T. KOIK
VILJANDIMAA POEGLASTE GÜMNAASIUMI DIREKTOR

MATEMAATIKA ÕPPERAAMAT

KESK- JA KUTSEKOOLIDELE

II

ALGEBRA JA GEOMEETRIA

KESKKOOLI III KL. KURSUS

V. Õ. L. K. „ÕPISTU" KIRJASTUS — VILJANDIS 1936

T. KOIK
VILJANDIMAA POEGLASTE GÜMNAASIUMI DIREKTOR

MATEMAATIKA ÕPPERAAMAT

KESK- JA KUTSEKOOLIDELE

II

ALGEBRA JA GEOMEETRIA

KESKKOOLI III KL. KURSUS

V. Õ. L. K. „ÕPISTU" KIRJASTUS — VILJANDIS 1936

Keeleline korrektor: H. Ruubel.

J. Nurmberg'i trükk, Viljandis 1936

ALGEBRA

Kuigi raamatu geomeetriline osa ei ole üles ehitatud deduktiivselt, on selles nii või teisiti põhjendatud tõdede arv kaunis suurearvuline; sellepärast peab raamatut kasutav õpetaja tegema tarviduse korral antud lauseist valiku, mis võiks rahuldada kujunenud õppetingimusi. Arvan, et esimeses järjekorras võidaks loobuda lausete tõestusist, mis antud §§-s 31, 32, 33, 37, 42 B, D, 46.

A u t o r.

I

§ 1. TEHTEID ASTMETEGA.

A. Korrutamine. Korrutame kaks astet, mille astendatavad on võrdsed, olgu $a^2 \cdot a^3$. Astmete definitsiooni põhjal $a^2=aa$ ja $a^3=aaa$, sellepärast

$$a^2 \cdot a^3 = aa \cdot aaa = a^5.$$

Samuti

$$x^3 \cdot x^4 = xxx \cdot xxxx = x^7$$

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{aaa \ldots a}_{\text{tegur } a \text{ kordub } m \text{ korda}} \cdot \underbrace{aaa \ldots a}_{\text{tegur } a \text{ kordub } n \text{ korda}} = a^{m+n},$$

kus m ja n on mõlemad positiivsed täisarvud.

Siit järgneb juhis võrdsete astendatavatega astmete korrutamise kohta: **nende korrutis on aste, mille astendatav on endine arv ja astendajaks tegurite astendajate summa.**

B. Jagamine. Olgu jagada aste a^6 astmega a^2. *A* põhjal $a^6=a^4a^2$, sellepärast

$$\frac{a^6}{a^2} = \frac{a^4a^2}{a^2} = a^4 \text{ (§ 7, I, I).}$$

Samuti

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^{m-n} \cdot a^n}{a^n} = a^{m-n}$$

(m ja n on positiivsed täisarvud ja $m>n$).

Väljendame juhise võrdsete astendatavatega astmete jagamise kohta: **Jagatis on aste, mille astendatavaks on endine arv ja astendajaks jagatava ja jagaja astendajate vahe.**

Kui $m<n$, siis murru

$$\frac{a^m}{a^n}$$

teisendame järgmiselt:

$$\frac{a^m}{a^{n-m}\, a^m}.$$

Taandame nüüd murru a^m-ga; saame

$$\frac{1}{a^{n-m}},$$

nii et

$$\frac{a^m}{a^n}=\frac{1}{a^{n-m}}$$

(m ja n on positiivsed täisarvud ja $m<n$.)

Näide:

$$\frac{k^3}{k^5}=\frac{1}{k^{5-3}}=\frac{1}{k^2}.$$

D. Astendamine. Astendame astme a^2 kolmega:

$$(a^2)^3=a^2\cdot a^2\cdot a^2=a^6.$$

Samuti

$$(a^k)^m=a^k\cdot a^k\cdot a^k\cdot\ \ldots\ \cdot a^k=a^{km}$$

(k ja m on positiivsed täisarvud, tegur a^k kordub m korda).

Astme aste on aste, mille astendatavaks on endine arv ja astendajaks astendajate korrutis.

Näiteid: 1) $(y^3)^2=y^6$; 2) $(z^2)^4=z^8$.

E. Korrutise astendamine. Arvutame $(ab)^n$, kus n on positiivne täisarv.

Astme definitsiooni järgi

$$(ab)^n=(ab)(ab)(ab)\ldots(ab),$$

kus paremal pool tegurite rühm ab kordub n korda. Korrutanud kõik võrdsed tegurid a, saame a^n, kuna tegurite b korrutis annab b^n, nii et

$$(ab)^n=a^nb^n.$$

Korrutise aste on tegurite astmete korrutis.

Näide: $(a^2c^3)^3=(a^2)^3(c^3)^3=a^6c^9$.

G. Murru astendamine. Astendada murd $\frac{a}{b}$ astendajaga n, tähendab võtta murd $\frac{a}{b}$ teguriks n korda:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\ldots\frac{a}{b}=\frac{aaa\ldots a}{bbb\ldots b}=\frac{a^n}{b^n}.$$

Sõnades: **Murru aste on murd, mille lugejaks on lugeja aste ja nimetajaks nimetaja aste.**

Näiteid:

1) $\left(\frac{d}{f}\right)^3=\frac{d^3}{f^3}$; 2) $\left(\frac{b^3}{c^2}\right)^2=\frac{(b^3)^2}{(c^2)^2}=\frac{b^6}{c^4}$;

3) $\left(\frac{2p}{3q}\right)^3=\frac{(2p)^3}{(3q)^3}=\frac{2^3p^3}{3^3q^3}=\frac{8p^3}{27q^3}$

§ 2. MONOOMIDE KORRUTAMINE, JAGAMINE JA ASTENDAMINE.

A. Korrutamine. 1) Monoomide korrutamisel, nagu

$$(3ab^2c)\cdot(6a^3b^3),$$

võime korrutiste omaduste põhjal tegurite rühmade, praegusel korral monoomide asemel korrutada tegurid üksteise järele ja nad kõige kasulikumalt uuesti rühmitada. Me toimimegi nii:

$$(3ab^2c)\cdot(6a^3b^3)=3ab^2c\cdot 6a^3b^3=$$
$$=(3\cdot 6)\cdot(aa^3).(b^2b^3)\cdot c=18a^4b^5c.$$

2) Märkide juhist korrutamisel rakendades leiame:

$$(-2a\cdot 4ab^2)\cdot(-10a^3b)=+80a^5b^3.$$

B. Jagamine. Jagades monoomi $18d^4e^2f^3g$ monoomiga $10d^3e^2f^5$, kirjutame jagatise esmalt nii:

$$\frac{18d^4e^2f^3g}{10d^3e^2f^5},$$

siis § 7 J (I) omanduse põhjal jagame need tegurid, mille tulemusi oskame lihtsustada, nagu see sulgudega näidatud:

$$\frac{18d^4e^2f^3g}{10d^3e^2f^5}=\left(\frac{18}{10}\right)\left(\frac{d^4}{d^3}\right)\left(\frac{e^2}{e^2}\right)\left(\frac{f^3}{f^5}\right)\cdot g.$$

Et

$$\frac{18}{10}=\frac{9}{5},\quad \frac{d^4}{d^3}=d,\quad \frac{e^2}{e^2}=1,\quad \frac{f^3}{f^5}=\frac{1}{f^2},$$

siis

$$\frac{18d^4e^2f^3g}{10d^3e^2f^5}=\frac{9dg}{5f^2}.$$

D. Monoomi astendamine. Astendame monoomi $3pq$ n-ga.

Astme definitsiooni põhjal kirjutame:

$$(3pq)^n=(3pq)\cdot(3pq)\cdot(3pq)\ldots(3pq).$$

Paremal pool tegurite rühm $3pq$ kordub n korda. Korrutame nüüd esiteks kõik tegurid 3, siis tegurid p, lõpuks tegurid q. Et igaüks neist eri tegureist viimase võrduse paremal pool ilmub n korda, siis

$$(3pq)^n=3^np^nq^n \quad (n \text{ on positiivne täisarv})$$

ehk sõnades: monoomi astendamiseks astendatakse iga monoomi tegur ja tulemused korrutatakse.

Näide:

$$\left(\frac{3xy^2}{2z^3}\right)^2=\frac{(3xy^2)^2}{(2z^3)^2}=\frac{9x^2y^4}{4z^6}.$$

§ 3. POLÜNOOMIDE LIITMINE JA LAHUTAMINE.

Täiendame I jaos § 11, B polünoomide liitmise kohta üteldut järgneva arutlusega.

Olgu liita polünoom

$$4x^2-2x+5$$

polünoomiga

$$-3x^2+4x-7.$$

Tähistame selle nõude järgmiselt:

$$4x^2-2x+5+(-3x^2+4x-7).$$

Tehte läbiviimisel võib siin raskusi olla ainult sulgudes oleva avaldise esimese liikmega. Kuid silmas pidades relatiivsete arvude liitmiseks ja lahutamiseks antud juhist (§ 24, B, I) arvu- ja tehtemärkide kohta, peame selle liikme märgiga toimima kui tehtemärgiga, sellepärast

$$4x^2-2x+5+(-3x^2+4x-7)=$$
$$=4x^2-2x+5-3x^2+4x-7=x^2+2x-2.$$

Samuti

$$(3a^3-4ab-5ab^2)-(-6ab-a^3+ab^2)=$$
$$=3a^3-4ab-5ab^2+6ab+a^3-ab^2=$$
$$=4a^3+2ab-6ab^2.$$

§ 4. POLÜNOOMI KORRUTAMINE MONOOMIGA JA POLÜNOOMIGA.

A. Polünoomi korrutamine monoomiga. Korrutame polünoomi $a-b+c$ monoomiga m.

Polünoomi $(a-b+c)$
võime vaadelda kui summat, mille liidetavaiks on

$$a-b \text{ ja } c.$$

Korrutise distributiivsuse põhjal (vt. § 7, D, I)

$$(a-b+c)m=(a-b)m+cm.$$

Ent paremal pool peab $a-b$ ja m korrutis distributiivsuse põhjal olema

$$am-bm,$$

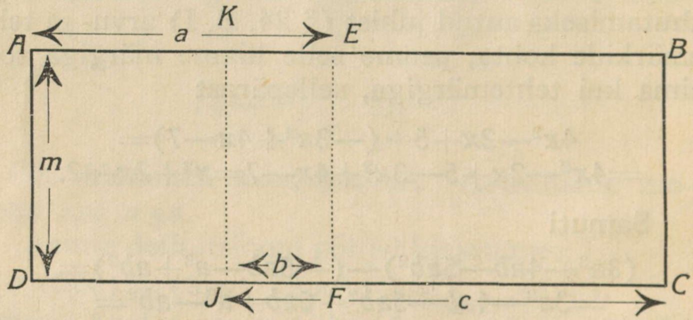
nii et antud korrutis avaldub järgmiselt:

$$(a-b+c)m=am-bm+cm$$

ehk sõnades:

Polünoomi korrutamiseks monoomiga korrutame polünoomis iga liikme monoomiga.

Geomeetriliselt selgitame seda juhist järgmiselt:



1. joon.

Ristküliku $ABCD$ pindala $= rk\,.\,AEFD$ pindala $-$ $- rk\,.\,KEFI$ pindala $+ rk\,.\,KBCI$ pindala. Kui väljendame iga näidatud ristküliku pindala aluse ja kõrguse korrutisega, võime kirjutada, et

$$(a-b+c)m=am-bm+cm.$$

Näide:

$$(2b+\tfrac{1}{3}b^2c-3c^2-4)6bc=$$
$$=2b\cdot 6bc+\tfrac{1}{3}b^2c\cdot 6bc-3c^2\cdot 6bc-4\cdot 6bc=$$
$$=12b^2c+2b^3c^2-18bc^3-24bc.$$

B. Polünoomide korrutamine.

$$(x+y-z)(u-v).$$

Esimeseks teguriks selles korrutises on $x+y-z$. Kui tähti x, y ja z vaatleme kui numbrilisi arve, siis on $x+y-z$ ise mõni arv. Selle arvu korrutamiseks $(u-v)$-ga on tarvis see arv korrutada iga polünoomi $u-v$ liikmega:

$$(x+y-z)(u-v)=(x+y-z)u-(x+y-z)v.$$

Võrduse paremal pool esinevaid korrutisi oskame juba avaldada (vt. p. A), sellepärast:

$$(x+y-z)(u-v)=ux+uy-uz-vx-vy+vz.$$

Polünoomide korrutamisel teise polünoomi iga liige korrutatakse esimese polünoomi iga liikmega ja saadud korrutised liidetakse. (Silmas pidada liitmisel märke!). Kui korrutises ilmuvad sarnased liikmed, siis tuleb polünoom koondada.

Näide:

$$(m^2-2mn+n^2)(m-2n)=m^3-2m^2n+mn^2+$$
$$-2m^2n+4mn^2-2n^3=m^3-4m^2n+5mn^2-2n^3.$$

D. Korraldatud polünoomid. Kui polünoomis esinevad üks või kaks tähte, siis saame nn. **korraldatud polünoomi,** kui paigutame ta liikmed **ühe tähe tõusvate** või alanevate astmete järjekorda.

Näiteks:

$a^3-3a+4a^2+2=a^3+4a^2-3a+2$ (korraldatud polünoom tähe *a* alanevate astmete järjekorras).

$3a^3-2ab^2-4a^2b-b^3=$
$=3a^3-4a^2b-2ab^2-b^3$ (korraldatud polünoom tähe *a* alanevate või tähe *b* tõusvate astmete järjekorras).

Korraldatud polünoomide korrutamine. Kui oleme polünoomid korraldanud, siis on kasulik nende korrutamisel kirjutada „osakorrutised" üksteise alla, paigutades sarnased liikmed ka üksteise alla, sest siis pole tarvidust korrutise koondamisel neid otsida.

Näiteks:

1)

$$\begin{array}{rl}
(9x^2+3ax+a^2)\cdot(3x-a) & \\
\hline
27x^3+9ax^2+3a^2x & \text{(esimene osakorrutis).} \\
-9ax^2-3a^2x-a^3 & \text{(teine osakorrutis).} \\
\hline
27x^3 -a^3 & \text{(korrutis).}
\end{array}$$

2)

$$\begin{array}{rl}
(2a^2-ab-b^2)\cdot(3a+4b) & \\
\hline
6a^3-3a^2b-3ab^2 & \text{(esimene osakorrutis).} \\
+8a^2b-4ab^2-4b^3 & \text{(teine osakorrutis).} \\
\hline
6a^3+5a^2b-7ab^2-4b^3 & \text{(korrutis).}
\end{array}$$

§ 5. MÕNED TÄHELEPANU VÄÄRIVAD KORRUTISED.

A. Olgu leida

$$(a+b)\cdot(a+b).$$

Et siin mõlemad tegurid on võrdsed, siis võib selle korrutise kirjutada ka lühemalt:

$$(a+b)^2.$$

Eelmise §-i järgi

$$(a+b)\cdot(a+b)=a^2+ab+ab+b^2=$$
$$=a^2+2ab+b^2,$$

nii et

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2. \qquad (1)$$

Sõnades: **Kahe arvu summa ruut on esimese liidetava ruut + liidetavate kahekordne korrutis + teise liidetava ruut.**

Tõlgitseme valemi (1) geomeetriliselt.

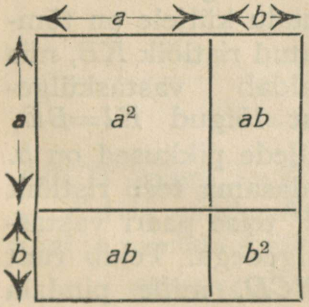
$$(a+b)\cdot(a+b)$$

kujutab geomeetriliselt ristküliku pindala, mille mõõteiks on

$$a+b \text{ ja } a+b,$$

teiste sõnadega ruudu pindala, mille küljeks on

$$a+b.$$



2. joon.

Nagu kõrvalolev joonis näitab, koosneb otsitav pindala järgmistest osapindaladest:

1) ühest ruudu pindalast a^2,
2) kahest ristküliku pindalast ab,
3) ühest ruudu pindalast b^2,

nii et

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$$

Näiteid: 1) $(4+k)^2=4^2+2\cdot4\cdot k+k^2=$
$=16+8k+k^2.$

2) $(3u+5)^2=(3u)^2+2\cdot(3u)\cdot5+5^2=$
$=9u^2+30u+25.$

B. Arvutame korrutise

$$(a-b)\cdot(a-b):$$

$$(a-b)\cdot(a-b)=(a-b)^2=a^2-ab-ab+b^2=$$
$$=a^2-2ab+b^2$$

ehk

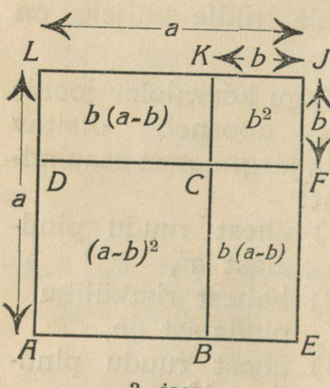
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2.$$

Kahe arvu vahe ruut on esimese arvu ruut — — kahekordne arvude korrutis + teise arvu ruut.

Näiteid: 1) $(3-c)^2=3^2-2\cdot3\cdot c+c^2=$
$=9-6c+c^2.$

2) $(x-2y)^2=x^2-2\cdot x\cdot(2y)+(2y)^2=$
$=x^2-4xy+4y^2.$

Geomeetriline selgitus.



3. joon.

Kõrvalasuv joonis kujutab ruutu $AEIL$, mille külg on a. Ruudu küljele on tõmmatud ristlõik KB, mis eraldab vastasküljedest lõigud $KI=BE$, millede pikkused on b. Sedasama teeb ristlõik DF teise paari vastasküljedega. Tekib ruut $ABCD$, mille pindala kohta leiame:

$ABCD$ pindala $=$ $AEIL$ pindala — $DCKL$ pindala — $CBEF$ pindala — $KCFI$ pindala.

ehk mõõteis:

$$(a-b)^2=a^2-b(a-b)-b(a-b)-b^2=$$
$$=a^2-ab+b^2-ab+b^2-b^2=a^2-2ab+b^2.$$

D. Arvutame:

$$(a+b)(a-b)=a^2+ab-ab-b^2$$

ehk

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2:$$

Kahe arvu summa ja samade arvude vahe korrutis on nende arvude ruutude vahe.

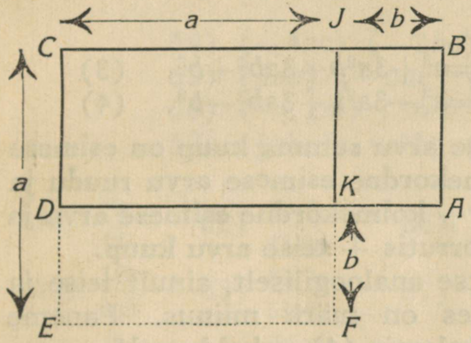
Näide:

$$(2b+3ab)(2b-3ab)=(2b)^2-(3ab)^2=$$
$$=4b^2-9a^2b^2.$$

Valemi

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

geomeetriline tõlgendus.



4. joon.

Kõrvaloleval joonisel on kujutatud ristkülik $ABCD$ mõõdetega $a+b$ (pikkus) ja $a-b$ (laius). Selle ristküliku pindala võime saada nii:

$ABCD$ pind. $=$ $CEFI$ pind. $-$ $DEFK$ pind. $+$ $+$ $KABI$ pind. Avaldanud iga ristküliku (või ruudu) pindala mõõteis, saame:

$$(a+b)(a-b)=a^2-ab+(a-b)b=$$
$$=a^2-ab+ab-b^2=a^2-b^2$$

ehk lõplikult:

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2.$$

E. Arvutame korrutised:

$(a+b)(a+b)(a+b)$	$(a-b)(a-b)(a-b)$
ehk $(a+b)^3$.	ehk $(a-b)^3$.

Kolme teguri korrutamiseks peame esiteks korrutama kaks neist.

$(a+b)(a+b)=$	$(a-b)(a-b)=$
$=(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$	$=(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

Korrutame saadud avaldused veel

summaga	vahega
$a+b$:	$a-b$:
$(a^2+2ab+b^2)(a+b)$	$(a^2-2ab+b^2)(a-b)$
$a^3+2a^2b+\ ab^2$	$a^3-2a^2b+\ ab^2$
$+\ a^2b+2ab^2+b^3$	$-\ a^2b+2ab^2-b^3$
$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$	$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3.$

Lõplikult:

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3. \quad (3)$$
$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3. \quad (4)$$

Sõnades: **Kahe arvu summa kuup on esimese arvu kuup + kolmekordne esimese arvu ruudu ja teise arvu korrutis + kolmekordne esimese arvu ja teise arvu ruudu korrutis + teise arvu kuup.** Valemit (4) loetakse analoogiliselt, ainult teise ja neljanda liikme ees on märk miinus. Paneme tähele, et märgid valemis (4) vahelduvad!

§ 6. ÜLESANDEID.

1) $v \cdot v$
2) $d \cdot d^3$
3) $m^2 \cdot m$
4) $t^2 \cdot t^2$
5) $u^3 \cdot u^3$
6) $z^2 \cdot z^3$
7) $x^4 \cdot x$
8) $y^2 \cdot y^3$
9) $a \cdot a^4$
10) $a^2 \cdot a^4$
11) $c^3 \cdot c^4$
12) $b^4 \cdot b^4$
13) $d^2 \cdot d^5$
14) $k^5 \cdot k^3$
15) $\frac{a}{a^2}$
16) $\frac{p}{p^2}$
17) $\frac{q^2}{q^3}$
18) $\frac{v^3}{v^3}$
19) $\frac{u^4}{u^2}$
20) $\frac{e^5}{e^3}$
21) $\frac{m^2}{m^4}$
22) $\frac{n^3}{n^5}$
23) $\frac{z^6}{z^3}$
24) $\frac{u^6}{u^2}$
25) $\frac{p^2}{p^6}$
26) $\frac{q^4}{q^6}$

27) $(a^2)^3$
28) $(z^3)^2$
29) $(d^4)^2$
30) $(d^2)^4$
31) $(m^3)^4$
32) $(3^2)^3$
33) $(2^3)^2$
34) $(4ab)^2$
35) $(2yz)^3$
36) $(5a^2b)^3$
37) $(-6b^2y)^2$
38) $(-3c^2d^2)^3$
39) $(-4km^3)^2$
40) $(11p^2q^3)^2$
41) $\left(\frac{2m}{3n}\right)^2$
42) $\left(\frac{3c}{4d^2}\right)^2$
43) $\left(\frac{-5ab^2}{3d^2}\right)^3$
44) $\left(\frac{8e^2f}{-5m^2}\right)^3$
45) $\left(\frac{2p^2q^3}{7st^2}\right)^2$

46) $(ab^2)\cdot(ab)$
47) $(2c^2)\cdot(6cd^2)$
48) $(4x^2y^2)\cdot(-3x)$
49) $(-\frac{6}{11}u)\cdot(-22v)$
50) $(-3\frac{1}{2}mn^2)\cdot(m^2n^2)$
51) $(ki^2)\cdot(-\frac{2}{3}k^2i)$
52) $(-2\frac{3}{5}d)\cdot(d^3e^2)$
53) $(-4\frac{2}{5}xy)\cdot(5y^3)$

54) $(-4ac)\cdot(-3bc)\cdot(-5ab)$
55) $(5ab)\cdot(-6ac)\cdot(3bc)$
56) $(-12m)\cdot(3mn)\cdot(6mn^2)$
57) $(\frac{1}{2}a)\cdot(-4a^2b)\cdot(-\frac{2}{5}b^2)$

58) $\frac{18}{42}$
59) $\frac{18a}{9ab}$
60) $\frac{9a}{21b}$
61) $\frac{amn}{acn}$
62) $\frac{11c^2}{33ac}$
63) $\frac{81r^2s}{63r^2}$
64) $\frac{85xy}{102yz}$
65) $\frac{112xy^3}{80y^2z}$
66) $\frac{41p^3q}{82pq^2}$
67) $\frac{11rs}{121rs^2}$
68) $\frac{18mnr}{45nr^2}$
69) $\frac{75acd^2e}{15cd^3}$
70) $\frac{24cd^3}{72c^2d}$
71) $\frac{14uv^2}{56u^3v^2}$

2. Kas on võimalikud järgmised võrdused?

1) $\frac{a}{a}=0.$
2) $\frac{3}{6a}=\frac{0}{2a}=0$
3) $\frac{b^2}{-b^3}=-1$
4) $\frac{4x^2}{8x}=\frac{x}{2}$
5) $\frac{-5x}{25x^2}=-\frac{1}{5x}$
6) $\frac{3b}{-3bc}=c$
7) $\frac{0}{2a}=0$

3. Toimetada järgmised liitmised, kirjutades üksteise all seisvad liidetavad ritta:

1) $\begin{array}{l} n+1 \\ -1+n \end{array}$

2) $\begin{array}{l} 7-x \\ -2x-10 \end{array}$

3) $\begin{array}{l} n+1 \\ a-3 \end{array}$

4) $\begin{array}{l} a-1 \\ 3-x \end{array}$

5) $\begin{array}{l} 3a-n \\ +n-b \end{array}$

6) $\begin{array}{l} m-n \\ -n+1 \end{array}$

7) $\begin{array}{l} 3x-2y \\ -3y-2y \end{array}$

8) $\begin{array}{l} m-2n^2 \\ -n^2-2m \end{array}$

9) $\begin{array}{l} 2x-3y-7 \\ -5x+y+10 \end{array}$

10) $\begin{array}{l} 8m-n^3+7u+3v \\ -9m+4n^3-7u-5v \end{array}$

11) $\begin{array}{l} -1{,}2a+3{,}5b-5c \\ a-5{,}2b+8c \end{array}$

12) $\begin{array}{l} 3{,}3e-4{,}0f+1{,}1 \\ -8e+5{,}2f-1{,}3. \end{array}$

4. Lahutada igas eri näites ülemisest polünoomist alumine:

1) $\begin{array}{l} 3a-n \\ n-a \end{array}$

2) $\begin{array}{l} -3y-2x \\ +y+x \end{array}$

3) $\begin{array}{l} x+5 \\ +5-2x \end{array}$

4) $\begin{array}{l} 8+2x \\ +3x+7. \end{array}$

5) $\begin{array}{l} x+y^2 \\ -y^2-a \end{array}$

6) $\begin{array}{l} 3a-5b^2 \\ -b^2+2a \end{array}$

7) $\begin{array}{l} 7a^3-5b \\ -3x-2y \end{array}$

8) $\begin{array}{l} 3z-5t \\ +8t-4z \end{array}$

9) $\begin{array}{l} 8a-7c^3+4d^2-2f \\ -9a+3c^3+4d^2+3f \end{array}$

10) $\begin{array}{l} u^3-2v+3p^2-4q \\ 2u+v^3-3p^2-2q \end{array}$

11) $\begin{array}{l} \frac{1}{2}-\frac{3}{4}n^2-\frac{1}{4}m-u \\ -\frac{3}{4}-1\frac{1}{2}n^2+2m+2\frac{1}{2}u \end{array}$

12) $\begin{array}{l} 1{,}4k-0{,}51+2{,}7m-1 \\ 4{,}1k+1{,}21-0{,}4m+3. \end{array}$

5. Teisendada sulgudeta avaldisteks:

1) $(3mn-2m+5n)2m$

2) $(6x-4y-11y)3xy$

3) $4uv^2(v-5u^2-3)$

4) $-7x^2y^2(xy-4x+2y)$

5) $12ef^2l(e^2-4f-2el)$

6) $(ab+x^2-\frac{1}{2})\cdot(-4ax)$

7) $8pq(\frac{1}{2}pq-\frac{3}{8}p^2-2)$

8) $(\frac{3}{2}u-\frac{1}{3}v-\frac{1}{3})\cdot(-6u^2v)$

9) $(\frac{1}{2}d-\frac{1}{4}e+\frac{1}{8}f)16ef$

10) $(-1+\frac{2}{3}b-\frac{3}{4}c^2)\cdot\frac{2}{5}bc.$

6. Korrutada järgmised binoomid:

1) $(x+4)(x+4)$	7) $(2x+5y)(2x-4y)$
2) $(x-2y)(x+4y)$	8) $(a+7x)(-2a+7x)$
3) $(5x+6)(5x-9)$	9) $(x-2)(5-3x)$
4) $(p^2-q^2)(p-q)$	10) $(5x-y)(4x-3y)$
5) $(a+2b)(a-3b)$	11) $(m^2+5n)(2m^2-3n)$
6) $(x-2p)(x+7p)$	12) $(7m^2-2n)(3m-2n)$.

