ISSN 0494-7304 0132-053x

TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI TOIMETISED

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ
ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

ACTA ET COMMENTATIONES UNIVERSITATIS TARTUENSIS

762

MITTEKORREKTSETE ÜLESANNETE REGULEERIMISE MEETODID

МЕТОДЫ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ

Matemaatika- ja mehhaanika-alaseid töid

Труды по математике и механике

TARTU 1987

TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI TOIMETISED
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ
ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ACTA ET COMMENTATIONES UNIVERSITATIS TARTUENSIS
ALUSTATUD 1893.a. VIHIK 762 ВЫПУСК ОСНОВАНЫ В 1893.г.

MITTEKORREKTSETE ÜLESANNETE REGULEERIMISE MEETODID

МЕТОДЫ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ

Matemaatika-ja mehhaanika-alaseid töid

Труды по математике и механике

TARTU 1987

Уч.зап.Тартуск.ун-та,1986,762,3-8.

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ВЫБОРЕ ПАРАМЕТРА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ В МЕТОДЕ ТИХОНОВА

Г. Вайникко

Обсуждаются алгоритмы выбора параметра регуляризации в методе Тихонова, обеспечивающие оптимальность метода в ослабленных нормах.

1. Введение. Из результатов [5] следует, что оптимальные методы вычисления значений линейных неограниченных операторов в гильбертовых пространствах можно строить на основе метода А.Н.Тихонова. В более явной форме этот результат сформулирован в работе [1], в которой рассматривается решение линейных некорректных задач в виде уравнений; см. также [3].

Настоящая статья преследует методические цели. Мы строим полное доказательство оптимальности метода Тихонова в ослабленных нормах, сосредоточив внимание на алгоритмах (оптимального) выбора параметра регуляризации. Дадим точную постановку вопроса. Имеется уравнение

$$Au = f, \tag{1}$$

где $A \in \mathcal{L}(H,F)$ – линейный непрерывный инъективный оператор из гильбертова пространства H в гильбертово пространство F. Оператор A считается известным точно, правая часть f – приближенно $(\|f_\delta - f\| \le \delta)$. Априорная информация пусть заключается в принадлежности решения шару

$$\mathcal{M}_\rho = \{u \in H : \|u\|_H \le \rho\}, \quad \rho > 0.$$

Погрешность приближенных решений будем измерять по норме некоторого гильбертова пространства E, такого что $H \subset E$ и оператор I_{HE} вложения H в E компактен. Требуется подобрать такой метод (такое отображение $\mathcal{P}: F \to E$), для которого реализуется инфимум наибольшего отклонения

$$\varphi(\delta, E, \rho, \mathcal{P}) = \sup_{\substack{u \in H,\ f_\delta \in F \\ \|u\|_H \le \rho,\ \|Au - f_\delta\|_F \le \delta}} \|\mathcal{P} f_\delta - u\|_E . \tag{2}$$

Нашей целью является показать, что при подходящем выборе параметра $\alpha=\alpha(\delta)=\alpha(\delta, E, \rho)>0$ этот инфимум достигается на методе Тихонова $T_\alpha=(\alpha I+A^*A)^{-1}A^*$, т.е.

$$\inf_{\mathcal{P}} \varphi(\delta, E, \rho, \mathcal{P}) = \varphi(\delta, E, \rho, T_\alpha). \tag{3}$$

Здесь I – единичный оператор в H, $A^*\in\mathcal{L}(F,H)$ – сопряженный к $A\in\mathcal{L}(H,F)$ оператор.

2. Оценка снизу. Хорошо известно (см., например, [4] или [2]), что

$$\inf_{\mathcal{P}} \varphi(\delta, E, \rho, \mathcal{P}) \geq \omega(\delta, E, \rho), \tag{4}$$

где

$$\omega(\delta, E, \rho) = \sup_{u\in\mathcal{M}_\rho,\ \|Au\|_F\leq\delta} \|u\|_E = \sup_{\|u/\rho\|_H\leq 1,\ \|Au/\delta\|_F\leq 1} \|u\|_E.$$

Согласно [5], для любых операторов $C_i\in\mathcal{L}(X,X_i)$, $i=0,1,2$ (X, X_i – гильбертовы пространства), справедливо неравенство

$$\sup_{\|C_1x\|\leq 1,\ \|C_2x\|\leq 1} \|C_0x\| = \inf_{0<t<1} \sup_{[t\|C_1x\|^2+(1-t)\|C_2x\|^2]^{1/2}\leq 1} \|C_0x\|. \tag{5}$$

Вместо инфимума по $t\in(0,1)$ здесь можно написать минимум по $t\in[0,1]$ – он достигается. По некоторым причинам нам удобнее работать с $t\in(0,1)$. Итак,

$$\omega(\delta, E, \rho) = \inf_{0<t<1} \sup_{u\neq 0} \frac{\|u\|_E}{[t\|u/\rho\|_H^2+(1-t)\|Au/\delta\|_F^2]^{1/2}}.$$

Обозначим через $J\in\mathcal{L}(E,H)$ оператор, сопряженный к оператору вложения $I_{HE}\in\mathcal{L}(H,E)$:

$$(e,u)_E = (Je,u)_H \qquad \forall e\in E,\ u\in H.$$

Оператор $J\in\mathcal{L}(E,H)$ вполне непрерывен вместе с I_{HE}; рассматриваемый как оператор в H или в E, он самосопряжен, положителен и вполне непрерывен. Теперь формула для ω примет вид

$$\omega^2(\delta, E, \rho) = \inf_{0<t<1} \sup_{u\neq 0} \frac{(Ju,u)_H}{\left(\frac{t}{\rho^2}u+\frac{1-t}{\delta^2}A^*Au, u\right)_H} = \inf_{0<t<1} \lambda(t), \tag{6}$$

где $\lambda(t)$ – наибольшее собственное значение задачи

$$Ju = \lambda\left(\frac{t}{\rho^2}I+\frac{1-t}{\delta^2}A^*A\right)u, \quad u\in H, \tag{7}$$

или
$$\left(\frac{t}{\rho^2} I + \frac{1-t}{\delta^2} A^*A \right)^{-1} J u = \lambda u .$$
Оператор $\left(\frac{t}{\rho^2} I + \frac{1-t}{\delta^2} A^*A \right)^{-1} J$ вполне непрерывен, самосопряжен и положителен в пространстве E, поэтому
$$\lambda(t) = \left\| \left(\frac{t}{\rho^2} I + \frac{1-t}{\delta^2} A^*A \right)^{-1} J \right\|_{\mathcal{L}(E,E)}, \quad 0<t<1, \qquad (8)$$
и окончательно
$$\omega(\delta, E, \rho) = \inf_{0<t<1} \left\| \left(\frac{t}{\rho^2} I + \frac{1-t}{\delta^2} A^*A \right)^{-1} J \right\|^{1/2}_{\mathcal{L}(E,E)} . \qquad (9)$$

Согласно (6), $\lambda(t)$ равна супремуму некоторого семейства выпуклых на $(0,1)$ функций вида $c_1/[c_2 t + c_3(1-t)]$, $c_1, c_2, c_3 > 0$, поэтому $\lambda(t)$ и сама выпукла на $(0,1)$. Из (8) следует, что $\lambda(t)$ непрерывна по t и даже удовлетворяет условию Липшица вида
$$|\lambda(t) - \lambda(t')| \le c \frac{\rho^4}{\delta^2} \frac{|t-t'|}{t t'}, \quad 0 < t, t' < 1$$

3. Оптимальность метода Тихонова. Допустим, что инфимум в (9) достигается при некотором $t_* \in (0,1)$. Покажем, что при $\alpha = \frac{t_*}{1-t_*} \left(\frac{\delta}{\rho}\right)^2$ справедлива оценка
$$\varphi(\delta, E, \rho, T_\alpha) \le \omega(\delta, E, \rho),$$
что совместно с (4) приводит к утверждению (3) об оптимальности метода Тихонова в норме E на множестве $\mathcal{M}_\rho$; более того,
$$\inf_{\mathcal{P}} \varphi(\delta, E, \rho, \mathcal{P}) = \varphi(\delta, E, \rho, T_\alpha) = \omega(\delta, E, \rho). \qquad (10)$$

Обозначим $u_\alpha = T_\alpha f_\delta = (\alpha I + A^*A)^{-1} A^* f_\delta$. Для любого $u \in H$ имеем
$$u_\alpha - u = -\alpha (\alpha I + A^*A)^{-1} u + (\alpha I + A^*A)^{-1} A^* (f_\delta - Au),$$
и в соответствии с (2)
$$\varphi(\delta, E, \rho, T_\alpha) = \sup_{u \in H,\, f_\delta \in F,\, \|u\|_H \le \rho,\, \|Au - f_\delta\|_F \le \delta} \|u_\alpha - u\|_E =$$
$$= \sup_{\|u\|_H \le \rho,\, \|z\| \le \delta} \| \alpha (\alpha I + A^*A)^{-1} u + (\alpha I + A^*A)^{-1} A^* z \|_E =$$
$$= \sup_{\|u\|_H \le 1,\, \|z\|_F \le 1} \| \rho \alpha (\alpha I + A^*A)^{-1} u + \delta (\alpha I + A^*A)^{-1} A^* z \|_E =$$

$$= \inf_{0<t<1} \sup_{[t\|u\|_H^2+(1-t)\|z\|_F^2]^{1/2}\le 1} \|\rho\alpha(\alpha I+A^*A)^{-1}u + \delta(\alpha I+A^*A)^{-1}A^*z\|_E$$

(на последнем шаге преобразований мы использовали равенство (5)). Введем на $X = H\times F$ скалярное произведение

$$(x_1, x_2)_{X_t} = t(u_1, u_2)_H + (1-t)(z_1, z_2)_F, \quad x_i = \binom{u_i}{z_i}, \quad i=1,2.$$

Тогда $\|x\|_{X_t} = [t\|u\|_H^2 + (1-t)\|z\|_F^2]^{1/2}$, и формула для φ продолжится так:

$$\varphi(\delta, E, \rho, T_\alpha) = \inf_{0<t<1} \|C_0\|_{\mathcal{L}(X_t, E)} = \inf_{0<t<1} \|C_0 C_0^{*t}\|^{1/2}_{\mathcal{L}(E,E)},$$

где

$$C_0 x = \rho\alpha(\alpha I + A^*A)^{-1}u + \delta(\alpha I + A^*A)^{-1}A^*z, \quad x = \binom{u}{z},$$

а $C_0^{*t} \in \mathcal{L}(E, X_t)$ - сопряженный к $C_0 \in \mathcal{L}(X_t, E)$ оператор, действующий по формуле

$$C_0^{*t} e = \begin{pmatrix} t^{-1}\rho\alpha(\alpha I + A^*A)^{-1}J e \\ (1-t)^{-1}\delta A(\alpha I + A^*A)^{-1}J e \end{pmatrix}, \quad e\in E.$$

Далее,

$$C_0 C_0^{*t} = [t^{-1}\rho^2\alpha^2(\alpha I + A^*A)^{-2} + (1-t)^{-1}\delta^2(\alpha I + A^*A)^{-2}A^*A]J;$$

При $t^{-1}\rho^2\alpha = (1-t)^{-1}\delta^2$, т.е. при $\alpha = \frac{t}{1-t}\left(\frac{\delta}{\rho}\right)^2$ это выражение упрощается:

$$C_0 C_0^{*t} = (\rho^2\alpha + \delta^2)(\alpha I + A^*A)^{-1}J = \left(\frac{t}{\rho^2} I + \frac{1-t}{\delta^2} A^*A\right)^{-1} J.$$

Итак, при $t = t_*$, $\alpha = \frac{t_*}{1-t_*}\left(\frac{\delta}{\rho}\right)^2$ имеем (см. (9))

$$\varphi(\delta, E, \rho, T_\alpha) = \left\|\left(\frac{t_*}{\rho^2} I + \frac{1-t_*}{\delta^2} A^*A\right)^{-1} J\right\|^{1/2}_{\mathcal{L}(E,E)} = \omega(\delta, E, \rho).$$

Этим установлена оптимальность метода Тихонова в предположении, что в (9) инфимум по t достигается при некотором $t_* \in (0,1)$. Есть еще теоретические возможности, что инфимум в (9) достигается в пределе $t\to 0$ или $t \to 1$. Изменения, которые в этом случае следует внести в рассуждения, очевидны.

4. <u>Численное приближение оптимального значения параметра</u>. Из проведенных рассуждений вытекает следующее предписание для определения оптимального $\alpha = \alpha(\delta, E, \rho)$:

а) вычисляем наибольшее собственное значение $\lambda(t)$ $(0 < t < 1)$ задачи (7);

б) найдем точку $t_* \in [0,1]$, в которой выпуклая на $[0,1]$ функция $\lambda(t)$ достигает своего минимума;

в) положим $\alpha = \frac{t_*}{1-t_*}\left(\frac{\delta}{\rho}\right)^2$.

При этом $\omega(\delta, E, \rho) = [\lambda(t_*)]^{1/2}$ – погрешность получаемого оптимального метода на $\mathcal{M}_\rho$ (см. (10)).

Наибольшее собственное значение $\lambda(t)$ и соответствующий ему собственный элемент u_t задачи (7) можно найти итерационными методами, например, при помощи простейших итераций

$$u_{t,n} = \left[\frac{t}{\rho^2} I + \frac{1-t}{\delta^2} A^*A\right]^{-1} J \frac{u_{t,n-1}}{\|u_{t,n-1}\|_H},$$

$$\lambda_{t,n} = \frac{\|u_{t,n}\|_E^2}{t\|u_{t,n}/\rho\|_H^2 + (1-t)\|Au_{t,n}/\delta\|_F^2}, \qquad n=1,2,\ldots .$$

Для вычисления t_* можно рекомендовать, например, алгоритм деления отрезка пополам. Укажем, в какую сторону от очередного $t \in (0,1)$ располагается t_*. Нетрудно усмотреть, что

$$t_* \le t, \quad \text{если} \quad \delta\|u_t\|_H < \rho\|Au_t\|_F,$$
$$t_* \ge t, \quad \text{если} \quad \delta\|u_t\|_H > \rho\|Au_t\|_F,$$
$$t_* = t, \quad \text{если} \quad \delta\|u_t\|_H = \rho\|Au_t\|_F.$$

В случае интегральных уравнений первого рода часто полагают

$$H = W^{m,2}(a,b), \quad (u,v)_H = \int_a^b \left[u(s)\overline{v(s)} + u^{(m)}(s)\overline{v^{(m)}(s)}\right] ds,$$
$$E = L^2(a,b), \qquad F = L^2(c,d).$$

Это соответствует ситуации, когда известна априорная информация о принадлежности решения ρ-шару пространства $W^{m,2}$, погрешность метода измеряется по норме L^2, и правая часть уравнения дана с δ-погрешностью по норме L^2. В рассматриваемом случае $J = L^{-1}$, где L – дифференциальный оператор $Lu = (-1)^m u^{(2m)} + u$ с краевыми условиями $u^{(j)}(a) = u^{(j)}(b) = 0$, $j = m, \ldots, 2m-1$. Изучаемый выше вариант метода Тихонова примет вид $(\alpha L + A^T A)u = A^T f_\delta$, $u^{(j)}(a) = u^{(j)}(b) = 0$, $j = m, \ldots, 2m-1$,

где $A^T \in \mathcal{L}(L^2(c,d), L^2(a,b))$ – сопряженный к A, рассматриваемому как оператор из $L^2(a,b)$ в $L^2(c,d)$. Если

$$(Au)(t) = \int_a^b \mathcal{K}(t,s)u(s)\,ds \quad (c \le t \le d),$$

то

$$(A^T z)(s) = \int_c^d \overline{\mathcal{K}(t,s)}\, z(t)\,dt \quad (a \le s \le b).$$

Литература

1. А г е е в А.Л. К вопросу о построении оптимального метода решения линейного уравнения I-ого рода. Изв. высш. учебн. завед. Математика, 1983, № 3, 67-68.
2. В а й н и к к о Г. Методы решения линейных некорректно поставленных задач в гильбертовых пространствах. Тарту, ТГУ, 1982.
3. В а й н и к к о Г. О понятии оптимальности приближенных методов решения некорректных задач. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1985, вып. 715, 3-11.
4. И в а н о в В.К., В а с и н В.В., Т а н а н а В.П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. Москва, Наука, 1978.
5. M e l k m a n, A.A., M i c c h e l l i, C.A. Optimal estimation of linear operators in Hilbert spaces from inaccurate data. SIAM J. Numer. Anal., 1979, 16, №1, 87-105.

