\Omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega], \qquad (3.11)$$

которая называется *формой кривизны* связности σ.

Имеет место следующая теорема, которая дана с локальной точки зрения в [2], с глобальной точки зрения в [11].

Теорема 8. *Форма кривизны Ω линейной связности σ в $E(V, G)$ является полубазовой формой типа* ad$G$.

Доказательство. Формулу (3.1) можно на основании (3.3) писать в виде

$$\omega = (\mathrm{ad}\ g_\alpha^{-1})(\delta p)\,\omega_\alpha + (\delta\psi_\alpha)\partial,$$

где $g_\alpha =: \psi_\alpha(x)$, а δp и $\delta\psi_\alpha$ обозначают дуальные дифференциалы отображений p и ψ_α. Поэтому

$$\Omega = (\mathrm{ad}\, g_\alpha^{-1})(\delta p)\left(d\omega_\alpha + \frac{1}{2}[\omega_\alpha, \omega_\alpha]\right) +$$
$$+ \delta(\mathrm{ad}\, g_\alpha^{-1}) \wedge (\delta p)\,\omega_\alpha + [(\mathrm{ad}\, g_\alpha^{-1})(\delta p)\,\omega_\alpha, (\delta\psi_\alpha)\partial] +$$
$$+ (\delta\psi_\alpha)\left(d\theta + \frac{1}{2}[\partial, \theta]\right),$$

где $\delta(\mathrm{ad} g_\alpha^{-1})$ обозначает образ дифференциала $d(\mathrm{ad} g^{-1})$ матрицы присоединенного представления $(\mathrm{ad} g^{-1})$ (как 1-формы с матричными значениями на G) при $\delta\psi_\alpha$. Здесь

$$\Omega_\alpha = d\omega_\alpha + \frac{1}{2}[\omega_\alpha\, \omega_\alpha] = (\delta\mu_\alpha)\Omega$$

является 2-формой на области U_α базы V.

Достаточно показать, что остальные члены в правой части выражения для Ω взаимно сокращаются. В самом деле,

$$d\theta + \frac{1}{2}[\theta, \partial] = 0$$

является лишь сокращенной записью известных формул Маурера-Картана ([10], стр. 224; [11], стр. 95). Далее необходимо найти выражение для $d(\mathrm{ad} g^{-1})$. Если Y является касательным вектором пути g_t^{-1}, $t \in [0, 1]$ в G, то значение $d(\mathrm{ad} g^{-1})$ на векторе Y в точке g_0^{-1} равно

$$d(\mathrm{ad}\, g^{-1})(Y) = (Y(\mathrm{ad}\, g^{-1}))_0 = \lim_{t \to 0} \frac{(\mathrm{ad}\, g_t^{-1}) - (\mathrm{ad}\, g_0^{-1})}{t} =$$
$$= (\mathrm{ad}\, g_0^{-1}) \lim_{t \to 0} \frac{(\mathrm{ad}\, \bar{g}_t^{-1}) - I}{t},$$

где $\tilde{g}_t^{-1} = g_0 \cdot g_t^{-1}$ является путем с началом e и касательным вектором $\theta(g_0^{-1}, Y)$, и поэтому $(\mathrm{ad}\, g_t^{-1}) = (\mathrm{ad}\, g_0^{-1})(\mathrm{ad}\, \tilde{g}_t^{-1})$; I обозначает единичный оператор в алгебре Ли $\acute{G}$. По известной формуле ([6], стр. 30) для произвольного элемента $Y' \in G'$

$$\lim_{t \to 0} \frac{(\mathrm{ad}\, \tilde{g}_t^{-1}) Y' - Y'}{t} = [\theta(g_0^{-1}, Y), Y'], \tag{3.12}$$

и поэтому

$$\begin{aligned}[d(\mathrm{ad}\, g^{-1})(Y)]Y' &= (\mathrm{ad}\, g_0^{-1})[\theta(g_0^{-1}, Y), Y'] = \\ &= -[\theta(g_0, Y_1), (\mathrm{ad}\, g_0^{-1}) Y'],\end{aligned}$$

где Y_1 является касательным вектором пути g_t. Далее, в точке $z \in E$ для произвольных $Z, Z' \in T_z(E)$ имеет место

$$\begin{aligned}&[\delta(\mathrm{ad}\, g_\alpha^{-1}) \wedge (\delta p)\omega_\alpha](Z, Z') = \\ &= [d(\mathrm{ad}\, g^{-1})(\delta\tilde{\Psi}_\alpha Z)]\omega_\alpha(dpZ') - [d(\mathrm{ad}\, g^{-1})(d\tilde{\Psi}_\alpha Z')]\omega_\alpha(dpZ) = \\ &= -[(\delta\psi_\alpha)\theta(Z), (\mathrm{ad}\, g_\alpha^{-1})(\delta p)\omega_\alpha(Z')] + \\ &+ [(\delta\psi_\alpha)\theta(Z'), (\mathrm{ad}\, g_\alpha^{-1})(\delta p)\omega_\alpha(Z)] = \\ &= -[(\delta\psi_\alpha)\theta, (\mathrm{ad}\, g_\alpha^{-1})(\delta p)\omega_\alpha](Z, Z'),\end{aligned}$$

где $\tilde{\Psi}_\alpha(z) = \psi_\alpha(z)^{-1}$. Следовательно,

$$\delta(\mathrm{ad}\, g_\alpha^{-1}) \wedge (\delta p)\omega_\alpha = -[(\mathrm{ad}\, g_\alpha^{-1})(\delta p)\omega_\alpha, (\delta\Psi_\alpha)\theta],$$

и теорема доказана.

В обратном направлении имеется замечательный результат Г. Ф. Лаптева [2, 3], который в глобальной формулировке может быть выражен следующим образом.

Теорема 9. *Пусть на $E(V, G)$ задана невырожденная G'-значная 1-форма ω, так что 1) для произвольного вертикального вектора $Z' \subset T_x(G_z)$ имеет место*

$$\omega(z, Z') = (d\gamma_z^{-1}) Z'$$

и 2″) составленная из нее G'-значная 2-форма

$$\Omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]$$

является полубазовой формой типа $\mathrm{ad}\, G$. Тогда в $E(V, G)$ существует в точности одна линейная связность σ, для которой ω является универсальной формой связности.

Доказательство теоремы состоит в том, что из условия 2″) выводится условие 2) теоремы 7. Вывод оказывается довольно сложным. В настоящей работе ограничимся только формулировкой результата.

Тот факт, что форма кривизны Ω является полубазовой, позволяет ее интерпретировать с новой точки зрения. Именно, $\Omega(z, Z_1, Z_2) = \Omega(z, Z''_1, Z_2'')$, где Z_k'' является горизонтальной компонентой вектора Z_k. Так как $\omega(Z_k'') = 0$, то $\Omega(z, Z_1'', Z_2'') = (d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega])(z, Z_1'', Z_2'') = d\omega(z, Z_1'', Z_2'')$, и поэтому

$$\Omega(z, Z_1, Z_2) = d\omega(z, Z_1'', Z_2'')$$

(см. [6], стр. 53).

Нетрудно указать *тождество Бианки* ([11], стр. 101), которому удовлетворяет форма кривизны:

$$d\Omega = [\Omega, \omega]. \tag{3.13}$$

Действительно, из (3.11)

$$d\Omega = [d\omega, \omega] = [\Omega, \omega] - \frac{1}{2}[[\omega, \omega], \omega],$$

где $[[\omega, \omega], \omega] = [[\varepsilon_\varrho, \varepsilon_\sigma], \varepsilon_\tau] \oplus \omega^\varrho \wedge \omega^\sigma \wedge \omega_\tau = 0$ в силу тождества Якоби, имеющего место в алгебре Ли G' группы G.

3.6. Алгебра Ли группы голономии. В случае линейной связности в главном расслоенном пространстве $E(V, G)$ можно для группы голономии дать новое определение, пользуясь следующим отношением эквивалентности в E: z_0 и z_1 в E называются эквивалентными и обозначается $z_0 \sim z_1$, если существует путь $\lambda(p(z_0), p(z_1)) \subset V$, так что

$$z_0 = \sigma^\lambda (z_1).$$

Легко видеть, что аксиомы эквивалентности удовлетворены и из $z_0 \sim z_1$ вытекает $z_0 \cdot g \sim z_1 \cdot g$. Пространство E распадается на классы эквивалентности M_z, каждый из которых состоит из точек в E, соединимых с некоторой точкой $z \in E$ (а следовательно и попарно) горизонтальными путями.

Лемма 6. *Множество $\Phi_z = \gamma_z^{-1}(M_z \cap G_z) \subset G$ (т. е. таких g, что $z \cdot g \in M_z$) совпадает с группой голономии данной связности в E. Если $z \sim z'$, то $\Phi_z = \Phi_z'$; если $M_z \not\approx M_z'$, то Φ_z и Φ_z' являются сопряженными подгруппами в G.*

Доказательство. Если $g, g' \in \Phi_z$, то $z \cdot g \sim z$, $z \cdot g' \sim z$, и, следовательно, $z \sim z \cdot g^{-1}$ и $z \cdot g^{-1} g' \sim (z \cdot g^{-1}) \cdot g' \sim z \cdot g' \sim z$, т. е. Φ_z является подгруппой в G. Горизонтальный путь, соединяющий z и $z \cdot g$, проектируется при $p: E$ на V в петлю; поэтому g принадлежит группе голономии. Обратно, если g является элементом группы голономии, то существует петля $\lambda(x, x) \subset V$, так что $\sigma^\lambda (z) = z \cdot g$; путь, состоящий из $\sigma^{\lambda_t}(z)$, является горизонтальным путем, соединяющим z и $z \cdot g$, т. е. $g \in \Phi_z$.

Если $g \in \Phi_z$, то $z \sim z \cdot g$, и так как из $z \sim z'$ вытекает $z \cdot g \sim z' \cdot g$, то $z' \sim z' \cdot g$; следовательно $g \in \Phi_z'$.

Если $M_z \neq M_z'$, то в $M_{z'}$ существует z', так что $z' = z \cdot g'$. Из $z \cdot g \sim z$ вытекает $z \cdot g' \sim (z \cdot g) \cdot g' \sim (z \cdot g') \cdot (g'^{-1} g g')$; следовательно $z' = z' \cdot g'^{-1} g g'$ и $\Phi_z' = g'^{-1} \Phi_z g'$. Лемма доказана.

Отсюда еще раз видно, что группа голономии определяется с точностью до внутреннего автоморфизма. Подгруппы $\Phi_z \subset G$ в пучке сопряженных групп голономии находятся во взаимно однозначном соответствии с классами M_z.

Из леммы 6 следует, в частности, что $M_z \cap G_z = z \cdot \Phi_z$ является дифференцируемым многообразием. Поэтому дифференцируемым многообразием является также M_z, покрываемый открытыми областями $U_\alpha \times \Phi_z$.

Алгебра Ли группы голономии Φ_z совпадает, очевидно, с линейным подпространством

$$\hat{\Phi}_z = (d\gamma_z^{-1}) T_z (M_z \cap G_z)$$

в алгебре Ли структурной группы G; при этом из $z' \subset M_z$ следует $\hat{\Phi}_{z'} = \hat{\Phi}_z$. Оказывается, что $\hat{\Phi}_z$ полностью определяется 2-формой кривизны Ω данной связности σ. Это утверждение составляет содержание следующей теоремы о голономии. Приводимое ниже доказательство следует идеям Номидзу [6].

Теорема 10. *Алгебра Ли $\hat{\Phi}_z$ группы голономии Φ_z связности σ в $E(V, G)$ совпадает с линейным подпространством в G', натянутым на значения $\Omega(z, Z_1, Z_2)$ 2-формы кривизны, где z пробегает M_z, а Z_1 и Z_2 являются двумя произвольными векторами в $T_z(E)$.*

Доказательство. Пусть линейное подпространство в G', натянутое на всевозможные значения $\Omega(z, Z_1, Z_2)$, где z пробегает M_z, обозначено пока через $\hat{\Omega}_z$. Оказывается, что $\hat{\Omega}_z$ является подалгеброй в G'.

Пусть задан путь $\lambda(e, g_1) \subset \Phi_z$ с касательным вектором $Y \subset \hat{\Phi}_z$; тогда $z \cdot g_t \in M_z$ и поэтому

$$\Omega(z \cdot g_t, (dR_{g_t}) Z_1, (dR_{g_t}) Z_2) \subset \hat{\Omega}_z$$

Но Ω является 2-формой типа ad G, т. е.

$$\Omega(z \cdot g_t, (dR_{g_t}) Z_1, (dR_{g_t}) Z_2) = (ad g_t^{-1}) \, \Omega(z, Z_1, Z_2).$$

Вследствие этого

$$\lim_{t \to 0} \frac{(\operatorname{ad} g_t^{-1}) \, \Omega(z, Z_1, Z_2) - \Omega(z, Z_1, Z_2)}{t} = [Y, \Omega(z, Z_1, Z_2)]$$

(см. [6], стр. 30) является элементом G', принадлежащим подпространству $\hat{\Omega}_z$, т. е.

$$[\hat{\Phi}_z, \hat{\Omega}_z] \subset \hat{\Omega}_z. \qquad (3.13)$$

Далее необходимо установить, что $\hat{\Omega}_z \subset \hat{\Phi}_z$. Это можно сделать следующим образом.

Так как горизонтальные пути являются интегральными для горизонтального распределения N, то классы M_z являются интегральными многообразиями голономного распределения $T(M)$ минимальной размерности, содержащего N. С другой стороны, $T(M)$ как голономное распределение содержит вместе с векторными полями $Z_1, Z_2 \in N$ также их скобки $[Z_1, Z_2]$. При этом компонент вектора $[Z_1, Z_2]_z \subset T_z(E) = T_z(G_z) + N_z$ в касательном пространстве $T_z(G_z)$ слоя G_z равен $\bar{\omega}(z, Z_1, Z_2) = (d\gamma_z)_z \omega(z, Z_1, Z_2)$ (см. п. 3.4). Далее при $Z_1, Z_2 \in N$ имеет место

$$\Omega\ (Z_1, Z_2) = (d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega])\,(Z_1, Z_2) = -\frac{1}{2}\,\omega([Z_1, Z_2]),$$

потому что $\omega(Z_1) = \omega(Z_2) = 0$ и по известной формуле (см. [6], стр. 24)

$$2d\omega(Z_1, Z_2) = Z_1\omega(Z_2) - Z_2\omega(Z_1) - \omega([Z_1, Z_2]).$$

Следовательно, $T(M_z) = N_z + (d\gamma_z)_e\hat{\Phi}_z$ содержит вертикальные векторы $(d\gamma_z)_e\Omega(z, Z_1, Z_2) \subset T_z(G_z)$ и поэтому $\hat{\Omega}_z \subset \hat{\Phi}_z$. Из (3.13) следует, что

$$[\hat{\Omega}_z, \hat{\Omega}_z] \subset \hat{\Omega}_z,$$

т. е. $\hat{\Omega}_z$ является подалгеброй в $\hat{G}$.

Теперь нетрудно доказать, что $\hat{\Phi}_z = \hat{\Omega}_z$. Для этого достаточно установить, что распределение Δ на $E(V, G)$, подпространство Δ_z которого в точке $z \in E$ натянуто на N_z и на $(d\gamma_z)_e\hat{\Omega}_z = \bar{\Omega}_z$ является голономным, т. е. что скобка двух векторных полей из Δ также принадлежит распределению Δ.

На Δ можно выбрать базис, состоящий из произвольно взятых векторных полей в N и так называемых фундаментальных векторных полей, каждое из которых состоит из образов $(d\gamma_z)_eY$ одного и того же вектора $Y \in \hat{\Omega}_z \subset G'$. Вертикальный компонент скобки $[Z_1, Z_2]$ двух полей $Z_1, Z_2 \in N$ в точке $z \in E$ равен $-2(d\gamma_z)_e\Omega(z, Z_1, Z_2)$ и поэтому принадлежит $\bar{\Omega}_z$. Скобка двух фундаментальных полей принадлежит $\bar{\Omega}_z$, так как Ω_z является подалгеброй. Остается случай, когда $Z_1 \in N$ и Z_2 является фундаментальным векторным полем из Ω_z. Существует однопараметрическая подгруппа $g_t \subset G$, так что Z_2 состоит из касательных векторов путей $z \cdot g_t$, $t \in [0, 1]$. При этом

$$[Z_1, Z_2] = \lim_{t \to 0} \frac{(dR_{g_t}) Z_1 - Z_1}{t}$$

(см. 6, стр. 20). Так как Z_1 и $(dR_{g_t})Z_1$ оба горизонтальны, то $[Z_1, Z_2]$ также горизонтально.

Тем самым доказано, что распределение Δ голономно. С другой стороны, оно содержит горизонтальное распределение N и поэтому совпадает с голономным распределением минимальной размерности, содержащем N, т. е. с $T(M)$. Но Δ_z натянута на N_z и $(d\gamma_z)_e\hat{\Omega}_z$, $T(M_z)$ натянута на N_z и $(d\gamma_z)_e\hat{\Phi}_z$; следовательно, $\hat{\Phi}_z = \hat{\Omega}_z$. Теорема доказана.

Утверждение теоремы можно несколько детализировать, если использовать тот факт, что форма кривизны Ω является полубазовой формой, т. е. что $(d\gamma_z)_e\Omega(z, Z_1, Z_2) = \overline{\Omega}(z, Z_1, Z_2)$ фактически зависит только от проекции $[(dp)_z Z_1,\ (dp)_z Z_2] = [X_1 X_2]$ бивектора $[Z_1 Z_2]$.

Пусть в топологической полугруппе петель в точке $x \in V$, гомоморфным образом которой является группа голономии Φ_x, задан «путь» с началом в единичной петле, «касательный» к бивектору $[X_1 X_2]$, т. е. множество петель $\lambda^\tau(x, x)$, непрерывно зависящих от вещественного параметра τ, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$, так, что 1) при $\tau \to 0$ петля λ^τ стягивается в единичную петлю в точке $x \in V$, 2) бивектор $\frac{1}{\tau^2}[X_1^\tau X_2^\tau]$, составленный из касательных векторов X_1^τ, X_2^τ взаимно обратных замкнутых путей, представляющих петли λ^τ и $(\lambda^\tau)^{-1}$ (см. п. 2.1), при $\tau \to 0$ стремится к бивектору $[X_1 X_2]$.

Этому «пути» в вышеуказанном гомоморфизме соответствует путь λ' в группе G с началом в единице e, а пути λ' при фундаментальном диффеоморфизме $\gamma_z : G$ на G_z соответствует вертикальный путь $\Lambda' = \gamma_z\lambda'$ в слое G_z с началом в точке z.

Теорема 11. *Касательным вектором пути $\Lambda' \subset G_z$, соответствующего вышеуказанным способом «пути» в полугруппе петель в точке $p(z) = x \in V$ с «касательным» бивектором $[X_1 X_2]$, является вектор $\overline{\Omega}(z, Z_1, Z_2) \in T_z(G_z)$, где Z_k, $k = 1, 2$, являются произвольными векторами в $T_z(E)$, такими, что $(dp)_z Z_k = X_k$.*

Доказательство теоремы, на котором здесь нет возможности останавливаться, нетрудно получить методами, применяемыми в доказательствах теоремы о голономии (см., например, [4]).

Указанный результат дает геометрическое значение соответствия $[Z_1Z_2]\rightarrow\overline{\Omega}(z, Z_1, Z_2)$ между бивекторами в $T_z(E)$ и векторами в $T_z(G_z)$, устанавливаемого формой кривизны Ω.

Следует еще отметить, что из формулы (3.11) непосредственно получается следующий результат.

Теорема 12. *Горизонтальное распределение N на главном расслоенном пространстве $E(V, G)$ для данной линейной связности σ является голономным тогда и только тогда, если форма кривизны этой связности обращается в нуль:* $\Omega=0$.

Доказательство. Горизонтальное распределение N является аннулятором универсальной формы связности, а тождество $\Omega=0$ является условием того, чтобы система $\omega=0$ была вполне интегрируемой.

Связность σ в $E(V, G)$, для которой $\Omega=0$, называется *локально плоской* (см. [6], § 8). В таком случае диффеоморфизм $\sigma^{\lambda}: p^{-1}(x_1)$ *на* $p^{-1}(x_0)$ является одинаковым для всех путей, соединяющих точки x_0, $x_1 \in V$ и принадлежащих одному и тому же классу гомотопии.

§ 4. Связность в фактор-пространстве и в приведенном пространстве

4.1. Связность в фактор-пространстве. Если в структурной группе G главного расслоенного пространства $E(V, G)$ выделена некоторая подгруппа Ли $H \subset G$, то по теореме 1 в E можно рассматривать новую структуру $E(E^*, H)$ главного расслоенного пространства, базой которого является фактор-пространство $E^* = E(V, G)/H$.

Теорема 13. *Если в $E(V, G)$ задана связность σ и в G выделена подгруппа Ли H, то для произвольного пути $\lambda(x_0, x_1) \subset V$ диффеоморфизм $\sigma(\lambda): p^{-1}(x_1)$ на $p^{-1}(x_0)$ отображает классы интразитивности по H в слое $p^{-1}(x_1)$ в такие же классы интразитивности в слое $p^{-1}(x_0)$, определяя диффеоморфизм $\sigma^*(\lambda)$ слоя $p^{*-1}(x_1)$ на слой $p^{*-1}(x_0)$ в фактор-пространстве $E(V, G)/H$. При этом σ^* является связностью в фактор-пространстве E/H.*

Доказательство. Пусть $\Lambda(z_0, z_1) \subset E$ является горизонтальным путем в связности σ над путем $\lambda(x_0, x_1) \subset V$. Тогда путь $\Lambda \cdot h$, $h \in H$, является, в силу теоремы 4, также горизонтальным, причем $p(\Lambda \cdot h) = p(\Lambda) = \lambda$. В силу леммы 2 над λ существует единственный горизонтальный путь с началом в точке $z_0 \cdot h \subset p^{-1}(x_0)$, который, следовательно, совпадает с $\Lambda \cdot h$. Здесь h может быть произвольным элементом подгруппы H. Поэтому точки в E, являющиеся пересечениями слоя $p^{-1}(x_t)$, $x_t \subset \lambda$, со всеми горизонтальными путями в E, начинающимися в точках одного и того же класса интранзитивности по H в слое $p^{-1}(x_0)$, составляют в точности один класс транзитивности по H в слое $p^{-1}(x_t)$. Короче говоря, все такие горизонтальные пути при канонической проекции $\pi : H$ на E/H отображаются в один единственный путь $\Lambda^*(z_0^*, z_1^*) \subset E/H$ над $\lambda(x_0, x_1) \subset V$.

Здесь $z_1{}^*$ может быть произвольная точка слоя $p^{*-1}(x_1)$. Поэтому все полученные пути Λ^* над $\lambda(x_0, x_1) \subset V$ устанавливают некоторое отображение $\sigma^*(\lambda) = \sigma^{*\lambda}$ слоя $p^{*-1}(x_1)$ на слой $p^{*-1}(x_0)$, которое, очевидно, является диффеоморфизмом. При этом

$$\sigma^{*\lambda}\,\pi(z) = \pi\sigma^{\lambda}(z), \qquad z \in p^{-1}(x_1). \tag{4.1}$$

Остается проверить, что отображение σ^* множества путей $\{\lambda\}$ в базе в множество диффеоморфизмов слоя на слой пространства E/H удовлетворяет условиям $\sigma\mathbf{1} - \sigma\mathbf{4}$.

Условие $\sigma\mathbf{1}$, очевидно, удовлетворено.

Условие $\sigma\mathbf{2}$ проверяется следующим орбазом. Для связности σ в $E(V, G)$

$$l^{\lambda}_{\alpha} = (\varphi^{x_0}_{\alpha})^{-1}\,\sigma^{\lambda}\,\varphi^{x_1}_{\alpha}$$

по формуле (2.7) является левым сдвигом в группе G, определяемом элементом $g^{\lambda}_{\alpha} \in G$. Следовательно,

$$l^{\lambda}_{\alpha}(gH) = g^{\lambda}_{\alpha}(gH), \tag{4.2}$$

т. е. левый сдвиг $l^{\lambda}_{\alpha} : G$ *на* G индицирует диффеоморфизм

$$l^{*\lambda}_{\alpha} : G/H \text{ на } G/H,$$

так что справедлива формула

$$l^{*\lambda}_{\alpha}\,\chi(g) = \chi l^{\lambda}_{\alpha}(g), \tag{4.3}$$

где χ по-прежнему является канонической проекцией G на G/H. При этом $l^{*\lambda}_{\alpha}$, в силу формулы (4.2), совпадает с эффективным действием элемента $\varkappa(g^{\lambda}_{\alpha}) \subset G/K$ на G/K, где K является максимальным нормальным делителем группы G, содержащимся в H, а $\varkappa$ является канонической проекцией группы G на фактор-группу G/K — на структурную группу пространства E/H (см. теорема 1).

Справедливость формулы:

$$(\varphi^{*x_0}_{\alpha})^{-1}\sigma^{*\lambda}\,\varphi^{*x_1}_{\alpha}(y) = l^{*\lambda}_{\alpha}(y), \; y \in G/H,$$

проверяется теперь непосредственно, используя формулы (1.9), (4.1), (2.7) и (4.3). Именно, пусть $y = \chi(g)$; тогда

$$(\varphi_\alpha^{*x_0})^{-1}\sigma^{*\lambda}\varphi_\alpha^{*x_1}(\chi(g)) = (\varphi_\alpha^{*x_0})^{-1}\sigma^{*\lambda}\pi\varphi_\alpha^{x_1}(g) =$$

$$= (\varphi_\alpha^{*x_0})^{-1}\pi\sigma^\lambda\varphi_\alpha^{x_1}(g) = (\varphi_\alpha^{*x_0})^{-1}\pi\varphi_\alpha^{x_0}(l_\alpha^\lambda(g)) =$$

$$= \chi l_\alpha^\lambda(g) = l_\alpha^{*\lambda}\chi(g).$$

Здесь нужно еще отметить, что

$$l_\alpha^{*\lambda}(y) = y\cdot\varkappa(g_\alpha^\lambda).$$

Проверка условий $\sigma 3$ и $\sigma 4$ не представляет теперь труда. Развертывание $F_\alpha{}^*$ пути $\lambda\subset U_\alpha$ в структурную группу $G^* = G/K$ пространства E/H определяется формулой

$$F_\alpha{}^* = \varkappa F_\alpha.$$

Теорема доказана.

Относительно группы голономии связности σ^* в E/H можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 14. *Если группой голономии связности σ в $E(V, G)$ является Φ, то группой голономии связности σ^* в E/H является $\Phi^* = \Phi/K^*$, где $K^* = \Phi\cap K$ является пересечением подгруппы $\Phi\subset G$ с максимальным нормальным делителем K группы G, содержащимся в H.*

Доказательство. Из доказательства предыдущей теоремы следует, что если петле $\lambda(x, x)\subset V$ в связности σ соответствует элемент $g_\alpha^\lambda\in\Phi$, то этой петле в связности σ^* соответствует элемент $\varkappa(g_\alpha^\lambda)\in\Phi/K^*$.

Теорема 15. *Если связность σ в $E(V, G)$ является линейной, то индуцированная ею связность $^*\sigma$ в фактор-пространстве E/H является также линейной.*

Доказательство. Пусть связность σ в $E(V, G)$ удовлетворяет условию $\sigma 5$, т. е. на области $U_\alpha\subset V$ определена G'-значная 1-форма ω_α, которая касательному вектору X пути $\lambda(x, x_1)\subset U_\alpha$ ставит в соответствие касательный вектор $\omega_\alpha(x, X)$ его развертки $F_\alpha(\lambda)\subset G$. Так как разверткой того же пути $\lambda\subset V$ в связности σ^* является каноническая проекция пути $F_\alpha(\lambda)\subset G$:

$$F_\alpha{}^*(\lambda) = \varkappa F_\alpha(\lambda),$$

то касательным вектором пути $F_\alpha{}^*(\lambda)$ является

$$\omega_\alpha{}^*(x, X) = (d\varkappa)_{F_\alpha(x)}\,\omega_\alpha(x, X)\subset (G/K)'$$

и из линейности ω_α следует линейность $\omega_\alpha{}^*$. Теорема доказана.

Горизонтальное распределение N^* для связности σ^* в E/H является образом горизонтального распределения N для связности σ в E при дифференциале $d\pi$ канонической проекции $\pi : E$ на E/H.

Касательное пространство $T_{z*}(E^*)$ является прямым произведением

$$T_{z^*}(E^*) = T_{z^*}(\Gamma_{z^*}) + N_{z^*}$$

касательного пространства $T_{z^*}(\Gamma_{z^*})$ к слою Γ_{z^*} и пространства N_{z^*} горизонтального распределения. Компонент в $T_{z^*}(\Gamma_{z^*})$ произвольного вектора $Z^* \in T_{z^*}(\Gamma_{z^*})$ в этом произведении обозначается через $\bar{\omega}^*(z^*, Z^*)$.

Оказывается, что

$$\bar{\omega}^*(z^*, Z^*) = (d\pi)_z \bar{\omega}(z, Z), \qquad (4.4)$$

где по-прежнему $\bar{\omega}(z, Z) = (d\gamma_z)_e \omega(z, Z)$, а z и Z являются произвольной точкой $z \in E$ и произвольным вектором $Z \in T_z(E)$, такими, что $\pi(z) = z^*$, $(d\pi)_z Z = Z^*$.

Действительно, если Z является касательным вектором пути $\Lambda(z, z_1) \subset E$, то $\bar{\omega}(z, Z)$, как нетрудно видеть на основании результатов п. 3.4, является касательным к $\sigma\Lambda$, а Z^* — касательным к $\pi\Lambda$. Из (4.1) следует, что

$$\sigma^* \pi \Lambda = \pi \sigma \Lambda.$$

Левая часть равенства (4.4) является касательным вектором пути $\sigma^*\pi\Lambda$, правая часть — пути $\pi\sigma\Lambda$; следовательно, (4.4) справедливо.

В обратном направлении имеет место следующая теорема.

Теорема 16. *Если в расслоенном пространстве $E^*(V, \Gamma, G, p^*, \{U_\alpha\}, \{\varphi_\alpha{}^*\})$ задана связность σ^*, то в присоединенном главном расслоенном пространстве $E(V, G)$ существует в точности одна связность σ, которая в $E^* = E/H$ как в фактор-пространстве индуцирует заданную связность σ^*. Если σ^* является линейной, то σ также линейна.*

Доказательство. Теорема следует из того, что диффеоморфизм $\sigma^*(\lambda) = \sigma^{*\lambda}$ слоя на слой в пространстве E^* определяет также диффеоморфизм $\sigma(\lambda)$ между многообразиями реперов в этих слоях, но эти многообразия составляют слои пространства E.

4.2. Связность Картана для приклеенной секущей поверхности. В этом пункте рассматривается линейная связность σ^* в фактор-пространстве $E^* = E(V, G)/H$ при следующих предположениях: 1) $\dim V = \dim G/H$, 2) существует глобальная секущая поверхность $\mu^*(V)$, которая точно приклеена к фактор-пространству (см. п. 1.6). Содержание пункта нетрудно обобщить, насколько это вообще окажется возможным, на более общий случай секущей поверхности $\mu^*(V')$, приклеенной к $E(V, G)/H$.

Оказывается, что если при сделанных предположениях в E^* задана линейная связность σ, то в касательном к базе V пространстве $T_x(V)$ определяется особый аффинор, характеризующий отношение связности σ^* к приклеиванию α.

Именно, пусть в базе V задан путь $\lambda(x, x_1)$, которому в $\mu^*(V)$ соответствует путь $\Lambda^* = \mu^*(\lambda)$. Этот путь Λ^* можно развертывать в путь $\sigma^*\Lambda^* \subset p^{*-1}(x)$. Касательному вектору X пути $\lambda \subset V$ ставится в соответствие касательный вектор $\bar{\omega}^*(\mu^*(x), (d\mu^*)_x X)$ пути $\sigma^*\Lambda$. Последнему, в свою очередь, при α соответствует вектор $\alpha_x\bar{\omega}^*(\mu^*(x), (d\mu^*)_x X) \subset T_x(V)$, который, очевидно, линейно зависит от X. Поэтому существует аффинор Ψ в $T_x(V)$, так что

$$\alpha_x\bar{\omega}^*(\mu^*(x), (d\mu^*)_x X) = \Psi X.$$

С помощью этого аффинора можно выделить два крайних случая:

1) Если $\Psi \equiv 0$, то секущая поверхность $\mu^*(V)$ является горизонтальной в связности σ^* в E^*.

2) Если Ψ совпадает с единичным аффинором, то связность σ^* называется *связностью Картана* для приклеенной секущей поверхности $\mu^*(V_1)$.

Следует отметить, что в случае невырожденного аффинора Ψ приклеивание α можно всегда так изменить, чтобы связность σ^* стала картановской для нового приклеивания.

Для частного случая связности в расслоенном пространстве аффинных реперов аффинор Ψ был введен в [13]. Общее понятие связности Картана дано в [15, 16] в несколько других терминах.

4.3. Индуцированная связность в приведенном пространстве в случае редуктивного типового слоя. В ряде случаев связность, заданная в главном расслоенном пространстве $E(V, G)$, индуцирует связность также в приведенном главном расслоенном пространстве $E'(V', H) = \pi^{-1}\mu^*(V')$, т. е. в прообразе относительно π некоторой секущей поверхности $\mu^*(V')$, $V' \subset V$, фактор-пространства E/H (см. п. 1.5).

Наиболее простым является здесь случай, когда $\mu^*(V')$ является горизонтальной секущей поверхностью для связности σ^* в фактор-пространстве. В этом случае говорят, что связность σ

в E *приводима* к некоторой связности σ' в приведенном главном расслоенном пространстве $E'(V,H)\equiv\pi^{-1}\mu^*(V')$.

Если связность σ является линейной, то σ' также линейна.

Имеет место теорема Номидзу [6, 18], согласно которой структурная группа G главного расслоенного пространства $E(V,G)$, в котором задана линейная связность σ, всегда приводима к группе голономии $\Phi\subset G$ связности σ (см. п. 1.5), причем над всей базой V, а связность σ приводима к некоторой связности σ' в приведенном пространстве $E'(V,\Phi)$, группа голономии которой совпадает с Φ.

В общем случае $\mu^*(V')$, если она вообще существует, не обязана быть горизонтальной секущей поверхностью для связности σ^* в $E^*=E/H$. В таком случае индуцированную связность σ' в $E'(V',H)=\pi^{-1}\mu^*(V')$ удается ввести только при некоторых дополнительных предположениях. Достаточно требовать, например, чтобы в главном расслоенном пространстве $G(G/H,H)$ существовала левоинвариантная связность $\hat{\sigma}$.

Ниже соответствующие построения рассматриваются только в случае линейных связностей σ в $E(V,G)$ и $\hat{\sigma}$ в $G(G/H,H)$, когда индуцированная связность σ' в E' также получается линейная.

Левоинвариантность линейной связности $\hat{\sigma}$ в $G(G/H,H)$ означает, что ее горизонтальное распределение левоинвариантно и, следовательно, порождается подпространством $K'\subset G'$, удовлетворяющим следующим условиям (см. [6], стр. 68):

1) $G'=H'+K'$,

2) $(\mathrm{ad}\,H)K'=K'$.

В таком случае часто говорят, что однородное пространство G/H редуктивно [17].

Пусть $z\in E'(V',H)\subset E(V,G)$, $V'\subset V$, $H\subset G$. Тогда $T_z(E')\subset\subset T_z(E)$ и

$$T_z(E)=T_z(E')+K_z,$$

где $K_z=(d\gamma_z)_eK'$. С другой стороны,

$$T_z(E)=T_z(G_z)+N_z=H_z+K_z+N_z,$$

где $H_z=(d\gamma_z)_eH'$, а N_z является подпространством в $T_z(E)$ горизонтального распределения N для связности σ в E.

Подпространства $T_z(E')\subset T_z(E)$ и $H_z+N_z\subset T_z(E)$ оба дополняют $K_z\subset T_z(E)$ до полной прямой суммы $T_z(E)$ и между ними, следовательно, устанавливается канонический изоморфизм ε_z. Так как $H_z\subset T_z(E')$, то $\varepsilon_zH_z=H_z$. Поэтому $\varepsilon_zN_z=N_z'\subset\subset T_z(E')$ дополняет H_z до прямой суммы

$$T_z(E')=H_z+N_z'.$$

Рассматривая z как произвольную точку приведенного пространства $E'(V',H)$, получается распределение N' на E', которое, как видно, удовлетворяет условию 2), предъявленному горизонтальным распределениям (см. теорема 6).

Распределение N' удовлетворяет также условию 1) теоремы 6. Действительно, пусть на точку $z \in E' \subset E$ влияет действие R_h элемента $h \in H$, которое переводит ее в точку $R_h z = z \cdot h$. В этой точке также определены $N_{z \cdot h}$, $N'_{z \cdot h} = \varepsilon_{z \cdot k} N_{z \cdot h}$ и $K_{z \cdot h} = (d\gamma_{z \cdot h})_e K'$. Так как N является горизонтальным распределением для связности σ, то

$$N_{z \cdot h} = (dR_h)_z N_z.$$

Из того, что $(\mathrm{ad}\, h) K' = K'$, следует, как нетрудно убедиться, что

$$K_{z \cdot h} = (dR_h)_z K_z.$$

Отсюда, как следствие, и получается, что

$$N_{z \cdot h} = (dR'_h) N'_z,$$

где R'_h обозначает правостороннее действие элемента $h \in H$ на $E'(V, H) = \pi^{-1}\mu^*(V')$. Следовательно, распределение N' на $E'(V', H)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 6.

В итоге можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 17. *Если в главном расслоенном пространстве $E(V', G)$ задана линейная связность σ и в главном расслоенном пространстве $G(G/H, H)$ задана левоинвариантная линейная связность $\hat{\sigma}$, то в каждом приведенном главном расслоенном пространстве $E'(V', H) = \pi^{-1}\mu^*(V')$ также индуцируется некоторая линейная связность σ'.*

4.4. Соотношения между формами. Универсальная форма ω линейной связности σ в $E(V, G)$ определяет проекцию $\bar{\omega} : T_z(E)$ на $T_z(G_z)$ относительно прямой суммы $T_z(E) = T_z(G_z) + N_z$.

Аналогичная форма $\bar{\omega}'$ и проекция $\omega' : T_z(E')$ на H_z существуют также для линейной связности σ' в $E'(V', H)$.

Ниже устанавливаются некоторые соотношения, связывающие формы ω и ω', и соответствующие им формы кривизны Ω и Ω'.

Для каждого $Z' \in T_z(E') \subset T_z(E)$ существует $\bar{\omega}(z, Z') \in T_z(G_z)$, который, в силу того, что $T_z(G_z) = H_z + K_z$, можно представить в виде

$$\bar{\omega}(z, Z') = \bar{\omega}'(z, Z') + \bar{\vartheta}(z, Z'),$$

где $\bar{\omega}'(z, Z') \in H_z$, $\bar{\vartheta}(z, Z') \in K_z$.

Так как $\bar{\omega} = (d\gamma_z)_e \omega$, $\bar{\omega}' = (d\gamma_z)_e \bar{\omega}$, то

$$\omega = \omega' + \vartheta, \tag{4.5}$$

где $\vartheta(z, Z') = (d\gamma_z^{-1})_z \bar{\vartheta}(z, Z') \in K' \subset G'$.

Нетрудно выяснить геометрическое значение вектора $\overline{\omega'}(z, Z')$. Именно, пусть в $E' \subset E$ задан путь $\Lambda'(z, z_1)$ с касательным вектором Z'. Тогда $\overline{\omega}(z, Z')$ является вектором в $T_z(G_z)$, касательным к ее развертке $\sigma\Lambda'$. Левоинвариантная связность σ в $G(G/H, H)$ с помощью фундаментальных диффеоморфизмов инвариантно переносится в левоинвариантную связность $\hat{\sigma}_x$ в слое $G_z = p^{-1}(x)$, который можно рассматривать как главное расслоенное пространство $G_z(\Gamma_{z^*}, H)$, $z^* = \pi(z)$. Теперь $\overline{\omega'}(z, Z')$ интерпретируется как касательный вектор развертки $\hat{\sigma}_x\sigma\Lambda' \subset H_z$ пути $\sigma\Lambda \subset G_z$.

Для истолкования вектора $\overline{\vartheta}(z, Z')$ следует напомнить, что существует, как всегда при линейной связности в главном расслоенном пространстве, канонический изоморфизм $(d_{\hat{K}}\pi)_z$ между $\hat{K}_z$ и касательным пространством $T_{z^*}(\Gamma_{z^*})$ (см. п. 3.2, доказательство теоремы 6). Вектор $\overline{\vartheta}(z, Z')$ является образом при $(d_{\hat{K}}\pi)_z^{-1}$ вектора $\omega^*(\pi(z), (d\pi)_z Z')$ в $T_{z^*}(\Gamma_{z^*})$, касательного к пути $\pi(\sigma\Lambda) = \sigma^*(\pi\Lambda)$.

Связности σ и σ', как линейные связности, обладают формами кривизны

$$\Omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega\omega], \qquad \Omega' = d\omega' + \frac{1}{2}[\omega'\omega'],$$

первая из которых является G'-значной 2-формой на E, а вторая — H'-значной 2-формой на E'.

Если форму Ω рассматривать только на E', то в силу равенства (4.5),

$$\Omega = d(\omega' + \vartheta) + \frac{1}{2}[\omega' + \vartheta, \omega' + \vartheta] =$$

$$= (\Omega' + \frac{1}{2}[\vartheta\vartheta]_{H'}) + (\Sigma + \frac{1}{2}[\vartheta\vartheta]_{K'}).$$

Здесь вторые члены в скобках являются, соответственно, компонентами в H' и K' G'-значной 2-формы $\frac{1}{2}[\vartheta\vartheta]$, а

$$\Sigma = d\vartheta + [\omega'\vartheta]$$

является K'-значной 2-формой на E'. K'-значность формы Σ следует из того, что условие $(\mathrm{ad}\, H)K' = K'$, которое было наложено на K', равносильно условию:

$$[Y_{H'}\, Y_{K'}] \subset K'$$

при любых $Y_{H'} \subset H'$ и $Y_{K'} \subset K'$.

Следовательно, компоненты G-значной 2-формы кривизны Ω

связности σ в E, рассматриваемой как форма на E', выражаются формулами

$$\Omega_{H'} = \Omega' + \frac{1}{2}[\vartheta\vartheta]_{H'}$$

$$\Omega_{K'} = \Sigma + \frac{1}{2}[\vartheta\vartheta]_{K'}$$

K'-значная 2-форма Σ называется *формой кручения* связности σ в $E(V, G)$ на секущей поверхности $\mu^*(V') \subset E/H$. Такое название оправдано тем, что в частном случае, когда $G = GA(n, R)$ и $H = GL(n, R)$, а K' является коммутативной алгеброй Ли подгруппы сдвигов, форма Σ в случае связности Картана для секущей поверхности $\mu^*(V)$ совпадает с обычной формой кручения аффинной связности.

Форма кручения Σ была введена в [15], но только для связностей Картана и без интерпретации для 1-форм ω' и ϑ, из которых она составлена.

В данной работе нет возможности остановиться на интересной связи между формой кручения на данной секущей поверхности фактор-пространства и группой голономии исходной связности в E. Эти вопросы требуют особой публикации.

Литература

1. Вагнер В. В., Теория составного многообразия. Тр. семинара по векг. и тенз. анализу, 1950, **8**, 11—72.
2. Лаптев Г. Ф., Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Тр. Моск. матем. о-ва, 1953, **2**, 275—382.
3. Лаптев Г. Ф., Многообразия, погруженные в обобщенные пространства. Тр. IV Всесоюзн. матем. съезда, т. II. Ленинград, 1964, 226—233.
4. Лихнерович А., Теория связностей в целом и группы голономии. Москва, 1960.
5. Немыцкий В. В., Степанов В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений. Москва—Ленинград, 1949.
6. Номидзу К., Группы Ли и дифференциальная геометрия. Москва, 1960.
7. Понтрягин Л. С., Непрерывные группы. Москва, 1954.
8. Стинрод Н., Топология косых произведений. Москва, 1953.
9. Фиников С. П., Метод внешних форм Картана. Москва—Ленинград, 1948.
10. Шевалле К., Теория групп Ли, т. I. Москва, 1948.
11. Чжень Шэн-шэнь. Комплексные многообразия. Москва, 1961.
12. Cartan, E., Les groupes d'holonomie des espaces généralisés. Acta math., 1926, **48**, 1—42.
13. Cattaneo-Gasparini, I., Sulle connesioni infinitesimale nello spazio fibrato dei riferimenti affini di una V_n. Rend mat. e applic., 1958, **17**, № 3—4, 327—404.
14. Ehresmann, Ch., Les connexions infinitésimales dans un espace fibré differentiable. Colloque de Topologie (Bruxelles, 1950), Paris, 1951, 29—55.
15. Kobayashi, S., On connections of Cartan. Canad. J. Math., 1956, **8**, № 2, 145—156.

16. Kobayashi, S., Theory of connections. Ann. mat. pura ed appl., 1957, 43, 119—194.
17. Lichnerowicz, A., Géométrie des groupes de transformation. Paris, 1958.
18. Nomizu, K., Recent developments in the theory of connections and holonomy groups. New-York — London, 1961.

Поступило
11 X 1963

SEOSTUSTE GLOBAALSE TEOORIA ALUSED

Ü. Lumiste

Resümee

Kaasaja diferentsiaalgeomeetria ühes küllalt põhjalikult välja arendatud osas — seostuste teoorias — võib täheldada kaht järgmist põhilist kontseptsiooni. Levi-Civita paralleelülekande idee on saanud aluseks reale tähelepanuväärsetele uurimustele seostustest kihtruumides [4, 6, 11, 14, 16]. Vähem arendamist on leidnud E. Cartani seisukoht [12] käsitleda seostust infinitesimaalselt kui eeskirja, mis määrab lõpmata lähedaste kihtide kujutamise teineteisele selle peaosas (vt. [1, 2]).

Käesolevas töös tuuakse seostuse mõiste sisse otsekohe üldiste kihtruumide $E(V, \Gamma, G, p, \{U_\alpha\}, \{\varphi_\alpha\})$ jaoks teise kontseptsiooni raames kui baasi teede hulga $\{\lambda\}$ kujutus σ kihtidevaheliste difeomorfismide hulka. Kujutus σ peab seejuures rahuldama tingimusi $\sigma\mathbf{1}$ — $\sigma\mathbf{4}$. Kui lisaks sellele on täidetud tingimus $\sigma\mathbf{5}$ siis kõneldakse lineaarsest seostusest. Viimase uurimisel peakihtruumides tekivad sellised mõisted nagu horisontaalne jaotus ja seostuse universaalne 1-vorm ω, mis, vastupidi, määravad seostuse peakihtruumis täielikult ja on seetõttu aluseks lineaarse seostuse tuntud esitusviisidele. Töös tõestatakse koordinaadivaba meetodiga G. F. Laptevi tulemus kõveruse vormi $\Omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega\omega]$ omadusest olla mitte üksnes ad G tüüpi 2-vorm, vaid ka poolbaasivorm peakihtruumis (vt. ka [11]). Antakse globaalne formuleering G. F. Laptevi teoreemile, mille järgi seostuse määramiseks peakihtruumis on küllalt anda selles niisugune 1-vorm ω, millest moodustatud 2-vorm Ω on ad G tüüpi poolbaasivorm. Tõestatakse tuntud teoreem holonoomia rühma Lie algebra kohta ja detailiseeritakse seda mõnevõrra.

Peakihtruumiga $E(V, G)$ adjungeeritud kihtruumi mõiste asemel kasutatakse süstemaatiliselt faktorruumi $E(V, G)/H$ mõistet, kus H on struktuurirühma G Lie alamrühm. Näidatakse, et seostus peakihtruumis määrab alati teatava seostuse faktorruumis ning vastupidi.

Juhul, kui dim $V =$ dim G/H ja eksisteerib faktorruumi $E(V, G)/H$ globaalne lõige, on võimalik lõikepinda kinnitada faktorruumi külge ning sel teel sisse tuua eriline afiinor Ψ baasi V puutuja-ruumis $T_x(V)$. Viimase abil võib välja eraldada niinimetatud Cartani seostused [15, 16].

Lõige μ^* faktorruumis E/H baasi V mingi alammuutkonna V' kohal võimaldab sisse tuua taandatud peakihtruumi $E'(V', H) = \pi^{-1}\mu^*(V')$ mõiste. Kui homogeenne ruum G/H on reduktiivne, siis lineaarne seostus σ peakihtruumis E indutseerib taandatud ruumis samuti lineaarse seostuse σ'. Seostuse σ vorm ω ja vastav kõveruse vorm Ω jagunevad taandatud ruumil kumbki kaheks komponendiks. Sel teel jõutakse väände vormi Σ mõisteni üldisematel eeldustel, kui artiklites [15, 16].

THE FOUNDATIONS OF THE GLOBAL THEORY OF CONNECTIONS

Ü. Lumiste

Summary

In a fairly completely developed part of modern differential geometry — in the theory of connections — the two following basic conceptions can be observed.

The idea of parallel displacement by Levi-Civita has become the basis for a number of remarkable global investigations [4, 6, 14, 16]. Much less developed is E. Cartan's concept [12] to consider the connection as a law, by which the map of two infinitesimally close fibres is determined in principal against each other.

In this paper within the bounds of the second conception for general fibre bundle $E(V, \Gamma, G, p, \{U_\alpha\}, \{\varphi_\alpha\})$ the connection is directly introduced as a map σ of the set $\{\lambda\}$ of all paths in the base V into the set of all diffeormorphisms between the fibres. The map σ must satisfy the conditions $\sigma\mathbf{1}$—$\sigma\mathbf{4}$.

In case the additional condition $\sigma\mathbf{5}$ is satisfied, the map σ is called a linear connection. Investigating the latter in the principal fibre bundle $E(V, G)$ there appear such notions as horizontal distribution and universal 1-form ω of connection. On the contrary, these notions determine the connection fully in the principal fibre bundle and therefore may be taken as a basis of the well-known presentation of a connection. In the paper G. F. Laptev's result about the property of the curvature form $\Omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega\omega]$ not only to be a 2-form of type ad G, but also semibasic in the principal fibre bundle is proved with intrinsic method (s. [11]). A global formulation is given to the theorem of G. F. Laptev according to which a connection is sufficiently determined in the principal fibre bundle by a 1-form ω, the 2-form Ω composed from ω being a semibasic form of type ad G. The well-known theorem about the algebra Lie of holonomy group is proved and detailed to some extent.

Instead of the notion of a fibre bundle with homogeneous fibres associated to the $E(V, G)$ a notion of factor-bundle $E(V, G)/H$ is systematically used, where H is the Lie subgroup of the structural group G. It is proved that a connection in the E determines a connection in E/H, and vice versa.

In case dim $V =$ dim G/H and a cross-section exists in the factor-bundle $E(V, G)/H$ it is possible to solder the sectional surface with the factor-bundle and in this way to introduce a special affinor Ψ in the tangent space $T_x(V)$ of the base V. The latter permits one to distinguish the so-called Cartan connection [15, 16].