7. Korrutada polünoomid ja lihtsustada tulemused. Enne korrutamist polünoomid võimalikult korraldada.

1) $(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-yz-xz-xy)$
2) $(a+b-1)(a-b+1)$
3) $(x+y-z)(x-y+z)$
4) $(x^2+2-3x)(x+3)$
5) $(4x-9)(x+x^2+1)$
6) $(y^2+x^2-xy)(x-y)$
7) $(9p^2+q^2+3pq)(3p-q)$
8) $(2y-5)(4y^2+25+10y)$
9) $(2mn+n^2-m-m^2)(m+3n)$
10) $(a^2-3ab+b^2-4)(3a-4b+1)$

8. Rakendada astendamisvalemeid järgmiste astmete arvutamiseks:

1) 29^2.	3) 57^2.	5) 102^2.
2) 35^2.	4) 98^2.	6) 203^2.

9. Tarvitada järgmiste avaldiste arvutamiseks valemeid:

1) $(m+1)^2$	6) $(3x-y)^2$	11) $(3-4mn)^2$
2) $(a-2)^2$	7) $(4-b)^2$	12) $(2xy-y)^2$
3) $(3+c)^2$	8) $(1+2xy)^2$	13) $(3mn-n)^2$
4) $(2c+1)^2$	9) $(1-3pq)^2$	14) $(4ab+10)^2$
5) $(2c+3d)^2$	10) $(5-mn)^2$	15) $(\frac{1}{2}-2c)^2$

16) $(\frac{1}{3}+3k)^2$
17) $(\frac{2}{5}-5b)^2$
18) $(4k+\frac{3}{2})^2$
19) $(\frac{n}{2}+1)^2$
20) $(\frac{r}{3}-\frac{1}{2})^2$
21) $(\frac{st}{2}-\frac{2}{3})^2$.
22) $(1-3e)^2-(1+e)^2$
23) $(2+2mn)^2-(mn-1)^2$
24) $3(b-a)^2-(2a-1)^2\cdot 2$
25) $4(c-2d)^2+(d+c)^2\cdot 5$.

10. Arvutada järgmised astmed:

1) $(a+1)^3$
2) $(a+2)^3$
3) $(2c-1)^3$
4) $(2-d)^3$
5) $(3-k)^3$
6) $(2+2k)^3$
7) $(a-2b)^3$
8) $(3m-n)^3$
9) $(\frac{1}{3}-p)^3$
10) $(1+\frac{q}{3})^3$
11) $(d+\frac{1}{2})^3$
12) $(x-3y)^3$.

11. Rakendada astendamisvalemeid järgmiste astmete arvutamiseks:

1) 11^3
2) 19^3
3) 101^3
4) 9^3
5) 32^3
6) 102^3
7) 99^3
8) 15^3
9) 49^3.

12. Arvutada korrutised:

1) $(m+1)(m-1)$
2) $(2-c)(2+c)$
3) $(2a-b)(2a+b)$
4) $(4x+3)(4x-3)$
5) $(x+9)(x-9)$
6) $(2c-3d)(2c+3d)$
7) $(3m+4)(3m-4)$
8) $(12x-2)(12x+2)$
9) $(\frac{1}{2}-2a)(\frac{1}{2}+2a)$
10) $(\frac{3}{4}-d)(\frac{3}{4}+d)$
11) $(\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}n)(\frac{1}{2}m-\frac{1}{2}n)$
12) $(\frac{2}{11}-x)(\frac{2}{11}+x)$.

13. Arvutada korrutised, rakendades korrutamisvalemeid:

1) $18\cdot 22$
2) $31\cdot 29$
3) $49\cdot 51$
4) $53\cdot 47$
5) $102\cdot 98$
6) $99\cdot 101$.

14. Teisendada järgnevad avaldised sulgudeta avaldisteks ja lihtsustada tulemused:

1) $(1-2k)(1+2k)-(1-k)^2$
2) $(3+a)^2+(3-2a)(3+2a)$
3) $(c-\frac{1}{2}d)^2-(c-\frac{1}{2}d)(c+\frac{1}{2}d)$

4) $(m+\frac{1}{2}n)^2-3(m^2-2n^2-1)$
5) $(\frac{3}{2}s-1)^2-(2s-1)(2s+1)+(\frac{3}{2}s+1)^2$
6) $(p-4q)^2+(3p-2q)(3p+2q)-(2p-q)^2$.

15. Lahendada järgmised võrrandid:

1) $x+3=1$
2) $4-x=5$
3) $8-x=-3$
4) $12=9-x$
5) $x-11=-4$
6) $2\frac{1}{2}-x=5$
7) $4\frac{1}{4}-x=2\frac{1}{2}$
8) $11=3x-14$
9) $8=5-6x$
10) $7-4x=9+2$
11) $13+2x=5x-6$
12) $4-3x=8-2x$
13) $1{,}3+2x=6x+2{,}2$
14) $\frac{2}{3}x-3=x-9$
15) $\frac{3}{4}x+8=2x-4$
16) $2x+6=4$
17) $12+2x=6$
18) $21x+63=21$
19) $3x+5=6x+17$
20) $4x-(2x-2)-1=-15$
21) $10x+8=12-(40+2x)$
22) $(x-5)-16x-15=10$
23) $24x+3-(16x-5)+(3x-18)=6+15x$
24) $x(x+6)=x^2-2x-16$.

16. Puuris on kodujänesed ja faasanid. Neil on kokku 35 pead ja 92 jalga. Kui palju on puuris jäneseid ja kui palju faasaneid? (Hiina ülesanne u. 2600 a. e. Kr.)

17. Vanal araablasel oli 3 poega ja 17 kaamelit. Surres pärandas ta nooremale pojale poole, keskmisele kolmandiku ja vanemale üheksandiku oma varandusest. Pojad ei tulnud pärandusе jagamisega kuidagi toime. Lõpuks üks neist tegi ettepaneku: „Laenakem naabrilt üks kaamel, siis on meil neid 18. Noorem saab pooled, s. o. 9, keskmine $\frac{1}{3}$, s. o. 6 kaamelit, kuna vanema osaks langeb $\frac{1}{9}$, tähendab 2 kaamelit. Jääb üle üks kaamel, selle anname naabrile tagasi“. Kas jagamine sel kujul toimus isa tahtmise järgi?

18. Laudade paksus on 2,5 cm ja 5 cm. Neid pandi 48 lapiti üksteise peale ja nii tekkis 157,5 cm kõrgune lauavirn. Kui palju oli seal laudu kummastki liigist?

19. Vello Rannu kontokorrent-arvet täiendati saadetisega 500 kr.; selle järele kirjutati sellelt arvelt kuluks sissetulnud tšekk 350 kr. suuruses. Pärast seda arve omanik kahekordistas oma hoiusumma, nii et see muutus 200 krooniks. Missugune oli arve esialgne seis?

20. 50-kroonine rahatäht vahetati kahe- ja ühekrooniseiks müntideks ja saadi kokku 32 münti. Kui palju saadi kumbagi liiki münte?

21. Keegi kreeklanna läks Zeusi templisse ja palus oma raha kahekordistamist. Zeus tegi seda ja kreeklanna ohverdas templile 2 obolost (Vana-Kreeka raha). Ülejäänud rahaga läks ta Apollo templisse ja palus raha ülejäägi kahekordistada. Palve täideti. Ka siis ohverdas tänulik kreeklanna, kuid kaks korda suurema summa. Kui ta aga oma raha üle tahtis lugeda, siis selgus, et ta selle kõik oli välja andnud; kui palju oli tal raha algul?

22. Keegi, kelle vanadust küsiti, vastas: „Kui ma niipalju aastaid üle 100 oleksin, kui praegu alla saja, siis oleksin ma täpsalt 4 korda nii vana kui praegu.“ Kui vana oli see isik?

23. Kuulsalt vana-aja matemaatikult Pythagoraselt küsiti kord, kui palju tal oli õpilasi. Vastus oli: „Pool minu õpilasist õpib mõtteteadust, kolmandik matemaatikat. Ülejäänud on andunud vaiksele mõtiskelule ja moodustavad ühes kolme uustulnukiga (keda enne ei olnud arvestatud) neljandiku nende arvust, kes uurivad mõtteteadust ja matemaatikat.“ Kui palju oli Pythagorasel õpilasi?

24. Pottsepp palkas abilise järgmisel tingimusel: iga tööpäeva eest saab abiline palgaks 1 kr. 50 senti ja söögi, kuid iga äraviidetud päeva eest peab ta meistrile maksma söögi eest 1 krooni. Abiline oli hooletu mees ja 25. päeval selgus arvetegemisel, et kummalgi teisele midagi maksta ei olnud. Mitu päeva tegi abiline tööd?

25. Kaks rattasõitjat alustas sõitu teineteisele vastu kahest kohast, millede vahe oli 205 km. Mitme tunni pärast nad kohtusid, kui esimene sõitis 18 $\frac{km}{t}$, teine 16 $\frac{km}{t}$ ja esimene neist tunni võrra varem välja sõitis?

26. Termomeeter näitas kell 10 5^0 võrra enam kui kell 6 ja kell 13 kaks korda enam kui kell 10. Kui kõrge oli temperatuur kella 6 ajal, kui temperatuur kell 13 oli 9^0 kõrgem kui hommikul kell 6?

27. Ühest arvust lahutati 3, tulemusest võeti $\frac{3}{5}$ ja uue tulemuse kolmekordistamisel saadi arv, mis oleks võetud arvust saadud ka selle liitmisel viiega. Kui suur oli võetud arv?

28. Neli perekonda tellis ühiselt teed, olles kokku leppinud, et A võtab tellitud hulgast neljandiku, B — kuuendiku, C — kolmandiku ja D — viiendiku. Ülejäänud pool kilogrammi pidi kingitama sõpradele uue teesordiga tutvustamiseks. Mitu kilogrammi teed telliti?

29. Poisile, kes kahe tunni eest oli kodust ära läinud ja käis 5 $\frac{km}{t}$, sõitis isa jalgrattal järele, kiirusega 15 $\frac{km}{t}$. Kui kaugel kodust jõudis isa pojale järele?

30. Kui arvust 16 lahutada x, siis saadakse arv, mis on kolm korda suurem 8 võrra suurendatud x-ist. Leida x.

31. Kahekohalise arvu ristsumma on 9. Teinud selle arvu kümnelised ühelisteks ja ümberpöördult, saame arvu, mis 27 võrra on endisest väiksem. Leida arv.

32. Kaks poissi võistles kuulitõukes pähkleile: kaotaja pidi andma võitjale iga viske korral 2 pähklit. Esimesel oli neid algul 40, teisel 25 ja nad heitsid kuuli niikaua, kuni esimesel oli pähkleid neli korda enam kui teisel. Mitu tõuget võitis esimene poiss rohkem kui teine?

33. Kui palju on kell, kui möödaläinud ööba osa on $\frac{5}{3}$ eelolevast osast?

34. Salk töölisi, kelle tööjõud loeme ühesuuruseks, pidi maha niitma kaks heinamaad, millest esimene oli kaks korda suurem teisest. Poole päeva jooksul niitsid kõik töölised esimest heinamaatükki. Õhtupoolel jagunes salk pooleks: ühed niitsid edasi endisel heinamaal, kuna teised hakkasid töötama väiksemal heinamaal. Suurem heinamaa jõuti õhtuks maha niita, kuna väiksemast jäi niipalju niitmata, et üks tööline teise päevaga selle töö lõpetas. Kui palju oli töölisi üldse tööl?

35. Legendi järgi otsustas üks Čehhi valitsejanna abielluda selle kosilasega, kes lahendab järgmise ülesande: „Mitu ploomi oli korvis, kui esimesele kosilasele saab anda pooled ja veel ühe ploomi, teisele pooled ülejäänuist ja veel ühe, kolmandale pooled ülejäägist ja veel kolm ploomi ja kui seejärele korvi enam midagi ei jää?“

36. Isa on 27-aastane, tütar 3-a. Mitme aasta pärast on tütre vanadus neljandik isa aastate arvust?

37. Summa 500 krooni kasutati järgmiselt: üks osa pandi hoiule panka aasta peale 5%-ga, teine osa laenati 6% välja. Kui suured olid need osad, kui nad kokku andsid aastas 28 krooni kasu?

38. Arvust lahutatakse 8, niisamuti liidetakse võetud arvuga 8; mõlemal juhtumil võetakse tulemuste ruudud, millede vahe on 640. Kui suur on võetud arv?

39. Õpilane, kellelt ta pinginaaber viiendal tunnil küsis kellaaega, vastas: „Osutid moodustavad sirge." Mis oli kell? Arvutada aeg täpsalt 0,5 minutini.

40. Linnas oli üks purskkaev. Selle keskmine juga paiskas minutis 60 l vett, 4 äärmist igaüks ainult poole keskmise joa veehulgast. Kokkuhoiu pärast avati purskkaevul kõik nimetatud joad ainult 2 tunniks ööba kohta, muul ajal oli avatud ainult keskmine. Mitu tundi ööba kohta oli purskkaev tegevuses, kui ta veekulu kuus oli eelarves ette nähtud 105 kr. Vee hind arvestada 1,4 $\frac{\text{senti}}{\text{hl}}$. Kuu arvestada 30 päeva ja otsitavate tundide arvu arvutamisel piirduda kümnendikkudega.

II

§ 7. ARVUDE JAGUVUSEST.

Numbriliste täisarvude tähtsamaid omadusi on jaguvus, mis seisab selles, et arve saab jäägita jagada teiste täisarvudega:

$$\frac{18}{3}=6;\quad \frac{24}{6}=4;\quad \frac{72}{24}=3 \quad \text{jne.}$$

Täheliste arvudega seda väljendame nii:

$$\frac{m}{k}=n,$$

kus m, n ja k on positiivsed täisarvud.

Täisarve, millega on võimalik jäägita jagada täisarvu m, nim. arvu m **jagajaks.**

Kui arvul ei ole muid jagajaid peale 1 ja iseenda, siis nimetatakse teda **algarvuks.** Kõik muud arvud on **kordarvud.**

Algarvude näteiks nimetame arve

1, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, . . .

Olgu arv m kordarv ja üks tema **algarvulisist** jagajaist k_1, kuna jagatis olgu n, siis

$$\frac{m}{k_1}=n$$

ehk

$$m=k_1n. \tag{1}$$

Arv n võib omakorda olla kordarv, mille üks algarvulisist jagajaist olgu k_2 ja n jagatis k_2-ga olgu p, siis

$$\frac{n}{k_2}=p$$

ehk

$$n=k_2p. \tag{2}$$

Tähistanud p algarvulise jagaja tähega k_3 ja eeldanud, et p ja k_3 jagatis on ise algarv k_4, leiame, et

$$\frac{p}{k_3}=k_4$$

ehk

$$p=k_3k_4. \tag{3}$$

Korrutame võrdused (1), (2), ja (3), s. t. vasakud pooled isekeskis ja paremad pooled isekeskis, ning seome mõlemad pooled märgiga = :

$$m\,n\,p = k_1 n\, k_2 p\, k_3 k_4 \qquad (4)$$

Jaganud võrduse (4) pooled *np*-ga, saame:

$$m = k_1 k_2 k_3 k_4. \qquad (5)$$

Viimane võrdus näitab, et ka algarvud k_2, k_3 ja k_4 peavad olema m jagajad. Muid algarvulisi jagajaid arvul m olla ei saa. Tõesti, oletame, et m jagub veel algarvuga a; siis vasak pool võrdusest (5) jagub a-ga, järelikult peaks ka parem pool (5) peale jagamist a-ga andma jagatiseks täisarvu, kuid see pole võimalik, sest arvud k_1, k_2, k_3, k_4 kui algarvud võivad jaguda ikka ainult 1 ja iseendaga, seepärast ka nende korrutis ei või muude algarvudega jaguda.

Ühtlasi näitab võrdus (5), et **igat kordarvu saab algarvude korrutisena kujutada.**

Näit.:

$$24 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3.$$
$$42 = 2\cdot 3\cdot 7.$$
$$120 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 5.$$

Kuid võrdus (5) lubab meid järeldada veelgi rohkem: arvu m jagajaiks (mitte **algarvulisiks** jagajaiks) võivad olla peale k_1, k_2, k_3, k_4 ainult need korrutised, mis moodustatakse neist tegureist kahe-, kolme- või neljakaupa, nimelt

$$k_1k_2,\; k_1k_3,\; k_1k_4,\; k_2k_3,\; k_2k_4,\; k_3k_4,\; k_1k_2k_3,\; k_1k_2k_4 \text{ jne.}$$

Muid jagajaid ei või arvul m olla.

Näide:

$$60=2\cdot 2\cdot 3\cdot 5.$$

Arvu 60 jagajad võivad peale 1 ja arvu enda olla ainult:

$$2,\ 3,\ 5,\ 2\cdot 2=4;\ 2\cdot 3=6;\ 2\cdot 5=10;\ 2\cdot 2\cdot 3=12;$$
$$3\cdot 5=15;\ 2\cdot 2\cdot 5=20 \text{ ja } 2\cdot 3\cdot 5=30.$$

§ 8. ARVUDE TEGURDAMINE.

Tegurdada positiivne täisarv tähendab avaldada see teiste täisarvude korrutisena. Tegurdada saab muidugi ainult kordarve. Erilise tähtsuse evib täisarvude tegurdamine **algtegureiks**, sellest peamiselt kõnelemegi edaspidi, kuigi me tarvitame kõnelemise lihtsustamiseks ainult sõna „tegurdamine“.

Eelmine § näitab tee selliseks toiminguks. Esmalt määrame antud arvul, jaguvustunnuseid kasutades, ainult ühe algteguri ja jagame arvu sellega. Järgmiseks määrame **jagatise** ühe algteguri ja jagame temaga esimese jagatise. **Teise jagatise** jagame tema algteguriga; saame kolmanda jagatise. Niiviisi toimime, kuni jagatiseks ilmub algarv. Kõik saadud algarvud kirjutame üksteise järele. Nende korrutis on antud arv.

Jagame võimalikult peast ja läheme tegurite **määramisel väiksemailt arvudelt suuremaile.** Tulemused kirjutame nii:

$$60=2\cdot 2\cdot 3\cdot 5.$$

Kui jagatise meelespidamine tekitab raskusi, siis võib arvutamise korraldada nii:

$$\begin{array}{r|l} 420 & 2 \\ 210 & 2 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \end{array} \qquad 420=2\cdot2\cdot3\cdot5\cdot7.$$

Paremale poole püstjoont kirjutame algarvud, millega jagame, kuna vasakule esiteks tegurdatava arvu, siis üksteise järele jagatised, mis on saadud eelmise arvu jagamisest temast paremal pool asuva algarvuga.

§ 9. SUURIM ÜHISJAGAJA JA VÄHIM ÜHISKORDNE.

A. Suurim ühisjagaja. Olgu tegurdatud arvud 30 ja 45.

$$30=2\cdot3\cdot5.$$
$$45=\quad 3\cdot5\cdot3.$$

Me korraldasime tegurid nii, et ühesugused neist kirjutasime üksteise alla.

Mõlemad antud arvud jaguvad nende teguritega, mis neil ühised (üksteise all), peale selle aga veel nendest moodustatud korrutistega. Arvude suurima ühisteguri, ühtlasi ka suurima ühisjagaja saame, kui korrutame kõik arvude ühistegurid. Käesoleval juhtumil on suurim ühisjagaja $3\cdot5=15$.

B. Vähim ühiskordne. On lõpmatu palju arve, mis antud arvuga jaguvad. Kõiki neid hüütakse selle arvu kordseiks.

Arvu 12 kordsed on 24, 36, 48, 60,...

Ka kahel või mitmel arvul on kordseid, näit. arvude 12, 16 ja 20 kordsed on 240, 480, 720 jne.

Vähimat neist, nimelt 240, nimetatakse nende **vähimaks ühiskordseks.**

Vähima ühiskordse määramise võtte selgitamiseks meenutame, et arvu kordne võib ainult sellepärast jaguda antud arvuga, et kordses esinevad needsamad tegurid, mis on antud arvuski.

Kahe või kolme arvu ühiskordses peavad siis samuti esinema kõik antud arvude tegurid.

Olgu leida arvude 15, 20 ja 70 ühiskordne.

Tegurdame arvud ja kirjutame jällegi arvude ühised tegurid võimalikult üksteise alla:

$$\begin{array}{l} 15=3\cdot 5. \\ 20=\phantom{3\cdot{}}5\cdot 2\cdot 2. \\ \underline{70=\phantom{3\cdot{}}5\cdot 2\cdot 7.} \\ 3\cdot 5\cdot 2\cdot 2\cdot 7. \end{array}$$

Antud arvude vähim ühiskordne peab sisaldama kõik need tegurid, mis sirge alla on välja kirjutatud.

Tähistades vähima ühiskordse tähisega „V. Ü.", leiame:

$$\text{V. Ü.}=3\cdot 5\cdot 2\cdot 2\cdot 7=420.$$

§ 10. RAKENDUSI.

Suurima ühisjagaja teadmine on tarvilik, kui murru taandamisel soovime otsekohe saada taandamatu murru. Olgu taandada murd

$$\frac{72}{168}.$$

Otsime murru lugeja ja nimetaja suurima ühisjagaja:

$$\begin{array}{l} 72=2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3 \\ \underline{168=2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 7} \\ \text{S. Ü.}=2\cdot 2\cdot 2\cdot 3=24. \end{array}$$

Seepärast, taandanud 24-ga, saame:

$$\frac{72}{168}=\frac{3}{7}.$$

Vähimat ühiskordset vajame murdude liitmisel ja lahutamisel või murdude võrdlemisel.

Näide: Arvutada vahe

$$\frac{7}{72}-2\frac{3}{40}.$$

Murdude nimetajate vähima ühiskordse määrame nii:

$$\begin{array}{l} 72=2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3 \\ 40=2\cdot2\cdot2\qquad\cdot5 \\ \hline \text{V.Ü.}=2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot5=360. \end{array}$$

Teinud murrud samanimelisteks, toimetame lahutamise:

$$\frac{7}{72}-2\frac{3}{40}=\frac{35}{360}-2\frac{27}{360}=-1\frac{352}{360}=-1\frac{44}{45}.$$

§ 11. MONOOMIDE JAGUVUS. NENDE SUURIM ÜHISJAGAJA JA VÄHIM ÜHISKORDNE.

A. Monoomide jaguvus. Vaatleme monoomi

$$12a^3b^2c.$$

Paneme tähele, et selles monoomis pole ilmselt murde. See monoom on saadud üksikuist tegureist korrutamise teel, nimelt järgmistest:

$$2,\ 2,\ 3,\ a,\ a,\ a,\ b,\ b,\ c.$$

Nimetame neid tegureid antud monoomi algtegureiks.

Vastavalt eelmistes §-des üteldule peab monoom

$$12a^3b^2c$$

olema jagatav igaühega nimetatud algtegureist ja neist tegureist moodustatud korrutistega. Nii on antud monoomi jagajad peale algtegurite:

$$4, 6, 2a, 6a^3, 2a^2c, 6abc \text{ jne.}$$

B. Monoomide suurim ühisjagaja. Monoomidele, milles pole ilmselt murde, võib leida § 9 kirjeldatud viisil suurima ühisjagaja, s. t. suurima avaldise, millega jaguvad antud monoomid.

Otsime suurima ühisjagaja monoomidele

$$8a^2b^3,\ 12a^3b^2c,\ 16ab^4c^2.$$

Tegurdanud iga monoomi, saame:

$$\begin{array}{lllll}
8a^2b^3 & =2\cdot 2\cdot 2\cdot & aabbb & & \\
12a^3b^2c & =2\cdot 2 & \cdot aabb & \cdot 3\cdot ac & \\
16a\,b^4c^2 & =2\cdot 2 & \cdot a\ bbb & & c2\cdot 2\cdot bc \\
\hline
\text{S.Ü.} & =2\cdot 2 & \cdot a\ bb & =4ab^2. &
\end{array}$$

Tuleb harjuda avaldama monoomide s. ühisjagajat otskohe, ilma et selleks välja kirjutaksime kõiki üksikuid monoomi tegureid, vaid võttes

1) **monoomide kordajate suurima ühisjagaja,**
2) **iga tähelise teguri, mis esineb kõigis monoomes, vähima astendajaga ja korrutades kõik võetud tegurid.**

Näide: Monoomide

$$3x^3yz^2,\ 15x^2z^3 \text{ ja } 27x^3y^2z$$

s. ühisjagaja on

$$3x^2z.$$

D. Vähim ühiskordne. Monoomide vähimaks ühiskordseks nimetame monoomi, mis jagub kõigi antud monoomidega ning sisaldab võimalikult vähe tegureid.

Vähima ühiskordse leidmiseks peame võtma antud monoomide kordajate vähima ühiskordse ja korrutama selle kõigis monoomes esinevate täheliste teguritega, võttes iga teguri ta suurima astendajaga.

Monoomide

$$6d^2ef^3,\ 9de^4 \text{ ja } 15d^2e^2f^2$$

kordajate v. ühiskordne on 90; tähelised tegurid on d, e ja f ja nende suurimad astendajad vastavalt 2, 4 ja 3, seega on antud monoomide vähim ühiskordne

$$90d^2e^4f^3.$$

III

§ 12. ALGEBRALINE MURD JA TA OMADUSI.

A. Kui arv m jagatakse arvuga k, siis kirjutatakse tulemus murru kujul:

$$m:k=\frac{m}{k},$$

ja nimetatakse seda murdu algebraliseks murruks. Kuna arvud m ja k võivad olla positiivsed või negatiivsed, täis- või murdarvud, siis algebralisel murrul võivad olla näiteks väärtused:

$$\frac{-3}{4},\ \frac{2}{-\frac{3}{4}},\ \frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{8}} \text{ jne.}$$

B. Algebralise murru omadusi. Olgu antud murd

$$\frac{m}{n}.$$

Kui selle murru lugeja ja nimetaja korrutame sama arvuga k, mis ei ole null, siis saame murru

$$\frac{mk}{nk}.$$

Tõestame, et

$$\frac{m}{n}=\frac{mk}{nk}.$$

Korrutame viimase võrduse pooled avaldisega *nk*.

Vasak pool.	Parem pool.
$\frac{m}{n}\cdot nk=(\frac{m}{n}n)\cdot k=mk$	$\frac{mk}{nk}\cdot nk=mk$

Et tulemused on võrdsed, siis peab olema õige, et

$$\frac{m}{n}=\frac{mk}{nk}. \qquad (1).$$

Sõnades: **algebralise murru liikmeid võib sama arvuga korrutada.** Sellist tegevust nimetatakse murru **laiendamiseks.**

Lugedes võrdust (1) paremalt poolt vasakule saame:

$$\frac{mk}{nk}=\frac{m}{n}$$

ehk: **murru liikmeid võib sama arvuga jagada.**

Viimast toimingut nimetame murdude **taandamiseks.**

Arv, millega murru liikmeid korrutatakse või jagatakse, ei tohi olla null.

§ 13. MURDUDE TAANDAMINE. NENDE LIITMINE JA LAHUTAMINE.

A. Taandamine. Lihtsustame murru

$$\frac{18c^2d^3e}{24c^2d\,e^2}.$$

Selle murru liikmete suurimaks ühisjagajaks on avaldis

$$6c^2de.$$

Jagame liikmed selle korrutisega (§ 12, B):

$$\frac{18c^2d^3e}{24c^2de^2}=\frac{3d^2}{4e}.$$

B. Murdude liitmine ja lahutamine.

Murdude $\frac{a}{b}$ ja $\frac{m}{n}$ liitmiseks või lahutamiseks teeme nad samanimelisteks. Ühisnimetajaks on nimetajate vähim ühiskordne, s. o. bn, laiendamisteguriks on esimese murru jaoks n, teise jaoks b. Murrud teisenevad järgmisteks:

$$\frac{an}{bn} \text{ ja } \frac{bm}{bn}$$

Nüüd toimub liitmine või lahutamine aritmeetikast tuntud juhiste järgi:

$$\frac{a}{b}\pm\frac{m}{n}=\frac{an}{bn}\pm\frac{bm}{bn}=\frac{an\pm bm}{bn},$$

kus ülemine märk tuleb võtta murdude liitmisel, alumine aga lahutamisel.