Поступило
3 III 1986

ON THE OPTIMAL CHOICE OF REGULARIZATION PARAMETER IN THE TIKHONOV METHOD

G. Vainikko

Summary

Let H, F, E be Hilbert spaces, $H \subset E$ compactly. Consider equation (1) with $A \in \mathcal{L}(H, F)$ and the Tikhonov method $u_\alpha = (\alpha I + A^*A)^{-1} A^* f_\delta$ with $\|f_\delta - f\| \le \delta$. The error of u_α is estimated in the norm of E. We discuss the algorithm of the optimal choice of $\alpha = \alpha(\delta, E, \rho)$ provided that the exact solution $u \in \mathcal{M}_\rho = \{v \in H : \|v\|_H \le \rho\}, \rho > 0$. This algorithm is formulated in section 4.

Уч.зап.Тартуск.ун-та,1986,762,9-15.

О СХОДИМОСТИ МЕТОДА ТИХОНОВА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ НА КЛАССЕ ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИИ

Э.Вайникко

Изучается сходимость метода А.Н.Тихонова для нелинейных некорректных задач. Предполагается, что задача имеет точное решение ограниченной вариации; в качестве стабилизирующего функционала [4] привлекается полная вариация функции. Устанавливается сходимость тихоновских приближений по норме L^p, а в случае непрерывного точного решения - равномерная сходимость. Доказательство (§ 2) базируется на теореме Хелли и одном достаточном условии равномерной сходимости функций ограниченной вариаций (§ I). Усиливаются результаты [I].

В [2, 5] теорема Хелли использовалось для обоснования сходимости некоторых других методов регуляризации на компакте монотонных функций.

§ I. Равномерная сходимость функций ограниченной вариации

Через

$$V_a^b[u] = \sup\sum_{k=1}^{n} |u(t_k)-u(t_{k-1})| ,$$

как обычно, обозначаем полную вариацию функции $u:[a,b]\to\mathbb{R}$ (верхняя грань берется по всевозможным разбиениям отрезка $[a,b]$ точками $a=t_0<t_1<\ldots<t_n=b$, $n=1,2,\ldots$). Нетрудно доказать следующее свойство полной вариации: если u и u_n $(n=1,2,\ldots)$ имеют ограниченную вариацию и $u_n(t)\to u(t)$ при $n\to\infty$ для каждого $t\in[a,b]$, то

$$V_a^b[u] \le \lim_{n\to\infty} V_a^b[u_n] . \qquad (I)$$

В дальнейшем важную роль играет теорема Хелли (см. [3], гл. УI, § 6.5): если

$$\sup_{a\le t\le b} |u_n(t)| \le c_0 = const;\ V_a^b[u_n] \le c_1 = const \quad (n=1,2,\ldots),$$

то последовательность u_n содержит подпоследовательность, сходящуюся в каждой точке отрезка $[a,b]$.

Нас интересует вопрос о равномерной сходимости. Обозначим

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_{c_0,c_1} = \{u : |u(t)|\le c_0 ,\ V_a^b[u]\le c_1\} . \qquad (2)$$

Лемма I. Пусть функции $u_n \in \mathcal{M}$ $(n=1,2,\dots)$ монотонно возрастающие, $u_n(t)\to u(t)$ при каждом $t\in[a,b]$, причем предельная функция u непрерывна на $[a,b]$. Тогда $\sup_{a\le t\le b}|u_n(t)-u(t)|\to 0$ при $n\to\infty$.

Доказательство. Из непрерывности функции u получим, что для любого $\varepsilon>0$ найдется разбиение отрезка $[a,b]$ точками $a=t_0<t_1<\dots<t_m=b$, $|t_{k+1}-t_k|<\delta_\varepsilon$ так что

$$|u(t_{k+1})-u(t_k)|<\varepsilon. \tag{3}$$

При достаточно большом $n_0>0$ для всех $n>n_0$ имеем также

$$|u_n(t_k)-u(t_k)|<\varepsilon\ ,\quad k=0,\dots,m.$$

Возмем произвольную точку t' из произвольного отрезка $[t_k,t_{k+1}]$. Учитывая (3) получим, что

$$|u_n(t_k)-u_n(t_{k+1})|<3\varepsilon\ ,\quad n>n_0.$$

В силу монотонности

$$u_n(t_k)\le u_n(t')\le u_n(t_{k+1}),$$

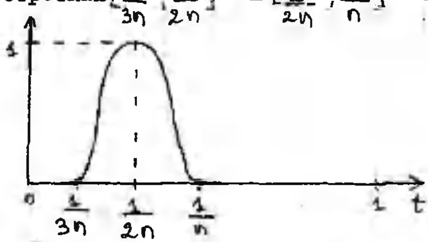
$$u(t_k)\le u(t')\le u(t_{k+1}),$$

откуда получим оценку

$$|u(t')-u_n(t')|\le 5\varepsilon,\quad n>n_0.$$

Ввиду поизвольности ε и $t'\in[a,b]$, приходим к утверждению леммы. Лемма I доказана; использовались детали рассуждений из [2], гл. УI, § 6.5.

Замечание I. Если требование монотонности отбросить то утверждение леммы I не справедливо. Приведем соответствующий пример. Рассмотрим непрерывную функцию u_n на отрезке $[0,1]$ с носителем $\operatorname{supp}(u_n)\subset\left(\frac{1}{3n},\frac{1}{n}\right)$, такую, что $\max_{0\le t\le 1}u_n(t)=u_n\left(\frac{1}{2n}\right)=1$, причем на отрезках $\left[\frac{1}{3n},\frac{1}{2n}\right]$ и $\left[\frac{1}{2n},\frac{1}{n}\right]$ она монотонная. Ясно, что $u_n(t)\to 0$ при всех $t\in[0,1]$, $V_0^1[u_n]=2$, но $\max_{0\le t\le 1}|u_n|=1$. В этом примере $V_0^1[u_n]$ не сходится к $V_0^1[u]$.



Теорема I. Пусть $u_n\in\mathcal{M}$ $(n=1,2,\dots)$, $u_n(t)\to u(t)$ для всех $t\in[a,b]$, $V_a^b[u_n]\to V_a^b[u]$ при $n\to\infty$, причем предельная функция u непрерывна на $[a,b]$. Тогда $\sup\limits_{a\le t\le b}|u_n(t)-$ $-u(t)|\to 0$ при $n\to\infty$.

Доказательство. Сперва убедимся, что

$$V_a^t[u_n]\to V_a^t[u] \quad \text{при } n\to\infty \ \forall t\in[a,b]. \tag{4}$$

Допустим противоположно утверждению, что в некой точке $t'\in[a,b]$ такой сходимости нет. Из поточечной сходимости $u_n(t)\to u(t)$ и (I), тогда получим, что

$$V_a^{t'}[u] < \varliminf_{n\to\infty} V_a^{t'}[u_n]. \tag{5}$$

Учитывая, что $V_a^b[f]=V_a^{t'}[f]+V_{t'}^b[f]$, имеем

$$V_a^{t'}[u_n]+V_{t'}^b[u_n]\to V_a^{t'}[u]+V_{t'}^b[u].$$

Из неравенства (5) теперь получим

$$\varlimsup_{n\to\infty} V_{t'}^b[u_n]<V_{t'}^b[u],$$

что противоречит свойству (I). Итак (4) имеет место.

Представим u_n и u в виде

$$u_n(t)=V_a^t[u_n]-\vartheta_n(t),$$
$$u(t)=V_a^t[u]-\vartheta(t).$$

Здесь функции $V_a^t[u_n]$, $V_a^t[u]$, $\vartheta_n(t)$, $\vartheta(t)$ монотонно возрастающие. Из непрерывности $u(t)$ получим что и $V_a^t[u]$ непрерывна (см. [3], гл. УI, § 2), а следовательно непрерывна и функция $\vartheta(t)$. Из леммы I теперь вытекает, что имеют место равномерные сходимости $V_a^t(u_n)\to V_a^t[u]$ и $\vartheta_n(t)\to$ $\to\vartheta(t)$, следовательно и равномерная сходимость $u_n(t)\to$ $\to u(t)$. Теорема I доказана.

В [I] близкий результат установлен при условии абсолютной непрерывности u.

Замечание 2. Сохранив остальные условия теоремы I, ослабим условие о непрерывности предельной функций: пусть она непрерывна на некотором подотрезке $[a',b']\subset[a,b]$. Тогда соответственно ослабится утверждение теоремы: $u_n(t)\to u(t)$ равномерно на отрезке $[a',b']$ при $n\to\infty$.

§ 2. Теоремы сходимости метода Тихонова

Рассмотрим задачу

$$Au=f, \tag{6}$$

где оператор A действует и непрерывен из $E=L^p(a,b)$ $(1\le p<\infty)$ в некоторое банахово пространство F. Введем множество V функций ограниченной вариации. Ясно, что $V \subset L^p(a,b)$. Пусть нам вместо A и f известны соответствующие приближении A_η и f_δ, где

$$\|f_\delta - f\| \le \delta, \tag{7}$$

$A_\eta : L^p(a,b) \to F$ являются непрерывными и

$$\|A_\eta u - Au\| \le \eta \psi(\|u\|_*) \quad \forall u \in V. \tag{8}$$

Здесь функция $\psi(t) > 0$ монотонно возрастающая,

$$\|u\|_* = |u(a)| + V_a^b[u].$$

Найдем приближенное решение u_α задачи (6) методом А.Н.Тихонова определив его как приближенную точку минимума сглаживающего функционала

$$\Phi_\alpha(u) = \|A_\eta u - f_\delta\|^2 + \alpha \|u\|_*^2, \quad u \in V, \tag{9}$$

где $0 < \alpha \in \mathbb{R}$ – малый параметр.

<u>Теорема 2</u>. Пусть уравнение (6) однозначно разрешимо, причем решение $u_0 \in V$. Пусть выполнены условия (7), (8) и $u_\alpha \in V$ – произвольная точка, для которой

$$\Phi_\alpha(u_\alpha) \le b \inf_{u \in V} \Phi_\alpha(u), \quad b = const \ge 1. \tag{10}$$

Пусть

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha = \alpha(\delta,\eta) \to 0 & \text{при } \delta,\eta \to 0, \\ \dfrac{(\delta+\eta)^2}{\alpha} & \text{ограничена при } \delta,\eta \to 0. \end{array}\right. \tag{11}$$

Тогда $\|u_\alpha - u_0\|_{L^p(a,b)} \to 0$ при $\delta,\eta \to 0$.

<u>Доказательство</u>. Так как $u_0 \in V$, то из (10) получим

$$\|A_\eta u_\alpha - f_\delta\|^2 + \alpha\|u_\alpha\|_*^2 \le b[\|A_\eta u_0 - f_\delta\|^2 + \alpha\|u_0\|_*^2]. \tag{12}$$

Из (7) и (8) вытекает, что

$$\|A_\eta u_0 - f_\delta\| \le \delta + c_*\eta, \quad c_* = \psi(\|u_0\|_*),$$

и (12) принимает вид:

$$\|A_\eta u_\alpha - f_\delta\|^2 + \alpha\|u_\alpha\|_*^2 \le b[(\delta + c_*\eta)^2 + \alpha\|u_0\|_*^2]. \tag{13}$$

Отсюда и из (11) видно, что при $\delta,\eta \to 0$ имеем

$$\|A_\eta u_\alpha - f_\delta\| \to 0. \tag{14}$$

Из (13) следует также, что

$$\|u_\alpha\|_*^2 \le \frac{b(\delta + c_*\eta)^2}{\alpha} + b\|u_0\|_*^2.$$

Из последнего неравенства получим, что $|u_\alpha(a)|$ и $V_a^b[u_\alpha]$ равномерно по α ограничены, поэтому $u_\alpha \in \mathcal{M}$ (см. (2)).

Покажем, что u_α сходится к функции u_0 при $\delta,\eta \to 0$. Достаточно показать, что для любых последовательностей δ_n и η_n, сходящихся к нулю, $\|u_{\alpha_n} - u_0\|_{L^p(a,b)} \to 0$, где $\alpha_n = \alpha(\delta_n, \eta_n)$. Предположим противоположно утверждению, что найдется подпоследовательность $(u_{\alpha_n})_{n\in N'\subset \mathbb{N}}$, для которой

$$\|u_{\alpha_n} - u_0\|_{L^p(a,b)} \geqslant \varepsilon_0 > 0, \quad n \in N'. \tag{I5}$$

По теореме Хелли из этой последовательности можно извлечь подпоследовательность, такую что $u_{\alpha_n}(t) \to u'(t)$, $n\in N''\subset N'$, для каждой $t\in[a,b]$, где $u'\in M$. По теореме Лебега та же последовательность сходится к тому же пределу и в пространстве $L^p(a,b)$. Из непрерывности оператора A следует, что $Au_{\alpha_n} \to Au'$, $n\in N''$, и из (I4) теперь получим, что $Au'=f$, следовательно $u'=u_0$. Это противоречит (I5). Теорема 2 доказана.

Наш основной результат заключается в следующем.

Теорема 3. Пусть уравнение (6) однозначно разрешимо, причем решение u_0 непрерывно на $[a,b]$ и имеет ограниченную вавариацию. Пусть выполнены условия (7), (8) и следующие условия: $u_\alpha\in V$ произвольная точка, для которой

$$\Phi_\alpha(u_\alpha) \leq b_\alpha \inf_{u\in V} \Phi_\alpha(u), \quad b_\alpha \geqslant 1, \quad b_\alpha \to 1 \quad \text{при } \alpha\to 0.$$

Пусть $\alpha=\alpha(\delta,\eta)$ и $\frac{(\delta+\eta)^2}{\alpha}$ сходятся к нулю при $\delta,\eta\to 0$. Тогда $\sup_{a\leq t\leq b} |u_{\alpha(\delta,\eta)}(t) - u_0(t)| \to 0$ при $\delta,\eta\to 0$.

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы I имеем

$$\|u_\alpha\|_*^2 \leq b_\alpha \frac{(\delta+c_3\eta)^2}{\alpha} + b_\alpha\|u_0\|_*^2. \tag{I6}$$

Так как по условию $b_\alpha\to 1$ и $\frac{(\delta+\eta)^2}{\alpha}\to 0$ при $\delta,\eta\to 0$, то из (I6) следует что

$$\overline{\lim_{\delta,\eta\to 0}} \|u_\alpha\|_*^2 \leq \|u_0\|_*^2.$$

Покажем, что

$$\lim_{\delta,\eta\to 0} \|u_\alpha\|_*^2 = \|u_0\|_*^2. \tag{I7}$$

Предположим противоположно утверждению, что найдутся последовательности, для которых $\delta_n\to 0$, $\eta_n\to 0$, $\alpha_n=\alpha(\delta_n,\eta_n)\to 0$,

$$\lim_{\delta_n,\eta_n\to 0} \|u_{\alpha_n}\|_*^2 < \|u_0\|_*^2, \quad n\in \mathbb{N}. \tag{I8}$$

По теореме Хелли найдется последовательность $(u_{\alpha_n})_{n \in N' \subset N}$, которая поточечно сходится к некоторой функции u'. В доказательстве предыдущей теоремы мы убедились, что $u' = u_0$. Из свойств нижней грани и из (I) следует, что

$$\lim_{\delta_n, \eta_n \to 0} \|u_{\alpha_n}\|_*^2 \geq \left[\lim_{\delta_n, \eta_n \to 0} |u_{\alpha_n}(a)| + \lim_{\delta_n, \eta_n \to 0} V_a^b[u_{\alpha_n}] \right]^2 \geq$$
$$\geq \|u_0\|_*^2 ,$$

что противоречит (I8) и доказывает (I7). Теперь утверждение теоремы о равномерной сходимости $u_{\alpha(\delta,\eta)} \to u_0$ следует из теоремы I. Теорема 3 доказана.

Теорема 3 усиливает близкий результат работы [I], в которой оператор A считается заданным точно и предполагается абсолютная непрерывность решения u_0.