The section μ^* in the factor-bundle E/H over a certain submanifold V' of the base V permits the introduction of the notion of the reduced principal fibre bundle $E'(V', H) = \pi^{-1}\mu^*(V')$. In case the homogeneous space G/H is reductive, the linear connection σ in E induces a linear connection σ' in E'. The 1-form ω of connection and the corresponding curvature form Ω divide both into two components over a reduced bundle. Thus a notion of torsion form Σ is reached on more general assumptions than in articles [15, 16].

НОРМАЛЬНЫЕ КВАЗИКОНГРУЭНЦИИ V_3 В R_4

Л. Туулметс

Кафедра алгебры и геометрии

Линейчатые поверхности V_3 в пространстве R_4 (в собственно-эвклидовом пространстве ${}^0R_4$ или в псевдоэвклидовом пространстве ${}^1R_4$) можно рассматривать, с одной стороны, как двухпараметрические семейства прямых $\infty^2 R_1$, с другой стороны, как поверхности V_3 в R_4. Оказывается, что некоторые свойства таких V_3 как поверхностей связаны со свойствами их как семейств прямых $\infty^2 R_1$ и наоборот. Линейчатые поверхности V_3 в R_4 мы будем называть квазиконгруэнциями.

Как известно [1], квазиконгруэнции V_3 в R_4 делятся на три класса: 1) конгруэнции (нормали в точках одной образующей параллельны между собой, имеется два семейства торсов), 2) демиконгруэнции (нормали в точках одной образующей параллельны двумерной плоскости, имеется одно семейство торсов), 3) псевдоконгруэнции (нормали в точках одной образующей параллельны образующим конуса второго порядка, торсов нет).

Квазиконгруэнцию V_3 в пространстве R_4 будем называть *нормальной квазиконгруэнцией*, если существует (см. [8], стр. 34) хотя бы одна двухмерная поверхность, ортогонально пересекающая все образующие квазиконгруэнции (тогда, как легко видеть, имеется целое однопараметрическое семейство таких поверхностей).

Нормальные квазиконгруэнции, особенно нормальные конгруэнции и нормальные демиконгруэнции, имеют ряд интересных геометрических свойств, которых не имеют конгруэнции и демиконгруэнции.

§ 1. Уравнения нормальной квазиконгруэнции

1. Нормальная квазиконгруэнция V_3 в R_4. К каждой точке квазиконгруэнции V_3 и R_4 присоединяем ортонормированный подвижной репер [1, 2] так, чтобы единичный

(или мнимо-единичный) вектор $\boldsymbol{e}_0$ был направлен вдоль прямолинейной образующей, единичный вектор $\boldsymbol{e}_3$ был направлен вдоль нормали к поверхности V_3 в точке M, а ортогональные векторы $\boldsymbol{e}_i (i, j, k, \ldots, = 1, 2)$ были ортогональны к предыдущим векторам и лежали в касательной плоскости к V_3. Тогда в формулах

$$d\boldsymbol{M} = \omega^I \boldsymbol{e}_I, \quad d\boldsymbol{e}_I = \omega^K{}_I \boldsymbol{e}_K \quad (I, J, K, \ldots = 0, 1, 2, 3), \tag{1.1}$$

определяющих инфинитесимальное смещение подвижного репера, имеют место равенства

$$\omega^3 = 0, \quad \omega^I{}_0 = \varepsilon \omega^0{}_I,$$

$$\omega^\varrho{}_i = -\omega^i{}_\varrho, \; \omega^I{}_I = 0 \quad (\text{нет суммирования}), \tag{1.2}$$

где

$$\varepsilon = -(\boldsymbol{e}_0 \boldsymbol{e}_0) = \pm 1 \quad (\varrho, \sigma, \ldots = 1, 2, 3),$$

и пфаффовы уравнения квазиконгруэнции V_3 в R_4 имеют вид (см. [1]):

$$\omega^3 = 0, \quad \omega^\varrho{}_0 = a^\varrho{}_i \omega^i, \quad \omega^3{}_i = a^3{}_i \, \omega^0 + b_{ij} \omega^j,$$

или

$$\begin{aligned} &\omega^3 = 0, && \omega^3{}_0 = \qquad a\omega^1 + b\omega^2, \\ &\omega^1{}_0 = s\omega^1 + t\omega^2, && \omega^3{}_1 = a\omega^0 + f\omega^1 + c\omega^2, \\ &\omega^2{}_0 = u\omega^1 + v\omega^2, && \omega^3{}_2 = b\omega^0 + c\omega^1 + r\omega^2, \end{aligned} \tag{1.3}$$

где

$$\begin{aligned} &s = a^1{}_1, \quad t = a^1{}_2, \quad u = a^2{}_1, \quad v = a^2{}_2, \\ &a = a^3{}_1, \quad b = a^3{}_2, \quad f = b_{11}, \quad c = b_{12}, \quad r = b_{22}. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Условие нормальности равносильно требованию, чтобы уравнение $\omega^0 = 0$ было вполне интегрируемым, т. е. чтобы в ортогональном репере имело место соотношение

$$t = u. \tag{1.5}$$

Если продолжать уравнения (1.3) и учесть (1.5), то обнаруживается, что нормальная квазиконгруэнция V_3 в R_4 существует и определяется с произволом трех функций двух аргументов.

2. Нормальная конгруэнция V_3 в R_4. Конгруэнция $V_3 \equiv \infty^2 R_1$ характеризуется тем, что касательная плоскость R_3 к V_3 не изменяется при смещении точки M вдоль образующей, т. е. нормальные плоскости в точках одной образующей параллельны между собой.

Если обозначить символ дифференцирования вдоль образующей через δ, то, в силу (1.1—3),

$$\delta \boldsymbol{e}_3 = \varepsilon a^3{}_i \omega^i(\delta) \boldsymbol{e}_0 - \{a^3{}_i \omega^0(\delta) + b_{ij} \omega^j(\delta)\} \boldsymbol{e}_i.$$

Поскольку вдоль образующей $\omega^i(\delta) = 0$, то, в случае конгруэнции, $a^3{}_i = 0$, т. е.

$$a = b = 0, \tag{1.6}$$

и

$$\omega^3{}_0 = 0. \tag{1.7}$$

При внешнем дифференцировании последнего соотношения (1.7) получим конечные соотношения

$$a^i{}_j b_{ik} = a^i{}_k b_{ij},$$

которые в обозначениях (1.4) примут вид

$$(s - v)c + ur - tf = 0. \tag{1.8}$$

Имеющийся подвижной репер еще не является каноническим. Его можно канонизировать многими способами. Например, можно потребовать, чтобы

$$s = v = 0. \tag{1.9}$$

В случае такой канонизации точка M находится в центре образующей и векторы $\boldsymbol{e}_i$ находятся в распределительных подповерхностях поверхности V_3 (см. [3, 8]). В силу (1.3) и (1.6—9), пфаффовы уравнения конгруэнции V_3 имеют вид

$$\begin{aligned} &\omega^3 = \omega^3{}_0 = 0, && \omega^3{}_1 = f\omega^1 + c\omega^2, \\ &\omega^1{}_0 = t\omega^2, && \omega^3{}_2 = c\omega^1 + r\omega^2, \\ &\omega^2{}_0 = u\omega^1, && ur - tf = 0. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Нормальные конгруэнции характеризуются равенством (1.5). Следовательно, для них в случае $t = u \neq 0$ имеем $r = f$ и из (1.10) получаем

$$\begin{aligned} &\omega^3 = 0, && \omega^3{}_0 = 0, \\ &\omega^1{}_0 = t\omega^2, && \omega^3{}_1 = f\omega^1 + c\omega^2, \\ &\omega^2{}_0 = t\omega^1, && \omega^3{}_2 = c\omega^1 + f\omega^2. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Продолженную систему можно написать в виде:

$$\begin{aligned} &\omega^2{}_1 = \sigma\omega^1 + \tau\omega^2, \\ &\omega^0 = \frac{\mu}{t}\,\omega^1 + \frac{\nu}{t}\,\omega^2, \\ &dt = t(\nu - 2\tau)\,\omega^1 + t(\mu + 2\sigma)\,\omega^2, \\ &df = (\xi - c\mu)\,\omega^1 + \{\pi + c(2\tau - \nu)\}\omega^2, \\ &dc = (\pi - f\mu)\,\omega^1 + (\xi + 2c\sigma - f\nu)\,\omega^2. \end{aligned} \tag{1.12}$$

С помощью (1.11—12) легко устанавливается, что нормальная конгруэнция существует и определяется с произволом одной функции двух аргументов.

3. Нормальная демиконгруэнция. Прямая, проходящая через фиксированную точку в направлении изменяющегося вектора нормали к квазиконгруэнции вдоль некоторой ее образующей, описывает конус. Этот конус называется *кону-*

сом нормальных направлений для данной образующей (см. [1]). В случае, когда конусы нормальных направлений для всех образующих вырождены в плоскости, квазиконгруэнция называется *демиконгруэнцией*. Вырожденные конусы называются при этом плоскостями нормальных направлений [6].

Нормаль квазиконгруэнции $V_3 \equiv \infty^2 R_1$ в точке $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{M} + \lambda \boldsymbol{e}_0$ образующей определяется вектором

$$\boldsymbol{N} = [\boldsymbol{e}_1 + \lambda a^i{}_1 \boldsymbol{e}_i + \lambda a^3{}_1 \boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{e}_2 + \lambda a^i{}_2 \boldsymbol{e}_i + \lambda a^3{}_2 \boldsymbol{e}_3],$$

или же

$$\boldsymbol{N} = x^1 \boldsymbol{e}_1 + x^2 \boldsymbol{e}_2 + x^3 \boldsymbol{e}_3, \tag{1. 13}$$

где

$$\begin{aligned} &x^1 = \lambda^2 a^2 - \lambda a^3{}_1, \qquad && x^2 = \lambda^2 a^1 - \lambda a^3{}_2, \qquad && x^3 = \lambda^2 a + \lambda a^i{}_i + 1 \\ &a^1 = a^1{}_{[2} a^3{}_{1]}, && a^2 = a^2{}_{[1} a^3{}_{2]}, && a = a^1{}_{[1} a^2{}_{2]}, \end{aligned} \tag{1.14}$$

а, в силу (1.13—14), уравнение плоскости нормальных направлений демиконгруэнции пишется в виде:

$$a^3{}_2 x^1 - a^3{}_1 x^2 = 0.$$

Если вектор $\boldsymbol{e}_2$ направить в плоскость нормальных направлений, то

$$a^3{}_1 = a^2{}_1 = 0, \quad a^3{}_2 \neq 0. \tag{1.15}$$

В силу (1.3) и (1.15) приходим к выводу, что демиконгруэнцию можно определить следующими пфаффовыми уравнениями

$$\begin{aligned} \omega_3 &= 0, & \omega^3{}_0 &= + b\omega^2, \\ \omega^1{}_0 &= s\omega^1 + t\omega^2, & \omega^3{}_2 &= f\omega^1 + c\omega^2, \\ \omega^2{}_0 &= v\omega^2, & \omega^3{}_2 &= b\omega^0 + c\omega^1 + r\omega^2, \end{aligned}$$

а из (1.5), (1.16) следует, что пфаффовы уравнения нормальной демиконгруэнции имеют вид:

$$\begin{aligned} \omega^3 &= 0, & \omega^3{}_0 &= b\omega^2, \\ \omega^1{}_0 &= s\omega^1, & \omega^3{}_1 &= f\omega^1 + c\omega^2, \\ \omega^2{}_0 &= v\omega^2, & \omega^3{}_2 &= b\omega^0 + c\omega^1 + r\omega^2. \end{aligned} \tag{1.17}$$

При внешнем дифференцировании последней системы получаем:

$$\begin{aligned} [\Delta s \omega^1] + [(s - v)\, \omega^2{}_1\, \omega^2] &= 0, \\ [(s - v)\, \omega^2{}_1\, \omega^1] + [\Delta v\; \omega^2] &= 0, \\ [-b\omega^2{}_1\, \omega^1] + [\Delta b\; \omega^2] &= 0, \\ [-b\omega^2{}_1\, \omega^0] + [\Delta f\; \omega^1] + [\Delta c\; \omega^2] &= 0, \\ [\Delta b\; \omega^0] + [\Delta c\; \omega^1] + [\Delta r\; \omega^2] &= 0, \end{aligned} \tag{1.18}$$

откуда с помощью леммы Картана находим:

$$\begin{aligned} \omega^2{}_1 &= \sigma\omega^1 + \tau\omega^2, \\ ds &= -s^2\omega^0 + \varsigma\omega^1 + \{(s - v)\,\sigma - bf\}\omega^2, \\ dv &= (b^2 - v^2)\,\omega^0 + \{(s - v)\,\tau + bc\}\omega^1 + \vartheta\omega^2, \end{aligned} \tag{1.19$_1$}$$

$$
\begin{aligned}
db &= -2bv\omega^0 + \{c(s-v) - b\tau\}\omega^1 + \xi\omega^2,\\
df &= -(fs + b\sigma)\omega^0 + \varrho\omega^1 + (\varphi - 2c\tau)\omega^2,\\
dc &= -(cv + b\tau)\omega^0 + \{\varphi + \varepsilon sb + (r-f)\sigma\}\omega^1 + \qquad (1.19_2)\\
&\quad + \{\psi + (r-f)\tau\}\omega^2,\\
dr &= (\xi - rv)\omega^0 + \{\psi - 2c\sigma)\omega^1 + \chi\omega^2,
\end{aligned}
$$

где σ, τ, ζ, ϑ, ξ, ϱ, φ, ψ, χ являются новыми неизвестными величинами второго порякка.

Из системы (1.18) видно, что $s_1 = 5$, $c_2 = 2$ и $Q = 9$. Так как из (1.19) вытекает, что $N = 9$, то $Q = N$(см. [7], стр. 259). Поэтому система (1.17) находится в инволюции, нормальная демиконгруэнция существует и определяется с произволом двух функций двух аргументов.

§ 2. Геометрические свойства нормальной конгруэнции

Нормальная конгруэнция V_3 в пространстве R_4 имеет ряд интересных геометрических свойств.

Класс двухмерных поверхностей, ортогонально пересекающих образующие какой-нибудь нормальной конгруэнции, совпадает с классом двойственно нормализуемых поверхностей D_2 А. В. Чакмазяна [9—10]. В работе [9] доказывается, что поверхность D_2 в ${}^0R_4$ имеет эволютную поверхность, касательные плоскости которой совпадают с нормальными плоскостями поверхности D_2.

Эволютную поверхность можно определить и для конгруэнции V_3 в R_4. С каждой ее образующей можно связать двухмерную нормальную плоскость, содержащую нормали к V_3 во всех точках данной образующей. Если существует двухмерная поверхность, касательные плоскости которой совпадают с нормальными плоскостями конгруэнции, то она называется *эволютной поверхностью* конгруэнции. Из результатов Чакмазяна [9] следует, что нормальная конгруэнция обладает эволютной поверхностью. Оказывается, что справедливо и обратное утверждение.

Теорема 1. *Конгруэнция V_3 в ${}^0R_4$ является нормальной тогда и только тогда, если она имеет эволютную поверхность.*

Доказательство. Достаточность. Допустим, что конгруэнция V_3 в ${}^0R_4$ обладает эволютной поверхностью, описываемой точкой $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{M} + x\boldsymbol{e}_0 + y\boldsymbol{e}_3$. Тогда, в силу (1.1—2), (1.5), (1.10),

$$
d\boldsymbol{P} = (dx + \omega^0)\boldsymbol{e}_0 + dy\boldsymbol{e}_3 + \{(1 - fy)\omega^1 + (xt - cy)\omega^2\}\boldsymbol{e}_1 + \\
+ \{(xu - cy)\omega^1 + (1 - yr)\omega^2\}\boldsymbol{e}^2, \qquad (2.\,1)
$$

где

$$
ur - tf = 0.
$$

По определению эволютной поверхности, должны иметь место равенства

$$(dP\,e_1)=0, \quad (dP\,e_2)=0. \tag{2.2}$$

Из (2.1—2), с учетом линейной независимости форм ω^i, получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} &1-fy=0, \qquad xu-cy=0, \\ &xt-cy=0, \qquad 1-ry=0, \quad ur-ft=0, \end{aligned} \tag{2.3}$$

которая при существовании эволютной поверхности должна быть совместна. Следовательно, в силу (2.3_{2-3}) получим $t=u$, последнее соотношение является необходимым и достаточным условием того, чтобы конгруэнция являлась нормальной конгруэнцией.

Необходимость. Как показано в статье [9], ортогональная поверхность нормальной конгруэнции является поверхностью D_2, а при наличии D_2 существует и эволютная поверхность. Теорема доказана.

В силу (2.3) точка P эволютной поверхности имеет координаты

$$x=\frac{c}{ft}, \quad y=\frac{1}{f}, \quad t\neq 0, \quad f\neq 0. \tag{2,4}$$

Рассмотрим прямые, которые определяются точкой поверхности D_2 и соответствующей точкой (2.4) эволютной поверхности. Таких прямых существует двухпараметрическое семейство $\infty^2 R_1$. Эти прямые будем называть *эволютными прямыми*. Оказывается, что имеет место следующая

Теорема 2. *Эволютные прямые двойственно нормализованной поверхности D_2 образуют нормальную демиконгруэнцию V_3.*

Доказательство. Эволютные прямые являются касательными однопараметрического семейства кривых эволютной поверхности. Следовательно, эволютные прямые образуют демиконгруэнцию V_3 (см. [1]). Но эта V_3 имеет одну ортогональную поверхность — поверхность D_2, следовательно, полученная демиконгруэнция является нормальной демиконгруэнцией. Теорема доказана.

В статье [9] показано, что двойственно нормализованную поверхность D_2 можно нормализовать нормальной конгруэнцией и при этом многими способами. Геометрическое место фокусов всех нормальных конгруэнций $V^{(\alpha)}{}_3$, находящихся в нормальной плоскости поверхности D_2, состоит из двух прямых, которые называются *осями кривизны* поверхности D_2 в рассматриваемой точке. Легко видеть, что оси F_1 и F_2 кривизны поверхности D_2 определяются соответственно уравнениями

$$-tx+(f+c)y=1, \tag{2.5}$$

$$tx+(f-c)y=1. \tag{2.6}$$

Обе оси кривизны F_1 и F_2 образуют по двухпараметрическому семейству прямых $\infty^2 R_1$.

Теорема 3. *Оси кривизны F_1 поверхности D_2 образуют конгруэнцию $V^{(1)}{}_3$, а оси кривизны F_2 образуют конгруэнцию $V^{(2)}{}_3$. В общем случае поверхности D_2 конгруэнции $V^{(1)}{}_3$ и $V^{(2)}{}_3$ не являются нормальными конгруэнциями.*

Доказательство. Покажем прежде всего, что поверхность $V^{(1)}{}_3$ является конгруэнцией. В силу (2.5), поверхность $V^{(1)}{}_3$ определяется вектором

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{M} + x\boldsymbol{e}_0 + y\boldsymbol{e}_3, \tag{2.7}$$

где

$$x = \frac{\cos a}{(f+c)\sin a - t\cos a}, \quad y = \frac{\sin a}{(f+c)\sin a - t\cos a}, \tag{2.8}$$

а вектор

$$\boldsymbol{m}_0 = (f+c)\boldsymbol{e}_0 + t\boldsymbol{e}_3 \tag{2.9}$$

является направляющим вектором образующей $V^{(1)}{}_3$. В силу (1.11) и (2.7—9), находим:

$$d\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}^{(\alpha)}{}_0\, da + \boldsymbol{F}^{(\alpha)}{}_1\, \omega^1 + \boldsymbol{F}^{(\alpha)}{}_2\, \omega^2, \tag{2.10}$$

где

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{F}^{(\alpha)}{}_0 = x_0\boldsymbol{e}_0 + y_0\boldsymbol{e}_3 = -\frac{1}{\Sigma^2}\boldsymbol{m}_0,\\
&\boldsymbol{F}^{(\alpha)}{}_1 = x_1\boldsymbol{e}_0 + y_1\boldsymbol{e}_3 + (1-fy)\boldsymbol{e}_1 - (1-fy)\boldsymbol{e}_2,\\
&\boldsymbol{F}^{(\alpha)}{}_2 = x_2\boldsymbol{e}_0 + y_2\boldsymbol{e}_3 - (1-fy)\boldsymbol{e}_1 + (1-fy)\boldsymbol{e}_2,\\
&\quad dx = x_0 da + x_i\omega^i, \quad dy = y_0 da + y_i\omega^i,\\
&\quad \Sigma = (f+c)\sin a - t\cos a.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Если теперь найти нормальный вектор $\boldsymbol{n} = [\boldsymbol{F}^{(\alpha)}{}_1 \boldsymbol{F}^{(\alpha)}{}_2] = < \boldsymbol{m}_0 \boldsymbol{F}^{(\alpha)}{}_1 \boldsymbol{F}^{(\alpha)}{}_2 >$ поверхности $V^{(1)}{}_3$, то, в силу (2.10—11), можно писать

$$\boldsymbol{n} = n^0\boldsymbol{e}_0 + n^1\boldsymbol{e}_1 + n^2\boldsymbol{e}_2 + n^3\boldsymbol{e}_3 = n^I\boldsymbol{e}_I,$$

где

$$\begin{aligned}
&n^0 = n^3 = 0,\\
&n^1 = n^2 = (1-fy)\{t(x_1+x_2) - (f+c)(y_1+y_2)\}.
\end{aligned}$$

Следовательно, $\boldsymbol{n} \| \boldsymbol{n}'$, и поверхность $V^{(1)}{}_3$ является конгруэнцией.

Докажем, что, в общем случае V_3, конгруэнция $V^{(1)}{}_3$ не является нормальной конгруэнцией. Для этого рассмотрим уравнение

$$(d\boldsymbol{F}\boldsymbol{m}_0) = 0, \tag{2.12}$$

которое, в силу (2.8—11), дает

$$-da = \{(f+c)\cos a + t\sin a\}\{(df+dc)\sin a - dt\cos a\}.$$

При внешнем дифференцировании последнего уравнения получаем

$$(\{(f + c)\cos\alpha + t\sin\alpha\}^2 + 1)[dt,\ df + dc] = 0,$$

откуда, в силу (1.10) при $\omega^0 = 0$, следует:

$$[\{(f + c)\cos\alpha + t\sin\alpha\}^2 + 1](\sigma + \tau)(\xi + \pi + 2c\tau) = 0.$$

Таким образом, в общем случае, уравнение (2.12) не является вполне интегрируемым и конгруэнция $V^{(1)}{}_3$ не является нормальной конгруэнцией.

В случае поверхности $V^{(2)}{}_3$ доказательство можно провести аналогично. Тем самым теорема 3 доказана.

Отметим, что существуют D_2 с нормальной $V^{(1)}{}_3$. Например, при $\sigma + \tau = 0$ их произвол — пять функций одного аргумента.

Теорема 4. *Для нормальной конгруэнции V_3 в R_4 главные подповерхности являются торсами, а распределительные подповерхности взаимно ортогональны и делят пополам углы между торсами.*

Действительно, в силу (1.4—9) и (1.11), упомянутые в теореме подповерхности (см. [1]) нормальной конгруэнции определяются уравнениями:

$\omega^1 + \omega^2 = 0$, $\omega^1 - \omega^2 = 0$ (торсы и главные подповерхности),
$\omega^1 = 0$, $\omega^2 = 0$ (распределительные подповерхности).

§ 3. Геометрические свойства нормальной демиконгруэнции V_3 в R_4

Как нормальная конгруэнция, так и нормальная демиконгруэнция V_3 в R_4 имеет ряд интересных геометрических свойств.

Теорема 5. *Если в пространстве R_4 задано произвольное однопараметрическое семейство геодезических линий некоторой двухмерной поверхности V_2, то гиперповерхность V_3, образуемая касательными к линиям этого семейства, является нормальной демиконгруэнцией.*

Доказательство. В статье [1] показывается, что если в ${}^0R_4$ задано произвольное однопараметрическое семейство линий, то гиперповерхность, образуемая касательными к линиям этого семейства, является демиконгруэнцией V_3 в ${}^0R_4$. Такое утверждение имеет место и в ${}^1R_4$.

Поверхность V_2 является фокальной поверхностью демиконгруэнции V_3, а линии рассматриваемого семейства являются фокальными линиями этой демиконгруэнции. С помощью (1.1), (1.4), (1.16) легко находим, что точка $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{M} - \frac{1}{s}\boldsymbol{e}_0$ на образующей является фокусом, геометрическое место фокусов $\boldsymbol{V}_3$ образует фокальную подповерхность демиконгруэнции, и торсы определяются уравнением

$$\omega^2 = 0. \qquad (3.1)$$

Если обозначить касательные векторы фокальной подповерхности демиконгруэнции через $\boldsymbol{f}_1$, $\boldsymbol{f}_2$, то

$$d\boldsymbol{F} = \boldsymbol{f}_1\Omega^1 + \boldsymbol{f}_2\Omega^2, \tag{3.2}$$

где

$$\boldsymbol{f}_1 = \boldsymbol{e}_0, \quad \boldsymbol{f}_2 = \frac{1}{s}(\eta + t\tau)\boldsymbol{e}_0 - f\boldsymbol{e}_1 - (s - v)\boldsymbol{e}_2 - b\boldsymbol{e}_3, \tag{3.3}$$

(см. (1.1), (1.16)). Здесь η является одной из величин второго порядка демиконгруэнции, так что

$$ds = -s^2\omega^0 + \varsigma\omega^1 + (\eta + t\tau)\omega^2.$$

В случае нормальной демиконгруэнции имеем

$$\eta = (s - v)\sigma + bf - t\tau.$$

Фокальные линии на фокальной поверхности определяются уравнением (3.1). Касательным вектором фокальной линии является вектор $\boldsymbol{f}_1$. Отсюда видно, что в выбранном репере $\omega^1 = ds$. В то же время, в силу (1.1) и (1.16), имеем

$$\frac{d\boldsymbol{f}_1}{ds} = \frac{d\boldsymbol{e}_0}{ds} = s\boldsymbol{e}_1 \pmod{\omega^2}. \tag{3.4}$$

Если линия семейства является геодезической, то ее геодезическая кривизна равна нулю, т. е. дифференциал касательного вектора линии семейства (фокальные линии $\omega^2 = 0$) не может иметь компонента в касательной плоскости поверхности V_2. Следовательно, имея в виду (3.3—4), должны иметь место следующие равенства

$$(\boldsymbol{f}_1\boldsymbol{e}_1) = 0, \quad (\boldsymbol{f}_2\boldsymbol{e}_1) = 0. \tag{3.5}$$

Для демиконгруэнции последнее соотношение, в силу (3.3), дает

$$t = 0, \tag{3.6}$$

что, в силу (1.5) и (1.15), является необходимым и достаточным условием того, чтобы демиконгруэнция являлась нормальной демиконгруэнцией. Теорема доказана.

Следствие. *Фокальные линии нормальной демиконгруэнции являются геодезическими линиями.*

Действительно, если демиконгруэнция нормальная, то имеет место равенство (3.6), а из (3.6) следует соотношение (3.5). Утверждение следует из (3.5) в силу (3.2.—4).

Теорема 6. *Каждую двухмерную поверхность V_2 в пространстве ${}^0R_4$ можно нормализовать нормальной демиконгруэнцией, зависящей от одной функции одного аргумента.*

Доказательство. В силу (1.17) ортогональная поверхность нормальной демиконгруэнции в рассматриваемом каноническом репере определяется следующими пфаффовыми уравнениями:

$$\begin{aligned} &\omega^3 = \omega^0 = 0, && \omega^3{}_0 = \qquad b\omega^2, \\ &\omega^1{}_0 = s\omega^1, && \omega^3{}_1 = f\omega^1 + c\omega^2, \\ &\omega^2{}_0 = v\omega^2, && \omega^3{}_2 = c\omega^1 + r\omega^2, \end{aligned} \tag{3.7}$$

где векторы $\boldsymbol{e}_0$, $\boldsymbol{e}_3$ являются нормальными векторами поверхности V_2. Для доказательства теоремы надо показать, что для каждой V_2 в ${}^0R_4$ можно выбрать такой канонический репер, чтобы пфаффовы уравнения V_2 приняли вид (3.7).

Пусть задана двухмерная поверхность V_2 в ${}^0R_4$. Тогда, как известно ([4], стр. 250), вторые квадратичные формы V_2 в ${}^0R_4$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} &\omega^1{}_0 = a_{11}\omega^1 + a_{12}\omega^2, && \omega^3{}_1 = b_{11}\omega^1 + b_{12}\omega^2, \\ &\omega^2{}_0 = a_{12}\omega^1 + a_{22}\omega^2, && \omega^3{}_2 = b_{12}\omega^1 + b_{22}\omega^2, \end{aligned} \tag{3.8}$$

где $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ являются касательными векторами, а $\boldsymbol{e}_0$, $\boldsymbol{e}_3$ — нормальсти V_2. Для доказательства теоремы надо показать, что для каждой V_2 в ${}^0R_4$ можно выбрать такой канонический репер, чтобы пфаффовы уравнения V_2 приняли вид (3.7).

$$\omega^3{}_0 = b_1\omega^1 + b_2\omega^2. \tag{3.9}$$

Вопрос состоит в том, можно ли найти такие углы α на касательной плоскости и β на нормальной плоскости, чтобы в новом репере имели место равенства

$$\tilde{a}_{12} = 0, \qquad \tilde{b}_1 = 0. \tag{3. 10}$$

Обозначим векторы нового репера через $\tilde{\boldsymbol{e}}_0$ и формы через $\tilde{\omega}^I$, $\tilde{\omega}^I{}_J$.

Тогда

$$\begin{aligned} &\tilde{\boldsymbol{e}}_1 = \boldsymbol{e}_1 \cos\alpha - \boldsymbol{e}_2 \sin\alpha, && \tilde{\boldsymbol{e}}_0 = \boldsymbol{e}_0 \cos\beta - \boldsymbol{e}_3 \sin\beta, \\ &\tilde{\boldsymbol{e}}_2 = \boldsymbol{e}_1 \sin\alpha + \boldsymbol{e}_2 \cos\alpha, && \tilde{\boldsymbol{e}}_3 = \boldsymbol{e}_0 \sin\beta + \boldsymbol{e}_3 \cos\beta. \end{aligned} \tag{3.11}$$

и

$$\begin{aligned} \omega^1 &= \tilde{\omega}^1 \cos\alpha + \tilde{\omega}^2 \sin\alpha, \\ \omega^2 &= -\tilde{\omega}^1 \sin\alpha + \tilde{\omega}^2 \cos\alpha. \end{aligned} \tag{3.12}$$

При дифференцировании уравнения (3.11_3) получаем

$$\begin{aligned} d\tilde{\boldsymbol{e}}_0 = {} & (\omega^3{}_0 - d\beta) \sin\beta\, \boldsymbol{e}_0 + (\omega^3{}_0 - d\beta) \cos\beta\, \boldsymbol{e}_3 + \\ & + (\omega^1{}_0 \cos\beta + \omega^3{}_1 \sin\beta) \boldsymbol{e}_1 + (\omega^2{}_0 \cos\beta + \omega^3{}_2 \sin\beta) \boldsymbol{e}_2. \end{aligned}$$

С другой стороны, имеем

$$\begin{aligned} d\tilde{\boldsymbol{e}}_0 = {} & \tilde{\omega}^1{}_0 \tilde{\boldsymbol{e}}_1 + \tilde{\omega}^2{}_0 \tilde{\boldsymbol{e}}_2 + \tilde{\omega}^3{}_0 \tilde{\boldsymbol{e}}_3 = \tilde{\omega}^3{}_0 \sin\beta\, \boldsymbol{e}_0 + \omega^3{}_0 \cos\beta\, \boldsymbol{e}_3 + \\ & + (\tilde{\omega}^1{}_0 \cos\alpha + \tilde{\omega}^2{}_0 \sin\alpha) \boldsymbol{e}_1 + (-\tilde{\omega}^1{}_0 \sin\alpha + \tilde{\omega}^2{}_0 \cos\alpha) \boldsymbol{e}_2. \end{aligned}$$

При сравнении последних двух соотношений получаем соотношения:

$$\tilde{\omega}^1{}_0 = \tilde{a}_{11}\tilde{\omega}^1 + \tilde{a}_{12}\tilde{\omega}^2, \qquad \tilde{\omega}^3{}_0 = \omega^3{}_0 - d\beta,$$
$$\tilde{\omega}^2{}_0 = \tilde{a}_{12}\tilde{\omega}^1 + \tilde{a}_{22}\tilde{\omega}^2, \tag{3.13}$$

где

$$\tilde{a}_{12} = \frac{1}{2}\{(a_{11} - a_{22})\cos\beta + (b_{11} - b_{22})\sin\beta\}\sin 2\alpha +$$
$$+ (a_{12}\cos\beta + b_{12}\sin\beta)\cos 2\alpha. \tag{3.14}$$

Если записать

$$d\beta = \beta_1\omega^1 + \beta_2\omega^2,$$

то, в силу (3.9) и (3.13),

$$\tilde{\omega}^3{}_0 = (b_1 - \beta_1)\omega^1 + (b_2 - \beta_2)\omega^2. \tag{3.15}$$

Для того чтобы найти подходящий канонический репер, векторы $\boldsymbol{e}_0$, $\boldsymbol{e}_3$ на нормальной плоскости V_2 надо повернуть на угол β, так, чтобы имели место равенства

$$b_1 - \beta_2 = 0, \quad b_2 - \beta_2 \neq 0. \tag{3. 16}$$

Такой угол β определяется с произволом одной функции одного аргумента. Угол α можно определить из формулы

$$\tan 2\,\alpha = -\frac{2(a_{12}\cos\beta + b_{12}\sin\beta)}{(a_{11} - a_{22})\cos\beta + (b_{11} - b_{22})\sin\beta} \tag{3.17}$$

(см. (3.10) и (3.14)).

Итак, для каждой двухмерной поверхности V_2 в ${}^0R_4$ можно выбрать такой канонический репер, в котором имеют место равенства (3.16—17) и V_2 определяется пфаффовыми уравнениями (3.7). Теорема доказана.

§ 4. Некоторые частные случаи

Нормальная демиконгруэнция V_3 в R_4 называется *нормальной минимальной конгруэнцией* V'_3, если гиперповерхность V'_3 минимальна в смысле известного вариационного определения ([5], стр. 100). Нормальная минимальная демиконгруэнция в V'_3 рассматривается в статье [6], но все эти результаты без труда переносятся и в пространство ${}^1R_4$.

Частным случаем нормальной минимальной демиконгруэнции V'_3 является нормальная параболическая минимальная демиконгруэнция, которая в случае ${}^0R_4$ рассматривается также в статье [6]; ее нетрудно перенести в ${}^1R_4$.

Частным случаем нормальной демиконгруэнции является также нормальная параболическая демиконгруэнция. Нормальную демиконгруэнцию V_3 в R_4 будем называть *нормальной параболической демиконгруэнцией* V''_3, если ее полный параметр распределения [1] равен нулю (т. е. фокус совпадает с центром образующей). Нормальная параболическая демиконгруэнция определяется пфаффовыми уравнениями (1.17), причем имеет место соотношение

$$b^2 + v^2 - sv = 0.$$

При продолжении легко показать, что нормальная параболическая демиконгруэнция существует и определяется с произволом одной функции двух аргументов.

В случае нормальной параболической демиконгруэнции на средней поверхности существует семейство геодезических, так что каждая образующая касается геодезической в своем центре.

Литература

1. Лумисте Ю. Г., Дифференциальная геометрия линейчатых гиперповерхностей V_3 в R_4. Матем. сб., 1960, **50** (92), № 2, 203—220.
2. Лумисте Ю. Г., Многомерные линейчатые поверхности эвклидова пространства. Матем. сб., 1961, **55** (97), № 4, 411—420.
3. Лумисте Ю. Г., Туулметс Л. А., Минимальные конгруэнции V_3 в эвклидовом пространстве R_4. Изв. высш. уч. зав., Математика, 1962, № 1, (26), 74—82.
4. Риманова геометрия в ортогональном репере. Изд. МГУ., Москва, 1960.
5. Схоутен И. А., Стройк Д. Дж., Введение в новые методы дифференциальной геометрии, т. II. Москва, 1948.
6. Туулметс Л. А., Минимальные демиконгруэнции в эвклидовом пространстве R_4. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1962, **129**, 103—118.
7. Фиников С. П., Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. Москва—Ленинград, 1948.
8. Фиников С. П., Теория конгруэнций. Москва—Ленинград, 1948.
9. Чакмазян А. В., Эволютные поверхности двухмерной двойственно нормализованной D_2 в E_4. Докл. АН СССР, 1962, **144**, 1233—1236.
10. Чакмазян А. В., О поверхностях D_m пространства K_n. Докл. АН Арм. ССР, 1963, **30**, № 2, 71—75.

Поступило
5 X 1963

NORMAALKVAASIKONGRUENTSID V_3 RUUMIS R_4

L. Tuulmets

Resümee

Joonhüperpinda V_3, mida töös nimetatakse kvaasikongruentsiks, võib vaadelda ruumis R_4 (päriseukleidilises ruumis ${}^{\circ}R_4$ või pseudoeukleidilises ruumis ${}^{1}R_4$) kahelt seisukohalt: 1) kui sirgete parve $\infty^2 R_1$, 2) kui hüperpinda V_3. Pinna V_3 omadused on tihedalt seotud parve $\infty^2 R_1$ omadustega ja vastupidi. Erilist huvi pakuvad kvaasikongruentsi V_3 alajuhud [1] (kongruentsid, demi- ja pseudokongruentsid), mis rahuldavad teatud lisatingimusi (normaalsus jt.).

Artiklis tõestatakse 6 teoreemi normaalkongruentsi ja normaaldemikongruentsi geomeetriliste omaduste kohta. Näiteks:

Kongruents V_3 ruumis R_4 osutub normaalkongruentsiks siis ja ainult siis, kui tal on evoluutpind.

Kui suvalisel kahemõõtmelisel pinnal ruumis R_4 on antud üheparameetriline geodeetiliste parv, siis parve puutujate poolt moodustatud hüperpind osutub normaaldemikongruentsiks.

Iga kahemõõtmelist pinda V_2 ruumis $^{\circ}R_4$ võib lõpmatult mitmesel viisil normaliseerida normaaldemikongruentsiga.

NORMAL QUASI-CONGRUENCES V_3 IN THE SPACE R_4

L. Tuulmets

Summary

Ruled hypersurface V_3, called quasi-congruence in this paper, can be considered in two aspects in the space R_4 (Euclidean space proper $^{\circ}R_4$ or pseudo-Euclidean space $^1R_4$): 1) as a family of straight lines $\infty^2 R_1$, 2) as a hypersurface V_3. The properties of the surface V_3 are closely connected with the properties of the family $\infty^2 R_1$ and vice versa. The particular cases [1] (congruences demi- and pseudocongruences) of the quasi-congruence V_3 that meet certain additional demands (normality, a. o.) are of special interest.

In this paper 6 theorems about some geometrical properties of the normal congruence and the normal demicongruence are proved. For example:

A congruence V_3 in the space R_4 proves to be a normal congruence if and only if it has an evolute-surface.

In case a one-parametric family of geodesics has been fixed on an arbitrary two-dimensional surface in the space R_4, the hypersurface generated by the tangents of the family proves to be a normal demi-congruence.

Any two-dimensional surface V_2 in the space $^{\circ}R_4$ can be normalized by means of a normal demi-congruence in innumerable ways.

К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА

М. Рахула
Кафедра алгебры и геометрии

Пусть V—C^∞-многообразие n измерений. В понятие касательного многообразия высшего порядка многообразия V различными авторами вкладывается различный смысл. Возьмем, например, касательное многообразие второго порядка многообразия V. По В. В. Вагнеру — это $3n$-мерное пространство дифференциалов первого и второго порядков, присоединенных к каждой точке $\xi \in V$ (см. [1]). В статье [4] рассматривается $\frac{n(n+5)}{2}$-мерное пространство частных производных первого и второго порядков, присоединенных к каждой точке $\xi \in V$ (в локальном представлении, см. также [5]). Наконец, это — $4n$-мерное пространство векторов, касательных к $2n$-мерному пространству касательных векторов к многообразию V, (см. [6]).

В настоящей статье рассматриваются касательные многообразия высших порядков многообразия V с третьей точки зрения. Во избежание путаницы в терминах, эти многообразия называются этажами многообразия V (определение 3). При переходе от этажа к следующему размерность удваивается. В статье преследуются три цели: 1) показать, что дифференциалам отображения первого и высшего порядков можно дать теоретико-множественное истолкование, исходя из понятия суперпозиции функций; 2) дать краткое определение продолженных групп группы диффеоморфизмов многообразия V и обобщить, тем самым, идею дифференциальных продолжений группы преобразований; 3) выявить локальную структуру этажей многообразия V и добавить к известным определениям линейной связности на V еще одно определение, естественно вытекающее из структуры второго этажа (теорема 4).

§ 1. Перенесения функций

Пусть P и Q — два множества, и пусть μ — отображение, отображающее подмножество $\underline{\mu}$ множества P на подмножество $\overline{\mu}$ множества Q. Назовем μ *функцией из* P *в* Q, а подмножества

$\underline{\mu} \subset P$ и $\overline{\mu} \subset Q$ — соответственно *областью определения* и *множеством значений* функции μ.

Пусть запись $\mu : P \to Q$ означает функцию из P в Q, а запись $\mu : \xi \to \mu(\xi)$ — отображение элемента $\xi \in \underline{\mu}$ функцией μ в элемент $\mu(\xi) \in \overline{\mu}$. То, что $\underline{\mu} \subset P$, выразим словами: «функция μ задана в множестве P».

Определение 1. *Множество всевозможных функций, заданных в множестве P, называется первой ступенью множества P.*

Рассмотрим последовательность множеств

$$P,\ P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_i,\ \ldots,$$

где каждое последующее является первой ступенью предыдущего множества. Множество P_i называется *i-ой ступенью множества P* $(i = 1,\ 2,\ \ldots)$.

Пусть в множествах P и Q соответственно заданы функции μ и λ, такие, что пересечение $\overline{\mu} \cap \underline{\lambda} \subset Q$ непусто. *Суперпозицией функций λ и μ* называется функция

$$\lambda \circ \mu : \xi \to \lambda \circ \mu(\xi) = \lambda(\mu(\xi)),$$

где $\xi \in \underline{\lambda \circ \mu} = \mu^{-1}(\overline{\mu} \cap \underline{\lambda})$.

Функция

$$\mu_1 : \lambda \to \lambda \circ \mu,$$

где $\mu : P \to Q$ и λ — любая функция, заданная в множестве Q, есть функция из первой ступени Q_1 множества Q в первую ступень P_1 множества P ($\underline{\mu_1}$ — множество таких фукций $\lambda \in Q_1$, для которых $\overline{\mu} \cap \underline{\lambda}$ непусто).

Определение 2. *Функция μ_1 называется первым перенесением по отношению к функции μ.*

Далее, обозначим первое перенесение по отношению к μ_1 через μ_2, первое перенесение по отношению к μ_2 через μ_3 и т. д. — получается последовательность функций

$$\mu, \mu_1, \mu_2,\ \ldots,\ \mu_i,\ \ldots,$$

где каждая последующая является первым перенесением по отношению к предыдущей функции. Функция μ_i называется *i-ым перенесением* по отношению к функции μ.

Ясно, что μ_i есть функция из P_i в Q_i, когда i — четное число, и, наоборот, из Q_i в P_i, когда i — нечетно. Изобразим это на схеме:

$$\begin{tikzcd}
\mu \arrow[d, dotted, no head] & & \mu_2 \arrow[d, dotted, no head] & & & & \mu_{2k} \arrow[d, dotted, no head] & \\
P \arrow[d] & P_1 & P_2 \arrow[d] & P_3 & \dots & P_{2k-1} & P_{2k} \arrow[d] & \dots \\
Q & Q_1 \arrow[u] \arrow[d, dotted, no head] & Q_2 & Q_3 \arrow[u] \arrow[d, dotted, no head] & \dots & Q_{2k-1} \arrow[u] \arrow[d, dotted, no head] & Q_{2k} & \dots \\
 & \mu_1 & & \mu_3 & & \mu_{2k-1} & &
\end{tikzcd}$$

Сами перенесения являются функциями соответствующих ступеней: $\mu_{2k-1} \in Q_{2k}$; $\mu_{2k} \in P_{2k+1}$.

Следующие три теоремы показывают, как проявляются первое, второе и третье перенесения в геометрии.

Теорема 1. *Пусть $T: L \to L'$ — линейное отображение векторного пространства L в векторное пространство L', и $T^*: L'^* \to L^*$ — взаимное отображение дуального пространства L'^* в дуальное пространство L^*. Отображение T^* определяется действием первого перенесения T_1 на дуальном пространстве L'^*.*

Доказательство. Так как ковектор, элемент дуального пространства L^*, определяется как линейная скалярная функция на L, то $L^* \subset L_1$. Так же и $L'^* \subset L_1'$. Пусть $X \in L$, $\Psi \in L'^*$, а $T: X \to TX$ и $T^*: \Psi \to T^*\Psi$. Запишем равенство

$$T^*\Psi(X) = \Psi(TX),$$

которым обычно определяется T^*. Посмотрим, как действует первое перенесение T_1 на ковекторе Ψ. Если обозначить через $T_1\Psi$ суперпозицию $\Psi \circ T$, то, по определению, имеем

$$T_1\Psi(X) = \Psi(TX).$$

Эти два равенства совпадают — поэтому $T^*\Psi = T_1\Psi$.

В следующих теоремах рассматривается дифференцируемое отображение $\mu: V \to V'$ дифференцируемого многообразия V на дифференцируемое многообразие V'.

Теорема 2. *Второе перенесение μ_2, отображающее касательное пространство L_ξ к многообразию V в точке ξ в касательное пространство $L_{\mu(\xi)}$ к многообразию V' в точке $\mu(\xi)$, порождает дифференциал $d\mu$ отображения μ в точке ξ.*

Доказательство. Как известно, дифференциал $d\mu$ в точке $\xi \in V$ определяется как отображение

$$d\mu: X_\xi \in L_\xi \to X_{\mu(\xi)} \in L_{\mu(\xi)},$$

при котором для любой дифференцируемой в точке $\mu(\xi)$ скалярной функции g выполняется равенство

$$X_{\mu(\xi)}\, g = X_\xi\, (g \circ \mu).$$

Вектор $X_\xi \in L_\xi$ следует рассматривать как функцию

$$X : f \to X(f) = X_\xi f \qquad (1)$$

(где f — любая дифференцируемая в точке ξ скалярная функция), т. е. как функцию из V_1 в R^1, принадлежащую второй ступени V_2. Поэтому $L_\xi \subset V_2$, и, аналогично, $L_{\mu(\xi)} \subset V_2'$. Второе перенесение $\mu_2 : V_2 \to V_2'$ переносит функцию $X \in V_2$ в функцию $\mu_2(X) = X \circ \mu_1 \in V_2'$ (последнее равенство следует из определения μ_2). Значение функции $X \circ \mu_1$ на функции g есть число

$$X \circ \mu_1(g) = X(\mu_1(g)) = X_\xi(g \circ \mu)$$

Следовательно, $\mu_2(X) = X_{\mu(\xi)}$.

Теорема 3. *Взаимное отображение $d^*\mu : L^*_{\mu(\xi)} \to L^*_\xi$ в точке $\mu(\xi) \in V'$ определяется действием третьего перенесения μ_3 на ковекторах дуального пространства $L^*_{\mu(\xi)}$.*

Доказательство. По определению, взаимное отображение $d^*\mu$ в точке $\mu(\xi)$ находится в таком же отношении к дифференциалу $d\mu$ в точке ξ, в каком взаимное отображение T^* в теореме 1 находится к отображению T. Если взять вместо T дифференциал $d\mu$ или порождающее $d\mu$ второе перенесение μ_2 (см. теорема 2), то приходим к выводу: $d^*\mu$ определяется первым перенесением по отношению к μ_2, — а таковым является третье перенесение μ_3.

Замечание. Поскольку отображения T^*, $d\mu$ и $d^*\mu$ хорошо известны, мы дали их теоретико-множественное обоснование в виде теорем. Вообще же эти теоремы можно положить в основу определения названных отображений.

Пусть X — векторное поле на V, отображающееся дифференциалом $d\mu$ в векторное поле $d\mu$X на V', и Ψ — 1-форма на V', отображающаяся взаимным отображением $d^*\mu$ в 1-форму $d^*\mu\Psi$ на V. Тогда справедливы следующие равенства:

$$(d\mu \mathrm{X} g) \circ \mu = \mathrm{X}(g \circ \mu); \qquad (2)$$

$$d^*\mu\Psi(\mathrm{X}) = (\Psi(d\mu \mathrm{X})) \circ \mu. \qquad (3)$$

§ 2. Этажи и продолженные группы

1. **Определение 3.** *Множество касательных векторов к многообразию V обозначается символом V_{I} и называется первым этажом многообразия V.*

Построим, далее, бесконечную последовательность множеств

$$V,\ V_{\mathrm{I}},\ V_{\mathrm{II}},\ \dots,\ V_{(i)},\ \dots,$$

где каждое последующее множество является первым этажом предыдущего множества. Множество $V_{(i)}$ называется *i-ым этажом многообразия V*. Ниже будут рассматриваться векторные поля на $V_{(i-1)}$ — назовем их *деривациями i-го порядка.*

Если касательный вектор X_ξ в точке $\xi \in V$ определяется функцией X второй ступени V_2 (см. (1)), то в качестве элемента первого этажа V_{I} его следует рассматривать как пару, состоящую из точки ξ и функции X. Будем писать: $X_\xi = (\xi, X)$. Рассмотрим касательный вектор δ_{X_ξ} в точке $X_\xi \in V_{\mathrm{I}}$ к первому этажу V_{I}, т. е. элемент второго этажа V_{II}. Пусть F — скалярная функция на V_{I}, дифференцируемая в X_ξ. При фиксации X функция F является обычной скалярной функцией на V и δ_{X_ξ} действует на ней как некоторая функция Y второй ступени V_2 вида (1); при фиксации точки ξ функция F является функцией третьей ступени V_3 и δ_{X_ξ} действует на ней как функция δ четвертой ступени V_4. Таким образом, касательный вектор δ_{X_ξ} в точке $X_\xi \in V_{\mathrm{I}}$ определяется функциями $Y \in V_2$ и $\delta \in V_4$. Если δ_{X_ξ} рассматривать в качестве элемента второго этажа V_{II}, то он определяется точкой ξ и функциями X, Y и δ. Будем писать: $\delta_{X_\xi} = (\xi, X, Y, \delta)$. Как это выглядит в координатном представлении, увидим в § 3. Нетрудно установить, что элемент i-го этажа $V_{(i)}$ представится системой $1 + C_i^1 + C_i^2 + \ldots + C_i^{i-1} + 1 = 2^i$ элементов, состоящей из точки $\xi \in V$ и C_i^k функций $2k$-ой ступени V_{2k} $(k = 1, 2, \ldots, i)$.

На основании теоремы 2, под дифференциалом $d\mu$ отображения $\mu : V \to V'$ будем понимать отображение $V_{\mathrm{I}} \to V_{\mathrm{I}}'$, определяемое парой отображения μ и второго перенесения μ_2; $d\mu = (\mu, \mu_2)$. Под *дифференциалом i-го порядка $d^i\mu$ отображения $\mu : V \to V'$* будем понимать дифференциал дифференциала $(i-1)$-го порядка $d^{i-1}\mu$.