Näide: Arvutame:

$$\frac{5a^2}{12bd^2}+\frac{4d^2}{9ab^3}-\frac{2a}{15b^2c}.$$

Ühine nimetaja on $180ab^3cd^2$, laiendamistegurid vastavalt $15ab^2c$, $20cd^2$ ja $12\,abd^2$. Arvutuse viime läbi nii:

$$\frac{5a^2}{12bd^2}^{\overline{15ab^2c}}+\frac{4d^2}{9ab^3}^{\overline{20cd^2}}-\frac{2a}{15b^2c}^{\overline{12abd^2}}=\frac{75a^3b^2c+80cd^4-24a^2bd^2}{180ab^3cd^2}.$$

§ 14. MURDUDE KORRUTAMINE JA JAGAMINE.

A. Korrutamine. Korrutame murru $\frac{m}{n}$ murruga $\frac{p}{q}$.

Tõestame, et

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{mp}{nq}. \qquad (1).$$

Korrutame selle võrduse pooled avaldisega nq.

Vasak pool:	Parem pool:
$(\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q}) \cdot nq = (\frac{m}{n} \cdot n)(\frac{p}{q} \cdot q) = mp.$	$\frac{mp}{nq} \cdot nq = mp.$

Kuna mõlemad tulemused on samased, siis on võrdus (1) õige.

Kahe murru korrutis on murd, mille lugeja on antud murdude lugejate, nimetaja — nimetajate korrutis.

Näide.

$$\frac{3m^3n^2}{8k^2p} \cdot \frac{12kp^4r}{m^2n^2} = \frac{3m^3n^2 \cdot 12kp^4r}{8k^2p \cdot m^2n^2} = \frac{9mp^3r}{2k}.$$

B. Jagamine. Jagada $\frac{a}{b}$ murruga $\frac{c}{d}$ tähendab leida avaldis x, mis korrutatud $\frac{c}{d}$-ga annaks $\frac{a}{b}$.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = x; \quad \text{ehk } x \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{b}.$$

Kuid x võib olla ainult avaldis

$$\frac{ad}{bc},$$

sest ainult see annab murruga $\frac{c}{d}$ korrutamisel avaldise $\frac{a}{b}$ (teha järelkatse!), nii et

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}.$$

Sõnades: **Murdude jagamiseks korrutame jagatava murru jagaja murru pöördarvuga.**

§ 15. VÕRRANDEIST TÄHELISTE KORDAJATEGA.

A. Raamatu I osas selgitasime, et võrrandis on andmed seotud tundmatutega. Andmed olid numbrilised. Võib aga esitada **samas** ülesandes mitmesuguseid numbrilisi andmeid. Sellise ülesande lahendi võime anda igasuguste andmete jaoks valemi kujul, kui võimalikud numbrilised andmed tähistame tähtedega.

Näide: Keegi laskis plombeerida endal a hammast; tasumisel õiendas ta peale uue töö veel vana arve k krooni, makstes üldse c kr. Kui palju maksis hamba plombeerimine?

Olgu maks ühe hamba plombeerimise eest x kr., a hamba eest tuli maksta ax kr. Ülesande tingimuste kohaselt

$$ax+k=c.$$

Viime selles võrrandis liikme k paremale poole, saame

$$ax=c-k.$$

Jagame viimase võrrandi a-ga (a ei ole null!):

$$x=\frac{c-k}{a}.$$

See valem esinebki võrrandi

$$ax+k=c$$

lahendina mitmesuguste a, k ja c väärtuste jaoks. Ülesande sisu kohaselt võivad tähel a olla ainult positiivsed täisarvulised väärtused, kuna tähtedel k ja c võivad väärtusteks olla positiivsed täis- ja murdarvud.

Kui $a=3$, $k=1$, $c=7$, siis

$$x=\frac{7-1}{3}=2 \text{ (kr.)}.$$

B. Kui x-iga liikmeid on enam kui üks, näit.

$$mx-d=nx+3,$$

siis, viinud liikmed tundmatuga vasakule, tuntud liikmed paremale poole, leiame:

$$mx-nx=3+d. \qquad (2)$$

Ent me teame, et $x(m-n)=mx-nx$, seega, asendanud võrrandi (2) vasaku poole eelmise suluavaldisega, saame:

$$x(m-n)=3+d.$$

Jagame lõpuks mõlemad pooled x-i kordajaga, s. o. avaldisega $m-n$:

$$x=\frac{3+d}{m-n}.$$

§ 16. ÜLESANDEID.

1. Tegurdada järgmised arvud algtegureiks:

1) 42	6) 84	11) 125	16) 150
2) 56	7) 96	12) 132	17) 160
3) 54	8) 108	13) 136	18) 164
4) 72	9) 115	14) 140	19) 192
5) 68	10) 120	15) 144	20) 216.

2. Eelmise ülesande arvudel 1), 2), 3), 4), 5) leida kõik jagajad!

3. Leida antud arvude rühma suurim ühisjagaja:

1) 24, 36, 64	7) 96, 120	13) 88, 110
2) 18, 24, 30	8) 40, 80, 100	14) 52, 130
3) 54, 36	9) 112, 84	15) 77, 121
4) 54, 72	10) 84, 96	16) 360, 280.
5) 42, 56	11) 256, 64	
6) 60, 72, 30	12) 162, 54	

4. Leida järgmiste arvude rühmade vähim ühiskordne:

1) 24, 36
2) 18, 24
3) 12, 18
4) 14, 35
5) 26, 39
6) 8, 18, 24
7) 9, 15, 18
8) 12, 18, 30
9) 20, 25, 30
10) 21, 28, 14
11) 36, 48, 24
12) 12, 18, 28
13) 32, 24, 36
14) 26, 39, 4
15) 15, 35, 40
16) 16, 36, 48.

5. Taanda murd üheainsa võttega taandamatuks murruks!

1) $\frac{54}{63}$
2) $\frac{72}{48}$
3) $\frac{60}{72}$
4) $\frac{96}{72}$
5) $\frac{72}{54}$
6) $\frac{115}{92}$
7) $\frac{112}{84}$
8) $\frac{57}{190}$
9) $\frac{242}{110}$
10) $\frac{144}{112}$
11) $\frac{108}{162}$
12) $\frac{39}{52}$
13) $\frac{90}{108}$
14) $\frac{72}{120}$
15) $\frac{288}{252}$
16) $\frac{324}{144}$

6. Toimeta järgmised liitmised ja lahutamised!

1) $\frac{5}{14}+\frac{1}{18}-\frac{5}{42}$
2) $\frac{2}{63}+\frac{5}{6}-\frac{5}{54}$
3) $\frac{7}{18}+\frac{9}{8}+\frac{5}{27}$
4) $\frac{9}{25}-\frac{8}{45}$
5) $\frac{11}{42}-\frac{5}{36}$
6) $\frac{8}{45}-\frac{19}{30}$
7) $\frac{12}{35}-\frac{3}{14}$
8) $\frac{25}{112}-\frac{7}{168}$
9) $\frac{5}{42}+\frac{5}{63}$
10) $\frac{17}{36}+\frac{19}{42}$
11) $\frac{4}{15}-\frac{7}{20}-\frac{1}{24}$
12) $\frac{11}{12}+\frac{3}{16}-\frac{29}{18}$

7. Avalda järgmiste avaldiste suurim ühisjagaja!

1) $8b$, $12b^2$
2) $6a^2$, $8a^3$
3) $15b^3$, $25c^4$
4) $24x^4$, $18x^2$
5) $12ab^2$, $14a^2b^2$
6) $16m^3n$, $24m^2n^3$
7) $32k^3m$, $36km^2$, $42k^2m$
8) $28d^3e^3f^2$, $35de^2f$, $42ef^3$.
9) $8a^2b^3d$, $6a^2bd^2$
10) $24m^4n^3$, $18m^4n^3p$, $30m^4n^2p^2$
11) $15p^3q^2$, $25pq^2$, $35pq^3$.
12) $12r^3pq$, $15rp^2q^2$, $18r^2q$.
13) $16d^3e^2$, $12d^3e^3$, $18de^2$.
14) $10t^4y^3$, $20t^3y^3$, $25t^2y^4$.
15) $9uv^4$, $18u^4v$, $27uv^2$
16) $27xy^2z^3$, $14x^2y^3$, $21xy^3z^2$.

8. Kirjuta eelmise ülesande monoomide vähim ühiskordne!

9. Taanda järgmised murrud!

1) $\frac{12b^3}{16ab^2}$	5) $\frac{8cy^3}{18c^2y^3}$	9) $\frac{51u^4v}{34u^4v}$
2) $\frac{6ax^3}{8a^2x}$	6) $\frac{12a}{16a^2x}$	10) $\frac{54a^3b^2c}{72a^3b^3c^2}$
3) $\frac{9x^3y}{12x^4y}$	7) $\frac{5d^3e^2}{8d^2e}$	11) $\frac{54ac^3b^5}{36a^2c^3b^3}$
4) $\frac{12mn^2}{8m^2n}$	8) $\frac{9i^3k}{21ik^4}$	12) $\frac{216u^2vz^3}{144uvz}$

10. Toimeta liitmised ja lahutamised järgnevais avaldisis!

1) $1+\frac{a}{b}$ 2) $\frac{c}{d}-1$ 3) $\frac{2}{a}-3$ 4) $8+\frac{3}{c}$

5) $5-\frac{a}{3}$

6) $3+\frac{c}{4}$

7) $\frac{2m}{3}-4$

8) $\frac{4n}{5}+2$

9) $\frac{5}{6}a-3$

10) $4c+\frac{3}{8}d$

11) $\frac{5}{2}-\frac{a}{b}$

12) $3\frac{1}{3}+\frac{c}{2d}$

13) $4\frac{3}{4}-\frac{m}{3a}$

14) $\frac{2a}{b}+7\frac{1}{2}$

15) $\frac{4x}{3}-6\frac{2}{3}$

16) $\frac{a}{3}+\frac{b}{2}$

17) $\frac{4m}{5}-\frac{3n}{2}$

18) $\frac{12u}{7}+\frac{3v}{2}$

19) $\frac{a}{x}-\frac{b}{y}$

20) $\frac{a}{b}-\frac{2}{c}+2$

21) $\frac{2b}{3}+\frac{4e}{c}$

22) $\frac{m}{n}+3+\frac{d}{3}$

23) $\frac{3k}{4}-5-a$

24) $\frac{2x}{3}-\frac{x}{y}-\frac{1}{z}$

25) $\frac{1}{x}-\frac{x}{3}+\frac{y}{3}$

26) $\frac{6}{x}-\frac{x}{2}-\frac{y}{3}$

27) $\frac{1-2x}{3}+\frac{2+x}{6}+\frac{1}{2}$

28) $\frac{1}{4}-\frac{2a-1}{2}-\frac{a-3}{6}$

29) $\frac{5}{12}+\frac{y-2y^2}{8}-\frac{y^2-3y}{4}$

30) $\frac{4-5c}{a}+\frac{2-3a}{c}-\frac{2}{3}$

31) $\frac{a}{x}-\frac{b}{mx}$

32) $\frac{a}{nx}-\frac{b}{n}$

33) $\frac{x}{4}-\frac{y}{12b}$

34) $\frac{2}{m^2}+\frac{5}{mn}$

35) $\frac{5}{mn}+\frac{7}{n^3}$

36) $\frac{m}{p^3q^2}-\frac{1}{p^2q^3}$

37) $\frac{1}{p^4q^2}-\frac{n}{p^2q^3}$

38) $\frac{ab}{10c^3d}-\frac{2c}{15d^2k^3}$

39) $\frac{7ak}{18c^4d^2}+\frac{5bd}{12c^2k^3}$

40) $\frac{a}{y^2}-\frac{c}{ky}+\frac{b}{ay}$

41) $\frac{k}{15a} - \frac{k}{5a} + \frac{k}{a^2}$

42) $\frac{4a}{9b^3} - \frac{5b}{6a^3} + \frac{c}{10a^2b^2}$

43) $\frac{3b}{5a^2} - \frac{a}{6b^2} + \frac{8c}{15ab}$

44) $\frac{4x}{3a} - \frac{5x}{6a} - \frac{4x}{5a} + \frac{7x}{15a}$

45) $\frac{4n}{9p} - \frac{8n}{15p} + \frac{11n}{18p} - \frac{3n}{10p}$

46) $\frac{4a^2}{9xy} + \frac{7a^2}{12xy} - \frac{17a^2}{18xy}$

47) $\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^3}$

48) $\frac{b}{az^2} - \frac{2}{bz} + \frac{a}{c}$

49) $\frac{1-3u}{z^2} - \frac{2+u}{z} - \frac{3-u}{z}$

50) $\frac{2}{3a} - \frac{1}{2b} - \frac{2a+3}{6a^2} + \frac{1}{2x^2} + \frac{3a-2b}{6ab}$

11.

1) $x \cdot \frac{2}{x}$

2) $d \cdot \frac{3}{e}$

3) $\frac{6}{y} \cdot 2y$

4) $\frac{15}{4p} \cdot 8p^3$

5) $\frac{u}{k} \cdot \frac{3}{k}$

6) $\frac{2v}{5} \cdot \frac{15}{v^2}$

7) $\frac{a}{3b} \cdot \frac{6a^2}{b}$

8) $\frac{8c}{3k} \cdot \frac{k^3}{16}$

9) $7d^2e^3 \cdot \frac{2e}{d^3}$

10) $\frac{3x^2}{y} \cdot 4xy^3$

11) $\frac{m}{4n^3} \cdot 6m^2n$

12) $\frac{5n^2}{8m^3} \cdot 18nm^2$

13) $-\frac{6}{5p^2q^3} \cdot \left(-\frac{2p^3}{15q}\right)$

14) $+\frac{3a^2b^4}{4c} \cdot \left(-\frac{5c^2}{12b^3}\right)$

15) $-\frac{1}{5} \cdot \left(+\frac{5}{2a}\right) \cdot \left(-\frac{4a^2}{b^2}\right)$

16) $-\frac{8cd^3}{3a} \cdot \left(+\frac{27ca^2}{4d^2}\right)$

17) $+\frac{a}{2c} \cdot \left(-\frac{6a}{b^2}\right) \cdot \left(+\frac{d}{15c^3}\right)$

18) $\frac{a^3}{4cd^2} \cdot \frac{3c^2d}{a^2} \cdot \left(-\frac{5}{c^3}\right)$

19) $\frac{k}{24m^2h^2} \cdot \frac{15}{mh^3} \cdot \frac{12m^3h^5}{5}$

20) $\frac{pq}{9ru} \cdot \left(-\frac{12r^2}{q^3}\right) \cdot \frac{3q^2}{10r}$

12.

1) $a : \frac{a}{c}$

2) $de : \frac{e}{m}$

3) $15xy : \frac{y}{3z}$

4) $36pq : \frac{9p}{q}$

5) $\frac{18}{5} : \frac{6a}{b}$

6) $\frac{2v}{5} : \frac{v^2}{15}$

7) $\frac{x}{3y} : \frac{y}{6x^2}$

8) $\frac{k^3}{16} : \frac{3k}{8c}$

9) $4ab^3 : \frac{b}{3a^3}$

10) $\frac{c^3}{16} : 7c^3e$

11) $\frac{m}{4s^3} : 6m^2s$

12) $5nm^2 : \frac{18n^2m}{5}$

13) $-\frac{2p^3}{15q} : \left(-\frac{6p^3}{5q^2}\right)$

14) $+\frac{3a^2b^4}{4c} : \left(-\frac{12b^3}{5c^2}\right)$

15) $\frac{4ac^2}{27d^2} : \left(+\frac{8cd^3}{3a}\right)$

16) $\frac{1}{32}d^2 : \frac{d^3}{a}$

17) $1\frac{3}{8}p^4q : (-\frac{2}{3}pq^4)$

18) $\frac{4}{9mn} : \frac{2mn}{3}$

19) $\frac{9k^2}{2s} : \frac{2s}{3k^3}$

20) $\frac{42m}{11n^3} : \frac{21n^2}{121m^3}$

13. Teisendada „mitmekordsed“ murrud võimalikult lihtsaiks:

1) $\dfrac{3-\frac{2}{3}}{2\frac{1}{2}+1\frac{1}{6}}$

2) $\dfrac{\frac{3}{4}+\frac{2}{5}}{\frac{3}{4}-\frac{2}{5}}$

3) $\dfrac{\frac{5}{6}-1\frac{2}{3}}{2\frac{3}{4}-1\frac{5}{6}}$

4) $\dfrac{\frac{19}{12}+\frac{11}{10}}{\frac{15}{8}-\frac{8}{15}}$

5) $\dfrac{\frac{5}{6}-\frac{3}{8}}{\frac{4}{3}-\frac{3}{4}}$

6) $\dfrac{\frac{8}{3}-\frac{3}{8}}{1\frac{5}{8}-\frac{2}{3}}$

14. Astenda järgnevad murrud või anna avaldisele lihtsaim kuju!

1) $(\frac{2}{3})^3$

2) $(-\frac{4}{5})^4$

3) $(-1\frac{3}{4})^3$

4) $(-3\frac{1}{3})^2$

5) $\dfrac{2 \cdot \frac{12}{5}}{1-(\frac{12}{5})^2}$

6) $\dfrac{(\frac{24}{7})^2-1}{2 \cdot \frac{24}{7}}$

7) $\dfrac{2 \cdot \frac{8}{15}}{1-(\frac{8}{15})^2}$

8) $\dfrac{\frac{2}{3}-(\frac{1}{2})^2}{\frac{1}{4}-(\frac{1}{3})^2}.$

15.

1) $\left(\frac{2a}{b}\right)^3$ 4) $\left(\frac{5ab}{4c}\right)^4$ 7) $\left(\frac{4yz}{u}\right)^3$

2) $\left(\frac{1}{4c}\right)^2$ 5) $\left(\frac{6xy}{5zu}\right)^3$ 8) $\left(\frac{3mkn}{2pq}\right)^5$

3) $\left(\frac{2d}{3c}\right)^3$ 6) $\left(\frac{ab}{5c}\right)^3$

16. Lahendada järgmised võrrandid *x*, *y* või *z* suhtes:

1) $c+x=0$
2) $a-x=1$
3) $2x-m=k$
4) $kx-3=n$
5) $m+dx=-4$
6) $ab+bx-d=0$
7) $my-n=k$
8) $ax-b=cx$
9) $py-a=qy-b$
10) $d-mz=z-n$
11) $k(y+a)=b$
12) $(z-c)p=q$
13) $\frac{x}{p}=k$
14) $\frac{y}{2n}=3p$
15) $\frac{2z}{5q}=a$
16) $\frac{x}{m}-a=k$
17) $\frac{z}{k}+b=c$
18) $\frac{cz}{a}+\frac{dz}{b}=5$
19) $\frac{ax}{b}-\frac{cx}{d}=0$
20) $\frac{ax}{b}-\frac{cx}{d}=1$
21) $\frac{ky}{m}+\frac{ly}{n}=q$
22) $\frac{az}{m}-\frac{bz}{n}=p$
23) $ax-b=cx-d$
24) $by+e=dy+f$
25) $\frac{m-x}{2}-\frac{n+x}{3}=0$
26) $\frac{a+y}{d}+\frac{b-y}{c}=0$
27) $\frac{m-z}{p}-q-\frac{n-z}{p}=2$
28) $ab-b(x+1)+x=b(a-x)$
29) $(b+1)x+ab=b(a+x)+a$
30) $x(a-2)+a=(b-2)x+b.$

17. Munamüüja müüs turul esiteks üheksandiku, siis kuuendiku ja neljandiku esialgsest munade arvust, kuid jääk oli ometi ainult kahe muna võrra väiksem kui pool esialgsest munade arvust. Missugune oli see?

18. Kahest vennast oli üks 4 aastat vanem teisest. Vanema venna aastate arv oli 1 võrra suurem $1\frac{1}{2}$-kordsest noorema venna aastate arvust. Kui vana oli kumbki?

19. Isa oli $4\frac{1}{2}$ korda vanem pojast, aga kokku oli nende aastate arv 27 võrra väiksem vanaisa vanadusest. Teades, et vanaisa oli 71-aastane, arvutada isa ja poja vanadus!

20. Oleks ühes raamatus 236 lehekülge enam, kui seal neid on, siis oleks tal parajasti nii mitu lehekülge üle 400, kui tal neid tõepoolest on alla 400. Mitu lehekülge on raamatus?

21. Ühe kella pendel teeb 5 minutiga 387 võnget, teise kella pendel aga 3 minutiga 341 võnget. Mitme minutiga teeb esimene pendel just 1628 võnget enam kui teine.

22. Klassi õpilased pidid tasuma teeõhtu korraldamise kulu. Kui igaüks neist oleks andnud 50 senti, siis oleks rahast 1 kr. üle jäänud; kui igaüks oleks andnud 45 senti, siis oleks 40 senti puudu tulnud. Kui palju õpilasi oli klassis?

23. Üks vend on 21 ja teine 15 aastat vana. Millal on vendade vanaduste suhe 3:1?

24. Ühel koosviibimisel moodustas meeste arv $\frac{3}{2}$ naiste arvust. Pärast 6 abielupaari lahkumist jäi koosviibimisele mehi 3 korda enam kui naisi. Kui palju inimesi võttis koosviibimisest osa?

25. Toiduainete-kaupmees arvas oma suhkrutagavaraga läbi saavat 8 päeva; aga et ta järgmistel päevadel keskmiselt 9 kg päevas vähem müüs, kui ta oli arvestanud, siis jätkus tagavarast 6 päeva võrra pikemaks ajaks. Kui suur oli suhkrutagavara?

26. Ehituse juures töötasid korraga 4 müüriseppa ja 6 puuseppa. Kokku said nad päevas kr. 29,60 tasu, iga müürisepp sai 40 sendi võrra puusepast enam. Kui suur oli ühe ja teise päevapalk?

27. Poes müüakse kaustikuid: 8 poognast paberist à 13 senti ja 20 poognast —. à 28 senti. Mõlema kaustiku paber ja köide on ühesuguse väärtusega. Kui kallis on tarvitatud paberipoogen ja kui kallis on köide?

28. Tee mõlemale äärele soovitakse istutada puid. Kui puud paigutada 9-meetriste vahedega, siis jääks neid 12 üle; kui aga vahemaa määrataks kindlaks 8 m peale, siis tuleks 32 puud puudu. Teades, et tee mõlemasse otsa istutatakse puud, arvutada 1) olemasolevate puude hulk ja 2) tee pikkus!

29. Viis isikut mängis keeglit. Igaüks pani kassasse 15 senti ja kassa võitis see, kes kahe viskega kõige rohkem silmi sai. Kaheteistkümne mängu järele oli üks mängija üldse võitnud kr. 5,40. Mitu korda oli ta kõige paremini visanud?

30. Murd, mille lugeja on nimetajast nelja võrra väiksem, muutub $\frac{3}{5}$-ks, kui ta liikmeid vähendada 5 võrra. Leida murd!

31. Murru nimetaja on lugejast ühe võrra väiksem. Kui vähendada murru liikmeid ühe võrra, siis saab murd kaheks. Leida murd!

32. A peab oma võlgade tasumiseks maksma B-le 400 krooni 3 kuu pärast ja C-le 600 krooni 8 kuu pärast, aga ta soovib oma võla õiendada korraga, ilma et ta seeläbi kasu või kahju saaks. Millal peaks ta võlad tasuma?

33. Alttoa peab maksma kohe 100 krooni Järveski'le, nelja kuu pärast 300 krooni Aru'le ja 800 kr. kaheksa kuu pärast Urvi'le. Kunas peaks Alttoa oma võlad õiendama, kui ta tahaks seda teha korraga, aga nii, et intresside summa jääks endiseks?

34. Kaks kapitali andis võrdse kasu, kuigi esimene $\frac{1}{2}$% rohkem kandis kui teine. Mitme-protsendine oli kummagi kapitali kasu, kui kapitalide suurused olid 3000 kr. ja 3375 krooni?

35. Kaks kapitali kandis vastavalt 4 ja $3\frac{1}{2}$% kasu. Mõlemailt kokku saadi 454 krooni. Arvutada kapitalide suurused teades, et teine oli 1400 kr. suurem kui esimene!

36. Jalakäija tegi tunnis $4\frac{1}{2}$ km. $1\frac{1}{2}$ tundi peale tema teekonna algust väljus rattur jalakäija lähtumise kohast samas suunas, kiirusega $13\frac{1}{2}$ km. tunnis. Kunas ja kui kaugel lähtumiskohast jõuab rattur jalakäijale järele?

37. Mootorpaat sõitis, sadamast väljunud, kiirusega $9\frac{1}{2}$ $\frac{\text{km}}{\text{t}}$. Mootori rikke parandamiseks pidi ta merel peatuma 20 minutit. $2\frac{1}{2}$ tundi peale mootorpaadi lahkumist sadamast sõitis merele samas suunas jaht, kiirusega 18 $\frac{\text{km}}{\text{t}}$. Kui kaua aega pärast mootorpaadi väljumist sadamast jõudis jaht talle järele? Arvutada täpsalt 1 minutini!

38. Kaks sõpra elab teineteisest $24\frac{3}{4}$ km kaugusel. Nad otsustasid kord kohata teineteist teel,

lähtudes kodudest korraga. Esimene neist käis tunnis $4\frac{1}{2}$ km, teine $5\frac{1}{2}$ km. Teine pidi teel puhkama 30 minutit. Kunas ja kus kohas kohtusid nad?

39. Kahekohase arvu ristsumma on 11. Kui see arv kahekordistatakse ja tulemusega liidetakse 7, siis saadakse arv, mille kirjutamiseks antud arvu numbrid tuleb teineteisega asendada. Leida arv.

40. Keegi tahtis ühe arvu ruutjuurt leida proovimisega. Kui ta selleks tegi esimese järelkatse, siis sai ta 75 võrra väiksema arvu, kui ta pidi saama; võttis ta aga katseks 3 võrra suurema arvu, siis ületas tulemus 156 võrra selle arvu, mille ta pidi saama. Missuguste arvudega katsetas arvutaja?

41. Arvu ruutjuurt tahetakse ligikaudselt leida proovimisega. Esimene arv annab 571 võrra, teine, mis kahe võrra suurem esimesest, 319 võrra väiksema arvu kui on nõutav. Missuguste arvudega katsetati ja missugusest arvust taheti ruutjuur võtta?

42. Võta arv, kahekordista see, lahuta tulemusest 5 ja uus tulemus jaga kahega! Lahuta siis saadud arvust võetud arv ja liida tulemusega 13! Missugune on lõpptulemus? Mispärast?

43. Vabalt valitud arvuga liida 3 ja neljakordista tulemus! Viimasest lahuta 8 ja jaga resultaat 4-ga! Kui saadusest lahutad valitud arvu, missugune on tulemus? Mispärast?

44. Mõtle arv, kirjuta sellele paremale poole number 3, lahuta saadud arvust 5, kirjuta uuele tulemusele paremale poole number 2 ja liida selle arvuga 18; tulemus jaga sajaga! Missuguse arvu saad?

45. A ütles B-le: „Anna mulle 10 krooni, siis on mul kaks korda rohkem raha kui sul!“ B vastas: „Anna sa mulle 10 krooni, siis on mul kolm korda rohkem kui sul!“ Kui palju oli raha kummalgi?

46. Kirjastaja teenib oma kapitalilt 25%, kui raamatu hind on kr. 1,50. Kui kõrge hinna peaks kirjastaja raamatule määrama, kui ta tahaks teenida 30%? Tulemuses hind ümmardada terveiks viielisiks.

47. Raamatukauplus teenib 30%, müües kaustikuid 26 sendiga. Kui suur oleks kasu % 25-sendise hinna juures?

48. Aia korraldustöö lubab A teostada 15 päevaga, B aga 20 päevaga. Lõpuks palkab aiaomanik nad mõlemad ja töötab ka ise kaasa. Töös selgub, et omanik päevas 16 m^2 enam võib korraldada kui B. Mitu ruutmeetrit oli aed suur, kui töö lõpetati 5 päevaga?

49. Kahepoolsele kangile surub tööline kahe käega ühtlaselt, kokku 40 kilogrammiga; käte kaugus kangi pöörlemistäpist on vastavalt 1,75 ja 2,25 meetrit. Kui suure tungi tasakaalustab tööline, kui teada on, et selle tungi rakendustäpi kaugus kangi pöörlemistäpist on 0,75 m?