<u>Замечание 3</u>. Сохранив остальные условия теоремы 3, ослабим условие о непрерывности решения уравнения (6): пусть оно непрерывно на некотором подотрезке $[a', b'] \subset [a, b]$. Тогда соответственно ослабится утверждение теоремы:

$$\sup_{a' \leq t \leq b'} |u_{\alpha(\delta,\eta)}(t) - u_0(t)| \to 0 \quad \text{при } \delta, \eta \to 0.$$

<u>Замечание 4</u>. Теорема I позволяет установить равномерную сходимость и некоторых других методов регуляризации вариационного типа, например, метода невязки, в котором в качестве стабилизирующего функционала привлекается $\Omega(u) = |u(a)| + V_a^b[u]$.

Литература

I. А г е е в А.Л. Регуляризация нелинейных операторных уравнений на классе разрывных функций. Ж. вычисл. мат. и мат. физ., I980, 20, № 4, 8I9-826.

2. Г о н ч а р с к и й А.В., Я г о л а А.Г. О равномерном приближении монотонного решения некорректных задач. Докл. АН СССР, I969, I84, № 4. 77I-773.

3. К о л м о г о р о в А.Н., Ф о м и н С.В. Элементы теории функций и функционального анализа, М., Наука, I98I.

4. Т и х о н о в А.Н., А р с е н и н В.Я. Методы решения некорректных задач. М., Наука, I979.

5. Т и х о н о в А.Н., Г о н ч а р с к и й А.В., С т е п а н о в В.В., Я г о л а А.Г. Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация. М., Наука, 1983.

Поступило
15 XI 1985

ON THE CONVERGENCE OF TIKHONOV'S METHOD FOR NONLINEAR ILL-POSED PROBLEMS ON THE CLASS OF FUNCTIONS OF BOUNDED VARIATION

E. Vainikko

Summary

This paper deals with the Tikhonov's regularization method for nonlinear ill-posed problems. The conditions for the uniform convergence of the method of minimizing the Tikhonov's functional in the form (9) are given on the class of functions of bounded variation. It appears that the following condition is decisive: the solution u_0 of problem (6) exists, is unique, continuous and is with bounded variation. The main result is contained in Theorem 3.

Уч.зап.Тартуск.ун-та,1986,762,16-30.

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА I РОДА, РАВНОСИЛЬНОГО УРАВНЕНИЮ III РОДА

Я. Янно

Изучается класс интегральных уравнений Вольтерра I рода, возникающих в теории обратных задач для наследственной среды. Основные свойства ядра таковы, что изучаемое интегральное уравнение равносильно уравнению Вольтерра III рода. Предлагается сохраняющий вольтерровость метод регуляризации, доказывается его сходимость, оценивается погрешность.

I. <u>Введение</u>. Рассмотрим уравнение Вольтерра I рода

$$\int_0^t G(t,s)u(s)ds = f(t), \quad t \in [0,T], \tag{I}$$

в котором

a) $\begin{cases} f \in C^n[0,T], \ f(0)=f'(0)=\ldots=f^{(n-1)}(0)=0, \ n \geq 1; \\ G(t,s) \text{ как функция от } t \text{ при } 0 \leq s \leq t \leq T \text{ абсолютно непре-} \\ \quad \text{рывна вместе с производными} \\ \frac{\partial^i}{\partial t^i} G(t,s) = G_i(t,s), \ 0 \leq i \leq n-1; \\ G_i(t,t) \equiv 0, \ 0 \leq i \leq n-2 \ (\text{если } n>1), \\ G_{n-1}(t,t) = \varkappa t, \ t \in [0,T], \ \varkappa > 0, \\ G_n(t,s) = s\psi_1(t-s) + \psi_2(t,s) - \varkappa, \ t \in [0,T], \ s \in [0,t], \\ \text{где } \psi_1 \text{ - интегрируемая (в смысле Лебега), } \psi_2 \text{ - непре-} \\ \text{рывная функции и } \psi_2(0,0)=0. \end{cases}$

Отсюда видно, что (I) равносильно уравнению III рода

$$\varkappa t u(t) + \int_0^t G_n(t,s)u(s)ds = f^{(n)}(t).$$

Уравнение типа (I) возникает (см. [9]) при решении обратной задачи наследственной среды, состоящей в определении функции K из условий (см. [8])

$$\left.\begin{aligned} &u_{tt}(x,t) + \int_0^t K(t-s)u_{tt}(x,s)ds = a^2 u_{xx}(x,t), \quad 0 \leq x,t < \infty, \\ &u(x,0) = u_t(x,0) = 0, \quad u_x(0,t) = \varphi_0(t), \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$u_x(l,t) = \varphi_l(t), \quad 0 \leq t < \infty \tag{2'}$$

В [9] эта задача при некоторых предположениях о φ_0, $\mathcal{K}$, а также о $\mathcal{K}_1$ $\left(\mathcal{K}_1(t)+\frac{1}{4}\mathcal{K}_1*\mathcal{K}_1(t)=\mathcal{K}(t)\right)$ была сведена к уравнению Вольтерра для определения вспомогательной функции $\mathcal{K}_1$:

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^t G(t,s)\,\mathcal{K}_1(s)\,ds=f(t),\quad 0\le t<\infty,\\
&G(t,s)=\int_{l/a}^{t+l/a-s}\left(s\varphi_0'(t+l/a-s-\tau)\,\varphi_l(\tau)-\varphi_0(t+l/a-s-\tau)\,\varphi_l(\tau)\right)d\tau,\\
&f(t)=\int_{l/a}^{t+l/a}\frac{2a}{l}\left(t-2s+\frac{2l}{a}\right)\varphi_0(t+l/a-s)\,\varphi_l(s)\,ds.
\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

В первой половине данной статьи мы докажем выполнение условий а) для указанных в (3) G и f.

Регуляризация уравнения Вольтерра I рода хорошо изучена для случая $G_i(t,t)\equiv 0$, $0\le i\le n-2$, $G_{n-1}(t,t)\ne 0$. Тогда можно использовать специально подобранные уравнения второго рода (см. [6, 7]) или методы квадратурных формул (см. [I]). Более общий случай, когда $G(t,s)$ имеет положительные характеристические числа, рассмотрен в [2] и получена сходимость метода Лаврентьева в L_2 -норме. В работе [5] доказана сходимость метода Лаврентьева в предположении, что $G(t,t)$ имеет нули конечного порядка в точках $t=0$, $t=T$ и уравнение первого рода равносильно уравнению второго рода с ограниченным ядром. Наш случай не подчиняется ни одному из ранее исследованных и требует отдельного изучения. Этим вопросам посвящена вторая половина статьи.

2. <u>Выполнение условий а)</u>. При сведении задачи (2), (2') к интегральному уравнению в [9] в частности требовалось, чтобы $\mathcal{K}$ была непрерывной, положительной, монотонно убывающей и выпуклой на $(0,\infty)$, $\mathcal{K}_1$ непрерывной, положительной на $(0,\infty)$, кроме того

$$\int_0^\infty \mathcal{K}(t)\,dt<\infty,\quad \int_0^\infty \mathcal{K}_1(t)\,dt<\infty.$$

<u>Теорема I</u>. Пусть выполнены отмеченные условия о $\mathcal{K}$ и $\mathcal{K}_1$. Кроме того, пусть $\mathcal{K}_1(0)<\infty$ и $\mathcal{K}_1'(t)$ локально интегрируема на $[0,\infty)$. Пусть $\varphi_0\in C^{m+3}[0,\infty)$, $m\ge 1$, существует производная $\varphi_0^{(m+4)}(t)$, несобственный интеграл, определяющий преобразование Лапласа сходится абсолютно для функций $\varphi_0^{(i)}(t)$, $0\le i\le m+4$, и $\varphi_0^{(i)}(0)=0$, $0\le i\le m$, $\varphi_0^{(m+1)}(0)=\alpha$.

Тогда $\varphi_l(t)=u_x(l,t)$, где $u(x,t)$ -решение прямой задачи (2), имеет следующие свойства:

$$\varphi_\ell \in C^m[0,\infty) \cap C^{m+1}[\ell/a,\infty) \cap W^{m+2}_{1,loc}[\ell/a,\infty),$$
$$\varphi_\ell^{(i)}(t) = 0, \quad 0 \le t \le \ell/a, \quad 0 \le i \le m,$$
$$\varphi_\ell^{(m+1)}(\ell/a+0) = \alpha \exp\left(-\frac{\ell}{2a}K_1(0)\right).$$

Доказательство. Обозначим $\varphi_0^{(m+2)}(0) = \bar\alpha$ и $\varphi_0(t) = \psi_0(t) + \chi_0(t)$, где $\chi_0(t) = \frac{\alpha t^{m+1}}{(m+1)!} + \frac{\bar\alpha t^{m+2}}{(m+2)!}$.

Пусть производные по x решения прямой задачи (2) в точке $x=\ell$ с граничными значениями ψ_0 и χ_0 (вместо φ_0) будут соответственно ψ_ℓ и χ_ℓ. Тогда $\varphi_\ell(t) = \psi_\ell(t) + \chi_\ell(t)$. Связь между изображениями Лапласа функций $\varphi_0, \varphi_\ell, K_1$ следующая (см. [9]):

$$\varphi_\ell^L(p) = \varphi_0^L(p)\exp\left(-\frac{p\ell}{a}\left(\frac{1}{2}K_1^L(p)+1\right)\right), \quad Re\,p > \sigma_0.$$

Очевидно,

$$\psi_\ell^L(p) = \psi_0^L(p)\exp\left(-\frac{p\ell}{a}\left(\frac{1}{2}K_1^L(p)+1\right)\right), \quad Re\,p > \sigma_0,$$

$$\chi_\ell^L(p) = \left(\frac{\alpha}{p^{m+2}} + \frac{\bar\alpha}{p^{m+3}}\right)\exp\left(-\frac{p\ell}{a}\left(\frac{1}{2}K_1^L(p)+1\right)\right), \quad Re\,p > \sigma_0.$$

Для функции $\psi_0^{(i)}(t)$, $0 \le i \le m+4$, интеграл Лапласа сходится абсолютно и $\psi_0(0) = \psi_0'(0) = \ldots = \psi_0^{(m+2)}(0) = 0$. Эти свойства дают оценку $|\psi_0^L(p)| \le c\,|p|^{-(m+4)}$, $Re\,p > \sigma_0$. Поскольку

$Re\left(\frac{p\ell}{a}\cdot\frac{1}{2}K_1^L(p)\right) \ge 0$, $Re\,p > \sigma_0$ (см. [9]),

то

$$\left|\psi_\ell^L(p) e^{\frac{p\ell}{a}}\right| \le c\,|p|^{-(m+4)}, \quad Re\,p > \sigma_0.$$

Воспользуемся хорошо известным достаточным условием существования обратного преобразования Лапласа: если $|f(p)| < C|p|^{-\nu}$, $\nu > 1$, $Re\,p > \sigma_0$, $f(p)$ – аналитична, то существует $\mathcal{L}^{-1}(f(p))$, она непрерывна и $\mathcal{L}^{-1}(f(p))\big|_{t=0} = 0$. При помощи этого условия убедимся что

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\psi_\ell^L(p) e^{\frac{p\ell}{a}}\right) = \psi_\ell(\ell/a + t) \in C^{m+2}[0,\infty),$$

$$\psi_\ell(\ell/a+0) = \psi_\ell'(\ell/a+0) = \ldots = \psi_\ell^{(m+2)}(\ell/a+0) = 0.$$

(аналитичность $\psi_\ell^L(p)e^{\frac{p\ell}{a}}$ вытекает из аналитичности ψ_0^L, K_1^L).
Аналогично получим

$$\chi_\ell(\ell/a+t) \in C^m[0,\infty), \quad \chi_\ell(\ell/a+0) = \chi_\ell'(\ell/a+0) = \ldots = \chi_\ell^{(m)}(\ell/a+0) = 0.$$

Нас интересует

$$\mathcal{X}_\ell^{(m+1)}(\ell/a+t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\left(\frac{\alpha}{p}+\frac{\bar\alpha}{p^2}\right)\exp\left(-\frac{p\ell}{2a}K_1^L(p)\right)\right).$$

Перепишем соответствующее изображение в форме

$$\left(\frac{\alpha}{p}+\frac{\bar\alpha}{p^2}\right)\exp\left(-\frac{p\ell}{2a}K_1^L(p)\right) = \left(\frac{\alpha}{p}+\frac{\bar\alpha}{p^2}\right)\exp\left(-\frac{\ell}{2a}K_1(0)\right)+$$

$$+\left(\frac{\alpha}{p}+\frac{\bar\alpha}{p^2}\right)\left(\exp\left(-\frac{\ell}{2a}\left(pK_1^L(p)-K_1(0)\right)\right)-1\right).$$

Из равенства $K_1(t)+\frac{1}{4}K_1*K_1(t)=K(t)$ получим

$$K_1'(t)+\frac{1}{4}\int_0^t K_1'(t-s)K_1(s)ds = K'(t)-\frac{1}{4}K_1(0)K_1(t),$$

$$|K_1'(t)| \le \frac{1}{4}\int_0^t |K_1'(t-s)|K_1(s)ds + |K'(t)| + \frac{1}{4}K_1(0)K_1(t).$$

Умножая на $e^{-\sigma t}$ с достаточно большим σ: $\left(\frac{1}{4}\int_0^\infty K_1(t)e^{-\sigma t}dt<1\right)$ и интегрируя, получим

$$\int_0^\infty |K_1'(t)|e^{-\sigma t}dt \le \left(1-\frac{1}{4}\int_0^\infty K_1(t)e^{-\sigma t}dt\right)^{-1}\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{1}{4}K_1(0)\int_0^\infty K_1(t)dt + K_1(0)\right)<\infty.$$

Итак, преобразование Лапласа от $K_1'(t)$ при $\mathrm{Re}\,p>\sigma$ сходится абсолютно. Мы имеем $\mathcal{L}(K_1'(t)) = pK_1^L(p)-K_1(0)$. Так как $\exp\left(-\frac{\ell}{2a}z\right)-1$ аналитична относительно z и $\left(\exp\left(-\frac{\ell}{2a}z\right)-1\right)\big|_{z=0}=0$, то по теореме 3 из [4], стр. 36,

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\exp\left(-\frac{\ell}{2a}\left(pK_1^L(p)-K_1(0)\right)\right)-1\right)$$

существует и соответствующий несобственный интеграл сходится абсолютно при $\mathrm{Re}\,p>\sigma$. Обозначим этот оригинал через $g(\tau)$. Следовательно,

$$\mathcal{X}_\ell^{(m+1)}(t+\ell/a) = (\alpha+\bar\alpha t)\exp\left(-\frac{\ell}{2a}K_1(0)\right)+\exp\left(-\frac{\ell}{2a}K_1(0)\right)\cdot$$

$$\cdot\left(\alpha\int_0^t g(s)ds+\bar\alpha\int_0^t\int_0^s g(\tau)d\tau ds\right).$$

Как видно,

$$\mathcal{X}_\ell^{(m+1)}(t+\ell/a)\in C[0,\infty), \quad \mathcal{X}_\ell^{(m+1)}(\ell/a+0)=\alpha\exp\left(-\frac{\ell}{2a}K_1(0)\right),$$

$\mathcal{X}_\ell^{(m+2)}(\ell/a+t)$ локально интегрируема.

Равенство $\varphi_\ell(t)=0,\ t<\ell/a$ показано в [10], и тем самым теорема доказана.