Очевидно, $d^i\mu$ есть отображение $V_{(i)} \to V'_{(i)}$, определяемое отображением μ и перенесениями $\mu_2, \mu_4, \ldots, \mu_{2i}$. Будем писать:

$$d^i\mu = (\mu, \mu_2, \ldots, \mu_{2i}).$$

2. Сказанное ниже относится к теории продолженных групп преобразований.

Пусть V — C^∞-многообразие. Под преобразованием многообразия V подразумевается C^∞-диффеоморфизм многообразия V. Преобразования многообразия V образуют группу G — *группу преобразований многообразия V.*

Определение 4. *Назовем i-ой продолженной группой группы G множество дифференциалов i-го порядка d^ia преобразований $a \in G$, $(i = 1, 2, \ldots)$.*

Введем следующие обозначения для продолженных групп группы G:

$$G_{\mathrm{I}},\ G_{\mathrm{II}},\ \ldots,\ G_{(i)},\ \ldots$$

Заметим, что $d^i a \in G_{(i)}$ есть преобразование i-го этажа $V_{(i)}$, а отображение $a \to d^i a$ есть изоморфизм G на $G_{(i)}$.

Имея в виду лемму К. Номидзу ([2], стр. 19) о том, что дифференциал da преобразования a порождается внутренним автоморфизмом $b \to aba^{-1}$, $b \in G$, в группе G, следует сказать, что первая продолженная группа G_{I} порождается группой внутренних автоморфизмов G^1 группы G, вторая продолженная группа G_{II} порождается группой внутренних автоморфизмов G^2 группы G^1 и т. д. Последовательность продолженных групп группы G оказывается, таким образом, связанной с последовательностью групп G^1, G^2, ..., G^i, ..., где каждая последующая группа есть группа внутренних автоморфизмов предыдущей группы.

В частности, когда V — дифференцируемая группа и G — группа ее правых сдвигов, связь между группами G^1 и G_{I} проявляется как присоединенное представление группы V.

Остановимся кратко на однопараметрической подгруппе a_t группы G и ее продолжениях da_t, d^2a_t, ..., d^ia_t, ..., однопараметрических подгруппах соответствующих продолженных групп G_{I}, G_{II}, ..., $G_{(i)}$, ... Подобно тому, как a_t индуцирует на V векторное поле (деривацию первого порядка), ее i-ое продолжение d^ia_t индуцирует деривацию $(i+1)$-го порядка на i-ом этаже $V_{(i)}$. Последовательность дериваций рассматривается в статье [3].

§ 3. Локальная структура этажей

1. Пусть U — координатная окрестность многообразия V, U_{I} — множество касательных к V векторов в точках U, U_{II} — множество касательных к V_{I} векторов в точках U_{I}, и т. д. В i-ом этаже $V_{(i)}$ определится окрестность $U_{(i)}$; покажем, как в ней определяются координаты. В окрестности U каждой точке ξ ставится в соответствие n координат $(\xi^1, \ldots, \xi^n)$. Не будет недоразумения, если через ξ^k будет обозначена скалярная функция $\xi \to \xi^k$. Пусть n векторных полей e_k и n дифференциалов $d\xi^k$ определяют на U естественную систему реперов и кореперов — при этом $e_k\xi^j = \delta_k{}^j$ $(j, k = 1, \ldots, n)$. В окрестности U_{I} каждой точке X_ξ ставится в соответствие $2n$ координат $(\xi^1, \ldots, \xi^n;\ \xi_1{}^1, \ldots, \xi_1{}^n)$ — две серии по n координат в каждой. Координаты первой серии ξ^k определяют точку $\xi \in U$, а координаты второй серии $\xi_1{}^k$ определяют вектор X_ξ в соответствующем репере e_k. Впрочем, $\xi_1{}^k$ представляет функцию X (см. (1)); именно,

$$X(f) = X_\xi f = \partial_k f \xi_i{}^k,$$

где $\partial_k f = \frac{\partial f}{\partial \xi^k}$. Ясно, что $2n$ дифференциалов $d\xi^k$, $d\xi_1{}^k$ определяют на U_{I} естественную систему кореперов. Обозначим дуальную систему реперов символом R — она определяется $2n$ векторными полями на U_{I}. В окрестности U_{II} каждой точке δx_ξ ставится в соответствие $4n$ координат (ξ^k; $\xi_1{}^k$; $\xi_2{}^k$; $\xi_{12}{}^k$) — 4 серии по n координат в каждой. Эти серии представляют соответственно точку ξ и функции X, Y и δ. Аналогично, в окрестности U_{III} точка определяется $8n$ координатами — 8-ю сериями по n координат в каждой:

$$(\xi^k;\ \xi_1{}^k;\ \xi_2{}^k;\ \xi_{12}{}^k;\ \xi_3{}^k;\ \xi_{13}{}^k;\ \xi_{23}{}^k;\ \xi_{123}{}^k); \tag{4}$$

первые 4 серии определяют точку $\delta x_\xi \in U_{\text{II}}$, а остальные 4 серии определяют касательный вектор к V_{II} в этой точке. Заметим, что вторая четверка символов отличается от первой четверки тем, что к ним приписан нижний индекс 3. Такое обозначение удобно потому, что теперь номер последнего нижнего индекса указывает, к точке какого этажа относится рассматриваемая координата, а удвоенное число нижних индексов указывает, функцию какой ступени представляет эта координата. Так, $\xi_{23}{}^k$ относится к точке третьего этажа V_{III} и представляет функцию четвертой ступени V_4. Координаты точки из U_{IV} получим, если возьмем набор (4) и припишем к нему еще 8 серий, добавив ко всем этим символам индекс 4, и т. д. Точка окрестности $U_{(i)}$ определится 2^i сериями координат по n штук в каждой серии.

2. 1-форму $\Phi = \varphi_k d\xi^k$, заданную на U, следует рассматривать как скалярную функцию, заданную в первом этаже V_{I}; при этом ее следует представить формулой $\Phi = \varphi_k(\xi^1, \ldots, \xi^n)\xi_1{}^k$, где ξ^k, $\xi_1{}^k$ — координаты произвольной точки U_{I}. Исходя из этой формулы, вычислим дифференциал $d\Phi$ для Φ:

$$d\Phi = \partial_j \varphi_k \xi_1{}^k d\xi^j + \varphi_k d\xi_1{}^k; \tag{5}$$

это — 1-форма на U_{I} с $2n$ компонентами $\partial_j \varphi_k \xi_1{}^k$ и φ_j относительно корепера $d\xi^j$, $d\xi_1{}^j$. Как скалярную функцию, заданную во втором этаже V_{II}, его можно представить формулой $d\Phi = \partial_j \varphi_k \xi_1{}^k \xi_2{}^j + \varphi_k \xi_{12}{}^k$. Отсюда видим, как $d\Phi$ зависит от точки $\delta x_\xi \in U_{\text{II}}$.

Дифференциалы скалярной функции f, заданной на U, представляются формулами:

$$\begin{aligned} df &= \partial_k f \xi_1{}^k; \\ d^2 f &= \partial_j \partial_k f \xi_1{}^k \xi_2{}^j + \partial_k f \xi_{12}{}^k; \\ d^3 f &= \partial_l \partial_j \partial_k f \xi_1{}^k \xi_2{}^j \xi_3{}^l + \partial_j \partial_k f (\xi_{13}{}^k \xi_2{}^j + \xi_1{}^k \xi_{23}{}^j + \xi_{12}{}^k \xi_3{}^j) + \partial_k f \xi_{123}{}^k; \end{aligned} \tag{6}$$

и т. д.

Формулы (6) дают представление о том, как i-ая продолженная группа $G_{(i)}$ действует на i-ом этаже $V_{(i)}$. Для этого, представив элемент $a:\xi\rightarrow\eta$ группы G с помощью функций $\eta^k=a^k(\xi)$, надо использовать i первых разложений (6). Так, например, если $d^2a\in G_{\mathrm{II}}$ отображает точку $(\xi^k;\ \xi_1{}^k;\ \xi_2{}^k;\ \xi_{12}{}^k)$ в точку $(\eta^k;\ \eta_1{}^k;\ \eta_2{}^k;\ \eta_{12}{}^k)$, то

$$\left\{\begin{array}{l} \eta^l=a^l(\xi);\\ \eta_1{}^l=\partial_k a^l\xi_1{}^k;\\ \eta_2{}^l=\partial_k a^l\xi_2{}^k;\\ \eta_{12}{}^l=\partial_k\partial_j a^l\xi_1{}^j\xi_2{}^k+\partial_k a^l\xi_{12}{}^k. \end{array}\right. \tag{7}$$

При этом отображение касательного пространства в точке $(\xi^k,\ \xi_1{}^k)\in V_{\mathrm{I}}$ в касательное пространство в точке $(\eta^k,\ \eta_1{}^k)\in V_{\mathrm{I}}$ осуществляется матрицей порядка $2n\times 2n$

$$\left\|\begin{array}{c:c} \partial_k a^l & 0\\ \hdashline \partial_k\partial_j a^l\xi_1{}^j & \partial_k a^l \end{array}\right\|.$$

3. Пусть однопараметрическая подгруппа $a_t\subset G$ индицирует на V векторное поле X, и ее первое продолжение $da_t\subset G_{\mathrm{I}}$ индуцирует на V_{I} деривацию 2-го порядка δ_{X}. Пусть $a_t:\xi\rightarrow\xi_t$ и $da_t:(\xi,\xi_1)\rightarrow(\xi_t,\xi_{t1})$; тогда $\xi_t{}^k=a_t{}^k(\xi)$ и $\xi_{t1}{}^k=\partial_j a_t{}^k\xi_1{}^j$. Компоненты x^k поля X в системе реперов e_k вычисляются по формуле $x^k=(a_t{}^k(\xi))'_{t-0}$. Согласно этому, для деривации δ_{X} в системе реперов R получаем $2n$ компонент x^k; $\partial_j x^k\xi_1{}^j$ (или, в другой записи, x^k, dx^k).

Исходя из формулы $\mathrm{X}f=\partial_k f x^k$ для производной функции f в направлении поля X, запишем производную $\delta_{\mathrm{X}}\Phi$ от 1-формы Φ в направлении деривации δ_{X} (см. (5)):

$$\delta_{\mathrm{X}}\Phi=\partial_j\varphi_k\xi_1{}^k x^j+\varphi_k\partial_j x^k\xi_1{}^j=(\mathrm{X}\varphi_k+\varphi_j\partial_k x^j)\,\xi_1{}^k.$$

Покажем, что имеет место формула $\delta_{\mathrm{X}}\Phi=(d^*a_t\Phi)'_{t=0}$. Согласно формулам (2 и 3), имеем равенства $da_t\mathrm{Y}f=(\mathrm{Y}(f\circ a_t))\circ a_{-t}$ и $d^*a_t\Phi(\mathrm{Y})=(\Phi(da_t\mathrm{Y}))\circ a_t$. Полагая $\mathrm{Y}=e_k y^k$; $da_t\mathrm{Y}=e_k y_t{}^k$; $\Phi=\varphi_k d\xi^k$; $d^*a_t\Phi=\varphi_{tk}d\xi^k$, записываем эти равенства в виде $\partial_k f y_t{}^k=\partial_k f((\partial_l a_t{}^k y^l)\circ a_{-t})$ и $\varphi_{tk}y^k=(\varphi_k y_t{}^k)\circ a_t$ соответственно. Из первого полученного равенства видим, что $y_t{}^k=(\partial_l a_t{}^k y^l)\circ a_{-t}$; подставляя это во второе равенство, получаем $\varphi_{tk}y^k=(\varphi_k\circ a_t)\partial_l a_t{}^k y^l$. Отсюда следует, что $\varphi_{tk}=(\varphi_l\circ a_t)\partial_k a_t{}^l$. Дифференцируя по t при $t=0$, находим $(\varphi_{tk})'_{t=0}=\mathrm{X}\varphi_k+\varphi_l\partial_k x^l$. Отметим аналогию установленной формулы с формулой $\mathrm{X}f=(f\circ a_t(\xi))'_{t=0}$. Деривация δ_{X} проявляет себя как дифференцирование Ли.

4. Дифференцируя равенство $y_t{}^k=(\partial_l a_t{}^k y^l)\circ a_{-t}$ по t при $t=0$ и изменяя знак на противоположный, получаем компоненты производной $\delta_{\mathrm{X}}\mathrm{Y}$ поля Y в направлении деривации δ_{X} в виде

$\mathrm{X}y^k - \mathrm{Y}x^k$. Таким образом, $\delta_\mathrm{X}\mathrm{Y} = -(da_t\mathrm{Y})'_{t=0} = [\mathrm{XY}]$, (ср. [2], стр. 20). Аналогично определяются компоненты производной деривации δ_Y в направлении деривации третьего порядка ${}^3\delta_\mathrm{X}$, индуцируемой подгруппой d^2a_t. Этими компонентами окажутся $2n$ величин $\mathrm{X}y^k - \mathrm{Y}x^k$; $d(\mathrm{X}y^k - \mathrm{Y}x^k)$, а сама производная есть ${}^3\delta_\mathrm{X}\delta_\mathrm{Y} = [\delta_\mathrm{X}\delta_\mathrm{Y}] = \delta_{[\mathrm{XY}]}$. Заметим, компонента $-d(\mathrm{X}y^k - \mathrm{Y}x^k)$ получается в результате дифференцирования по t при $t = 0$ из $\partial_l\partial_j a_t{}^k \xi_1{}^j (y^l \circ a_{-t}) + \partial_l a_t{}^k (d^* a_{-t} dy^l)$ (см. (7), четвертая строка).

Вообще говоря, деривации второго порядка могут быть заданы в системе R компонентами, являющимися произвольными скалярными функциями на U_I. В первую очередь представляет интерес рассмотреть такие из них, у которых n компонент первой серии зависят только от координат ξ^k, а n компонент второй серии зависят от ξ^k и линейно — от координат $\xi_1{}^k$ (1-формы). Пусть, например, две деривации δ_1 и δ_2 представлены в системе R соответственно компонентами x^k; $\Gamma_{j1}{}^k\xi_1{}^j$ и y^k; $\Gamma_{j2}{}^k\xi_1{}^j$, где x^k, $\Gamma_{j1}{}^k$, y^k, $\Gamma_{j2}{}^k$ — скалярные функции на U. Оказывается, скобка этих дериваций $[\delta_1\delta_2]$ имеет своими компонентами следующие $2n$ величин:

$$\mathrm{X}y^k - \mathrm{Y}x^k;\ \ (\partial_j\Gamma_{l2}{}^k x^j + \Gamma_{j2}{}^k\Gamma_{l1}{}^j - \partial_j\Gamma_{l1}{}^k y^j - \Gamma_{j1}{}^k\Gamma_{l2}{}^k)\,\xi_1{}^l. \tag{8}$$

Они получаются прямым вычислением — только дифференцировать нужно как по переменным ξ^k, так и по переменным $\xi_1{}^k$. Впрочем, легко проверить, что в случае $\Gamma_{k1}{}^j = \partial_k x^j$ и $\Gamma_{k2}{}^j = \partial_k y^j$ из (8) получаем компоненты деривации ${}^3\delta_\mathrm{X}\delta_\mathrm{Y}$ (ср. выше).

Рассматривая компоненты (8), приходим к следующему выводу. Пусть на U задано n дериваций $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$, из которых k-ая деривация δ_k представлена в системе R $2n$ компонентами $\delta_k{}^j$; $\omega_k{}^j = \Gamma_{lk}{}^j\xi_1{}^l$, где $\delta_k{}^j$ — символ Кронекера, а $\omega_k{}^j$ — произвольные 1-формы на U. Оказывается, у скобки k-ой и l-ой дериваций $[\delta_k\delta_l]$ компонентами второй серии являются величины $R^i{}_{jkl}\xi_1{}^j$, где

$$R^i{}_{jkl} = \partial_k\Gamma_{jl}{}^i - \partial_l\Gamma_{jk}{}^i + \Gamma_{sl}{}^i\Gamma_{jk}{}^s - \Gamma_{sk}{}^i\Gamma_{jl}{}^s;$$

компоненты первой серии равны нулю. Отсюда

Теорема 4. *Задание на U линейной связности ω равносильно заданию n-мерного распределения на U_I с помощью дериваций $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$. При этом тензор кривизны определяет скобки этих дериваций.*

Распределение $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ на U_I можно дополнить n деривациями $\delta_1{}', \delta_2{}', \ldots, \delta_n{}'$, где k-ая деривация $\delta_k{}'$ имеет n компонент первой серии, равных нулю, и n компонент второй серии, равных $\delta_k{}^j$. Тогда на U_I образуется система реперов, определяемая относительно системы R матрицей

$$\left\|\begin{array}{c:c} \delta_i{}^j & 0 \\ \hdashline \Gamma_{ki}{}^j\,\xi_1{}^k & \delta_i{}^j \end{array}\right\|.$$

Таким образом, можно утверждать, что задание на U линейной связности определяет на U_{I} систему реперов (неголономную систему референции), причем величины $R^i{}_{jkl}\xi_{\mathrm{I}}{}^l$ являются компонентами объекта неголономности этой системы.

Литература

1. Вагнер В. В., Теория диференциальных объектов и основания диференциальной геометрии. В кн. Веблен О., Уайтхед Дж., «Основания диференциальной геометрии», Москва, 1949, стр. 135—223.
2. Номидзу К., Группы Ли и дифференциальная геометрия. Москва, 1960.
3. Рахула М., Последовательность дериваций на многообразии. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1962, **129**, 37—61.
4. Ambrose, W., Palais, R. S., Singer, I. M., Sprays. Anais Acad. brasil. ciênc., 1960, **32**, 163—178.
5. Ehresmann, C., Les prolongements d'une variété diffé████tiable, I. Calcul des jets. C. r. Acad. Sci., 1951, **233**, № 11, 598.
6. Kobayaschi, S., Theory of connections. Ann. mat. pura ed appl., 1957, **43**, 119—194.

Поступило
17 II 1964

KÕRGEMAT JÄRKU DIFERENTSIAALGEOMEETRIAST

M. Rahula

Resümee

C^∞-muutkonna V esimeseks korruseks V_I nimetatakse tema puutujavektorite hulka. V i-nda korruse $V_{(i)}$ all mõistetakse $(i-1)$-se korruse $V_{(i-1)}$ esimest korrust. Seejuures dim $V_{(i)} = 2^i$ dim V. Artiklil on kolm eesmärki: 1) näidata, et kujutuse esimest ja kõrgemat järku diferentsiaale võib tõlgendada hulgateoreetilisest seisukohast, lähtudes funktsioonide superpositsiooni mõistest; 2) lühidalt defineerida muutkonna difeomorfismide rühma jätkatud rühma ja seega üldistada teisendusrühmade diferentsiaalsete jätkamiste ideed; 3) selgitada välja korruste lokaalse struktuuri ning lisada tuntud lineaarseose definitsioonidele veel üks, mis on loomulikult seotud teise korruse struktuuriga (teoreem 4).

ON DIFFERENTIAL GEOMETRY OF HIGHER ORDER

M. Rahula

Summary

The set of tanget vectors of a C^∞-manifold V is called the first floor of V and denoted V_I. Under the i-th floor $V_{(i)}$ of V the first floor of the $(i-1)$-th floor $V_{(i-1)}$ is meant. Thereby dim $V_{(i)} = 2^i$ dim V. The three points set in the paper are as follows: 1) to show, that the differentials of the first and higher order of a map can be interpreted from the set-theoretical point of view starting from the notion of the superposition of functions; 2) to give a short definition of the extended groups of the group of diffeomorphisms of a manifold and thereby generalize the idea of the differential extension of groups of transformations; 3) to clear up the local structure of floors and to add still another definition, naturally connected with the structure of the second floor, to those already known of the linear connection (theorem 4.).

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ВКЛЮЧЕНИЯ И СОВМЕСТНОСТИ МЕТОДОВ АБСОЛЮТНОГО СУММИРОВАНИЯ

Э. Юримяэ

Кафедра математического анализа

§ 1. Введение

При изучении общих свойств корегулярных методов суммирования выясняется (см., например, [9]), что ограниченные расходящиеся последовательности в поле суммирования являются точками прикосновения множества сходящихся последовательностей. Из этого факта следуют некоторые общеизвестные теоремы Мазура-Орлича, как теорема о совместности корегулярных матричных методов на множестве ограниченных последовательностей и теорема о суммируемости неограниченной последовательности корегулярным матричным методом. Вышеупомянутый факт является основой и теоремы Виланского-Целлера о суммируемости ограниченных расходящихся последовательностей. Возникает вопрос, как обстоит дело в том случае, когда рассматривается абсолютная суммируемость матричным методом, сохраняющим абсолютную сходимость. Не являются ли в поле абсолютного суммирования ряды с ограниченными частичными суммами точками прикосновения множества абсолютно сходящихся рядов?

Из работы [1] видно, что без дополнительных ограничений не верна теорема Мазура-Орлича о совместности матричных методов на множестве рядов с ограниченными частичными суммами. Этот факт указывает на то (обобщенная сумма ряда при помощи матричного метода является непрерывным линейным функционалом в каждом *FK*-пространстве, где она определена), что для методов абсолютного суммирования в общем случае не имеет места положение, аналогичное отмеченному для корегулярных методов суммирования.

В связи с этим представляет интерес изучать класс тех методов абсолютного суммирования, в поле которых ряды с ограниченными частичными суммами являются точками прикосновения множества абсолютно сходящихся рядов. В дальнейшем будем такие методы суммирования называть *абсолютно О-совершенными* (совершенными относительно рядов с ограниченными частичными суммами).

Для изучения свойств абсолютно O-совершенных методов в дальнейших параграфах применяется метод функционального анализа. В связи с этим в § 2 изложены некоторые необходимые понятия и теоремы. В § 3 доказывается одна теорема, в которой дается достаточное условие для того, чтобы метод суммирования являлся абсолютно O-совершенным. В §§ 4—5 изучается вопрос о том, насколько широк класс абсолютно O-совершенных методов. В этом направлении показывается, что класс абсолютно O-совершенных методов содержит класс абсолютно совершенных методов и не совпадает с последним. Так как многие классические методы являются абсолютно совершенными, то все они и — абсолютно O-совершенные.

В § 6 даются некоторые общие теоремы для абсолютно O-совершенных методов, которые являются аналогами соответствующих теорем Мазура-Орлича и Виланского-Целлера, известных в теории корегулярных методов. В последнем параграфе применяется одна общая теорема из § 6 и доказываются аналоги теорем Виланского и Агнью.

Надо отметить, что некоторые из доказанных теорем для абсолютно O-совершенных методов получены и Гейсбергом [1] для так называемых S-совершенных методов. Сравнивая условия S-совершенности с условием теоремы 5 настоящей работы, можно сказать, что в теореме 5 на матрицы не налагается требование абсолютной регулярности. Надо требовать только то, чтобы матрица сохраняла абсолютную сходимость. С другой стороны, заметим, что из условий S-совершенности условие (d) (см. [1], стр. 298) проверяется не легко. В связи с этим трудно сказать, какие из классических методов суммирования являются S-совершенными.

§ 2. Обозначения и некоторые вспомогательные теоремы

Мы будем рассматривать преобразование[1]

$$\eta_n = \sum_k a_{nk}\xi_k. \tag{1}$$

Матрица $A = (a_{nk})$ определяет некоторый метод суммирования. Рассматривая этот метод как преобразование ряда в ряд, требуем, чтобы он преобразовал каждый абсолютно сходящийся

---

[1] Если пределы изменения индексов не обозначены, то они имеют все целочисленные значения от 0 до $+\infty$.

ряд $x=\sum_k \xi_k$ $(\sum_k |\xi_k|<\infty)$ в абсолютно сходящийся ряд $y=\sum_n \eta_n$. Имеет место следующая

Теорема 1 (Кнопп и Лоренц, 1949). *Преобразование* (1) *сохраняет абсолютную сходимость тогда и только тогда, когда*

$$\sum_n |a_{nk}|=O(1).$$

При нормировке $\|x\|=\sum_k |\xi_k|$ множество абсолютно сходящихся рядов l оказывается FK-пространством, т. е. локально выпуклым полным метрическим пространством, в котором имеет место сходимость по координатам.

Множество всех рядов $x=\sum \xi_k$, для которых $y=Ax=$ $=\sum \eta_n \in l$, обозначим через $|A|^*$ и назовем полем абсолютного суммирования.

Из общей теории Целлера [9] вытекает, что множество $|A|^*$ является FK-пространством с квазинормами

$$\sup_m \left|\sum_{k=0}^{m} a_{nk}\,\xi_k\right|, \tag{2}$$

$$|\xi_k|, \tag{3}$$

$$\sum_n \left|\sum_k a_{nk}\xi_k\right|. \tag{4}$$

Если метод A является реверсивным, т. е. система (1) имеет единственное решение при каждой $y=\sum \eta_n \in l$, то $|A|^*$ оказывается банаховым пространством с нормой (4). Классические методы (как методы Чезаро, Рисса, Вороного-Нерлунда и т. д.) определяются матрицей, в которой $a_{nk}=0$ при $k>n$, а $a_{nn}\neq 0$. Такие методы называются нормальными. Так как нормальные методы являются реверсивными, то и поле абсолютного суммирования нормального метода A оказывается банаховым пространством с нормой (4).

В дальнейших исследованиях нас интересует общий вид линейного непрерывного функционала в пространстве $|A|^*$. Из общих результатов Целлера [9], как следствие, получаем, что каждый линейный непрерывный функционал выражается в $|A|^*$ формулой

$$fx=\sum_k \beta_k\xi_k+\sum_n \tau_n \sum_k a_{nk}\xi_k, \tag{5}$$

где $\tau_n=O(1)$.

Если метод A сохраняет абсолютную сходимость, то и $\beta_k=$ $=O(1)$.

При реверсивных методах каждый линейный непрерывный функционал можно выразить формулой (5) с $\beta_k=0$.

Следуя Пейеримхоффу (см. [6]), назовем метод A абсолютно совершенным, если ряды

$$e_k = \underbrace{0+0+\ldots 0}_{k \text{ нулей}} + 1 + 0 + 0 + \ldots$$

составляют основное множество в пространстве $|A|^*$. Из этого определения легко получается следующая

Теорема 2 (см. [4]). *Реверсивный метод* (1) *является абсолютно совершенным тогда и только тогда, когда система*

$$\sum_n a_{nk}\tau_n = 0 \qquad (k = 0,\ 1,\ \ldots)$$

имеет только тривиальное решение $\{\tau_n\}$ *в пространстве ограниченных последовательностей.*

При доказательствах теорем § 6 применяются следующие общие теоремы.

Теорема 3 (см. [9]). *Если* R_1 *и* R_2 *два* FK*-пространства и* $R_1 \subset R_2$, *то из*[2]

$$\lim_k x_k = x \text{ в } R_1$$

вытекает

$$\lim_k x_k = x \text{ в } R_2.$$

Теорема 4. *Если в* FK*-пространстве* R *ряд с неограниченными частичными суммами является точкой прикосновения множества*[3] E, *то в* R *найдется и расходящийся ряд с ограниченными частичными суммами.*

Эта теорема вытекает из доказательства теоремы 3.1 статьи [5].

§ 3. О классе абсолютно O-совершенных методов

В настоящем параграфе изучаем класс методов (1), для которых ряды с ограниченными частичными суммами в $|A|^*$ являются точками прикосновения множества l. Мы докажем теорему, из которой видно, что класс абсолютно O-совершенных методов существенно шире класса абсолютно совершенных методов.

Теорема 5. *Пусть* $A = (a_{nk})$ — *реверсивный метод суммирования, сохраняющий абсолютную сходимость. Если для всех* $\tau_n = O(1)$ *из*

$$\sum_n a_{nk}\tau_n = 0 \qquad (k = 0,\ 1,\ \ldots)$$

---

[2] Для краткости обозначим $\lim\limits_{k\to\infty}$ через $\lim\limits_{k}$.

[3] Здесь через E обозначена линейная оболочка системы e_k.

вытекает

$$\lim_s \sum_k \left| \sum_{n=0}^{s} (a_{nk} - a_{n,\,k+1})\tau_n \right| = 0,$$

то все ряды с ограниченными частичными суммами в $|A|^*$ *являются точками прикосновения множества* l.

Доказательство. Так как метод A — реверсивный, то каждый непрерывный линейный функционал fx в $|A|^*$ выражается формулой

$$fx = \sum_n \tau_n \sum_k a_{nk}\xi_k, \tag{6}$$

где $\tau_n = O(1)$. Метод A сохраняет абсолютную сходимость (по условию теоремы), т. е. $l \subset |A|^*$. Отсюда выводим, что нам надо изучать условия для функционалов вида (6), при выполнении которых из соотношения

$$fx = 0 \text{ для всех } x \in l \tag{7}$$

следует

$$fx = 0 \quad \text{для всех}^4 \quad x \in m_r \cap |A|^*.$$

Пусть функционал fx выражается по формуле (6) и удовлетворяет условию (7). При $e_k \in l$ получаем

$$fe_k = \sum_n a_{nk}\tau_n = 0. \tag{8}$$

Так как

$$\sum_{n=0}^{s} \tau_n \sum_k a_{nk}\xi_k = \sum_k \xi_k \sum_{n=0}^{s} a_{nk}\tau_n,$$

то остается определить, когда из $\tau_n = O(1)$ и (8) следует

$$\lim_s \sum_k \xi_k \sum_{n=0}^{s} a_{nk}\tau_n = 0$$

для всех $x \in m_r \cap |A|^*$. Это требование выполнено тогда, когда метод $B = (b_{sk})$, где $b_{sk} = \sum_{n=0}^{s} a_{nk}\tau_n$ и $\{\tau_n\}$ определена равенствами (8), суммирует все ряды с ограниченными частичными суммами к нулю. На основании теоремы Хана (см. [2], стр. 199), последнее обстоятельство имеет место тогда и только тогда, когда

$$\lim_s \sum_k \left| \sum_{n=0}^{s} (a_{nk} - a_{n,\,k+1})\tau_n \right| = 0.$$

Теорема доказана.

---

[4] Через m_r обозначено множество всех рядов с ограниченными частичными суммами.

Примечание. Если метод A — абсолютно совершенен, то утверждение теоремы 5 непосредственно следует из теоремы 2. Это значит, что класс абсолютно O-совершенных методов содержит все абсолютно совершенные методы. В § 5 мы увидим (пример 3). что класс абсолютно O-совершенных методов существенно шире класса абсолютно совершенных методов.

§ 4. Некоторые классические методы

1) Метод взвешенных средних Рисса (R, p_n) определяется матрицей

$$a_{nk}=\begin{cases}1 \quad, & k=n=0,\\ \dfrac{p_nP_{k-1}}{P_{n-1}P_n}, & n>0, \quad k\leqslant n,\\ 0 \quad, & k>n,\end{cases}$$

где $P_n=\sum\limits_{k=0}^{n} p_k$.

Этот метод сохраняет абсолютную сходимость тогда и только тогда, когда

$$|P_{k-1}|\sum_n\left|\frac{p_n}{P_{n-1}P_n}\right|=O(1).$$

На основе теоремы 2 можно непосредственно проверить, что метод взвешенных средних Рисса является абсолютно совершенным.

2) Метод Вороного-Нерлунда $(WN;\ p_n)$ определяется матрицей

$$a_{nk}=\begin{cases}1 \quad, & n=k=0,\\ \dfrac{p_{n-k}P_{n-1}-p_nP_{n-k-1}}{P_nP_{n-1}}, & k\leqslant n, \quad n>0,\\ 0 \quad, & k>n,\end{cases}$$

и $P_n=\sum\limits_{k=0}^{n} p_k$.

Метод $(WN;\ p_n)$ является абсолютно совершенным, если (см. [6])

$$p_{n+1}\leqslant p_n \qquad (n\geqslant 0), \tag{9}$$

$$\frac{p_{n+1}}{p_n}\geqslant\frac{p_n}{p_{n-1}} \qquad (n\geqslant 1). \tag{10}$$

3) Метод Чезаро (C, α) является методом Вороного-Нерлунда при

$$p_n = \binom{n+\alpha-1}{n} = A_n^{\alpha-1}.$$

Если $0 < \alpha \leqslant 1$, то выполнены условия (9) и (10). Это значит, что при $0 < \alpha \leqslant 1$ метод Чезаро является абсолютно совершенным.

Примечание. Непосредственно можно проверить, что и метод Чезаро второго порядка $(C, 2)$ является абсолютно совершенным, т. е. условие $0 < \alpha \leqslant 1$ оказывается только достаточным (а не необходимым) для абсолютной совершенности метода Чезаро.

4) Метод Эйлера-Кноппа (E, λ), определенный матрицей

$$a_{nk} = \begin{cases} \binom{n}{k} \lambda^{k+1} (1-\lambda)^{n-k}, & k \leqslant n, \\ 0 \qquad , & k > n, \end{cases}$$

является абсолютно совершенным, если $|1-\lambda| < 1$ (см. [4]).

Эти примеры показывают, что основные классические методы суммирования являются абсолютно совершенными. Пример такого метода, который не является абсолютно совершенным, но для которого выполнены условия теоремы 5, рассмотрим в § 5. Там же приведем примеры методов, не удовлетворяющих условиям теоремы 5.

§ 5. Другие примеры

1) Пусть

$$A = \left\| \begin{array}{ccccc} -1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 2 & 2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & -1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 2 & 2 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right\|.$$

Этот метод A сохраняет абсолютную сходимость и рассматривался в работе [1], где на примере ряда Эйлера $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ показано, что он не совместен с методом Чезаро второго порядка. Мы знаем, что метод Чезаро второго порядка абсолютно совершенен, и, вместе с тем, ряды с ограниченными частичными суммами являются точками прикосновения множества абсолютно сходящихся рядов. Отсюда довольно легко получить, что в поле абсолютного суммирования метода A ряд Эйлера не может быть точкокй прикосновения множества l (по теореме 3).

Непосредственно можно проверить, что метод A не является абсолютно совершенным и не удовлетворяет требованиям теоремы 5.

2) Условиям теоремы 5 не удовлетворяет и абсолютно несовершенный метод B, определенный матрицей

$$B = \left\| \begin{array}{ccccc} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \ldots \\ . & . & . & . & . \end{array} \right\| .$$

3) Рассмотрим теперь метод $D = (d_{nk})$, где

$$d_{nk} = \begin{cases} \frac{1}{k+1}, & n = k, \\ \frac{k}{k+1}, & n = k+1, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Этот метод сохраняет абсолютную сходимость, но (на основе теоремы 2) не является абсолютно совершенным, так как система

$$\frac{1}{k+1} \tau_k + \frac{k}{k+1} \tau_{k+1} = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots)$$

имеет нетривиальное решение

$$\tau_{k+1} = -\frac{1}{k} \tau_k \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

в пространстве m.

Вычисляя $\sum\limits_{n=0}^{s} (d_{nk} - d_{n,\,k+1}) \tau_n$, получаем

$$\sum_{n=0}^{s} (d_{nk} - d_{n,\,k+1}) \tau_n = \begin{cases} \frac{(-1)^{k-1} \tau_1}{(k-1)!\,(k+1)}, & s = k, \\ \frac{(-1)^{k-1} \tau_1 (k^2 + 2k + 3)}{(k+2)!}, & s = k+1, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Отсюда следует

$$\lim_{s} \sum_{k} \left| \sum_{n=0}^{s} (d_{nk} - d_{n,\,k+1}) \tau_n \right| = \lim_{s} \left[\frac{\tau_1}{(s-1)!\,(s+1)} + \frac{\tau_1 (s^2 + 2)}{(s+1)!} \right] = 0.$$

Из рассмотренного примера вытекает, что существуют такие методы, которые не являются абсолютно совершенными, но удовлетворяют условиям теоремы 5.

§ 6. Свойства абсолютно O-совершенных методов

Докажем теперь некоторые теоремы для абсолютно O-совершенных методов, которые являются аналогами общеизвестных теорем Мазура-Орлича и Виланского-Целлера. Заметим, что при $|B|^* \supset |A|^*$ выражение

$$y = \sum_n \eta_n = \sum_n \sum_k b_{nk}\xi_k,$$

т. е. B-сумма ряда x, является линейным непрерывным функционалом в пространстве $|A|^*$. Отсюда, при помощи одного общеизвестного следствия теоремы Банаха-Хана, вытекает следующая

Теорема 6. *Пусть для двух абсолютно О-совершенных методов* $|A|^* \subset |B|^*$. *Если эти методы совместны на множестве* l, *то они совместны и на множестве* $m_r \cap |A|^*$.

Теорема 7. *Если абсолютно О-совершенный метод А суммирует абсолютно только ряды с ограниченными частичными суммами, то он абсолютно суммирует только абсолютно сходящиеся ряды.*

Доказательство. Пусть ряд z такой, что $z \in m_r \cap |A|^*$, но $z \,\bar{\in}\, l$. Тогда можно найти такую последовательность $x_k \in l$ (метод — абсолютно O-совершенный), что

$$\lim_k x_k = z \quad \text{в} \quad |A|^*.$$

Так как это не верно в m_r, то по теореме 3 не может иметь место соотношение $|A|^* \subset m_r$. Теорема доказана.

При помощи теорем 3 и 4 на абсолютно O-совершенные методы переносится и теорема Виланского-Целлера (см. [8]) о суммировании ограниченных расходящихся последовательностей. Именно, имеет место следующая

Теорема 8. *Для абсолютно О-совершенного метода А следующие условия эквивалентны:*

1° *множество* l *замкнуто в* $|A|^*$;

2° *из всех рядов с ограниченными частичными суммами метод А абсолютно суммирует только абсолютно сходящиеся ряды.*

Доказательство. Допустим, что выполнено условие 1°. По определению абсолютно O-совершенного метода имеет место соотношение

$$l \subset m_r \cap |A|^* \subset \bar{l},$$

откуда, в силу замкнутости множества l в $|A|^*$, получаем $m_r \cap |A|^* = l$, т. е. выполнено условие 2°.

Пусть теперь выполнено условие 2°. Предположим, что l не замкнуто в $|A|^*$, т. е. найдется такая последовательность абсолютно сходящихся рядов $\{x_k\}$, что $\lim\limits_k x_k = x$, где $x \bar{\in} l$. Если $x \in m_r \cap |A|^*$, то сразу получается противоречие. Допустим, что $x \bar{\in} m_r$. Существование расходящегося ряда с ограниченными частичными суммами в $|A|^*$ следует теперь из теоремы 4.

Теорема доказана.

§ 7. Аналоги теорем Виланского и Агнью

В настоящем параграфе докажем две теоремы об абсолютно O-совершенных методах, которые являются применениями полученной общей теоремы 7. Начнем с аналога теоремы Виланского [7].

Теорема 9. *Абсолютно О-совершенный метод суммирует ряд* $x \bar{\in} l$ *тогда и только тогда, когда* $\sup\limits_m \sup\limits_\nu |\sum\limits_{k=0}^m a'_{k\nu}| = \infty$, *где* $A^{-1} = (a'_{k\nu})$.

Необходимость. Допустим, что

$$\sup_m \sup_\nu |\sum_{k=0}^m a'_{k\nu}| < \infty,$$

и покажем, что из последнего условия следует соотношение $|A|^* \subset m_r$, т. е. каждый ряд $x \in |A|^*$ является рядом с ограниченными частичными суммами. Действительно,

$$\sup_m |\sum_{k=0}^m \xi_k| = \sup_m |\sum_{k=0}^m \sum_\nu a'_{k\nu}\eta_\nu| \leqslant \sup_m \sup_\nu |\sum_{k=0}^m a'_{k\nu}| \sum_\nu |\eta_\nu| < \infty.$$

На основе теоремы 7 получаем, что $|A|^* = l$.

Достаточность. Согласно определению верхней грани множества, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой индекс μ, что при $y = \Sigma \eta_\nu = e_\mu$

$$\left| |\sum_{k=0}^m \sum_\nu a'_{k\nu} \eta_\nu| - \sup_\nu |\sum_{k=0}^m a'_{k\nu}| \right| < \varepsilon.$$

Так как $\xi_k = \sum\limits_\nu a'_{k\nu}\eta_\nu$, то из последнего неравенства и из $\sup\limits_m \sup\limits_\nu |\sum\limits_{\nu=0}^m a'_{k\nu}| = \infty$ вытекает, что найдется такой $x \in |A|^*$, для которого

$$\sup_m |\sum_{k=0}^m \xi_k| = +\infty,$$

т. е. метод A абсолютно суммирует расходящийся ряд. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь аналог одной теоремы Агнью [3].

Теорема 10. *Нормальный абсолютно О-совершенный метод A, для которого*

$$\liminf_{n} \left(|a_{nn}| - \sum_{k=0}^{n-1} \Big| \sum_{\nu=k}^{n} \Delta_k a_{\nu k} \Big|\right) > 0, \tag{11}$$

абсолютно суммирует только абсолютно сходящиеся ряды.

Доказательство. Воспользовавшись теоремой 7, нам надо показать, что метод A не суммирует абсолютно ни одного ряда с неограниченными частичными суммами. Рассмотрим ряд $x \,\overline{\in}\, m_r$. Тогда для бесконечно многих n имеет место неравенство

$$\Big|\sum_{\nu=0}^{k} \xi_\nu\Big| < \Big|\sum_{\nu=0}^{n} \xi_\nu\Big| \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

При помощи последнего неравенства получаем

$$\sum_{\mu=0}^{n} |\eta_\mu| \geqslant \Big|\sum_{\mu=0}^{n} \eta_\mu\Big| = \Big|\sum_{\mu=0}^{n} \sum_{k=0}^{\mu} a_{\mu k} \xi_k\Big| = \Big|\sum_{k=0}^{n} \sum_{\mu=0}^{n} \Delta_k a_{\mu k} \sum_{\nu=0}^{k} \xi_\nu\Big| =$$

$$= \Big|a_{nn} \sum_{\nu=0}^{n} \xi_\nu + \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\mu=k}^{n} \Delta_k a_{\mu k} \sum_{\nu=0}^{k} \xi_\nu\Big| \geqslant$$

$$\geqslant \left(|a_{nn}| - \sum_{k=0}^{n-1} \Big|\sum_{\mu=k}^{n} \Delta_k a_{\mu k}\Big|\right) \Big|\sum_{\nu=0}^{n} \xi_\nu\Big|, \tag{12}$$

откуда непосредственно вытекает утверждение теоремы.

Примечание. Так как имеет место (12), то доказательство дало нам больше, чем сказано в теореме 10, а именно: в поле простого суммирования метода, удовлетворяющего (11), не имеется ни одного ряда с неограниченными частичными суммами.

Литература

1. Гейсберг С., Аналоги теорем Мазура-Орлича для абсолютного суммирования. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1962, **129**, 297—307.
2. Кангро Г., О множителях суммируемости. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1955, **37**, 191—232.
3. Agnew, R., Equivalence of methods for evaluation of sequences. Proc. Amer. Math. Soc., 1952, **3**, 550—556.
4. Macphail, M. S., Some theorems on absolute summability. Canad. J. Math., 1951, **3**, 386—390.
5. Meyer-König, W., Zeller, K., Lückenumkehrsätze und Lückenperfektheit. Math. Z., 1956, **66**, 203—224.
6. Peyerimhoff, A., Untersuchungen über absolute Summierbarkeit. Math. Z., 1953, **57**, 265—290.

7. Wilansky, A., A necessary and sufficient condition that a summability method be stronger than convergence. Bull. Amer. Math. Soc., 1949, **55**, 914—916.
8. Wilansky, A., Zeller, K., Summation of bounded divergent sequences, topological methods. Trans. Amer. Math. Soc., 1955, **78**, 501—509.
9. Zeller, K., Allgemeine Eigenschaften von Limitierungsverfahren. Math. Z. 1951, **53**, 463—487.

Поступило
22 VI 1963

ABSOLUUTSE SUMMEERUVUSE MENETLUSTE SISALDUVUSE JA KOOSKÕLA MÕNINGAID KÜSIMUSI

E. Jürimäe

Resümee

Käesolevas artiklis on uurimise objektiks rida-rida teisenduse kujul antud absoluutse summeerimise menetlused. On eeldatud, et need menetlused on absoluutset koonduvust säilitavad ning menetluste summeerimisväljas kõik tõkestatud osasummadega read on absoluutselt koonduvate ridade hulga kuhjumispunktideks. Sellised menetlused on nimetatud absoluutselt O-perfektseteks menetlusteks. Menetluse absoluutseks O-perfektsuseks on paragrahvis 3 antud piisav tingimus (teoreem 5). Samas selgub ka, et absoluutselt perfektsete menetluste klass (vt. [4, 6]) sisaldub absoluutselt O-perfektsete menetluste klassis. Näiteid on esitatud paragrahvides 4—5, kus siis ilmneb, et sellised klassikalised menetlused, nagu Cesaro, Rieszi, Euler-Knoppi ja Woronoi-Nörlundi menetlused kuuluvad absoluutselt O-perfektsete menetluste klassi. Paragrahvides 6—7 näidatakse, et absoluutselt O-perfektsetel menetlustel on paljud koregulaarsete menetluste omadused. Seal tõestatakse vaadeldavate menetluste korral analoogid Mazur-Orliczi, Wilansky-Zelleri, Wilansky ja Agnew' teoreemidele.

SOME PROBLEMS OF THE INCLUSION AND CONSISTENCY OF MATRIX METHODS FOR ABSOLUTE SUMMABILITY

E. Jürimäe

Summary

The object of this paper is to consider the reversible series-to-series summability methods for absolute summability. We assume that the set of the absolute convergent series consists in the absolute summability field $|A|^*$ of A and all the series with bounded partial sums are points of contact of l in $|A|^*$. These methods are called absolute O-perfect methods. In § 3 there is given a sufficient condition that the method A is an absolute O-perfect method (theorem 5). In this section it is also shown that the class of absolute O-perfect methods includes the class of absolute perfect methods (see [4, 6]). Some examples are given in §§ 4—5. From these examples we can see that most of the classical summability methods (methods of Cesaro, Riesz, Euler-Knopp and Woronoy-Nörlund) belong to the class of absolute O-perfect methods.

In §§ 6—7 it is shown that absolute O-perfect methods have many properties of coregular matrix methods (theorems 6—10). For this purpose some analogues of well-known theorems of Mazur-Orlicz, Wilansky-Zeller, Wilansky and Agnew are proved for absolute O-perfect methods.

ЗАМЕТКИ О КОНУЛЕВЫХ МЕТОДАХ СУММИРОВАНИЯ

Э. Юримяэ

Кафедра математического анализа

Введение

В настоящей статье рассматриваются матричные методы суммирования в виде преобразования ряда в ряд[1]

$$\eta_n = \sum_k \alpha_{nk} \xi_k. \qquad (1)$$

В доказательствах используются и методы суммирования в виде преобразования последовательности в последовательность

$$\eta_n = \sum_k a_{nk} \xi_k. \qquad (2)$$

Применяется следующая символика. Ряды $\Sigma \xi_k$, $\Sigma \eta_n$ и др. обозначены, соответственно, через x, y и т. д. Метод суммирования вида (1) обозначен через A, а метод вида (2) — через $\mathfrak{A}$.

В общей теории суммирования до сих пор особое внимание уделено матричным методам вида (2), сохраняющим сходимость. При изучении общих свойств этих методов оказалось нужным разделить класс всех таких методов на две части. Методы одной части названы Виланским [9] конулевыми, а другой части — корегулярными. В исследованиях выяснилось, что корегулярные методы слабее конулевых. Известна так называемая теорема Штейнгауза: ни один корегулярный метод не может суммировать всех ограниченных последовательностей. С другой стороны, как выяснилось в исследованиях Целлера и Виланского [8, 10], каждый конулевой метод суммирует как неограниченную, так и ограниченную расходящуюся последовательность. Среди корегулярных методов имеются методы, суммирующие только сходящиеся последовательности, и методы, суммирующие все сходящиеся последовательности и некоторые неограниченные последовательности.

---

[1] Если пределы изменения индексов не обозначены, то они имеют все целочисленные значения от 0 до $+\infty$.

Методы вида (1) изучали многие авторы, например, Вермес, Кангро, Целлер, причем Ричард показал, что они не эквивалентны методам вида (2). С другой стороны, для абсолютного суммирования они более подходящи.

В центре внимания настоящей статьи стоят конулевые методы суммирования вида (1). В § 1 приводятся нужные нам известные результаты, а определения конулевого и корегулярного методов вида (1) даны в § 2. Здесь же доказывается, что каждый конулевой метод суммирует как ряд с неограниченными частичными суммами, так и расходящийся ряд с ограниченными частичными суммами. В § 3 выводится необходимый и достаточный признак для того, чтобы метод A являлся конулевым.

Проблемы предыдущих параграфов, поставленные для методов абсолютного суммирования, решаются в § 5.

Аналогу теоремы Штейнгауза для методов вида (1) посвящен § 4.

§ 1. Некоторые результаты и вспомогательные теоремы

Приведем несколько теорем, необходимых для дальнейших исследований.

Теорема 1 (Хан). *Метод* $A = (a_{nk})$ *преобразования ряда в ряд сохраняет сходимость, т. е. суммирует все сходящиеся ряды, тогда и только тогда, когда*[2]

1) *ряды* $\sum\limits_n a_{nk}$ *сходятся,*

2) $\sum\limits_k \left| \sum\limits_{n=0}^{m} \Delta_k a_{nk} \right| = O(1)$.

Теорема 2 (Кнопп-Лоренц). *Метод* $A = (a_{nk})$ *преобразования ряда в ряд сохраняет абсолютную сходимость, т. е. абсолютно суммирует все абсолютно сходящиеся ряды, тогда и только тогда, когда*

3) $\sum\limits_n |a_{nk}| = O(1)$.

Теорема 3 (Хан). *Метод* $\mathfrak{A} = (a_{nk})$ *преобразования последовательности в последовательность суммирует к нулю все абсолютно сходящиеся последовательности тогда и только тогда, когда*

4) $\lim\limits_n a_{nk} = 0$,

5) $\lim\limits_n \sum\limits_k a_{nk} = 0$,

6) $\sum\limits_{k=0}^{l} a_{nk} = O(1)$.

---

[2] Обозначаем $\Delta_k a_{nk} = a_{nk} - a_{n,k+1}$.

Теорема 4 (Шур). *Метод $\mathfrak{A} = (a_{nk})$ преобразования последовательности в последовательность суммирует к нулю все ограниченные последовательности тогда и только тогда, когда*

7) $\lim\limits_n \sum\limits_k |a_{nk}| = 0.$

Применяя в нижеследующем методы функционального анализа, рассмотрим поле суммирования A^* (множество всех A-суммируемых рядов) и поле абсолютно суммирования $|A|^*$ (множество всех абсолютно A-суммируемых рядов) как некоторые пространства.

Из общих результатов Целлера [7] вытекает, что множество A^* является FK-пространством с квазинормами

1° $\sup\limits_l |\sum\limits_{k=0}^{l} a_{nk}\xi_k|,$

2° $|\xi_k|,$

3° $\sup\limits_m |\sum\limits_{n=0}^{m} \sum\limits_k a_{nk}\xi_k|,$

а множество $|A|^*$ — с квазинормами 1°, 2° и

4° $\sum\limits_n |\sum\limits_k a_{nk}\xi_k|.$

Множество всех сходящихся рядов c_r и множество всех рядов с ограниченными частичными суммами m_r также являются FK-пространствами с нормой

$$\|x\| = \| \Sigma\, \xi_k\| = \sup_l |\sum_{k=0}^{l} \xi_k|,$$

а также множество всех абсолютно сходящихся рядов l с нормой

$$\|x\| = \| \Sigma\, \xi_k\| = \Sigma\, |\xi_k|.$$

Из названных выше результатов Целлера вытекает и общий вид линейных непрерывных функционалов в A^* и $|A|^*$. В этих пространствах они выражаются формулой

$$fx = \sum_k \gamma_k\xi_k + \sum_n \tau_n \sum_k a_{nk}\xi_k, \tag{3}$$

где для A^*

$$\sum_n |\tau_n - \tau_{n+1}| = \sum_n |\Delta\tau_n| < \infty, \tag{4}$$

а для $|A|^*$

$$\tau_n = O(1). \tag{5}$$

Коэффициенты γ_k в формуле (3) таковы, что ряды $\sum\limits_k \gamma_k\xi_k$ сходятся для всех $x \in A^*$ (соответственно $x \in |A|^*$).