50. Kellelgi on 3 vaati. Kui ta teise tühja vaadi täidab esimesest täiest vaadist, siis jääb sellesse veel $\frac{3}{5}$ üle. Täidab ta aga kolmanda tühja teisest täidetud vaadist, siis jääb sellesse üle $\frac{1}{6}$. Kui mõlemad viimased vaadid täita esimesest, siis jääb sellesse veel 160 liitrit. Mitme liitrine on iga vaat?

51. Kahes kotis oli pähkleid, mõlemas kokku 128 tükki. Nende omanik pani vaheldamisi ühest kotist pooled selle koti pähklitest teise. Kui ta niiviisi oli neli korda toiminud, siis oli esimeses kotis

42 pähklit enam kui teises. Mitu pähklit oli kummaski kotis esialgu?

52. Pagaril oli kassas raha k krooni. Ta ostis a tsentnerit nisujahu, seejärele jäi kassasse d kr. Mis maksab nisujahu tsentner?

53. Õpilasel oli s senti, kuid c vana raamatu müügi järele kogunes tal d krooni. Kui palju sai õpilane keskmiselt raamatu eest?

54. Murru lugeja on a võrra väiksem nimetajast. Kui lugejat vähendada b võrra, siis muutub murd $\frac{c}{d}$-ks. Leida esialgne murd.

55. Murru lugeja on m võrra suurem nimetajast. Kui lugejat suurendada k korda, siis muutub murd $\frac{p}{q}$-ks. Leida esialgne murd.

56. Taluperemees kindlustas viljasaagi a hektaarilt ja maksis preemiamaksu k kr. hektaarilt. Rahe rikkus m ha vilja à n kr. väärtuses ja arvetegemisel selgus, et preemia ja rikutud vilja väärtus ületasid kogu kindlustussumma p krooni võrra. Kui suur oli hektaari kindlustussumma?

57. Klassi õppekäigule hilistunud õpilane sõidab teistele 1 tunni pärast järele rattaga ja jõuab 15 min. pärast teiste juurde. Kui suure kiirusega liikusid ekskursandid edasi, kui õpilane sõitis kiirusega 15 $\frac{km}{t}$?

58. Pärivett sõites jõuab aerutaja edasi t tunniga m kilomeetrit, vastu vett aga k tunniga n kilomeetrit. Leida voolu kiirus ja sõudja kiirus seisvas vees. (Sõudja kiirus seisvas vees olgu voolu kiirusest suurem).

59. Üks marjakorjaja võib korvi täita a tunniga, teine b tunniga. Missuguse ajaga korjavad mõlemad koos sama korvitäie marju?

60. Ema jõuab korvikese maasikaid täis korjata t minutiga, kuna sama korvitäie ta laps jõuab ära süüa u minutiga. Olgu $t<u$. Ema ja laps algavad nimetatud toiminguid korraga. Mitme minutiga saab siis korv täis?

61. Naine võib korvitäie marju korjata m minutiga, ta mees aga sama korvitäie ära süüa n minutiga $(m>n)$. Alaku mees siis marjade söömist, kui korv on täis korjatud, aga naine jätkaku korjamist. Mitme minutiga tühjeneb korv?

62. HM annab kolmele kutsekoolile toetuseks p krooni. Esimene saab kaks korda enam kui teine, kolmas aga $\frac{1}{n}$ mõlemate esimeste toetusest kokku. Kui palju saab iga kool?

63. Kauba müügil d krooni eest saadi $p\%$ kahju. Kui suur oli kauba omahind?

64. Kui kaupmees kauba müüb s krooni eest, siis on ta teenistus $q\%$. Kui kõrge on kauba omahind?

65. Võidujooksust võttis osa m meest, kellest n ei lõpetanud jooksu. Mitu protsenti meestest lõpetas jooksuvõistluse?

66. Segati kahte seltsi kompvekke: a ja b $\frac{kr}{kg}$. Segu omahind oli c $\frac{kr}{kg}$ ja saadi m kg. Mitu kilogrammi kumbagi seltsi kompvekke segati?

67. Punktidest A ja B, mille vahe on jõge mööda n meetrit, sõidavad teineteisele vastu kaks jõult võrdset sõudjat. Esimene sõidab pärivett ja jõuab A-st B-ni t tunniga; teine sõidab vastu vett ja jõuab B-st A-ni d tunniga. Leida voolu kiirus ning sõudjate kiirused seisvas vees.

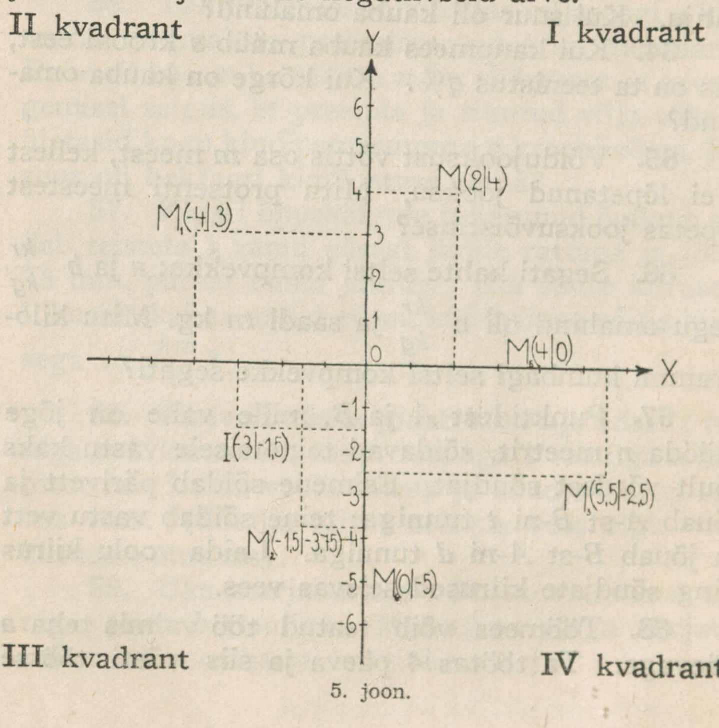
68. Töömees võib teatud töö valmis teha a päevaga. Ta töötas 4 päeva ja siis võeti töösse veel teine mees, kelle tööjõud oli niisama suur kui esimesel. Mitu päeva töötasid mõlemad töö lõpetamiseks üheskoos?

IV
TÄPPIDE KUJUTAMINE TASAPINNAL.

§ 17. SUURUSTE OLENEVUSE GRAAFIKUD.

A. Matemaatikas tarvitatakse täppide asendi määramiseks mitmesuguseid viise; lihtsaimat neist kirjeldame siin.

Võetakse ristsirged *OX* ja *OY* (5. joon). Mõlemad tehakse arvtelgedeks, kusjuures nulltäpiks võetakse telgede lõiketäpp. *XO* pikendatakse vasakule ning *OY* allapoole. Neil arvtelgede jätkudel kujutatakse negatiivseid arve.



5. joon.

Tõmmanud tasapinna täppidest M, M_1, M_2, ..., ristlõigud telgedele näeme, et

täpp M	on määratud arvudega	2 ja 4
„ M_1 „	„ „	—4 ja 3
„ M_2 „	„ „	—1,5 ja —3,75
„ M_3 „	„ „	5,5 ja —2,5

Kirjutatakse:

$M\ (2 \mid 4)$		$M \equiv (2 \mid 4)$
$M_1\ (-4 \mid 3)$	ehk:	$M_1 \equiv (-4 \mid 3)$
$M_2\ (-1{,}5 \mid -3{,}75)$		$M_2 \equiv (-1{,}5 \mid -3{,}75)$
$M_3\ (5{,}5 \mid -2{,}5)$		$M_3 \equiv (5{,}5 \mid -2{,}5)$.

Need arvud näitavad täppide kaugusi telgedest OY ja OX. Täpi tähise juurde kirjutatakse enne kaugus Y-teljest, siis kaugus X-teljest. Täpp $N\ (0 \mid 2)$ asetseb Y-teljel, sest selle täpi kaugus Y-teljest on 0. Täpp $L\ (3 \mid 0)$ on X-teljel.

Arvude paari, mis määrab täpi K tasapinnal, nimetatakse selle täpi koordinaatideks; esimene arv kannab nime **abstsiss**, teine — **ordinaat**.

Näide: Täpp I (5. joon.) on määratud arvude paariga $(-3 \mid -1\frac{1}{2})$. Täpi I abstsiss on „—3", ta ordinaat „$-1\frac{1}{2}$". Arvud „—3" ja „$-1\frac{1}{2}$" on täpi I koordinaadid.

Telgede lõiketäppi nimetatakse koordinaatide alguseks (algtäpiks), sest täpp $M_1\ (-4 \mid 3)$ märkimisel võime kauguste asemel M_1-st Y-teljeni ja X-teljeni võtta telgede lõigud: enne X telje lõigu „—4", pärast Y-telje lõigu „3".

Täppide M_4, M_5 ja alguse O asendid tuleb märkida nii: $M_4(0 \mid -5)$, $M_5(4 \mid 0)$, $O\ (0 \mid 0)$.

Kõik täpid tasapinnal asetsevad kas I, II, III või IV kvadrandis.

B. Matemaatika tähtsamaid ülesandeid on uurida olenevust suuruste vahel. Muidugi ei saa matemaatika anda ülevaadet iga olenevuse kohta, sest olenevused võivad olla sedavõrd keerukad, et seaduste avastamine on võimatu. Matemaatika peab esialgu pöörama tähelepanu lihtsamaile olenevusile. Selgitagu seda näide. On teada, et mingi kauba, olgu rukki, eest maksetav rahasumma oleneb kauba hulgast. Olgu rukki hind 12 senti kilogramm, siis kahe, kolme, nelja, ... saja kilogrammi eest maksetav hind on vastavalt 24, 36, 48, ..., 1200 senti. See näitab, et oleme avastanud olenevuse rukki hinna ja hulga vahel.

Olenevust võime tähele panna ka matemaatiliste avaldiste vahel.

Olgu antud avaldis

$$2x—5.$$

Pannes x-i asemele järgemööda 1, 2, 3, 4, 5, ... saame avaldise väärtused:

Kui x on	siis avaldise väärtus on:	
0	—5	
1	—3	
2	—1	(1)
3	1	
4	3	
5	5	

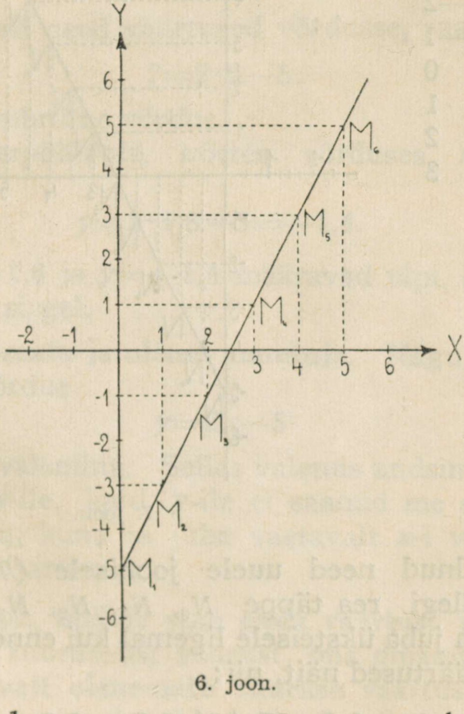
Me näeme, et avaldise väärtus on muutuv: ta oleneb x-i väärtusest. Me tähistame seda avaldise muutuvat väärtust tähega, näit. y-ga:

$$y=2x—5. \qquad (2)$$

(1) ja (2) annavad olenevuse: esimene **tabelina**, teine **valemina**.

Kui silmitseme lähemalt tabelit (1), näeme, et x-i väärtused kasvavad sambas allapoole, sama sünnib ka y-i väärtustega. Võime isegi tähele panna, et x-i väärtused kasvavad ühe võrra, y-i väärtused kahe võrra, kui läheme mingilt realt ühe rea võrra allapoole. Tabel annab meile selge pildi sellest olenevusest. Valem esialgul ei ütle meile midagi. On aga veel võimalus esitada olenevus matemaatilise pildiga, nn. joonisega.

Toimime selleks järgmiselt: Loeme tabeli (1) arvud (x-i ja vastava y-i väärtused) täppide koordinaatideks ja kujutame need täpid koordinaadistikus XY (6. joon.). Saame täpid M_1, M_2, M_3, M_4, . . .



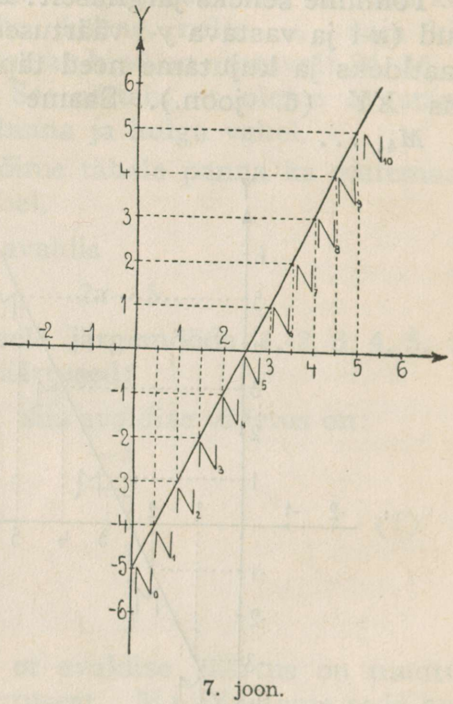
6. joon.

Täpid M_1, M_2, M_3, M_4, . . . on kõik samal sirgel. See sirge ühes teljestikuga ongi olenevuse kujutis.

Mis õigusega aga me ühendame üksteisest eraldatud täpid M_1, M_2, M_3, M_4, ...? Vastus on järgmine: me võiksime x-ile väärtuste andmisel võtta need üksteisele lähemale, näit. nii, kuidas näitab tabel:

$y=2x-5$

x	y
0	—5
0,5	—4
1	—3
1,5	—2
2	—1
2,5	0
3	1
3,5	2
4	3



7. joon.

Kandnud need uuele joonisele (7. joon.), saame jällegi rea täppe N_0, N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, ... mis on juba üksteisele ligemal kui enne. Võtnud aga x-i väärtused näit. nii:

$x=0 \quad 0{,}2 \quad 0{,}4 \quad 0{,}6 \quad 0{,}8, \ldots$

ja arvutanud y-d, saaksime täppide kujutamisel nad juba õige üksteise lähedal.

Järeldame, et mida lähemale võtame üksteisele x-i väärtused, seda lähemal asetsevad üksteisele ka saadavad täpid. Joonist, mis esitab mõnda olenevust, nim. selle **olenevuse graafikuks.** Käesoleval juhul sirge $N_0, N_1, N_2, \ldots$ võetud koordinaadistikus on olenevuse graafikuks.

Selle sirge täppe määravail x-i ja y-i väärtusil on omadus, et nad rahuldavad võrduse (2), s. t. muudavad ta numbriliseks võrduseks. Olgu võetud sirgel täpp J, millele vastavad

$$x=6 \text{ ja } y=7,$$

siis, pannud need väärtused võrdusse, saame

$$7=2\cdot6-5;$$

see on numbriline võrdus.

Ümberpöördult, võttes võrduses $x=+1{,}8$, leiame

$$y=2\cdot1{,}8-5=-1{,}4.$$

Arvud $x=1{,}8$ ja $y=-1{,}4$ määravad täpi, mis asub kujutatud sirgel.

Olenematu ja olenev muutuja. Nagu nägime, kujutab võrdus

$$y=2x-5$$

olenevust valemina. Selles valemis andsime vabalt väärtusi x-ile, kuid y-ile ei saanud me siis neid enam anda, kuna ta juba vastavalt x-i väärtusile omandab väärtused.

Suurust, millele võib anda väärtusi, nim. olenematuks suuruseks; suurust, mis omandab väärtusi vastavalt olenematu suuruse väärtusile, nim. olenevaks suuruseks ehk funktsiooniks.

Eelmises näites oli x olenematu, y olenev suurus (funktsioon).

Kui olenevust kujutatakse gaafiliselt, siis on kasulik seda teha ruudulisel paberil (millimeeterpaberil või mõnel teisel), sest see võimaldab kiiremat ning täpsamat töötamist.

§ 18. ÜLESANDEID.

Kujutada graafiliselt olenevused:

1)	$x=3$	8)	$y=x+3$	15)	$y=-5x+6$
2)	$y=2$	9)	$y=-x-5$	16)	$y=-x-2$
3)	$x=-2{,}3$	10)	$y=2x-4$	17)	$y=-x-1{,}5$
4)	$y=-1{,}8$	11)	$y=3x+1$	18)	$y=\frac{1}{2}x-3$
5)	$y-2x$	12)	$y=-2x-3$	19)	$y=\frac{2}{3}x+1$
6)	$y=-3x$	13)	$y=-4x+1$	20)	$y=\frac{1}{3}x-2$
7)	$y=0{,}7x$	14)	$y=3x-4$		

GEOMEETRIA

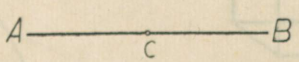
I

§ 1. TASAPIND JA SIRGE.

A. Looduslikud asjad ehk „kehad“ on oma kujult kas korrapärased või korrapäratud. Esimeste hulka kuuluvad õied, seemneterad, kristallid jne., teiste hulka harilikud põllukivid, mullatükid, puud jne. Korrapäraseil kehadel paneme sageli tähele tasaseid pindu ja sirgeid servi. Nende servade sirgust kujutab hästi pingulitõmmatud peen traat või niit. Mõttes võime peent traati või niiti peenendada niivõrd, et jämeduse küsimus üldse ära langeb.

B. Sirge. Niisugune niit kujutab sirget (sirgjoont). Sirgjooneliselt tulevad valgusekiired, läbib lühikese kauguse püssikuul, astub inimene eesmärgi poole, kui ta kõige lühemat teed sinna tahab jõuda. Joonisel peame sirge pildina rahulduma kriidiga, pliiatsiga, joonsulega või sulega tõmmatud sirgetega, mille laius on selgesti nähtav. Sirgeid kujutame joonisel tasasel pinnal ehk lühemalt „tasapinnal“, milleks tarvitame paberilehte, klassitahvlit, kuigi need sageli ei ole sugugi tasased. Peame täiendama mõistusega, kujutlema seda, mis tegelikkuses osutub puudulikuks.

Sirge (1. joonis) *AB* on mõttes alati pikendatav mõlemale poole.



1. joon.

Kui täpist C vaatame esiti A poole, pärast B poole, siis on vaatamissuunad CA ja CB vastupidised. Üteldakse seda ka nii: „Täpp C sirgel lõikab selle sirge kiirteks CA ja CB, milledel on vastupidised suunad".

D. Olgu M ja N kaks täppi tasapinnal.

$M \cdot \quad \cdot N$

Siis teame, et lühimat kaugust nende vahel kujutab MN-vaheline sirglõik, mis ei ole muud midagi, kui täppidest M ja N läbitõmmatud sirge piiratud osa.

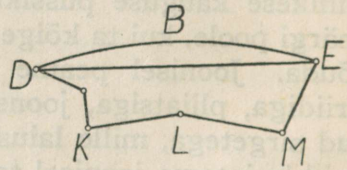
Geomeetria algtõed (postulaadid e. aksioomid) sirge kohta on:

1) **Lühim kaugus kahe täpi vahel on nende täppide vaheline sirglõik.**

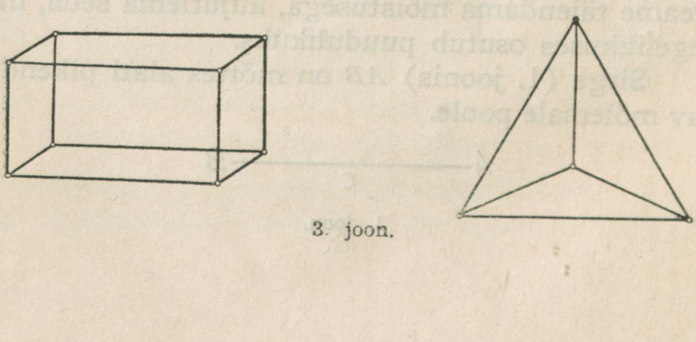
2) **Kaht täppi võib läbida ainult üks sirge.**

Iga muu joon kahe antud täpi D ja E (2. joonis) vahel on tingimata mittesirge, näiteks jooned DBE, $DKLME$.

E. **Kujund.** Sirgete lõikumisel tekivad sirgjoonelised kujundid. Kui tarvitada traati sirge kujutajana, siis traadist valmistatud asjad on kujundid (3. joonis). Lihtsaimad kujundid on täpp ja sirglõik.



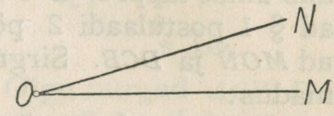
2. joon.



3. joon.

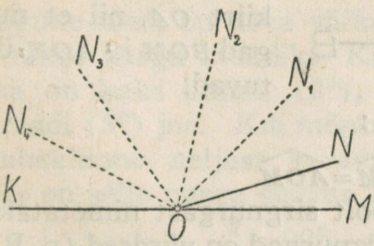
§ 2. NURKADEST.

A. Kaks ühest täpist väljuvat kiirt moodustavad kujundi, mida nimetatakse nurgaks. Täppi, millest lähtuvad kiired, hüütakse nurga tipuks, kiiri aga haaradeks. Joonisel on kujutatud nurk *MON*, mida lühendatult kirjutatakse $\widehat{MON}$; nurga tipp on *O*, haarad on *ON* ja *OM*. Kuna kiiri võib kujutella kuitahes pikkadena, siis nurga suurusele ei avalda mõju haarade pikendamine.



4. joon.

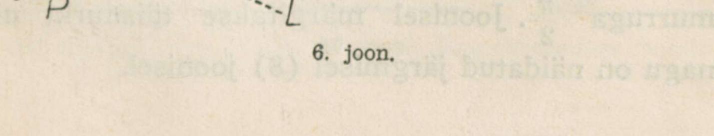
B. Nurga suurendamine. Jätame nurga *MON* juures kiire *OM* tasapinnale seisma ja pöörame kiirt *ON* vastupäeva, hoides seda seejuures endisel tasapinnal. (5. joonis).



5. joon.

Kiir *ON* võtab asendid: ON_1, ON_2, ON_3, ON_4 (loe: *ON* üks, *ON* kaks, *ON* kolm, . . .) Me ütleme, et nurk suureneb. Kui *ON* võtab asendi, mis on vastassuunaline kiirele *OM*, siis ütleme, et nurk on muutunud sirgnurgaks *MOK*.

Kahe sirgnurga võrdlemine. Olgu antud kaks sirgnurka *BCD* ja *MON* (6. joon.):

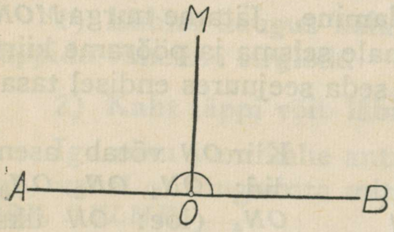


6. joon.

Lükkame sirgnurga *MON* mööda tasapinda edasi, nii et *O* ühtuks *C*-ga. *KCL* kujutagu seda asendit. Pöörame nüüd sirget *KCL* ümber *C*, nii et täpp *K* liigub täpi *D* poole, kuid ikka joonise tasapinnal, kuni mõni selle sirge täpp I ühtub sirge *DB* mingi täpiga, olgu *P*-ga. Siis on sirgel *KL* ja *DB* kaks ühist täppi *P* ja *C* ning mõlemad sirged ühtuvad § 1 postulaadi 2 põhjal. Ühtuvad ka sirgnurgad *MON* ja *DCB*. Sirgnurkadel on seega järgmine omadus:

Sirgnurgad on võrdsed.

D. Kujutleme nüüd, et sirgnurk *AOB* on poolitatud kiirega *OM* (7. joon.).



7. joon.

Sellega tahame ütelda, et kujundi kokkumurdmisel mööda kiirt *OM* peab *OB* minema mööda kiirt *OA*, nii et nurgad *BOM* ja *AOM* ühtuvad.

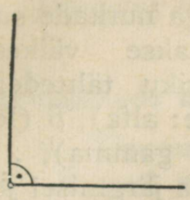
Seda kirjutame nii:

$$\widehat{BOM} = \widehat{AOM}.$$

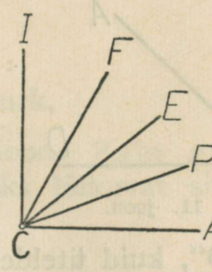
E. Täisnurk. Poolt sirgnurgast nimetatakse täisnurgaks. Et kõik sirgnurgad on võrdsed (p. B.), siis ka nende pooled ehk **täisnurgad on võrdsed.** Täisnurka moodustavate haarade kohta ütleme, et nad on teineteisega **risti.**

Tähis: $MO \perp AB$.

Täisnurgast väiksemat nurka nimetatakse **teravnurgaks**, täisnurgast suuremat nurka **nürinurgaks.** Sirgnurga suurust tähistatakse sümboliga π (loe: pii). Täisnurga suurust tuleb siis tähistada murruga $\frac{\pi}{2}$. Joonisel märgitakse täisnurki nii, nagu on näidatud järgmisel (8) joonisel.



8. joon.



9. joon.

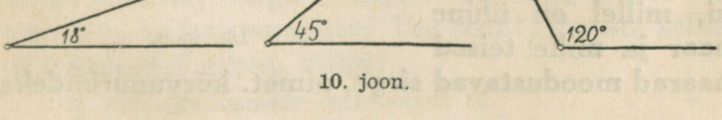
G. Nurkade summa. Olgu nurgad *ACP, PCE, ECF, FCI* asetatud, nagu on näidatud 9. joonisel. Üteldakse, et nurk *ACI* on nimetatud nurkade summa, ja kirjutatakse:

$$\widehat{ACP}+\widehat{PCE}+\widehat{ECF}+\widehat{FCI}=\widehat{ACI}.$$

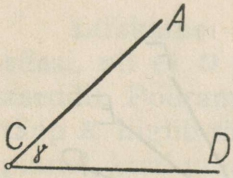
Kujutleme nüüd, et on võetud 90 sellist **võrdset** nurka, mille summa on $\frac{\pi}{2}$ (täisnurk). Iga niisugune nurk on üsna väike. Tema suurust nimetatakse nurga kraadiks. Kahe säärase nurga summa on kaks kraadi (2^0), viie nurga summa viis kraadi (5^0) jne. Kui mõne nurga saab moodustada kahekümne neljast kraadiste nurkade summast, siis on selle nurga suurus 24^0;

$$\frac{\pi}{2}=90^0, \quad \pi=180^0.$$

H. Nurga suuruste tähistamine. Nurga suurust märgitakse kraadide arvuga nurga sees tipu lähedal, näit.:



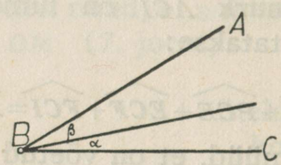
10. joon.



11. joon.

Üldiselt aga nurkade suurusi tähistatakse väikeste kreeka tähestiku tähtedega, näiteks: α (loe: alfa), β (loe: beta), γ (loe: gamma), . . . Märkus: Nurka järgmisel joonisel (11) nimetame: „nurk ACD“, kuid üteldes „nurk γ“, mõistame, et selle nurga suurus on γ kraadi.

Nurkade vahe.



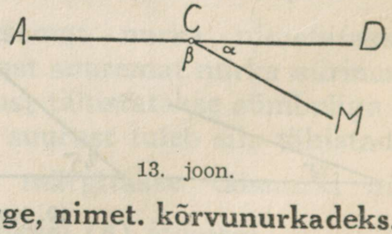
12. joon.

Olgu nurk *ABC* nurkade α ja β summa. Tähistame selle summa tähega γ. Siis aga nimetatakse nurka α ka nurkade γ ja β vaheks; seda kirjutatakse nii:

$$\gamma - \beta = \alpha.$$

§ 3. KÕRVUNURGAD JA TIPPNURGAD.

A. Kõrvunurgad. Kui sirgnurga tipust (13. joon.) tõmmata nurga tasapinnal kiir, siis tekkivaid nurki nimetatakse **kõrvunurkadeks.**



13. joon.

Definitsioon: **Nurki, millel on ühine haar ja mille teised haarad moodustavad sirge, nimet. kõrvunurkadeks.**

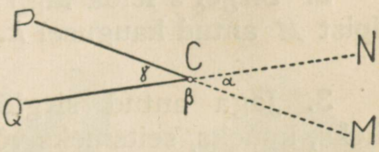
Joonisest selgub, et

$$\alpha + \beta = \pi:$$

kõrvunurkade summa on sirgnurk.