Теперь покажем, что в предположениях теоремы I выполнены условия а) с $n=2m+3$ для G и f из (3). Взяв от $G(t,s)$ производную порядка $2m+1$ по t, получим

$$G_{2m+1}(t,s)=\int_{\ell/a}^{t+\ell/a-s}\left(s\varphi_0^{(m+1)}(t+\ell/a-s-\tau)\varphi_\ell^{(m+1)}(\tau)-\varphi_0^{(m)}(t+\ell/a-s-\tau)\varphi_\ell^{(m+1)}(\tau)\right)d\tau,$$

откуда видно, что $G_{2m+1}(t,t)\equiv 0$. То же самое имеет место и для промежуточных производных. Производная порядка $2m+2$ будет следующая:

$$G_{2m+2}(t,s)=s\varphi_0^{(m+1)}(0)\varphi_\ell^{(m+1)}(\ell/a+t-s)+\int_{\ell/a}^{t+\ell/a-s}\left(s\varphi_0^{(m+2)}(t+\ell/a-s-\tau)\cdot\right.$$

$$\left.\varphi_\ell^{(m+1)}(\tau)-\varphi_0^{(m+1)}(t+\ell/a-s-\tau)\varphi_\ell^{(m+1)}(\tau)\right)d\tau,$$

$$G_{2m+2}(t,t)=\alpha^2\exp\left(-\tfrac{\ell}{2a}K_1(0)\right)\cdot t=\varkappa t,\quad \varkappa=\alpha^2\exp\left(-\tfrac{\ell}{2a}K_1(0)\right).$$

Производная порядка $2m+3$ имеет вид

$$G_{2m+3}(t,s)=s\varphi_0^{(m+1)}(0)\varphi_\ell^{(m+2)}(\ell/a+t-s)+s\varphi_0^{(m+2)}(0)\varphi_\ell^{(m+1)}(\ell/a+t-s)-$$

$$-\varphi_0^{(m+1)}(0)\varphi_\ell^{(m+1)}(t+\ell/a-s)+\int_{\ell/a}^{t+\ell/a-s}\left(s\varphi_0^{(m+3)}(t+\ell/a-s-\tau)\varphi_\ell^{(m+1)}(\tau)-\right.$$

$$\left.-\varphi_0^{(m+2)}(t+\ell/a-s-\tau)\varphi_\ell^{(m+1)}(\tau)\right)d\tau,$$

и легко убедимся, что

$$G_{2m+3}(t,s)=s\psi_1(t-s)+\psi_2(t,s)-\varkappa,\quad t\in[0,T],\ s\in[0,t],$$

где ψ_1 – интегрируема, ψ_2 – непрерывна и $\psi_2(0,0)=0$. Взяв производные до порядка $2m+3$ от $f(t)$, непосредственно видим, что выполнены и соответствующие условия для $f(t)$.

3. Регуляризация уравнения (I).

Лемма. Пусть уравнение (I) имеет ограниченное решение, которое непрерывно в точке $t=0$, и пусть выполнены условия а). Тогда

$$\frac{f^{(n)}(t)}{t}\to 0 \quad \text{при} \quad t\to 0.$$

Доказательство. Из уравнения (I) получим

$$u(t)-\frac{1}{t}\int_0^t u(s)ds+\frac{1}{\varkappa t}\int_0^t\left(G_n(t,s)+\varkappa\right)u(s)ds=\frac{1}{\varkappa t}f^{(n)}(t).$$

Оценим это выражение:

$$\left|\frac{f^{(n)}(t)}{\varkappa t}\right|\le|u(t)-u(\xi)|+\|u\|_t\cdot\frac{1}{\varkappa t}\int_0^t\left(s|\psi_1(t-s)|+|\psi_2(t,s)|\right)ds\le$$

$$\le|u(t)-u(\xi)|+\frac{1}{\varkappa}\|u\|_t\left(\int_0^t|\psi_1(s)|ds+\max_{0\le s\le t}|\psi_2(t,s)|\right)\to 0$$

при $t\to 0$. Здесь $\xi\in[0,t]$ и $\|u\|_t=\max_{0\le s\le t}|u(s)|$.

Лемма доказана.

Следовательно, сходимость $\frac{1}{t} f^{(m)}(t) \to 0$ при $t \to 0$ необходима для существования непрерывного на $[0,T]$ решения уравнения (I). Усилим некоторые условия из а) следующим образом:

б) $\int_0^t |\psi_1(s)|ds \le c\,t^{\beta}$, $|\psi_2(t,s)| \le c\,t^{\beta}$, $\beta > 0$.

Теорема 2. Пусть выполнены условия а) и б). Пусть также $\left|\frac{1}{t} f^{(n)}(t)\right| \le c\,t^{\beta}$. Тогда уравнение (I) имеет непрерывное на $[0,T]$ решение $u_0(t)$ такое, что $|u_0(t)| \le \bar{C}(\beta, \psi_1, \varkappa)\, t^{\beta}$. Это решение единственно в классе непрерывных функций, удовлетворяющих условию $u_0(0) = 0$.

Доказательство. Уравнение (I) равносильно уравнению

$$u(t) - \frac{1}{t}\int_0^t u(s)ds = \frac{f^{(n)}(t)}{\varkappa t} - \frac{1}{\varkappa t}\int_0^t (G_n(t,s)+\varkappa)u(s)ds.$$

Решая его относительно левой стороны, получим однопараметрическое семейство уравнений, равносильное (I):

$$\left.\begin{aligned} &u(t) + \int_0^t H(t,s)u(s)ds = \frac{1}{\varkappa t} f^{(n)}(t) + \int_0^t \frac{1}{\varkappa s^2} f^{(n)}(s)ds + \theta, \\ &\theta \in \mathbb{R},\ H(t,s) = \frac{1}{\varkappa t}(\varkappa + G_n(t,s)) + \int_s^t \frac{1}{\varkappa \tau^2}(\varkappa + G_n(\tau,s))d\tau. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Сначала рассмотрим случай $0<\beta<1$. С помощью а) и б) имеем

$$H(t,s) = \frac{s}{\varkappa t}\psi_1(t-s) + \bar{H}(t,s),$$

$$\bar{H}(t,s) = \int_s^t \frac{1}{\varkappa \tau^2}(s\,\psi_1(\tau-s) + \psi_2(\tau,s))d\tau + \frac{1}{\varkappa t}\psi_2(t,s),$$

$$|\bar{H}(t,s)| \le \frac{2c}{\varkappa}\,\frac{2-\beta}{1-\beta}\, s^{\beta-1}.$$

Исследуем разрешимость уравнения

$$v(t) + \int_0^t \frac{s}{\varkappa t}\psi_1(t-s)v(s)ds = h(t), \qquad (5)$$

где h – любая интегрируемая функция. Его единственное решение представляется формулой

$$v(t) = h(t) + \int_0^t \frac{s}{\varkappa t}\left(-\psi_1(t-s) + \psi_1 * \psi_1(t-s) - \dots\right)h(s)ds, \qquad (5')$$

если только подинтегральные свертки существуют и ряд сходится. Действительно, вставляя функцию (5') в (5), видим, что она есть решение. Но при любом решении, вставляя (5) бесконечно раз в самого себя, приходим в (5'). Известно, что свертка двух интегрируемых функций существует и она тоже интегрируема.

Остается ещё показать сходимость ряда $-\psi_1(t)+\psi_1*\psi_1(t)-\ldots$. Доопределим функцию ψ_1 нулем на (T,∞) и применим к ряду $-\psi_1(t)+\psi_1*\psi_1(t)-\ldots$ преобразование Лапласа. В результате получим ряд $-\psi_1^L(p)+\psi_1^{L^2}(p)-\ldots$, который сходится, если $|\psi_1^L(p)|<1$. Это имеет место на полуплоскости $Re\,p>\sigma$, поскольку $\psi_1^L(p)\to 0$ при $Re\,p\to\infty$ равномерно по $Jm\,p$. Известно, что если ряд изображений сходится при $Re\,p>\sigma$, причем для каждого члена интеграл Лапласа сходится абсолютно при $Re\,p>\sigma$, то сходится и ряд оригиналов (при почти всех t), и сумма ряда изображений равна изображению суммы ряда оригиналов (см. [3]). Итак, $-\psi_1(t)+\psi_1*\psi_1(t)-\ldots=\psi_2(t)$, где ψ_2 -интегрируемая функция и из (5)

$$V(t)=h(t)+\int_0^t\frac{s}{\varkappa t}\psi_2(t-s)h(s)ds.$$

На основе этого каждое уравнение в (4) равносильно уравнению

$$u(t)+\int_0^t\Big(\bar H(t,s)+\int_s^t\psi_2(t-\tau)\frac{\tau}{\varkappa t}\bar H(\tau,s)d\tau\Big)u(s)ds=$$

$$=\bar f_\theta(t)+\int_0^t\frac{s}{\varkappa t}\psi_2(t-s)\bar f_\theta(s)ds, \tag{6}$$

$$\bar f_\theta(t)=\frac{1}{\varkappa t}f^{(1)}(t)+\int_0^t\frac{1}{\varkappa s^2}f^{(1)}(s)ds+\theta$$

Ядро его оценимо величиной $\frac{2c}{\varkappa}\frac{2-\beta}{1-\beta}\big(1+\frac{1}{\varkappa}\int_0^T|\psi_2(\tau)|d\tau\big)s^{\beta-1}$. Представим $u(t)$ через резольвентную сумму, мажорипуем и вычислим сумму мажоранты. В итоге получим единственное решение уравнения (4) с фиксированной θ :

$$u_\theta(t)=\bar f_\theta(t)+\int_0^t\frac{s}{\varkappa t}\psi_2(t-s)\bar f_\theta(s)ds+$$

$$+\int_0^t\bar H_2(t,s)\cdot\Big(\bar f_\theta(s)+\int_0^s\frac{\tau}{\varkappa s}\psi_2(s-\tau)\bar f_\theta(\tau)d\tau\Big)ds, \tag{7}$$

где $|\bar H_2(t,s)|\leq\hat c(\beta,\psi_1,\varkappa)s^{\beta-1}$.

Перейдем к исследованию свойств $u_\theta(t)$. На основе сделанных предположений $\bar f_\theta(t)$ непрерывна. Оценка формулы (7) дает ограниченность $u_\theta(t)$. Из (6) имеем

$$u_\theta(t)=\bar f_\theta(t)+\int_0^t\frac{s}{\varkappa t}\psi_2(t-s)\Big(\bar f_\theta(s)-\int_0^s\bar H(s,\tau)u_\theta(\tau)d\tau\Big)ds-\int_0^t\bar H(t,s)\cdot u_\theta ds$$

Покажем непрерывность решения $u_\theta(t)$. Начинаем с последнего слагаемого в полученном выражении :

$$\Big|\int_0^{t+\Delta t}\bar H(t+\Delta t-s)u_\theta(s)ds-\int_0^t\bar H(t,s)u_\theta(s)ds\Big|=\Big|\int_t^{t+\Delta t}\frac{1}{\varkappa(t+\Delta t)}\psi_2(t+\Delta t,s)\cdot$$

$$\cdot u_\theta(s)ds \Big| + \Big| \int_0^t \Big(\frac{1}{\varkappa(t+\Delta t)} - \frac{1}{\varkappa t}\Big)\psi_2(t+\Delta t,s)\,u_\theta(s)ds\Big| + \Big|\int_0^t \frac{1}{\varkappa t}\big(\psi_2(t+\Delta t,s) -$$

$$- \psi_2(t,s)\big)u_\theta(s)ds\Big| + \Big|\int_t^{t+\Delta t}\int_s^{t+\Delta t}\frac{1}{\varkappa\tau^2}\big(s\,\psi_1(\tau-s)+\psi_2(\tau,s)\big)d\tau\,u_\theta(s)ds\Big| +$$

$$+\Big|\int_0^t\int_t^{t+\Delta t}\frac{1}{\varkappa\tau^2}\big(s\,\psi_1(\tau-s)+\psi_2(\tau,s)\big)d\tau\,u_\theta(s)ds\Big| \le \frac{2c}{\varkappa\beta}\,\|u_\theta\|\cdot$$

$$\cdot\big((t+\Delta t)^\beta - t^\beta\big) + \frac{1}{\varkappa}\|u_\theta\|\max_{0\le s\le t}|\psi_2(t+\Delta t,s)-\psi_2(t,s)| + \frac{c}{\varkappa\beta}\cdot$$

$$\cdot\Big(1+\frac{2}{2-\beta}+\frac{1}{1-\beta}\Big)\|u_\theta\|\big((t+\Delta t)^\beta - t^\beta\big) + \frac{1}{\varkappa}\max_{0\le s\le t}\int_{t-s}^{t-s+\Delta t}|\psi_1(\tau)|d\tau +$$

$$+\frac{c}{\varkappa\beta}\big((t+\Delta t)^\beta - t^\beta\big)\to 0 \quad \text{при} \quad \Delta t\to 0 .$$

Остается показать еще непрерывность функции $\int_0^t \frac{s}{\varkappa t}\psi_2(t-s)\hat f_\theta(s)ds$, где $\hat f_\theta(s) = f_\theta(s) - \int_0^s H(s,\tau)\,u_\theta(\tau)d\tau$ непрерывна. Оценим

$$\Big|\int_0^{t+\Delta t}\frac{s}{\varkappa(t+\Delta t)}\psi_2(t+\Delta t-s)\,\hat f_\theta(s)ds - \int_0^t\frac{s}{\varkappa t}\psi_2(t-s)\hat f_\theta(s)ds\Big| =$$

$$=\Big|\int_0^{t+\Delta t}\frac{t+\Delta t-s}{\varkappa(t+\Delta t)}\cdot\hat f_\theta(t+\Delta t-s)\psi_2(s)ds - \int_0^t\frac{t-s}{\varkappa t}\hat f_\theta(t-s)\psi_2(s)ds\Big| \le$$

$$\le \Big|\int_t^{t+\Delta t}\frac{t+\Delta t-s}{\varkappa(t+\Delta t)}\hat f_\theta(t+\Delta t-s)\psi_2(s)ds\Big| + \Big|\int_0^t\frac{t-s}{\varkappa t}\big(\hat f_\theta(t+\Delta t-s) -$$

$$-\hat f_\theta(t-s)\big)\psi_2(s)ds\Big| + \Big|\int_0^t\Big(\frac{t+\Delta t-s}{\varkappa(t+\Delta t)} - \frac{t-s}{\varkappa t}\Big)\hat f_\theta(t+\Delta t-s)\psi_2(s)ds\Big| \le$$

$$\le \frac{1}{\varkappa}\|\hat f_\theta\|\int_t^{t+\Delta t}|\psi_2(s)|ds + \frac{1}{\varkappa}\int_0^t|\psi_2(s)|ds\cdot\max_{0\le s\le t}|\hat f_\theta(t-s+\Delta t)-\hat f(t-s)| +$$

$$+\frac{1}{\varkappa}\frac{\Delta t}{t+\Delta t}\|\hat f_\theta\|\cdot\int_0^t|\psi_2(s)|ds\to 0 \quad \text{при } \Delta t\to 0, \quad \text{если } t>0 .$$

При $t=0$ функция $\int_0^t\frac{s}{\varkappa t}\psi_2(t-s)\hat f_\theta(s)ds$ неопределена, но существует предел

$$\Big|\int_0^{\Delta t}\frac{\Delta t-s}{\varkappa\Delta t}\psi_2(s)\hat f_\theta(\Delta t-s)ds\Big| \le \int_0^{\Delta t}|\psi_2(s)|ds\cdot\max_{0\le s\le t}|\hat f_\theta(s)|\to 0 \quad \text{при } \Delta t\to 0.$$

Тем самым непрерывность $u_\theta(t)$ доказана.

Выбираем из семейства $\{u_\theta(t),\ \theta\in\mathbb{R}\}$ решение $u_0(t)$, соответствующее значению параметра $\theta=0$. Так как $f_0(t)$

оценима величиной $\frac{\beta+1}{\beta\varkappa} c t^\beta$, то из (7) получим $|u_0(t)| \le$
$\le \bar{C}(\beta,\psi_1,\varkappa) t^\beta$. Теорема доказана для $0<\beta<1$.

Остается рассмотреть случай $\beta \ge 1$. Тогда можно в б) величину ct^β заменить на $c_1 t^\mu$, где $0<\mu<1$. Приведенные выше рассуждения до доказательства непрерывности $u_0(t)$, включительно, остаются в силе с константной μ вместо β. Функция $\bar{f}_0(t)$ оценима величиной $\frac{\beta+1}{\varkappa\beta} c t^\beta$, и из (7) получим $|u_0(t)| \le \bar{C}(\beta,\psi_1,\varkappa) t^\beta$. Теорема доказана и для $\beta \ge 1$.