Наши дальнейшие рассуждения опираются на теоремы 1—4, на формулу (3) и на следующую характерную для FK-пространств теорему, которая вытекает из определения FK-пространства и из теоремы о замкнутом графике (см. [7]).

Теорема 5. *Если* R_1 *и* R_2 *два* FK*-пространства, для которых* $R_1 \subset R_2$, *то из*

$$x_k \to x \quad \text{в} \quad R_1$$

вытекает

$$x_k \to x \quad \text{в} \quad R_2.$$

Вместе с теоремой 5 мы применяем еще одну общую теорему для F-пространств (см. [3], стр. 134, теорема 2).

Теорема 6. *Если последовательность* $\{x_k\}$ *в некотором* F*-пространстве* R *слабо сходится к* x, *то из линейных комбинаций элементов последовательности* $\{x_k\}$ *можно построить последовательность, сильно сходящуюся к* x.

§ 2. Конулевые методы

В упомянутой работе [9] Виланским рассмотрены матричные методы вида (2) и при помощи понятия так называемой характеристики даны определения корегулярного и конулевого методов. Позже выяснилось, что конулевые методы имеют некоторые специфические свойства. Автору настоящей статьи удалось дать (см. [1, 2]) для применения методов функционального анализа более подходящее определение конулевого метода, которое равносильно определению Виланского. На основе этого определения мы и дадим определение конулевого матричного метода в виде преобразования ряда в ряд.

Определение 1. *Метод* $A = (a_{nk})$, *сохраняющий сходимость, назовем конулевым, если в пространстве* A^* *последовательность рядов*

$$i_k = \underbrace{0 + 0 + \ldots + 0}_{k \text{ нулей}} + 1 + 0 + \ldots$$

слабо сходится к нулю при $k \to \infty$.

Остальные методы, сохраняющие сходимость, назовем *корегулярными.* Из теорем 5 и 6 и определения 1 вытекает, что ни один корегулярный метод не может быть сильнее конулевого метода, т. е. конулевые методы более мощны, чем остальные методы, сохраняющие сходимость.

С другой стороны, так как в пространстве m_r последовательность $\{i_k\}$ не сходится слабо к нулю, то для конулевого метода A не может иметь места соотношение $A^* \subset m_r$, что следует из теорем 5 и 6. Последнее означает, что каждый конулевой метод суммирует ряды с неограниченными частичными суммами.

Примечание 1. В работе [6] Т. Сырмус дала теорему: если матричный метод вида (1) суммирует расходящийся ряд с ограниченными частичными суммами, то он суммирует и ряд с неограниченными частичными суммами. Доказанное нами утверждение является, в известном смысле, уточнением этого результата.

Докажем теперь, что каждый конулевой метод вида (1) суммирует и расходящийся ряд с ограниченными частичными суммами. Допустим, что конулевой метод A не суммирует ни одного расходящегося ряда с ограниченными частичными суммами. На основе одной теоремы Мейера-Кенига—Целлера (см. [5], теорема 3.1) тогда множество c_r является замкнутым в пространстве A^*. В силу замкнутости множества c_r в A^*, топология пространства A^* должна бы быть эквивалентной с топологией, определенной нормой

$$\|x\| = \sup_l |\sum_{k=0}^{l} \xi_k|. \tag{6}$$

Но последнее обстоятельство не может иметь места при конулевом методе A, так как по топологии пространства A^* найдется некоторая последовательность из линейных комбинаций элементов последовательности $\{i_k\}$, сходящаяся к нулю, а по норме (6) это не так. Отсюда и вытекает, что каждый конулевой метод суммирует и расходящийся ряд с ограниченными частичными суммами.

Итак, нами доказана следующая

Теорема 7. *Каждый конулевой метод вида* (1) *суммирует как ряд с неограниченными частичными суммами, так и расходящийся ряд с ограниченными частичными суммами.*

§ 3. Необходимый и достаточный признак

В настоящем параграфе отвечаем на следующий вопрос: как охарактеризовать конулевой метод суммирования вида (1) через элементы соответствующей ему матрицы? Ответ на этот вопрос дает нам следующая

Теорема 8. *Метод* $A = (\alpha_{nk})$ *вида* (1), *сохраняющий сходимость, является конулевым тогда и только тогда, когда*

$$\lim_k \sum_n \alpha_{nk} = 0.$$

Доказательство. Из определения 1 и общего вида линейного непрерывного функционала в A^* получим, что метод A является конулевым тогда и только тогда, когда

$$\lim_k (\gamma_k + \sum_n \tau_n \alpha_{nk}) = 0. \tag{7}$$

Соотношение (7) должно иметь место для всех $\tau_n = O(1)$ и для всех $\{\gamma_k\}$, при которых ряды $\Sigma \gamma_k \xi_k$, где $\Sigma \xi_k \in A^*$, сходятся. С другой стороны, последовательности $\{\tau_n\}$ и $\{\gamma_k\}$ не зависят друг от друга. Отсюда получим, что $\lim\limits_k \gamma_k = 0$. Ввиду этого из равенства (7) вытекает условие

$$\lim_k \sum_n a_{nk}\tau_n = 0, \tag{8}$$

которое должно выполняться для всех абсолютно сходящихся последовательностей. Последнее и является необходимым и достаточным условием для того, чтобы метод $A = (a_{nk})$ был конулевым. Это значит, что метод $\mathfrak{A}$ преобразования последовательности в последовательность, определяемый транспонированной к A матрицей, должен суммировать все абсолютно сходящиеся последовательности к нулю. На основе теоремы 3 последнее имеет место тогда и только тогда, когда

$$\lim_k a_{nk} = 0, \tag{9}$$

$$\lim_k \sum_n a_{nk} = 0, \tag{10}$$

$$\sum_{n=0}^{m} a_{nk} = O(1). \tag{11}$$

Для доказательства теоремы 8 нам надо показать, что условия (9) и (11) являются следствиями из (10) и из условий теоремы 1.

Во-первых, соотношение (11) вытекает из условия 2), так как для всех абсолютно сходящихся последовательностей $\{b_k\}$ имеем

$$b_k = O\left(|b_0| + \sum_k |b_k - b_{k+1}|\right).$$

Далее докажем, что для конулевого метода равенство (9) вытекает из условия 2). Учитывая, что каждый конулевой метод суммирует расходящийся ряд с ограниченными частичными суммами, положим, что $z = \Sigma \zeta_k$ и является таким рядом для конулевого метода $A = (a_{nk})$. Ввиду A-суммируемости ряда z, существует предел

$$\lim_m \sum_{n=0}^{m} \sum_k a_{nk}\zeta_k = \lim_m \lim_l \sum_{n=0}^{m} \sum_{k=0}^{l} a_{nk}\zeta_k =$$

$$= \lim_m \lim_l \sum_{n=0}^{m} \left(\sum_{k=0}^{l-1} \Delta_k a_{nk} \sum_{\nu=0}^{k} \zeta_\nu + a_{nl} \sum_{\nu=0}^{l} \zeta_\nu \right) =$$

$$= \lim_m \left(\lim_l \sum_{n=0}^{m} \sum_{k=0}^{l-1} \Delta_k a_{nk} \sum_{\nu=0}^{k} \zeta_\nu + \lim_l \sum_{n=0}^{m} a_{nl} \sum_{\nu=0}^{l} \zeta_\nu \right). \tag{12}$$

На основе условия 2) ряд (по k)

$$\sum_k \sum_{n=0}^{m} \Delta_k a_{nk} \sum_{\nu=0}^{k} \zeta_\nu$$

сходится абсолютно, так как $\sum_{\nu=0}^{k} \zeta_\nu = O(1)$. Из-за существования предела (12) должен существовать и

$$\lim_l \sum_{n=0}^{m} a_{nl} \sum_{\nu=0}^{l} \zeta_\nu,$$

но последнее имеет место только в том случае, когда выполнено соотношение (9).

Теорема доказана.

§ 4. О теореме Штейнгауза

В 1911 году Г. Штейнгауз доказал, что ни один регулярный метод преобразования последовательности в последовательность не может суммировать всех ограниченных последовательностей. Теорема Штейнгауза обобщена в [9] на корегулярные методы. Очень простое доказательство этого результата дано в [4]. На основе этого доказательства мы покажем, что аналог теоремы Штейнгауза верен и для методов суммирования преобразования ряда в ряд.

Из условия 2) получаем

$$\sum_k \left| \sum_n \Delta_k a_{nk} \right| < \infty,$$

откуда вытекает, что для каждого метода A, сохраняющего сходимость, существует предел

$$\lim_k \sum_n a_{nk} = a.$$

Возьмем матрицу $B = aE - A$, где E — единичная матрица преобразования ряда в ряд. Матрица B определяет конулевой метод суммирования, который на основе § 2 суммирует расходящийся ряд с ограниченными частичными суммами. Пусть таким рядом будет $z = \sum \zeta_k$. Тогда ряд Bz сходится, но отсюда вытекает, что метод A не суммирует всех рядов с ограниченными частичными суммами, так как в случае $a \neq 0$ ряд $Az = az - Bz$ не сходится.

Нами получена следующая

Теорема 9. *Из всех методов суммирования вида* (1) *только конулевые могут суммировать все ряды с ограниченными частичными суммами.*

Примечание 2. В случае методов вида (2) для теоремы Штейнгауза очень простое доказательство, опирающееся на теореме Шура, сообщил проф. Г. Кангро. Идея этого доказательства применима и для методов вида (1). Тем самым получаем новое доказательство теоремы 9. Для этого заметим, что метод вида (1) суммирует все ряды с ограниченными частичными суммами только в том случае, когда

$$\lim_{\nu} \sum_{k} \Big| \sum_{n=\nu}^{\infty} \Delta_k a_{nk} \Big| = 0.$$

Отсюда

$$\lim_{\nu} \sum_{k} \Big(\sum_{n=\nu}^{\infty} \Delta_k a_{nk} \Big) = \sum_{n} \lim_{k} a_{nk} - \lim_{k} \sum_{n} a_{nk} = 0.$$

Так как в данном случае $\lim\limits_{n} a_{nk} = 0$ (это вытекает из A-суммируемости ряда $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$), то A, в силу теоремы 8, должен быть конулевым методом.

§ 5. Абсолютно конулевые методы

Рассмотрим методы вида (1), сохраняющие абсолютную сходимость, т. е. методы, для которых имеет место соотношение $l \subset |A|^*$. Заметим, что в этом случае ряды $i_k \in |A|^*$. Аналогично предыдущему дадим

Определение 2. *Метод $A = (a_{nk})$, сохраняющий абсолютную сходимость, называется абсолютно конулевым, если в $|A|^*$ последовательность $\{i_k\}$ слабо сходится к нулю.*

Все остальные методы, сохраняющие абсолютную сходимость, называются *абсолютно корегулярными*. Из теорем 5 и 6 вытекает, что поле абсолютного суммирования абсолютно конулевого метода не может содержаться ни в каком поле абсолютного суммирования абсолютно корегулярного метода. Это значит, что относительно абсолютного суммирования самыми мощными методами, сохраняющими абсолютную сходимость, являются абсолютно конулевые методы.

Аналогично § 2 можно доказать, что каждый абсолютно конулевой метод суммирует абсолютно как ряд с неограниченными частичными суммами, так и абсолютно не сходящийся ряд с ограниченными частичными суммами.

Найдем теперь, как и в § 3, необходимый и достаточный признак, выраженный при помощи элементов матрицы A, для того, чтобы метод A был абсолютно конулевым. Из определения 2 и формулы (3) получаем, что метод A является абсолютно конулевым тогда и только тогда, когда

$$\lim_{k} \Big(\gamma_k + \sum_{n} \tau_n a_{nk}\Big) = 0 \qquad (13)$$

для всех $\tau_n = O(1)$. Аналогичное с § 3 рассуждение дает нам, что $\lim\limits_n \gamma_k = 0$, т. е. из (13) вытекает

$$\lim_k \sum_n a_{nk}\tau_n = 0 \qquad (14)$$

для всех $\tau_n = O(1)$.

При помощи (13) видим, что метод $\mathfrak{A}$, определяемый транспонированной к A матрицей, должен суммировать все ограниченные последовательности к нулю. На основе теоремы 4 последнее имеет место тогда и только тогда, когда

$$\lim_k \sum_n |a_{nk}| = 0. \qquad (15)$$

Имея в виду эти последние замечания, мы можем сказать, что справедлива следующая

Теорема 10. *Метод суммирования $A = (a_{nk})$, сохраняющий абсолютную сходимость и удовлетворяющий условию (15), суммирует абсолютно как ряд с неограниченными частичными суммами, так и абсолютно не сходящийся ряд с ограниченными частичными суммами.*

Литература

1. Юримяэ Э. И., Некоторые вопросы обобщенных матричных методов суммирования, корегулярные и конулевые методы. Изв. АН Эст. ССР, сер. техн. и физ. матем. наук. 1959, **8**, 115—121.
2. Юримяэ Э. И., Методы суммирования, сохраняющие сходимость. Изв. АН Эст. ССР, сер. физ.-мат. и техн. наук, 1960, **9**, 257—267.
3. Banach, S., Théorie des opérations linéaires, Warszawa, 1932.
4. Dorff, E. K., Wilansky, A., Remarks on summability. J. London Math. Soc., 1960, **35**, 234—236.
5. Meyer-König, W., Zeller, K., Lückenumkehrsätze und Lückenperfektheit. Math. Z., 1956, **66**, 203—224.
6. Sõrmus, T., Tõkestamata osasummadega read maatriksmenetluse summeerimisväljas. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1956, **42**, 143—151.
7. Zeller, K., Allgemeine Eigenschaften von Limitierungsverfahren. Math. Z., 1951, **53**, 463—487.
8. Zeller, K., Faktorfolgen bei Limitierungsverfahren. Math. Z., 1952, **56**, 134—151.
9. Wilansky, A., An application of Banach linear functionals to summability. Trans. Amer. Math. Soc., 1949, **67**, 59—68.
10. Wilansky, A., Zeller, K., Summation of bounded divergent sequences, topological methods. Trans. Amer. Math. Soc., 1955, **78**, 501—509.

Поступило
10 X 1963

MÄRKMEID KONULLMENETLUSTE KOHTA

E. Jürimäe

Resümee

Selles artiklis vaadeldakse rida-rida teisenduse (1) kujul antud summeerimismenetlusi. Nende menetluste kohta eeldatakse, et nad on kas koonduvust või siis absoluutset koonduvust säilitavad. Vaadeldavate menetluste jaoks antakse § 2 koregulaarse ja konullmenetluse definitsioonid. Samas näidatakse, et iga konullmenetlus summeerib nii tõkestamata osasummadega rea kui ka tõkestatud osasummadega hajuva rea. Edasises (§ 3) on antud tarvilik ja piisav tingimus selleks, et menetlus oleks konullmenetlus. Järgnevas paragrahvis vaadeldakse Steinhausi teoreemi analoogi ja tõestatakse, et ainult konullmenetlus võib summeerida kõiki tõkestatud osasummadega ridu.

Vastavaid küsimusi seoses absoluutse summeeruvusega on käsitletud paragrahvis 5.

REMARKS ON CONULL SUMMABILITY METHODS

E. Jürimäe

Summary

In this note are considered the series-to-series summability methods (1) preserving convergence or absolute convergence. The definitions of «conull» and «coregular» series-to-series methods (Definition 1) is given in § 2. It is also proved there that every conull matrix (1) sums a series with unbounded partial sums as well as a divergent series with bounded partial sums. In § 3 is shown that

$$\lim_{k} \sum_{n} a_{nk} = 0$$

is the sufficient and necessary condition for the conull series-to-series method $A = (a_{nk})$. In § 4 it is shown that only conull methods (1) may sum all series with bounded partial sums (the analogy of the theorem of Steinhaus).

For the series-to-series summability methods preserving absolute convergence the notion of an «absolute conull» method (Definiton 2) is defined in § 5. It is shown in this paragraph that every absolute conull method sums absolutely a series with unbounded partial sums as well as a series with bounded partial sums which is not absolutely convergent. The equation (15) gives the sufficient and necessary condition for absolute conull methods.

О СВЯЗИ МЕЖДУ МНОЖИТЕЛЯМИ СУММИРУЕМОСТИ, КОЭФФИЦИЕНТАМИ ФУРЬЕ И МУЛЬТИПЛИКАТОРАМИ

М. Тыннов

Кафедра математического анализа

В работе [16] Гёс устанавливает ряд теорем о принадлежности тригонометрического ряда к тому или иному классу, если коэффициенты его являются множителями суммируемости или сходимости того или иного типа. Гёс в основном рассматривал случай, когда коэффициенты косинус-ряда являлись множителями суммируемости типа[1] (C^α, C^α) или (C_0^α, C^α), где $\alpha \geqslant 0$.

В настоящей статье изучается аналогичная проблема, причем используются и другие типы множителей суммируемости и сходимости. Кроме того, выводятся и некоторые результаты для мультипликаторов.

1. Обозначения

Пусть f, g и т. д. обозначают действительные функции от действительной переменной t соответственно $f(t)$, $g(t)$ и т. д., определенные почти везде на $(-\infty, \infty)$, периодические (с периодом 2π) и интегрируемые по Лебегу.

Функции, равные почти везде, отождествляем.

1. Обозначаем:

L_p $(1 \leqslant p < \infty)$ — пространство[2] всех функций f, для которых $\int\limits_0^{2\pi} |f|^p dt < \infty$;

M — пространство всех ограниченных функций;

C — пространство всех непрерывных функций;

V — пространство всех функций ограниченной вариации;

A — пространство всех абсолютно непрерывных функций;

---

[1] Через C^α обозначается метод Чезаро порядка α.

[2] Если $p = 1$, то $L_1 = L$.

V_1 — пространство[3] всех функций ограниченной вариации в среднем: $f \in V_1$, если найдется такое число $\varepsilon > 0$, что

$$\int_0^{2\pi} \Big| \sum_{k=1}^{n} \{f(b_k - t) - f(a_k - t)\} \Big| dt < \varepsilon \tag{1}$$

для любого конечного множества непересекающихся отрезков $[a_k, b_k] \subset [0, 2\pi]$;

A_0 — пространство[3] всех абсолютно непрерывных функций в среднем: $f \in A_0$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что из $\sum\limits_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta$ следует (1) при любом конечном множестве непересекающихся отрезков $[a_k, b_k] \subset [0, 2\pi]$;

R — пространство всех функций, интегрируемых по Риману;

D — пространство всех функций, удовлетворяющих условию Дини-Липшица

$$\lim_{\delta \to +0} [\sup_{|x| \leq \delta} |f(t+x) - f(t)|] \ln \delta = 0.$$

Все эти обозначения сохраняем и для пространств рядов Фурье, сответствующие всем перечисленным пространствам функций. Соответствующий функции f ряд Фурье обозначаем[4]

$$f^\circ = (a_k, b_k) = \Sigma (a_k \cos kt + b_k \sin kt). \tag{2}$$

Мы предположим, что

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f \, dt = 0,$$

так как это не будет ограничением общности в рассмотрении линейных операторов, определенных на пространствах рядов Фурье. Если же[5] E — нормированное функциональное пространство, то определяем $\|f^\circ\|_E = \|f\|_E$.

2. Через dE обозначаем пространство всех $f^\circ = (a_k, b_k)$, для которых $F^\circ = \left(-\frac{b_k}{k}, \frac{a_k}{k}\right) \in E$. Если E — нормированное пространство, то и dE — нормированное пространство с нормой

$$\|f^\circ\|_{dE} = \|F^\circ\|_E$$

(см. [14], стр. 347). Отметим, что $dA = L$ (см. [26], стр. 11; [4], стр. 266 и 271) и dV есть пространство всех рядов Фурье-Стилтьеса (см. [26], стр. 41).

---

[3] Скворцова [6] применяет обозначения $V_1 = (a)$ и $A_0 = (b)$. См. также [19], стр. 324.

[4] Если пределы изменения индексов не указаны, то они имеют все значения от 1 до $+\infty$.

[5] Везде E, E_1 обозначают подмножества множества всех тригонометрических рядов (2).

3. Если E — банахово пространство, состоящее из рядов (2), то через E_N обозначаем пространство всех $f^\circ \in E$, для которых (см. [14], стр. 348)

$$\lim_{n\to\infty} \|f^\circ - s_n(f^\circ)\|_E = 0,$$

где

$$s_n(f^\circ) = \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kt + b_k \sin kt).$$

Следует отметить, что если E нормированное функциональное пространство, то E_N есть подпространство пространства E, состоящее из всех функций, ряды Фурье которых сходятся по норме к соответствующим функциям.

4. Через $\bar{E}$ обозначаем множество тригонометрических рядов $(b_k, -a_k)$, для которых $(a_k, b_k) \in E$, т. е. $\bar{E}$ является множеством сопряженных тригонометрических рядов множества E.

5. Через E_c обозначаем множество всех косинус-рядов из множества E.

6. Пусть cC^α, mC^α, lC^α $(0 \leqslant \alpha < \infty)$ обозначают пространства последовательностей $\{a_k\}$, для которых $\Sigma\, a_k$ соответственно C^α-суммируем, C^α-ограничен, $|C^\alpha|$-суммируем. Отсюда получаем $cC^0 = c$, $mC^0 = m$, $lC^0 = l$.

Следуя Гёсу ([16], стр. 134), теми же символами cC^α, mC^α, lC^α обозначаем и пространства косинус-рядов, если последовательности их коэффициентов принадлежат соответственно пространствам последовательностей cC^α, mC^α, lC^α.

2. О дополнительных пространствах коэффициентов Фурье и множителях суммируемости

Определение 1. *Через* $(E \to cC^\alpha)$ *обозначаем пространство всех* (c_k, d_k), *для которых ряд*

$$\Sigma\, a_k c_k + b_k d_k$$

C^α*-суммируем при каждом* $(a_k, b_k) \in E$, *и называем это пространство* C^α*-дополнительным к пространству* E.

Если некоторые коэффициенты для всех $(a_k, b_k) \in E$ *равны нулю, то соответствующие им коэффициенты для всех* $(c_k, d_k) \in (E \to cC^\alpha)$ *также полагаем равными нулю.*

Аналогично определяем C_0^α-дополнительное и $|C^\alpha|$-дополнительное пространства к пространству E и обозначаем соответственно $(E \to mC^\alpha)$ и $(E \to lC^\alpha)$ (см. [14—19]).

Лемма 1. *Для пространств* $E_1 \subset E$ *имеет место соотношение*

$$(E \to lC^\alpha) \subset (E \to cC^\alpha) \subset (E_1 \to cC^\alpha).$$

Доказательство непосредственно следует из определения 1 (ср. [20], стр. 197).

В дальнейшем применяем обозначения

$$K^\circ = \Sigma a_k \cos kt,$$
$$S^\circ = \Sigma a_k \sin kt.$$

Лемма 2. *Косинус-ряд* K° *принадлежит пространствам* $(cC^\alpha \to cC^\beta)$, $(mC^\alpha \to cC^\beta)$, $(lC^\alpha \to cC^\beta)$, $(lC^\alpha \to lC^\beta)$, $(mC^\alpha \to lC^\beta)$ *и* $(cC^\alpha \to lC^\beta)$, *где* $\alpha, \beta \geqslant 0$, *тогда и только тогда, когда числа* a_k *являются множителями суммируемости соответственно типов* (C^α, C^β), (C_0^α, C^β), $(|C^\alpha|, C^\beta)$, $(|C^\alpha|, |C^\beta|)$, $(C_0^\alpha, |C^\beta|)$ *и* $(C^\alpha, |C^\beta|)$.

Доказательство. Косинус-ряд $K^\circ \in (cC^\alpha \to cC^\beta)$ тогда и только тогда, если ряд $\Sigma a_k c_k$ будет C^β-суммируемым при всех C^α-суммируемых рядах Σc_k, т. е. числа a_k суть множители суммируемости типа (C^α, C^β). Другие части леммы доказываются аналогично.

Следующие леммы 3—6, как вытекает из леммы 2, дают для коэффициентов a_k необходимые и достаточные условия, чтобы ряды K° принадлежали соответственно дополнительным пространствам $(cC^\alpha \to cC^\beta)$, $(mC^\alpha \to cC^\beta)$, $(lC^\alpha \to cC^\beta)$, $(lC^\alpha \to lC^\beta)$, $(mC^\alpha \to lC^\beta)$, и $(cC^\alpha \to lC^\beta)$.

Лемма 3. *Числа* a_k *являются множителями суммируемости типа* (C^α, C^β) *тогда и только тогда, когда выполнены условия*[6]

$$\Sigma (k+1)^\alpha |\Delta^{\alpha+1} a_k| < \infty, \tag{3}$$

$$a_k = \begin{cases} O(k^{\beta-\alpha}) & \text{при} \quad 0 \leqslant \beta \leqslant \alpha, \\ O(1) & \text{при} \quad 0 \leqslant \alpha < \beta. \end{cases} \tag{4}$$

Лемма 4. *Числа* a_k *являются множителями суммируемости типа* (C_0^α, C^β) *тогда и только тогда, когда выполнены условия* (3) *и*

$$a_k = \begin{cases} o(k^{\beta-\alpha}) & \text{при} \quad 0 \leqslant \beta \leqslant \alpha, \\ o(1) & \text{при} \quad 0 \leqslant \alpha < \beta. \end{cases}$$

Доказательства лемм 3 и 4 даны в [1, 11, 24].

Лемма 5. *Числа* a_k *являются множителями суммируемости типа* $(|C^\alpha|, C^\beta)$ *или* $(|C^\alpha|, |C^\beta|)$ *тогда и только тогда, когда выполнены условия* (4) *и* $\Delta^\alpha a_k = O(k^{-\alpha})$.

Лемма 6. *Числа* a_k *являются множителями суммируемости типа* $(C_0^\alpha, |C^\beta|)$ *или* $(C^\alpha, |C^\beta|)$, *где* $\alpha \geqslant 0$, *тогда и только тогда, когда выполнены условия* (3) *и*

---

[6] Всюду обозначаем $\Delta^\varkappa a_k = \sum_{n=k}^{\infty} A_{n-k}^{-\varkappa-1} a_n$.

$$\Sigma(k+1)^{\alpha-\beta}|a_k| < \infty \text{ при } 0 \leqslant \beta \leqslant \alpha+1,$$
$$\sum \frac{|a_k|}{k+1} < \infty \text{ при } \alpha+1 < \beta. \tag{5}$$

Доказательства лемм 5 и 6 даны в [1, 23].

Примечание 1. Из лемм 5 и 2 следует, что $(lC^{\alpha} \to cC^{\beta}) = (lC^{\alpha} \to lC^{\beta})$, а из лемм 6 и 2 следует, что $(mC^{\alpha} \to lC\ ) \doteq (cC^{\alpha} \to lC^{\beta})$, если $\alpha, \beta \geqslant 0$.

В дальнейшем нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 7. *Пространство* $(C \to c)$ *состоит из всех* f°, *для которых*

$$\sup_n \int_0^{2\pi} |s_n(f^{\circ})|\,dt < \infty.$$

Лемма 8. *Пространство* $(L \to c)$ *состоит из всех* f°, *для которых*

$$\sup_n \sup_t |s_n(f^{\circ})| < \infty.$$

Доказательства лемм 7 и 8 даны Гёсом (см. [14], стр. 355).

Теперь обозначим

$$\sigma_n^{\alpha}(f^{\circ}) = \frac{1}{A_n^{\alpha}} \sum_{k=1}^{n} A_{n-k}^{\alpha}\ (a_k \cos kt + b_k \sin kt).$$

Лемма 9. *Пространство* $(dV \to cC^{\alpha})$, *где* $\alpha \geqslant 0$, *состоит из всех* f°, *для которых*

$$\sup_n \sup_t |\sigma_n^{\alpha}\ (f^{\circ})| < \infty$$

и $\sigma_n^{\alpha}(f^{\circ}; t) = \sigma_n^{\alpha}(f^{\circ})$ *сходится для каждого* $t \in [0, 2\pi]$, *т. е. для которых* $\sigma_n^{\alpha}\ (f^{\circ})$ *сходится ограниченно.*

Лемма 10. *Пространство* $(V \to cC^{\alpha})$, *где* $\alpha \geqslant 0$, *состоит из всех* f°, *для которых* $\sigma_n^{\alpha}(F^{\circ})$ *сходится ограниченно.*

Доказательства лемм 8 и 9 даны Гёсом (см. [15], стр. 374—375; [17], стр. 157).

Лемма 11. *Пространство* $(M \to c)$ *состоит из всех* $f^{\circ} \in L$, *для которых*

$$\lim_{n \to \infty} \int_H s_n(f^{\circ})\,dt = \int_H f(t)\,dt$$

при каждом измеримом множестве $H \subset [0,2\pi]$, *т. е. для которых* $s_n(f^{\circ})$ *сходится слабо к* $f \in L$.

Доказательство дано Гёсом (см. [17], теорема 6).

3. Свойства коэффициентов Фурье

Здесь получаем следующие результаты, сводящиеся к множителям суммируемости, условия которых даны леммами 3—6.

Теорема 1. *Если числа a_k являются множителями суммируемости типа (C^{α}, C^{β}), где $\alpha, \beta > 0$, то $K^{\circ} \in dV$.*

Доказательство при $\alpha = \beta$ дал Гёс ([16], стр. 137). Но при $\alpha \neq \beta$ теорема доказывается аналогично.

Теорема 2. *Если числа ka_k являются множителями суммируемости типа (C^{α}, C^{β}), где $\alpha, \beta > 0$, то $S^{\circ} \in V$.*

Доказательство. Из теоремы 1 следует, что $\Sigma\, ka_k \cos kt \in dV$, откуда получаем $\Sigma \frac{ka_k}{k} \sin kt \in V$. Следовательно, $S^{\circ} \in V$.

Теорема 3. *Если числа a_k являются множителями сходимости для C^{α}, где $\alpha > 0$, то $K^{\circ} \in (C \rightarrow c)$.*

Доказательство аналогично как в теореме 1. В силу леммы 2 имеем $K^{\circ} \in (cC^{\alpha} \rightarrow c)$. Так как $\alpha > 0$, то $C_c \subset cC^{\alpha}$ (см. [26], стр. 94) и, следовательно, по лемме 1 получаем $K^{\circ} \in (C \rightarrow c)$.

Теорема 4. *Если числа a_k являются множителями сходимости для класса сходящихся рядов, то $K^{\circ} \in (V \rightarrow c)$ и $K^{\circ} \in [(dV \rightarrow c) \rightarrow c]$.*

Теорема 5. *Если числа ka_k являются множителями сходимости для класса сходящихся рядов, то $S^{\circ} \in [(V \rightarrow c) \rightarrow c]$, $S^{\circ} \in (dV \rightarrow c) \subset (L \rightarrow c) \subset M \subset L_p$ и $K^{\circ} \in L_p$ $(1 \leqslant p < \infty)$.*

Доказательства теорем 4 и 5 дал Гёс ([16], стр. 138).

Теорема 6. *Если числа a_k являются множителями суммируемости типа $(C_0^{\alpha}, C^{\beta})$, где $\alpha, \beta > 0$, то $K^{\circ} \in L$.*

Доказательство при $\alpha = \beta$ дал Гёс ([16], стр. 137). Но при $\alpha \neq \beta$ теорема доказывается аналогично.

Теорема 7. *Если числа ka_k являются множителями суммируемости типа $(C_0^{\alpha}, C^{\beta})$, где $\alpha, \beta > 0$, то $S^{\circ} \in A$.*

Доказательство. Из теоремы 6 следует $\Sigma\, ka_k \cos kt \in L$, откуда $S^{\circ} \in A$, так как $L = dA$.

Теорема 8. *Если числа a_k являются множителями сходимости для C_0^{α}, где $\alpha > 0$, то $K^{\circ} \in (M \rightarrow c)$.*

Доказательство аналогично как в теореме 6. Именно, в силу леммы 2 имеем $K^{\circ} \in (mC^{\alpha} \rightarrow c)$. Так как $\alpha > 0$, то $M_c \subset mC^{\alpha}$ (см. [9], теор. 70; [26], стр. 86) и, следовательно, по лемме 1 получаем $K^{\circ} \in (M \rightarrow c)$.

Теорема 9. *Если числа a_k являются множителями сходимости для класса рядов с ограниченными частичными суммами, то $K^{\circ} \in [(L \rightarrow c) \rightarrow c]$.*

Доказательство дано Гёсом (см. [16], стр. 138).

Теорема 10. *Если числа a_k являются множителями суммируемости типа* $(|C^\alpha|, C^\beta)$ *или* $(|C^\alpha|, |C^\beta|)$, *где* $\alpha > 0$, $\beta \geqslant 0$, *то* $K^\circ \in (V \to cC^\beta)$.

Доказательство. В силу лемм 2 и 5 имеем $K^\circ \in (lC^\alpha \to cC^\beta) = (lC^\alpha \to lC^\beta)$. Так как $\alpha > 0$, то $V_c \subset lC^\alpha$ (см. [12]) и, следовательно, по лемме 1 получаем $K^\circ \in (V \to cC^\beta)$.

Теорема 11. *Если числа ka_k являются множителями суммируемости типа* $(|C^\alpha|, C^\beta)$ *или* $(|C^\alpha|, |C^\beta|)$, *где* $\alpha > 0$, $\beta \geqslant 0$, *то* $S^\circ \in (dV \to cC^\beta)$.

Доказательство. Из теоремы 10 следует, что

$$\Sigma\, ka_k \cos t \in (V \to cC^\beta).$$

А это имеет место тогда и только тогда, когда ряд

$$\Sigma\, ka_k \frac{d_k}{k} = \Sigma\, a_k d_k$$

C^β-суммируем при каждом $\left(-\frac{d_k}{k}, \frac{c_k}{k}\right) \in V$. Тогда и $\Sigma a_k d_k$ является C^β-суммируемым при каждом $(c_k, d_k) \in dV$, и, следовательно, $S^\circ \in (dV \to cC^\beta)$.

Теоремы 10 и 11 допускают следующие обобщения.

Теорема 12. *Пусть числа a_k являются множителями суммируемости типа* $(|WN, p_k|, C^\beta)$, *где* $\beta \geqslant 0$ *и* $|WN, p_k|$ — *метод абсолютного суммирования Вороного-Нёрлунда, определенного последовательностью* $\{p_k\}$, *удовлетворяющей следующим условиям:*

1° $p_k > 0$ *и* $\{p_k\}$ *монотонна,*

2° $P_n = \sum\limits_{k=0}^{n} p_k \to \infty$ *при* $n \to \infty$,

3° $\left\{\frac{1}{P_n} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{P_k}{k+1}\right\}$ *и* $\left\{(n+1)\frac{p_n}{P_n}\right\}$ *абсолютно сходятся.*

Тогда $K^\circ \in (V \to cC^\beta)$.

Доказательство. Ряд Фурье функции ограниченной вариации $|WN, p_k|$-суммируем, если $\{p_k\}$ удовлетворяет условиям 1°—3° (см. [21, 22]). Поэтому, согласно лемме 1, получаем $K^\circ \in (V \to cC^\beta)$.

Теорема 13. *Если числа ka_k являются множителями суммируемости типа* $(|WN, p_k|, C^\beta)$, *где* $\beta \geqslant 0$ *и* $\{p_k\}$ *удовлетворяет условиям 1°—3°, то* $S^\circ \in (dV \to cC^\beta)$.

Доказательство аналогично как в теореме 11.

Примечание 2. В случае $\beta = 0$ множители суммируемости типа $(|WN, p_k|, C^{\beta})$ найдены Кангро ([2], теорема 3).

Теорема 14. *Если числа* a_k *являются множителями суммируемости типа* $(C^{\alpha}, |C^{\beta}|)$ *или* $(C_0^{\alpha}, |C^{\beta}|)$, *то*

$$K^{\circ} \in \begin{cases} L & \text{при } \alpha, \beta > 0, \\ C_N & \text{при } 0 < \beta \leqslant \alpha. \end{cases}$$

Доказательство. Из лемм 2 и 6 следует, что $(cC^{\alpha} \to lC^{\beta}) = (mC^{\alpha} \to lC^{\beta})$. В силу леммы 1 имеем $(mC^{\alpha} \to lC^{\beta}) \subset (mC^{\alpha} \to cC^{\beta})$, откуда по теореме 6 получаем $K^{\circ} \in (mC^{\alpha} \to cC^{\beta}) \subset L$. Если $0 < \beta \leqslant \alpha$, то из условия (5) леммы 6 заключаем $\Sigma |a_k \cos kt| < \infty$, т. е. $K^{\circ} \in C_N$.

4. Результаты для мультипликаторов

Определение 2. *Последовательность* $\{a_k\}$ *называется мультипликатором класса* (E, E_1), *если* $(a_k c_k, a_k d_k) \in E_1$ *при каждом* $(c_k, d_k) \in E$ (см. [3], стр. 259).

Пользуясь выше доказанными теоремами и уже известными достаточными условиями для мультипликаторов, получаем следующие теоремы.

Теорема 15. *Если числа* a_k *являются множителями суммируемости типа* (C^{α}, C^{β}), *где* $\alpha, \beta > 0$, *то* $\{a_k\}$ *есть мультипликатор классов* (D, dV), (A_0, dV), (V_1, dV), (V_1, V_1), (A_0, A_0), (L, dV), (L, L), (dV, dV), (C, C), (M, M), (C, M) *и* (C_N, C_N).

Доказательство. Из теоремы 1 следует, что $K^{\circ} \in dV$, а это условие является достаточным для того, чтобы $\{a_k\}$ была мультипликатором классов (D, dV), (A_0, dV), (V_1, dV), (V_1, V_1), (A_0, A_0), (L, dV) (см. [5], теоремы 17, 16, 15, 2, 3, 6), (C_N, C_N) (см. [10], теорема 4), (C, C), (L, L), (M, M), (dV, dV) (см. [26], стр. 176; [13]). Как известно, $(L, dV) = (L, L) = (dV, dV)$ и $(C, C) = (M, M) = (C, M)$ (см. [16], стр. 176). Теорема доказана.

Теорема 16. *Если числа* ka_k *являются множителями суммируемости типа* (C^{α}, C^{β}), *где* $\alpha, \beta > 0$, *то* $\{a_k\}$ *есть мультипликатор класса* (dV, V).

Доказательство. Из теоремы 2 следует, что $S^{\circ} \in V$, а это достаточно для того, чтобы $\{a_k\}$ *была мультипликатором класса* (dV, V) (см. [8], теорема 3).

Теорема 17. *Если числа* a_k *являются множителями сходимости для* C^{α}, *где* $\alpha > 0$, *то* $\{a_k\}$ *есть мультипликатор классов* (L, L_N), (C, C_N), $[M, (L \to c)]$, $[C, (L \to c)]$, $[C, (dV \to c)]$, $[dV, (C \to c)]$ и $[L, (C \to c)]$.

Доказательство. Из теоремы 3 следует, что $K^{\circ} \in (C \to c)$, это является достаточным условием для того, чтобы $\{a_k\}$ была мультипликатором классов (L, L_N), (C, C_N) (см. [14], стр. 356) и $[C, (dV \to c)]$ (см. [15], теорема 6). Так как $(C, C_N) = [M, (L \to c)] = [C, (L \to c)]$ (см. [16], стр. 142) и $(L, L_N) = [dV, (C \to c)] = [L, (C \to c)]$ (см. [16], стр. 142), то $\{a_k\}$ есть мультипликатор и для классов $[M, (L \to c)]$, $[C, (L \to c)]$, $[dV, (C \to c)]$, $[L, (C \to c)]$.

Теорема 18. *Если числа ka_k являются множителями сходимости для сходящихся рядов, то $\{a_k\}$ есть мультипликатор классов $(\bar{R}, C)$, (R, C), (A_0, L), (D, L), (V_1, L) и (M, C).*

Доказательство. Из теоремы 5 следует, что $S^\circ \in L$ и $K^\circ \in L$. Если $S^\circ \in L$, то $\{a_k\}$ есть мультипликатор класса $(\bar{R}, C)$ (см. [25]). А если $K^\circ \in L$, то $\{a_k\}$ есть мультипликатор классов (V_1, L), (A_0, L), (D, L) (см. [5], теоремы 15, 16, 17), (M, C) (см. [7], стр. 142) и (R, C) (см. [25]).

Теорема 19. *Если числа a_k являются множителями суммируемости типа $(C_0^\alpha,\ C^\beta)$, где $\alpha, \beta > 0$, то $\{a_k\}$ есть мультипликатор классов (R, C), (A_0, L), (D, L), (V_1, L), (M, C).*

Доказательство. Из теоремы 6 следует, что $K^\circ \in L$. А если $K^\circ \in L$, то $\{a_k\}$ и есть мультипликатор классов (R, C), (A_0, L), (D, L), (V_1, L), (M, C), как это выяснилось в доказательстве теоремы 18.

Теорема 20. *Если числа ka_k являются множителями суммируемости типа (C_0^α, C^β), где $\alpha, \beta > 0$, то $\{a_k\}$ есть мультипликатор класса (dV, A).*

Доказательство. Из теоремы 7 следует, что $S^\circ \in A$. Условие $S^\circ \in A$ достаточно для того, чтобы $\{a_k\}$ была мультипликатором класса (dV, A) (см. [8], теорема 3).

Теорема 21. *Если числа a_k являются множителями сходимости для C_0^α, где $\alpha > 0$, то $\{a_k\}$ есть мультипликатор класса (M, C_N).*

Доказательство. Последовательность $\{a_k\}$ есть мультипликатор класса (M, C_N), если $K^\circ \in (M \to c)$ (см. [15], теорема 5). Но это условие выполнено в силу теоремы 8.

Теорема 22. *Если числа a_k являются множителями суммируемости типа $(|C^\alpha|, |C^\beta|)$ или $(|C^\alpha|, C^\beta)$, где $\alpha, \beta > 0$, то $\{a_k\}$ есть мультипликатор класса $[V, (dV \to cC^\beta)]$.*

Доказательство. Последовательность $\{a_k\}$ является мультипликатором класса $[V, (dV \to cC^\beta)]$, если $K^\circ \in (V \to cC^\beta)$ (см. [16], теорема 5). Но это условие выполнено в силу теоремы 10.

Теорема 23. *Если числа a_k являются множителями сумми-*

руемости типа $(C^\alpha, |C^\beta|)$ *или* $(C_0^\alpha, |C^\beta|)$, *где* $0<\beta\leqslant\alpha$, *то* $\{a_k\}$ *есть мультипликатор класса* (dV, C_N).

Доказательство. Последовательность $\{a_k\}$ является мультипликатором класса (dV, C_N), если $K^\circ \in C_N$ (см. [16], теорема 9). Но это условие выполнено в силу теоремы 14.

Имея в виду леммы 3—6, мы из теорем 15—23 получаем достаточные условия для многих классов мультипликаторов.

Литература

1. Барон С., Новые доказательства основных теорем о множителях суммируемости. Изв. АН Эст. ССР, сер. техн. и физ.-мат. наук, 1960, **9**, 47—69.
2. Кангро Г., Об обобщении одной теоремы Мура. Докл. АН СССР, 1958, **121**, 967—969.
3. Качмаж С., Штейнгауз Г., Теория ортогональных рядов. Москва, 1958.
4. Натансон И. П., Теория функций вещественной переменной. Москва, 1957.
5. Скворцова М. Г., К теории множителей, преобразующих ряды Фурье. Уч. зап. Кабард.-Балкар. ун-та, 1959, **3**, 307—326.
6. Скворцова М. Г., Некоторые теоремы о классах множителей, преобразующих ряды Фурье. Уч. зап. Кабард.-Балкар. ун-та, 1959, **3**, 327—345.
7. Скворцова М. Г., Некоторые новые теоремы о классах множителей, преобразующих ряды Фурье I. Уч. зап. Кабард.-Балкар. ун-та, 1961, **13**, 141—147.
8. Скворцова М. Г., О множителях преобразования рядов Фурье некоторых классов функций. Уч. зап. Кабард.-Балкар. ун-та, 1961, **13**, 147—150.
9. Харди Г. Х., Рогозинский В. В., Ряды Фурье. Москва, 1962.
10. Харшиладзе Ф. И., Множители равномерной сходимости. Тр. Тбилисск. ун-та, 1960, **27**, 195—208.
11. Bosanquet, L. S., Note on convergence and summability factors (III). Proc. London Math. Soc., 1949, **50**, 482—496.
12. Bosanquet, L. S., Note on the absolute summability (C) of a Fourier series. J. London Math. Soc., 1936, **11**, 11—15.
13. Fekete, M., Über Faktorenfolgen, welche die «Klasse» einer Fouriersche Reihe unverändert lassen. Acta Litt. ac Sci. R. Univ. Hung. Franc.-Jos., Szeged, Sect, Sci. Math., 1923, **1**, 148—166.
14. Goes, G., BK-Räume und Matrixtransformationen für Fourierkoeffizienten. Math. Z., 1959, **70**, 345—371.
15. Goes, G., Komplementäre Fourierkoeffizientenräume und Multiplikatoren. Math. Ann., 1959, **137**, 371—384.
16. Goes, G., Charakterisierung von Fourierkoeffizienten mit einem Summierbarkeitsfaktorentheorem und Multiplikatoren. Studia Math., 1960, **19**, 133—148.
17. Goes, G., Identische Multiplikatorenklassen und C_k-Basen in C_k-komplementären Fourierkoeffizientenräumen. Math. Nachr., 1960, **21**, 150—159.
18. Goes, G., Complementary Spaces of Fourier Coefficients, Convolutions, and Generalized Transformations and Operators between BK-spaces. J. Math. and Mech., 1961, **10**, 135—157.
19. Goes, G., Über einige Multiplikatorenklassen. Math. Z., 1963, **80**, 324—327.

20. Köthe, G., Toeplitz, O., Lineare Räume mit unendlichvielen Koordinaten und Ringe unendliche Matrizen. J. reine und angew. Math., 1934, **171**, 193—226.
21. Pati, T., On the absolute Nörlund summability of a Fourier series. J. London Math. Soc., 1959, **34**, 153—160.
22. Pati, T., Addendum: On the absolute Nörlund summability of a Fourier series. J. London Math. Soc., 1962, **37**, 256.
23. Peyerimhoff, A., Über Summierbarkeitsfaktoren und verwandte Fragen bei Cesaroverfahren. Publs. Inst. math. Acad. serbe Sci., 1955, **8**, 139—156; 1956, **10**, 1—18.
24. Schur, I., Über lineare Tranformationen in der Theorie der unendlichen Reihen. J. reine und angew. Math., 1921, **151**, 79—111.
25. Verblunsky, S., On some classes of Fourier series. Proc. London Math. Soc., 1932, **33**, 287—327.
26. Zygmund, A., Trigonometric series. New York, 1959.

Поступило
1 X 1963

SUMMEERUVUSTEGURITE, FOURIER' KORDAJATE JA MULTIPLIKAATORITE VAHELISEST SEOSEST

M. Tõnnov

Resümee

Artiklis [16] on Goes tõestanud, et kui koosinusrea kordajad on summeeruvustegurid tüüpi (C^{α}, C^{α}) või $(C_{0}^{\alpha}, C^{\alpha})$, kus C^{α}on $\alpha > 0$ järku Cesaro menetlus, siis koosinusrida kuulub vastavalt klassi dV või L. Peale selle on artiklis [16] antud ka analoogilisi teoreeme koonduvustegurite korral. Käesolevas artiklis täiendatakse neid tulemusi, kasutatakse selleks teisi summeeruvus- ja koonduvustegurite tüüpe ning Goesi poolt töödes [14, 15, 17, 18] väljatöötatud täiendruumide teooriat. Peale selle antakse artiklis piisavaid tunnuseid multiplikaatorite klasside kohta.

ÜBER DEN ZUSAMMENHANG DER SUMMIERBARKEITSFAKTOREN, FOURIERKOEFFIZIENTEN UND MULTIPLIKATOREN

M. Tõnnov

Zusammenfassung

In dem vorliegenden Artikel wird die in [16] von Goes begonnene Charakterisierung von Fourierkoeffizienten mit Summierbarkeitsfaktoren fortgesetzt, dazu gebraucht man andere Typen von Summierbarkeits — und Konvergenzfaktoren und zieht die in den Arbeiten [14, 15, 17, 18] von Goes eingeführte Theorie komplementärer Fourierkoeffizientenräume heran. Aus den Sätzen über den Fourierkoeffizienten folgert man hinreichende Bedingungen für Multiplikatoren.

О ПРИЗНАКАХ ТИПА ВЕЙЛЯ ДЛЯ АБСОЛЮТНОЙ СУММИРУЕМОСТИ ОРТОГОНАЛЬНЫХ РЯДОВ

С. Барон

Кафедра математического анализа

§ 1. Вводные замечания

Пусть функция $\mu(x)$ положительна, ограничена и монотонно возрастает на конечном отрезке $[a, b]$. Предположим, что почти всюду существующая неотрицательная производная $\mu'(x)$ обращается в нуль только на множестве, мера Лебега которого равна нулю.

Следуя Алексичу [1], введем понятие ортогональности с помощью интеграла Лебега-Стилтьеса.

Вещественная функция $f(x)$ называется L_{μ}^{2}-интегрируемой на $[a, b]$, если (см. [8], стр. 233, 210 и 270) она μ-измерима и

$$\int_{a}^{b} f^{2}(x)\, d\mu(x) < \infty.$$

Система L_{μ}^{2}-интегрируемых функций $\{\varphi_m(x)\}$ называется ортонормированной, если [1]

$$\int_{a}^{b} \varphi_m(x)\varphi_k(x)\, d\mu(x) = \delta_{mk}. \tag{1}$$

Пусть $\{c_m\}$ — последовательность вещественных чисел, а $\{\varphi_m(x)\}$ — ортонормированная система. Тогда ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m \varphi_m(x) \tag{2}$$

называется ортогональным рядом по системе $\{\varphi_m(x)\}$.

Нашей основной целью является нахождение признаков типа

---

[1] Символ $\delta_{mk} = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad m = k, \\ 0 & \text{при} \quad m \neq k. \end{cases}$

Вейля (см. [2], стр. 331) для абсолютной суммируемости почти всюду ортогональных рядов. Именно, находятся условия для функции $W(m)$, чтобы ряд (2) был почти всюду на $[a, b]$ абсолютно суммируемым методом Чезаро (C, α) любого комплексного порядка α с $\mathrm{Re}\alpha > -1$ или методом взвешенных средних Рисса P всякий раз, когда

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m^2 W(m) < \infty. \tag{3}$$

Аналогичные вопросы решаются и для двойных рядов. Получаемые результаты применяются для доказательства теорем о множителях абсолютной суммируемости ортогональных рядов.

Для метода логарифмических средних рассматриваемые нами вопросы исследовались, в случае тригонометрических рядов

$$\sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos mx + b_m \sin mx), \tag{4}$$

в статье Идзуми-Кавата [14].