B. Tippnurgad. Definitsioon: Kaht nurka, miile haarad moodustavad kaks lõikuvat sirget, nimetatakse **tippnurkadeks.**

Vaadeldes tippnurki α ja γ ja võttes abiks veel nurga β, jõuame otsusele, et tippnurgad on võrdsed. Arutame nii:



14. joon.

Tuletused:	Põhjendused:
1. $\alpha + \beta = \pi$	§ 3,A. (Tuleb vaadata, mis selles §-is ja punktis on tuletatud: seal on nimelt leitud, et kõrvunurkade summa on π).
2. $\beta + \gamma = \pi$.	§ 3, A.
3. $\alpha + \beta = \beta + \gamma$	Kaks nurkade summat eelmistes ridades (1. ja 2.) on võrdsed π-ga, sellepärast võrduvad need summad ka isekeskis.
4. $\alpha = \gamma$	3. võrduse pooltest lahutame võrdsed nurgad β; peale lahutamist peavad jääma mõlemale poole võrdsed nurgad α ja γ.

ehk: **tippnurgad on võrdsed.**

Märkus: Oleme esitanud siin ühe matemaatilise lause **tõestuse.** Milleks on seda tarvis? Kas ei saaks paberist nurga α väljalõikamisega ja γ-le asetamisega sedasama kätte? Tee seda! Arvusta sellise talitamisviisi nõrku külgi!

§ 4. ÜLESANDEID.

1. Antud täpist tõmmata 3 isesuunalist sirglõiku nii, et nende vabad otsatäpid oleksid samal sirgel. Kas on lahendus alati võimalik, kui tõmmata sirglõigud mistahes järjekorras?

2. Sirgel s leida täpp T, mis asetseks antud täpist M antud kaugusel k.

3. Jaga antud sirglõik katseliselt sirkliga viieks, kuueks, seitsmeks võrdseks sirglõiguks!

4. Kui suure nurga moodustavad kellaosutid, kui kell on 1) 12, 2) 1, 3) 3, 4) 4, 5) 5, 6) 6, 7) 8, 8) 9, 9) 10, 10) $\frac{1}{2}$2, 11) $\frac{3}{4}$1?

5. Tuul pöördus edelast itta. Kui suur on pöördenurk?

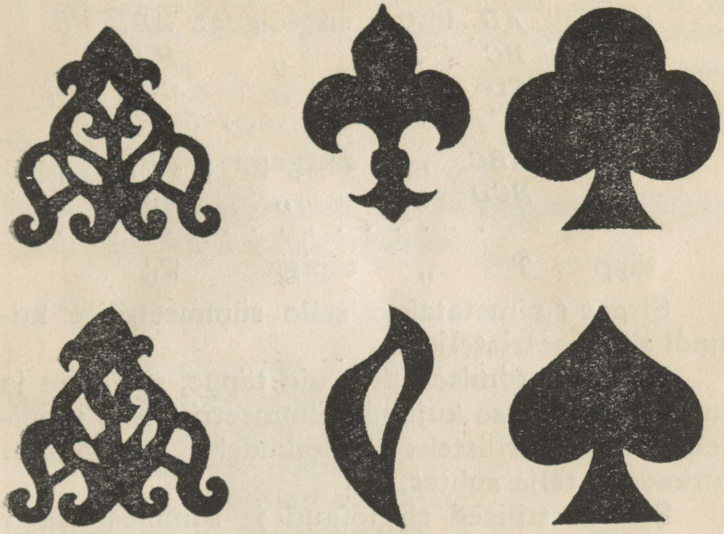
Tuul pöördus läänest itta. Kui suur on pöördenurk?

Tuul pöördus kagust põhja (üle lõuna). Kui suur on pöördenurk?

6. Määrata täpid, mis antud täpist T asetseksid kaugusel k, teisest antud täpist T_1 aga kaugusel k_1.

7. Määrata täpid, mis antud täppidest A ja B asetseksid võrdseis kaugusis k.

8. Kõrvunurkadest on üks teisest kaks (kolm) korda suurem. Määrata nende nurkade suurus.

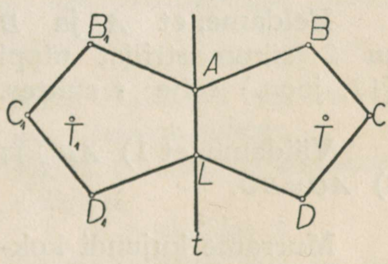


15. joon.

§ 5. SÜMMEETRIA.

Vaatle 15. joon. kujundeid! Mõni neist paistab silma oma korrapärasusega. Need on sümeetrilised kujundid.

Definitsioon: Kujundit nimetatakse **sümmeetriliseks,** kui on olemas niisugune sirge, mida mööda kujundit kokku murdes saame kujundi osade täielise ühtumise.



16. joon.

Kui kujund 16. joonisel on sümmeetriline sirge *t* suhtes, siis tähendab see, et selle kujundi kokkumurdmisel mööda sirget *t*

sirglõik	AB	ühtub	sirglõiguga	AB_1
„	BC	„	„	B_1C_1
„	CD	„	„	C_1D_1
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
nurk	ABC	„	nurgaga	AB_1C_1
„	BCD	„	„	$B_1C_1D_1$
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
täpp	T	„	täpiga	T_1.

Sirget t nimetatakse selle sümmeetrilise kujundi **sümmeetriateljeks.**

Kokkumurdmisel ühtuvaid täppe, sirglõike ja nurki nimetatakse kujundi sümmeetrilisteks täppideks, sümmeetrilisteks sirglõikudeks või sümm. nurkadeks telje suhtes.

Sümmeetrilised sirglõigud ja sümmeetrilised nurgad on alati ka võrdsed sirglõigud ja võrdsed nurgad, sest nad ühtuvad sümmeetriatelge mööda kujundi kokkumurdmisel.

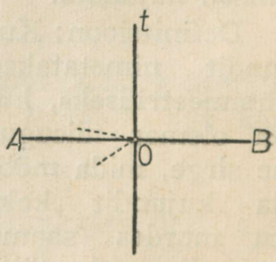
§ 6.

Sümmeetriatelg poolitab sümmeetrilisi täppe ühendava sirglõigu ja on sellega risti.

Eeldame, et A ja B on 2 sümmeetrilist täppi (17. joon.) telje t suhtes.

Väidame, et 1) $AB \perp t$; 2) $AO = BO$.

Murrame kujundi kokku t mööda, siis:



17. joon.

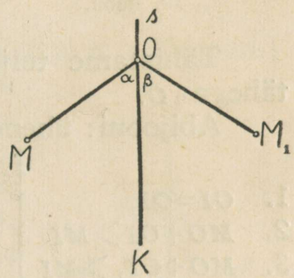
1. B ühtub A-ga	Need täpid on sümmeetrilised.
2. O jääb paigale	Ta asub sümmeetr.-teljel.

3. OB ühtub OA-ga	B on ühtunud A-ga, O jäi paigale; lõik OB ei või mitte minna täppsirge suunas. (§ 1, p. D, postulaat 2).
4. $AO = BO$	Sirglõigud ühtusid.
5. $BA \perp t$	§ 2, D ja E.

Sirglõigu AB kesktäppi läbivat ristjoont hüütakse selle sirglõigu **keskristjooneks.**

§ 7.

Sirglõigud, mis ühendavad sümmeetriatelje mingi täpi selle telje suhtes sümmeetriliste täppidega, on võrdsed. Võrdsed on ka nurgad, mis need sirglõigud moodustavad sümmeetriateljega.



18. joon.

Eeldame: M ja M_1 on sümmeetrilised täpid telje Ks suhtes; täpp O asub sümmeetriateljel (18. joon.).

Väidame: $OM = OM_1$, $\alpha = \beta$.

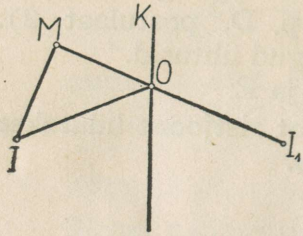
Murrame kujundi sümmeetriatelge mööda kokku, siis:

	Põhjendused:
1. M ühtub täpiga M_1	Need täpid on sümmeetrilised telje s suhtes.
2. O jääb paigale	Täpp O asetseb sümmeetriateljel.
3. $OM_1 = OM$	§ 1, D, postulaat 2.
4. $\alpha = \beta$.	Nurkade haar OK on neil ühine, OM_1 ühtub OM-ga.

Kas ühtuvad ka nurgad MOs ja M_1Os? Katsu seda põhjendada § 3, p. A-ga!

§ 8.

Väljaspool sümmeetriatelge võetud täpi kaugused sümmeetrilistest täppidest pole võrdsed.



19. joon.

Eeldame: täpid I ja I_1 on sümmeetrilised telje K suhtes ja täpp M asetseb väljaspool seda telge.

Väidame: $MI_1 > MI$ (loe: MI üks on suurem kui MI).

Tähistame telje ja sirglõigu MI_1 lõiketäpi tähega O.

Abijooni: ühendame O täpiga I.

	Põhjendused:
1. $OI = OI_1$	§ 7.
2. $MO + OI > MI$	§ 1, D, postulaat 1.
3. $MO + OI_1 > MI$	Me asendame 2. võrratuses OI võrdse sirglõiguga OI_1.
4. $MI_1 > MI$	Sirglõikude MO ja OI_1 summa on MI_1.

Märkus: Nii selles kui ka järgnevais §-des kõneleme ainult niisuguseist täpest, sirgeist, kujundeist jne, mis asetsevad joonise tasapinnal. Kui me mõnikord oleme sunnitud mõne kujundi nagu käesolevaski §-is kokku murdma, seega ajutiselt selle tasapinnalt viima, siis teeme seda ainult selleks juhtumiks ning viime selle pärast tarviduse möödumist tagasi endisele tasapinnale.

§ 9. ÜLESANDEID.

Üldisi juhatusi.

1. Jooniste valmistamisel tööta alati korralikkude abinõudega!

2. Joonised valmista alati esialgu pliiatsiga (soovitav nr.3)!

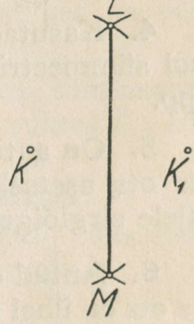
3. Pliiats olgu alati terav. Ta tuleb hoida võimalikult risti joonisetasapinnaga.

4. Iga joon tõmba ühe võttega (vahepeal mitte peatuda)!

5. Püüa töötada alati korralikult, sest ainult siis rahuldavad ning rõõmustavad töö tulemused tegijat!

1. Konstrueerida antud kahele täpile sümmeetriatelg.

Lahendus: Olgu antud täpid K ja K_1 (20. joon.) § 7 lause põhjal peab iga sümmeetriatelje täpp olema ühekaugusel täppidest K ja K_1. Ümberpöördult, iga täpp, mis asetseb ühekaugusel antud täppidest, peab kuuluma nende täppide sümmeetriateljele, sest kui täpp poleks teljel, siis ei saaks selle täpi kaugused antud täppidest olla võrdsed (§ 8.). Seega siis peame otsima täppe, mis on ühekaugusel täppidest K ja K_1. Sirkliga tõmbame täppidest K ja K_1 kui kesktäppidest kaks võrdse raadiusega ringjoone kaart, mis lõikuvad. (Kunas kaared ei lõiku? Mitmes täpis kaared lõikuvad?) Ühendame saadud lõiketäpid L ja M sirgega. LM ongi täppide K ja K_1 sümmeetriatelg.

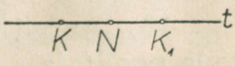


20. joon.

2. Antud täpist antud sirgel konstrueerida sellele sirgele ristjoon.

Lahendus: Olgu antud sirgel t (21. joon.) täpp N. Sellest täpist ühekaugusel võtame sirgel t täpid K ja K_1:

$$KN = K_1N.$$



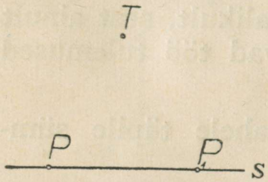
21. joon.

Millega seda teha? Täppidele K ja K_1 konstrueerime sümmeetriatelje (eelmine ülesanne). See ongi sirgele t täpist N tõmmatud ristjoon (§ 6).

3. Täpist T väljaspool sirget s tõmmata sellele sirgele ristjoon (22. joon.). Võtame sirgel s kaks täppi P ja P_1, nii et

$$TP=TP_1.$$

Kuidas selleks toimida? Konstrueerime täppidele P ja P_1 sümmeetriatelje (1. ülesanne). See telg ongi ristjooneks sirgele s täpist T. (§ 6).



22. joon.

4. Kasutades § 7 lauset konstrueerida väljaspool sümmeetriatelge antud täpile sümmeetriline täpp.

5. On antud sümmeetriatelg ja sirglõik, mille üks ots asetseb sümmeetriateljel. Konstrueerida sellele sirglõigule sümmeetriline sirglõik.

6. Antud on sümmeetriatelg ja sirglõik, mille üks ots on ühel pool, teine teisel pool telge. Konstrueerida sümmeetriline sirglõik.

7. Kirjuta ühele poole sümmeetriatelge oma nimi suurte ladina tähtedega! Konstrueeri sümmeetriline „nimi“. Vaatle seda nime peeglis, paigutades peegli serviti sümmeetriateljele!

8. Tee mõni sirgjooneline lihtne joonis ühele poole telge ja konstrueeri sümmeetriline joonis!

9. Poolita antud sirglõik!

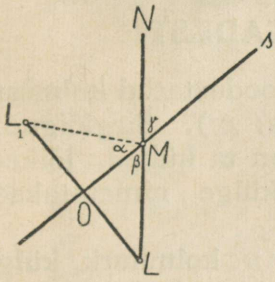
10. Antud täpist T tõmmata antud sirglõigule poolitaja.

11. Antud on sirgest ainult kaks täppi. Konstrueeri veel mõned selle sirge täpid, ainult sirklit tarvitades!

12. Tõesta, et nurga poolitaja on selle nurga sümmeetriatelg!

§ 10.

Eelmises paragrahvis tutvusime ristjoone konstrueerimise võtetega. Tekib küsimus, kas ei ole võimalik antud täpist L antud sirgele s (23. joon.) tõmmata ka rohkem kui üks ristjoon.



23. joon.

Oletame, et see on võimalik.

Olgu täpi L sümmeetriline täpp telje s suhtes L_1, siis

	Põhjendused:
1. $LL_1 \perp s$	§ 6. Seega on LL_1 üks ristjoon täpist L sirgele s.
Olgu veel $LM \perp s$, siis	
2. $\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$	§ 7. β on täisnurk.
3. $\widehat{L_1Ms} = \frac{\pi}{2}$	L_1Ms on täisnurga α kõrvnurk, seega ise ka täisnurk.
4. $\beta = \gamma = \frac{\pi}{2}$	§ 3, p. B.
5. $\widehat{L_1Ms} = \gamma$.	Võrduste 3 ja 4 paremad pooled on võrdsed, seega ka vasakud pooled γ ja $\widehat{L_1Ms}$.

Viimane tulemus ei saa õige olla, sest γ on ainult osa nurgast L_1Ms. See võimatus on tekkinud sellest, et oletasime, nagu oleks võimalik täpist *L* tõmmata sirgele *s* veel teine ristsirge *LM*.

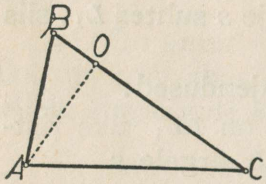
Järeldus: **Antud täpist on võimalik antud sirgele tõmmata ainult üks ristsirge.**

Ristlõigu *LO* pikkust nimetatakse täpi *L* **kauguseks** sirgest *s*.

II

§ 11. KOLMNURKADEST.

Kinnine kujund, mis on moodustatud kolmest **sirglõigust, on kolmnurk** (tähis: △). Sirglõigud, mis moodustavad kolmnurga, on ta **küljed**, lõiketäpid kolmnurga **tipud**. Üht külge nimetatakse **aluseks.**



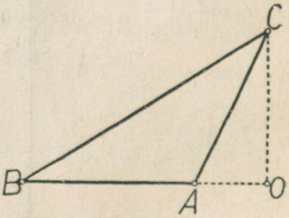
24. joon.

Olgu *ABC* kolmnurk, külg *BC* selle alus. Aluse vastastipust *A* aluseni tõmmatud ristlõiku *AO* hüütakse kolmnurga **kõrguseks.**

Võib juhtuda, et kõrgus ei asetse kolmnurga sees nagu 25. joonisel, kus aluseks on võetud *AB*. Selles kolmnurgas aluse vastastipp on *C* ja ristlõik *CO* lõikab alust väljaspool kolmnurka, nimelt täpis *O*.

Kõrgus on seega *CO*.

Kolmnurgad liigitatakse selle järele, kas nende nurgad on kõik teravad või leidub nende hulgas täis- või nürinurk, terav- täis- ja nürinurkseiks.



25. joon.

Küljed ja nurgad on kolmnurga elemendid.

Kolmnurga külgi ja nurki tähistatakse sageli ainsa tähega, nimelt

tipu A vastaskülge tähega a,
„ B „ „ b,
„ C „ „ c,

kusjuures aga a, b ja c all mõistetakse harilikult nende külgede pikkusi, näit. $a=7$ cm, $c=12{,}3$ cm.

Nurkade suurusi tähistame kreeka tähtedega:

nurga A suurust tähega α
„ B „ „ β
„ C „ „ γ

Kõrgusi:

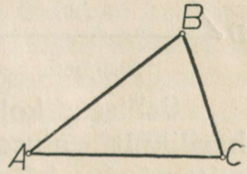
h_a on külje a vastastipust võetud kõrgus.
h_b „ „ b „ „ „
h_c „ „ c „ „ „

§ 12.

Kolmnurga külg on alati väiksem teiste küljede summast ja suurem teiste küljede vahest.

Olgu antud $\triangle ABC$. Selles $\triangle$-gas

$AC+BC>AB$ | § 1, D, post. 1.



26. joon.

Kui võrratuse pooltest lahutada AC, siis vasakust poolest saame $AC+BC-AC$ ehk BC ja paremast poolest $AB-AC$. Tulemused pole võrdsed, nimelt peab BC olema suurem kui $AB-AC$:

$$BC>AB-AC.$$

§ 13.

Kolmnurgas on võimalik ainult üks täisnurk.

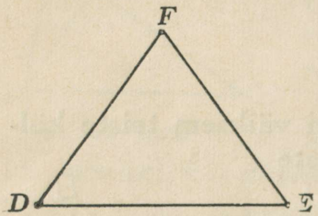
Olgu kolmnurgas ABC (27. joonis) nurk C täisnurk. Kui selles kolmnurgas oleks veel teine täisnurk B, siis täpist A oleks sirglõigule BC tõmmatud kaks ristlõiku, mis § 10 põhjal pole võimalik.

Samuti on kolmnurgas võimalik ainult üks nürinurk.

27. joon.

§ 14. VÕRDHAARSE KOLMNURGA SÜMMEETRIA.

A. Kolmnurka, mille kaks külge on võrdsed, nimetatakse **võrdhaarseks.** Võrdseid külgi hüütakse selles kolmnurgas erandlikult **haaradeks.** Kui 28. joon. $DF=FE$, siis on nimetatud küljed kolmnurga haarad.



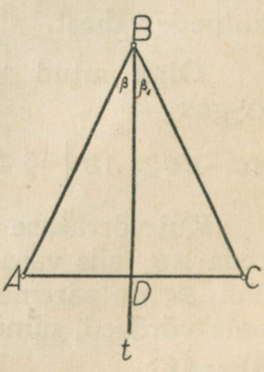
28. joon.

Sellises kolmnurgas on harilikult aluseks teistega mittevõrdne külg DE.

B. Olgu $\triangle ABC$ (29. joon.) võrdhaarne; haaradeks olgu AB ja CB, seega

$$AB=BC.$$

Võtame aluse AC otsatäppide sümeetriatelje t. Telg t



29. joon.

läheb läbi tipu, sest vastasel korral B jääks väljaspoole sümmeetriatelge ning B kaugused sümmeetrilistest täppidest ei saaks olla võrdsed (§ 8), see aga poleks kokkukõlas andmetega.

Murrame joonise t mööda kokku. Siis

Täpp C ühtub A-ga	Sümmeetriliste täppide omaduse põhjal.
Haar BC ühtub BA-ga	B ei liikunud; § 1, p. D, postulaat 2.
Sirglõik CD ühtub AD-ga.	D ei liikunud; § 1, p. D, postulaat 2.

Võrdhaarse $\triangle$-ga osad on täielikult ühtunud; seega **võrdhaarse kolmnurga sümmeetriateljeks on ta aluse otsatäppide sümmeetriatelg.**

D. Ühtunud on ka nurgad C ja A: **võrdhaarse kolmnurga aluse lähisnurgad on võrdsed.** Selle tõe võime sõnastada ka nii: **igas kolmnurgas asetsevad võrdsete külgede vastas võrdsed nurgad.**

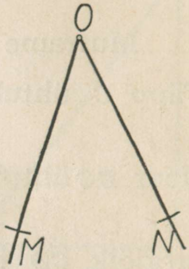
E. Et CB ühtub AB-ga, siis ühtuvad ka nurgad β ja β_1, sest DB jäi paigale. Teiste sõnadega: aluse osatäppide sümmeetriatelg poolitab tipunurga ABC. Kuna t on võrdh. $\triangle$-ga aluse vastastipust tõmmatud kõrgus (sümmeetriatelg ju läbistab tipu B), siis võime öelda:

Võrdhaarse $\triangle$-ga aluse vastastipust tõmmatud kõrgus on selle $\triangle$-ga aluse keskristjoon ja poolitab tipunurga.

Võib selle sõnastada ka nii: **võrdhaarse kolmnurga tipunurga poolitaja on aluse keskristjoon.**

§ 15. NURGAPOOLITAJA KONSTRUKTSIOON SIRKLI JA JOONLAUA ABIL.

Olgu poolitada nurk O (kõrvalolev joonis). Võtame nurga tipust haaradel võrdsed sirglõigud, mille otsad tähistame tähtedega M ja N. Viimaste täppide sümmeetriatelg ongi otsitav nurgapoolitaja.

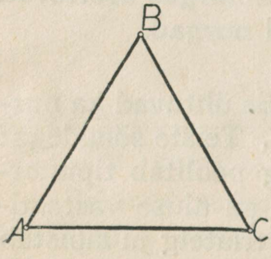


30. joon.

Põhjendus: Kui ühendada täpid M ja N, siis MON on võrdhaarne kolmnurk, mille aluse otsatäppide sümmeetriatelg poolitab tipunurga (§ 14, p. E). Kuidas konstrueerida täppide M ja N sümmeetriatelg? (§ 9, ül. 1).

§ 16.

Võrdkülgseks kolmnurgaks nimetame $\triangle$-ka, mille kõik küljed on võrdsed. Olgu ABC võrdkülgne kolmnurk, s. t., et $AB=BC=AC$, sellest peab § 14. lause p. D põhjal järgnema:



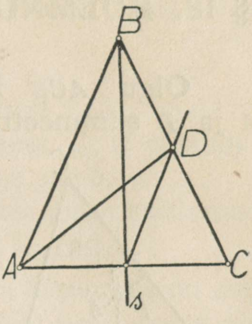
31. joon.

$$\hat{A}=\hat{B}=\hat{C}$$

Põhjenda seda iseseisvalt ja sõnasta lause!

§ 17. PÖÖRDLAUSE MÕISTE.

Eeldusest, et kaks kolmnurga külge on võrdsed, ($AB=BC$), järeldub paratamatult, nagu selgitasime, väide, et selle kolmnurga võrdsete külgede vastasnurgad on võrdsed, s. o. $\hat{C}=\widehat{BAC}$ (32. joon.).



32. joon.

Kui vahetame selle lause väite ja eelduse, siis tekib pöördlause.

Pöördlause eeldus: $\hat{C}=\widehat{BAC}$,
„ väide: $AB=CB$.

Iga pöördlause ei ole õige, sellepärast peame ta eraldi tõestama.

Tõestus:

Tõmbame täppide A ja C sümmeetriatelje s. Me ei tea, kas see telg läbib tipu B. Mingu ta väljaspoolt tippu B, näiteks läbi D. Ühendame D täpiga A, siis:

1) $AD=DC$	§ 7.
2) $\widehat{DAC}=\hat{C}$	§ 14, p. D.
3) $\widehat{BAC}=\hat{C}$	Eelduse põhjal.
4) $\widehat{DAC}=\widehat{BAC}$	Võrdustest 2 ja 3, mille paremad pooled on võrdsed: seda peavad olema ka vasakud pooled.

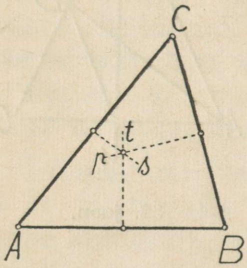
Ent osa ei saa võrduda tervega, seega ei ole võimalik, et $\widehat{DAC}=\widehat{BAC}$. Võimatus tekkis sellest, et tegime ebaõige oletuse, nagu ei läheks sümmeetriatelg läbi tipu B. Kui siis sümmeetriatelg tõesti läbib tipu B, siis järgneb kohe (§ 7): $AB=BC$.

Kolmnurga võrdsete nurkade vastasküljed on võrdsed.

Mitu sümmeetriatelge on võrdkülgsel kolmnurgal? Põhjenda seda!

§ 18. KOLMNURGA KÜLGEDE KESKRISTJOONED.

Olgu ACB kolmnurk. Võtame selle tippude A ja B sümmeetriatelje t, samuti tippude A ja C telje s. Iga sümmeetriatelje täpp on sümmeetrilistest täppidest võrdseil kaugusil (§ 7).



33. joon.

Kahe võetud telje lõiketäpp peab seega olema kõigist kolmest tipust võrdseil kaugusil. See täpp on aga siis ka täppide C ja B sümmeetriateljel (§ 8), s. t. **kolmnurga tippude sümmeetriateljed (ehk kolmnurga külgede keskristjooned) lõikuvad kõik samas täpis.**

Sellele lausele toetudes on alati võimalik kujutada ringjoon, mis läbib antud kolmnurga tipud (kolmnurga ümber kujundada ringjoon). Kolmnurk on siis kujundatud selle ringjoone sisse.

Joonesta mõne nürinurkse kolmnurga ümber ringjoon!

§ 19.

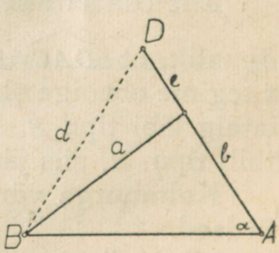
Kolmnurgas suurema nurga vastas asetseb ka suurem külg.

A. Eeldame, et kolmnurgas ABC

$$\alpha > \widehat{ABC}$$

(34. joonis). Väidame, et selles $\triangle$-as $a > b$. Lisajooni: Olgu võetud lisanurk ABD nii, et

$$\widehat{ABD} = \alpha.$$



34. joon.

Nurga ABD teine haar peab minema väljaspoolt nurka ABC. Pikendame külje b lõikumiseni nurga ABD haaraga.

1. $d=e+b$	$\alpha=ABD$; § 17.
2. $a+e>d$	§ 1, p. D, postulaat 1.
3. $a+e>e+b$	Saadud võrratusest 2; d võrdub 1 põhjal avaldisega $e+b$.
4. $a>b$.	Võrratuses 3 lahutame mõlemast poolest võrdsed lõigud e.

B. Järeldusi: Täisnurkses kolmnurgas on suurim nurk täisnurk; selle vastaskülg peab seega olema ka suurim külg kolmnurgas. Suurimat külge täisnurkses kolmnurgas nimetatakse **hüpotenuusiks**, teisi sama kolmnurga külgi aga **kaateteiks.**

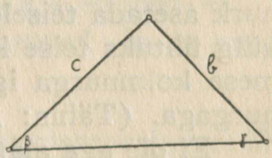
Tee vastav järeldus nürinurkse $\triangle$-ga kohta!

Kas täisnurkne kolmnurk võib olla võrdhaarne? Kunas?

§ 20. Eelmise lause pöördlause: **Kolmnurgas suurema külje vastas asetseb ka suurem nurk.**

Eeldus: $c>b$ (35. joon.).

Väide: $\gamma>\beta$.



35. joon.