Перейдем к рассмотрению случая, когда правая часть уравнения (I) и ядро известны приближенно. Регуляризуем уравнение (I) следующим уравнением Вольтерра II рода:

$$\varepsilon^n (t+\varepsilon) u_{\delta\eta}(t) + \int_0^t \Big[\sum_{i=1}^{n-1} C_n^i \varepsilon^i \frac{(t-s)^{n-1-i}}{(n-1-i)!} \Big(s+\varepsilon-(i+1)\frac{t-s}{n-i} \Big) - \varepsilon^{n+1} \Big] \cdot$$

$$u_{\delta\eta}(s)\,ds + \frac{1}{M_1}\int_0^t \Big(G_\eta(t,s) + \frac{1}{M_2}\frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}\varepsilon \Big) u_{\delta\eta}(s)\,ds = \frac{1}{M_1} f_\delta(t), \tag{8}$$

где M_1, M_2 – достаточно большие числа: $M_1 > \varkappa$, $M_2 > \frac{1}{\varkappa}$, f_δ – непрерывная функция, G_η – интегрируемая по s при каждом t и непрерывная по t при почти каждом s функция;
$\|f - f_\delta\| \le \delta$, $\int_0^t |G(t,s) - G_\eta(t,s)|\,ds \le \eta$, $0<\varepsilon<1$.

<u>Теорема 3</u>. Пусть выполнены условия а) и б). Пусть уравнение (I) имеет непрерывное решение $u_0(t)$ такое, что $|u_0(t)| < ct^\beta$. Тогда разность $u_0(t)$ и решения $u_{\delta\eta}(t)$ уравнения (8) оценивается следующим образом:

$$\|u_0 - u_{\delta\eta}\|_t \le c(\beta,\psi_1,M_1,M_2)\,(R_{\delta\eta} + R_\varepsilon^1 + R_\varepsilon^2), \tag{9}$$

где

$$R_{\delta\eta} = \frac{1}{\varepsilon^{n+1}}(\delta + \|u_0\|_t\,\eta), \tag{10}$$

$$R_\varepsilon^1 = \begin{cases} n\lambda\varepsilon, \text{ если } |u_0(t_1)-u_0(t_2)| \le \lambda|t_1-t_2|,\ t_1,t_2\in[0,T], \\ W_{u_0}\big((n-2)\varepsilon^a\big) + \|u_0\|_t \cdot \varepsilon^{a-1}\exp(-\varepsilon^{a-1}),\ 0<a<1, \text{ в общем случае}, \end{cases} \tag{10'}$$

$$R_\varepsilon^2 = \begin{cases} \varepsilon^\beta, & 0<\beta<1, \\ \varepsilon \cdot \ln(1+\frac{t}{\varepsilon}), & \beta=1, \\ \varepsilon, & \beta>1. \end{cases} \tag{10''}$$

Здесь W_{u_0} – модуль непрерывности функции u_0.

Доказательство. Преобразуем (8) в следующую форму:

$$\varepsilon^n\left((t+\varepsilon)u_{\delta_\eta}(t)-(n+1)\int_0^t u_{\delta_\eta}(s)ds\right)+\sum_{i=1}^{n-1}C_n^i\varepsilon^i\int_0^t\frac{(t-s)^{n-1-i}}{(n-1-i)!}\left((s+\varepsilon)u_{\delta_\eta}(s)-\right.$$
$$\left.-(i+1)\int_0^s u_{\delta_\eta}(\tau)d\tau\right)ds+\frac{1}{M_1}\int_0^t\left(G_\eta(t,s)+\frac{1}{M_2}\frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}\varepsilon\right)u_{\delta_\eta}(s)ds=\frac{1}{M_1}f_\delta(t).$$

Разность $v(t)=u_0(t)-u_{\delta_\eta}(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\varepsilon^n\left((t+\varepsilon)v(t)-(n+1)\int_0^t v(s)ds\right)+\sum_{i=0}^{n-1}C_n^i\varepsilon^i\int_0^t\frac{(t-s)^{n-1-i}}{(n-1-i)!}\left((s+\varepsilon)v(s)-(i+1)\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\int_0^s v(\tau)d\tau\right)ds=\left[\left(1-\frac{\varkappa}{M_1}\right)\int_0^t\frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}\left((s+\varepsilon)v(s)-\int_0^s v(\tau)d\tau\right)ds+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{M_1}\left(\varkappa-\frac{1}{M_2}\right)\varepsilon\int_0^t\frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}v(s)ds\right]+\left[\frac{1}{M_1}\int_0^t\left(\frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}\varkappa s-\varkappa\frac{(t-s)^n}{n!}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-G(t,s)\right)v(s)ds\right]+\left[\frac{1}{M_1}\int_0^t\left(G_\eta(t,s)-G(t,s)\right)u_{\delta_\eta}(s)ds+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{M_1}\left(f(t)-f_\delta(t)\right)\right]+\left[\varepsilon^n\left((t+\varepsilon)u_0(t)-(n+1)\int_0^t u_0(s)ds\right)+\sum_{i=0}^{n-1}C_n^i\varepsilon^i\cdot\right.$$
$$\cdot\int_0^t\frac{(t-s)^{n-1-i}}{(n-1-i)!}\left((s+\varepsilon)u_0(s)-(i+1)\int_0^s u_0(\tau)d\tau\right)ds-\int_0^t\frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}\left((s+\varepsilon)u_0(s)-\right.$$
$$\left.\left.-\int_0^s u_0(\tau)d\tau\right)ds\right]+\left[\frac{1}{M_2}\int_0^t\frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}\varepsilon u_0(s)ds\right]. \tag{II}$$

Следующий шаг – решение уравнения (II) относительно левой стороны. Для этого потребуется в общем виде решение уравнения

$$\varepsilon^n\left((t+\varepsilon)y(t)-(n+1)\int_0^t y(s)ds\right)+\sum_{i=0}^{n-1}C_n^i\varepsilon^i\int_0^t\frac{(t-s)^{n-1-i}}{(n-1-i)!}\left((s+\varepsilon)y(s)-\right.$$
$$\left.-(i+1)\int_0^s y(\tau)d\tau\right)ds=g(t). \tag{I2}$$

Сначала рассмотрим случай $g\in C^n[0,T]$, $g^{(i)}(0)=0$, $0\le i\le n-1$. Тогда

$$\begin{cases}(t+\varepsilon)\left[\sum_{i=0}^{n}C_n^i\varepsilon^i y^{(i)}(t)\right]-\int_0^t\left[\sum_{i=0}^{n}C_n^i\varepsilon^i y^{(i)}(s)\right]ds=g^{(n)}(t),\\ y^{(i)}(0)=0,\quad 0\le i\le n-1.\end{cases}$$

Решением этого уравнения является

$$y(t)=\int_0^t\frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}\frac{1}{\varepsilon^n}e^{-\frac{1}{\varepsilon}(t-s)}\left(\frac{g^{(n)}(s)}{s+\varepsilon}+\int_0^s\frac{g^{(n)}(\tau)}{(\tau+\varepsilon)^2}d\tau\right)ds. \tag{I3}$$

После интегрирования по частям получим

$$y(t)=\frac{g(t)}{\varepsilon^n(t+\varepsilon)}+\int_0^t g(s)(-1)^n\frac{d^n}{ds^n}\Big(\frac{1}{s+\varepsilon}\,\frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}\,\frac{1}{\varepsilon^n}\,e^{-\frac{1}{\varepsilon}(t-s)}+$$

$$+\frac{1}{(s+\varepsilon)^2}\int_s^t\frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!}\,\frac{1}{\varepsilon^n}\,e^{-\frac{1}{\varepsilon}(t-\tau)}d\tau\Big)ds \qquad (13')$$

Понятно, что формула (I3') остается в силе и в случае произвольной непрерывной $g(t)$. Действительно, уравнение (I2) по существу является уравнением Вольтерра второго рода с ограниченным ядром, и его решение можно выразить через резольвенту ядра, не зависящую от свободного члена. Но это и есть выражение (I3').

Теперь с помощью формул (I3) и (I3') получим из (II)

$$V(t)=I_1-I_2+I_3+I_4+I_5\,,$$

где

$$I_1=\Big(1-\frac{æ}{M_1}\Big)\int_0^t\frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}\,\frac{1}{\varepsilon^n}\,e^{-\frac{1}{\varepsilon}(t-s)}\Big(\frac{1}{s+\varepsilon}\Big((s+\varepsilon)V(s)-\int_0^s V(\tau)d\tau\Big)+\int_0^s\frac{1}{(\tau+\varepsilon)^2}\Big((\tau+\varepsilon)V(\tau)-$$

$$-\int_0^\tau V(x)dx\Big)d\tau\Big)ds+\frac{1}{M_1}\Big(æ-\frac{1}{M_2}\Big)\int_0^t\frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}\,\frac{1}{\varepsilon^n}\,e^{-\frac{1}{\varepsilon}(t-s)}\Big(\frac{\varepsilon}{s+\varepsilon}V(s)+\int_0^s\frac{\varepsilon}{(\tau+\varepsilon)^2}V(\tau)d\tau\Big)ds,$$

$$I_2=\int_0^t\frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}\,\frac{1}{\varepsilon^n}\,e^{-\frac{1}{\varepsilon}(t-s)}\Big[-\frac{1}{M_1}\int_0^s(æ+G_n(s,\tau))V(\tau)d\tau\,\frac{1}{s+\varepsilon}-\frac{1}{M_1}\int_0^s\frac{1}{(\tau+\varepsilon)^2}\int_0^\tau(æ+G_n(\tau,x))\cdot$$

$$\cdot V(x)dx\,d\tau\Big]ds\,,$$

$$I_3=\frac{1}{M_1}\,\frac{1}{\varepsilon^n(t+\varepsilon)}\Big(\psi(t)-\psi_1(t)+\int_0^t(G_n(t,s)-G(t,s))u_0(s)ds\Big)+\frac{1}{M_1}\int_0^t\Big(f(s)-f_1(s)+$$

$$+\int_0^s(G_n(s,\tau)-G(s,\tau))u_0(\tau)d\tau\Big)(-1)^n\frac{d^n}{ds^n}\Big(\frac{1}{s+\varepsilon}\,\frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}\,\frac{1}{\varepsilon^n}\,e^{-\frac{1}{\varepsilon}(t-s)}+\frac{1}{(s+\varepsilon)^2}\int_s^t\frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!}\,\frac{1}{\varepsilon^n}\,e^{-\frac{1}{\varepsilon}(t-\tau)}d\tau\Big)ds,$$

$$I_4=u_0(t)-\int_0^t\frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}\,\frac{1}{\varepsilon^n}\,e^{-\frac{1}{\varepsilon}(t-s)}\Big(u_0(s)-\frac{1}{s+\varepsilon}\int_0^s u_0(\tau)d\tau+\int_0^s\Big(\frac{1}{\tau+\varepsilon}u_0(\tau)-\frac{1}{(\tau+\varepsilon)^2}\int_0^\tau u_0(x)$$

$$dx\Big)d\tau\Big)ds\,,$$

$$I_5=\frac{1}{M_2}\int_0^t\frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}\,\frac{1}{\varepsilon^n}\,e^{-\frac{1}{\varepsilon}(t-s)}\Big(\frac{\varepsilon}{s+\varepsilon}u_0(s)+\int_0^s\frac{\varepsilon\,u_0(\tau)}{(\tau+\varepsilon)^2}d\tau\Big)ds\,.$$

Оценим их в отдельности. Так как

$$\frac{1}{s+\varepsilon}\Big((s+\varepsilon)V(s)-\int_0^s V(\tau)d\tau\Big)+\int_0^s\frac{1}{(\tau+\varepsilon)^2}\Big((\tau+\varepsilon)V(\tau)-\int_0^\tau V(x)dx\Big)d\tau=V(s),$$

то

$$|I_1|\le\Big[\Big(1-\frac{æ}{M_1}\Big)+\frac{1}{M_1}\Big(æ-\frac{1}{M_2}\Big)\Big]\|V\|_t\int_0^t\frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}\,\frac{1}{\varepsilon^n}\,e^{-\frac{1}{\varepsilon}(t-s)}ds\le\Big(1-\frac{1}{M_1M_2}\Big)\|V\|_t\,.$$

С помощью а) и б) при $0<\beta<1$ имеем

$$|I_2|\le\int_0^t\frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}\,\frac{1}{\varepsilon^n}\,e^{-\frac{1}{\varepsilon}(t-s)}\int_0^s\|V\|_\tau\Big(\frac{2æ}{M_1}\,\frac{1}{1-\beta}\,\tau^{\beta-1}+\frac{1}{M_1}\,|\psi_1(s-\tau)|\Big)d\tau\,ds\,.$$

Так как внутренний интеграл монотонно возрастает, то

$$|I_2| \le \int_0^t \left(\frac{q_c}{M_1} \frac{\gamma-\beta}{1-\beta} \tau^{\beta-1} + \frac{1}{M_1} |\psi_1(t-\tau)| \right) \|v\|_\tau d\tau .$$

В выражении I_3 используем формулу Лейбница для вычисления n-ой производной под интегралом. Затем оценим величину $\frac{1}{s+\varepsilon}$ через $\frac{1}{\varepsilon}$ и также $f(t) - f_\delta(t) + \int_0^t (G_\eta(t,s) - G(t,s)) u_{\delta_\eta}(s) ds$ через $\delta + \|u_{\delta_\eta}\|_{t,\eta}$. Под интегралом остаются слагаемые типа $\frac{(t-s)^{i-1}}{(i-1)!} \frac{1}{\varepsilon^i} e^{-\frac{1}{\varepsilon}(t-s)} \cdot \frac{1}{\varepsilon^{n+1}}$

В результате получим

$$|I_3| = \frac{\delta + \|u_{\delta_\eta}\|_{t,\eta}}{\varepsilon^{n+1}} \frac{1}{M_1} \Big(1 + \sum_{i=0}^{n} C_n^i (n-1)! \sum_{\substack{k=0 \\ k \ne n}}^{i} \varepsilon_i^k + \sum_{i=1}^{n} C_n^i (n-i+1)! \sum_{k=0}^{i-1} C_{i-1}^k +$$

$$+ n! \Big) = \mathrm{const}(M_1) \cdot \frac{\delta + \|u_{\delta_\eta}\|_{t,\eta}}{\varepsilon^{n+1}} .$$

Легко видеть, что

$$I_4 = u_0(t) - \int_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{1}{\varepsilon^n} e^{-\frac{1}{\varepsilon}(t-s)} u_0(s) ds ,$$

и поскольку $u_0(0) = 0$, то по лемме I [7]

$$|I_4| \le R_\varepsilon^1 .$$

В формуле I_5

$$\left| \frac{\varepsilon}{s+\varepsilon} u_0(s) + \int_0^s \frac{\varepsilon}{(\tau+\varepsilon)^2} u_0(\tau) d\tau \right| \le c\beta \int_0^s \tau^{\beta-1} \frac{\varepsilon}{\tau+\varepsilon} d\tau ,$$

и

$$c\beta \int_0^s \tau^{\beta-1} \frac{\varepsilon}{\tau+\varepsilon} d\tau \le \frac{c\beta}{\beta-1} t^{\beta-1} \varepsilon , \quad \beta > 1 ,$$

$$c\beta \int_0^s \tau^{\beta-1} \frac{\varepsilon}{\tau+\varepsilon} d\tau = \varepsilon \ln\left(1 + \frac{t}{\varepsilon}\right) \cdot c , \quad \beta = 1 ,$$

$$c\beta \int_0^s \tau^{\beta-1} \frac{\varepsilon}{\tau+\varepsilon} d\tau \le c\beta \int_0^\varepsilon \tau^{\beta-1} d\tau + \varepsilon c\beta \int_\varepsilon^s \tau^{\beta-2} d\tau \le c\beta \left(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{1-\beta} \right) \varepsilon^\beta , \quad 0 < \beta < 1 .$$

Следовательно, $|I_5| \le \mathrm{const}(M_1, \beta) R_\varepsilon^2$.