Для дальнейшего введем обозначения

$$v(m, \alpha) = v_m(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad \alpha > \frac{1}{2}, \\ \ln(m+1) & \text{при} \quad \alpha = \frac{1}{2}, \\ (m+1)^{1-2\alpha} & \text{при} \quad -1 < \alpha < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Для рядов (4) известна следующая теорема Ванга ([18, 20] для $\alpha > \frac{1}{2}$, [20] для $0 < \alpha \leqslant \frac{1}{2}$):

Если для некоторого $\gamma > 0$

$$\sum_{m=2}^{\infty} (a_m^2 + b_m^2) v_m(\alpha) \ln^{1+\gamma} m < \infty,$$

то ряд (4) *суммируем* $|C, \alpha|$ *при любом* $\alpha > 0$ *почти для всех* x.

Как показал Цутикура [17], теорема Ванга остается в силе, если в ней ряд (4) заменить рядом (2) с $\mu(x) = x$.

Для двойных тригонометрических рядов теорему Ванга при $\alpha > \frac{1}{2}$ обобщил Жак [6], а при $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ — Жак и Тиман [7].

В теореме Ванга нельзя положить $\gamma = 0$. Для случая $\alpha > \frac{1}{2}$ это доказали Ванг [19, 20] и затем Цутикура [17], для $\alpha = \frac{1}{2}$ — Цутикура [17], а для $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ — Ванг [20]. В статье [7] аналогичное показано и для двойных тригонометрических рядов.

Таким образом, мы видим, что уже в случае рядов (4), а, тем более, в случае рядов (2) порядок функции Вейля $W(m)$ для абсолютной суммируемости почти всюду методом Чезаро нельзя понизить до $v(m, \alpha)\ln(m+1)$.

В своей статье [13] Ульянов нашел признаки типа Вейля для $|C, \alpha|$-суммируемости почти всюду рядов (2) в случае $\alpha > 0$ и $\mu(x) = x$. Однако представляет интерес рассматривать признаки типа Вейля для $|C, \alpha|$-суммируемости почти всюду рядов (2) и в случае произвольного комплексного α с $\operatorname{Re}\alpha > -1$, ибо, как показал Волков [5], любые методы (C, α_1) и (C, α_2) с $\operatorname{Re}\alpha_1 = \operatorname{Re}\alpha_2$ и $\alpha_1 \neq \alpha_2$ несравнимы. В § 8 настоящей статьи мы покажем, что этот результат Волкова справедлив и для абсолютной суммируемости.

§ 2. Основные леммы и неравенства

Наряду с неравенством Буняковского-Шварца

$$\left\{\int_a^b |f(x)g(x)|\,d\mu(x)\right\}^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\,d\mu(x)\cdot\int_a^b g^2(x)\,d\mu(x), \qquad (5)$$

действительным для любых $f(x), g(x) \in L_\mu^2$ (см. [1], стр. 17), и с неравенством

$$|a+b|^{\frac{1}{2}} \leqslant |a|^{\frac{1}{2}} + |b|^{\frac{1}{2}}, \qquad (6)$$

справедливым для любых чисел a и b (см. [2], стр. 31), большое значение в дальнейших выкладках имеют следующие леммы.

Лемма 1. *Если все функции последовательности* $\{u_m(x)\}$ *являются* L_μ*-интегрируемыми и*

$$\sum_{m=0}^{\infty}\int_a^b |u_m(x)|\,d\mu(x) < \infty,$$

то ряд $\sum\limits_{m=0}^{\infty} u_m(x)$ *абсолютно сходится почти всюду на* $[a, b]$.

Доказательство см. [1], стр. 19.

В дальнейшем *всюду полагаем* $\sigma = \operatorname{Re}\alpha$, $\tau = \operatorname{Re}\beta$, а также (обычно не отмечая это) применяем формулу

$$A_m^\alpha \sim \frac{m^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \qquad (\alpha \neq -1, -2, \ldots),$$

откуда

$$(A_m^\alpha)^{-1} = O(m^{-\alpha}) \quad (\alpha \neq -1, -2, \ldots) \text{ и } A_m^\alpha = O(m^\alpha).$$

Лемма 2. *Пусть* $u(m)$ — *положительная функция, такая, что* $\frac{1}{m}u(m)$ *не возрастает. Тогда для любого* $\sigma > -1$ *и всех* $k \geqslant 1$ *имеет место неравенство*

$$S_k = \sum_{m=k}^{\infty} |A_{m-k}^{\alpha-1}|^2 m^{-2\sigma-1} u(m) = O[u(k)\, v(k,\sigma) k^{-2}].$$

Доказательство. Если $\sigma > \frac{1}{2}$, то из формулы (7) статьи [4] выводим

$$S_k \leqslant \frac{u(k)}{k} \sum_{m=k}^{\infty} \left| \frac{A_{m-k}^{\alpha-1}}{A_m^{\alpha}} \right|^2 = O\left[\frac{u(k)}{k}\right] \sum_{m=k}^{\infty} \frac{A_{m-k}^{2\sigma-2}}{A_m^{2\sigma}} = O\left[\frac{u(k)}{k^2}\right];$$

если $\sigma = \frac{1}{2}$, то

$$S_k = O\left[\frac{u(k)}{k}\right] \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m(m+k)} = O\left[\frac{u(k)}{k^2}\right] \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+k}\right) =$$

$$= O\left[\frac{u(k)}{k^2}\right] \sum_{s=1}^{k} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{m+s-1} - \frac{1}{m+s}\right) = O\left[\frac{u(k)}{k^2}\right] \sum_{s=1}^{k} \frac{1}{s} = O\left[\frac{u(k)}{k^2} \ln k\right];$$

если $0 \leqslant \sigma < \frac{1}{2}$, то

$$S_k \leqslant \frac{u(k)}{k\,|A_k^{\alpha}|^2} \sum_{m=k}^{\infty} |A_{m-k}^{\alpha-1}|^2 = O[u(k)\, k^{-1-2\sigma}];$$

если $-\frac{1}{2} \leqslant \sigma < 0$, то $1 + 2\sigma \geqslant 0$, $2 - 2\sigma > 2$, и поэтому

$$S_k = O\left[\frac{u(k)}{k}\right] \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m+k}{m^{2-2\sigma}(m+k)^{1+2\sigma}} =$$

$$= O\left[\frac{u(k)}{k^{2+2\sigma}}\right] \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{1-2\sigma}} + k \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{2-2\sigma}} \right) = O\left[\frac{u(k)}{k^{1+2\sigma}}\right];$$

если, наконец $-1 < \sigma < -\frac{1}{2}$, то $2 + 2\sigma > 0$, $2 - 2\sigma > 3$, и, следовательно,

$$S_k = O\left[\frac{u(k)}{k}\right] \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(m+k)^2}{m^{2-2\sigma}(m+k)^{2+2\sigma}} =$$

$$= O\left[\frac{u(k)}{k^{3+2\sigma}}\right] \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{-2\sigma}} + 2k \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{2-2\sigma}} + k^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{2-2\sigma}} \right) = O\left[\frac{u(k)}{k^{1+2\sigma}}\right].$$

Лемма 2 при $0 < \alpha \neq \frac{1}{2}$ и $u(m) = o(m)$ доказана в статье [7], стр. 47—49.

§ 3. Теоремы относительно метода Чезаро

Следующие теоремы дают признаки абсолютной суммируемости типа Вейля для ортогональных рядов.

Теорема 1. *Если функция*

$$w(m) = \frac{W(m)}{v(m, \sigma)}$$

положительна и не убывает, причем удовлетворяет условию

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m w(m)} < \infty, \tag{7}$$

то всякий ряд (2) *суммируем* $|C, \alpha|$ *при любом* $\sigma > -1$ *почти всюду на* $[a, b]$, *как только выполнено условие* (3).

Доказательство. Как показал Ульянов ([13], стр. 46), условие (7) можно заменить условием

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m w(\sqrt{m})} < \infty. \tag{8}$$

Обозначим

$$t_m(x) = \sum_{k=1}^{m} \frac{A_{m-k}^{\alpha-1}}{m A_m^{\alpha}} k c_k \varphi_k(x).$$

В силу (5) и (1), получаем, обозначая (здесь и всюду в дальнейшем) $M = [\sqrt{m}]$,

$$\left(\int_a^b |t_m(x)| d\mu(x)\right)^2 \leqslant [\mu(b) - \mu(a)] \int_a^b |t_m(x)|^2 d\mu(x) =$$

$$= O(m^{-2\sigma-2}) \int_a^b \Big[\sum_{k=1}^{m} | A_{m-k}^{\alpha-1} k c_k|^2 \varphi_k^2(x) +$$

$$+ 2 \Big| \sum_{p \neq q} \gamma_p \gamma_q \varphi_p(x) \varphi_q(x) \Big| \Big] d\mu(x) =$$

$$= O(m^{-2\sigma-2}) \sum_{k=1}^{m} | A_{m-k}^{\alpha-1} |^2 k^2 c_k^2 \tag{9}$$

$$= O(m^{-2\sigma-2}) \Big(\sum_{k=1}^{M} | A_{m-k}^{\alpha-1} |^2 k^2 c_k^2 + \sum_{k=M}^{m} | A_{m-k}^{\alpha-1} |^2 k^2 c_k^2 \Big). \tag{10}$$

На основе леммы 1 теорема 1 будет доказана, если покажем, что

$$\mathrm{I} = \sum_{m=1}^{\infty} \int_a^b |t_m(x)| d\mu(x) < \infty.$$

Последний ряд, соответственно вытекающему из (10) и (6) неравенству

$$\int_a^b |t_m(x)|\,d\mu(x)=O(m^{-\sigma-1})\left\{\left(\sum_{k=1}^{M}|A_{m-k}^{\alpha-1}|^2 k^2c_k^2\right)^{\frac{1}{2}}+\right.$$

$$\left.+\left(\sum_{k=M}^{m}|A_{m-k}^{\alpha-1}|^2 k^2c_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\},$$

разделим на две части и оценим каждую из них в отдельности.

Для первой части, в силу (3) и неубывания $W(m)$, имеем

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{M}|A_{m-k}^{\alpha-1}|^2 k^2c_k^2 &= O(m^{2\sigma-2})\sum_{k=1}^{M}\left(1-\frac{k}{m}\right)^{2\sigma-2}k^2c_k^2=\\ &=O(m^{2\sigma-1})\sum_{k=1}^{M}c_k^2\\ &=O(m^{2\sigma-1}),\end{aligned}\tag{11}$$

ибо, если даже $2\sigma-2<0$, то при $m>1$ мы вправе писать

$$\left(1-\frac{k}{m}\right)^{2\sigma-2}=\left(\frac{m}{m-k}\right)^{2-2\sigma}\leqslant\left(\frac{m}{m-\sqrt{m}}\right)^{2-2\sigma}=O(1),$$

а в итоге

$$\sum_{m=1}^{\infty}m^{-\sigma-1}\left(\sum_{k=1}^{M}|A_{m-k}^{\alpha-1}|^2k^2c_k^2\right)^{\frac{1}{2}}=\sum_{m=1}^{\infty}m^{-\sigma-1}O(m^{\sigma-\frac{1}{2}})=$$

$$=O(1)\sum_{m=1}^{\infty}m^{-1,5}<\infty.$$

Для второй части, учитывая, что $w(m)$ не убывает, применяя неравенство Гельдера ([1], стр. 33) и лемму 2, из условий (8) и (3) заключаем

$$\sum_{m=1}^{\infty}m^{-\sigma-1}\left(\sum_{k=M}^{m}|A_{m-k}^{\alpha-1}|^2k^2c_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{mw(M)}}m^{-\sigma-\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=M}^{m}|A_{m-k}^{\alpha-1}|^2k^2c_k^2w(k)\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant$$

$$\leqslant\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{mw(M)}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{m=1}^{\infty}m^{-2\sigma-1}\sum_{k=M}^{m}|A_{m-k}^{\alpha-1}|^2k^2c_k^2w(k)\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=O(1)\left(\sum_{m=1}^{\infty}m^{-2\sigma-1}\sum_{k=1}^{m}|A_{m-k}^{\alpha-1}|^2k^2c_k^2w(k)\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=O(1)\left(\sum_{k=1}^{\infty}k^2c_k^2w(k)\sum_{m=k}^{\infty}|A_{m-k}^{\alpha-1}|^2m^{-2\sigma-1}\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=O(1)\left(\sum_{k=1}^{\infty}c_k^2W(k)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Теорема 2. *Если положительная функция $W(m)$ удовлетворяет условию* (7), *причем*

$$\frac{w(m)}{m}=\frac{W(m)}{mv(m,\sigma)} \text{ не возрастает,}$$

то всякий ряд (2) *суммируем* $|C,\alpha|$ *при любом* $\sigma>-1$ *почти всюду на* $[a,b]$, *как только выполнено условие* (3).

Доказательство. Воспользуясь неравенством Гельдера и леммой 2, положив в ней $u(m)=w(m)$, из неравенства (9) выводим

$$\mathrm{I}=O(1)\sum_{m=1}^{\infty} m^{-\sigma-1}\Big(\sum_{k=1}^{m}|A_{m-k}^{\alpha-1}|^2k^2c_k^2\Big)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=O(1)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{mw(m)}}\Big(\frac{w(m)}{m}m^{-2\sigma}\sum_{k=1}^{m}|A_{m-k}^{\alpha-1}|^2k^2c_k^2\Big)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=O(1)\Big(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{mw(m)}\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{m=1}^{\infty}w(m)m^{-2\sigma-1}\sum_{k=1}^{m}|A_{m-k}^{\alpha-1}|^2k^2c_k^2\Big)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=O(1)\Big(\sum_{k=1}^{\infty}k^2c_k^2\sum_{m=k}^{\infty}|A_{m-k}^{\alpha-1}|^2m^{-2\sigma-1}w(m)\Big)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=O(1)\Big(\sum_{k=1}^{\infty}c_k^2W(k)\Big)^{\frac{1}{2}}<\infty.$$

Теоремы 1 и 2 взаимно независимы. Из теоремы 1 не следует теорема 2, что показывает пример $w(m)=m^2$. Наоборот, из теоремы 2 не вытекает теорема 1, в чем убеждает пример $w(2k)=\sqrt{2k}$, $w(2k+1)=\sqrt{2k+2+\frac{1}{2k+1}}$, сообщенный автору доцентом Я. А. Габовичем.

Из теорем 1 и 2 выводим следующие теоремы для множителей абсолютной суммируемости ортогональных рядов методом Чезаро.

Теорема 3. *Если ряд* (2) *удовлетворяет условию*

$$\sum_{m=0}^{\infty}c_m^2<\infty, \tag{12}$$

а последовательность чисел ε_m — *условиям:*

$$v_m(\sigma)|\varepsilon_m|^2 \text{ не возрастает,}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m+1}v_m(\sigma)|\varepsilon_m|^2<\infty, \tag{13}$$

то почти для всех x *из* $[a,b]$ *ряд*

$$\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_mc_m\varphi_m(x) \tag{14}$$

суммируем $|C,\alpha|$ *при любом* $\sigma>-1$.

Доказательство. Положив $W(m) = |\varepsilon_m|^{-2}$, получаем, что для ряда (14) выполнены условия теоремы 1, ибо, как видно из (12), в нашем случае

$$\sum_{m=0}^{\infty} |\varepsilon_m c_m|^2 W(m) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m^2 < \infty.$$

Аналогично из теоремы 2 следует

Теорема 4. *Если ряд* (2) *удовлетворяет условию* (12), *а последовательность чисел* ε_m — *условию* (13), *причем* $m v_m(\sigma) |\varepsilon_m|^2$ *не убывает, то почти для всех* x *из* $[a, b]$ *ряд* (14) *суммируем* $|C, \alpha|$ *при любом* $\sigma > -1$.

В случае рядов (4) при $\alpha > \frac{1}{2}$ и $\varepsilon_m = \ln^{-\frac{1}{2}-\gamma}(m+1), \gamma > 0$, из теоремы 3 (или 4) получаем результат Пати ([16], теорема 4).

§ 4. Теоремы относительно метода взвешенных средних Рисса

Пусть всюду в дальнейшем метод P, определенный последовательностью p_m, *сохраняет абсолютную сходимость*, т. е. (см. [9], стр. 193 и 196) удовлетворяет условию[2]

$$P_{k-1} \sum_{m=k}^{\infty} \left| \frac{p_m}{P_{m-1} P_m} \right| = O(1), \quad (k = 0, 1, \ldots). \tag{15}$$

Теорема 5. *Если положительная функция* $W(m)$ *удовлетворяет условиям:*

$$\frac{W(m)}{|P_{m-1}|} \text{ не возрастает,}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left| \frac{p_m}{P_m} \right| \frac{1}{W(m)} < \infty,$$

то всякий ряд (2) *почти всюду на* $[a, b]$ *суммируем* $|P|$, *как только выполнено условие* (3).

Доказательство. Аналогично, как в доказательстве теоремы 2, мы, учитывая (15), вправе писать

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left| \frac{p_m}{P_m P_{m-1}} \right| \left(\sum_{k=1}^{m} |P_{k-1}|^2 c_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \left| \frac{p_m}{P_m W(m)} \right|^{\frac{1}{2}} \left(\left| \frac{p_m W(m)}{P_m P_{m-1}^2} \right| \sum_{k=1}^{m} |P_{k-1}|^2 c_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

---

[2] Здесь и всюду в дальнейшем полагаем $\frac{0}{0} = 1$, $P_{-1} = 0$.

$$\leqslant \left(\sum_{m=1}^{\infty} \left| \frac{p_m}{P_m} \right| \frac{1}{W(m)} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \left| \frac{p_m W(m)}{P_m P_{m-1}^2} \right| \sum_{k=1}^{m} |P_{k-1}|^2 c_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= O(1) \left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \, |P_{k-1}|^2 \sum_{m=k}^{\infty} \left| \frac{p_m}{P_m P_{m-1}^2} \right| W(m) \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= O(1) \left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 W(k) \, |P_{k-1}| \sum_{m=k}^{\infty} \left| \frac{p_m}{P_m P_{m-1}} \right| \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= O(1) \left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 W(k) \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Для случая тригонометрических рядов Фурье из теоремы 5 при $W(m) = L_m$, где $L_{m-1} = \ln_2 m \cdot \ln_3 m \cdot \ldots \cdot \ln_s m \cdot \ln_{s+1}^{1+\varepsilon} m$, $\varepsilon > 0$, $\ln_2 m = \ln \ln m$, $\ln_s m = \ln \ln_{s-1} m$ $(s \geqslant 2)$, получаем результат Идзуми-Кавата ([14], теорема 4) относительно метода логарифмических средних $\left(\text{т. е. для } p_m = \frac{1}{m+1} \right)$.

Из теоремы 5 вытекает

Теорема 6. *Если ряд* (2) *удовлетворяет условию* (12), *а последовательность чисел* ε_m — *условиям*:

$$|P_{m-1}\varepsilon_m^2| \text{ не убывает},$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left| \frac{p_m}{P_m} \varepsilon_m^2 \right| < \infty,$$

то почти всюду на $[a, b]$ *ряд* (14) *суммируем* $|P|$.

Для случая тригонометрических рядов Фурье из теоремы 6 при $\varepsilon_m = L_m^{-\frac{1}{2}}$ получаем результат Идзуми-Кавата ([14], теорема 5) относительно метода логарифмических средних.

§ 5. О двойных ортогональных рядах

Пусть $\mu(x, y)$ — положительная ограниченная функция двух переменных на конечном прямоугольнике $Q = [a, b;\ c, d]$, и соответствующая ей функция сегмента $\mu(I)$ для любого $I = [x_1, x_2;\ y_1, y_2] \subset Q$ удовлетворяет условию

$$\mu(I) = \mu(x_1, y_1) - \mu(x_1, y_2) - \mu(x_2, y_1) + \mu(x_2, y_2) \geqslant 0.$$

Предположим, что почти всюду на Q существующая неотрицательная обобщенная производная ([12], стр. 97, 102, 162—163 и 176) $D\mu(S)$, функции множества $\mu(S)$, обращается в нуль лишь на множестве лебеговой меры нуль.

В частности, перечисленным условиям удовлетворяет, например, функция $\mu(x, y) = \mu_1(x)\mu_2(y)$, если $\mu_1(x)$ на отрезке $[a, b]$ и $\mu_2(y)$ на отрезке $[c, d]$ положительны, ограничены и монотонно возрастают, причем их производные обращаются в нуль только на множествах с мерой Лебега нуль.

Вещественная функция $f(x,y)$ двух переменных называется L^2_μ-интегрируемой на прямоугольнике Q, если (см. [8], стр. 68, 70—71 и 270) она на нем μ-измерима и

$$\int_Q f^2(x,y)\,d\mu(S) = \iint_Q f^2(x;y)\,d\mu(x,y) < \infty.$$

Двойная система L^2_μ-интегрируемых функций $\{\varphi_{mn}(x,y)\}$ называется ортонормированной, если

$$\int_Q \varphi_{mn}(x,y)\varphi_{kl}(x,y)\,d\mu(S) = \delta_{mk}\delta_{nl}. \tag{16}$$

Пусть $\{c_{mn}\}$ — двойная последовательность вещественных чисел, а $\{\varphi_{mn}(x,y)\}$ — двойная ортонормированная система. Тогда двойной ряд

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} c_{mn}\varphi_{mn}(x,y) \tag{17}$$

называется двойным ортогональным рядом по системе $\{\varphi_{mn}(x,y)\}$.

Отметим, что для любых $f(x,y)$, $g(x,y) \in L^2_\mu$ имеет место неравенство Буняковского-Шварца (см. [8], стр. 271)

$$\left\{\int_Q |f(x,y)g(x,y)|\,d\mu(S)\right\}^2 \leqslant \int_Q f^2(x,y)\,d\mu(S)\cdot\int_Q g^2(x,y)\,d\mu(S). \tag{18}$$

Также имеет место следующая лемма, частный случай $\mu(x,y) = xy$ которой имеется в статье [7], стр. 45.

Лемма 3. *Если все функции двойной последовательности $\{u_{mn}(x,y)\}$ являются L_μ-интегрируемыми и*

$$\sum_{m,n=0}^{\infty}\int_Q |u_{mn}(x,y)|\,d\mu(S) < \infty, \tag{19}$$

то двойной ряд $\sum\limits_{m,n=0}^{\infty} u_{mn}(x,y)$ абсолютно сходится почти всюду на Q.

Доказательство. Расположив члены двойного ряда (19) (ввиду их неотрицательности) по какому-либо правилу в простой ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\int\limits_Q |u_k(x,y)|\,d\mu(S)$, из условий леммы 3 заключаем (по теореме (m) из [8], стр. 212), что $\int\limits_Q \sum\limits_{k=0}^{\infty}|u_k(x,y)|\,d\mu(S) < \infty$, откуда (по теореме 0 из [8], стр. 199) вытекает, что μ-почти всюду на Q будет $\sum\limits_{k=0}^{\infty}|u_k(x,y)| = \sum\limits_{m,n=0}^{\infty}|u_{mn}(x,y)| < \infty$.

Чтобы последнее заключение имело место почти всюду, остается доказать, что при наших предположениях относительно функции $\mu(x, y)$ всякое множество μ-меры нуль имеет и меру Лебега нуль.

Действительно, пусть $B \subset Q$ — произвольное множество с μ-мерой $\mu(B)$, равной нулю. Тогда (см. [8], стр. 202; [12], стр. 182—184), обозначив через $\Psi(S)$ абсолютно непрерывную часть лебеговского разложения функции $\mu(S)$, имеем:

$$0 = \mu(B) = \int_B d\mu(S) \geqslant \int_B D\Psi(S)\,dS.$$

Интеграл справа в последнем неравенстве, учитывая, что $D\Psi(S) = D\mu(S) > 0$ почти всюду на B, может обратиться в нуль лишь в том случае, когда мера Лебега множества B равна нулю. Лемма доказана.

§ 6. Теоремы относительно метода Чезаро для двойных ортогональных рядов

Теорема 7. *Если функция*

$$w(m, n) = \frac{W(m, n)}{v(m, \sigma)\, v(n, \tau)}$$

положительна и не убывает[3], *причем*

$$\sum_{m, n=0}^{\infty} \frac{1}{(m+1)(n+1)\, w(m, n)} < \infty, \tag{20}$$

то всякий двойной ряд (17) *суммируем* $|C, \alpha, \beta|$ *при любых* $\sigma, \tau > -1$ *почти всюду на* Q, *как только*

$$\sum_{m, n=0}^{\infty} c_{mn}^2 W(m, n) < \infty. \tag{21}$$

Доказательство. При помощи интегрального признака сходимости двойных рядов (см., например, [3], стр. 15) обнаруживаем, что условие (20) можно заменить условием

$$\sum_{m, n=0}^{\infty} \frac{1}{(m+1)(n+1)\, w(\sqrt{m}, \sqrt{n})} < \infty. \tag{22}$$

Обозначим

$$t_{mn}(x, y) = \sum_{k, l=0}^{m, n} \frac{A_{m-k}^{\alpha-1} A_{n-l}^{\beta-1}}{mnA_m^{\alpha} A_n^{\beta}}\, kl\, c_{kl}\, \varphi_{kl}(x, y).$$

---

[3] Монотонность функции двух переменных означает ее монотонность по каждой из переменных при фиксированной другой.

В силу (18) и (16) и теоремы 2 из [8], стр. 202, аналогично, как в доказательстве теоремы 1, обозначая также $N=[\sqrt{n}]$, получаем

$$\Big(\int_Q |t_{mn}(x,y)|\,d\mu(S)\Big)^2 = O(1)\int_Q |t_{mn}(x,y)|^2 d\mu(S) =$$

$$= O(1)\,(A_m^{2\sigma} A_n^{2\tau})^{-1} \sum_{k,\,l=0}^{m,\,n} |A_{m-k}^{\alpha-1} A_{n-l}^{\beta-1}|^2 k^2 l^2 c_{kl}^2 =$$

$$= O(1)\,(A_m^{2\sigma} A_n^{2\tau})^{-1} \Big(\sum_{k,\,l=0}^{M,\,N} + \sum_{k,l=M,0}^{m,\,N} + \sum_{k,l=0,N}^{M,\,n} + \sum_{k,l=M,N}^{m,\,n}\Big),$$

откуда, дважды применяя неравенство (6), заключаем, что

$$\int_Q |t_{mn}(x,y)|\,d\mu(S) = O(1)\,(A_m^{\sigma} A_n^{\tau})^{-1}\Big[\Big(\sum_{k,\,l=0}^{M,\,N}\Big)^{\frac{1}{2}} + \Big(\sum_{k.\,l=0,\,N}^{M,\,n}\Big)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+\Big(\sum_{k,\,l=M,\,0}^{m,\,N}\Big)^{\frac{1}{2}} + \Big(\sum_{k,\,l=M,\,N}^{m,\,n}\Big)^{\frac{1}{2}}\Big].$$

Воспользуемся леммой 3. Для этого, учитывая последнее соотношение, разделим ряд

$$\sum_{m,\,n=0}^{\infty} \int_Q |t_{mn}(x,y)|\,d\mu(S)$$

на четыре части и оценим каждую из них в отдельности. Однако, в силу того, что оценка первой и четвертой частей производится аналогично, как в доказательстве теоремы 1, и оценки второй и третьей частей аналогичны друг другу, мы приведем лишь оценку второй части.

Действительно, учитывая (11) и неубывание $w(0,n)$, а также применяя неравенство Гельдера и лемму 2, из условий (22) и (21) выводим

$$\sum_{m,\,n=0}^{\infty} (mnA_m^{\sigma} A_n^{\tau})^{-1}\Big(\sum_{k,\,l=0,\,N}^{M,\,n} |A_{m-k}^{\alpha-1} A_{n-l}^{\beta-1}|^2 k^2 l^2 c_{kl}^2\Big)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= O(1)\sum_{m,n=0}^{\infty} (nA_m^{\sigma} A_n^{\tau})^{-1} (m+1)^{\sigma-\frac{3}{2}} \sum_{k,\,l=0,\,N}^{M,\,n} |A_{n-l}^{\beta-1}|^2 l^2 c_{kl}^2\Big)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= O(1)\sum_{m=0}^{\infty}(m+1)^{-1,5}\sum_{n=0}^{\infty}(nA_n^{\tau})^{-1}\Big(\sum_{l=N}^{n}|A_{n-l}^{\beta-1}|^2 l^2 \sum_{k=0}^{M} c_{kl}^2\Big)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= O(1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(n+1)\,w\,(0,N)}}(n+1)^{-\tau-\frac{1}{2}}\,\cdot$$

$$\cdot\Big(\sum_{l=N}^{n}|A_{n-l}^{\beta-1}|^2 l^2 w\,(0,l)\sum_{k=0}^{\infty} c_{kl}^2\Big)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= O(1)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\,w(0,N)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{-2\tau-1}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\sum_{l=0}^{n}|A_{n-l}^{\beta-1}|^2\, l^2 w(0,l)\sum_{k=0}^{\infty}c_{kl}^2\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= O(1)\left(\sum_{k,\,l=0}^{\infty} l^2 w(0,l)\, c_{kl}^2 \sum_{n=l}^{\infty}|A_{n-l}^{\beta-1}|^2 (n+1)^{-2\tau-1}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= O(1)\left(\sum_{k,\,l=0}^{\infty} c_{kl}^2\, W(0,l)\right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Из теоремы 7 при $\alpha, \beta > \frac{1}{2}$ и $W(m,n) = \ln^{1+\gamma}(m+1)\cdot\ln^{1+\delta}(n+1)$, $\gamma, \delta > 0$, получаем результат Жака ([6], теорема 3) для двойных тригонометрических рядов.

Теорема 8. *Если положительная функция* $W(m,n)$ *удовлетворяет условию* (20), *причем*

$$\frac{w(m,n)}{m\,n}, \quad \frac{w(m,0)}{m} \quad \text{и} \quad \frac{w(0,n)}{n}$$

не возрастают^3, *то всякий двойной ряд* (17) *суммируем* $|C,\alpha,\beta|$ *при любых* $\sigma, \tau > -1$ *почти всюду на* Q, *как только выполнено условие* (21).

Доказательство аналогично теореме 2 (ср. [7], стр. 46—47). При этом надо в отдельности доказывать сходимость рядов

$$\sum_{m,n=1}^{\infty}\int_Q |t_{mn}(x,y)|\,d\mu(S), \quad \sum_{n=1}^{\infty}\int_Q |t_{0n}(x,y)|\,d\mu(S) \text{ и } \sum_{m=1}^{\infty}\int_Q |t_{m0}(x,y)|\,d\mu(S).$$

Что касается доказательства сходимости последнего ряда, то оно совпадает с доказательством теоремы 2, если в ней $w(m)$ заменить на $w(m,0)$.

Теорема 8 в случае двойных тригонометрических рядов при $0 < \alpha, \beta \neq \frac{1}{2}$ дает результаты Жака-Тимана ([7], § 5, теоремы 1—4).

Из теорем 7 и 8 вытекают следующие теоремы для множителей абсолютной суммируемости методом Чезаро двойных ортогональных рядов.

Теорема 9. *Если двойной ряд* (17) *удовлетворяет условию*

$$\sum_{m,\,n=0}^{\infty} c_{mn}^2 < \infty, \tag{23}$$

а двойная последовательность чисел ε_{mn} — *условиям:*

$$v_m(\sigma)\, v_n(\tau)\, |\varepsilon_{mn}|^2 \ \text{не возрастает}^3,$$

$$\sum_{m,\,n=0}^{\infty} \frac{1}{(m+1)(n+1)} v_m(\sigma)\, v_n(\tau)\, |\varepsilon_{mn}|^2 < \infty, \tag{24}$$

то почти всюду на Q двойной ряд

$$\sum_{m,\,n=0}^{\infty} \varepsilon_{mn} c_{mn} \varphi_{mn}(x, y) \tag{25}$$

суммируем $|C, \alpha, \beta|$ при любых $\sigma, \tau > -1$.

Теорема 10. *Если двойной ряд (17) удовлетворяет условию (23), а двойная последовательность чисел ε_{mn} — условию (24), причем*

$$mn v_m(\sigma)\, v_n(\tau)\, |\varepsilon_{mn}|^2, \quad m v_m(\sigma)\, |\varepsilon_{m0}|^2 \quad \text{и} \quad n v_n(\tau)\, |\varepsilon_{0n}|^2$$

не убывают[3], *то почти всюду на Q двойной ряд (25) суммируем $|C, \alpha, \beta|$ при любых $\sigma, \tau > -1$.*

§ 7. Теоремы относительно метода взвешенных средних Рисса для двойных ортогональных рядов

Пусть в дальнейшем факторизируемый метод P, определенный двойной последовательностью $p_{mn} = p_m p'_n$, *сохраняет абсолютную сходимость*, т. е. (см. [10], стр. 156) удовлетворяет условию

$$P_{k-1,\,l-1} \sum_{m,\,n=k,\,l}^{\infty} \left| \frac{p_{mn}}{P_{mn} P_{m-1,\,n-1}} \right| = O(1) \qquad (k,\ l = 0,\ 1,\ \ldots).$$

Для метода P имеют место следующие теоремы.

Теорема 11. *Если положительная функция $W(m, n)$ удовлетворяет условиям:*

$$\frac{W(m,\ n)}{|P_{m-1,\,n-1}|}, \quad \frac{W(m,\ 0)}{|P_{m-1}|} \ \text{и} \ \frac{W(0,\ n)}{|P_{n-1}|} \ \textit{не возрастают}^{3},$$

$$\sum_{m,\,n=0}^{\infty} \left| \frac{p_{mn}}{P_{mn}} \right| \frac{1}{W(m,\ n)} < \infty,$$

то всякий двойной ряд (17) почти всюду на Q суммируем $|P|$, как только выполнено условие (21).

Доказательство аналогично доказательству теорем 5 и 8.

Из теоремы 11 вытекает

Теорема 12. *Если двойной ряд (17) удовлетворяет условию (23), а двойная последовательность чисел ε_{mn} — условиям:*

$$|P_{m-1,\,n-1}\varepsilon_{mn}^2|, \ |P_{m-1}\varepsilon_{m0}^2| \ \text{и} \ |P'_{n-1}\varepsilon_{0n}^2| \ \textit{не убывают}^{3},$$

$$\sum_{m,\,n=0}^{\infty} \left| \frac{p_{mn}}{P_{mn}} \varepsilon_{mn}^{2} \right| < \infty,$$

то почти всюду на Q *двойной ряд* (25) *суммируем* $|P|$.

§ 8. К вопросу абсолютной суммируемости рядов методом Чезаро

Теорема 13. *Для любых комплексных чисел* $\alpha_1 \neq \alpha_2$, *удовлетворяющих условию* $\mathrm{Re}\alpha_1 = \mathrm{Re}\alpha_2 > -1$, *можно построить ряд, суммируемый* $|C, \alpha_1|$ *и не суммируемый* $|C, \alpha_2|$.

Доказательство. Обозначим (C, α)-средние последовательности $\{mu_m\}$ через τ_m^{α}; тогда $\frac{1}{m}\tau_m^{\alpha}$ суть (C, α)-средние ряда $\sum\limits_{m=0}^{\infty} u_m$ в виде преобразования ряда в ряд. Теорема будет доказана, если установим, что матрица преобразования

$$\frac{\tau_m^{\alpha_2}}{m} = \sum_{k=1}^{m} \overline{a}_{mk} \frac{\tau_k^{\alpha_1}}{k},$$

где

$$\overline{a}_{mk} = \frac{kA_k^{\alpha_1}}{mA_m^{\alpha_2}} A_{m-k}^{i\mathrm{Im}(\alpha_2-\alpha_1)-1},$$

не удовлетворяет теореме Кноппа-Лоренца [15] (ср. [4], условие (3)).

Действительно, обозначив $r = \mathrm{Re}\alpha_1 = \mathrm{Re}\alpha_2$, при $k \geqslant 1$ имеем ($M = \mathrm{const}$)

$$\sum_{m=k}^{\infty} |\overline{a}_{mk}| \geqslant Mk^{r+1} \sum_{m=k+1}^{\infty} \frac{(m-k)^{-1}}{m^{r+1}} = Mk^{r+1} \sum_{m=1}^{\infty} \int_{m}^{m+1} \frac{dx}{m(m+k)^{r+1}} \geqslant$$

$$\geqslant Mk^{r+1} \sum_{m=1}^{\infty} \int_{m}^{m+1} \frac{dx}{x(x+k)^{r+1}} = Mk^{r+1} \int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x(x+k)^{r+1}} \underset{(x=ku)}{=}$$

$$= M \int_{\frac{1}{k}}^{\infty} \frac{du}{u(u+1)^{r+1}} \to \infty \text{ при } k \to \infty.$$

Учитывая доказательство теоремы 13, а также условие И. Кулля [11] для преобразования $l \to l$, получаем следующий результат:

Теорема 14. *Для любых комплексных чисел* $\alpha_1 \neq \alpha_2$ *и* $\beta_1 \neq \beta_2$, *удовлетворяющих условиям* $\mathrm{Re}\alpha_1 = \mathrm{Re}\alpha_2 > -1$ *и* $\mathrm{Re}\beta_1 = \mathrm{Re}\beta_2 > -1$, *можно построить двойной ряд, суммируемый* $|C, \alpha_1, \beta_1|$ *и не суммируемый* $|C, \alpha_2, \beta_2|$.

Литература

1. Алексич Г., Проблемы сходимости ортогональных рядов. Москва, 1963.
2. Бари Н. К., Тригонометрические ряды. Москва, 1961.
3. Барон С., Вывод признаков сходимости двойных числовых рядов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1958, **55**, 9—20.
4. Барон С., Новые доказательства основных теорем о множителях суммируемости. Изв. АН Эст. ССР, сер. техн. и физ.-матем. наук, 1960, **9**, 47—68.
5. Волков И. И., К вопросу суммирования расходящихся рядов методом (C, α). Тр. Московск. ин-та мех. и электр. сельск. х-ва, 1959, **4**, № 1, 137—146.
6. Жак И. Е., Абсолютная суммируемость двойных числовых рядов. Докл. АН СССР, 1950, **73**, 639—642.
7. Жак И. Е., Тиман М. Ф., О суммировании двойных рядов. Матем. сб., 1954, **35** (77), 21—56.
8. Камке Э., Интеграл Лебега—Стилтьеса. Москва, 1959.
9. Кангро Г., О множителях суммируемости. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1955, **37**, 191—232.
10. Кангро Г., Барон С., Множители суммируемости и абсолютной суммируемости для двойных рядов, абсолютно суммируемых методом взвешенных средних Рисса. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1962, **129**, 155—169.
11. Кулль И. Г., Умножение суммируемых двойных рядов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1958, **62**, 3—59.
12. Сакс С., Теория интеграла. Москва, 1949.
13. Ульянов П. Л., Решенные и нерешенные проблемы теории тригонометрических и ортогональных рядов. Успехи матем. наук, 1964, **19**, № 1, 3—69.
14. Izumi, S., Kawata, T., Notes on Fourier Series (V). Absolute Riesz' Summability. Tōhoku Math. J., 1938, **45**, 134—144.
15. Knopp, K., Lorentz, G. G., Beiträge zur absoluten Limitierung. Arch. Math., 1949, **2**, 10—16.
16. Pati, T., The summability factors of infinite series. Duke Math. J., 1954, **21**, 271—283.
17. Tsuchikura, T., Absolute Cesàro summability of orthogonal series. Tōhoku Math. J., (2), 1953, **5**, 52—66.
18. Wang, F. T., Note on the absolute summability of Fourier series. J. London Math. Soc., 1941, **16**, 174—176.
19. Wang, F. T., Note on the absolute summability of trigonometrical series. J. London Math. Soc., 1942, **17**, 133—136.
20. Wang, F. T., The absolute Cesàro summability of trigonometrical series. Duke Math. J., 1942, **9**, 567—572.

Поступило
17 III 1964

ORTOGONAALRIDADE ABSOLUUTSE SUMMEERUVUSE WEYLI TÜÜPI TUNNUSED

S. Baron

Resümee

Käesolevas artiklis leitakse ortogonaalridade peaaegu kõikjal absoluutse summeeruvuse Weyli tüüpi tunnuseid ja (viimastest järeldustena) absoluutsed summeeruvustegurid komplekset järku α ($\mathrm{Re}\,\alpha > -1$) Cesàro menetluse (C, α)

ja absoluutset koonduvust säilitava Rieszi kaalutud keskmiste menetluse P korral. Siinjuures ortogonaalsust defineerime Lebesgue-Stiltjesi integraali abil nii, nagu G. Alexitsi raamatus [1].

Ühtlasi tõestatakse, et menetlused $|C, \alpha_1|$ ja $|C, \alpha_2|$ pole võrreldavad $\operatorname{Re}\alpha_1 = \operatorname{Re}\alpha_2 > -1$ korral, kui $\alpha_1 \neq \alpha_2$.

Kõik nimetatud tulemused üldistatakse ka kahekordsetele ridadele.

ÜBER DIE WEYLSCHEN KRITERIEN FÜR ABSOLUTE SUMMIERBARKEIT DER ORTHOGONALREIHEN

S. Baron

Zusammenfassung

In dieser Note werden Weylsche Kriterien für fast überall absolute Summierbarkeit der Orthogonalreihen behandelt und aus diesen werden Sätze über absolute Summierbarkeitsfaktoren der Orthogonalreihen erfolgt. Diese Fragen werden für den Cesàro-Verfahren (C, α) mit $\operatorname{Re}\alpha > -1$ und Bewichteten Rieszschen Mitteln P gelöst. Hierbei definieren wir den Orthogonalitätsbegriff durch den Lebesgue—Stiltjeschen Integral so, wie G. Alexits in [1]. Zum Beispiel, für den absolut konvergenztreuen Rieszschen Verfahren P gelten die folgenden Sätze:

Theorem 5. *Sei die positive Funktion* $W(m)$ *so beschaffen, dass die Folge* $\frac{W(m)}{|P_{m-1}|}$ *nichtwachsend ist und* $\sum_{m=0}^{\infty}\left|\frac{p_m}{P_m}\right|\frac{1}{W(m)} < \infty$, *dann ist jede Reihe* (2) *im Segment* $[a, b]$ *fast überall* $|P|$*-summierbar, wenn die Bedingung* (3) *erfüllt ist.*

Theorem 6. *Erfülle die Reihe* (2) *die Bedingung* (12), *sei* $|P_{m-1}\varepsilon^2_m|$ *nichtfallend und* $\sum_{m=0}^{\infty}|P_m^{-1}p_m\varepsilon^2_m| < \infty$, *dann ist die Reihe*(14) *in Segment* $[a, b]$ *fast überall* $|P|$*-summierbar.*

Zugleich wird bewiesen, daß die Verfahren $|C, \alpha_1|$ und $|C, \alpha_2|$, wenn $\operatorname{Re}\alpha_1 = \operatorname{Re}\alpha_2 > -1$, $\alpha_1 \neq \alpha_2$, nicht vergleichbar sind.

Alle obenerwähnten Ergebnisse werden auch für Doppelreihen verallgemeinert.

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ОБОБЩЕННЫХ ПОЛИНОМОВ АППЕЛЯ КЛАССА $A^{(2)}$

Ленинградский Механический институт

В. Ожегов

Последовательность полиномов $\{P_n(x)\}_0^\infty$ будем называть *последовательностью обобщенных полиномов Аппеля класса* $A^{(k)}$, если при всех n

$$P_n^{(n)}(x) = 1 \tag{1}$$

и при $n = k,\ k+1,\ k+2, \ldots$

$$P_n^{(k)}(x) = P_{n-k}(x). \tag{2}$$

Приведенное определение при $k=2$ равносильно следующему: существуют (формально) два степенных ряда (в дальнейшем — две производящие функции)

$$A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, \quad B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n \tag{3}$$

(при этом $a_0^2 + b_0^2 > 0$) такие, что (также формально)

$$A(t)e^{tx} + B(t)e^{-tx} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n. \tag{4}$$

К последовательностям полиномов класса $A^{(2)}$ принадлежат, например, известные последовательности $\{S_n(x)\}_0^\infty$ и $\{C_n(x)\}_0^\infty$ полиномов Эйлера — С. Н. Бернштейна [1].

В настоящей статье рассматривается представление последовательности полиномов класса $A^{(2)}$ посредством интеграла Стилтьеса (интегральное представление для последовательности полиномов класса $A^{(1)}$ — полиномов Аппеля — рассматривается в работе [2]).

1. Справедлива

Теорема 1. *Для того, чтобы последовательность полиномов* $\{P_n(x)\}_0^\infty$, *удовлетворяющих условию* (1), *принадлежала классу* $A^{(2)}$, *необходимо и достаточно, чтобы имело место следующее интегральное представление*

$$P_n(x)=\int\limits_0^\infty \frac{(t+x)^n}{n!}\,d\alpha^{(1)}(t)+\int\limits_0^\infty \frac{(t-x)^n}{n!}\,d\alpha^{(2)}(t), \tag{5}$$

где $\alpha^{(1)}(t)$ *и* $\alpha^{(2)}(t)$ *— функции ограниченной вариации на* $(0, \infty)$, *все моменты которых существуют, причем*

$$\alpha_0{}^{(1)}=1,\ \alpha_0^{(2)}=0. \tag{6}$$

Доказательство. Достаточность. Если при всех n выполнено условие (5), то справедливо условие (2) при $k=2$ (условие (1) выполнено, что следует из (6)).

Необходимость. Пусть известно, что последовательность $\{P_n(x)\}_0^\infty \in A^{(2)}$, и пусть (3) — ее производящие функции. Заметим, что из (1) и (4) следует, что

$$a_0=1,\ b_0=0. \tag{7}$$

Введем две последовательности чисел $\{c_n\}_0^\infty$ и $\{d_n\}_0^\infty$, где

$$c_n=n!a_n,\ d_n=n!b_n, \tag{8}$$

и пусть $\gamma^{(1)}(t)$ и $\gamma^{(2)}(t)$ — две функции ограниченной вариации на $(0, \infty)$, моменты которых соответственно c_n и d_n (существование таких функций следует из теоремы Боаса (см. [3], стр. 139). Вследствие (7) из (8)

$$c_0=1,\ d_0=0. \tag{9}$$

Тогда последовательность полиномов $\{H_n(x)\}_0^\infty$, где

$$H_n(x)=\int\limits_0^\infty \frac{(t+x)^n}{n!}\,d\gamma^{(1)}(t)+\int\limits_0^\infty \frac{(t-x)^n}{n!}\,d\gamma^{(2)}(t), \tag{10}$$

есть последовательность полиномов класса $A^{(2)}$. Остается доказать, что

$$\{H_n(x)\}_0^\infty \equiv \{P_n(x)\}_0^\infty. \tag{11}$$

Действительно, производя формальные преобразования, получаем из равенства (10)

$$\sum_{n=0}^\infty H_n(x)z^n=\left\{\int\limits_0^\infty e^{zt}d\gamma^{(1)}(t)\right\}e^{zx}+\left\{\int\limits_0^\infty e^{zt}d\gamma^{(2)}(t)\right\}e^{-zx}=$$

$$=A_1(z)e^{zx}+B_1(z)e^{-zx},$$

где

$$A_1(z)=\int\limits_0^\infty e^{zt}d\gamma^{(1)}(t)=\sum_{n=0}^\infty \frac{c_n}{n!}z^n=\sum_{n=0}^\infty a_nz^n=A(z).$$

Аналогично убеждаемся, что $B_1(z) = B(z)$. Из совпадения производящих функций последовательностей $\{H_n(x)\}_0^\infty$ и $\{P_n(x)\}_0^\infty$ и вытекает (11). Таким образом, полином $P_n(x)$ имеет представление (10), что и доказывает необходимость условия теоремы. Отметим еще, что если $\{P_n(x)\}_0^\infty \in A^{(2)}$, то из доказательства теоремы следует, что его производящие функции имеют вид

$$A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n^{(1)}}{n!} t^n, \quad B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n^{(2)}}{n!} t^n,$$

где $\{\alpha_n^{(1)}\}_0^\infty$ и $\{\alpha_n^{(2)}\}_0^\infty$ — моментные последовательности функций в интегральном представлении (5) с условием (6).

2. Пусть известна последовательность $\{D_n(x)\} \in A^{(2)}$. Тогда по теореме 1 найдутся две функции $\gamma^{(1)}(t)$ и $\gamma^{(2)}(t)$ ограниченной вариации на $(0, \infty)$, моменты которых существуют, такие, что справедливо

$$D_n(x) = \int_0^\infty \frac{(t+x)^n}{n!} d\gamma^{(1)}(t) + \int_0^\infty \frac{(t-x)^n}{n!} d\gamma^{(2)}(t), \tag{12}$$

при этом

$$\gamma_0^{(1)} = 1, \quad \gamma_0^{(2)} = 0. \tag{13}$$

В дальнейшем будем говорить, что функции $\gamma^{(1)}(t)$ и $\gamma^{(2)}(t)$ из класса N $(0, \infty)$.

Введем последовательность полиномов $\{R_n(x)\}_0^\infty$, где

$$R_n(x) = \int_0^\infty D_n(t+x)\, d\alpha^{(1)}(t) + \int_0^\infty D_n(t-x)\, d\alpha^{(2)}(t) \tag{14}$$

(здесь $\{D_n(x)\}$ — полином (12), а $\alpha^{(1)}(t)$ и $\alpha^{(2)}(t)$ из N $(0, \infty)$). Справедлива

Теорема 2. *Интегральное представление* (14) *является необходимым и достаточным условием принадлежности последовательности полиномов* $\{R_n(x)\}_0^\infty$ *классу* $A^{(2)}$.

Доказательство. Достаточность. Из (14) сразу следует, что $\{R_n(x)\}_0^\infty \in A^{(2)}$, так как условия (1) и (2) при $k = 2$ выполнены.

Необходимость. Пусть последовательность $\{R_n(x)\}_0^\infty \in A^{(2)}$, а ее производящие функции имеют вид (3), где a_0 и b_0 определяются равенствами (7).