Tõestuse esitame vastuväiteliselt. See tõestamisviis seisab selles, et oletame, et väide ei ole õige, ja uurime, missugused järeldused on sellest oletusest. Kui γ ei ole suurem β-st, siis on ainult kaks võimalust:

1) $\gamma=\beta$ või 2) $\gamma<\beta$.

Kui $\gamma=\beta$, siis § 17 põhjal $c=b$, kuid see ei ole kokkukõlas eeldusega, sellepärast tuleb kõrvaldada oletus 1).

Kui aga γ oleks väiksem nurgast β, siis järeldaksime, toetudes § 19, et $c<b$. Seegi ei ole kokku-

kõlas eeldusega ning oletus 2) tuleb samuti jätta kõrvale.

Jääb järele ainukese võimalusena, et $\gamma > \beta$, mida oligi tarvis tõestada.

KOLMNURKADE KONGRUENTSUSEST.

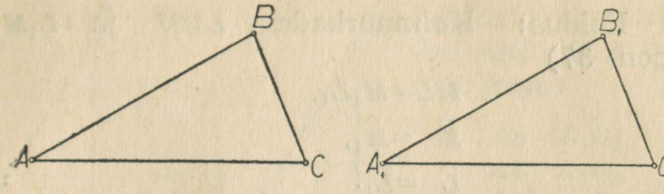
§ 21. Kujutleme, et tekkinud vajaduse tagajärjel peab mingist plaanist kolmnurga teise kohta üle kandma. Seda võiksime teha nii: lõikame paberist, plekist või muust materjalist kolmnurga järgi šablooni ja joonistame selle šablooni abil uue kolmnurga. Tee selline ülekanne! Võrdle siis sirkliga mõõtes endise ja uue kolmnurga külgede pikkusi! Tee sedasama nurkadega, mõõtes neid malliga! Missugused on võrdlemise tulemused?

Me näitame kohe, et on olemas paremaid viise ülekande teostamiseks või juba olemasoleva kahe kolmnurga võrdlemiseks.

Ülekandmine ja võrdlemine põhjenevad $\triangle$-de kongruentsuslauseil. Me nimetame kaht kolmnurka **kongruentseiks**, kui on võimalik üks kolmnurk asetada teisele nii, et esimese kolmnurga iga külg ühtuks teise kolmnurga mõne küljega ja esimese kolmnurga iga nurk teise kolmnurga mõne nurgaga. (Tähis: $\triangle \equiv \triangle_1$).

Ei ole aga alati tarvis võrdlemiseks üht kolmnurka teisele asetada (kuigi ainult mõttes). Ei ole ka tarvis võrrelda kolmnurkade kõiki kuut elementi (3 nurka ja 3 külge), vaid piisab kolmestki, nagu näitavad järgnevad laused.

§ 22. 1. kolmnurkade kongruentsuslause: **Kui ühe kolmnurga kaks külge ja nende vaheline nurk on võrdsed teise kolmnurga vastavate elementidega, siis on kolmnurgad kongruentsed.**



36. joon.

Eeldame, et kolmnurkades ABC ja $A_1B_1C_1$ (36. joon.)

$$AB = A_1B_1,$$
$$AC = A_1C_1,$$
$$\hat{A} = \hat{A}_1.$$

Väidame: $\triangle ABC \equiv \triangle A_1B_1C_1$.

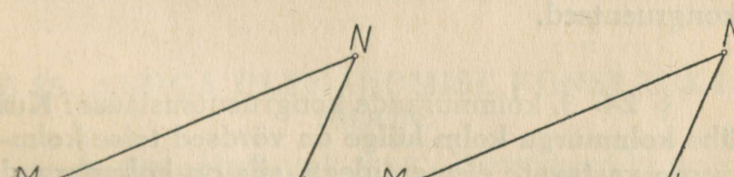
Tõestus: Paneme teise kolmnurga esimese peale nii, et

1) tipp A_1 ühtuks tipuga A,
2) külg A_1B_1 läheks mööda külge AB, siis

1. tipp B_1 ühtub tipuga B	$AB = A_1B_1$ (eeldus).
2. külg A_1C_1 läheb mööda külge AC	$\hat{A} = \hat{A}_1$ („).
3. tipp C_1 ühtub tipuga C	$AC = A_1C_1$ („).
4. külg B_1C_1 ühtub küljega BC.	§ 1, D, post. 2.

Mõlemad kolmnurgad ühtuvad ja on seega kongruentsed.

§ 23. 2. kolmnurkade kongruentsuslause: **Kui ühe kolmnurga külg ja tema lähisnurgad on võrdsed teise kolmnurga vastavate elementidega, siis on need kolmnurgad kongruentsed.**



37. joon.

Eeldus: Kolmnurkades LMN ja $L_1M_1N_1$ (joon. 37)

$$ML = M_1L_1,$$
$$\hat{M} = \hat{M}_1,$$
$$\hat{L} = \hat{L}_1.$$

Väide: $\triangle LMN \equiv \triangle L_1M_1N_1$.

Tõestus: Paneme teise kolmnurga esimese peale nii, et

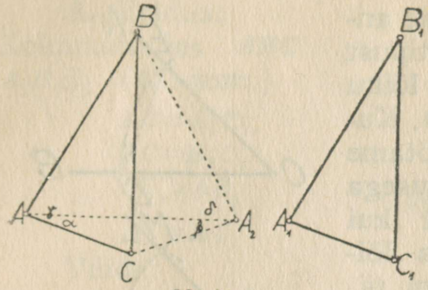
1) tipp M_1 ühtuks tipuga M,

2) külg M_1L_1 läheks mööda külge ML, siis

1. tipp L_1 ühtub tipuga L 2. külg M_1N_1 läheb mööda külge MN 3. „ L_1N_1 läheb mööda külge LN	Vt. eeldus.
4. tipp N_1 ühtub tipuga N.	Küljed M_1N_1 ja L_1N_1 lähevad külgesid MN ja LN mööda. Esimesel kahel neist ei või olla enam teist lõiketäppi peale N, sest kui kahel sirgel oleks kaks lõiketäppi, siis peaksid nad § 1, D, post. 2 põhjal ühtuma.

Antud kolmnurgad ühtuvad, seega on nad kongruentsed.

§ 24. 3. kolmnurkade kongruentsuslause: Kui **ühe kolmnurga kolm külge on võrdsed teise kolmnurga vastavate elementidega, siis on kolmnurgad kongruentsed.**



38. joon.

Eeldus: Kolmnurkades ABC ja $A_1B_1C_1$ (38. joon.)

$AB = A_1B_1$,
$AC = A_1C_1$,
$BC = B_1C_1$.

Väide:

$\triangle ABC \equiv \triangle A_1B_1C_1$.

Tõestus: Pöörame kolmnurga $A_1B_1C_1$ ümber külje B_1C_1 ja paigutame ta siis esimese kolmnurga külge nii, et

1) tipp B_1 ühtuks tipuga B,
2) külg B_1C_1 läheks mööda külge BC.

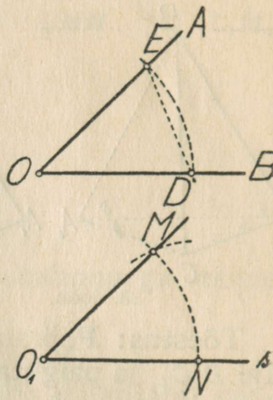
Siis tipp C_1 ühtub tipuga C, sest küljed B_1C_1 ja BC on eelduse põhjal võrsed. Kolmnurk $A_1B_1C_1$ võtab asendi A_2BC. Ühendame tipu A_2 tipuga A.

1. $\triangle AA_2C$ on võrdhaarne	$AC = A_1C_1 = A_2C$ (eeldus).
2. $\triangle ABA_2$ on võrdhaarne	$AB = A_1B_1 = A_2B$ (eeldus).
3. $\alpha = \beta$	§ 14, D.
4. $\gamma = \delta$ (loe: delta)	§ 14, D.
5. $\alpha + \gamma = \beta + \delta$ ehk $\widehat{BAC} = \widehat{BA_2C}$	Liites võrdused 3 ja 4.
6. $\triangle ABC \equiv A_2BC$	§ 22.
7. $\triangle ABC \equiv A_1B_1C_1$.	$\triangle A_2BC$ on teisale paigutatud $\triangle A_1B_1C_1$.

§ 25. NURGA ÜLEKANDMISE KONSTRUKTSIOON.

A. On antud nurk AOB. Konstrueerida nurk, mis on võrdne nurgaga AOB.

Lahendus: Võtame antud nurga haaradel tipust O alates kaks võrdset lõiku OD ja OE (39. joon.). Kujutame sirge s ja võtame sellel täpi O_1. Raadiusega OD tõmbame O_1-st kui kesktäpist kaare, mis lõikaks sirget. Lõiketäpi tähistame tähega N. Viimasest kui kesktäpist kujutame kaare raadiusega ED. Viimase kaare lõiketäpp



39. joon.

eelmise kaarega olgu M. Ühendanud M täpiga O_1, saamegi nõutava nurga NO_1M. Selles veendumiseks võrdleme kolmnurki EDO ja MNO_1. Kolmnurkade 3. kongruentsuslause põhjal on need $\triangle$-ad kongruentsed (põhjenda seda üksikasjalikult!).

Ent kongr. kolmnurkade vastavad elemendid, s. t. võrdsete nurkade vastasküljed ja ümberpöördult — võrdsete külgede vastasnurgad, on võrdsed. Kõnes olevais kongruents.$\triangle$-des $ED = MN$, järelikult $\hat{O} = \hat{O}_1$.

B. Konstrueeri kolmnurk, kui selle elementidest on antud kaks külge ja nende vaheline nurk!

D. Konstrueeri kolmnurk, kui on antud üks külg ja selle lähisnurgad!

E. Konstrueeri kolmnurk kolmest antud küljest!

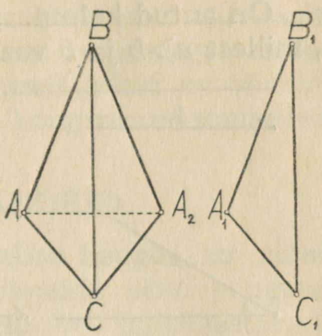
§ 26. 4. kolmnurkade kongruentsuslause: **Kui ühe kolmnurga kaks külge ja suurema külje vastasnurk on võrdsed teise kolmnurga vastavate elementidega, siis on kolmnurgad kongruentsed.**

A. Eeldus:
Kolmnurkades ABC ja $A_1B_1C_1$ (40. joon.)

$AC = A_1C_1$,
$BC = B_1C_1$,
$BC > AC$,
$\hat{A} = \hat{A}_1$.

Väide:

$\triangle ABC \equiv \triangle A_1B_1C_1$.



40. joon.

Tõestus: Pöörame $\triangle A_1B_1C_1$ ümber külje B_1C_1 ja paigutame selle $\triangle ABC$ külge nii, et

1) tipp B_1 ühtuks tipuga B,
2) külg B_1C_1 läheks mööda külge BC.

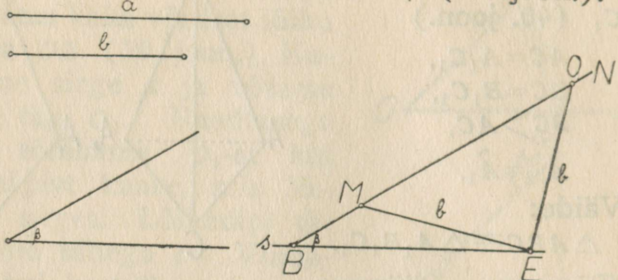
Tipp C_1 ühtub tipuga C külgede BC ja B_1C_1 võrdsuse pärast. Kolmnurk $A_1B_1C_1$ võtab asendi A_2BC. Ühendanud täpi A täpiga A_2, leiame:

1. $\triangle AA_2C$ on võrdhaarne.	$AC = A_1C_1 = A_2C$.
2. $\widehat{A_2AC} = \widehat{AA_2C}$	§ 14, D.
3. $\widehat{BAC} - \widehat{A_2AC} = \widehat{BA_2C} - \widehat{AA_2C}$ ehk $\widehat{BAA_2} = \widehat{BA_2A}$	Lahutame võrdsetest nurkadest BAC ja BA_2C võrdsed nurgad A_2AC ja AA_2C.
4. $AB = A_2B$.	§ 17.

Nüüd on selge, et kolmnurkadel ABC ja A_2BC on kolm külge vastavalt võrdsed. § 24 põhjal on need kolmnurgad kongruentsed, järelikult ka kolmnurgad ABC ja $A_1B_1C_1$.

B. Tekib küsimus, kas ka siis on kolmnurgad kongruentsed, kui ühe kolmnurga kaks külge ja **väiksema** külje vastasnurk on võrdsed teise kolmnurga vastavate elementidega. Kõige parema vastuse annab sellekohane konstruktsioon.

On antud kolmnurga elementidest küljed a ja b, millest $a>b$ ja b vastasnurk β (41. joon.).



41. joon.

Konstruktsioon: Võtame mingil sirgel s sirglõigu a ($=BE$). Ühte selle lõigu otsa konstrueerime nurga β (§ 25). Külje a teisest otsatäpist E tõmbame raadiusega b kaare. See kaar lõikab β haara BN, kui ta seda üldse lõikab, **kahes täpis** (erijuhtumeil ka ühes) M ja O.

Vaatleme kolmnurki MEB ja OEB. Neil on ühine külg a ja nurk β, peale selle on küljed ME ja OE võrdsed, kolmnurgad ise aga ei saa olla kongr., kuigi neil on kaks külge ja väiksema külje vastasnurk vastavalt võrdsed.

Missugusel juhtumil raadiusega b tõmmatud kaar ei lõika nurga β haara BN?

D. Paneme tähele, et kolmnurkade kongruentsuseks on tarvis, et ühe kolmnurga **kolm** elementi oleksid võrdsed teise $\triangle$-ga vastavate elementidega, kuid nende kolme elemendi hulgas peab olema vähemalt üks külg.

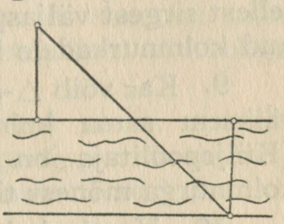
§ 27. TÄISNURKSETE KOLMNURKADE KONGRUENTSUSEST.

Kahel täisnurksel kolmnurgal on alati olemas võrdsed elemendid: täisnurgad. Kahe säärase $\triangle$-ga kongruentsuseks on veel tarvis, et ühe kolmnurga kaks elementi (nende hulgas tingimata vähemalt üks külg) oleksid võrdsed teise kolmnurga vastavate elementidega. Missugused juhud on võimalikud vastavalt kolmnurkade kongruentsuslauseile?

§ 28. ÜLESANDEID.

1. Leida kahe täpi vaheline kaugus, kui mõni takistus (näit. maja) ei võimalda selle kauguse otsest mõõtmist. Täpid ise on ligipääsetavad. (Rakenda kolmnurkade 1. kongruentsuslauset!)

2. Rakenda kolmnurkade kongr.-lauset jõe (tänava) laiuse määramiseks (42. joon.)!



42. joon.

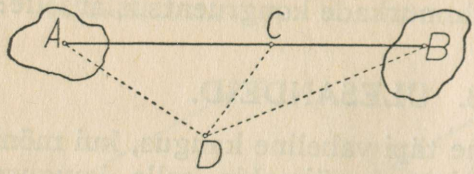
3. Määra malli tarvitades koolimaja kõrgus!

4. Maja katuse pinnad moodustavad harjas täisnurga. Kui ligineda sellele majale külje poolt, kuni katus näib sirgjoonena, ja mõõta maja kaugus vaatlejast, samuti vatleja silmade kõrgus maapinnalt, siis võib leida nende andmete najal maja kõrguse räästani (ja katuse karjani). Kuidas?

5. Võta kepp, mille pikkus võrduks väljasirutatud käe pikkusega (õlast peoni)! Hoia seda keppi väljasirutatud käega vertikaalselt, nii et kepi alumine ots oleks silma kõrgusel! Ligine puule, kuni puulatv, kepi ots ja silm asuvad samal sirgel! Kuidas saab siis puu kõrgust mõõta?

6. Kuidas saab leida täpi kaugust teisest täpist, kui teisele juurdepääs on võimatu? (Konstrueerida kongruentne kolmnurk, lähtudes 2. kongruentsuslausest).

7. Kas on kaks täisnurkset võrdhaarset kolmnurka kongruentsed, kui ühe kolmnurga külg on võrdne teise kolmnurga küljega?



42-a joon.

8. Kahele täpile A ja B (42-a joon.) ei pääse ligi, kuid nad on siiski nähtavad. Kuidas oleks võimalik leida kaugus AB? (Võta sirgel AB vaba täpp C, siis veel sellest sirgest väljaspool täpp D! Konstrueeri tekkinud kolmnurkadele kongruentsed kolmnurgad!)

9. Kas võib $\triangle$-ga küljepoolitajate summa olla väiksem sama kolmnurga kõrguste summast? (Küljepoolitaja on sirglõik, mis on tõmmatud kolmnurga mõnest tipust vastaskülje kesktäppi).

10. Vaatle kolmnurga kahte külge ja nende külgede lõiketäpist tõmmatud kõrgust! Kas on selle kolmnurga kõrgus väiksem kui mainitud külgede aritmeetiline keskmine?

11. Kaks hammasratast, mille kesktäppide vahe on 15 cm, on tarvis ühendada kolmanda hammasratta abil. Leia graafiliselt viimase ratta kesktäpi asend, kui läbimõõt on esimesel rattal 7 cm, teisel 10 cm ja kolmandal 12 cm!

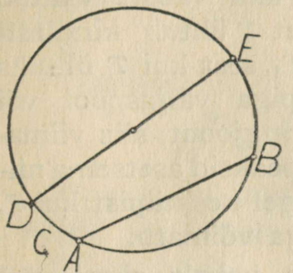
III

§ 29. RINGJOON, KAARED, KÕÕLUD, KESKNURGAD.

A. Ringjoon on kinnine kõver, mille kõik täpid on ühest täpist ühesuurusil kaugusil.

Seda täppi, millest ringjoone täpid asetsevad ühesuurusil kaugusil, nimetatakse ringjoone

kesktäpiks (tsentriks), kuna nimetatud kaugusi hüütakse **raadiusteks.** Tasapinna osa, mis on piiratud ringjoonest, kannab nime **ring.** Sirglõiku,

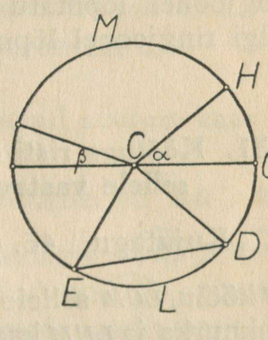


43. joon.

mis ühendab kaht ringjoone täppi, nimetatakse **kõõluks.** 43. joon. on *AB* kõõl. Kõõl, mis läbib kesktäppi, on ringjoone **läbimõõt** ehk **diameeter;** selle pikkus on alati kaks raadiust. *DE* 43. joon. on diameeter. Ringjoone osa kannab nimetust **kaar** ja tähistatakse sümboliga ⌒; $\widehat{ACD}$ tähistab kaart *ACD*.

B. Raadiustest moodustatud nurka nimetatakse **kesknurgaks.** Sellise nurga tipp on kesktäpis. 44. joon. on nurk α kesknurk, samuti nurk β.

Vaatleme sama joonise kõõlu *ED*. See kõõl piirab kaari *ELD* ja *EMD*. Harilikult nimetatakse neist ainult väiksemat kaart *ELD* ja üteldakse: „Kõõlule *ED* **vastab** kaar *ELD*." Üteldakse ka, et kõõlule *ED* vastab kesknurk *ECD*.



44. joon.

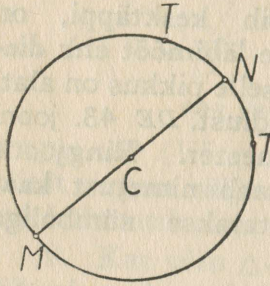
D. Igale kaarele vastab oma kesknurk: kaarele *ELD* — kesknurk *ECD*, kaarele *GD* — kesknurk *DCG*. Otsekohe on joonisest näha, et kui kahel kaarel *DG* ja *DGH* on ühine algus *D*, siis

suuremale kaarele vastab suurem kesknurk.

Kui kaarte algused ei ühtu, siis võib ühte kaart pöörata mööda ringjoont kesktäpi ümber, kuni algused ühtuvad. Lause jääb endiseks.

§ 30. RINGJOONE SÜMMEETRIA.

Murrame ringjoone kokku diametrit MN mööda (45. joon.). Võttes vaatluse alla **vabalt valitud** ringjoone täpi T, järeldame, et T ühtub kindlasti mingi teise ringjoone täpiga T_1, sest kui T ühtuks mingi täpiga väljaspool või seespool ringjoont, siis viimased täpid peaksid asetsema niisama kaugel kesktäpist kui T, mis on aga võimatu.



45. joon.

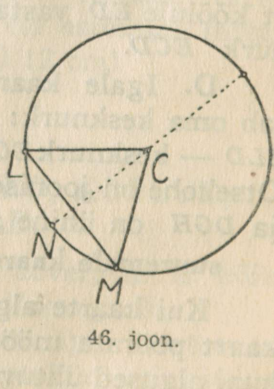
Seega vabalt ringjoonel valitud täpil T on alati diameetri MN suhtes sümmeetriline ringjoone täpp. **Ringjoon on seega oma läbimõõdu suhtes sümmeetriline kõver.** Kuna diameetreid on ringjoonel lõpmatu palju, siis on ka sümmeetriatelgi ringjoonel lõpmatu palju.

§ 31. Kõõluga risti olev diameeter poolitab kõõlu, sellele vastava kaare ja kesknurga.

Kujutagu 46. joonisel LM kõõlu, $\widehat{LCM}$ sellele vastavat kesknurka ja LNM kaart. Tõmbame diameetri, mis oleks risti LM-ga (täppjoon).

See diameeter poolitab:

1) kõõlu (§ 14, E),
2) kesknurga (§ 14, E) ja
3) kaare LNM, sest M ja L on diameetri suhtes sümmeetrilised.



46. joon.

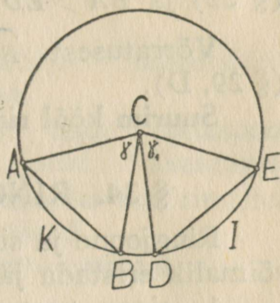
§ 32. Võrdseile kõõludele vastavad võrdsed kaared ja kesknurgad.

Eeldame: $AB=DE$ (47. joon.).

Väidame: $\gamma=\gamma_1$

$\overset{\frown}{AKB}=\overset{\frown}{DIE}$.

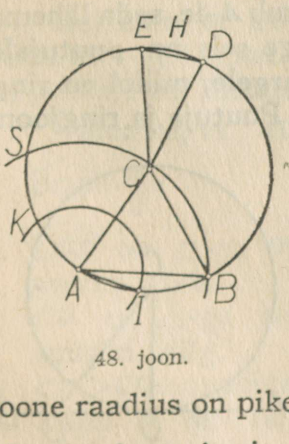
Ühendanud kõõlude otsatäpid kesktäpiga, saame $\triangle ABC$ ja $\triangle DEC$:



47. joon.

1. $AC=CD$	Sama ringjoone raadiused.
2. $CB=CE$	„ „ „
3. $AB=DE$	Eeldus.
4. $\triangle ABC \equiv \triangle DEC$	§ 24.
5. $\gamma=\gamma_1$	Kongr. kolmnurkades on vastavad elemendid võrdsed.
6. $\overset{\frown}{AKB}=\overset{\frown}{DIE}$.	Järgneb võrdusest 5.

§ 33. Suuremale kõõlule vastavad suurem kaar ja suurem kesknurk.



48. joon.

Eeldame, et $AB > ED$.

Väidame: $\overset{\frown}{AIB} > \overset{\frown}{EHD}$.

Tõmbame täpi A ümber ringjooned raadiustega ED ja AB.

Mõlemad ringjooned lõikavad antud ringjoont kahes täpis: esimene täppides I ja K, teine täppides S ja B. Kuna teise ringjoone raadius on pikem, siis kaar KAI peab täielikult olema teise ringjoone sees. Seega $\overset{\frown}{SAB} > \overset{\frown}{KAI}$

või $\overset{\frown}{AB} > \overset{\frown}{AI}$. Et aga kõõl $AI=ED$ siis ka $\overset{\frown}{AI}=\overset{\frown}{ED}$ (§ 32) ja $\overset{\frown}{BA} > \overset{\frown}{ED}$.

Võrratusest $\overset{\frown}{BA} > \overset{\frown}{ED}$ järgneb: $\widehat{ACB} > \widehat{ECD}$ (§ 29, D).

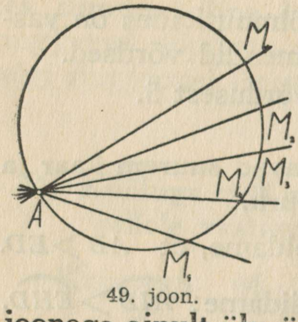
Suurim kõõl ringjoones on diameeter.

§ 34. RINGJOON JA SIRGED.

Ringjoone ja sirge vastastikkuses asetuses on võimalik eristada järgmised juhtumid:

1. sirge asetseb täielikult väljaspool ringjoont;

2. sirge lõikab ringjoont. Sel juhtumil üteldakse, et sirge on ringjoone lõikaja. Lõiketäppe on 2.



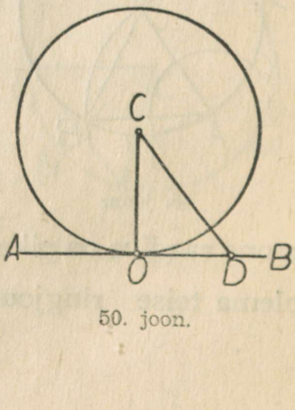
49. joon.

Jäägu lõikaja üks lõiketäppidest, nimelt A (49. joon.) paigale ja liikugu teine lõiketäpp M järgemööda läbi täppide $M_1, M_2, M_3, \ldots$ Lõikaja pöördub vastavalt ümber A. Mida lähemale M nihkub A-le, seda lähemal on sirge seis nn. **puutujale, s. o. sirgele, millel on ringjoonega ainult üks ühistäpp.** Puutuja ja ringjoone ühistäpp on **puutetäpp.**

§ 35. Puutuja on puutetäppi viiva raadiusega risti.

Olgu 50. joon. sirge AOB puutuja, puutetäpiga O, ja CO puutetäppi viiv raadius. Väidame, et

$CO \perp AB.$



50. joon.

Oletame, et CO ei ole risti AB-ga, siis peaks olema võimalik kesktäpist C tõmmata puutujale ristsirge. Olgu selleks CD. Siis

1. täpp D asetseb ringjoonest väljaspool	Puutuja definitsioon § 34.
2. $CD > CO$	Iga täpp väljaspool ringjoont on kesktäpist kaugemal kui ringjoone täpid.
3. $\widehat{CDO} = \frac{\pi}{2}$, seega $\widehat{CDO}$ on $\triangle$-ga OCD suurim nurk	Oletuse põhjal.
4. $CO > CD$.	§ 19, B.

See ei ole võimalik, sest ringjoone täpp O ei või kesktäpist olla kaugemal kui väljaspool ringjoont olev täpp D. Oletus, et CD on ristsirge, ei ole õige. Ristsirgeks võib olla ainult CO.

§ **36. Raadiuse välisotsas raadiusele tõmmatud ristsirge on puutuja (eelmise pöördlause).**

Eeldame, et CO on ringjoone raadius ja et $AOB \perp CO$ (50. joon.), (aga me ei tea, kas AOB on puutuja või lõikaja).

Väidame, et AOB on puutuja.

1. $\widehat{COD} = \frac{\pi}{2}$.	Eeldus.
2. $\widehat{COD}$ on $\triangle$-ga OCD suurim nurk.	
3. CD on $\triangle$-ga OCD suurim külg.	§ 19.
4. $CD > CO =$ raadius	
5. Täpp D on väljaspool ringjoont.	Võrratuse 4 põhjal.

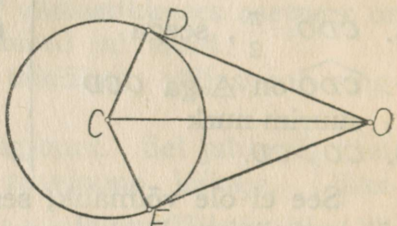
Iga muu täpp (nagu D-gi), mis on võetud ristjoonel, osutub ringjoonest väljaspool olevaks, seega on O ainuke sirge täpp, mis on ühine ringjoonega, s. t. sirge AOB on puutuja.