Объединяем полученные результаты:

$$|v(t)| \le |I_1| + |I_2| + |I_3| + |I_4| + |I_5| \le \left(1 - \frac{1}{M_1 M_2}\right) \|v\|_t + \int_0^t \frac{q_c}{M_1} \cdot$$

$$\cdot \frac{\gamma-\beta}{1-\beta} \tau^{\beta-1} + \frac{1}{M_1} |\psi_1(t-\tau)|) \|v\|_\tau d\tau + \mathrm{const}(M_1) \cdot \frac{1}{\varepsilon^{n+1}} (\delta + \|u_{\delta_\eta}\|_{t,\eta}) +$$

$$+ R_\varepsilon^1 + \mathrm{const}(M_1, \beta) R_\varepsilon^2 .$$

4*

Поскольку в правой части неравенства стоит монотонно возрастающая функция, то в левой части можно $|v(t)|$ заменить на $\|v\|_t$. Кроме того, величину $\|u_{\delta\eta}\|_t$ оценим через $\|v\|_t + \|u_0\|_t$. Таким образом мы получим

$$\|v\|_t \leq \Big(1 - \frac{1}{M_1 M_2} + \mathrm{const}(M_1) \cdot \frac{\eta}{\varepsilon^{n+1}}\Big)\|v\|_t + \int_0^t \Big(\frac{\varkappa}{M_1} \frac{2-\beta}{1-\beta} \tau^{\beta-1} +$$

$$+ \frac{1}{M_1} |\psi_1(t-\tau)|\Big)\|v\|_\tau d\tau + \mathrm{const}(M_1) R_{\delta\eta} + R_\varepsilon^1 + \mathrm{const}(M_1, \beta) R_\varepsilon^2 .$$

Предположим, что η/ε^{n+1} достаточно малое число, так чтобы $1 - \frac{1}{M_1 M_2} + \mathrm{const}(M_1) \cdot \frac{\eta}{\varepsilon^{n+1}} < 1$. Тогда мы имеем

$$\|v\|_t \leq \mathrm{const}(M_1, M_2, \beta) \int_0^t (\tau^{\beta-1} + |\psi_1(t-\tau)|)\|v\|_\tau d\tau +$$

$$+ \mathrm{const}(M_1, M_2, \beta)(R_{\delta\eta} + R_\varepsilon^1 + R_\varepsilon^2). \qquad \text{(I4)}$$

Строго говоря, подинтегральное ядро в точности такое только при $0 < \beta < 1$. Если $\beta \geq 1$, то $ct^\beta \leq c_1 + t^\gamma$, $0 < \gamma < 1$, и мы получим оценку такого же типа, причем в ядре стоит величина $\tau^{\gamma-1}$. Легко видеть, вставляя неравенство (I4) бесконечно раз в самого себя, что $\|v\|_t \leq \varkappa(t)$, где $\varkappa(t)$ - решение соответствующего уравнения (т.е. (I4), где $\leq$ заменено на $=$). Выразим функцию $\varkappa(t)$ через свободный член и резольвенту (последняя - интегрируемая функция) и оценим. В результате получим утверждение теоремы.

Естественный способ выбора параметра ε по закону $\varepsilon = (\delta + \eta)^{\frac{1}{n+2}}$ гарантирует сходимость метода. Тогда в случае Липшиц-непрерывного точного решения погрешность имеет порядок

$$(\delta + \eta)^{\frac{1}{n+2}} \cdot \ln\big(1 + t \cdot (\delta + \eta)^{-\frac{1}{n+2}}\big).$$

Вернемся к задаче (2), (2'). Из семейства решений соответствующего уравнения Вольтерра (3) мы должны выделить не решение $\varkappa_1^0(t)$ с условием $\varkappa_1^0(0) = 0$, к которому сходится предложенный метод регуляризации, а решение $\varkappa_1(t)$, которое положительное и $\varkappa_1(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Характер семейства решений уравнения (3) проще, чем в общем случае для уравнения (I). В [9] было показано, что любое решение (3) представимо в виде $\varkappa_1(t) = \varkappa_1^0(t) + \theta$, где $\theta \in \mathbb{R}$. Следовательно, требуемое решение получим, добавляя к вычисленной функции $\varkappa_1^0(t)$ подходящую константу. Последнюю можно определить в случае большого T так, чтобы $\varkappa_1(T)$ была малой положительной величиной, или используя какую-то другую идею определения $\varkappa_1(0)$.

Литература

I. А п а р ц и н А.С., Б а к у ш и н с к и й А.Б., Приближенное решение интегральных уравнений I рода методом квадратурных сумм. В кн.: Дифференциальные и интегральные уравнения. Иркутск, I973, вып. I, 248–258.

2. А с а н о в А., Об одном классе интегральных уравнений Вольтерра первого рода. В кн.: Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. Фрунзе, I98I, № I4, 227–234.

3. Д е ч Г., Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. М., Наука, I97I.

4. Д и т к и н В.А., П р у д н и к о в А.П., Интегральные преобразования и операционное исчисление. М., Наука, I974.

5. М а г н и ц к и й Н.А., О приближенном решении некоторых интегральных уравнений Вольтерра I рода. Вестник МГУ. Вычисл. мат. и киберн., I978, № I, 9I–96.

6. С е р г е е в В.О., Регуляризация уравнений Вольтерра I рода. Докл. АН СССР, I97I, I97, № 3, 53I–534.

7. С р а ж и д и н о в А., О регуляризации интегральных уравнений Вольтерра I рода. Изв. АН Кирг. ССР, I980, № 5, 3–II.

8. Т о б и а с Т., Об обратной задаче определения ядра наследственной среды. Изв. АН ЭССР. Физ.-матем., I984, № 2, I82–I87.

9. Я н н о Я., Сведение одной обратной задачи наследственной среды к интегральному уравнению. Уч. зап. Тартуск. ун-та, I985, 7I5, 2I–29.

I0. Н и г у л У.К., Нелинейная акустодиагностика: (Одномерные задачи). Ленинград, Судостроение, I98I.

Поступило

I5 XII I985

REGULARIZATION OF A VOLTERRA EQUATION OF THE FIRST KIND WHICH IS EQUIVALENT TO AN EQUATION OF THE THIRD KIND

J. Janno

Summary

In the current article a regularization of equation (1) is under consideration. Functions G and f satisfy conditions a) and б), in which ψ_1 is an integrable function and ψ_2 is a continuous function , $\psi_2(0,0)=0$. The regularized equation is given by (8), in which $M_1 > \alpha$, $M_2 > 1/\alpha$, $f_\delta \in C[0,T]$, G_η is continuous with respect to t and integrable with respect to s . Futhermore, $\|f_\delta - f\| \le \delta$, $\int_0^t |G_\eta(t,s) - G(t,s)|\, ds \le \eta$.

The main theorem states that if equation (1) has a continuous solution u_0 such that $|u_0(t)| \le c\, t^\beta$, $\beta > 0$, then the difference $u_0 - u_{\delta\eta}$ is estimable by (9), where $R_{\delta\eta}$, R_ξ^1, R_ξ^2 are determined by (10), (10'), (10") respectively (W_{u_0} is the modula of continuity of u_0).

Уч.зап.Тартуск.ун-та,1986,762,31-39.

ОПТИМАЛЬНЫЙ ВЫБОР ПАРАМЕТРА В МЕТОДЕ ЛАВРЕНТЬЕВА НА КЛАССЕ ИСТОКООБРАЗНО ПРЕДСТАВИМЫХ РЕШЕНИЙ

Т.Кихо

В статье решается вопрос об оптимальном выборе параметра в методе Лаврентьева при решении операторного уравнения с линейным непрерывным самосопряженным неотрицательным оператором в гильбертовом пространстве на классе истокообразно представимых решений. Найдена неулучшаемая оценка погрешности приближенного решения.

Пусть H - гильбертово пространство, $A \in \mathcal{L}(H,H)$ линейный непрерывный самосопряженный неотрицательный оператор с незамкнутой областью значений $\mathcal{R}(A) \subset H$. Рассмотрим уравнение

$$Au = f. \tag{1}$$

Пусть вместо точного свободного члена $f \in \mathcal{R}(A)$ известно приближенный $f_\delta \in H$, такой что $\|f - f_\delta\| \leq \delta$, $\delta > 0$. Уравнение (I) решим методом Лаврентьева

$$u_\alpha = (\alpha I + A)^{-1} f_\delta, \quad \alpha > 0. \tag{2}$$

Введем класс истокообразно представимых решений

$$M_{p\rho} = \{u \in H : u = |A|^p v, \|v\| \leq \rho\}, \; p > 0, \rho > 0.$$

Справедлива оценка (см. [I])

$$\inf_{\alpha > 0} \sup_{u \in M_{p\rho}, f_\delta \in H: \|Au - f_\delta\| \leq \delta} \|u_\alpha - u\| \leq c_p \rho^{\frac{1}{p+1}} \delta^{\frac{p}{p+1}}, \tag{3}$$

где

$$c_p = \inf_{d > 0} \inf_{0 < t < 1} \sup_{0 \leq \lambda < \infty} \varphi_p(d,t,\lambda), \tag{4}$$

$$\varphi_p(d,t,\lambda) = \frac{1}{1+\lambda}\sqrt{\left(\frac{\lambda}{d}\right)^{2p} \cdot \frac{1}{t} + \frac{d^2}{1-t}}\,; \tag{5}$$

если найдется $\varepsilon > 0$ такое, что спектр $\sigma(A) \supset [0, \varepsilon]$, то в (3) при досточно малых $\delta > 0$ достигается знак равенства.

Известно (см. [I]), что при $0 < p \leq \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) \approx 0{,}6180$ оптимальным на клпссе $M_{p\rho}$ является выбор параметра $\alpha = p^{-1}(\delta/\rho)^{1/(p+1)}$ и ему соответствует константа $c_p = 1$ в оценке (3); при $\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1) < p \leq 1$ не существует выбора $\alpha =$

$=\alpha(\delta, M_{p\varrho})$, при котором оценка (3) была бы справедлива с $C_p = 1$. Вопрос о наилучшем на $M_{p\varrho}$ выборе $\alpha = \alpha(\delta, M_{p\varrho})$ параметра и о неулучшаемой оценке (3) при $\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1) < p \leq 1$ оставался открытым. Наконец, метод (2) при $p > 1$ неоптимален даже по порядку при любом выборе параметра α (см. напр. [2]).

Основной результат данной статьи заключается в следующем.

<u>Теорема</u>. Оптимальным на $M_{p\varrho}$ выбором параметра $\alpha = \alpha(\delta) = \alpha(\delta, M_{p\varrho})$ при $\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1) < p \leq 1$ является

$$\alpha = \left[\frac{1}{p(2p-1)^{2p-1}(1-p)^{2(1-p)}}\right]^{\frac{1}{2(1+p)}} \left(\frac{\delta}{\varrho}\right)^{\frac{1}{p+1}},$$

и соответствующая ему неулучшаемая погрешность

$$\sup_{u\in M_{p\varrho},\ f_\delta\in H:\ \|Au-f_\delta\|\leq\delta} \|u_\alpha - u\| \leq \left[\frac{(2p-1)^{2p-1}(1-p)^{2(1-p)}(1+p)^{1+p}}{p^p}\right]^{\frac{1}{2(1+p)}} \varrho^{\frac{1}{p+1}}\,\delta^{\frac{p}{p+1}}. \tag{6}$$

Если $\sigma(A)\supset[0,\varepsilon]$, $\varepsilon>0$, то в (6) при достаточно малых $\delta>0$ достигается знак равенства.

Доказательство построим отдельно при $p<1$ и $p=1$.

а) Пусть $\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)<p<1$. Исследуем функцию $\varphi_p(d,t,\lambda)$. Из выражения (5) видно, что φ_p непрерывна $\forall d>0, \forall t\in(0,1), \forall\lambda\geq 0$ и

$$\varphi_p(d,t,\lambda)>0 \quad \forall d>0,\ \forall t\in(0,1),\ \forall\lambda\geq 0, \tag{7}$$

$$\varphi_p(d,t,0)=d/\sqrt{1-t}, \tag{8}$$

$$\varphi_p(d,t,\lambda)\to 0 \quad \text{при} \quad \lambda\to\infty, \tag{9}$$

$$\varphi_p(d,t,\lambda)\to \infty \quad \text{при} \quad t\to 0, \tag{10}$$

$$\varphi_p(d,t,\lambda)\to \infty \quad \text{при} \quad t\to 1, \tag{11}$$

$$\varphi_p(d,t,\lambda)\to \infty \quad \text{при} \quad d\to 0, \tag{12}$$

$$\varphi_p(d,t,\lambda)\to \infty \quad \text{при} \quad d\to \infty. \tag{13}$$

Вычислим производные

$$\frac{\partial\varphi_p}{\partial\lambda}(d,t,\lambda) = -\frac{1}{(1-\lambda)^2}\sqrt{\left(\frac{\lambda}{d}\right)^{2p}\cdot\frac{1}{t}+\frac{d^2}{1-t}} + \frac{p\,\lambda^{2p-1}}{(1+\lambda)\,d^{2p}\,t\sqrt{\left(\frac{\lambda}{d}\right)^{2p}\frac{1}{t}+\frac{d^2}{1-t}}}, \tag{14}$$

$$\frac{\partial\varphi_p}{\partial t}(d,t,\lambda) = \frac{1}{2(1-\lambda)\sqrt{\left(\frac{\lambda}{d}\right)^{2p}\frac{1}{t}+\frac{d^2}{1-t}}}\left[\frac{d^2}{(1-t)^2}-\left(\frac{\lambda}{d}\right)^{2p}\frac{1}{t^2}\right]. \tag{15}$$

Найдем $\sup\limits_{0\leq\lambda<\infty}\varphi_p(d,t,\lambda)$. Заметим, что в точке $\lambda=0$ (точнее в точке $(d,t,0)$) функция $\varphi_p(d,t,\lambda)$ как функция аргумента λ

убывающая, так как $\frac{\partial \varphi_\rho}{\partial \lambda}(d,t,0) = -\frac{d}{\sqrt{1-t}} < 0$. Значит, для того, чтобы $\varphi_\rho(d,t,\lambda)$ как функция аргумента λ имела хотя бы одну точку максимума, она должна иметь по крайней мере две точки экстремума: первая из них – точка минимума, а вторая – точка максимума. Найдем число точек экстремума функции $\varphi_\rho(\lambda) = \varphi_\rho(d,t,\lambda)$. Для этого решим уравнение $\frac{\partial \varphi_\rho}{\partial \lambda} = 0$, или (см. (I4))

$$\Phi(\lambda) \equiv (\rho-1)\lambda^{2\rho} + \rho\lambda^{2\rho-1} - \frac{t\,d^{2\rho+2}}{1-t} = 0. \qquad \text{(I6)}$$

Исследуем разрешимость уравнения (I6). Заметим, что для каждого $\rho \in \left(\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1), 1\right)$ и $\lambda > 0$

$$\Phi''(\lambda) = \rho(2\rho-1)(2\rho-2)(\lambda^{2\rho-2} + \lambda^{2\rho-3}) < 0.$$

Итак, Φ' строго убывающая в области $(0,\infty)$ функция, поэтому Φ вогнутая функция. Из того, что $\Phi(0) = -\frac{t\,d^{2\rho+2}}{1-t} < 0$ и $\Phi(\lambda) \to -\infty$ при $\lambda \to \infty$, вытекает, что Φ не может иметь более двух нулей. Значит, уравнение (I6) имеет не более двух решений. Этим доказано, что функция $\varphi_\rho(\lambda)$ имеет не более двух точек экстремума в области $(0,\infty)$. Число точек экстремума будет точно два, если $\exists \lambda \in (0,\infty) : \Phi(\lambda) > 0$. Максимум функции Φ достигается в точке $\lambda = \frac{2\rho-1}{2(1-\rho)}$. Итак, функция $\varphi_\rho(\lambda)$ имеет точно две точки экстремума в области $(0,\infty)$ тогда и только тогда, когда $\Phi\left(\frac{2\rho-1}{2(1-\rho)}\right) > 0$, т.е. при

$$t < \frac{(2\rho-1)^{2\rho-1}}{(2\rho-1)^{2\rho-1} + d^{2\rho+2}\cdot 2^{2\rho}\cdot(1-\rho)^{2\rho-1}} \equiv t_<. \qquad \text{(I7)}$$

То, что среди двух точек экстремума (которые имеются при $t < t_<$) есть одна точка максимума $\lambda_{max} = \lambda_{max}(t)$, вытекает из (7), (9) и того, что $\frac{\partial \varphi_\rho}{\partial \lambda}(d,t,0) < 0$ и $\frac{\partial \varphi_\rho}{\partial \lambda}\left(d,t,\frac{2\rho-1}{2(1-\rho)}\right) > 0$.
В итоге мы можем сделать заключение:

если $t \geqslant t_<$, то $\varphi_\rho(d,t,\lambda)$ убывающая по λ, и точка глобального максимума

$$\lambda_* = 0; \qquad \text{(I8.a)}$$

если $t < t_<$, то $\varphi_\rho(d,t,\lambda)$ имеет по λ ровно одну точку локального максимума λ_{max}, и существует одна или две точки глобального максимума

$$\lambda_* = \begin{cases} 0, & \text{если } \varphi_\rho(d,t,0) > \varphi_\rho(d,t,\lambda_{max}), \\ \lambda_{max}, & \text{если } \varphi_\rho(d,t,0) < \varphi_\rho(d,t,\lambda_{max}), \end{cases} \qquad \text{(I8.б)}$$

$$\begin{cases} \lambda_{*1}=0, \\ \lambda_{*2}=\lambda_{max}, \end{cases} \text{если } \varphi_p(d,t,0)=\varphi_p(d,t,\lambda_{max}). \tag{18.в}$$

Рассмотрим теперь $\varphi_p(d,t,\lambda)$ как функцию аргумента t. Из выражения (8) видно, что при $\lambda=0$ функция $\varphi_p(d,t,0)= =d/\sqrt{1-t}$ по t строго возрастает в области $0<t<1$. Учитывая выражения (5), (10) и (11), станет ясным, что $\varphi_p^2(d,t,\lambda)$ как функция аргумента t при $\lambda>0$ выпукла и имеет одну точку минимума t_{min}, которая является единственной точкой минимума для самой $\varphi_p(d,t,\lambda)$. Найдем эту t_{min}. Для этого решим уравнение $\frac{\partial\varphi_p}{\partial t}=0$, или (см. (15)) $(\lambda/d)^{2p}/t^2=d^2/(1-t)^2$, из которого

$$t_{min}=\frac{\lambda^p}{\lambda^p+d^{p+1}}. \tag{19}$$

Итак, справедливы следующие два утверждения.