Рассмотрим, пока произвольные, две последовательности чисел $\{\beta_k^{(1)}\}_0^\infty$ и $\{\beta_k^{(2)}\}_0^\infty$ $(\beta_0^{(1)} = 1,\ \beta_0^{(2)} = 0)$, и пусть $\beta^{(1)}(x)$ и $\beta^{(2)}(x)$ из класса N $(0, \infty)$, моментные последовательности которых $\{\beta_k^{(1)}\}_0^\infty$ и $\{\beta_k^{(2)}\}_0^\infty$. Тогда, как и выше, последовательность $\{Q_n(x)\}_0^\infty$, где

$$Q_n(x)=\int_0^\infty D_n(t+x)\,d\beta^{(1)}(t)+\int_0^\infty D_n(t-x)\,d\beta^{(2)}(\text{[illegible]}, \tag{15}$$

принадлежит классу $A^{(2)}$. Отсюда, используя (12), после формальных преобразований, получаем

$$\sum_{n=0}^\infty Q_n(x)z^n =$$

$$=\int_0^\infty \{\int_0^\infty e^{(u+t+x)z}d\gamma^{(1)}(u)+\int_0^\infty e^{(u-t-x)z}d\gamma^{(2)}(u)\}\,d\beta^{(1)}(t)+$$

$$+\int_0^\infty \{\int_0^\infty e^{(u+t-x)z}d\gamma^{(1)}(u)+\int_0^\infty e^{(u-t+x)z}d\gamma^{(2)}(u)\}\,d\beta^{(2)}(t)=$$

$$=\{\int_0^\infty [\int_0^\infty e^{(u+t)z}d\gamma^{(1)}(u)]\,d\beta^{(1)}(t)+\int_0^\infty [\int_0^\infty e^{(u-t)z}d\gamma^{(2)}(u)]\,d\beta^{(2)}(t)\}e^{zx}+$$

$$+\{\int_0^\infty [\int_0^\infty e^{(u-t)z}d\gamma^{(2)}(u)]\,d\beta^{(1)}(t)+\int_0^\infty [\int_0^\infty e^{(u+t)z}d\gamma^{(1)}(u)]\,d\beta^{(2)}(t)\}e^{-xz}=$$

$$=A_1(z)e^{zx}+B_1(z)e^{-zx},$$

где $A_1(z)$ и $B_1(z)$ — выражения, стоящие в фигурных скобках соответственно первого и второго слагаемых. После преобразований этих выражений, получаем

$$\begin{aligned}A_1(z)&=\sum_{n=0}^\infty\left\{\sum_{k=0}^n\frac{C_n^k}{n!}\left[\gamma_{n-k}^{(1)}\beta_k^{(1)}+(-1)^k\gamma_{n-k}^{(2)}\beta_k^{(2)}\right]\right\}z^n,\\ B_1(z)&=\sum_{n=0}^\infty\left\{\sum_{k=0}^n\frac{C_n^k}{n!}\left[(-1)^k\gamma_{n-k}^{(2)}\beta_k^{(1)}+\gamma_{n-k}^{(1)}\beta_k^{(2)}\right]\right\}z^n.\end{aligned} \tag{16}$$

Из (16) вытекает, что если последовательности $\{\beta_k^{(1)}\}_0^\infty$ и $\{\beta_k^{(2)}\}_0^\infty$ такие, что при всех $n=0,\ 1,\ 2,\ldots$

$$\left\{\begin{aligned}&\sum_{k=0}^n C_n^k[\gamma_{n-k}^{(1)}\beta_k^{(1)}+(-1)^k\gamma_{n-k}^{(2)}\beta_k^{(2)}]=n!a_n,\\ &\sum_{k=0}^n C_n^k[(-1)^k\gamma_{n-k}^{(2)}\beta_k^{(1)}+\gamma_{n-k}^{(1)}\beta_k^{(2)}]=n!b_n,\end{aligned}\right. \tag{17}$$

где a_n и b_n — коэффициенты функций (3), то $A_1(z)\equiv A(z)$ и $B_1(z)\equiv B(z)$, т. е.

$$\{Q_n(x)\}_0^\infty\equiv\{R_n(x)\}_0^\infty.$$

Таким образом, для последовательности $\{R_n(x)\}_0^\infty \in A^{(2)}$ необходимо выполнено (15), где моментные последовательности функций $\beta^{(1)}(t)$ и $\beta^{(2)}(t)$ определяются из системы (17). Из этой системы при $n = k$ имеем

$$\left\{\begin{aligned} &\gamma_0{}^{(1)}\beta_k{}^{(1)} + (-1)^k\gamma_0{}^{(2)}\beta_k{}^{(2)} = \\ &= k!a_k - \sum_{i=0}^{k-1} C_k{}^i\,[\gamma_{k-i}^{(1)}\beta_i{}^{(1)} + (-1)^i\gamma_{k-i}^{(2)}\beta_i{}^{(2)}], \\ &(-1)^k\gamma_0{}^{(2)}\beta_k{}^{(1)} + \gamma_0{}^{(1)}\beta_k{}^{(2)} = \\ &= k!b_k - \sum_{i=0}^{k-1} C_k{}^i\,[\gamma_{k-i}^{(2)}\,(-1)^i\beta_i{}^{(1)} + \gamma_{k-i}^{(1)}\,\beta_i{}^{(2)}]. \end{aligned}\right.$$

Далее,

$$\left\{\begin{aligned} \beta_k{}^{(1)} &= k!a_k - \sum_{i=0}^{k-1} C_k{}^i\,[\gamma_{k-i}^{(1)}\beta_i{}^{(1)} + (-1)^i\gamma_{k-i}^{(2)}\beta_i{}^{(2)}], \\ \beta_k{}^{(2)} &= k!b_k - \sum_{i=0}^{k-1} C_k{}^i[(-1)^i\gamma_{k-i}^{(2)}\beta_i{}^{(1)} + \gamma_{k-i}^{(1)}\beta_i{}^{(2)}, \end{aligned}\right. \tag{18}$$

причем при $k = 0$ из (18) следует $\beta_0{}^{(1)} = 1$, $\beta_0{}^{(2)} = 0$, что и завершает доказательство.

Рассмотрим последовательности полиномов Эйлера — С. Н. Бернштейна $\{S_n(x)\}_0^\infty$ и $\{C_n(x)\}_0^\infty$. Тогда из доказанной выше теоремы 2 вытекает

Следствие. *Для того, чтобы последовательность $\{P_n(x)\}_0^\infty$ принадлежала классу $A^{(2)}$, необходимо и достаточно, чтобы при всех n было выполнено одно из следующих интегральных представлений:*

$$P_n(x) = \int_0^\infty S_n(t + x)\,d\alpha^{(1)}(t) + \int_0^\infty S_n(t - x)\,d\alpha^{(2)}(t),$$

$$P_n(x) = \int_0^\infty C_n(t + x)\,d\beta^{(1)}(t) + \int_0^\infty C_n(t - x)\,d\beta^{(2)}(t),$$

где $\alpha^{(i)}(t)$ и $\beta^{(i)}(t)$ $(i = 1, 2)$ из класса N $(0, \infty)$.

Аналогичные интегральные представления справедливы и для последовательностей класса $A^{(k)}$.

Литература

1. Бернштейн С. Н., О некоторых свойствах циклически монотонных функций. Собр. соч., т. II, Москва, 1954, 493—516.
2. Sheffer, I. M., Note on Appell polinomials. Bull. Amer. Math. Soc., 1945, **51**, 739—744.
3. Widder, D. V., The Laplace transform. London, 1946

Поступило
3 V 1963

APPELLI ÜLDISTATUD KLASSI $A^{(2)}$ POLÜNOOMIDE JADA INTEGRAALNE ESITUS

V. Ožegov

Resümee

Jada $\{P_n(x)\}_0^\infty$ nimetatakse Appeli üldistatud klassi $A^{(2)}$ polünoomide jadaks, kui $P_n^{(n)}(x) = 1$ iga n puhul ja kui $P_n''(x) = P_{n-2}(x)$ kehtib $n = 2, 3, 4, \ldots$ korral.

Artiklis uuritakse klassi $A^{(2)}$ polünoomide jada esitamist Stieltjesi integraali kaudu. Integraalse esituse kaudu on näidatud, et iga $P_n(x)$ jadast $\{P_n(x)\}_0^\infty \in A^{(2)}$ võib avaldada Euler-Bernsteini polünoomide $S_n(x)$ või $C_n(x)$ (v. t. [1]) kaudu.

INTEGRAL PRESENTATION OF APELL'S CLASS $A^{(2)}$ SUMMARIZED POLYNOMIAL SUCCESSION

V. Ozhegov

Summary

Succession $\{P_n(x)\}_0^\infty$ represents Appell's class $A^{(2)}$ summarzied polynomial succession provided all n give $P_n^{(n)}(x) = 1$ and for $n = 2, 3, 4, \ldots$ give $P''_n(x) = P_{n-2}(x)$.

The article deals with the problem of presentation of class $A^{(2)}$ polynomial succession by means of Stilties' integral. Integral presentation shows that any $P''_n(x)$ from succession $\{P_n(x)\}_0^\infty \in A^{(2)}$ can be expressed either by means of polynomial $S_n(x)$ or $C_n(x)$ from Euler-Bernstein polynomial succession (see [1]).

НЕКОТОРЫЕ ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТИ МЕТОДА БУБНОВА-ГАЛЕРКИНА I. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ

Г. Вайникко

Кафедра вычислительной математики

Быстрота сходимости методов типа Галеркина исследовалась, главным образом, с помощью общей теории приближенных методов, разработанной Л. В. Канторовичем [3, 4]. Однако, в ряде случаев к более точным результатам приводит установленная М. А. Красносельским [5] оценка (оценка (3) ниже) погрешности методов типа Галеркина. Особенно удобен этот второй путь в рассматриваемом в настоящей статье случае, когда в качестве координатной последовательности в методе Бубнова-Галеркина выбраны собственные элементы некоторого оператора, близкого в определенном смысле к оператору решаемого уравнения.

Основные результаты статьи содержатся в теоремах 1—4.

1. Сформулируем известную теорему о сходимости методов типа Галеркина, на которую мы в дальнейших рассмотрениях будем опираться.

Рассмотрим в сепарабельном гильбертовом пространстве H уравнение

$$u + Tu = f, \tag{1}$$

где T — линейный вполне непрерывный оператор. Это уравнение решим методом Галеркина-Петрова: зададимся двумя полными в H координатными последовательностями $\{\psi_i\}$ и $\{\psi_i'\}$ и определим n-ное приближение

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \psi_k$$

из условий

$$(u_n + Tu_n - f, \psi'_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{2}$$

Обозначим через I_n оператор ортогонального проектирования в подпространство, порожденное элементами $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$.

Основной теоремой в теории методов типа Галеркина является (см.[1] [7, 8, 5, 12])

Теорема А. *Пусть однородное уравнение* $u+Tu=0$ *имеет лишь тривиальное решение. Для того, чтобы при каждом* $f\in H$ *последовательность приближенных решений уравнения* (1) u_n, *определенных методом Галеркина-Петрова* (2), *стремилась при* $n\to\infty$ *к (точному) решению уравнения* (1) u_0, *необходимо и достаточно, чтобы координатные последовательности* $\{\psi_i\}$ *и* $\{\psi_i'\}$ *удовлетворяли условию* (А) *Н. И. Польского* [12, 13]. *Быстрота сходимости характеризуется неравенством*

$$\|u_0-I_nu_0\|\leqslant\|u_n-u_0\|\leqslant C\|u_0-I_nu_0\|, \tag{3}$$

где C *— постоянная, не зависящая от* n *и* $f\in H$.

Отметим, что условие (А) Н. И. Польского выполняется, в частности, в случае метода Бубнова-Галеркина, т. е. когда $\psi_i=\psi'_i$ $(i=1,2,\ldots)$.

2. Пусть в сепарабельном гильбертовом пространстве H задано линейное уравнение

$$Au+Ku=f, \tag{4}$$

где A — положительно определенный самосопряженный оператор. Относительно оператора K мы пока предположим лишь, что область его определения $D(K)$ содержит область определения оператора A:

$$D(K)\supset D(A).$$

Пусть оператор B сходен (см. [9], [1]) с A, т. е. B (также как и A) положительно определенный самосопряженный оператор и $D(B)=D(A)$. Допустим, что оператор B имеет дискретный спектр, и обозначим через $\{\lambda_i\}$ и $\{\varphi_i\}$ полную систему собственных значений и собственных элементов оператора B:

$$B\varphi_i=\lambda_i\varphi_i,\ \varphi_i\in D(B)=D(A)\quad (i=1,\ 2,\ \ldots).$$

Собственные элементы φ_i предполагаем известными и расположенными в порядке возрастания собственных значений:

$$0<\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\ldots\leqslant\lambda_i\leqslant\ldots\quad(\lambda_i\to\infty \text{ при } i\to\infty). \tag{5}$$

Из сходности операторов A и B вытекает (см. [9, 10]), что последовательность $\{\varphi_i\}$ полна в пространствах H и[2] H_A; полной в H является также последовательность $\{A\varphi_i\}$.

При решении уравнения (4) методом Бубнова-Галеркина возьмем собственные элементы $\{\varphi_i\}$ оператора B за координат-

---

[1] Простое доказательство теоремы А можно построить на основе статьи [13].

[2] Пространство H_A получается пополнением множества $D(A)$ по скалярному произведению $[u,v]_A=(Au,v)$; более подробные сведения о пространстве H_A см. [11]. Аналогично определяется пространство H_B. Норму в пространствах H_A и H_B обозначаем так: $|u|_A$, $|u|_B$.

ную последовательность. Приближенное решение уравнения (4)

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \varphi_k$$

определяется, по методу Бубнова-Галеркина, из условий

$$(Au_n + Ku_n - f, \varphi_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{6}$$

Обозначим через E тождественный оператор в пространстве H, через E_n оператор ортогонального (в смысле метрики пространства H) проектирования в подпространство H_n $(H_n \subset H)$, порожденное элементами $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, и $E^{(n)} = E - E_n$.

Переходим к выводу оценок погрешности.

Теорема 1. *Если оператор KA^{-1} вполне непрерывен в пространстве H, и уравнение* (4) *имеет единственное решение u_0 $(u_0 \in D(A))$, то для метода Бубнова-Галеркина* (6) *справедлива оценка погрешности*

$$\|E^{(n)}Bu_0\| \leqslant \|u_n - u_0\| \leqslant C\|E^{(n)}Bu_0\| = o(\lambda_n^{1-\alpha}), \tag{7}$$

где $\alpha \geqslant 1$ такое число, что[3] $u_0 \in D(B^\alpha)$.

Доказательство. Известно (см. [9, 1]), что в условиях доказываемой теоремы невязка $Au_n + Ku_n - f$ стремится при $n \to \infty$ к нулю, каков бы ни был элемент $f \in H$. Это равносильно тому, что для каждого $f \in H$

$$Au_n \to (E + KA^{-1})^{-1} f \quad \text{при} \quad n \to \infty; \tag{8}$$

обратимость оператора $E + KA^{-1}$ вытекает из вполне-непрерывности оператора KA^{-1} и того, что уравнение

$$w + KA^{-1}w = f \tag{9}$$

имеет единственное решение

$$w_0 = Au_0.$$

---

[3] Оператор B^α, где α любое вещественное число, можно определить следующим образом. Пусть система $\{\varphi_i\}$ ортонормирована в H. Определим множество $D(B^\alpha)$ состоящим из всех элементов $u \in H$, для которых ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |(u, \varphi_i)|^2 \lambda_i^{2\alpha}$ сходится, и положим для $u \in D(B^\alpha)$

$$B^\alpha u = \sum_{i=1}^{\infty} (u, \varphi_i) \lambda_i^\alpha \varphi_i \quad \left(u = \sum_{i=1}^{\infty} (u, \varphi_i) \varphi_i\right).$$

Имеем $B^{\alpha_1} B^{\alpha_2} = B^{\alpha_1 + \alpha_2}$, $(B^\alpha)^{-1} = B^{-\alpha}$, $B^1 = B$, $B^0 = E$, $E_n B^\alpha \subset B^\alpha E_n$, $E^{(n)} B^\alpha = B^\alpha E^{(n)}$. При $\alpha \leqslant 0$ оператор B^α ограничен, и, как это следует из самосопряженности оператора $E^{(n)} B^\alpha = B^\alpha E^{(n)}$ и соотношений (5), имеет место

$$\|E^{(n)} B^\alpha\| = \|B^\alpha E^{(n)}\| = (\lambda_{n+1})^\alpha.$$

Обозначив

$$w_n = Au_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k A\varphi_k,$$

перепишем условия (6) в виде

$$(w_n + KA^{-1}w_n - f, \varphi_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{10}$$

Трактуем w_n, как приближенное решение уравнения (9), определенное методом Галеркина-Петрова (10) с координатными последовательностями $\{A\varphi_i\}$ и $\{\varphi_i\}$. Из соотношения (8) следует, что $w_n \to w_0$ при $n \to \infty$, каков бы ни был элемент $f \in H$; на основе теоремы А заключаем, что координатные последовательности $\{A\varphi_i\}$ и $\{\varphi_i\}$ удовлетворяют условию (А) Н. И. Польского и что

$$\|w_n - w_0\| = O(\|P^{(n)}w_0\|), \tag{11}$$

где $P^{(n)} = E - P_n$, а P_n — оператор ортогонального (в смысле метрики пространства H) проектирования в подпространство $A(H_n)$.

Очевидно, $P^{(n)}AE_n = 0$, или, что то же самое, $P^{(n)}A = P^{(n)}AE^{(n)}$, вследствие чего [4]

$$\|P^{(n)}w_0\| = \|P^{(n)}Au_0\| = \|P^{(n)}AE^{(n)}u_0\| \leqslant \|AE^{(n)}u_0\| \leqslant$$
$$\leqslant \|AB^{-1}\|\|BE^{(n)}u_0\| = \|AB^{-1}\|\|E^{(n)}Bu_0\|. \tag{12}$$

Сопоставляя (11) и (12) с соотношением

$$\|B(u_n - u_0)\| \leqslant \|BA^{-1}\|\|A(u_n - u_0\| = \|BA^{-1}\|\|w_n - w_0\|,$$

находим:

$$\|B(u_n - u_0)\| \leqslant C\|E^{(n)}Bu_0\|.$$

Далее, поскольку $E^{(n)}Bu_n = BE^{(n)}u_n = 0$, то

$$\|E^{(n)}Bu_0\| = \|E^{(n)}B(u_0 - u_n)\| \leqslant \|B(u_n - u_0)\|.$$

Осталось установить, что $\|E^{(n)}Bu_0\| = o(\lambda_n^{1-\alpha})$. Имеем

$$E^{(n)}Bu_0 = E^{(n)}E^{(n)}B^{1-\alpha}B^{\alpha}u_0 = E^{(n)}B^{1-\alpha} \cdot E^{(n)}B^{\alpha}u_0,$$

откуда

$$\|E^{(n)}Bu_0\| \leqslant \|E^{(n)}B^{1-\alpha}\|\|E^{(n)}B^{\alpha}u_0\| = o(\lambda_n^{1-\alpha}),$$

так как $\|E^{(n)}B^{1-\alpha}\| = (\lambda_{n+1})^{1-\alpha}$ и $\|E^{(n)}B^{\alpha}u_0\| \to 0$ при $n \to \infty$.

Теорема 1 доказана.

Пусть оператор $A^{-1}K$ вполне непрерывен в пространстве H_A. Если он не определен во всем пространстве H_A, мы расширим его по непрерывности на все H_A; это расширение обозначим через

---

[4] Из сходности операторов A и B вытекает (см. [9, 1]), что операторы AB^{-1}, BA^{-1}, $A^{1/2}B^{-1/2}$, $B^{1/2}A^{-1/2}$ и операторы, получаемые перестановкой сомножителей, ограничены.

$\overline{A^{-1}K}$. Очевидно, решение уравнения (4) является также решением (рассматриваемого в пространстве H_A) уравнения

$$u + \overline{A^{-1}K}u = A^{-1}f. \tag{13}$$

Обратное утверждение верно только в том случае, когда решение уравнения (13) принадлежит $D(A)$; в общем случае оно принадлежит лишь H_A. Однако, следуя С. Г. Михлину [11], будем решение уравнения (13) принимать за (если угодно, обобщенное) решение уравнения (4).

Теорема 2. *Если оператор $A^{-1}K$ вполне непрерывен в пространстве H_A, и уравнение* (4) *имеет единственное решение u_0 ($u_0 \in H_A$), то для метода Бубнова-Галеркина* (6) *справедлива оценка погрешности*

$$|E^{(n)}u_0|_B \leqslant |u_n - u_0|_B \leqslant C|E^{(n)}u_0|_B = o(\lambda_n^{1/2-\alpha}), \tag{14}$$

где $\alpha \geqslant \frac{1}{2}$ такое число, что $u_0 \in D(B^\alpha)$.

Доказательство. Переписав условия (6) в виде

$$[u_n + A^{-1}Ku_n - A^{-1}f,\ \varphi_i]_A = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

трактуем u_n, как определенное методом Бубнова-Галеркина приближенное решение (рассматриваемого в пространстве H_A) уравнения (13). На основе теоремы А

$$|u_n - u_0|_A = O(|E_A^{(n)}u_0|_A), \tag{15}$$

где $E_A^{(n)} = E - E_n^A$, а E_n^A — оператор ортогонального, в смысле метрики пространства H_A, проектирования в подпространство H_n.

Поскольку $E_A^{(n)}E_nu_0 = 0$, то $E_A^{(n)}u_0 = E_A^{(n)}E^{(n)}u_0$ и

$$|E_A^{(n)}u_0|_A = |E_A^{(n)}E^{(n)}u_0|_A \leqslant |E^{(n)}u_0|_A = \|A^{1/2}E^{(n)}u_0\| \leqslant$$
$$\leqslant \|A^{1/2}B^{-1/2}\|\,\|B^{1/2}E^{(n)}u_0\| = \|A^{1/2}B^{-1/2}\|\,|E^{(n)}u_0|_B. \tag{16}$$

Сопоставляя (15) и (16) с соотношением

$$|u_n - u_0|_B = \|B^{1/2}(u_n - u_0)\| \leqslant \|B^{1/2}A^{-1/2}\|\,\|A^{1/2}(u_n - u_0)\| =$$
$$= \|B^{1/2}A^{-1/2}\|\,|u_n - u_0|_A,$$

находим:

$$|u_n - u_0|_B \leqslant C|E^{(n)}u_0|_B.$$

Далее,

$$|E^{(n)}u_0|_B = |E^{(n)}(u_0 - u_n)|_B = \|B^{1/2}E^{(n)}(u_0 - u_n)\| =$$
$$= \|E^{(n)}B^{1/2}(u_0 - u_n)\| \leqslant \|B^{1/2}(u_0 - u_n)\| = |u_0 - u_n|_B,$$

и, наконец,

$$|E^{(n)}u_0|_B = \|B^{1/2}E^{(n)}u_0\| = \|B^{1/2-\alpha}E^{(n)} \cdot E^{(n)}B^{\alpha}u_0\| \leqslant$$
$$\leqslant \|B^{1/2-\alpha}E^{(n)}\|\,\|E^{(n)}B^{\alpha}u_0\| = o(\lambda_n^{1/2-\alpha}),$$

так как $\|B^{1/2-\alpha}\| = (\lambda_{n+1})^{1/2-\alpha}$ и $\| E^{(n)}B^{\alpha}u_0 \| \to 0$ при $n \to \infty$.

Теорема 2 доказана.

Если же оператор $A^{-1}K$ вполне непрерывен в пространстве H, то под (если угодно, обобщенным) решением уравнения (4) будем подразумевать решение уравнения

$$u + \overline{\overline{A^{-1}K}}u = A^{-1}f, \tag{17}$$

где $\overline{\overline{A^{-1}K}}$ — расширение оператора $A^{-1}K$ по непрерывности на все пространство H.

Теорема 3. *Если оператор $A^{-1}K$ вполне непрерывен в пространстве H, и уравнение (4) имеет единственное решение u_0 ($u_0 \in H$), то для метода Бубнова-Галеркина (6) справедлива оценка погрешности*

$$\|E^{(n)}u_0\| \leqslant \|u_n - u_0\| \leqslant C\|E^{(n)}u_0\| = o(\lambda_n^{-\alpha}), \tag{18}$$

где $\alpha \geqslant 0$ такое число, что $u_0 \in D(B^{\alpha})$.

Доказательство. Переписав условия (6) в виде

$$(u_n + A^{-1}Ku_n - A^{-1}f,\ A\varphi_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

трактуем u_n, как приближенное решение уравнения (17), определенное методом Галеркина-Петрова с координатными последовательностями $\{\varphi_i\}$ и $\{A\varphi_i\}$. При доказательстве теоремы 1 мы установили, что указанные координатные последовательности удовлетворяют условию[5] (А) Н. И. Польского. На основе теоремы А справедлива оценка

$$\|E^{(n)}u_0\| \leqslant \|u_n - u_0\| \leqslant C\|E^{(n)}u_0\|.$$

Притом,

$$\|E^{(n)}u_0\| = \|E^{(n)}B^{-\alpha} \cdot E^{(n)}B^{\alpha}u_0\| \leqslant \|E^{(n)}B^{-\alpha}\|\|E^{(n)}B^{\alpha}u_0\| = o(\lambda_n^{-\alpha}),$$

так как $\| E^{(n)}B^{-\alpha} \| = (\lambda_{n+1})^{-\alpha}$ и $\| E^{(n)}B^{\alpha}u_0 \| \to 0$ при $n \to \infty$.

Теорема 3 доказана.

Замечание 1. В теоремах 1, 2 и 3 однозначная разрешимость уравнения (4) понимается в различных смыслах. Возникает вопрос: не может ли, например, случиться, что уравнение (4) разрешимо однозначно в смысле теоремы 1 (т. е. имеет единственное решение $u_0 \in D(A)$), но разрешимо неоднозначно в смысле теорем 2 или 3 (т. е. имеет, кроме $u_0 \in D(A)$, еще обобщенное решение $u'_0 \bar{\in} D(A)$). Оказывается, что это невозможно. Именно, нетрудно показать, что:

а) если оператор KA^{-1} вполне непрерывен в пространстве H,

---

[5] Вернее, мы установили это для последовательностей $\{A\varphi_i\}$ и $\{\varphi_i\}$. Но условие (А) Н. И. Польского симметрично в том смысле, что если этому условию удовлетворяют некоторые последовательности $\{\varphi_i\}$ и $\{\varphi_i'\}$, то этому условию удовлетворяют и последовательности $\{\varphi_i'\}$ и $\{\varphi_i\}$.

и уравнение (4) имеет единственное решение u_0 ($u_0 \in D(A)$), и если притом оператор $A^{-1}K$ вполне непрерывен в пространстве H_A или в пространстве H, то u_0 является единственным решением и для уравнения (13), соответственно (17);

б) если оператор $A^{-1}K$ вполне непрерывен в пространствах H_A и H, и уравнение (13) имеет единственное решение u_0 ($u_0 \in H_A$), то u_0 является единственным решением и для уравнения (17).

Замечание 2. Пусть выполнены условия теоремы 2, и пусть $D(K) \supset H_A$. Тогда (см. [11]) $u_0 \in D(A) = D(B)$, и оценки (14) и (18) имеют соответственно порядки $o(\lambda_n^{-1/2})$ и $o(\lambda_n^{-1})$. К тому же результату приходим, если (в условиях теорем 2 и 3) оператор KA^{-1} вполне непрерывен в пространстве H. Что же касается оценки (7), то она эффективна лишь в случае, когда из каких-нибудь соображений известно, что $u_0 \in D(B^\alpha)$ с $\alpha > 1$.

3. Если в уравнении (4) $K = 0$, то метод Бубнова-Галеркина переходит в метод Ритца.

Теорема 4. *Если в уравнении* (4) $K = 0$, *то для метода Ритца* (6) *справедливы оценки погрешности*

$$\|u_n - u_0\| \leqslant \|A^{-1} B\| \frac{\|Au_n - f\|}{\lambda_{n+1}} = o(\lambda_n^{-1}), \tag{19}$$

$$|u_n - u_0|_A \leqslant \| A^{-1/2} B^{1/2} \| \frac{\| Au_n - f\|}{\sqrt{\lambda_{n+1}}} = o(\lambda_n^{-1/2}). \tag{20}$$

Доказательство. В силу условий (6) $E_n(Au_n - f) = 0$. Поэтому

$$u_n - u_0 = A^{-1}(Au_n - f) = A^{-1}E^{(n)}(Au_n - f) =$$
$$= A^{-1} B \cdot B^{-1}E^{(n)}(Au_n - f),$$

$$A^{1/2}(u_n - u_0) = A^{-1/2} B^{1/2} \cdot B^{-1/2} E^{(n)} \cdot (Au_n - f).$$

Отсюда, заметив, что $\| B^{-1}E^{(n)} \| = \frac{1}{\lambda_{n+1}}$, $\| B^{-1/2} E^{(n)} \| = \frac{1}{\sqrt{\lambda_{n+1}}}$ и $\| A^{1/2} (u_n - u_0) \| = | u_n - u_0 |_A$, мы сразу получаем оценки (19) и (20).

Теорема 4 доказана.

Оценка (19) была ранее более сложным путем выведена А. В. Джишкариани [2]; в оценке А. В. Джишкариани, аналогичной с (20), вместо нормы $\|A^{-1/2}B^{1/2}\|$ фигурирует величина $\sqrt{\|A^{-1}B\|}$.

Замечание 3. Норма $\| A^{-1/2}B^{1/2}\|$ (в отличие от нормы $\| A^{-1}B \|$) обычно просто оценивается, и по оценке (20) можно оценить погрешность n-ого приближения. А именно,

$$\| A^{-1/2} B^{1/2} \| \leqslant \frac{1}{\vartheta},$$

где $\vartheta > 0$ такое число, что для любого $u \in D(A) = D(B)$

$$(Au, u) \geqslant \vartheta^2 (Bu, u).$$

Действительно, обозначив $u = A^{-1/2} v$, имеем

$$\|v\|^2 = |A^{-1/2} v|^2_A = |u|^2_A = (Au, u) \geqslant \vartheta^2 (Bu, u) = \vartheta |u|^2_B =$$
$$= \vartheta^2 \|B^{1/2} u\|^2 = \vartheta^2 \|B^{1/2} A^{-1/2} v\|^2,$$

т. е. $\| B^{1/2} A^{-1/2} v \| \leqslant \frac{1}{\vartheta} \| v \|$. Остается заметить, что $A^{-1/2} B^{1/2} \subset \subset (B^{1/2} A^{-1/2})^*$.

4. **Пример 1.** Пусть задано обыкновенное дифференциальное уравнение

$$-(a(s)u')' + b(s)u' + c(s)u = f(s), \tag{21}$$

которое требуется интегрировать в интервале $0 < s < 1$ при краевых условиях

$$u(0) = u(1) = 0. \tag{22}$$

Предполагается, что коэффициент $a(s)$ абсолютно непрерывен и (строго) положителен на отрезке $[0, 1]$, и что

$$a'(s),\ b(s),\ c(s),\ f(s) \in L_2[0, 1].$$

Краевая задача (21), (22) пусть имеет единственное решение.

Краевую задачу (21), (22) рассмотрим, как уравнение (4) в пространстве $H = L_2\,[0, 1]$, положив

$$Au = -(a(s)u')', \quad Ku = b(s)u' + c(s)u \quad (u(0) = u(1) = 0).$$

Положим, кроме того,

$$Bu = -u'' \quad (u(0) = u(1) = 0).$$

Операторы A и B определены положительно, самосопряжены[6] и сходны между собой. Собственными значениями и собственными функциями оператора B являются

$$\lambda_i = i^2 \pi^2, \quad \varphi_i(s) = \sin i\pi s \quad (i = 1, 2, \ldots).$$

Оператор KA^{-1} вполне непрерывен в пространстве $L_2[0, 1]$. Действительно, вполне-непрерывность оператора KB^{-1} вытекает из свойств функции Грина оператора B, а вместе с KB^{-1} вполне непрерывен и оператор[7] $KA^{-1} = KB^{-1} \cdot BA^{-1}$.

Далее, оператор $A^{-1}K$ вполне непрерывен в пространстве H_A. На самом деле, имеем $A^{-1}K = A^{-1}B \cdot B^{-1}K$. Оператор $A^{-1}B$ ограничен в H_A; нетрудно видеть, что оператор $B^{-1}K$ (и вообще любой оператор) вполне непрерывен в H_A тогда и только тогда,

---

[6] Множество $D(A) = D(B)$ состоит из удовлетворяющих краевым условиям (22) абсолютно непрерывных функций, имеющих абсолютно непрерывную первую и квадратично-суммируемую вторую производную.

[7] По этому косвенному пути идем потому, что по сделанным допущениям мы не можем судить, существует ли функция Грина оператора A.

когда он вполне непрерывен в H_B. Поэтому доказательство вполне-непрерывности оператора $A^{-1}K$ в пространстве H_A можно заменить доказательством вполне-непрерывности оператора $B^{-1}K$ в пространстве H_B, что более удобно и проводится по указанной С. Г. Михлиным [8, 10] схеме.

Итак, выполнены условия теорем 1 и 2. Решение краевой задачи (21), (22) $u_0(s)$ принадлежит $D(A)=D(B)$, и на основе теоремы 2 определенное методом Бубнова-Галеркина приближенное решение краевой задачи (21), (22)

$$u_n(s)=\sum_{k=1}^{n}\xi_k\sin k\pi s$$

имеет погрешность

$$|u_n-u_0|_B\equiv\|u'_n-u'_0\|=o(n^{-1}),$$

откуда

$$\max_{0\leqslant s\leqslant 1}|u_n(s)-u_0(s)|=o(n^{-1}).$$

Усилим ограничение, наложенное на коэффициент $b(s)$: пусть $b(s)$ абсолютно непрерывен, и $b'(s)\in L_2\,[0,\,1]$. Тогда из свойств функции Грина оператора B вытекает, что оператор $B^{-1}K$ вполне непрерывен в пространстве $L_2\,[0,\,1]$, а вместе с $B^{-1}K$ вполне непрерывен и оператор $A^{-1}K=A^{-1}B\cdot B^{-1}K$. Таким образом, выполнены также условия теоремы 3, на основе которой

$$\|u_n-u_0\|=o(n^{-2}).$$

Отсюда, например, способом, указанным в [4] на стр. 519—520, находим:

$$\max_{0\leqslant s\leqslant 1}|u_n(s)-u_0(s)|=o(n^{-3/2}).$$

При тех же ограничениях Л. В. Канторовичем [3, 4] выведена равномерная оценка порядка $O(n^{-1/2})$. При более жестких ограничениях С. Г. Михлиным [11] выведена равномерная оценка порядка $O(n^{-3/2})$ для метода Ритца.

Усилим еще раз ограничения: пусть $a(s)$, $b(s)$, $c(s)$, $f(s)$, а также $a'(s)$ абсолютно непрерывны, и

$$a''(s),\quad b'(s),\quad c'(s),\quad f'(s)\in L_2\,[0,\,1].$$

В этих ограничениях решение краевой задачи (21), (22) $u_0(s)$ имеет абсолютно непрерывную вторую и квадратично-суммируемую третью производную. Оценим нормы $\|E^{(n)}Bu_0\|$, $\|E^{(n)}B^{1/2}u_0\|=|E^{(n)}u_0|_B$ и $\|E^{(n)}u_0\|$. Имеем

$$E^{(n)}Bu_0=\sum_{i=n+1}^{\infty}\sqrt{2}\sin i\pi s\int_0^1[-u''_0(t)]\,\sqrt{2}\sin i\pi t\,dt,$$

или, интегрируя по частям,

$$E^{(n)}Bu_0 = \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{d_i}{i\pi}\sqrt{2}\sin i\,\pi\, s$$

и

$$\|E^{(n)}Bu_0\| = \Big[\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{|\,d_i\,|^2}{i^2\pi^2}\Big]^{1/2},$$

где

$$d_i = \sqrt{2}[(-1)^i u''_0(1) - u''_0(0)] - \int_0^1 u'''_0(t)\sqrt{2}\cos i\,\pi\, t\, dt.$$

Поскольку система функций $\{\sqrt{2}\cos i\pi t\}$ ортонормирована в $L_2\,[0,\ 1]$, то

$$\int_0^1 u'''_0(t)\sqrt{2}\cos i\,\pi\,t\,dt \to 0 \quad \text{при } n\to\infty$$

и

$$d \leqslant |d_i| \leqslant D \qquad (d,\, D = \text{const};\quad i = 1,\, 2,\, \ldots),$$

причем $d > 0$, если $|u_0''(0)| \neq |u_0''(1)|$. Теперь

$$d\Big[\sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{1}{i^2\pi^2}\Big]^{1/2} \leqslant \|E^{(n)}Bu_0\| \leqslant D\Big[\sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{1}{i^2\pi^2}\Big]^{1/2}.$$

Так как

$$\frac{1}{\pi^2(n+1)} = \frac{1}{\pi^2}\int_{n+1}^{\infty}\frac{dt}{t^2} < \sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{1}{i^2\pi^2} < \frac{1}{\pi^2}\int_{n}^{\infty}\frac{dt}{t^2} = \frac{1}{\pi^2 n},$$

то, в конечном счете,

$$\frac{d}{\pi}\,(n+1)^{-1/2} < \|E^{(n)}Bu_0\| < \frac{D}{\pi}\,n^{-1/2}. \tag{23}$$

Принимая во внимание, что

$$E^{(n)}B^{1/2}u_0 = \sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{\sqrt{2}\sin i\,\pi\, s}{i\pi}\int_0^1[-u''_0(t)]\sqrt{2}\sin i\,\pi\,t\,dt,$$

$$E^{(n)}u_0 = \sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{\sqrt{2}\sin i\,\pi\, s}{i^2\pi^2}\int_0^1[-u''_0(t)]\sqrt{2}\sin i\,\pi\,t\,dt,$$

находим аналогичным способом:

$$\frac{d}{\sqrt{3}\,\pi^2}\,(n+1)^{-3/2} < |E^{(n)}u_0|_B < \frac{D}{\sqrt{3}\,\pi^2}\,n^{-3/2}, \tag{24}$$

$$\frac{d}{\sqrt{5}\,\pi^3}(n+1)^{-5/2} < \|E^{(n)}u_0\| < \frac{D}{\sqrt{5}\,\pi^3}n^{-5/2}. \tag{25}$$

Используя оценки (23), (24) и (25), мы на основе теорем 1, 2 и 3 заключаем, что

$$\|u''_n - u''_0\| = O(n^{-1/2}), \quad \|u'_n - u'_0\| = O(n^{-3/2}),$$
$$\|u_n - u_0\| = O(n^{-5/2}), \tag{26}$$

откуда

$$\max_{0\leqslant s\leqslant 1} |u'_n(s) - u'_0(s)| = O(n^{-1}),$$
$$\max_{0\leqslant s\leqslant 1} |u_n(s) - u_0(s)| = O(n^{-2}). \tag{27}$$

Если $u_0''(0) \neq 0$ или $u_0''(1) \neq 0$, то оценки (26) асимптотически точны. Действительно, из теорем 1, 2 и 3 и неравенств (23), (24) и (25) следует, что

$$\|u''_n - u''_0\| > \frac{d}{\pi}(n+1)^{-1/2}, \quad \|u'_n - u'_0\| > \frac{d}{\sqrt{3}\,\pi^2}(n+1)^{-3/2},$$
$$\|u_n - u_0\| > \frac{d}{\sqrt{5}\,\pi^3}(n+1)^{-5/2},$$

причем $d > 0$, если $|u_0''(0)| \neq |u_0''(1)|$. Несколько видоизменив проведенные рассуждения, получаем аналогичные неравенства и для случая, когда лишь $u''_0(0) \neq 0$ или $u_0''(1) \neq 0$.

Таким образом, при рассматриваемом выборе координатной последовательности (в отличие, например, от полиномиальной координатной последовательности) дальнейшее усиление ограничений на коэффициенты и свободный член уравнения (21) не приводит, вообще говоря, к более быстрой сходимости метода Бубнова-Галеркина.

Отметим, что оценка (27) при некоторых дополнительных ограничениях для метода Ритца выведена Н. М. Крыловым (см. [6], стр. 240—260).

Пример 2. Пусть уравнение (21) имеет при краевых условиях

$$u'(0) = u'(1) = 0 \tag{28}$$

единственное решение $u_0(s)$. Положим на этот раз

$$Au = -(a(s)u')' + u, \quad Ku = b(s)u' + [c(s) - 1]u,$$
$$Bu = -u'' + u \quad (u'(0) = u'(1) = 0).$$

Собственные функции оператора B

$$1, \quad \cos\pi s, \quad \cos 2\pi s, \ldots$$

берем при решении краевой задачи (21), (28) в качестве координатной последовательности.

Применением теорем 1, 2 и 3 приходим к следующим результатам.

Пусть коэффициент $a(s)$ абсолютно непрерывен и (строго) положителен на отрезке $[0, 1]$, и пусть $a'(s)$, $b(s)$, $c(s)$, $f(s) \in L_2[0, 1]$. Тогда

$$\|u'_n - u'_0\| = o(n^{-1}), \quad \max_{0 \leqslant s \leqslant 1} |u_n(s) - u_0(s)| = o(n^{-1}).$$

Если притом $b(s) \equiv 0$, то[8]

$$\|u_n - u_0\| = o(n^{-2}), \quad \max_{0 \leqslant s \leqslant 1} |u_n(s) - u_0(s)| = o(n^{-3/2}).$$

Если, кроме того, $a'(s)$, $c(s)$ и $f(s)$ абсолютно непрерывны, и $a''(s)$, $c'(s)$, $f'(s) \in L_2[0, 1]$, то

$$\|u''_n - u''_0\| = o(n^{-1}), \quad \max_{0 \leqslant s \leqslant 1} |u_n''(s) - u_0''(s)| = o(n^{-1/2}),$$

$$\|u'_n - u'_0\| = o(n^{-2}), \quad \max_{0 \leqslant s \leqslant 1} |u'_n(s) - u'_0(s)| = o(n^{-3/2}),$$

$$\|u_n - u_0\| = o(n^{-3}), \quad \max_{0 \leqslant s \leqslant 1} |u_n(s) - u_0(s)| = o(n^{-5/2}).$$

Если же абсолютно непрерывны также $a''(s)$, $c'(s)$ и $f'(s)$, причем $a'''(s)$, $c''(s)$, $f''(s) \in L_2[0, 1]$, то

$$\|u''_n - u''_0\| = O(n^{-3/2}), \quad \max_{0 \leqslant s \leqslant 1} |u''_n(s) - u_0''(s)| = O(n^{-1}),$$

$$\|u_n' - u_0'\| = O(n^{-5/2}), \quad \max_{0 \leqslant s \leqslant 1} |u'_n(s) - u'_0(s)| = O(n^{-2}),$$

$$\|u_n - u_0\| = O(n^{-7/2}), \quad \max_{0 \leqslant s \leqslant 1} |u_n(s) - u_0(s)| = O(n^{-3}).$$

При рассматриваемой координатной последовательности может метод Бубнова-Галеркина быстрее сходиться лишь в том случае, когда $u_0'''(0) = u_0'''(1) = 0$.

Пример 3. Рассмотрим заданное в конечной области Ω m-мерного евклидова пространства уравнение эллиптического типа

$$-\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial s_i}\left(a_{ik} \frac{\partial u}{\partial s_k}\right) + cu = f, \tag{29}$$

которое требуется интегрировать при краевом условии

$$u|_S = 0, \tag{30}$$

где S — граница области Ω. Коэффициенты $a_{ik} = a_{ki}$ пусть будут непрерывно дифференцируемыми, а коэффициент $c \geqslant 0$ непрерывным в замкнутой области $\bar{\Omega} = \Omega + S$, и пусть $f \in L_2(\Omega)$.

---

[8] Если $\| b \| \neq 0$, то оператор $A^{-1}K$ не ограничен в пространстве $L_2[0, 1]$), и теорема 3 не применима.

Квадратичная форма $\sum\limits_{i,k=1}^{m} a_{ik}\,\overline{\xi}_i\xi_k$ пусть будет положительно определенной во всех точках указанной замкнутой области: найдется число $\vartheta > 0$ такое, что

$$\sum_{i,k=1}^{m} a_{ik}(s)\,\overline{\xi}_i\xi_k \geqslant \vartheta^2 \sum_{i=1}^{m} |\xi_i|^2 \tag{31}$$

при любых значениях переменных $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ и $s = (s_1, s_2, \ldots, s_m) \in \overline{\Omega}$.

Краевую задачу (29), (30) рассмотрим, как уравнение (4) в пространстве $H = L_2(\Omega)$. Положим

$$Au = -\sum_{i,k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial s_i}\left(a_{ik}\frac{\partial u}{\partial s_k}\right) + cu, \quad K = 0,$$

$$Bu = -\Delta u = -\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial s_i^2} \quad (u|_S = 0).$$

Известно (см. [8, 9, 10]), что операторы A и B определены положительно на множестве дважды непрерывно дифференцируемых, равных нулю на границе S функций, и (считая, что они уже расширены до самосопряженных операторов) сходны между собой.

Собственные значения оператора B, т. е. краевой задачи

$$-\Delta\varphi = \lambda\varphi, \quad \varphi|_S = 0, \tag{32}$$

имеют, как известно, порядок $\lambda_n \sim n^{\frac{2}{m}}$. При решении краевой задачи (29), (30) методом Ритца берем собственные функции $\{\varphi_i\}$ оператора B (или, краевой задачи (32)) в качестве координатной последовательности. На основе теоремы 4 справедливы оценки погрешности:

$$\|u_n - u_0\| \leqslant \|A^{-1}B\|\, \|Au_n - f\|\lambda_n^{-1} = o(n^{-\frac{2}{m}}),$$

$$|u_n - u_0{}_A \leqslant \|A^{-1/2}B^{1/2}\|\, \|Au_n - f\|\lambda_n^{-1/2} = o(n^{-\frac{1}{m}}).$$

Притом, в силу замечания 3,

$$\|A^{-1/2}B^{1/2}\| \leqslant \frac{1}{\vartheta},$$

где ϑ — определенное соотношением (31) число. Действительно, ввиду (31) имеем

$$(Au, u) \geqslant \int\limits_{\Omega} \sum_{i,k=1}^{m} a_{ik}\frac{\partial\overline{u}}{\partial s_i}\frac{\partial u}{\partial s_k}\,d\Omega \geqslant \vartheta^2 \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{m} \left|\frac{\partial u}{\partial s_i}\right|^2 d\Omega = \vartheta^2(Bu, u).$$

Литература

1. Богарян О. К., О сходимости невязки методов Бубнова-Галеркина и Ритца. Докл. АН СССР, 1961, **141**, 267—269.
2. Джишкариани А. В., О быстроте сходимости приближенного метода Ритца. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1964, **3**, 654—663.
3. Канторович Л. В., Функциональный анализ и прикладная математика. Успехи матем. наук, 1948, **3**, № 6, 89—185.
4. Канторович Л. В., Акилов Г. П., Функциональный анализ в нормированных пространствах. Москва, 1959.
5. Красносельский М. А., Сходимость метода Галеркина для нелинейных уравнений. Докл. АН СССР, 1950, **73**, 1121—1124.
6. Крылов Н. М., Избранные труды, том 3. Киев, 1961.
7. Михлин С. Г., О сходимости метода Галеркина. Докл. АН СССР, 1948, **61**, 197—199.
8. Михлин С. Г., Некоторые достаточные условия сходимости метода Галеркина. Уч. зап. ЛГУ, сер. матем., 1950, **21**, 3—23.
9. Михлин С. Г., По поводу метода Ритца. Докл. АН СССР, 1956, **106**, 391—394.
10. Михлин С. Г., Вариационные методы в математической физике. Москва, 1957.
11. Михлин С. Г., Проблема минимума квадратичного функционала. Москва—Ленинград, 1952.
12. Польский Н. И., О сходимости некоторых приближенных методов анализа. Укр. матем. ж., 1955, **7**, 56—70.
13. Польский Н. И., Проекционные методы в прикладной математике. Докл. АН СССР, 1962, **143**, 787—790.

Поступило
10 IX 1963

VEAHINNANGUID GALJORKINI MEETODILE I. ASÜMPTOOTILISED HINNANGUD

G. Vainikko

Resümee

Käesolevas artiklis tuletatakse asümptootilised veahinnangud võrrandi (4) lähislahenditele, mis on leitud Galjorkini meetodiga. Operaator A võrrandis (4) on positiivselt määratud ja enesekaasne. Koordinaatjadaks on võetud operaatori B omaelemendid, kus B on suvaline positiivselt määratud enesekaasne operaator määramispiirkonnaga $D(B) = D(A)$.

ERROR BOUNDS FOR GALERKIN'S METHOD I. ASYMPTOTIC ERROR BOUNDS

G. Vainikko

Summary

In the paper some asymptotic error bounds for Galerkin's approximate solutions of equation (4) are derived. Operator A in equation (4) is positively definite and self-adjoined. As coordinate sequence the eigenelements of operator B are taken, where B is an arbitrary positive definite self-adjoined operator with domain of definition $D(B) = D(A)$.

НЕКОТОРЫЕ ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТИ МЕТОДА БУБНОВА-ГАЛЕРКИНА II.
ОЦЕНКИ n-ОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Г. Вайникко

Кафедра вычислительной математики

Для метода Ритца имеется сравнительно много априорных и апостериорных оценок погрешности, позволяющих оценить погрешность n-ого приближения (см. [3, 4, 7]). При выводе этих оценок так или иначе используется положительная определенность входящего в уравнение оператора, что, в частности, дает простую оценку для нормы обратного оператора. Перенос этих результатов на метод Бубнова-Галеркина вызывает большие трудности, связанные, в первую очередь, с трудностью оценки нормы обратного оператора. Найти априорную оценку для нормы обратного оператора в общем случае совершенно безнадежно; для получения апостериорной оценки является естественным путь извлечения необходимой информации из системы уравнений Бубнова-Галеркина. Такого типа апостериорные оценки погрешности метода Бубнова-Галеркина содержатся, как частный случай, в разработанной Л. В. Канторовичем [5, 6] общей теории приближенных методов.

Тем не менее, представляет интерес исследовать метод Бубнова-Галеркина самостоятельно, стараясь возможно более полно учесть специфику метода. В настоящей статье выводятся некоторые оценки погрешности, для применения которых надо оценить норму обратной матрицы системы уравнений Бубнова-Галеркина. Основные результаты сформулированы в теоремах 1, 2 и 3.

1. Установим некоторые вспомогательные результаты.

Пусть в сепарабельном гильбертовом пространстве H задано уравнение

$$u + T u = f, \qquad (1)$$

где T — линейный вполне непрерывный оператор. Уравнение (1) решим методом Бубнова-Галеркина. Для этого зададимся полной в H координатной последовательностью $\{\varphi_i\}$ и определим n-ое приближение

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \varphi_k$$

из условий

$$(u_n + T\,u_n - f, \varphi_i) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{2}$$

Если уравнение (1) имеет единственное решение u_0, то, как известно (см. [8, 9]), приближение u_n однозначно определяется из условий (2) при каждом n, начиная с некоторого $n = n_0$, и $u_n \to \to u_0$ при $n \to \infty$.

Обозначим через E тождественный оператор в пространстве H, через E_n оператор ортогонального проектирования в подпространство, порожденное элементами $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, и $E^{(n)} = = E - E_n$.

Лемма 1. *Если уравнение* (1) *имеет единственное решение* u_0, *то для погрешности метода Бубнова-Галеркина* (2) *справедливы выражения*[1]:

$$u_0 - u_n = E^{(n)} u_0 - E_n (E + T\,E_n)^{-1} T\,E^{(n)} u_0, \tag{3}$$

$$u_0 - u_n = (E + E_n T)^{-1} E^{(n)} u_0, \tag{3'}$$

$$u_0 - u_n = [E^{(n)} - (E + T)^{-1} T E^{(n)}](f - u_n - Tu_n), \tag{4}$$

$$u_0 - u_n = (E + T)^{-1} E^{(n)} (f - u_n - Tu_n). \tag{4'}$$

Доказательство. Мы будем выводить равенства (3), (3'), (4) и (4') в обратном порядке.

Условия (2) равносильны любому из следующих условий:

$$E_n (u_n + Tu_n - f) = 0, \tag{5}$$

$$(E + E_n T) u_n = E_n f. \tag{5'}$$

На основе условия (5) заключаем, что

$$(E + T)(u_0 - u_n) = f - u_n - Tu_n = E^{(n)} (f - u_n - Tu_n),$$

откуда вытекает равенство (4'). Заметив, что

$$(E + T)^{-1} = E - (E + T)^{-1} T,$$

мы из равенства (4') получаем равенство (4).