§ 37. Samast täpist ringjoonele tõmmatud puutesirglõigud on võrdsed.

Eeldame, et OD ja OE on täpist O tõmmatud puutesirglõigud. D ja E on puutetäpid.

Väidame: $OD = OE$.

Abisirglõigud: Ühendame kesktäpi C täppidega O, D ja E.



51. joon.

Siis $\triangle$-dest CDO ja CEO näeme:

1. $CD = CE$	Sama ringjoone raadiused.
2. $CO = CO$	Iga sirglõik on võrdne iseendaga.
3. $\widehat{CDO} = \widehat{CEO} = \frac{\pi}{2}$	§ 35.
4. $\triangle CDO \equiv \triangle CEO$	§ 26, A.
5. $OD = OE$	Kongr. $\triangle$-des on vastavad elemendid võrdsed.

§ 38. ÜLESANDEID.

1. Kui ratta kodar pöörleb 30 korda minutis, kas ta teeb nurga 30^0 sekundis?

2. Kas on kahe diameetri poolt moodustatud nurkadel võrdsed kaared?

3. On antud kaks täppi ja ringjoone läbimõõt. Kujutada see ringjoon nii, et ta läbiks antud täpid.

4. Kuidas peaks lõikuma kaks ringjoont, et neil oleks võimalikult suur ühine kõõl?

5. On antud kaks ringjoont. Kust näeks silm mõlemaid ringjooni ühesuuruses vaatenurgas? Tee konstruktsioon ainult joonlauaga!

6. Täpp *T* on ringjoone sees. Määra sirkli abil selle vähim ja suurim kaugus ringjoonest. Mis täppe ringjoonel need kaugused määravad? Kuidas muutub täpi *T* ja ringjoone täpi kaugus, kui ringjoone täpp liigub mööda ringjoont?

7. Kujutada ringjoon, mis läbib kolm mitte ühel sirgel asetsevat täppi.

8. Missugune on vähim ja suurim sirglõik, mis kahe antud ringjoone vahel on võimalikud? Vaatle ringjooni, mis teineteise suhtes on mitmesuguses asendis!

9. Kuidas leida antud täpi vähim kaugus ringjoonest (täpp sees- ja väljaspool ringi)?

10. Ringjoone sektorisse (kahest raadiusest ja nende vahelisest kaarest moodustatud kujund) kujundada ringjoon, s. t. säärane ringjoon, mis puutuks mõlemat raadiust ja kaart. (Juhatusi: Tõmmata puutuja kaare kesktäpis.)

Kas ülesanne on alati võimalik sektori kesknurga suurusele vaatamata?

11. On võetud kõõl ja selle ristdiameeter. Mida teevad need sirglõigud ringjoonega? Mida võib sel juhtumil tekkinud vastaskaarte summa kohta ütelda?

IV

§ 39. RÖÖPSIRGED.

Sirgeid, mis asetsevad samal tasapinnal ja pikendamisel ei lõiku, nimetatakse **rööpsirgeiks** (rööbikuiks, paralleelsirgeiks). Rööbikust tähistatakse sümboliga $\|$, näiteks $p \| q$ (loe: p on rööbik q-ga).

Vaatle klassitoas mitmesuguseid sirgeid ja määra, missugused neist on rööbikud ja mispärast! Sirgete tegelik pikendamine ei ole võetud tasapinna osa piiratuse pärast nimetamisväärselt kaugele võimalik.

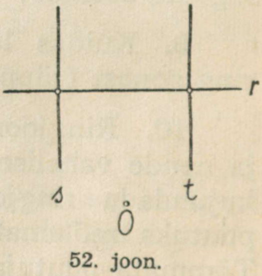
Geomeetria kasutab muid omadusi, millest võib selguda, et jooned on rööbikud. Järgmised laused esitavad mõningaid neist omandusist.

§ 40. Kaks sirget, millest kumbki asetseb risti kolmandaga, on rööbikud.

Eeldame, et $r \perp s$ ja $r \perp t$.

Väidame: $s \| t$.

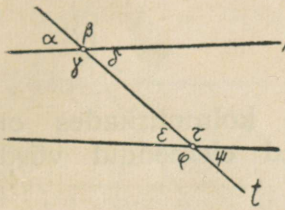
Olgu sirged s ja t lõikuvad ja nende lõiketäpiks O, siis viimasest oleks sirgele r tõmmatud 2 ristsirget, nimelt s ja t, mis § 10 järgi pole võimalik.



52. joon.

§ 41. Nurkadest, mis tekivad kahe sirge lõikumisel kolmandaga.

Kui kaks sirget s ja q lõigata kolmandaga t, siis tekib kaheksa nurka, mis paarikaupa kannavad järgmisi nimetusi (53. joon.):



53. joon.

Nurgapaarid:

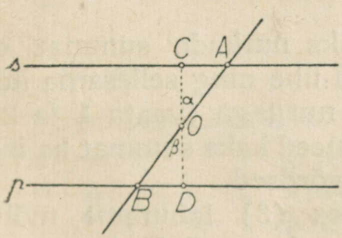
α ja ε (loe: epsilon)
γ ja φ (loe: fii)
β ja τ (loe: tau)
δ ja ψ (loe: psii)
on vastavad nurgad.

α ja ψ
β ja φ
γ ja τ
δ ja ε
on põiknurgad.

τ ja δ
ε ja γ
φ ja α
ψ ja β
on rindnurgad.

Paneme tähele, et s ja q ei ole alati rööpsirged, aga nurkade nimetused on sellele vaatamata alati seesugused, nagu on üteldud.

§ 42. **Kui kaks sirget on lõigatud kolmandaga ja selle tagajärjel on tekkinud võrdsed põiknurgad, siis on esimesed kaks sirget rööbikud.**



54. joon.

A. Olgu sirged s ja p (54. joon.) lõigatud kolmanda sirgega, mis annab lõiketäpid A ja B. Olgu veel sirglõigu AB kesktäpp O. Tõmbame sellest täpist sirgele p ristsirge OD ja pikendame selle sirgeni s.

Eeldame: $\widehat{DBO} = \widehat{CAO}$.

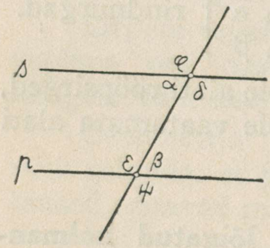
Väidame: $s \parallel p$.

Vaadeldes kolmnurki OAC ja ODB leiame:

1. $OB = OA$	Täpi O valiku kohaselt.
2. $\widehat{DBO} = \widehat{CAO}$	Eeldus.

3. $\beta = \alpha$	§ 3, B.
4. $\triangle DBO \equiv \triangle CAO$	§ 23.
5. $\widehat{ODB} = \widehat{OCA}$	Kongr. kolmnurkades on vastavad elemendid võrdsed.

Kuna $\widehat{ODB}$ on täisnurk, siis ka $\widehat{OCA}$ peab olema täisnurk ja DC on ristsirge nii sirgega p kui ka sirgega s. § 40 põhjal on siis s ja p rööbikud.

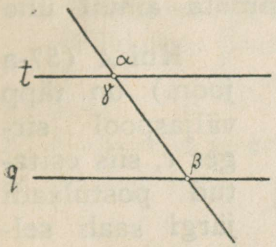


55. joon.

B. Kui oleks eeldatud, et $\delta = \varepsilon$ (55. joon.), siis:

1. $\alpha + \delta = \pi$	§ 3, A.
2. $\varepsilon + \beta = \pi$	” ”
3. $\alpha + \delta = \varepsilon + \beta$	Kui kaks nurkade summat on võrdsed ühe ning sellesama kolmanda nurgaga (vaata 1 ja 2), siis on need kaks summat ka isekeskis võrdsed.
4. $\alpha = \beta$, mille kohta on juba tõestatud (§ 42, A), et nende nurkade võrdsus viib järeldusele $s \parallel p$.	Võrduses (3) lahutame mõlemast poolest võrdsed nurgad δ ja ε.

D. Kui aga oleks eeldatud, et $\varphi = \psi$, siis φ-lt ja ψ-lt on kerge üle minna võrdsete tippnurkade δ ja ε juurde ja sealt p. B põhjal tulemusele $s \parallel p$.



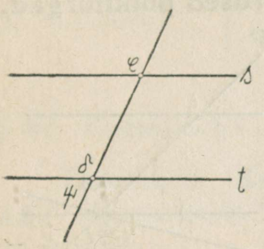
56. joon.

§ 43. **Kui kaks sirget on lõigatud kolmandaga ja selle tagajärjel on tekkinud võrdsed vastavad nurgad, siis on esimesed kaks sirget rööbikud.**

Eeldame: $\alpha=\beta$.

Väidame: $t\|q$.

1. $\beta=\alpha$	Eeldus.
2. $\gamma=\alpha$	§ 3, B.
3. $\beta=\gamma$	Võrdusist 1 ja 2.
4. $t\|q$.	Võrdusest 3 ja § 42.



57. joon.

§ 44. **Kui kahe sirge lõikumisel kolmandaga on tekkinud niisugused rindnurgad, et ühe rindnurga-paari summa on π, siis on esimesed kaks sirget rööbikud.**

Eeldame: $\psi+\varphi=\pi$.

Väidame: $s\|t$.

Joonisest näeme, et

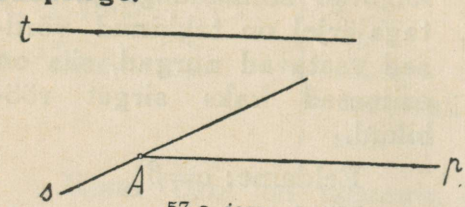
1. $\psi+\delta=\pi$	§ 3, A.
2. $\psi+\varphi=\psi+\delta$	Võrdusest 1. ja eeldusest.
3. $\varphi=\delta$.	Kui võrduse (2) pooltest lahutame võrdsed nurgad ψ, siis tulemused on võrdsed.

δ ja φ on üks vastavate nurkade paar. § 43 alusel on siis $s\|t$.

PÖÖRDLAUSED.

§ 45. **A.** Rööbikute postulaadi nimetuse all tuntakse järgmist tõde: **Väljaspool sirget antud**

täpist saab sellele sirgele tõmmata ainult ühe rööpsirge.



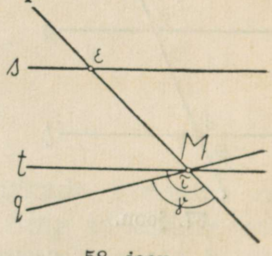
57-a joon.

Kui A (57-a joon.) on täpp väljaspool sirget t, siis esitatud postulaadi järgi saab sellest täpist sirgele t tõmmata ainult ühe rööpsirge. Olgu selleks rööpsirgeks p. Iga muu sirge s, mis on tõmmatud läbi A tasapinnal, milles asuvad A ja t, peab sirgega t lõikuma.

B. Kui kaks sirget on rööbikud, siis tekivad nende lõikumisel kolmandaga võrdsed põiknurgad.

Eeldame: $s \| t$ (58. joon.).

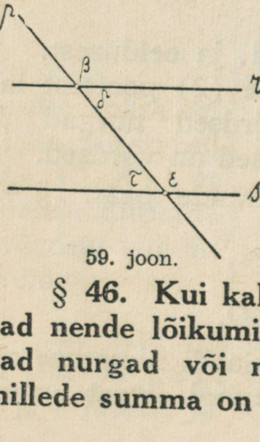
Väidame: $\varepsilon = \tau$.



58. joon.

Oletame, et ε ei ole võrdne τ-ga.

Siis peab läbi täpi M saama tõmmata sirge q, mis moodustab sirgega p nurga γ, võrdse ε-ga. § 42. põhjal on siis $q \| s$. Täpist M läheb siis läbi kaks sirget t ja q, mis on rööbikud sirgega s. Postulaadi põhjal see pole võimalik, järelikult tuleb juhtum „ε ei ole võrdne nurgaga τ“ jätta kõrvale; siis aga $\varepsilon = \tau$.



59. joon.

§ 46. Kui kaks sirget on rööbikud, siis tekivad nende lõikumisel kolmandaga võrdsed vastavad nurgad või niisugused rindnurkade paarid, millede summa on sirgnurk.

Eeldame: $r \parallel s$ (59. joon.).
Väidame: $\beta = \varepsilon$.
$\delta + \varepsilon = \pi$.

1. $\delta = \tau$	§ 45, B.
2. $\delta + \beta = \pi$ ja $\tau + \varepsilon = \pi$	§ 3, A.
3. $\delta + \beta = \tau + \varepsilon$	Võrdustest 2, millede kummagi parem pool on võrdne π-ga.
4. $\beta = \varepsilon$.	Võrduse 3 pooltest lahutame 1 põhjal võrdsed nurgad.

Edasi:

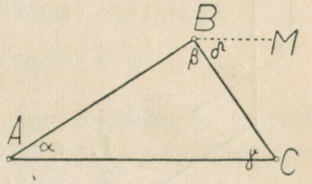
1. $\delta = \tau$	§ 45, B.
2. $\tau + \varepsilon = \pi$	§ 3, A.
3. $\delta + \varepsilon = \pi$.	Asendame võrduses 2 nurga τ nurgaga δ.

§ 47. Kolmnurga sisenurkade summa on sirgnurk.

Eeldame: Kolmnurga ABC sisenurkade suurused on α, β ja γ.

Väidame: $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

Abijooni: Läbi B sirge $BM \parallel AC$.



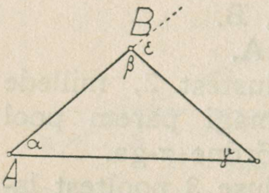
60. joon.

1. $\alpha + (\beta + \delta) = \pi$	§ 46.
2. $\delta = \gamma$	§ 45, B.
3. $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.	Asendame võrduses 1 nurga δ nurgaga γ võrduse 2 põhjal.

§ 48. KOLMNURGA VÄLISNURK.

Kui pikendame mõne kolmnurga külje, olgu AB (61. joon.), siis tekib nurk ε, mille nimetuseks on **välisnurk**.

Kolmnurga välisnurk on võrdne selle vastas seisvate sisenurkade summaga.



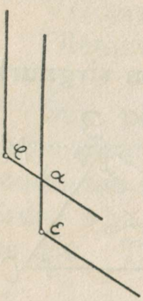
61. joon.

Eeldame: ε on $\triangle$-ga välisnurk.

Väidame: $\varepsilon = \alpha + \gamma$.

1. $\varepsilon = \pi - \beta$	§ 3, A.
2. $\pi = \alpha + \beta + \gamma$	§ 47.
3. $\varepsilon = \alpha + \gamma$.	Liites 1 ja 2 ning lihtsustades.

§ 49. **Kui ühe nurga haarad on rööbikud teise nurga haaradega ning nurgad mõlemad on teravad või nürid, siis on nad võrdsed; on aga üks neist terav ja teine nüri, siis on nende summa sirgnurk.**



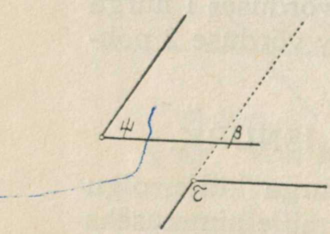
62. joon.

A. On antud kaks rööphaaradega nurka φ ja ε (62. joon.); mõlemad on nürid.

Pikendanud nurga φ haara kuni lõikumiseni teise nurga haaraga, leiame:

1. $\varphi = \alpha$	§ 46.
2. $\varepsilon = \alpha$	„
3. $\varphi = \varepsilon$.	Võrdustest 1 ja 2.

B. Kui aga rööphaaradega nurkadest üks on terav ja teine nüri, nagu ψ ja τ (63. joon.), siis:



63. joon.

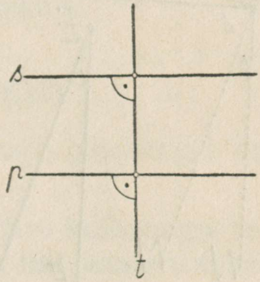
1. $\psi = \beta$	§ 46.
2. $\beta + \tau = \pi$	„
3. $\psi + \tau = \pi$.	Asendame võrduses 2 nurga β nurgaga ψ.

§ 50. Kui kahest rööpsirgest üks on risti kolmanda sirgega, siis on risti sellega ka teine.

Eeldus: $s \perp t$; $s \parallel p$.

Väide: $p \perp t$.

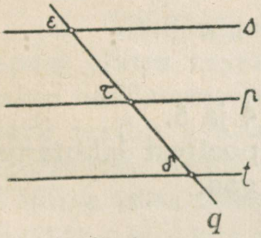
Tähistame s ja t poolt moodustatud nurga tähega α, p ja t vahelise nurga tähega β.



64. joon.

1. $\alpha = \frac{\pi}{2}$	Eeldus.
2. $\alpha = \beta$	§ 46.
3. $\beta = \frac{\pi}{2}$	Võrdustest 1 ja 2.
4. $p \perp t$.	

§ 51. Kui kahest rööpsirgest üks on rööbiti kolmandaga, siis on rööbiti sellega ka teine.



65. joon.

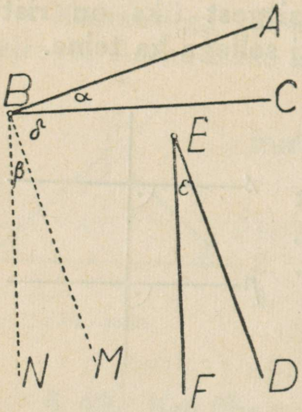
Eeldame: $s \parallel t$; $s \parallel p$.

Väidame: $t \parallel p$.

Abijooni: Lõikame antud kolm sirget neljanda sirgega q, siis:

1. $\delta = \varepsilon$	§ 46.
2. $\tau = \varepsilon$	„
3. $\delta = \tau$	Võrdustest 1 ja 2.
4. $t \parallel p$	§ 43.

§ 52. Kui ühe nurga haarad on risti teise nurga haaradega ning nurgad on mõlemad teravad või nürid, siis on nad võrdsed; on aga üks neist terav ja teine nüri, siis on nende summa sirgnurk.



66. joon.

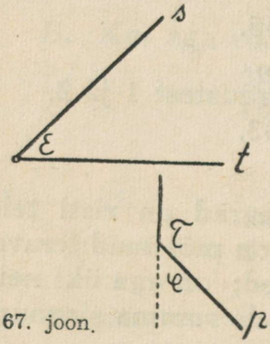
A. Eeldame, et nurgad *ABC* ja *DEF* on mõlemad teravad ja et

$$AB \perp ED \text{ ja } BC \perp EF.$$

Väidame: $\widehat{ABC} = \widehat{DEF}$.

Abijooni: $BM \parallel ED$ ja $BN \parallel EF$.

1. $\beta = \varepsilon$	§ 49; mõlemad nurgad on teravad.
2. $BM \perp BA$	$BM \parallel ED$, $ED \perp BA$ (§ 50).
3. $BN \perp BC$	$BN \parallel EF$, $EF \perp BC$ (§ 50).
4. $\alpha + \delta = \frac{\pi}{2}$	Vaata 2!
5. $\beta + \delta = \frac{\pi}{2}$	„ 3!
6. $\alpha + \delta = \beta + \delta$	Võrdustest 4 ja 5.
7. $\alpha = \beta$	Võrduse 6 poolest lahutame võrdsed nurgad.
ehk $\alpha = \varepsilon$.	Vaata 1!



67. joon.

B. Kui aga nurga τ haarad on risti nurga ε haaradega ja nurkadest ε on terav, τ nüri, siis (67. joon.)

väidame: $\varepsilon + \tau = \pi$.

Pikendanud nurga τ haara, saame nurga φ, mis on terav.

1. $\varphi+\tau=\pi$.	§ 3, A.
2. $\varphi=\varepsilon$.	§ 52, A, kuna φ ja ε on teravad.
3. $\varepsilon+\tau=\pi$.	Võrdustest 1 ja 2 pärast nurga φ asendamist nurgaga ε.

§ 53. ÜLESANDEID.

1. Tõestada, et kõrvunurkade poolitajad on teineteisega risti.

2. Tõestada, et kui täisnurkse kolmnurga teravad nurgad on 60^0 ja 30^0, siis üks kaateteist on 2 korda väiksem hüpotenuusist.

3. Kuidas konstrueerida kolm võrdse raadiusega kaart, millede vahelised nurgad on võrdsed?

4. Ühe kolmnurga kaks nurka on võrdsed teise $\triangle$-ga vastavate elementidega. Mispärast on ka kolmandad nurgad võrdsed?

5. Võrdkülgse $\triangle$-ga külgedel võetakse igast tipust alates vastavalt võrdsed lõigud ja ühendatakse nende otsatäpid üksteisega. Missugune kolmnurk tekib? (Juhatusi: Vaatle tekkinud väikesi kolmnurki, võrdle neid! Üks nende nurki on teada. Tähista teine tähega α ja arvuta teise abil kolmas! Arvuta α abil uue kolmnurga nurgad!)

6. Võrdhaarses $\triangle$-gas on aluse lähisnurk kaks korda suurem tipunurgast. Kui suur on igaüks? Missugused $\triangle$-d tekivad, kui poolitada alusnurk?

7. Täisnurkses $\triangle$-gas on üks teravnurk kaks korda suurem teisest, arvuta nurgad! Täisnurgast eraldada 60^0 nurk. Arvutada tekkinud $\triangle$-de sisenurkade suurused. Teha järeldus hüpotenuusi ja väiksema kaateti kohta.

8. Täisnurk sirkli ja joonlaua abil kolmeks võrdseks osaks jagada (Juhatusi: Tarvitada võrdkülgse △-ga nurkade omadust.)

9. Kolmnurga nurkade suurused suhtuvad nagu 1:2:3. Arvuta nurkade suurused!

10. Kui moodustada ühe △-ga tipu juurde kaks välisnurka, siis on need võrdsed. Mispärast?

11. Leida antud ringjoonel täpp, mis antud sirgest asuks antud kaugusel. Kas on lahendus alati olemas?

12. Rööpsirged on lõigatud kolmanda sirgega. Ühe tekkinud nurga suurus on $68{,}5^0$. Kui suured on teised nurgad?

13. Konstrueerida nurk, mis oleks antud nurgast kaks korda suurem, ilma et antud nurga tippu puudutataks.

14. Konstrueeri antud täpist antud sirgele rööpsirge (vastavate nurkade omaduse põhjal)!

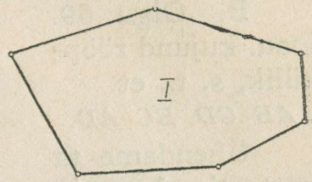
15. Määra kolmnurga kõrguste vahelised nurgad, kui teada on selle kolmnurga nurgad!

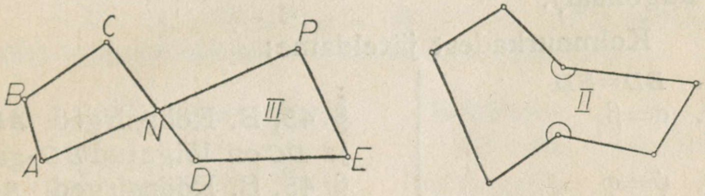
16. Konstrueerida nurk, mis on antud nurgast kaks korda väiksem, ilma antud nurga tippu puudutamata. (Tarvitada rööphaaradega nurkade omadusi.)

V

§ 54. HULKNURKADEST.

Hulknurgaks nimetame tasapinnalist kinnist kujundit, mis on moodustatud enam kui kolmest sirglõigust. Nende sirglõikude arvu järgi kõneldakse nelinurkadest, viisnurkadest, kuusnurkadest jne. Sirglõike hulknurgas hüütakse selle **külgedeks.** Kui iga hulknurga külg lõikab teisi ainult kahes täpis, siis on hulknurk **lihtis**, vas-





68. joon.

tasel korral **mittelihtis.** 68. joon. I hulknurk on lihtis, III aga mittelihtis, sest külg AP lõikub teistega kolmes täpis: A, N ja P. Hulknurk on **kumer,** kui iga sisenurk on väiksem sirgnurgast, vastasel korral aga mittekumer. 68. joon. on I hulknurk kumer, II aga mittekumer, sest selles leidub kaks nurka, mis on sirgnurgast suuremad. Edaspidi kõneleme siin raamatus ainult lihtsaist kumeraist hulknurkadest.

NELINURKADEST.

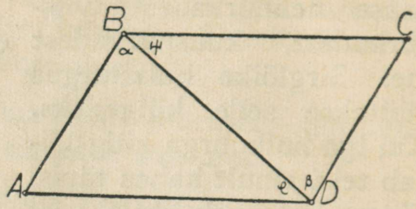
§ 55.

Nelinurka, mille vastasküljed on paarikaupa rööbikud, nimetatakse rööpkülikuks (parallelogrammiks).

A. 1. Anna lause rööpküliku ühe külje lähisnurkade kohta (§ 46 põhjal) ja

2. lause rööpküliku sisenurkade summast!

B. Olgu 69. joon. kujund rööpkülik, s. t., et $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$. Ühendame ta vastastipud B ja D sirglõiguga BD (diagonaal).



69. joon.

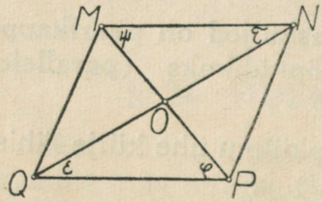
Kolmnurkadest järeldame:

1. $BD = BD$	§ 45, B. Rööpsirged AB ja DC on lõigatud BD-ga.
2. $\alpha = \beta$	
3. $\psi = \varphi$	§ 45, B. Rööpsirged BC ja AD on lõigatud BD-ga.
4. $\triangle ABD \equiv \triangle CDB$	§ 23.
5. $AB = DC$	Kongr. $\triangle$-des on vastavad elemendid võrdsed.
6. $BC = AD$	Kongr. $\triangle$-des on vastavad elemendid võrdsed.
7. $\hat{A} = \hat{C}$	Kongr. $\triangle$-des on vastavad elemendid võrdsed.
8. $\widehat{ABC} = \widehat{ADC}$	Tuletada võrdusist 2 ja 3.

Rööpküliku vastasküljed on võrdsed.

„ vastasnurgad „ „

§ 56. Rööpküliku diagonaalid poolitavad teineteist.



70. joon.

Eeldame:

$MN \parallel QP$; $QM \parallel PN$.

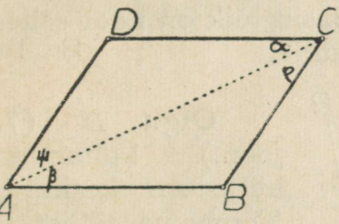
Väidame:

$MO = OP$; $NO = OQ$.

Kolmnurkadest QOP ja NOM leiame:

1. $QP=NM$	§ 55.
2. $\varepsilon=\tau$	§ 45, B.
3. $\varphi=\psi$	§ „ „
4. $\triangle QOP \equiv \triangle NOM$	§ 23.
5. $MO=OP$	Kongr. kolmnurkades on
6. $NO=OQ$.	vastavad elemendid võrdsed.

§ **57.** 1. pöördlause. **Nelinurk, mille vastasküljed on paarikaupa võrdsed, on rööpkülik.**



71. joon.

Eeldame:

$DC=AB;\quad AD=BC.$

Väidame:

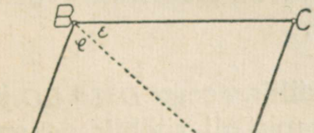
$DC \parallel AB;\quad AD \parallel BC.$

Abijooni:

diagonaal AC.

1. $DC=AB$	Eeldus.
2. $AD=BC$	
3. $AC=AC$	
4. $\triangle ADC \equiv \triangle ABC$	§ 24.
5. $\alpha=\beta$	Kongr. kolmnurkade vasta-
6. $\varphi=\psi$	vad elemendid on võrdsed.
7. $DC \parallel AB$	Võrdustest 5 ja 6 § 42 põh-
8. $AD \parallel BC$.	jal.

§ **58.** 2. pöördlause: **Kui nelinurga üks paar külgi on rööbikud ning võrdsed, siis on see nelinurk rööpkülik.**



72. joon.