Предложение 1. Для каждого $t\in(0,t_<)$ существует единственная точка $\lambda_{max}=\lambda_{max}(t)$ локального максимума $\varphi_p(d,t,\lambda)$ как функции от λ.

Предложение 2. При $\lambda>0$ функция $\varphi_p(d,t,\lambda)$ по t в области $[0,t_{min}]$ строго убывающая.

Обозначим через t_* наибольшую из тех точек $t_0\leq t_<$, для которых справедливо утверждение: для каждого $t\leq t_0$ точка $\lambda_{max}(t)$ является точкой глобального максимума для $\varphi_p(d,t,\lambda)$ по λ, т.е. $\varphi_p(d,t,\lambda_{max}(t))\geq\varphi_p(d,t,\lambda)$ $\forall\lambda\geq 0$. Такие точки t_0 существуют в силу предложения 1 и выражения (8) при $t\to 0$ и (10).

Точки $\lambda_{max}(t)$ при $t<t_*$ являются однократными корнями функции Φ (см. (16)). Из теоремы о неявной функции слудует, что $\lambda_{max}(t)$ - непрерывная функция, и ее график $L= =\{(t,\lambda_{max}(t)):0<t\leq t_*\}$ — непрерывная кривая. Так как $\varphi_p(d,t,\lambda)$ непрерывна по всем аргументам, то $\varphi_p(d,t,\lambda_{max}(t))$ непрерывна по t. Учитывая выражения (18) и определение t_* имеем

$$\varphi_p(d,t_*,\lambda_{max}(t_*))=\varphi_p(d,t_*,0).$$

Добавим к этому условие (см. (16))

$$\Phi(\lambda_{max}(t_*))=0$$

и решим полученную систему. Решения принимают вид

$$\lambda_*=\lambda_{max}(t_*)=\frac{2p-1}{1-p}, \tag{20}$$

$$t_*=\frac{(2p-1)^{2p-1}(1-p)^{2(1-p)}}{(2p-1)^{2p-1}(1-p)^{2(1-p)}+d^{2p+2}}. \tag{21}$$

Определим множество $Q=\{(t,\lambda):\ 0<t\leq t_*,\ t\leq t_{min}(\lambda),\lambda>0\}$ и его "границу" (кусок границы) $\partial Q=\{(t_{min}(\lambda),\lambda):\ t_{min}(\lambda)\leq t_*,$ $\lambda>0\}$. Множество ∂Q содержит точки, в которых $\frac{\partial\varphi_\rho}{\partial t}=0$, а множество Q – точки, в которых $\frac{\partial\varphi_\rho}{\partial t}\leq 0$. Точнее, при $(\bar t,\lambda)\in Q$ функция $\varphi_\rho(d,t,\lambda)$ убывает по $t, t\in(0,\bar t\,]$ – это вытекает из предложения 2.

Убедимся, что множество $L\cap\partial Q$ не может содержать более одной точки. Действительно, для точек $(t,\lambda)\in L\cap\partial Q$ одновременно выполнены уравнения $\frac{\partial\varphi_\rho}{\partial\lambda}=0$ (ведь $(t,\lambda)\in L$) и $\frac{\partial\varphi_\rho}{\partial t}=0$ (ведь $(t,\lambda)\in\partial Q$). Выявим число решений этой системы (см. (I6), (I9))

$$\begin{cases}(\rho-1)\lambda^{2\rho}+\rho\lambda^{2\rho-1}-d^{2\rho+2}\dfrac{t}{1-t}=0,\\ t=\dfrac{\lambda^\rho}{\lambda^\rho+d^{\rho+1}}\,.\end{cases}\tag{22}$$

Подставим найденные из второго уравнения $\lambda^{2\rho}$ и $\lambda^{2\rho-1}$ в первое, получаем уравнение

$$q(\lambda)\equiv(\rho-1)\lambda^\rho+\rho\lambda^{\rho-1}-d^{\rho+1}=0.$$

Из того, что $q'(\lambda)\equiv(\rho-1)\rho\,[\lambda^{\rho-1}+\lambda^{\rho-2}]<0\quad\forall\lambda>0$ вытекает, что сама q строго убывает по λ и не может иметь более одного нуля, т.е. уравнение $q(\lambda)=0$ не имеет более одного решения, и тем самым система (22) не имеет более одного решения (t,λ). Значит и $L\cap\partial Q$ содержит не более одной точки.

Легко проверить, что $(t,\lambda_{max}(t))\in Q$ при t из некоторой правой окрестности нуля (действительно, $\lambda_{max}(t)\to\rho/(1-\rho)$ при $t\to 0$, см. (I6)). Итак, если при некоторой t_0 справедливо $(t_0,\lambda_{max}(t_0))\in Q$, то справедливо и $(t,\lambda_{max}(t))\in Q$ $\forall t\leq t_0$, т.е. $L|_{t\leq t_0}\subset Q$.

Рис. I

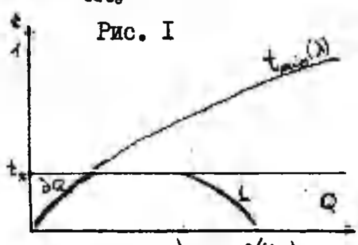


Рис. 2

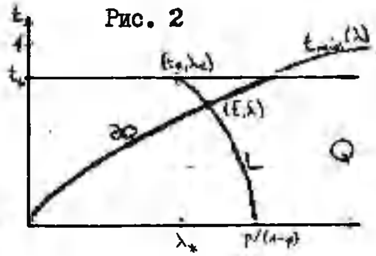


Рис. I соответствует случаю $L\subset Q$, рис. 2 случаю $L\not\subset Q$. Какой из них реализуется, зависит от значения d:

$$L\subset Q\iff t_*\leq t_{min}(\lambda_*)\iff$$

5*

$$\frac{(2p-1)^{2p-1}(1-p)^{2(1-p)}}{(2p-1)^{2p-1}(1-p)^{2(1-p)}+d^{2p+2}} \leq \frac{(2p-1)^{p}}{(2p-1)^{p}+d^{p+1}(1-p)^{p}} \iff$$

$$d^{p+1} \geqslant \frac{(1-p)^{2-p}}{(2p-1)^{1-p}} \equiv d_e^{p+1}.$$

Предположим, что $d \geqslant d_e$. Возьмем произвольные t_1, t_2 такие, что $0<t_1<t_2\leq t_*$. Тогда $(t_1, \lambda_{max}(t_1)), (t_2, \lambda_{max}(t_2)) \in L$, и по определению t_* точка $\lambda_{max}(t)$ является точкой глобального максимума: $\varphi_p(d, t_1, \lambda_{max}(t_1)) \geqslant \varphi_p(d, t_1, \lambda)$ для каждого $\lambda \geqslant 0$, в том числе и $\varphi_p(d, t_1, \lambda_{max}(t_1)) \geqslant \varphi_p(d, t_1, \lambda_{max}(t_2))$. С другой стороны, для каждого $(\bar{t}, \lambda) \in Q$ функция $\varphi_p(d, t, \lambda)$ по t строго убывает в области $t \in (0, \bar{t}]$. Значит (так как у нас $L \subset Q$, ведь $d \geqslant d_e$), $\varphi_p(d, t_2, \lambda_{max}(t_2)) < \varphi_p(d, t_1, \lambda_{max}(t_2))$. В итоге доказана импликация

$$d \geqslant d_e,\ 0<t_1<t_2\leq t_* \Rightarrow \varphi_p(d, t_1, \lambda_{max}(t_1)) > \varphi_p(d, t_2, \lambda_{max}(t_2)), \tag{23}$$

т.е. функция $\varphi_p(d, t, \lambda_{max}(t))$ строго убывает по t, $t \in (0, t_*]$. Добавим к этому, что $\varphi_p(d, t, 0)$ по t строго возрастает (см. (8)), в частности

$$t_* < \bar{t}_1 < \bar{t}_2 < 1 \Rightarrow \varphi_p(d, \bar{t}_1, 0) < \varphi_p(d, \bar{t}_2, 0). \tag{24}$$

Нам надо найти $\inf\limits_{0<t\leq 1} \sup\limits_{0\leq\lambda<\infty} \varphi_p(d, t, \lambda)$. Учитывая определение t_*, мы из импликации (23) увидим, что $\varphi_p(d, t, \lambda)$ убывает по t до точки t_* по глобальным максимумам. Заметим, имея в виду (I8) и (24), что наименьший из глобальных максимумов $\varphi_p(d, t, \lambda)$ достигается в точке t_*. Итак, точками минимакса являются (так как выполнено (I8.в)) $(t_*, \lambda_{*1}) = (t_*, 0)$ и $(t_*, \lambda_{*2}) = (t_*, \lambda_{max}(t_*))$.

Предположим теперь, что $d < d_e$. Обозначим через $(\bar{t}, \bar{\lambda})$ единственную точку множества $L \cap \partial Q$. Аналогично как выше доказывается импликация (на этот раз только $L|_{t<\bar{t}} \subset Q$)

$$d<d_e,\ 0<t_1<t_2<\bar{t} \Rightarrow$$

$$\varphi_p(d, t_1, \lambda_{max}(t_1)) > \varphi_p(d, t_2, \lambda_{max}(t_2)). \tag{25}$$

Учитывая еще свойства множества $Q^* = \{(t,\lambda): 0<t\leq t_*, \lambda\geqslant 0\} \setminus Q$ и $L|_{t>\bar{t}} \subset Q^*$, устанавливаем импликацию

$$d<d_e,\ \bar{t} \leq \bar{\bar{t}}_1 < \bar{\bar{t}}_2 \leq t_* \Rightarrow \varphi_p(d, \bar{\bar{t}}_1, \lambda_{max}(\bar{\bar{t}}_1)) < \varphi_p(d, \bar{\bar{t}}_2, \lambda_{max}(\bar{\bar{t}}_2)). \tag{26}$$

Ясно, что наименьший из глобальных максимумов $\varphi_p(d, t, \lambda)$ достигается в точке $\bar{t}$ – это прямое следствие из (25), (26) и (24). Итак, на сей раз точкой минимакса является $(\bar{t}, \bar{\lambda})$.

Еще надо найти $\inf\limits_{d>0} \varphi_p$. В силу вышесказанного

$$\inf_{d>0} \varphi_p = \min\{\inf_{d<d_e} \varphi_p(d,\bar{t},\bar{\lambda}),\ \inf_{d\geq d_e} \varphi_p(d,t_*,0)\},$$

или

$$\inf_{d>0} \varphi_p = \min\{\inf_{d<d_e} \varphi_p(d,\bar{t},\bar{\lambda}),\ \inf_{d\geq d_e} \varphi_p(d,t_*,\lambda_{max}(t_*))\}.$$

Найдем $\inf\limits_{d\geq d_e} \varphi_p(d,t_*,0) = \inf\limits_{d\geq d_e} \varphi_p(d,t_*,\lambda_{max}(t_*))$. Из (I2) и (I3) видно, что для нахождения точки минимума надо решить уравнение $\frac{\partial \varphi_p(d,t_*,0)}{\partial d} = 0$, или $\frac{\partial \varphi_p(d,t_*,\lambda_{max}(t_*))}{\partial d} = 0$. Общим решением (при решении имеем в виду (20), (21)) является

$$d_* = \left[(2p-1)^{2p-1}(1-p)^{2(1-p)}p\right]^{\frac{1}{2(1+p)}}. \tag{27}$$

Мы получили $\varphi_p(d_*,t_*,\lambda_*) = \inf\limits_{d>0} \varphi_p(d,t_*,\lambda_*)$, но так как $d_*\geq d_e \Leftrightarrow p\geq \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$, то $\varphi_p(d_*,t_*,\lambda_*) = \inf\limits_{d\geq d_e} \varphi_p(d,t_*,\lambda_*)$.
Найдем теперь $\inf\limits_{d<d_e} \varphi_p(d,\bar{t},\bar{\lambda})$. Точка $(\bar{t},\bar{\lambda})$ удовлетворяет системе (22), т.е. $\bar{t} = \bar{\lambda}^p/(\bar{\lambda}^p + d^{p+1})$, $q_1(\bar{\lambda}) = 0$. Вычислим

$$\varphi_p(d,\bar{t},\bar{\lambda}) = \frac{1}{1+\bar{\lambda}}\sqrt{\left(\frac{\bar{\lambda}}{d}\right)^{2p}\cdot\frac{\bar{\lambda}^p + d^{p+1}}{\bar{\lambda}^p} + \frac{d^2(\bar{\lambda}^p + d^{p+1})}{d^{p+1}}} = \frac{\bar{\lambda}^p + d^{p+1}}{(1+\bar{\lambda})\,d^p}.$$

Покажем, что $\frac{\partial \varphi_p(d,\bar{t},\bar{\lambda})}{\partial d} \leq 0$. Имеем

$$\frac{\partial \varphi_p(d,\bar{t},\bar{\lambda})}{\partial d} = \frac{\bar{\lambda}'(d)\left[(p-1)\bar{\lambda}^p(d) + p\bar{\lambda}^{p-1}(d) - d^{p+1}\right]}{d^p(1+\bar{\lambda}(d))^2} + \frac{d^{p+1} - \bar{\lambda}^p(d)\cdot p}{(1+\bar{\lambda}(d))\cdot d^p} =$$

$$- \frac{\bar{\lambda}'(d)\cdot q_1(\bar{\lambda}(d))}{d^p(1+\bar{\lambda}(d))^2} + \frac{d^{p+1} - \bar{\lambda}^p(d)\cdot p}{d^p(1+\bar{\lambda}(d))} = \frac{d^{p+1} - p\bar{\lambda}^p(d)}{d^p(1+\bar{\lambda}(d))}.$$

Надо показать, что $d^{p+1} - p\bar{\lambda}^p(d) \leq 0$, или

$$d^{p+1} \leq p\bar{\lambda}^p(d). \tag{28}$$

Убедимся, что $\bar{\lambda}(d)$ убывающая функция. Для этого покажем, что $\bar{\lambda}'(d) \leq 0$. Из (I6) по формуле полного дифференциала получим $\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda}\bar{\lambda}'(d) + \frac{\partial \Phi}{\partial d} = 0$, откуда

$$\bar{\lambda}'(d) = -\frac{\frac{\partial \Phi}{\partial d}}{\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda}} = \frac{(p+1)d^p\bar{\lambda}^{2-p}(d)}{p\left[2p-1-2(1-p)\bar{\lambda}(d)\right]}.$$