Имеем

$$(E + E_n T) u_0 = E^{(n)} u_0 + E_n (E + T) u_0 = E^{(n)} u_0 + E_n f.$$

Совместно с (5') это дает

$$(E + E_n T)(u_0 - u_n) = E^{(n)} u_0,$$

и мы приходим к равенству (3'). Чтобы из равенства (3') получить равенство (3), заметим, что

$$(E + E_n T)^{-1} = E - (E + E_n T)^{-1} E_n T, \tag{6}$$

и покажем, что

$$(E + E_n T)^{-1} E_n = E_n (E + T E_n)^{-1}. \tag{7}$$

---

[1] Нетрудно убедиться, что при $n \geqslant n_0$ операторы $E + TE_n$ и $E + E_n T$ обратимы.

Действительно, обозначив $v_n = (E + TE_n)^{-1}f$, имеем

$$v_n + T\,E_n v_n = f.$$

Применением к обеим частям этого равенства оператора E_n находим:

$$E_n v_n + E_n T(E_n v_n) = E_n f,$$

т. е. $E_n v_n$ удовлетворяет условию (5'). Значит, $E_n v_n = u_n$, или, заменив v_n его выражением,

$$E_n(E + T\,E_n)^{-1}f = u_n. \tag{7'}$$

С другой стороны, из условия (5') вытекает, что и

$$(E + E_n T)^{-1} E_n f = u_n.$$

Так как проведенное рассмотрение остается в силе при любом $f \in H$, то этим равенство (7), а вместе с тем и равенство (3) доказаны.

Лемма 1 доказана.

Если координатная последовательность $\{\varphi_i\}$ ортонормирована, то условия (2) приводят к следующей системе уравнений для определения коэффициентов ξ_i:

$$\xi_i + \sum_{k=1}^{n} (T\varphi_k, \varphi_i)\xi_k = (f, \varphi_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{2'}$$

Обозначим через

$$B_n = (\beta_{ik})_{i,k=1}^{n}$$

обратную матрицу системы уравнений (2'), так что решение системы дается формулами

$$\xi_i = \sum_{k=1}^{n} \beta_{ik}(f, \varphi_k) \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{2''}$$

Через $\|B_n\|$ будем обозначать норму матрицы B_n в пространстве[2] R_n.

Лемма 2. *Пусть координатная последовательность $\{\varphi_i\}$ ортонормирована в H. Тогда*

---

[2] Обозначив через A_n матрицу системы уравнений (2'), через A_n^* и B_n^* сопряженные к A_n и B_n матрицы, а через $a_1^{(n)}$ и $b_n^{(n)}$ соответственно наименьшее собственное значение матрицы $A_n A_n^*$ и наибольшее собственное значение матрицы $B_n B_n^*$, имеем, как известно,

$$\|B_n\| = \sqrt{\frac{1}{a_1^{(n)}}} = \sqrt{b_n^{(n)}}.$$

Известно также, что

$$\|B_n\| \leqslant 1 + [\sum_{i,k=1}^{n} |\beta_{ik} - \delta_{ik}|^2]^{1/2} \quad \left(\delta_{ik} = \begin{cases} 0 \text{ при } i \neq k \\ 1 \text{ при } i = k \end{cases}\right).$$

$$\|E_n(E+TE_n)^{-1}\| = \|B_n\|, \tag{8}$$
$$\|(E+E_nT)^{-1}\| \leqslant 1 + \|B_n\|\,\|T\|. \tag{8'}$$

При $n \to \infty$

$$(1+\|B_n\|\,\|T\|)\,\|TE^{(n)}\| \to 0, \tag{9}$$
$$(1+\|B_n\|\,\|T\|)\|E^{(n)}T\| \to 0, \tag{9'}$$

и если при некотором n уже

$$(1+\|B_n\|\,\|T\|)\|T\,E^{(n)}\| < 1 \tag{10}$$

или

$$(1+\|B_n\|\,\|T\|)\|E^{(n)}T\| < 1, \tag{10'}$$

то соответственно

$$\|(E+T)^{-1}\| \leqslant \frac{1+\|B_n\|\,\|T\|}{1-(1+\|B_n\|\,\|T\|)\|T\,E^{(n)}\|}, \tag{11}$$

$$\|(E+T)^{-1}\| \leqslant \frac{1+\|B_n\|\,\|T\|}{1-(1+\|B_n\|\,\|T\|)\,\|E^{(n)}T\|}. \tag{11'}$$

Доказательство. На основе равенств (7′) и (2″) имеем

$$\|E_n(E+T\,E_n)^{-1}f\| = \|u_n\| = [\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^2]^{1/2} = [\sum_{i=1}^{n}|\sum_{k=1}^{n}\beta_{ik}(f,\varphi_k)|^2]^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant \|B_n\|\,[\sum_{k=1}^{n}|(f,\varphi_k)|^2]^{1/2} \leqslant \|B_n\|\,\|f\|.$$

Полученное неравенство справедливо при любом $f \in H$; для $f = \sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k$ такого, что

$$\sum_{i=1}^{n}|\sum_{k=1}^{n}\beta_{ik}\,c_k|^2 = \|B_n\|^2\sum_{k=1}^{n}|c_k|^2,$$

мы вместо неравенства получаем равенство:

$$\|E_n(E+T\,E_n)^{-1}f\| = \|B_n\|\,\|f\|.$$

Этим равенство (8) доказано. Неравенство (8′) вытекает из равенств (6), (7) и (8).

Ввиду полноты в H последовательности $\{\varphi_i\}$ и вполне-непрерывности оператора T, при $n \to \infty$

$$\|T - T\,E_n\| = \|TE^{(n)}\| \to 0,$$
$$\|T - E_nT\| = \|E^{(n)}T\| \to 0,$$

откуда, в частности, следует, что

$$\|(E+TE_n)^{-1}\| \to \|(E+T)^{-1}\|.$$

Значит, нормы $\|(E+TE_n)^{-1}\|$ $(n=n_0,\ n_0+1,\ldots)$ ограничены в совокупности. Тем более ограничены в совокупности нормы (8), и соотношения (9) и (9′) действительно имеют место.

Из очевидного равенства

$$(E+TE_n)^{-1}=E-TE_n(E+TE_n)^{-1}$$

с помощью соотношения (8) заключаем, что

$$\|(E+TE_n)^{-1}\| \leqslant 1+\|T\|\,\|B_n\|. \tag{12}$$

Если

$$\|(E+TE_n)^{-1}\|\,\|T-TE_n\|<1, \tag{13}$$

то по известной теореме (см. [6], стр. 159)

$$\|(E+T)^{-1}\| \leqslant \frac{\|(E+TE_n)^{-1}\|}{1-\|(E+TE_n)^{-1}\|\,\|T-TE_n\|}. \tag{14}$$

Заменив норму $\|(E+TE_n)^{-1}\|$ оценкой (12), условие (13) переходит в более жесткое условие (10), а оценка (14) в более грубую оценку (11).

Оценка (11′) доказывается аналогично; вместо (12) надо пользоваться уже доказанной оценкой (8′).

Лемма 2 доказана.

2. Пусть в гильбертовом пространстве H задано линейное уравнение

$$Au+Ku=f, \tag{15}$$

где A самосопряженный оператор, имеющий вполне непрерывный обратный оператор A^{-1} (A может быть и не определенным положительно). Относительно оператора K предполагаем пока лишь, что область его определения содержит область определения оператора A:

$$D(K)\supset D(A).$$

Обозначим через $\{\lambda_i\}$ и $\{\varphi_i\}$ полную систему собственных значений и собственных элементов оператора A:

$$A\varphi_i=\lambda_i\varphi_i, \quad \varphi_i \in D(A) \quad (i=1, 2, \ldots). \tag{16}$$

Из сделанных относительно оператора A предположений следует, что система $\{\varphi_i\}$ полна в пространстве H; без ограничения общности будем считать, что элементы $\{\varphi_i\}$ ортонормированы в H и расположены в порядке возрастания чисел $|\lambda_i|$:

$$0<|\lambda_1| \leqslant |\lambda_2| \leqslant \ldots \leqslant |\lambda_i| \leqslant \ldots \quad (|\lambda_i| \to \infty \quad \text{при } i \to \infty).$$

Собственные элементы $\{\varphi_i\}$ считаем известными и примем за координатную последовательность. Приближенное решение уравнения (15)

$$u_n=\sum_{k=1}^{n}\xi_k\varphi_k$$

определяется, по методу Бубнова-Галеркина, из условий

$$(Au_n+Ku_n-f, \varphi_i)=0 \quad (i=1, 2, \ldots, n), \tag{17}$$

которые, учитывая (16) и ортонормированность элементов $\{\varphi_i\}$, приводят к системе уравнений

$$\lambda_i\xi_i + \sum_{k=1}^{n} (K\varphi_k, \varphi_i)\xi_k = (f, \varphi_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{17'}$$

Частным случаем результатов О. К. Богаряна [1] является[3]

Лемма 3. *Пусть оператор KA^{-1} вполне непрерывен в пространстве H, и пусть уравнение* (15) *имеет единственное решение u_0 $(u_0 \in D(A))$. Тогда, начиная с некоторого $n = n_0$, система уравнений* (17′) *разрешима единственным образом, и невязка*

$$\delta_n = f - Au_n - Ku_n$$

стремится при $n \to \infty$ к нулю.

Обозначим через $(\gamma_{ik})_{i,k=1}^{n}$ обратную матрицу системы уравнений (17′), и

$$\Gamma_n = (\lambda_i\gamma_{ik})^n{}_{i,k=1},\ \Gamma'_n = (\gamma_{ik}\lambda_k)^n{}_{i,k=1},\ \Gamma''_n = (\sqrt{|\lambda_i|}\,\gamma_{ik}\sqrt{|\lambda_k|})^n{}_{i,k=1}.$$

Через $\|\Gamma_n\|$, $\|\Gamma_n'\|$ и $\|\Gamma_n''\|$ будем обозначать нормы этих матриц в пространстве R_n.

Символам E_n и $E^{(n)}$ придаем тот же смысл, что и в предыдущем пункте: E_n — оператор ортогонального (в смысле метрики пространства[4] H) проектирования на линейную оболочку элементов $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, и $E^{(n)} = E - E_n$.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия леммы 3. Тогда для метода Бубнова-Галеркина* (17) *справедливы оценки погрешности:*

$$\|u_n - u_0\| \leqslant \left[\frac{1}{|\lambda_{n+1}|} + \frac{\varkappa_n}{|\lambda_1|}\|KA^{-1}E^{(n)}\|\right]\varkappa\|f\|, \tag{18}$$

$$\|u_n - u_0\| \leqslant \left[\frac{1}{|\lambda_{n+1}|} + \frac{\varkappa}{|\lambda_1|}\|KA^{-1}E^{(n)}\|\right]\|\delta_n\|, \tag{19}$$

---

[3] Эта лемма просто следует также из теоремы С. Г. Михлина [8, 9] о сходимости метода Бубнова-Галеркина для неоднородного уравнения.

[4] Если оператор A определен положительно, то операторы E_n и $E^{(n)}$ проектируют ортогонально и в смысле метрики пространства H_A (которое получается пополнением множества $D(A)$ по скалярному произведению $[u, v]_A = (Au, v)$; более подробные сведения о пространстве H_A см. [10]). Действительно, последовательность $\left\{\frac{\varphi_i}{\sqrt{\lambda_i}}\right\}$ ортонормирована в H_A, и обозначив через $E_n{}^A$ оператор ортогонального, в смысле метрики пространства H_A, проектирования на линейную оболочку элементов $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, имеем для любого $u \in H_A$:

$$E_n{}^A u = \sum_{i=1}^{n}\left[u, \frac{\varphi_i}{\sqrt{\lambda_i}}\right]_A \frac{\varphi_i}{\sqrt{\lambda_i}} = \sum_{i=1}^{n}\left(u, \frac{A\varphi_i}{\sqrt{\lambda_i}}\right)\frac{\varphi_i}{\sqrt{\lambda_i}} = \sum_{i=1}^{n}(u, \varphi_i)\varphi_i = E_n u.$$

где

$$\varkappa = \|(E + KA^{-1})^{-1}\|,$$

$$\varkappa_n = \|E_n(E + KA^{-1}E_n)^{-1}\| = \|\Gamma_n\|. \qquad (20)$$

Если при некотором n мы располагаем оценками

$$\|\Gamma_n\| \leqslant \gamma_n, \quad \|KA^{-1}\| \leqslant \tau, \quad \|KA^{-1}E^{(n)}\| \leqslant \tau_n \qquad (21)$$

такими, что

$$(1 + \tau\gamma_n)\tau_n < 1, \qquad (22)$$

то

$$\varkappa \leqslant \frac{1 + \tau\gamma_n}{1 - (1 + \tau\gamma_n)\tau_n}. \qquad (23)$$

Доказательство. Элемент $w_0 = Au_0$ является решением уравнения

$$w + KA^{-1}w = f. \qquad (24)$$

Обозначив

$$w_n = Au_n = \sum_{k=1}^{n} \zeta_k\varphi_k \quad (\zeta_k = \lambda_k\xi_k),$$

перепишем условия (17) в виде

$$(w_n + KA^{-1}w_n - f, \varphi_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \qquad (25)$$

Трактуем w_n, как определенное методом Бубнова-Галеркина (25) приближенное решение уравнения (24). Для уравнения (24) и метода Бубнова-Галеркина (25) применим лемму 1. Равенства (3) и (4) в настоящем случае выглядят так:

$$w_0 - w_n = E^{(n)}w_0 - E_n(E + KA^{-1}E_n)^{-1}KA^{-1}E^{(n)}w_0,$$

$$w_0 - w_n = [E^{(n)} - (E + KA^{-1})^{-1}KA^{-1}E^{(n)}](f - w_n - KA^{-1}w_n).$$

Применив к обеим частям этих равенств оператор A^{-1}, придадим им вид:

$$u_0 - u_n = A^{-1}E^{(n)} \cdot w_0 - A^{-1} \cdot E_n(E + {} + KA^{-1}E_n)^{-1} \cdot KA^{-1}E^{(n)} \cdot w_0, \qquad (26)$$

$$u_0 - u_n = [A^{-1}E^{(n)} - A^{-1} \cdot (E + {} + KA^{-1})^{-1} \cdot KA^{-1}E^{(n)}](f - Au_n - Ku_n). \qquad (27)$$

Заметив, что

$$w_0 = (E + KA^{-1})^{-1}f$$

и что, в силу соотношений $|\lambda_i| \leqslant |\lambda_{i+1}|$ $(i = 1, 2, \ldots)$,

$$\|A^{-1}\| = \frac{1}{|\lambda_1|}, \quad \|A^{-1}E^{(n)}\| = \|E^{(n)}A^{-1}\| = \frac{1}{|\lambda_{n+1}|},$$

мы из равенств (26) и (27) получаем оценки (18) и (19).

Условия (25) приводят к системе уравнений

$$\zeta_i + \sum_{k=1}^{n} (KA^{-1}\varphi_k, \varphi_i)\zeta_k = (f, \varphi_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

обратной матрицей для которой служит матрица Γ_n. Теперь соотношения (20) и (23) следуют из леммы 2.

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия леммы* 3 *и пусть, кроме того, оператор* $A^{-1}K$ *вполне непрерывен в пространстве* H. *Тогда для метода Бубнова-Галеркина* (17) *справедливы оценки погрешности*:

$$\|u_n - u_0\| \leqslant \frac{\varkappa'_n \varkappa}{|\lambda_{n+1}|} \|f\|, \tag{18'}$$

$$\|u_n - u_0\| \leqslant \frac{\varkappa'}{|\lambda_{n+1}|} \|\delta_n\|, \tag{19'}$$

где

$$\varkappa' = \|(E + A^{-1}K)^{-1}\|,$$

$$\varkappa'_n = \|(E + E_nA^{-1}K)^{-1}\| \leqslant 1 + \|A^{-1}K\| \|\Gamma'_n\|. \tag{20'}$$

Если при некотором n *мы располагаем оценками*

$$\|\Gamma'_n\| \leqslant \gamma'_n, \quad \|A^{-1}K\| \leqslant \tau', \quad \|E^{(n)}A^{-1}K\| \leqslant \tau'_n \tag{21'}$$

такими, что

$$(1 + \tau'\gamma'_n)\tau'_n < 1, \tag{22'}$$

то

$$\varkappa' \leqslant \frac{1 + \tau'\gamma'_n}{1 - (1 + \tau'\gamma'_n)\tau'_n}. \tag{23'}$$

Доказательство. Переписав условия (17) в виде

$$(u_n + A^{-1}Ku_n - A^{-1}f, \varphi_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{28}$$

трактуем u_n, как определенное методом Бубнова-Галеркина приближенное решение уравнения

$$u + A^{-1}Ku = A^{-1}f, \tag{29}$$

равносильного уравнению (15). Равенства (3′) и (4′) для уравнение (29) выглядят так:

$$\begin{aligned} u_0 - u_n &= (E + E_nA^{-1}K)^{-1}E^{(n)}u_0 = \\ &= (E + E_nA^{-1}K)^{-1} \cdot E^{(n)}A^{-1} \cdot w_0, \end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned} u_0 - u_n &= (E + A^{-1}K)^{-1}E^{(n)}(A^{-1}f - u_n - A^{-1}Ku_n) = \\ &= (E + A^{-1}K)^{-1} \cdot E^{(n)}A^{-1} \cdot (f - Au_n - Ku_n), \end{aligned} \tag{4}$$

где $w_0 = Au_0 = (E + KA^{-1})^{-1}f$. Отсюда мы находим оценки (18′) и (19′).

Условия (28) приводят к системе уравнений

$$\xi_i+\sum_{k=1}^{n}(A^{-1}K\varphi_k,\varphi_i)\xi_k=(A^{-1}f,\varphi_i)\quad(i=1,2,\ldots\ n),$$

обратной матрицей для которой является матрица Γ'_n.

Учитывая это, мы с помощью леммы 2 устанавливаем оценки (20′) и (23′).

Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия леммы 3. Пусть, кроме того, оператор A определен положительно, и $A^{-1}K$ — вполне непрерывный в пространстве H_A оператор. Тогда для метода Бубнова-Галеркина (17) справедливы оценки погрешности:*

$$|u_n-u_0|_A\leqslant\frac{\varkappa_n''\varkappa}{\sqrt{\lambda_{n+1}}}\|f\|,\tag{18''}$$

$$|u_n-u_0|_A\leqslant\frac{\varkappa''}{\sqrt{\lambda_{n+1}}}\|\delta_n\|,\tag{19''}$$

где

$$\varkappa''=|(E+A^{-1}K)^{-1}|_A,$$

$$\varkappa''_n=|(E+E_nA^{-1}K)^{-1}|_A\leqslant 1+|A^{-1}K|_A\|\Gamma''_n\|.\tag{20''}$$

Если при некотором n мы располагаем оценками

$$\|\Gamma''_n\|\leqslant\gamma''_n,\quad |A^{-1}K|_A\leqslant\tau'',\quad |E^{(n)}A^{-1}K|_A\leqslant\tau''_n\tag{21''}$$

такими, что

$$(1+\tau''\gamma''_n)\tau''_n<1,\tag{22''}$$

то

$$\varkappa''\leqslant\frac{1+\tau''\gamma''_n}{1-(1+\tau''\gamma''_n)\tau''_n}.\tag{23''}$$

Доказательство. Придадим равенствам (30) и (31) вид:

$$u_0-u_n=(E+E_nA^{-1}K)^{-1}\cdot A^{-1/2}\cdot A^{-1/2}E^{(n)}w_0,$$

$$u_0-u_n=(E+A^{-1}K)^{-1}\cdot A^{-1/2}\cdot A^{-1/2}E^{(n)}\delta_n.$$

Отсюда, так как $\|A^{-1/2}E^{(n)}\|=\dfrac{1}{\sqrt{\lambda_{n+1}}}$ и

$$|A^{-1/2}\cdot A^{-1/2}E^{(n)}w_0|_A=\|A^{-1/2}E^{(n)}w_0\|\leqslant\frac{\|w_0\|}{\sqrt{\lambda_{n+1}}},$$

$$|A^{-1/2}\cdot A^{-1/2}E^{(n)}\delta_n|_A=\|A^{-1/2}E^{(n)}\delta_n\|\leqslant\frac{\|\delta_n\|}{\sqrt{\lambda_{n+1}}},$$

вытекают оценки (18″) и (19″).

Чтобы применить для вывода оценок (20″) и (23″) лемму 2, примем во внимание, что последовательность $\{\varphi_i\}$ не ортонормирована в пространстве H_A; ортонормированной в пространстве H_A является последовательность $\left\{\frac{\varphi_i}{\sqrt{\lambda_i}}\right\}$. Поэтому мы перепишем условия (17) в виде

$$\left[u_n + A^{-1}Ku_n - A^{-1}f,\ \frac{\varphi_i}{\sqrt{\lambda_i}}\right]_A = 0$$

$$\left(i = 1, 2, \ldots, n;\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \eta_k \frac{\varphi_k}{\sqrt{\lambda_k}}\right) \tag{32}$$

и трактуем u_n, как определенное методом Бубнова-Галеркина приближенное решение (рассматриваемого на этот раз в пространстве H_A) уравнения (29). Условия (32) приводят к системе уравнений

$$\eta_i + \sum_{k=1}^{n} \left[A^{-1}K \frac{\varphi_k}{\sqrt{\lambda_k}},\ \frac{\varphi_i}{\sqrt{\lambda_i}}\right]_A \eta_k = \left[A^{-1}f,\ \frac{\varphi_i}{\sqrt{\lambda_i}}\right]_A \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

обратной матрицей для которой является матрица Γ_n''. Теперь оценки (20″) и (23″) следуют из леммы 2.

Теорема 3 доказана.

3. Сделаем несколько замечаний относительно теорем 1, 2 и 3.

На основе леммы 2 можем высказать следующее.

Замечание 1. Указанный в теоремах 1, 2 и 3 способ оценки норм $\varkappa$, $\varkappa'$ и $\varkappa''$, в принципе, всегда осуществим: при достаточно больших n, если оценки (21), (21′) и (21″) не слишком грубы, условия (22), (22′) и (22″) выполняются.

Применение теорем 1, 2 и 3 в одном важном частном случае облегчается следующим:

Замечание 2. Пусть оператор A определен положительно. Если при каждом $u \in D(A)$

$$\|Ku\| \leqslant \omega |u|_A \quad (\omega = \text{const}),$$

то

$$\|KA^{-1}\| \leqslant \frac{\omega}{\sqrt{\lambda_1}}, \quad \|KA^{-1}E^{(n)}\| \leqslant \frac{\omega}{\sqrt{\lambda_{n+1}}},$$

$$|A^{-1}K|_A \leqslant \frac{\omega}{\sqrt{\lambda_1}}, \quad |E^{(n)}A^{-1}K|_A \leqslant \frac{\omega}{\sqrt{\lambda_{n+1}}}.$$

Аналогично, если[5] $D(K^*) \supset D(A)$ и при каждом $u \in D(A)$

$$\|K^*u\| \leqslant \omega^* |u|_A \quad (\omega^* = \text{const}),$$

---

[5] Если оператор $A^{-1}K$ ограничен в пространстве H, то условие $D(K^*) \supset D(A)$ выполнено.

то

$$\|A^{-1}K\| = \|K^*A^{-1}\| \leqslant \frac{\omega^*}{\sqrt{\lambda_1}}, \quad \|E^{(n)}A^{-1}K\| = \|K^*A^{-1}E^{(n)}\| \leqslant \frac{\omega^*}{\sqrt{\lambda_{n+1}}}.$$

Действительно,

$$\|KA^{-1}u\| \leqslant \omega|A^{-1}u|_A = \omega\|A^{-1/2}u\| \leqslant \frac{\omega}{\sqrt{\lambda_1}}\|u\|,$$

$$\|KA^{-1}E^{(n)}u\| \leqslant \omega|A^{-1}E^{(n)}u|_A = \omega\|A^{-1/2}E^{(n)}u\| \leqslant \frac{\omega}{\sqrt{\lambda_{n+1}}}\|u\|,$$

$$|A^{-1}Ku|_A = \|A^{-1/2}Ku\| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\|Ku\| \leqslant \frac{\omega}{\sqrt{\lambda_1}}|u|_A,$$

$$|E^{(n)}A^{-1}Ku|_A = \|E^{(n)}A^{-1/2}Ku\| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\lambda_{n+1}}}\|Ku\| \leqslant \frac{\omega}{\sqrt{\lambda_{n+1}}}|u|_A.$$

Замечание 3. Если в условиях теоремы 1 оператор A определен положительно, то из равенств (26) и (27) вытекают следующие энергетические оценки погрешности:

$$|u_n - u_0|_A \leqslant \left[\frac{1}{\sqrt{\lambda_{n+1}}} + \frac{\varkappa_n}{\sqrt{\lambda_1}}\tau_n\right]\varkappa\|f\|, \tag{33}$$

$$|u_n - u_0|_A \leqslant \left[\frac{1}{\sqrt{\lambda_{n+1}}} + \frac{\varkappa}{\sqrt{\lambda_1}}\tau_n\right]\|\delta_n\|. \tag{34}$$

Замечание 4. Пусть A — самосопряженный дифференциальный оператор, порожденный некоторым (самосопряженным в смысле Лагранжа) дифференциальным выражением, заданным в конечной области Ω m-мерного евклидова пространства, и некоторыми однородными краевыми условиями на границе S области Ω. Пусть K — дифференциальный оператор более низкого порядка, чем A. Положим $H = L_2(\Omega)$. Если выполнены условия теоремы 1, и ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{|\varphi_i(s)|^2}{|\lambda_i|^2} \quad (s = (s_1, s_2, \ldots, s_m)) \tag{35}$$

сходится равномерно в замкнутой области $\overline{\Omega} = \Omega + S$, то из равенств (26) и (27) вытекают следующие равномерные оценки погрешности:

$$|u_n(s) - u_0(s)| \leqslant \left[\sqrt{\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{|\varphi_i(s)|^2}{|\lambda_i|^2}} + \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{|\varphi_i(s)|^2}{|\lambda_i|^2}}\,\varkappa_n\tau_n\right]\varkappa\|f\|, \tag{36}$$

$$|u_n(s) - u_0(s)| \leqslant \left[\sqrt{\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{|\varphi_i(s)|^2}{|\lambda_i|^2}} + \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{|\varphi_i(s)|^2}{|\lambda_i|^2} \varkappa \tau_n} \right] \|\delta_n\|, \qquad (37)$$

где s — любая точка из $\bar{\Omega}$.

Равномерные оценки погрешности можно при определенных условиях получить также из энергетических оценок погрешности, указанных в теореме 3.

Замечание 5. В случае, когда K близок к нулевому оператору, так что

$$\|KA^{-1}\| < 1, \ \|A^{-1}K\| < 1, \ |A^{-1}K|_A < 1,$$

оценку величин $\varkappa$, $\varkappa_n$, $\varkappa'$, $\varkappa'_n$, $\varkappa''$ и $\varkappa''_n$ легко получить с помощью теоремы Банаха. Оценки (18), (18′), (18″), (33) и (36) в этом случае являются априорными оценками погрешности. Оценки типа (36) в этом простом случае исследованы в [2].

4. Пример. В конечной области Ω m-мерного евклидова пространства задано дифференциальное уравнение

$$-\triangle u + \sum_{i=1}^{m} b_i \frac{\partial u}{\partial s_i} + cu = f \quad \left(\triangle = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2}{\partial s_i^2} \right), \qquad (38)$$

которое требуется интегрировать при краевом условии

$$u|_S = 0, \qquad (39)$$

где S — граница области Ω. Коэффициенты b_i пусть будут непрерывно дифференцируемыми, а коэффициент c непрерывным в замкнутой области $\bar{\Omega} = \Omega + S$, и пусть $f \in L_2(\Omega)$. Краевая задача (38), (39) пусть имеет единственное решение.

При решении краевой задачи (38), (39) методом Бубнова-Галеркина берем в качестве координатной последовательности полную ортонормированную систему собственных функций $\{\varphi_i\}$ краевой задачи

$$-\triangle \varphi = \lambda \varphi \ , \ \varphi|_S = 0,$$

расположенную в порядке возрастания собственных значений λ_i.

Краевую задачу (38), (39) рассмотрим, как уравнение (15) в пространстве $H = L_2(\Omega)$, положив

$$Au = -\triangle u, \ Ku = \sum_{i=1}^{m} b_i \frac{\partial u}{\partial s_i} + cu \qquad (u|_S = 0).$$

Оператор $A = -\Delta$, как известно (см. [8, 9]), определен положительно на множестве дважды непрерывно дифференцируемых функций, равных нулю на границе S; мы считаем, что он уже расширен до самосопряженного оператора. Известно также (см. [8, 9]), что оператор $A^{-1}K$ вполне непрерывен в пространстве H_A; нетрудно показать, что операторы KA^{-1} и $A^{-1}K$ вполне непрерывны в пространстве $L_2(\Omega)$. Таким образом, выполнены условия теорем 1, 2 и 3.

Имеем

$$\|u\| = \Big[\int\limits_{\Omega} |u|^2 d\Omega\Big]^{1/2}, \quad |u|_A = \Big[\int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{m} \Big|\frac{\partial u}{\partial s_i}\Big|^2 d\Omega\Big]^{1/2} = \Big[\sum_{i=1}^{m} \Big\|\frac{\partial u}{\partial s_i}\Big\|^2\Big]^{1/2},$$

$$\|u\| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} |u|_A.$$

Поэтому

$$\|Ku\| = \Big\| \sum_{i=1}^{m} b_i \frac{\partial u}{\partial s_i} + cu \Big\| \leqslant \sum_{i=1}^{m} \Big\|\frac{\partial u}{\partial s_i}\Big\| \cdot \max_{s\in\overline{\Omega}} |b_i(s)| +$$

$$+ \|u\| \cdot \max_{s\in\overline{\Omega}} |c(s)| \leqslant \Big[\sum_{i=1}^{m} \Big\|\frac{\partial u}{\partial s_i}\Big\|^2\Big]^{1/2} \Big[\sum_{i=1}^{m} \max_{s\in\overline{\Omega}} |b_i(s)|^2\Big]^{1/2} +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} |u|_A \cdot \max_{s\in\overline{\Omega}} |c(s)| = \omega |u|_A,$$

где

$$\omega = \Big[\sum_{i=1}^{m} \max_{s\in\overline{\Omega}} |b_i(s)|^2\Big]^{1/2} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \max_{s\in\overline{\Omega}} |c(s)|. \tag{40}$$

Принимая во внимание, что

$$K^*u = -\sum_{i=1}^{m} b_i \frac{\partial u}{\partial s_i} + \Big(c - \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial b_i}{\partial s_i}\Big) u,$$

находим аналогичным способом:

$$\|K^*u\| \leqslant \omega^* |u|_A,$$

где

$$\omega^* = \Big[\sum_{i=1}^{m} \max_{s\in\overline{\Omega}} |b_i(s)|^2\Big]^{1/2} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \max_{s\in\overline{\Omega}} \Big| c(s) - \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial b_i(s)}{\partial s_i} \Big| \leqslant$$

$$\leqslant \omega + \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \sum_{i=1}^{m} \max_{s\in\overline{\Omega}} \Big| \frac{\partial b_i(s)}{\partial s_i} \Big|. \tag{41}$$

Справедливы оценки погрешности, указанные в теоремах 1, 2 и 3, и оценки (33), (34). Притом, в силу замечания 2, можно положить

$$\tau = \tau'' = \frac{\omega}{\sqrt{\lambda_1}}, \quad \tau' = \frac{\omega^*}{\sqrt{\lambda_1}}, \quad \tau_n = \tau''_n = \frac{\omega}{\sqrt{\lambda_{n+1}}}, \quad \tau'_n = \frac{\omega^*}{\sqrt{\lambda_{n+1}}}.$$

где ω и ω^* — определенные соотношениями (40) и (41) постоянные.

При $m = 1, 2, 3$ ряд (35) сходится равномерно, и справедливы также равномерные оценки погрешности (36) и (37).

Литература

1. Богарян О. К., О сходимости невязки методов Бубнова-Галеркина и Ритца. Докл. АН СССР, 1961, **141**, 267—269.
2. Вайникко Г., Оценки погрешности метода Галеркина для линейного дифференциального уравнения. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1962, **129**, 394—416.
3. Джишкариани А. В., Оценки погрешности метода Ритца для неоднородного дифференциального уравнения. Сообщ. АН ГрузССР, 1960, **25**, 257—262.
4. Ильин В. П., Оценки погрешности в методе Ритца для обыкновенных дифференциальных уравнений. Тр. матем. ин-та, 1959, **53**, 43—63.
5. Канторович Л. В., Функциональный анализ и прикладная математика. Успехи матем. наук, 1948, **3**, № 6, 89—185.
6. Канторович Л. В., Акилов Г. П., Функциональный анализ в нормированных пространствах. Москва, 1959.
7. Крылов Н. М., Избранные труды, том 1—3. Киев, 1961.
8. Михлин С. Г., Некоторые достаточные условия сходимости метода Галеркина. Уч. зап. ЛГУ, сер. матем., 1949, **21**, 3—23.
9. Михлин С. Г., Вариационные методы в математической физике. Москва, 1957.
10. Михлин С. Г., Проблема минимума квадратичного функционала. Москва—Ленинград, 1952.

Поступило
28 IX 1963

VEAHINNANGUID GALJORKINI MEETODILE II. VEAHINNANGUD n-DALE LÄHENDILE

G. Vainikko

Resümee

Käesolevas artiklis tuletatakse mõningad aposterioorsed veahinnangud Galjorkini meetodile. Nende veahinnangute rakendamiseks on vaja hinnata Galjorkini maatriksi pöördmaatriksi normi ruumis R_n.

ERROR BOUNDS FOR GALERKIN'S METHOD II. ERROR BOUNDS FOR n-TH APPROXIMATION

G. Vainikko

Summary

In the paper some error bounds for Galerkin's method are derived. To apply these error bounds one must estimate the norm of inverse Galerkin's matrix in space R_n.

ОБ АПОСТЕРИОРНОЙ ОЦЕНКЕ ПОГРЕШНОСТИ ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Э. Тамме и И. Саарнийт

Кафедра вычислительной математики

В § 1 настоящей статьи даются апостериорные оценки погрешности приближенных решений обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, найденных в виде аналитического выражения. Эти оценки близки к оценкам, полученным в статьях [3, 4], но они применимы и в случае разрывных коэффициентов и свободных членов уравнения и обычно более точны. В последующих параграфах эти результаты применяются для исследования точности численных методов, т. е. методов, дающих приближенное решение в виде таблицы значений. При этом аналитическое выражение для приближенного решения строится в каждом промежутке между узлами как некоторый интерполяционный полином (ср. [2, 5]).

§ 1. Апостериорные оценки погрешности

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$\sum_{j=0}^{m} p_j(x) y^{(j)} = f(x) \tag{1.1}$$

с краевыми условиями

$$U_i(y) = \gamma_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m), \tag{1.2}$$

где

$$U_i(y) = \sum_{j=0}^{m-1} [\alpha_{ij} y^{(j)}(a) + \beta_{ij} y^{(j)}(b)] \quad (a < b). \tag{1.3}$$

Предположим, что на отрезке $[a, b]$ функции $p_0(x), \ldots, p_{m-1}(x)$ и $f(x)$ квадратично суммируемы, а $p_m(x)$ непрерывна и отлична от нуля.

Пусть известно приближенное решение $Y(x)$ задачи $\{(1.1), (1.2)\}$, удовлетворяющее следующим условиям:

1° $Y^{(j)}(x)$ $(j=0, \ldots, m-1)$ непрерывно при $x \in [a, b]$,

2° $Y^{(m)}(x) \in L^2[a, b]$ (квадратично суммируемое),

3° $U_i(Y) = \gamma_i$ $(i=1, \ldots, m)$.

Наша цель — вывести оценки погрешности для приближения $Y(x)$.

Для этого введем задачу

$$p_m(x) y^{(m)} + \sum_{j=1}^{m-1} q_j(x) y^{(j)} = 0, \tag{1.4}$$

$$U_i(y) = 0 \quad (i=1, \ldots, m), \tag{1.5}$$

где $U_i(y)$ определяется равенством (1.3), а коэффициенты $q_0(x), \ldots, q_{m-1}(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$. Задачу $\{(1.4), (1.5)\}$ следует выбирать так, чтобы она имела легко вычисляемую функцию Грина $G(s, t)$, и чтобы функции $q_j(x)$ были близки к функциям $p_j(x)$.

Обозначим

$$R = R(x) = f(x) - \sum_{j=0}^{m} p_j(x) Y^{(j)}(x),$$

$$G^{(j)} z = \int_a^b \frac{\partial^j G(x, \xi)}{\partial x^j} z(\xi) d\xi.$$

Допустим, что известны[1] оценки:

$$\|R\| \leqslant \varrho, \quad \|p_j - q_j\| \leqslant \tau_j, \quad \max_{a \leqslant x \leqslant b} |p_j(x) - q_j(x)| \leqslant \delta_j,$$

$$\|G^{(j)}\| \leqslant \mu_j, \quad \left(\int_a^b \left| \frac{\partial^j}{\partial x^j} G(x, \xi) \right|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant M_j(x) \leqslant M_j,$$

где $j=0, 1, \ldots, m-1$ и $a \leqslant x \leqslant b$. Отметим, что μ_j можно найти при помощи неравенства

$$\|G^{(j)}\| \leqslant \left(\int_a^b \int_a^b \left| \frac{\partial^j}{\partial x^j} G(x, \xi) \right|^2 d\xi dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Теорема 1. *Если*

$$\eta = \sum_{j=0}^{m-1} M_j \tau_j < 1,$$

---

[1] Под нормами во всей статье подразумеваются нормы в пространстве $L^2[a, b]$.

то задача $\{(1.1), (1.2)\}$ *имеет на отрезке* $[a, b]$ *единственное решение* $y(x)$, *удовлетворяющее условиям* 1°—3°, *причем оценки погрешности суть*

$$|y^{(j)}(x) - Y^{(j)}(x)| \leqslant \frac{\varrho}{1-\eta} M_j(x) \quad (j = 0, \ldots, m-1), \tag{1.6}$$

$$\|y^{(j)}(x) - Y^{(j)}(x)\| \leqslant \frac{\varrho}{1-\eta} \mu_j \quad (j = 0, \ldots, m-1). \tag{1.7}$$

Доказательство. Учитывая выражение для невязки $R(x)$, уравнение (1.1) преобразуется к виду

$$\sum_{j=0}^{m} p_j(x)[y^{(j)}(x) - Y^{(j)}(x)] = R(x).$$

Произведем подстановку

$$z(x) = p_m(x)[y^{(m)}(x) - Y^{(m)}(x)] + \sum_{j=0}^{m-1} q_j(x)[y^{(j)}(x) - Y^{(j)}(x)].$$

Тогда (см. [1], стр. 397)

$$y^{(j)}(x) - Y^{(j)}(x) = \int_a^b \frac{\partial^j}{\partial x_j} G(x, \xi) z(\xi) d\xi \quad (j = 0, \ldots, m-1), \tag{1.8}$$

и задача $\{(1.1), (1.2)\}$ преобразуется к виду

$$z = Az + R, \tag{1.9}$$

где

$$Az = \sum_{j=0}^{m-1} [q_j(x) - p_j(x)] \int_a^b \frac{\partial^j G(x, \xi)}{\partial x^j} z(\xi) d\xi.$$

Рассмотрим последнее уравнение как операторное уравнение в пространстве $L^2[a, b]$. Имеем

$$\|A\| \leqslant \sum_{j=0}^{m-1} M_j \tau_j = \eta < 1.$$

Из теоремы Банаха вытекает, что уравнение (1.9) имеет решение $z \in L^2[a, b]$, причем

$$\|z\| \leqslant \frac{\varrho}{1-\eta}. \tag{1.10}$$

Теперь оценки (1.6) и (1.7) несложно получить из соотношений (1.8) и (1.10). Теорема доказана.

Аналогично доказывается

Теорема 2. *Если*

$$\vartheta = \sum_{j=0}^{m-1} \mu_j \delta_j < 1,$$

то задача {(1.1), (1.2)} *имеет на отрезке* $[a, b]$ *единственное решение* $y(x)$, *удовлетворяющее условиям* 1°—3°, *причем*

$$|y^{(j)}(x) - Y^{(j)}(x)| \leqslant \frac{\varrho}{1-\vartheta} M_j(x) \quad (j = 0, \ldots, m-1), \tag{1.11}$$

$$\|y^{(j)}(x) - Y^{(j)}(x)\| \leqslant \frac{\varrho}{1-\vartheta} \mu_j \quad (j = 0, \ldots, m-1). \tag{1.12}$$

Приведем оценки μ_j и M_j, например, для случая уравнения второго порядка, сопровождаемого краевыми условиями

$$\alpha y(a) + \beta y'(a) = \varkappa, \quad \gamma y(b) + \delta y'(b) = \lambda.$$

Если в качестве задачи {(1.4), (1.5)} выбрать задачу

$$y'' = 0, \quad \alpha y(a) + \beta y'(a) = 0, \quad \gamma y(b) + \delta y'(b) = 0,$$

то

$$M_0 = \frac{1}{L}\Big\{ |\alpha\gamma|(b-a)^4\Big[\frac{L}{48} + \frac{8}{81}(|\alpha\delta| + |\beta\gamma|)\Big] + \frac{1}{3}N^2(b-a)^3 + $$
$$+ |\beta\delta|(b-a)^2\Big[N + \frac{1}{2}|\alpha\gamma|(b-a)\Big] + \beta^2\delta^2(b-a)\Big\}^{\frac{1}{2}},$$

$$M_1 = \frac{1}{L}\Big[\frac{1}{3}\alpha^2\gamma^2(b-a)^3 + |\alpha\gamma|N(b-a)^2 + N^2(b-a)\Big]^{\frac{1}{2}},$$

$$\mu_0 = \frac{b-a}{L}\Big[\frac{1}{90}\alpha^2\gamma^2(b-a)^4 + \frac{1}{15}\alpha\gamma K(b-a)^3 +$$
$$+ \frac{1}{6}K^2(b-a)^2 - \frac{2}{3}\beta\delta K(b-a) + \beta^2\delta^2\Big]^{\frac{1}{2}},$$

$$\mu_1 = \frac{b-a}{L}\Big[\frac{1}{6}L^2 + \frac{1}{3}K^2 + \alpha\beta\gamma\delta\Big]^{\frac{1}{2}},$$

где

$$K = \alpha\delta - \beta\gamma, \quad L = |\alpha\gamma(b-a) + K|, \quad N = \max(|\alpha\delta|, |\beta\gamma|).$$

Пример. Оценим погрешность приближенного решения

$$Y(x) = -0{,}854 + x - 0{,}146x^3$$

задачи

$$y'' - xy = -x^2, \quad y'(0) = 1, \quad y(1) = 0.$$

В качестве (1.4) возьмем задачу $y'' = 0$. При помощи формул, приведенных выше, получим, что на отрезке $[0, 1]$ будет $M_0 = \sqrt{\frac{1}{3}}$, $M_1 = 1$, $\mu_0 = \sqrt{\frac{1}{6}}$, $\mu_1 = \sqrt{\frac{1}{2}}$. Так как $\tau_0 = \sqrt{\frac{1}{3}}$, $\tau_1 = 0$, $\delta_0 = 1$, $\delta_1 = 0$, то $\eta = \frac{1}{3} < 1$ и $\vartheta = \sqrt{\frac{1}{6}} < 1$. Вычисление верхнего предела погрешности приближенного решения $y(x)$ приводит к следующим результатам ($\varrho = 0{,}0125$):

	Оценка (1.6)	Оценка (1.11)	Оценка из работы [3]
$\max\limits_{0 \leqslant x \leqslant 1} \lvert y(x) - Y(x) \rvert \leqslant$	0,011	0,013	0,124
$\max\limits_{0 \leqslant x \leqslant 1} \lvert y'(x) - Y'(x) \rvert \leqslant$	0,019	0,022	0,248

§ 2. Построение интерполяционных многочленов

Перейдем теперь к рассмотрению случая, когда найдены только приближенные значения y_i решения задачи $\{(1.1),\ (1.2)\}$ в точках $x_i = a + ih\left(i = 0, \ldots, n;\ h = \frac{b-a}{n}\right)$. Чтобы при оценке верхнего предела погрешности $y(x_i) - y_i$ применить результаты предыдущего параграфа, надо построить на отрезке $[a, b]$ приближенное решение $Y(x)$ задачи $\{(1.1),\ (1.2)\}$, удовлетворяющее условиям 1°—3°.

Допустим, что известны также приближенные значения производных $y_i^{(j)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1;\ j = 1, 2, \ldots, m-1)$; если они не вычисляются в процессе решения дифференциального уравнения, то их можно найти посредством формул численного дифференцирования. Значения производных $y_0^{(j)}$ и $y_n^{(j)}$ (в краевых точках) определим так, чтобы были удовлетворены краевые условия (1.2), т. е. из системы

$$\sum_{j=0}^{m-1} [\alpha_{ij} y_0^{(j)} + \beta_{ij} y_n^{(j)}] = \gamma_i \quad (i = 1, \ldots, m)$$

(здесь и далее $y_i^{(0)} = y_i$). Значения в краевых точках, которые не определяются указанной системой однозначно, надо тоже вычислить при помощи формул численного дифференцирования.

Построим функцию $Y(x)$ на каждом из отрезков $[x_i, x_{i+1}]$ $(i = 0, \ldots, n-1)$ в виде многочлена

$$Y(x) = P_{2m-1}^{i}(t) = c_{0i} + c_{1i}t + \ldots + c_{2m-1,i}t^{2m-1} \left(t = \frac{x - x_i}{h}\right),$$

удовлетворяющего условиям

$$Y^{(j)}(x_i) = y_i^{(j)}, \quad Y^{(j)}(x_{i+1}) = y_{i+1}^{(j)} \ (j = 0, \ldots, m-1). \tag{2.1}$$

Последние условия представляют собой систему из $2m$ линейных уравнений для определения коэффициентов c_{ki} $(k = 0, \ldots,$

$2m-1$; $i=0, \ldots, n-1$). Решив эту систему при $m=2$ и $m=3$, мы получим

$$P_3^i(t) = y_i + hy'_i t + [3(y_{i+1} - y_i) - h(y'_{i+1} + 2y'_i)]t^2 + \\ + [-2(y_{i+1} - y_i) + h(y'_{i+1} + y'_i)]t^3$$

и

$$P_5^i(t) = y_i + hy'_i t + \frac{h^2}{2} y''_i t^2 + \\ + [10(y_{i+1} - y_i) - 2h(2y'_{i+1} + 3y'_i) + \frac{h^2}{2}(y''_{i+1} - 3y''_i)]t^3 + \\ + [-15(y_{i+1} - y_i) + h(7y'_{i+1} + 8y'_i) - \frac{h^2}{2}(2y''_{i+1} - 3y''_i)]t^4 + \\ + [6(y_{i+1} - y_i) - 3h(y'_{i+1} + y'_i) + \frac{h^2}{2}(y''_{i+1} - y''_i)]t^5,$$

где $t = \frac{x - x_i}{h}$. Аналогичные формулы можно получить и для $m = 4, 5, \ldots$.

Функция $Y(x)$, построенная, исходя из условий (2.1), непрерывна на отрезке $[a, b]$ вместе со своими производными до порядка $m-1$. Производная же $Y^{(m)}(x)$ на этом отрезке только кусочно-непрерывна. Если мы хотим, чтобы $Y^{(m)}(x)$ была тоже непрерывной, потребуем выполнения условий

$$Y^{(j)}(x_i) = y_i^{(j)} \quad Y^{(j)}(x_{i+1}) = y_{i+1}^{(j)} \quad (j = 0, \ldots, m). \tag{2.2}$$

Значения $y_k^{(m)}$ вычислим при этом из равенства

$$y_k^{(m)} = \frac{1}{p_m(x_k)}[f(x_k) - \sum_{j=0}^{m-1} p_j(x_k) y_k^{(j)}] \quad (k = 0, \ldots, n). \tag{2.3}$$

Очевидно, что на каждом отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ имеем $Y(x) = P_{2m+1}^i(t)$, так что, например, в случае $m = 2$, условия (2.2) приводят к определенному выше полиному $P_5^i(t)$.

§ 3. Оценка нормы невязки

Построив указанным в предыдущем параграфе способом аналитическое приближение $Y(x)$, можем погрешности $|y^{(j)}(x_i) - y_i^{(j)}|$ ($i = 0, \ldots, n$; $j = 0, \ldots, m-1$) оценить на основе теорем 1 или 2. Главной трудностью применения оценок (1.6) и (1.11) является оценка нормы невязки $R(x)$, т. е. вычисление величины ϱ, удовлетворяющей неравенству

$$\int_a^b |R(x)|^2 \, dx \leqslant \varrho^2.$$

Вычислить точно последний интеграл довольно трудно, поэтому вычислим его приближенно, применив на каждом отрезке некоторую квадратурную формулу, например, формулу трапеций или Симпсона.

Рассмотрим случай, когда последний интеграл вычисляется по формуле Симпсона. В этом случае величина ϱ определяется неравенством

$$\varrho^2 \geqslant \frac{h}{6}\sum_{i=0}^{n-1}\left[R^2(x_i)+4R^2\left(x_i+\frac{h}{2}\right)+R^2(x_{i+1})\right]+|Q_m(Y)|, \qquad (3.1)$$

Если предположить, что $R(x)$ имеет в интервале (x_i, x_{i+1}) непрерывные производные до четвертого порядка (для этого достаточно, чтобы указанные производные имели функции $f(x)$ и $p_j(x)$), то остаточный член имеет вид

$$Q_m(Y) = -\frac{1}{90}\left(\frac{h}{2}\right)^5\sum_{i=0}^{n-1}\frac{d^4}{dx^4}[R(\xi_i)]^2 =$$

$$= -\frac{1}{90}\left(\frac{h}{2}\right)^5\sum_{i=0}^{n-1}\frac{d^4}{dx^4}\left[f(\xi_i)-\sum_{j=0}^{m}p_j(\xi_i)Y^{(j)}(\xi_i)\right]^2,$$

$$\xi_i \in (x_i, x_{i+1}) \quad (i=0, \ldots, n-1).$$

Неравенство (3.1) можно переписать в виде

$$\varrho^2 \geqslant \frac{h}{6}\sum_{i=0}^{n-1}\left\{\left[f(x_i)-\sum_{j=0}^{m}p_j(x_i)Y^{(j)}(x_i)\right]^2+\right.$$

$$+4\left[f\left(x_i+\frac{h}{2}\right)-\sum_{j=0}^{m}p_j\left(x_i+\frac{h}{2}\right)Y^{(j)}\left(x_i+\frac{h}{2}\right)\right]^2+$$

$$\left.+\left[f(x_{i+1})-\sum_{j=0}^{m}p_j(x_{i+1})Y^{(j)}(x_{i+1})\right]^2\right\}+|Q_m(Y)|. \qquad (3.2)$$

Если функция $Y(x)$ построена, исходя из условий (2.2), то, вследствие равенства (2.3), неравенство (3.2) примет вид

$$\varrho^2 \geqslant \frac{2}{3}h\sum_{i=0}^{n-1}\left[f\left(x_i+\frac{h}{2}\right)-\sum_{j=0}^{m}p_j\left(x_i+\frac{h}{2}\right)Y^{(j)}\left(x_i+\frac{h}{2}\right)\right]^2+|Q_m(Y)|.$$

Как видно, для определения ϱ требуются значения $Y^{(j)}(x_i)$, $Y^{(j)}\left(x_i+\frac{h}{2}\right)$, $Y^{(j)}(x_{i+1})$ $(j=0, \ldots, m)$. Формулы для их вычисления нетрудно вывести из выражения интерполяционного многочлена на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$, проделав там нужные дифференцирования и приравняв соответственно $t=0$, $t={}^1/_2$, $t=1$.