Eeldame:

$BC=AD;\ BC \parallel AD.$

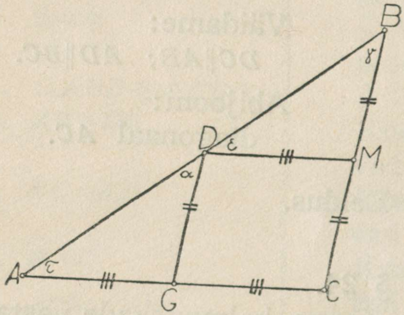
Väidame: $BA \parallel CD$.

Abijooni: diagonaal BD.

Kolmnurkadest ABD ja CDB:

1. $BD = BD$	Eeldus.
2. $BC = AD$	§ 45, B.
3. $\varepsilon = \tau$	§ 22.
4. $\triangle ABD \equiv \triangle CDB$	
5. $\varphi = \delta$	Kongr. △-des on vastavad elemendid võrdsed.
6. $BA \parallel CD$.	§ 42.

§ 59. **Kolmnurga ühe külje keskkohast teisele küljele tõmmatud rööpsirglõik on pool sellest ja poolitab ka kolmanda külje.**



73. joon.

Olgu D (73. joon.) kolmnurga külje AB kesktäpp. Tõmbame täpist D järgmised sirgl.:

$DM \parallel AC$,

$DG \parallel BC$.

Kolmnurkadest ADG ja DBM leiame:

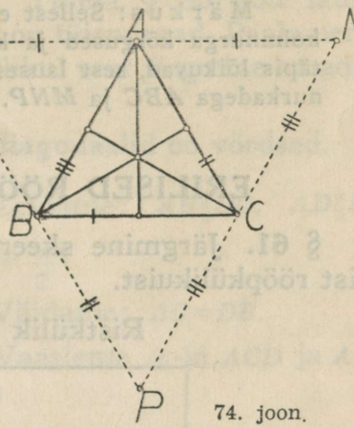
1. $AD = DB$	Täpi D asend.
2. $\alpha = \gamma$	§ 49.
3. $\tau = \varepsilon$	§ 49.
4. $\triangle ADG \equiv \triangle DBM$	§ 23.
5. $AG = DM$ 6. $DG = BM$	Kongr. kolmnurkades on vastavad elemendid võrdsed.

Kujund $DMCG$ on rööpkülik, seega $DM = GC$ ja $DG = MC$. Järeldame, et DM, mis oli rööbik AC-ga, poolitab BC. Kriipsukestest on näha, et DM on pool küljest AC.

§ 60. Kolmnurga kõrguste lause.

Kolmnurga kõrgused lõikuvad samas täpis.

On antud $\triangle ABC$ ja tema kõrgused h_a, h_b, h_c. Väidame, et need kõrgused lõikuvad samas täpis.



74. joon.

Abijooni: Tõmbame iga antud kolmnurga tipu läbi sirge rööbiti vastasküljega. Tekib $\triangle MNP$.

1. $h_a \perp BC$	Eeldus.	$h_b \perp AC$	Eeldus.
2. $MN \parallel BC$	Abijoon.	$MP \parallel AC$	Abijoon.
3. $h_a \perp MN$	§ 50.	$h_b \perp MP$	§ 50.

$h_c \perp AB$	Eeldus.
$PN \parallel AB$	Abijoon.
$h_c \perp PN$	§ 50.

Selgub, et antud kolmnurga kõrgustest igaüks on risti ühe kolmnurga MNP küljega.

Edasi leiame, et $MACB$, $ANCB$ ja $ACPB$ on rööpkülikud (vaata abijooni!). Seega

$BC = MA$,	$BC = AN$,	$AC = BP$,	(kõik § 55
$AC = MB$,	$AB = NC$,	$AB = CP$,	põhjal).

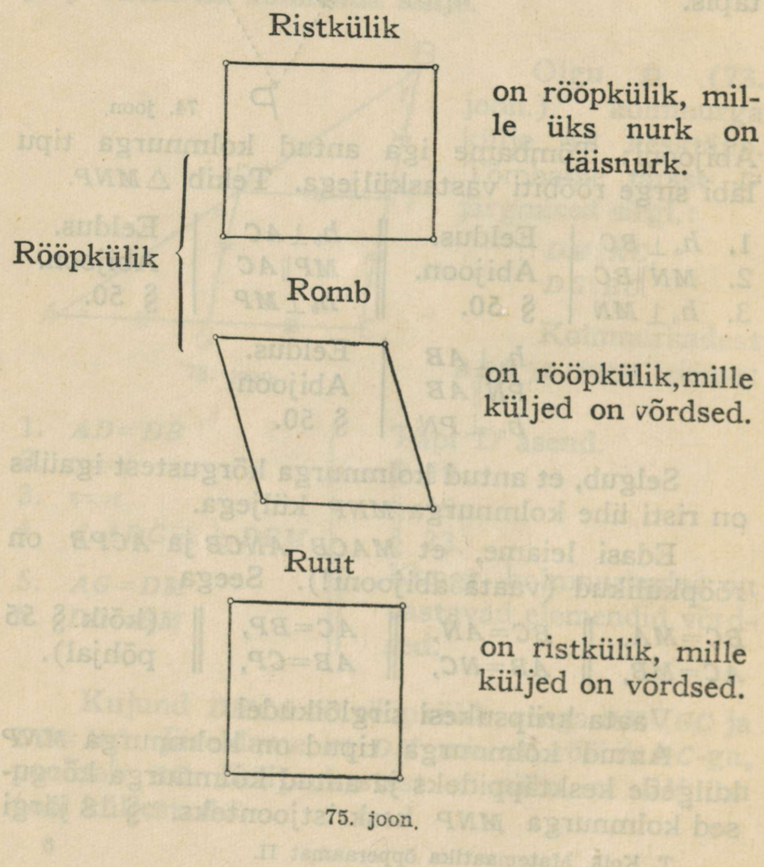
Vaata kriipsukesi sirglõikudel!

Antud kolmnurga tipud on kolmnurga MNP külgede kesktäppideks ja antud kolmnurga kõrgused kolmnurga MNP keskristjoonteks. § 18 järgi lõikuvad viimased samas täpis, seega ka kolmnurga *ABC* kõrgused lõikuvad samas täpis.

M ä r k u s: Sellest ei tule järeldada, et ühe kolmnurga kõrgused ja keskristjooned kõik samas täpis lõikuvad, sest lauses oli tegemist ikkagi kolmnurkadega *ABC* ja *MNP*.

ERILISED RÖÖPKÜLIKUD.

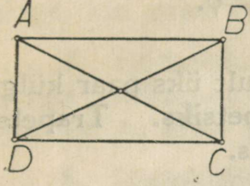
§ **61.** Järgmine skeem annab kujutelma erilisist rööpkülikuist.



75. joon.

Et ristkülik on ühtlasi rööpkülik, siis peavad ka ristkülikul olema §§ 55 ja 56 nimetatud omadused, samuti ruudul. Tuleta § 50 abil lause: **Ristküliku kõik nurgad on täisnurgad.** Peale nende omaduste on igal ristkülikul veel järgmine omadus:

§ 62. Ristküliku diagonaalid on võrdsed.



76. joon.

Eeldame: $AB \parallel DC$, $AD \parallel BC$, $\widehat{DAB} = \frac{\pi}{2}$.

Väidame: $AC = DB$.

Vaatleme $\triangle$-ki ACD ja ADB. Neis

$\widehat{DAB} = \widehat{ADC} = \frac{\pi}{2}$	§ 50.
$AD = AD$	
$AB = DC$	§ 55, B.
$\triangle ACD \cong \triangle ADB$	§ 22.
$AC = DB$.	Kongr. $\triangle$-des on vastavad elemendid võrdsed.

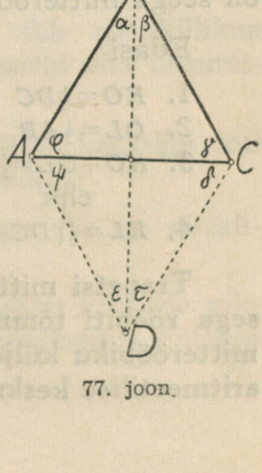
§ 63.

Missugused omadused on rombil definitsiooni põhjal?

Rombi diagonaalid on risti ja poolitavad rombi nurki.

Eeldame, et $\triangle$-s ABC $BC = AB$.

Olgu täpi B sümmeetriline täpp AC suhtes D, siis



77. joon.

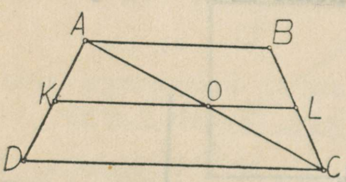
1. $BC=CD$ 2. $AB=AD$	§ 7.
3. $AB=BC=CD=AD$.	Eelduse ja võrduste 1 ja 2 põhjal.

Kujund $ABCD$ on romb.

§ 6 järgi $AC \perp BD$; §§ 7 ja 14, E järgi

$$\alpha=\beta;\ \gamma=\delta;\ \varepsilon=\tau;\ \varphi=\psi.$$

§ **64.** Nelinurka, milles ainult üks paar külgi on rööbikud, nimetatakse **trapetsiks. Trapetsi rööbikuid** külgi hüütakse **aluseiks.**



78. joon.

Olgu $ABCD$ (78. joon.) trapets, milles $AB \parallel DC$(alused). Olgu K ühe mitterööbiku külje keskkoht. Tõmbame täpist K sirge $KL \parallel DC$ ($KL \parallel AB$-ga § 51 põhjal). Olgu AC trapetsi diagonaal; see lõikab trapetsi kolmnurkadeks DAC ja ABC. KL poolitab AC (§ 59); siis aga OL poolitab BC (§ 59). Sirge KL on seega mitterööbikute külgede poolitaja.

Edasi

1. $KO=\frac{1}{2}DC$	§ 59.
2. $OL=\frac{1}{2}AB$	§ 59.
3. $KO+OL=\frac{1}{2}DC+\frac{1}{2}AB$ ehk	Võrduste 1 ja 2 liitmisest.
4. $KL=\frac{1}{2}(DC+AB)$.	

Trapetsi mitterööbiku külje keskkohast alusega rööbiti tõmmatud sirglõik poolitab ka teise mitterööbiku külje ning on võrdne trapetsi aluste aritmeetilise keskmisega.

§ 65. ÜLESANDEID.

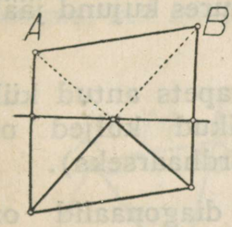
1. Kas on ruudu diagonaalid teineteisega risti? Kas ruudu diagonaalid on võrdsed? Põhjenda seda!

2. Tõesta, et rööpsirgete vastastikune kaugus on konstantne suurus!

3. Kuidas saame täpist sirgele tõmmata rööpsirge, kui sirkel ei küüni täpist sirgeni?

4. Rööpküliku $ABCD$ nurk A on poolitatud ja nurga poolitajale on tipust C tõmmatud rööpsirge. Kas on ka nurk C sellega poolitatud?

5. Rööpkülikus on tõmmatud üks diagonaal. Kahest ülejäänud tipust on sellele diagonaalile tõmmatud ristlõigud. Kas on viimased võrdsed?



79. joon.

6. Kaks täppi A ja B on ligipääsematud (teispool jõge). Määra nendevaheline kaugus 79. joon. kohaselt!

7. Konstrueeri antud täpist sirgele rööpsirge (rööpküliku omaduste põhjal)!

8. Missuguse liikumisega võib rööpkülikus diagonaaliga moodustatud kolmnurki viia ühtumisele?

9. Kuidas võib leida rööpküliku keskpunkti, kui selle rööpküliku tippudele ei pääse ligi?

10. Missuguse kujundi tippudeks on ristküliku külgede kesktäpid?

11. Mida võib ütelda ristküliku külgede pikkuse kohta, kui ta diagonaal moodustab küljega nurga 30^0?

12. Konstrueeri toetudes rombi omadusele täpist T sirgele s rööpsirge!

13. Tõesta, et rombi külgede keskkohad on ristküliku tipud!

14. Ruudu igal küljel võtta vastavalt tippudest alates võrdsed sirglõigud ja ühendada sirglõikude otsatäpid. Mis kujund saadakse?

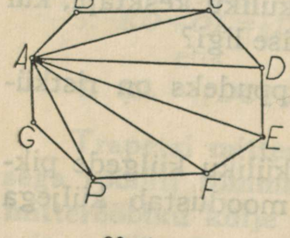
15. Toetudes eelmisele ülesandele konstrueeri ruutu **katseliselt** teine ruut antud küljepikkusega! Teise ruudu tipud asetsegu esimese ruudu külgedel. Kas on konstruktsioon alati läbiviidav? Tingimus?

16. Tollipulga lülidest olgu moodustatud trapets, mille tippude ümber küljed võivad trapetsi tasapinnas pöörelda. Kas selle juures kujund jääb ikka trapetsiks?

17. Kujutada võrdhaarne trapets antud külgedest. (Kui trapetsi mitterööbikud küljed on võrdsed, siis nimetatakse seda võrdhaarseks).

18. Kujutada romb, mille diagonaalid on antud.

§ 66. Hulknurga diagonaalidest.



80. joon.

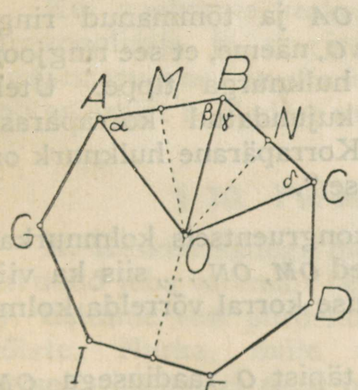
Kujutagu $ABCDEFPGA$ hulknurka. Tõmbame tipust A teistesse tipudesse, millega A veel pole ühendatud, sirglõigud (diagonaalid). Mitu sellist sirglõiku on võimalik tõmmata joonisel kujutatud hulknurgas? viisnurgas, kümmenurgas, n — nurgas?) Põhjenda seda! Mitu kolmnurka tekib siis 80. joon. hulknurgas, kuusnurgas, seitsenurgas, n-nurgas? Põhjenda seda!

§ 67. Hulknurga sisenurkade summa on nii mitu korda π, kui mitu külge on hulknurgas ilma kahe küljeta.

Olgu antud n-nurk. Ühest tipust tõmmatud diagonaalidega lõigatakse see hulknurk n-2 kolmnurgaks. Kõikide kolmnurkade sisenurkade summa on ühtlasi hulknurga sisenurkade summa. Ühe kolmnurga sisenurkade summa on π, n-2 kolmnurga sisenurkade summa on:

$$s=(n-2)\pi.$$

Arvuta valemi abil hulknurga sisenurkade summa, kui n=3, 4, 5, 6, 7, 8!



81. joon.

§ 68. Hulknurka nimetatakse **korrapäraseks**, kui kõik selle sisenurgad ja küljed on võrdsed.

A. Olgu kõrvalolev kujund korrapärane hulknurk, s. t., et $AB=BC=CD=\ldots$, ja $\hat{A}=\hat{B}=\hat{C}=\ldots$ Poolitame selle kaks nurka A ja B. Kuna kõik hulknurga nurgad on võrdsed, siis on võrdsed ka nende pooled ning $\alpha=\beta=\gamma$. Ühendame nurgapoolitajate lõiketäpi O tipuga C ja võrdleme kolmnurki ABO ja BCO:

$BO = BO$ $AB = BC$ $\beta = \gamma$	Eeldus.
$\triangle ABO \equiv \triangle BCO.$	§ 22.

Kuna $\triangle ABO$ on võrdhaarne (§ 17), siis on niisugune ka $\triangle BCO$ ja järelikult $\gamma = \delta$, seega OC on nurga C poolitaja. Ühendanud O veel teiste tippudega, võib endise võttega tõestada, et ka need sirglõigud on nurkade poolitajad. (Tõesta seda vähemalt OD kohta!) Saame lause:

Korrapärase hulknurga sisenurkade poolitajad lõikuvad kõik samas täpis. Nurgapoolitajate lõiketäppi hüütakse korrapärase hulknurga **kesktäpiks.**

B. Kolmnurkade kongruentsusest järgneb, et kesktäpp on kõikidest korrapärase hulknurga tippudest ühekaugusel.

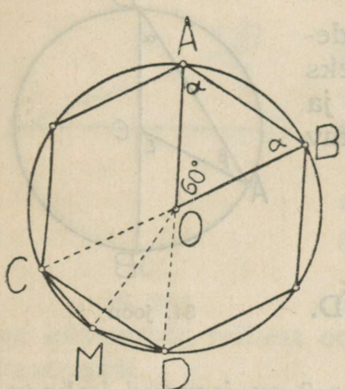
Võtnud raadiuseks OA ja tõmmanud ringjoone, mille kesktäpiks on O, näeme, et see ringjoon läbib kõiki korrapärase hulknurga tippe. Üteldakse: „Ringjoon on kujundatud korrapärase hulknurga ümber" või: „Korrapärane hulknurk on kujundatud ringjoone sisse.".

C. „Kui tõmmata kongruentseis kolmnurkades AOB, BOC,... kõrgused OM, ON,..., siis ka viimased on võrdsed (kahtluse korral võrrelda kolmnurki MBO ja BNO).

Sellest järeldame, et täpist O raadiusega OM tõmmatud ringjoon läbib kõiki korrapärase hulknurga külgede keskkohti ning et need küljed **puutuvad** ringjoont (§ 36). **Nimetatud ringjoon on kujundatud korrapärase hulknurga sisse.**

Kujunda võrdkülgse kolmnurga ja ruudu ümber ja sisse ringjoon!

§ 69. Ringjoonde kujundatud korrapärane kuusnurk.



82. joon.

Olgu AB korrapärase kuusnurga (82. joon.) külg ja O kesktäpp. Küljele vastav kesknurk on neljast täisnurgast kuuendik ehk 60^0. Kumbki nurkadest α on ka 60^0 ja kolmnurk OAB on võrdkülgne, seega $AB=OA$.

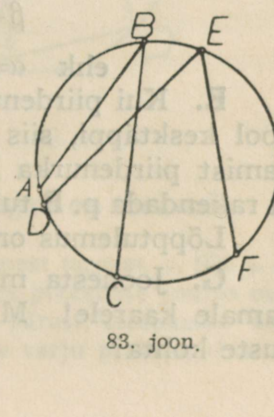
Kuidas saab siis väga lihtsalt kujundada antud ringjoonde korrapärast kuusnurka?

Kuidas konstrueerida korrapärane kuusnurk, kui on antud selle külje pikkus?

Kui poolitame kesknurga COD (§ 15) ning nurgapoolitaja ja ringjoone lõiketäpi tähistame M-ga, missugused on siis sirglõigud CM ja MD? Mis saab selliseist kõõludest moodustada ringjoones?

§ 70. Piirdenurkadest.

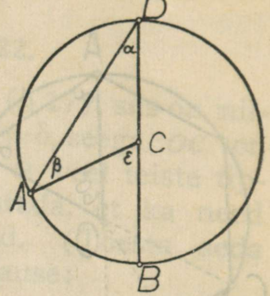
A. Kesknurkadega oleme tutvunud juba varemalt (§ 29, B). Esitame veel piirdenurga mõiste. Nurka, mille tipp asetseb ringjoonel ning mille haaradeks on kõõlud, nimetatakse **piirdenurgaks.** Joonisel on ABC piirdenurk, samuti $\widehat{DEF}$. Piirdenurga haaraks võib muidugi olla ka diameeter.



83. joon.

B. Piirdenurga suurus on pool samale kaarele toetuva kesknurga suurusest.

Eeldame, et α on piirdenurk (84. joon.), mille üheks haaraks on diameeter DB ja samale kaarele AB toetuv kesknurk on ε.

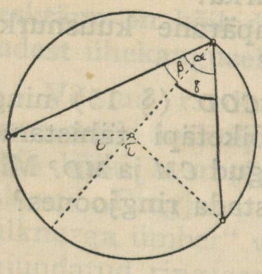


84. joon.

Väidame, et $\alpha=\frac{\varepsilon}{2}$.

Kolmnurgas ADC

1. $\alpha=\beta$	§ 14, D.
2. $\alpha+\beta=2\alpha=\varepsilon$	§ 48.
3. $\alpha=\frac{\varepsilon}{2}$.	Võrdus 2 on jagatud kahega.



85. joon.

D. Olgu α piirdenurk (85. joon.), mille haarade vahel asetseb kesktäpp. Tõmmanud tipust diameetri, leiame:

$$\alpha=\beta+\gamma.$$

B põhjal $\beta=\frac{\varepsilon}{2}$ ja $\gamma=\frac{\tau}{2}$ ehk pärast kahe viimase võrduse liitmist:

$$\beta+\gamma=\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\tau}{2}$$

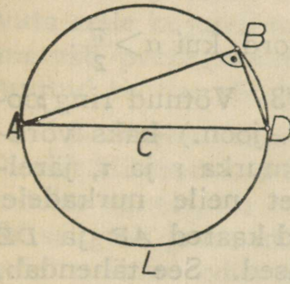
ehk $\alpha=\frac{1}{2}(\varepsilon+\tau)$.

E. Kui piirdenurga haarad on mõlemad ühel pool kesktäppi, siis võime pärast diameetri tõmbamist piirdenurka kujutleda kahe nurga vahena ja rakendada p. **B** tulemuse nende kohta.

Lõpptulemus on ikka endine.

G. Joonesta mitu piirdenurka, mis toetuvad samale kaarele! Mis selgub nende nurkade suuruste kohta?

§ 71. Thales'e *) lause. Diameetrile toetuv piirdenurk on täisnurk.



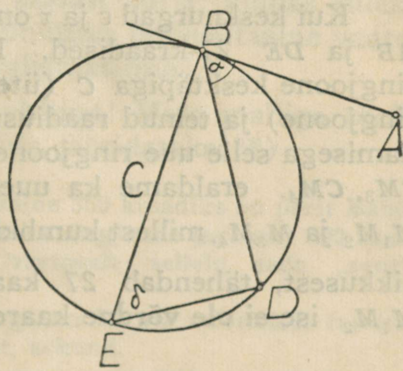
86. joon.

Piirdenurk ABD toetugu diameetrile ACD ehk kaarele ALD. Kaarele ALD toetuv kesknurk on sirgnurk. Eelmise lause põhjal on nurk B pool sirgnurgast ehk täisnurk.

Konstrueerida, toetudes sellele lausele, täisnurkne kolmnurk, millest on antud hüpotenuus ja üks kaateteist.

§ 72. Puutuja ja kõõlu vaheline teravnurk on võrdne samale kaarele toetuva piirdenurgaga.

Nurk ABD on moodustatud puutujast BA (B on puutetäpp) ja kõõlust BD. Tõmbame puutetäpist diameetri, mille tähistame BE-ga. Ühendame E täpiga D.



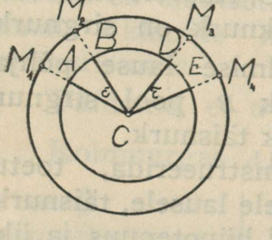
87. joon.

$\widehat{EDB} = \frac{\pi}{2}$	Thales'e lause.
$BD \perp ED$	
$BA \perp BE$	§ 35.
$\alpha = \delta$.	§ 52, mõlemad nurgad on teravad.

*) Thales — üks kreeka seitsmest targast, u. 600 a. e. Kr., oli kaupmees, kellena Egiptuses preestrite juures matemaatilisi teadmisi õppis, mis ta pärast Kreekasse tõi. Arvutas püramiidide kõrguse nende varju pikkuse abil.

Kõik kaarele BD toetuvad piirdenurgad on võrdsed (§ 70), seega iga selline piirdenurk on võrdne nurgaga α.

Uurida, kuidas oleks olukord, kui $\alpha > \frac{\pi}{2}$.



88. joon.

§ 73. Võtnud ringjoones (88. joon.) kaks võrdset kesknurka ε ja τ, järeldame, et neile nurkadele vastavad kaared AB ja DE on võrdsed. See tähendab, et ka näiteks ühekraadiseile kesknurkadele vastavad kaared on **selles** ringjoones kõik võrdsed. Nimetame kaart, mille kesknurk on ühekraadine, üheks kaarekraadiks. Ringjoonest on ta $\frac{1}{360}$.

Kui kesknurgad ε ja τ on 27^0, siis on ka kaared AB ja DE 27-kraadised. Kujutanud veel teise ringjoone kesktäpiga C (üteldakse: kontsentrilise ringjoone) ja teinud raadiustest $CA, CB, \ldots$ pikendamisega selle uue ringjoone raadiused CM_1, CM_2, CM_3, CM_4, eraldame ka uuest ringjoonest kaared M_1M_2 ja M_3M_4, millest kumbki on $\frac{27}{360}$ teise ringjoone pikkusest, tähendab 27 kaarekraadi suur, kuigi M_1M_2 ise **ei ole võrdne** kaarega AB.

§ 74. ÜLESANDEID.

1. Tõesta, et korrapärase viisnurga diagonaalid lõikudes annavad jällegi korrapärase viisnurga!

(Juhatusi: Rakenda § 67 lause, vaatle tekkinud kolmnurki, arvuta nende nurgad!)

2. Eelmise ülesande joonisel kustutada mõlemad korrapärased viisnurgad! Mis jääb üle? Arvuta selle kujundi nurgad! See kujund kannab nimetust pentagramm ja oli pütagoorlaste juures tuntud tervise sümbolina.

3. Torka lauasse kaks nööpnõela! Lõika paberist kiilusarnane kujund ja aseta see lapiti nööpnõelte vahele, nii et kiilu küljed puutuksid nõelu! Missugust joont mööda liigub kiilu tipp, kui kiilu nõelte vahel edasitagasi nihutada, hoolitsedes, et küljed alati nõelu puutuksid?

4. Kuidas võiksime, tarvitades ainult paberist täisnurka, määrata ringjoone läbimõõdu?

5. Antud hüpotenuusil konstrueerida võrdhaarne $\triangle$, toetudes Thales'e lausele.

6. Keegi vaatab aknast välja; kuidas tuleks tal toas liikuda, et ei muutuks horisontaalne vaatenurk, milles ta näeb välismaailma?

7. Selgita malli ehitust! Mida malliga tõelikult mõõdetakse? Mida järeldatakse?*)

---

*) 1. Ringjoone jagamine 360 kraadiks on pärit Babüloониast. Nüüd tuleb ette ka ringjoone jagamist 400 kraadiks. Iga täisnurk on vastavalt sellele sada „sentikraadi".

Babüloonia algupäraga on ka aja mõõtmisel tarvitatavad ühikud tund, minut, sekund.

2. Praktiline geomeetria on loodud vanas Egiptuses, kus Niiluse jõgi igal aastal maaalade üleujutamisel hävitas põlluomanikkude piirimärgid, mis sundis preestreid otsima teid, kuidas pärast vee alanemist maad uuesti õiglaselt tükeldada.

3. Aluse geomeetriliste tõdede tõestamisele panid kreeka matemaatikud. Eukleides (u. 300 a. e. Kr.) tegi oma „Elementides" kokkuvõtte kõigist geomeetrilisist lauseist, mis tol ajal olid tuntud.

8. Kaks ringjoont lõikuvad (mitmes täpis?). Ühe lõiketäpi läbi tõmba mõlema ringjoone diameetrid ja tõesta, et nende teised otsad teise lõiketäpiga on samal sirgel! (Ühenda lõiketäpid kõõluga! Rakenda Thales'e lauset!)

9. Thales arvutas püramiidi kõrguse püramiidi varju pikkust mõõtes. Oletades, et päikese kiired moodustavad varjuga 45^0 nurga, selgitada, missugusel viisil leidub siis püramiidi kõrgus!

10. Nurga haaral konstrueerida täpp, mis oleks teisest haarast antud kaugusel. Kas on konstruktsioon alati võimalik?

11. Tõmba nurgapoolitaja antud nurgale ilma selle tippu puudutamata!

12. Kahekordista antud nurk ilma selle tippu puudutamata!

SISUKORD:

Algebra.

Geomeetria.

TRÜKIVIGU.

			Trükitud:	Peab olema:
8. lk.	11.	rida ülevalt . . .	omanduse	omaduse
14. „	4.	„ alt . . .	pindala.	pindala
16. „	11.	„ alt . . .	Paneme	Pangem
26. „	6.	„ ülevalt . . .	jagajaks	jagajaiks
45. „	12.	„ alt . . .	teine.	teine?
63. „	10.	„ joonis . . .	45^0	40^0
79. „	16.	„ ülevalt . . .	väljaspoolt	väljastpoolt

80. „ 34. joonisel sirglõikude *e* ja *b* ühistäpp tähistada *C*-ga.

Hind kr. 1.75