Ниже даны формулы вычисления $Y^{(j)}(x_i)$, $Y^{(j)}\left(x_i+\frac{h}{2}\right)$, $Y^{(j)}(x_{i+1})$ для случая дифференциального уравнения второго порядка.

Если $Y(x) = P_3^i(t)$, то

$$Y(x_i) = y_i, \quad Y'(x_i) = y'_i,$$

$$Y''(x_i) = -\frac{2}{h^2}[3(y_i - y_{i+1}) + h(2y'_i + y'_{i+1})],$$

$$Y\left(x_i + \frac{h}{2}\right) = \frac{1}{2}(y_{i+1} + y_i) - \frac{h}{8}(y'_{i+1} - y'_i),$$

$$Y'\left(x_i + \frac{h}{2}\right) = \frac{3}{2h}(y_{i+1} - y_i) - \frac{1}{4}(y'_{i+1} + y'_i),$$

$$Y''\left(x_i + \frac{h}{2}\right) = \frac{1}{h}(y'_{i+1} - y'_i),$$

$$Y(x_{i+1}) = y_{i+1}, \quad Y'(x_{i+1}) = y'_{i+1},$$

$$Y''(x_{i+1}) = \frac{3}{h^2}[3(y_i - y_{i+1}) + h(y'_i + 2y'_{i+1})].$$

Если $Y(x) = P_5^i(t)$, то

$$Y\left(x_i + \frac{h}{2}\right) = \frac{1}{2}(y_{i+1} + y_i) - \frac{5}{32}h(y'_{i+1} - y'_i) + \frac{h^2}{64}(y''_{i+1} + y''_i),$$

$$Y'\left(x_i + \frac{h}{2}\right) = \frac{15}{8h}(y_{i+1} - y_i) - \frac{7}{16}(y'_{i+1} + y'_i) + \frac{h}{32}(y''_{i+1} - y''_i),$$

$$Y''\left(x_i + \frac{h}{2}\right) = \frac{3}{2h}(y'_{i+1} - y'_i) - \frac{1}{4}(y''_{i+1} + y''_i).$$

При вычислении величины ϱ надо оценить остаточный член формулы Симпсона $Q_m(Y)$, т. е. найти числа s и S, чтобы

$$s \leqslant Q_m(Y) \leqslant S.$$

Заметим, что величина $\frac{d^4}{dx^4}[R(x)]^2$ в остаточном члене выражается так:

$$\frac{d^4}{dx^4}[R(x)]^2 = 2R(x)R^{\text{IV}}(x) + 8R'(x)R'''(x) + 6[R''(x)]^2,$$

причем

$$\begin{gathered} R(x) = f(x) - \sum_{j=0}^{m} p_j(x)Y^{(j)}(x) \equiv f(x) - \sum_{j=0}^{m} \varphi^0{}_j[p_l(x)]Y^{(j)}(x), \\ R^{(k)}(x) = f^{(k)}(x) - \sum_{j=0}^{m+k} \varphi^k{}_j[p_l(x), p'_l(x), \ldots, p_l{}^{(k)}(x)]Y^{(j)}(x) \end{gathered} \tag{3.3}$$

$$(l = 0, \ldots, m; \; k = 1, 2, 3, 4).$$

Предположим, что на каждом из отрезков $[x_i, x_{i+1}]$ $(i = 0, \ldots, n-1)$ найдены числа $\overline{f}_i{}^{(k)}$, $\overline{F}_i{}^{(k)}$, $\overline{\varphi}_{ji}{}^k$, $\overline{\Phi}_{ji}{}^k$, $\overline{y}_i{}^{(j)}$, $\overline{Y}_i{}^{(j)}$, такие, что

$$\overline{f}_i{}^{(k)} \leqslant f^{(k)}(x) \leqslant \overline{F}_i{}^{(k)} \quad (k = 0, 1, 2, 3, 4),$$

$$\overline{\varphi}_{ji}^{k} \leqslant \varphi_i^k[p_l(x),\ \ldots,\ p_l^{(k)}(x)] \leqslant \overline{\Phi}_{ji}^{k}$$
$$(k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4;\quad j = 0, \ldots, m + k;\quad l = 0, \ldots, m),$$
$$\bar{y}_i^{(j)} \leqslant Y^{(j)}(x) \leqslant \overline{Y}_i^{(j)} \qquad (j = 0, \ldots, m + 4).$$

Тогда, пользуясь формулами (3.3), можно найти числа

$$\overline{r}_{ik} = r_{ik}[\overline{f}_i^{(k)},\ \overline{F}_i^{(k)},\ \overline{\varphi}_{ji}^{k},\ \overline{\Phi}_{ji}^{k}\bar{y}_i^{(j)},\ \overline{Y}_i^{(j)}],$$
$$\overline{R}_{ik} = R_{ik}[\overline{f}_i^{(k)},\ \overline{F}_i^{(k)},\ \overline{\varphi}_{ji}^{k},\ \overline{\Phi}_{ji}^{k},\ \bar{y}_i^{(j)},\ \overline{Y}_i^{(j)}],$$

$(k = 0, 1, 2, 3, 4;\ j = 0, 1, \ldots, m + k;\ i = 0, \ldots, n - 1)$, удовлетворяющее неравенствам

$$\overline{r}_{ik} \leqslant R^{(k)}(x) \leqslant \overline{R}_{ik}, \qquad x \in [x_i,\ x_{i+1}].$$

Зная $\overline{r}_{ik}$ и $\overline{R}_{ik}$, нетрудно вычислить и значения s и S.

Рассмотрим, как вычислить верхнюю и нижнюю границу $\bar{y}_i^{(j)}$ и $\overline{Y}_i^{(j)}$ функции $Y(x)$ и ее производных на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$.

Приблизим функцию $Y^{(j)}(x)$ на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ интерполяционным многочленом первой степени

$$L_{1j}(x) = \frac{1}{h}\,[(x_{i+1} - x)\,Y^{(j)}(x_i) + (x - x_i)\,Y^{(j)}(x_{i+1})]$$

$\left(h = x_{i+1} - x_i = \dfrac{b - a}{n}\right)$. Погрешность линейного интерполирования на данном отрезке вычисляется по формуле

$$Y^{(j)}(x) - L_{1j}(x) = \frac{1}{2}\,Y^{(j+2)}(\xi)\,(x - x_{i+1})\,(x - x_i),$$

где $\xi \in (x_i, x_{i+1})$. Из последнего выражения следует, что

$$Y^{(j)}(x) \leqslant \max_{x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}} L_{1j}(x) + \frac{1}{2} \max_{x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}} |Y^{(j+2)}(x)| \left(\frac{h}{2}\right)^2 \leqslant$$
$$\leqslant \max\,[Y^{(j)}(x_i),\ Y^{(j)}(x_{i+1})] + \frac{h^2}{8} \max\,(|\bar{y}_i^{(j+2)}|,\ |\overline{Y}_i^{(j+2)}|).$$

Аналогично выводится неравенство

$$Y^{(j)}(x) \geqslant \min\,[Y^{(j)}(x_i),\ Y^{(j)}(x_{i+1})] - \frac{h^2}{8} \max\,(|\bar{y}_i^{(j+2)}|,\ |\overline{Y}_i^{(j+2)}|).$$

Следовательно, в качестве нижней и верхней границы можно выбрать

$$\bar{y}_i^{(j)} = \min\,[Y^{(j)}(x_i),\ Y^{(j)}(x_{i+1})] - \frac{h^2}{8} \max\,(|\bar{y}_i^{(j+2)}|,\ |\overline{Y}_i^{(j+2)}|),$$
$$\overline{Y}_i^{(j)} = \max\,[Y^{(j)}(x_i),\ Y^{(j)}(x_{i+1})] + \frac{h^2}{8} \max\,(|\bar{y}_i^{(j+2)}|,\ |\overline{Y}_i^{(j+2)}|.$$

Для пользования этими формулами заметим, что производные достаточно высокого порядка от полинома $Y(x)$ тождественно равны нулю: имеем $Y^{(2m)}(x)\equiv 0$ в случае $Y(x)=P^i_{2m-1}$ и $Y^{(2m+2)}(x)\equiv 0$ в случае $Y(x)=P^i_{2m+1}(t)$. Это позволяет последовательно для $j=2m+2,\ 2m+1,\ \dots,\ 0$ оценить $\bar{y}_i^{(j)}$ и $\bar{Y}_i^{(j)}$, если известны значения $Y^{(j)}(x_i)$ и $Y^{(j)}(x_{i+1})$. Формулы для вычисления этих значений в случае уравнения второго порядка ($m=2$) для $j=0,1,2$ уже даны. Точно так же можно вывести и недостающие формулы ($j>2$): при $Y(x)=P_3{}^i(t)$

$$Y'''(x_i)=Y'''(x_{i+1})=\frac{6}{h^3}[-2(y_{i+1}-y_i)+h(y'_{i+1}+y'_i)],$$

$$Y^{(j)}(x_i)=Y^{(j)}(x_{i+1})=0,\quad \text{если } j\geqslant 4;$$

при $Y(x)=P_5{}^i(t)$

$$Y'''(x_i)=\frac{6}{h^3}[10(y_{i+1}-y_i)-2h(2y'_{i+1}+3y'_i)+\frac{h^2}{2}(y''_{i+1}-3y''_i)],$$

$$Y'''(x_{i+1})=\frac{6}{h^3}[10(y_{i+1}-y_i)-2h(3y'_{i+1}+2y'_i)+\frac{h^2}{2}(3y''_{i+1}-y''_i)],$$

$$Y^{\mathrm{IV}}(x_i)=\frac{24}{h^4}[-15(y_{i+1}-y_i)+h(7y'_{i+1}+8y'_i)-$$

$$-\frac{h^2}{2}(2y''_{i+1}-3y''_i)],$$

$$Y^{\mathrm{IV}}(x_{i+1})=\frac{24}{h^4}[15(y_{i+1}-y_i)-h(8y'_{i+1}+7y'_i)+\frac{h^2}{2}(3y''_{i+1}-2y''_i)],$$

$$Y^{\mathrm{V}}(x_i)=Y^{\mathrm{V}}(x_{i+1})=\frac{120}{h^5}[6(y_{i+1}-y_i)-3h(y'_{i+1}+y'_i)+$$

$$+\frac{h^2}{2}(y''_{i+1}-y''_i)],$$

$$Y^{(j)}(x_i)=Y^{(j)}(x_{i+1})=0,\quad \text{если } j\geqslant 6.$$

Аналогично можно оценить погрешность заданных в виде таблицы приближенных решений дифференциальных уравнений третьего, четвертого и высшего порядков.

Примечание. Рассмотренный способ оценки погрешности применим без существенных усложнений и в случае, когда приближенное решение дано в виде таблицы с непостоянным шагом.

Пример. Рассмотрим задачу

$$y''-xy=-x^2,\qquad y'(0)=1,\qquad y(1)=0.$$

Допустим, что найдены приближенные значения решения этой задачи и его производной:

i	x_i	y_i	y_i'
0	0	—0,853	1
1	0,25	—0,605	0,973
2	0,5	—0,371	0,892
3	0,75	—0,164	0,753
4	1	0	0,544

Вычислим на каждом отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ $(i = 0, 1, 2, 3)$ величину невязки $R(x)$ в точках x_i, $x_i + \frac{h}{2}$, x_{i+1}:

i	$R(x_i)$	$R\left(x_i + \frac{h}{2}\right)$	$R(x_{i+1})$
0	0	0,0014	—0,0047
1	0,0030	0,0017	—0,0195
2	—0,0195	0,0073	0,0026
3	0,0294	0,0049	0,0400

Указанным в настоящем параграфе способом оценим сверху и снизу невязку и ее производные, а в итоге и величину $\frac{d^4}{dx^4}[R(x)]^2$:

i	$x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}$
0	$-0{,}822 \leqslant \frac{d^4}{dx^4}[R(x)]^2 \leqslant 6{,}254$
1	$-0{,}745 \leqslant \frac{d^4}{dx^4}[R(x)]^2 \leqslant 13{,}390$
2	$-13{,}378 \leqslant \frac{d^4}{dx^4}[R(x)]^2 \leqslant 15{,}580$
3	$-14{,}19 \leqslant \frac{d^4}{dx^4}[R(x)]^2 \leqslant 41{,}67$

Так как из последних оценок вытекает неравенство

$$-29{,}14 \leqslant \sum_{j=0}^{3} \frac{d^4}{dx^4}[R(x)]^2 \leqslant 76{,}89,$$

то

$$|Q_2(Y)| \leqslant \frac{1}{90}\left(\frac{1}{8}\right)^5 76{,}89 \leqslant 0{,}000\,03.$$

Теперь находим, что $\varrho^2 = 0{,}00019$, откуда следует, что $\varrho = 0{,}014$.

Зная оценку ϱ, можно вычислить верхний предел погрешности рассматриваемого приближенного решения:

$i = 0.\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$	Оценка (1.11)	Оценка (1.6)
$\lvert y(x_i) - y_i \rvert \leqslant$	0,013	0,014
$\lvert y'(x_i) - y'_i \rvert \leqslant$	0,021	0,024

§ 4. Оценка погрешности задачи с начальными условиями

Рассмотрим задачу

$$\sum_{j=0}^{m} p_j(x) y^{(j)} = f(x), \tag{4.1}$$

$$y^{(j)}(x_0) = y_0^{(j)} \quad (j = 0, \ldots, m-1), \tag{4.2}$$

как частный случай дифференциального уравнения с краевыми условиями. Пусть разыскивается ее решение на отрезке $x_0 \leqslant x \leqslant x_n$.

Для применения в этом случае результатов предыдущих параграфов, потребуем, чтобы функция $p_m(x)$ была непрерывной и отличной от нуля, а функция $p_0(x), \ldots, p_{m-1}(x)$ и $f(x)$ квадратично суммируемы.

Пусть известны приближенные значения $y_i^{(j)} \approx y^{(j)}(x_i)$ в точках $x_i = a + ih$ ($j = 0, \ldots, m-1$; $i = 0; \ldots, k+l$; $h, k, l > 0$; $k + l \leqslant n$). Если в процессе решения задачи значения производных $y_i^{(j)}$ ($j = 0, \ldots, m-1$) не вычисляются, то их можно найти при помощи формул численного дифференцирования.

Рассмотрим, как оценить верхний предел погрешности

$$y^{(j)}(x_{k+l}) - y_{k+l}^{(j)} \qquad (j = 0, \ldots, m-1),$$

если уже известны оценки

$$\lvert y^{(j)}(x_k) - y_k^{(j)} \rvert \leqslant \varepsilon_k^{(j)} \qquad (j = 0, \ldots, m-1).$$

Построим на отрезке $[x_k, x_{k+l}]$ приближенное решение $Y(x)$, удовлетворяющее условиям 1° и 2° (а в случае $k = 0$ также и 3°) и равенствам

$$Y^{(j)}(x_{k+i}) = y_{k+i}^{(j)} \qquad (i = 0, \ldots, l;\ j = 0, \ldots, m-1).$$

Функцию $Y(x)$ можно построить методом, приведенным в § 2. Произведем подстановку

$$u(x) = y(x) - Y(x),$$

и обозначим

$$u_{k+i}^{(j)} = y^{(j)}(x_{k+i}) - y_{k+i}^{(j)} \qquad (i = 0, \ldots, l;\ j = 0, \ldots, m-1).$$

Функция $u(x)$ является решением задачи

$$\sum_{j=0}^{m} p_j(x) u^{(j)} = R(x),$$

$$u^{(j)}(x_k) = u_k{}^{(j)} \qquad (j = 0, \ldots, m-1),$$

где

$$R(x) = f(x) - \sum_{j=0}^{m} p_j(x) Y^{(j)}(x).$$

Применим к последней задаче, например, оценку (1.6), взяв $a = x_k$, $b = x_{k+l}$ и выбрав в качестве аналитического выражения приближенного решения функцию $U(x) = \sum\limits_{i=0}^{m-1} \frac{u_k{}^{(i)}}{i!} (x - x_k)^i$:

$$|u^{(j)}(x_{k+l}) - U^{(j)}(x_{k+l})| \leqslant \frac{\sigma}{1-\eta} M_j(x_{k+l}) \qquad (j = 0, \ldots, m-1). \tag{4.3}$$

При этом величина σ определяется неравенством

$$\sigma \geqslant \|R(x) - \sum_{j=0}^{m} p_j(x) U^{(j)}(x)\|.$$

Из неравенства (4.3) следует, что

$$|u_{k+l}^{(j)}| \leqslant |U^{(j)}(x_{k+l})| + \frac{\varrho + \sum\limits_{j=0}^{m} \|p_j(x) U^{(j)}(x)\|}{1-\eta} M_i \tag{4.4}$$

$$(j = 0, \ldots, m-1).$$

Учитывая выражение функции $U(x)$, можно получить формулу для определения верхней границы функции $|U^{(j)}(x)|$:

$$|U^{(j)}(x)| \leqslant \sum_{i=j}^{m-1} \frac{1}{(i-j)!} \varepsilon_k{}^{(i)} (lh)^{i-j} = \bar{U}_{k+l}^{(j)}$$

$$|U^{(m)}(x)| = 0 \quad (j = 0, \ldots, m-1;\ x_k \leqslant x \leqslant x_{k+l}).$$

Итак, приближенное решение задачи $\{(4.1), (4.2)\}$ удовлетворяет в точке $x = x_{k+l}$ неравенству

$$|y^{(j)}(x_{k+l}) - y_{k+l}^{(j)}| \leqslant \bar{U}_{k+l}^{(j)} + \frac{\varrho + \sum\limits_{j=0}^{m-1} \bar{U}_{k+l}^{(j)} \|p_j(x)\|}{1-\eta} M_i. \tag{4.5}$$

Если на отрезке $x_k \leqslant x \leqslant x_{k+l}$ известны оценки

$$|p_i(x)| \leqslant \pi_i \qquad (j = 0, \ldots, m-1),$$

то из неравенства (4.4) нетрудно получить оценку

$$|y^{(j)}(x_{k+l}) - y_{k+l}^{(j)}| \leqslant \bar{U}_{k+l}^{(j)} \frac{\varrho + \sum\limits_{j=0}^{m-1} \sqrt{lh}\, V_{k+l}^{(j)} \pi_j}{1-\eta} M_j \tag{4.6}$$

$$(j = 0, \ldots, m-1),$$

где

$$V_{k+l}^{(j)} = \sum_{i=j}^{m-1} \frac{1}{(i-j)!\,\sqrt{2i-2j+1}}\,\varepsilon_k{}^{(i)}(lh)^{i-j}.$$

Дадим формулы для вычисления оценок функции Грина M_j и μ_j в случае, когда в качестве задачи $\{(1.4),\ (1.5)\}$ выбрана задача

$$y^{(m)} = 0, \quad y^{(j)}(x_0) = 0 \quad (j = 0, \ldots, m-1).$$

Тогда

$$M_j = \frac{(b-a)^{m-j-1}}{(m-j-1)!}\sqrt{\frac{b-a}{2m-2j-1}},$$

$$\mu_j = \frac{(b-a)^{m-j}}{(m-j-1)!\,\sqrt{(2m-2j-1)(2m-2j)}} \quad (j = 0, \ldots, m-1).$$

Пример. Рассматривается задача

$$y'' + xy + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

При решении задачи выбраны $x_0 = 0$, $x_n = 0{,}6$, $l = 1$, $h = 0{,}2$. Приближенное решение задачи и оценки его погрешности найдены шаг за шагом: сначала в точке $x = 0{,}2$, затем в точке $x = 0{,}4$ и, наконец, в точке $x = 0{,}6$ (погрешность решения оценена посредством формулы (4.5)):

x	0	0,2	0,4	0,6
$y(x)$	0	0,197	0,379	0,533
$y'(x)$	1	0,961	0,848	0,680
$\lvert y(x_k) - y_k \rvert \leqslant$	0	0,001	0,005	0,015
$\lvert y'(x_k) - y'_k \rvert \leqslant$	0	0,028	0,045	0,068

Литература

1. Вайникко Г., Оценки погрешности метода Галёркина для линейного дифференциального уравнения. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1962, **129**, 394—416.
2. Даугавет И., Самокиш Б., Об апостериорной оценке погрешности численного решения дифференциального уравнения. Методы вычислений, Ленинградск. ун-т, 1963, **1**, 52—57.
3. Тамме Э., Юргенсон Р., О приближённом решении дифференциальных уравнений. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1961, **102**, 301—316.

4. Юргенсон Р., Об оценке погрешности приближённого решения интегродифференциального уравнения. Тр. Ин-та физ. и астрон. АН Эст. ССР, 1963, **20**, 34—38.
5. Schröder, J., Fehlerabschätzung mit Rechenanlagen bei gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung. Numer. Math., 1961, **3**, № 1, 39—61.

Поступило
3 X 1963

LINEAARSE DIFERENTSIAALVÕRRANDI LÄHISLAHENDI VEA APOSTERIOORSEST HINDAMISEST

E. Tamme ja I. Saarniit

Resümee

Käesoleva artikli 1. paragrahvis on antud veahinnangud (1.6) ja (1.11) lineaarse diferentsiaalvõrrandi (1.1) analüütilisel kujul leitud lähislahendi jaoks, mis rahuldab rajatingimusi (1.2).

Järgmistes paragrahvides vaadeldakse nende hinnangute kasutamist lineaarse diferentsiaalvõrrandi tabelina antud ligikaudse lahendi vea hindamiseks. Selleks konstrueeritakse lahendi analüütiline avaldis iga kahe sõlme vahel Hermite'i interpolatsioonipolünoomi kujul.

Artikli viimases paragrahvis käsitletakse lähislahendi vea hindamist algtingimustega ülesande korral

ON POSTERIOR ERROR ESTIMATION IN LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS

E. Tamme and I. Saarniit

Summary

The first paragraph of the paper deals with posterior error estimations (1. 6) and (1.11) for approximate solutions of linear differential equations (1.1). The approximate solutions which satisfy boundary conditions (1.2) are found in the form of analytic expressions.

In the next paragraphs the application of the above error estimations is discussed, the object being to rate the accuracy of approximate solutions given as tables of values. For this purpose analytic expressions of approximate solutions are constructed between every two points in the form of Hermite interpolation polynomials.

In the last paragraph the error estimations are applied to the special case of a problem with initial conditions.

СИММЕТРИЧНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ ПОЛОГОЙ КРУГОВОЙ АРКИ

Э. Йыги

Кафедра теоретической механики

В статье [3] рассматривается прощелкивание пологой круговой арки в случае упругих деформаций, если на арку действует постоянная радиальная нагрузка. Методом Галеркина в ней получены формулы для определения критической нагрузки и соответствующих прогибов. В работе [2] составлены уравнения к расчету упруго-пластических пологих арок.

В настоящей статье на основе [2] составлены уравнения для решения задачи об изгибе шарнирно-опертой пологой круговой арки под постоянной радиальной нагрузки и приводятся некоторые результаты вычислений. Вычисления проводились в Вычислительном центре Тартуского гос. университета на электронной вычислительной машине «Урал-1». Программа сотавлена сотрудником Вычислительного центра Э. Ласном.

Допустим, что в арке имеются зоны пластических деформаций от сжатия и растяжения. В процессе деформации происходит перераспределение напряжений и расположение пластических зон изменяется. Учет влияния зоны разгрузки ведет к большим затруднениям. Поэтому в дальнейшем материал арки будем считать нелинейно упругим. На основе [2, 3] основная система уравнений имеет вид[1]

$$\left\{\begin{aligned} &N = \text{const}, \\ &Q' = -Nl\left(\frac{1}{r} + \frac{w''}{l^2}\right) - ql, \\ &M' = Ql, \\ &M = \frac{Ew''}{l^2}\left[\lambda\left(I_1 + I_2 - S_1 z_1 - S_2 z_2\right) - I\right], \end{aligned}\right. \qquad (1)$$

---

[1] Все обозначения, смысл которых не указан в настоящей статье, взяты из работы [2].

$$N = \frac{Ew''}{l^2}[\lambda(S_1 + S_2) + z_1(F - \lambda F_1) - z_2\lambda F_2] - EF\varepsilon_s, \qquad (2)$$

$$z_2 = z_1 - \frac{2\varepsilon_s l^2}{w''}, \qquad (3)$$

$$\varepsilon = \frac{z_1}{l^2} w'' - \varepsilon_s, \qquad (4)$$

$$\varepsilon = \frac{u'}{l} - \frac{w}{r} + \frac{1}{2l^2} w'^2, \qquad (5)$$

где r — радиус оси арки в недеформированном состоянии.

Из системы (1), после вычисления производных и упрощений, получим

$$\begin{gathered}[\lambda(I_1 + I_2 - S_1 z_1 - S_2 z_2) - I]w^{\mathrm{IV}} - 2\lambda(S_1 z'_1 + S_2 z'_2)\, w^{\mathrm{III}} - \\ - \lambda[S_1 z_1'' + S_2 z_2'' + z_1 b(z_1) z_1'^2 - z_2 b(z_2) z_2'^2]w'' + \\ + \frac{Nl^2}{E} w'' = -\frac{l^4}{Er}(N + qr). \qquad (6)\end{gathered}$$

Если в (6) положить $\lambda = 0$, получим уравнение упругой арки.

Из уравнений (2)—(5), после удовлетворения граничным условиям

$$u(0) = u(1) = 0,$$

найдем, что

$$\begin{gathered}\int\limits_0^1 \frac{Nl^2 - E\lambda(S_1 + S_2)w'' + E\lambda\varepsilon_s l^2(F_1 - F_2)}{E[F - \lambda(F_1 + F_2)]}\, d\xi + \\ + \frac{l^2}{r}\int\limits_0^1 w\, d\xi - \frac{1}{2}\int\limits_0^1 w'^2 d\xi = 0. \qquad (7)\end{gathered}$$

Для решения задачи получены уравнения (2), (3), (6) и (7).

Решим полученные уравнения, если арка имеет прямоугольное поперечное сечение. Тогда

$$b(z) = b;\ F = bh;\ I = \frac{bh^3}{12}.$$

Переходя к следующим безразмерным величинам

$$w^* = \frac{w}{h}; \quad l^* = \frac{l}{h}; \quad z_1{}^* = \frac{z_1}{h}; \quad z_2{}^* = \frac{z_2}{h}; \quad r^* = \frac{r}{h};$$

$$q^* = \frac{ql^2 r}{EI}; \quad k^2 = -\frac{Nl^2}{EI}; \quad \alpha = \frac{\pi^6 I r^2}{4Fl^4}; \quad n = \varepsilon_s\, l^{*2},$$

основные уравнения принимают вид

$$z_2{}^* = z_1{}^* - \frac{2n}{w^{*''}},$$

$$6[\lambda(z_2{}^{*2}-z_1{}^{*2}-z_1{}^{*}-z_2{}^{*})+2z_1{}^{*}]w^{*\prime\prime}+k^2-12n=0,$$

$$[2\lambda(z_2{}^{*3}-z_1{}^{*3})-\frac{3}{2}\lambda(z_2{}^{*}-z_1{}^{*})+\lambda-1]w^{*\mathrm{IV}}-$$

$$-3\lambda[4z_1{}^{*2}-1)z_1{}^{*\prime}-(4z_2{}^{*2}-1)z_2{}^{*\prime}]w^{*\mathrm{III}}-\frac{3}{2}\lambda[(4z_1{}^{*2}-1)z_1{}^{*\prime\prime}-$$

$$-(4z_2{}^{*2}-1)z_2{}^{*\prime\prime}+8(z_1{}^{*}z_1{}^{*\prime 2}-z_2{}^{*}z_2{}^{*\prime 2})]w^{*\prime\prime}-k^2w^{*\prime\prime}=$$

$$=\frac{l^{*2}}{r^*}(k^2-q^*),$$

$$\frac{k^2}{6}\int\limits_0^1\frac{d\xi}{1-\lambda-\lambda(z_1{}^{*}-z_2{}^{*})}+\lambda\int\limits_0^1\frac{(z_1{}^{*2}-z_2{}^{*2})w^{*\prime\prime}-2n(z_1{}^{*}+z_2{}^{*})}{1-\lambda-\lambda(z_1{}^{*}-z_2{}^{*})}d\xi-$$

$$-\frac{2l^{*2}}{r^*}\int\limits_0^1 w^*d\xi+\int\limits_0^1 w^{*\prime 2}d\xi=0.$$

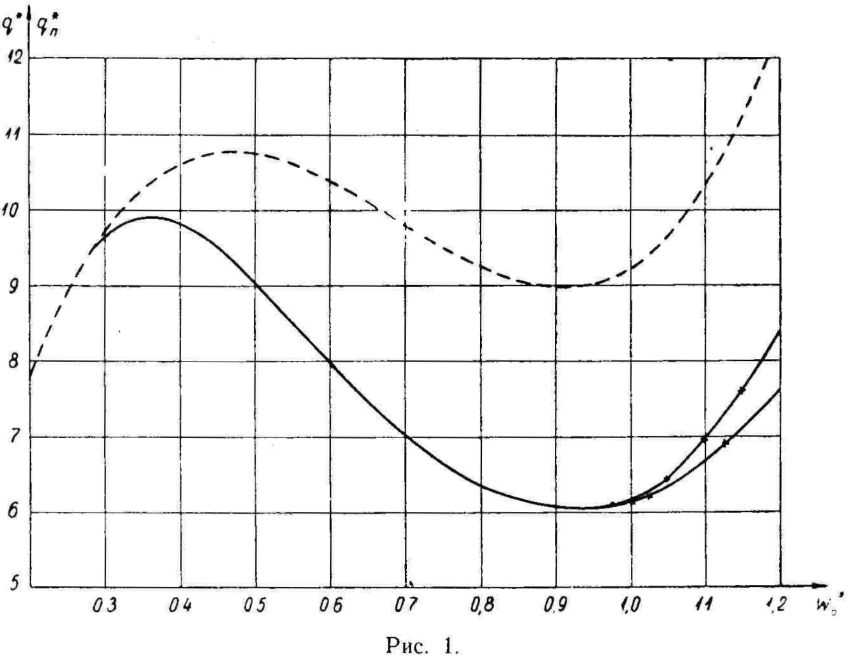

Рис. 1.

Задавая выражение для прогиба

$$w^*=w_0{}^*\sin\pi\xi,$$

и используя метод Галеркина, основные уравнения можно переписать следующим образом:

$$z_2{}^* = z_1{}^* + \frac{2n}{w_0{}^*\pi^2 \sin \pi\xi}, \tag{8}$$

$$6\pi^2 w_0{}^*[\lambda(z_2{}^{*2} - z_1{}^{*2} - z_1{}^* - z_2{}^*) + 2z_1{}^*] \sin \pi\xi - k^2 + 12n = 0, \tag{9}$$

$$\lambda\pi^2 w_0{}^* \int\limits_0^{\frac{1}{2}} [2(z_2{}^{*3} - z_1{}^{*3}) - \frac{3}{2}(z_2{}^* - z_1{}^*)] \sin^2 \pi\xi d\xi +$$

$$+ 3\lambda\pi w_0{}^* \int\limits_0^{\frac{1}{2}} [(4z_1{}^{*2} - 1) z_1{}^{*\prime} - (4z_2{}^{*2} - 1) z_2{}^{*\prime}] \sin \pi\xi \cos \pi\xi \, d\,\xi +$$

$$+ \frac{3}{2} \lambda w_0{}^* \int\limits_0^{\frac{1}{2}} [(4z_1{}^{*2} - 1) z_1{}^{*\prime\prime} - (4z_2{}^{*2} - 1) z_2{}^{*\prime\prime} + 8(z_1{}^* z_1{}^{*\prime 2} -$$

$$- z_2{}^* z_2{}^{*\prime 2}] \sin^2 \pi\xi \, d\xi + \frac{1}{4} w_0{}^*[(\lambda - 1)\pi^2 + k^2] -$$

$$- \frac{1}{4\sqrt{3a}}(k^2 - q^*) = 0, \tag{10}$$

$$\frac{k^2}{3} \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{d\xi}{1 - \lambda - \lambda(z_1{}^* - z_2{}^*)} -$$

$$- 2\lambda \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{2n(z_1{}^* + z_2{}^*) + \pi^2 w_0{}^* (z_1{}^{*2} - z_2{}^{*2}) \sin \pi\xi}{1 - \lambda - \lambda(z_1{}^* - z_2{}^*)} d\xi +$$

$$+ \pi^2 w_0{}^* \left(\frac{1}{2} w_0{}^* - \frac{1}{\sqrt{3a}}\right) = 0. \tag{11}$$

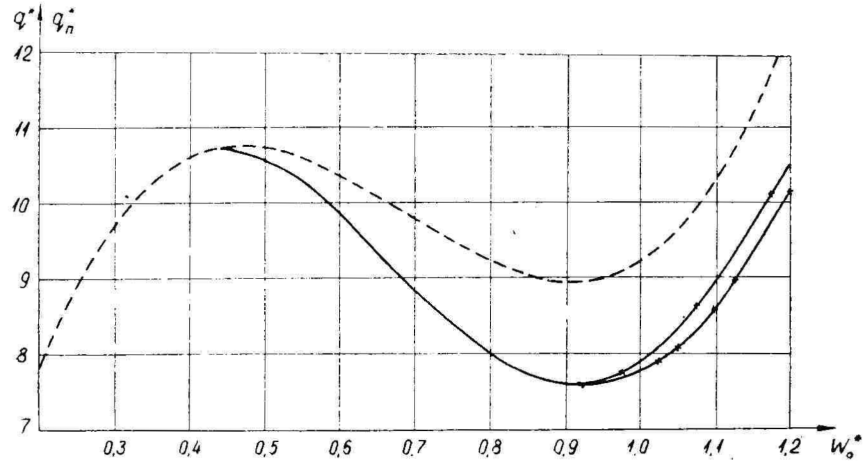

Рис. 2.

Теперь определим точки ξ_1 и ξ_2, где начинаются зоны пластических деформаций. В точке ξ_1, где начинает возникать зона пластических деформаций от сжатия, будет $z_1^* = -\frac{1}{2}$ и $z_2^* = \frac{1}{2}$. Из уравнения (9) получим, что

$$\xi_1 = \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{12n - k^2}{6\pi^2 w_0^*}.$$

Отсюда вытекает дополнительное условие $k^2 < 12n$. Из уравнений (8) и (9) найдем выражение для z_2^*. Из условия $z_2^*(\xi_2) = \frac{1}{2}$ (ξ_2 — точка, где начинается и зона пластических деформаций от растяжения) определим, что

$$\xi_2 = \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{k^2 + 12n(1-2\lambda) + \sqrt{(k^2+12n) - 48\lambda k^2 n}}{12(1-\lambda)\pi^2 w_0^*}.$$

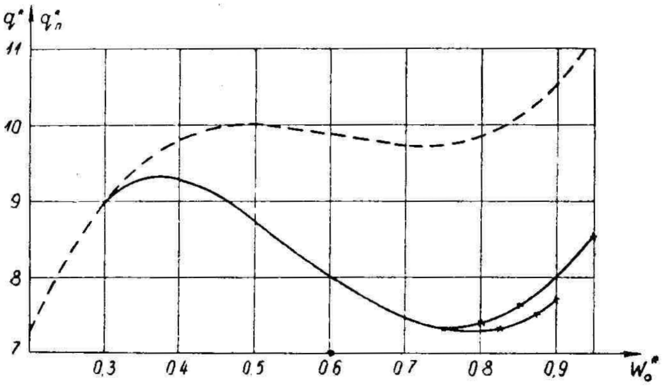

Рис. 3.

Систему (8) — (11) решаем численно, используя метод упругих решений А. А. Ильюшина [1]. Для этого задаем λ, α и w_0^*. Решая упругую задачу, найдем, что

$$k^2 = \pi^2 w_0^* \left(\frac{2}{\alpha}\sqrt{3\alpha} - 3w_0^*\right),$$

и рассмотрим это как первое приближение. На основе первого приближения из системы (8) и (9) определим z_1^* и z_2^* и их производные.

В зоне $0 \leqslant \xi < \xi_1$ (упругих деформаций) возьмем $z_1^* = -\frac{1}{2}$; $z_2^* = \frac{1}{2}$ и $z_1^{*\prime} = z_2^{*\prime} = z_1^{*\prime\prime} = z_2^{*\prime\prime} = 0$.

В зоне $\xi_1 \leqslant \xi < \xi_2$ (где возникает одна зона пластических деформаций) из уравнения (9) после подстановки $z_2^* = \frac{1}{2}$; $z_2^{*\prime} = z_2^{*\prime\prime} = 0$ получим

$$z_1^* = \frac{2-\lambda}{2\lambda} - \sqrt{\frac{1-\lambda}{\lambda^2} - \frac{k^2 - 12n}{6\lambda\pi^2 w_0^* \sin \pi\xi}},$$

$$z_1^{*\prime} = \frac{\pi[(2-\lambda) z_1^* - \lambda z_1^{*2} - \frac{1}{4}\lambda] \cot \pi\xi}{2\lambda z_1^* - 2 + \lambda},$$

$$z_1^{*\prime\prime} = \frac{\pi^2[\lambda z_1^{*2} - (2-\lambda) z_1^* + \frac{1}{4}\lambda] - 2\pi(2\lambda z_1^* - 2 + \lambda) z_1^{*\prime} \cot \pi\xi - 2\lambda z_1^{*\prime 2}}{2\lambda z_1^* - 2 + \lambda},$$

Таблица 1

w_0^*	$q_у^*$	$q_П^*$	$k^2_у$	$k^2_П$	ξ_1	ξ_2	$z_1^*\left(\frac{1}{2}\right)$	$z_2^*\left(\frac{1}{2}\right)$
$n = 2$								
0,3	9,714	9,652	9,594	9,562	0,3020	0,5000	—0,4020	0,5000
0,4	10,60	9,836	11,61	11,12	0,1830	0,5000	—0,2420	0,5000
0,5	10,74	9,049	13,03	11,74	0,1359	0,5000	—0,1528	0,5000
0,6	10,39	7,976	13,86	11,68	0,1127	0,5000	—0,1022	0,5000
0,7	9,809	7,000	14,10	11,08	0,1009	0,5000	—0,0743	0,5000
0,8	9,253	6,388	13,74	10,04	0,0952	0,3143	—0,0627	0,4439
0,9	8,980	6,109	12,79	8,710	0,0926	0,2412	—0,0634	0,3869
1,0	9,247	6,142	11,26	7,163	0,0918	0,1924	—0,0725	0,3328
1,1	10,31	6,943	9,124	5,450	0,0919	0,1568	—0,0873	0,2811
1,2	12,43	7,576	6,400	3,604	0,0927	0,1297	—0,1061	0,2316
$n = 5$								
0,8	9,253	9,252	13,74	13,74	0,4308	0,5000	—0,4882	0,5000
0,9	8,980	8,951	12,79	12,77	0,3467	0,5000	—0,4416	0,5000
1,0	9,247	9,166	11,26	11,16	0,3086	0,5000	—0,4086	0,5000
1,1	10,31	10,19	9,124	8,949	0,2867	0,5000	—0,3860	0,5000
1,2	12,43	12,25	6,400	6,149	0.2737	0,3888	—0,3719	0,4725

В зоне $\xi_2 \leqslant \xi \leqslant \frac{1}{2}$ (где имеются две зоны пластических деформаций) из уравнений (8)—(9) получим

$$z_1^* = \frac{\pi^2 k^2 w_0^* \sin \pi\xi - 12(1-\lambda)\pi^2 n w_0^* \sin \pi\xi - 24\lambda n^2}{12\pi^2 w_0^*[(1-\lambda)\pi^2 w_0^* \sin \pi\xi + 2\lambda n] \sin \pi\xi},$$

$$z_1^{*\prime} = \frac{A}{12\pi w_0^*[(1-\lambda)\pi^2 w_0^* \sin \pi\xi + 2\lambda n]^2 \sin^2 \pi\xi},$$

$$z_1^{*\prime\prime} = \frac{B}{12 w_0^*[(1-\lambda)\pi^2 w_0^* \sin \pi\xi + 2\lambda n]^3 \sin^3 \pi\xi},$$

$$z_2^* = z_1^* + \frac{2n}{w_0^* \pi^2 \sin \pi\xi},$$

$$z_2{}^{*\prime} = z_1{}^{*\prime} - \frac{2n\cos\xi\pi}{w_0{}^*\pi\sin^2\pi\xi},$$

$$z_2{}^{*\prime\prime} = z_1{}^{*\prime\prime} + \frac{2n(1+\cos^2\pi\xi)}{w_0{}^*\sin^3\pi\xi},$$

где

$$A = [48\lambda n^2(1-\lambda)w_0{}^*\pi^2\sin\pi\xi + 12(1-\lambda)^2\pi^4 n w_0{}^{*2}\sin^2\pi\xi - \\ -(1-\lambda)\pi^4 k^2 w_0{}^{*2}\sin^2\pi\xi + 48\lambda^2 n^3]\cos\pi\xi,$$

$$B = 2(1-\lambda)\lambda\pi^4 n k^2 w_0{}^{*2}\sin^4\pi\xi + (1-\lambda)^2\pi^6 w_0{}^{*3}[k^2 - \\ -12(1-\lambda)n](1+\cos^2\pi\xi)\sin^3\pi\xi - \\ -24\lambda n^2[6(1-\lambda)\lambda\pi^2 w_0{}^* n\sin\pi\xi + 3(1-\lambda)^2\pi^4 w_0{}^{*2}\sin^2\pi\xi + \\ +4\lambda^2 n^2](1+\cos^2\pi\xi).$$

Подставляя результаты последних вычислений в уравнение (10), определим q^*, а уравнение (11) дает k^2 (второе приближение).

На основе этих приближений вычисляем новые значения $z_1{}^*$ и $z_2{}^*$ и их производных и повторяем вычисления, пока будет достигнута желаемая точность.

Результаты вычислений для $\lambda = 0{,}9$; $a = 0{,}7$ и $n = 2$ представлены на рис. 1 и в таблице 1 (индекс У означает упругое, П — упруго-пластическое). Пунктирной кривой отмечены упругие деформации, а сплошными — упруго-пластические. Как видно из рис. 1, в начальной стадии нагружения арка остается упругой. При возрастании нагрузки возникают и пластические зоны. При $n = 2$ пластическая зона от сжатия появляется до достижения упругой критической нагрузки (при которой упругая арка прощелкивается). Полученная зависимость

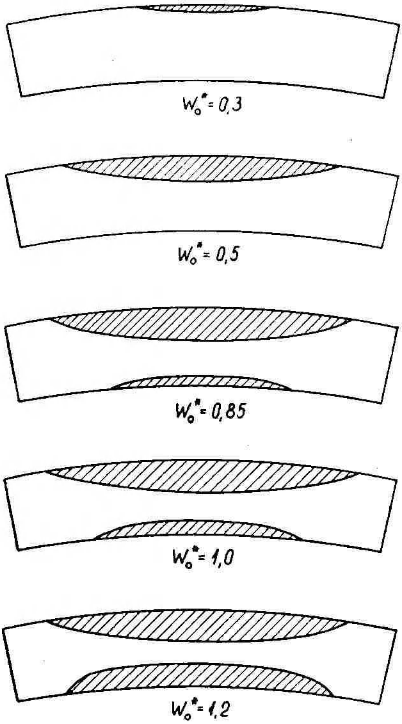

Рис. 4.

между w_0^* и q_Π^* неоднозначна.[2] Чтобы лучше исследовать изменение величин k^2, ξ_1, ξ_2, z_1^*, z_2^*, в таб. 1 представлены некоторые данные вычислений. Изменение пластических зон иллюстрируется на рис. 4 (пластические зоны отмечены штриховкой). Вторая пластическая зона от растяжения появляется уже при значительных прогибах.

Для случая $\lambda = 0{,}9$; $\alpha = 0{,}7$; $n = 3$ зависимость между w_0^* и q^* показана на рис. 2.

С увеличением n пластические деформации появляются позднее, а при $n = 5$ — даже в области неустойчивой формы равновесия арки. Данные вычислений приведены в таб. 1.

Зависимость между w_0^* и q^* для случая $\lambda = 0{,}9$; $\alpha = 0{,}9$; $n = 2$ изображена на рис. 3.

Литература

1. Ильюшин А. А., Пластичность. Москва, 1948.
2. Йыги Э., К расчету упруго-пластических пологих арок. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1962, **129**, 460—468.
3. Йыги Э., О прощелкивании пологих арок. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1962, **129**, 469—481.

Поступило
31 III 1964

LAMEDA ELASTILIS-PLASTILISE RINGKAARE SÜMMEETRILINE DEFORMATSIOON

E. Jõgi

Resümee

Käesolevas artiklis kasutatakse töödes [2, 3] tuletatud võrrandeid lameda elastilis-plastilise ringkaare sümmeetriliste deformatsioonide uurimiseks. Ringkaar, mille ristlõige on ristkülikukujuline, on vabalt toetatud ja talle mõjub ühtlaselt jaotatud radiaalne koormus. Diferentsiaalvõrrandite lahendamiseks kasutatakse Galjorkini ja elastsete lahendite meetodit. Arvuliste tulemuste saamiseks on kasutatud elektronarvutit.

DIE SYMMETRISCHE DEFORMATION EINES SCHWACH GEKRÜMMTEN KREISFÖRMIGEN ELASTISCH-PLASTISCHEN STABES

E. Jõgi

Zusammenfassung

In dem vorliegenden Aufsatz werden die Gleichungen der Arbeiten [2, 3] bei der Untersuchung der symmetrischen Deformation eines schwach gekrümmten kreisförmigen elastisch-plastischen Stabes benutzt. Der kreisförmige Stab, mit einem Rechteckquerschnitt, ist an seinen Enden gelenkig gelagert und unter der Wirkung einer verteilten radialen Last. Bei der Lösung der Differentialgleichungen werden die Methode Galerkins und diejenige der elastischen Lösungen gebraucht. Die Rechnungen wurden mit der elektronischen Rechenmaschine ausgeführt.

---

[2] Интересно отметить, что на отсутствие однозначности при прощелкивании оболочек, указал А. С. Вольмир в своем докладе на II Всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике.

СОДЕРЖАНИЕ — SISUKORD

С. Барон, Э. Юримяэ, Э. Реймерс, Т. Сырмус. К пятидесятилетию со дня рождения проф. Г. Кангро 3

Ю. Лумисте, Э. Тамме и др. Математика в Советской Эстонии за последние двадцать лет 12

Х. Эплер. О связи локально выпуклых пространств с полунормированными пространствами 53

H. Epler. Lokaalselt kumerate ruumide seosest poolnormeeritud ruumidega. *Resümee* 68

H. Epler. Über den zusammenhang lokalkonvexer Räume mit halbnormierten Räumen. *Zusammenfassung* 68

Ю. Лумисте. К основаниям глобальной теории связностей 69

Ü. Lumiste. Seostuste globaalse teooria alused. *Resümee* 107

Ü. Lumiste. The Foundations of the Global Theory of Connections. *Summary* 108

Л. Туулметс. Нормальные квазиконгруенции V_3 в R_4 109

L. Tuulmets. Normaal-kvasikongruentsid V_3 ruumis R_4. *Resümee* . . . 120

L. Tuulmets. Normal quasi-congruences V_3 in the space R_4. *Summary* 121

М. Рахула. К дифференциальной геометрии высшего порядка . . . 122

M. Rahula. Kõrgemat järku diferentsiaalgeomeetriast. *Resümee* . . . 131

M. Rahula. On differential Geometry of higher Order. *Summary* . . . 131

Э. Юримяэ. Некоторые вопросы включения и совместности методов абсолютного суммирования 132

E. Jürimäe. Absoluutse summeeruvuse menetluse sisalduvuse ja kooskõla mõningaid küsimusi. *Resümee* 143

E. Jürimäe. Some Problems of the Inclusion and Consistent of Matric Methods for Absolute Summability. *Summary* 143

Э. Юримяэ. Заметки о конулевых методах суммирования 144

E. Jürimäe. Märkmeid konullmenetluste kohta. *Resümee* 153

E. Jürimäe. Remarks on conull summability methods. *Summary* . . . 153

М. Тыннов. О связи между множителями суммируемости, коэффициентами Фурье и мультипликаторами 154

M. Tõnnov. Summeeruvustegurite, Fourier' kordajate ja multiplikaatorite vahelisest seosest. *Resümee* 164

M. Tõnnov. Über den Zusammenhang der Summierbarkeitsfaktoren, Fourierkoeffizienten und Multiplikatoren. *Zusammenfassung* . . . 164

С. Барон. О признаках типа Вейля для абсолютной суммируемости ортогональных рядов 165

S. Baron. Ortogonaalridade absoluutse summeeruvuse Weyli tüüpi tunnused. *Resümee* 180

S. Baron. Über die Weylschen Kriterien für absolute Summierbarkeit der Orthogonalreihen. *Zusammenfassung* 181

В. Ожегов. Интегральное представление последовательности обобщенных полиномов Аппеля класса $A^{(2)}$ 182

V. Ožėgov. Appeli üldistatud klassi $A^{(2)}$ polünoomide jada integraalne esitus. *Resümee* 187

V. Ozhegov. Integral Presentation of Appell's Class $A^{(2)}$ Summarized Polynomial Succession. *Summary* 187
Г. Вайникко. Некоторые оценки погрешности метода Бубнова-Галеркина I. Асимптотические оценки 188
G. Vainikko. Veahinnanguid Galjorkini meetodile I. Asümptootilised hinnangud. *Resümee* 201
G. Vainikko. Error bounds for Galerkin's method I. Asymptotic error bounds. *Summary* 201
Г. Вайникко. Некоторые оценки погрешности метода Бубнова-Галеркина II. Оценки n-ого приближения 202
G. Vainikko. Veahinnanguid Galjorkini meetodile II. Veahinnangud n-dale lähendile. *Resümee* 215
G. Vainikko. Error bounds for Galerkin's method II. Error bounds for n-th approximation. *Summary* 215
Э. Тамме и И. Саарнийт. Об апостериорной оценке погрешности приближенных решений линейных дифференциальных уравнений 216
E. Tamme ja I. Saarniit. Lineaarse diferentsiaalvõrrandi lähislahendi vea aposterioorsest hindamisest. *Resümee* 230
E. Tamme and I. Saarniit. On posterior error estimation in linear-differential equations. *Summary* 230
Э. Йыги. Симметричная деформация упруго-пластической пологой круговой арки : : 231
E. Jõgi. Lameda elastilis-plastilise ringkaare sümmeetriline deformatsioon. *Resümee* 238
E. Jõgi. Die symmetrische Deformation eines schwach gekrümmten kreisförmigen elastisch-plastischen Stabes. *Zusammenfassung* . . . 238

Тартуский государственный университет
Тарту, ул. Юликооли, 18

ТРУДЫ ПО МАТЕМАТИКЕ И МЕХАНИКЕ IV

На русском, эстонском, немецком и английском языках

Ответственный редактор С. Барон.

Корректоры Л. Брафманн, Э. Выханду, Ф. Кибберманн, О. Мутт, А. Правдин.

Сдано в набор 13/XI 1963. Подписано к печати 27/IV 1964. Бумага 60 × 90, 1/16. Печатных листов 15 + 1 вклейка. Уч.-издательских листов 14,5. Тираж 500 экз. МВ-02950. Заказ № 8737.

Типография им. Ханса Хейдеманна. ЭССР, г. Тарту, ул. Юликооли 17/19. II.

Цена 1 р. 15 к.