Значит,

$$\bar{\lambda}'(d) \leq 0 \Leftrightarrow 2p-1-2(1-p)\bar{\lambda}(d) \leq 0 \Leftrightarrow \bar{\lambda}(d) \geq \frac{2p-1}{2(1-p)}.$$

Поскольку точка $\frac{2p-1}{2(1-p)}$ является точкой максимума для $\Phi(\lambda)$, то всегда $\lambda_{max} \geq \frac{2\rho-1}{2(1-\rho)}$, в том числе и $\bar\lambda(d) \geq \frac{2\rho-1}{2(1-\rho)}$ (см. стр.33). Значит $\bar\lambda(d)$ действительно убывающая функция. Из неравенств $d^{\rho+1} < d_*^{\rho+1} = \frac{(1-\rho)^{2-\rho}}{(2\rho-1)^{1-\rho}}$ и $\bar\lambda(d) \geq \bar\lambda(d_*) = \frac{2\rho-1}{1-\rho}$ вытекает, что для (28) достаточно неравенство

$$\frac{\rho(1-\rho)^{2-\rho}}{(2\rho-1)^{1-\rho}} < \rho\,\frac{(2\rho-1)^{\rho}}{(1-\rho)^{\rho}},$$

которое выполняется при $\rho^2+\rho-1>0$, т.е. при $\rho > \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$. Итак, $\inf\limits_{d<d_*} \varphi_\rho(d,\bar t,\bar\lambda) = \varphi_\rho(d_*,\bar t,\bar\lambda)$. Легко проверить, что

$$\lim_{d\to d_*+} \varphi_\rho(d,t_*,\lambda_*) = \lim_{d\to d_*-} \varphi_\rho(d,\bar t,\bar\lambda).$$

Этим доказано, что $\inf\limits_{d>0}\varphi_\rho$ достигается в точке d_*. Подставив d_* из (27) в (2I), получаем точки мини-минимакса (см. также (20)),

$$\begin{cases} \lambda_{*1}=0, & t_*=\frac{1}{\rho+1}, \quad d_*=\left[(2\rho-1)^{2\rho-1}(1-\rho)^{2(1-\rho)}\rho\right]^{\frac{1}{2(1+\rho)}}, \\ \lambda_{*2}=\frac{2\rho-1}{1-\rho}, & t_*=\frac{1}{\rho+1}, \quad d_*=\left[(2\rho-1)^{2\rho-1}(1-\rho)^{2(1-\rho)}\rho\right]^{\frac{1}{2(1+\rho)}}. \end{cases} \tag{29}$$

Константа c_ρ из (4) примет вид

$$c_\rho = \inf_{d>0}\inf_{0<t<1}\sup_{0\leq\lambda<\infty}\varphi_\rho(d,t,\lambda) = \varphi_\rho(d_*,t_*,\lambda_{*1}) = \varphi_\rho(d_*,t_*,\lambda_{*2}) =$$

$$= \left[\frac{(2\rho-1)^{2\rho-1}(1-\rho)^{2(1-\rho)}(1+\rho)^{1+\rho}}{\rho^{\rho}}\right]^{\frac{1}{2(1+\rho)}}, \quad \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)<\rho<1. \tag{30}$$

Подставивь(30) в (3), приходим к оценке (6). Оптимальный выбор параметра α имеет вид (см. [I]) $\alpha = \frac{1}{d_*}\left(\frac{\delta}{\rho}\right)^{\frac{1}{\rho+1}}$, и по (27) получаем

$$\alpha = \left[\frac{1}{\rho(2\rho-1)^{2\rho-1}(1-\rho)^{2(1-\rho)}}\right]^{\frac{1}{2(1+\rho)}} \rho^{\frac{1}{\rho+1}}\,\delta^{\frac{\rho}{\rho+1}}.$$

Теорема при $\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)<\rho<1$ доказана.

б) Пусть $\rho=1$. Тогда

$$\varphi_1(d,t,\lambda) = \frac{1}{1+\lambda}\sqrt{\frac{\lambda^2}{d^2t}+\frac{d^2}{1-t}}, \quad \varphi_1(d,t,0)=\frac{d}{\sqrt{1-t}},$$

$$\varphi_1(d,t,\lambda) \longrightarrow \frac{1}{d\sqrt{t}} \quad \text{при} \quad \lambda\to\infty.$$

Итак,

$$c_1 = \inf_{d>0}\inf_{0<t<1}\sup_{0\leq\lambda<\infty}\varphi_1(d,t,\lambda) = \inf_{d>0}\inf_{0<t<1}\max\left\{\frac{d}{\sqrt{1-t}},\frac{1}{d\sqrt{t}}\right\}.$$

Инфимум по t достигается при $d/\sqrt{1-t} = 1/d\sqrt{t}$. Отсюда $t_* = 1/(1+d^4)$ и $c_1 = \inf\limits_{d>0}\left(\sqrt{1+d^4}/d\right)$,

$$c_1 = \sqrt{2}. \tag{3I}$$

При этом точками мини-минимакса являются

$$\begin{cases} \lambda_{*1}=0\,, & t_*=\frac{1}{2}\,,\ d_*=1\,, \\ \lambda_{*2}=\infty\,, & t_*=\frac{1}{2}\,,\ d_*=1\,. \end{cases}$$

Заметим, что в процессе $\rho\to 1$ мы из выражений (29) и (30) получаем (32) и (31). Теорема доказана.

Приведем таблицу значений константы c_ρ.

ρ	$\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	I
c_ρ	I	I,00	I,02	I,05	I,08	I.I3	I,I9	I,28	$\sqrt{2}$

Литература

I. Вайникко Г.М., Веретенников А.Ю. Итерационные процедуры в некорректных задачах. М., Наука, I986.

2. Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М., Наука, I978.

Поступило
25 III I986

OPTIMAL CHOICE OF THE PARAMETER
IN THE LAVRENTIEV METHOD

T.Kiho

Summary

The question about the optimal choice of the parameter in the Lavrentiev method for solving the operator equation $Au=f$ with a linear continuous self-conjugate non-negative operator in a Hilbert space on the class of the sourcelike elements is answered in this article.

Уч.зап.Тартуск.ун-та,1986,672,40–46.

О НЕКОТОРЫХ РЕЗУЛЬТАТАХ, СВЯЗАННЫХ С МЕТОДОМ ОПЕРАТОРНЫХ ИТЕРАЦИЙ

А. Минц

В данной работе приводится численная иллюстрация результатов, полученных при исследовании сходимости метода операторных итераций решения линейного операторного уравнения (см. [2, 3]), а также даются рекомендация о выборе наиболее удобного для вычислений начального операторного приближения.

§I. Предварительные результаты

Операторное уравнение

$$Au = f, \tag{I}$$

где A – линейный оператор в гильбертовом пространстве H,

$$A = A^* \geq 0, \qquad \|A\| \leq a < \infty,$$

решается методом операторных итераций

$$B_k = B_{k-1}(2I - AB_{k-1}), \qquad B_0 = g(A). \tag{2}$$

Здесь $g(\lambda)$ — непрерывная на $[0; \|A\|]$ функция,

$$0 < g(\lambda) < 2/\lambda. \tag{3}$$

Очередное приближение к решению (I) вычисляется следующим образом:

$$u_k = (I - AB_k)u_0 + B_k f, \text{ где } u_0 \in H.$$

Интересно отметить (см., например, [I]), что приближение u_k, вычисленное методом операторных итераций, совпадает с приближением u_n, вычисленным методом простых итераций

$$u_n = u_{n-1} - B_0(Au_{n-1} - f), \qquad n = 2^k.$$

Из-за погрешностей округления или каких-то других помех вычисления проводятся неточно, так что на k-ом шаге итераций (2) делается ошибка C_k и, таким образом, вместо B_k получается его приближенное значение $\tilde{B}_k$:

$$\tilde{B}_k = \tilde{B}_{k-1}(2I - A\tilde{B}_{k-1}) + C_k, \qquad \tilde{B}_0 = B_0 + C_0.$$

Обозначим $\varepsilon_k = \|\tilde{B}_k - B_k\|$. В работах [2] и [3] исследовался вопрос о поведении ε_k в случае, когда задача (I) поставлена соответственно некорректно или корректно. Там были получены следующие результаты:

I) Пусть $0 \in \sigma(A)$; $\|C_k\| \le \varepsilon \cdot 2^k$. Тогда при $(k+1)\,2^{k-1}\varepsilon < 1$ имеем

$$\varepsilon_k \le 2^{k+1}\cdot(k+1)\,\varepsilon. \qquad (4)$$

2) Пусть $0 \in \sigma(A)$; $\|C_k\| \le \varepsilon$. Тогда при $0 \le k \le -\lg_2 \varepsilon - 2$ имеем

$$\varepsilon_k \le 3\cdot 2^k \varepsilon. \qquad (5)$$

3) Пусть $\sigma(A) \subset [p; \|A\|]$, $p > 0$; $q = \max\limits_{\lambda\in\sigma(A)} |1-\lambda g(\lambda)|$; $\|C_k\| \le \varepsilon$.

Если $\varepsilon < \sqrt{q} - q$, то ε_k сходится, причем

$$\lim_{k\to\infty} \varepsilon_k \le (1-\sqrt{1-4\varepsilon})/2. \qquad (6)$$

Численной иллюстрации этих результатов и посвящена данная статья.

§2. О вычислении начального приближения B_0.

Одним из видов задачи (I) может быть, например, задача решения интегрального уравнения первого рода. Производя дискретизацию этого уравнения, получим задачу решения линейной системы

$$Au = f, \qquad (7)$$

где A - самосопряженная матрица размерности $N \times N$, причем N достаточно велико.

Для того, чтобы начать счет методом операторных итераций, необходимо вычислить начальное операторное приближение B_0, равное $g(A)$, и сразу встает вопрос о выборе функции $g(\lambda)$.

На первый взгляд удобной кажется $g_1(\lambda) = 1/(1+\lambda)$, поскольку она удовлетворяет условию (3) при любых $\lambda \in [0, +\infty[$. Однако, как показал счет, при больших N вычисление $g_1(\lambda)$ занимает время, практически равное времени, приходящемуся непосредственно на применение метода, и, кроме того, погрешность C_0 оказывается довольно большой. Поэтому автор предлагает выбирать в качестве $g(\lambda)$ линейную функцию $g_2(\lambda) = c_0 - c_1\lambda$ с надлежаще подобранными коэффициентами c_0 и c_1. Неудобством вычисления $g_2(\lambda)$ по сравнению с $g_1(\lambda)$ является необходимость вычисления $\|A\|$. Однако, как показывают результаты, помещенные в табл. I-4, выигрыш во времени при счете с помощью $g_2(\lambda)$ получается весьма значительным (почти в 3 раза).

Коэффициенты c_0, c_1 выбираются из следующих соображений:

а) $g_2(\lambda) = c_0 - c_1\lambda$ должна удовлетворять условию (3);

б) $\alpha(c_0, c_1) = \max_{\lambda\in\sigma(A)} |1-\lambda(c_0+c_1\lambda)|$ должен быть минимален по c_0, c_1. Последнее условие связано с тем, что скорость сходимости метода (2) тем больше, чем меньше α.

Из соображений а), б) следует, что c_0, c_1 необходимо должны удовлетворять неравенствам:

$$0 < c_0 < 8/a, \qquad c_0^2/8 < c_1 < c_0/a.$$

Если каким-то образом оценивается $p = \inf_{\lambda\in\sigma(A)} \lambda$, то из б) можно получить более узкие границы для c_0, c_1.

§3. Численные результаты

Рассмотрим модельную задачу (ср. [I])

$$h\sum_{j=1}^{N-1} a_{ij} u_j = f_i \qquad (i = 1, \ldots, N-1), \tag{8}$$

где $h = 1/N$; $a_{ij} = \pi^2 \cdot ih(1-jh)$ при $i \le j$,

$a_{ij} = a_{ji}$ $(i, j = 1, \ldots, N-1)$,

полученную дискретизацией интегрального уравнения первого рода

$$\pi^2 \int_0^1 G(t,s)u(s)ds = f(t) \qquad (0 \le t \le 1),$$

где

$$G(t,s) = \begin{cases} t(1-s), & t \le s \\ s(1-t), & t > s \end{cases}$$

– функция Грина дифференциального оператора $-y''$ при краевых условиях $y(0) = y(1) = 0$.

Формально задача (8) является корректно поставленной, однако при достаточно больших N она близка к некорректной, т.к. минимальное собственное число матрицы A пропорционально $1/N^2$.

Для удобства вычислений предполагалось, что точное решение $u_* = (1, \ldots, 1)$. В этом случае

$$f_j = \frac{\pi^2}{2N} j(N-j) \qquad (j = 1, \ldots, N-1).$$

Начальное приближение $u_0 = (0.5, \ldots, 0.5)$.

В таблицах I–4 приведены результаты, иллюстрирующие поведение невязки $Au_k - f$ и нормы $u_* - u_k$ при различных N, для $B_0=(I+A)^{-1}$ и $B_0=c_0 I - c_1 A$, причем вычисления проводились на ЭВМ ЕС-1022 с обычной и двойной точностью. Указано также время вычислений T в секундах. Из таблиц видно, что при вычислениях с обычной точностью норма невязки $Au_k - f$, а также норма $u_* - u_k$ не стремятся к 0, а стабилизируются на некотором отличном от 0 значении, при вычислении же с двойной точностью они стремятся к 0. Этого можно было ожидать, исходя из (6).

В случае задачи

$$h \sum_{j=1}^{N} a_{ij} u_j = f_i \quad (i=1,\dots,N), \tag{8'}$$

как легко видеть, одним из собственных чисел матрицы A является 0, и, таким образом, задача (8') поставлена некорректно. В таблицах 5–6 приведены для этой постановки результаты, аналогичные результатам таблиц I–4. Следует заметить, что в этом случае $H_k^{(1)}$ и $H_k^{(2)}$ стремятся не к 0, а к 0.5. Это происходит потому, что u_k сходятся не к $u_* = (1,\dots,1)$, а к другому точному решению $u_*' = (1,\dots,1,0.5)$.

Обозначения в таблицах:

$E_k^{(1)}$, $E_k^{(2)}$ – норма невязки $Au_k - f$, а $G_k^{(1)}$, $G_k^{(2)}$ – норма $u_k - u_*$, при вычислениях с обычной и двойной точностью соответственно, если $B_0=(I+A)^{-1}$;

$D_k^{(1)}$, $D_k^{(2)}$, $H_k^{(1)}$, $H_k^{(2)}$ – то же самое, если $B_0 = c_0 I - c_1 A$.

Автор выражает глубокую благодарность профессору Г.Вайникко за помощь в работе.

Таблица I

$N=40$

K	$E_k^{(1)}$	$E_k^{(2)}$	$G_k^{(1)}$	$G_k^{(2)}$
I0	$1.5\cdot 10^{-2}$	0.0	$3.6\cdot 10^{-2}$	0.0
II	$1.3\cdot 10^{-2}$	-"-	$2.6\cdot 10^{-2}$	-"-
I2	$1.3\cdot 10^{-2}$	-"-	$2.0\cdot 10^{-2}$	-"-
I3	$1.5\cdot 10^{-2}$	-"-	$2.3\cdot 10^{-2}$	-"-
I4	$1.5\cdot 10^{-2}$	-"-	$2.4\cdot 10^{-2}$	-"-
I5	$1.4\cdot 10^{-2}$	-"-	$1.7\cdot 10^{-2}$	-"-
I6	$1.1\cdot 10^{-2}$	-"-	$2.5\cdot 10^{-2}$	-"-
I7	$1.4\cdot 10^{-2}$	-"-	$1.5\cdot 10^{-2}$	-"-
I8	$1.3\cdot 10^{-2}$	-"-	$2.3\cdot 10^{-2}$	-"-
I9	$1.6\cdot 10^{-2}$	-"-	$2.2\cdot 10^{-2}$	-"-
20	$1.1\cdot 10^{-2}$	-"-	$2.3\cdot 10^{-2}$	-"-
T	3.3	4.4		

Таблица 2

$N = 40$

$c_0 = 6.I\cdot IO^{-I}$ $c_1 = 4.7\cdot IO^{-2}$

K	$D_k^{(1)}$	$D_k^{(2)}$	$H_k^{(1)}$	$H_k^{(2)}$
I0	I2.5	II.2	$9.6\cdot IO^{-I}$	$8.8\cdot IO^{-I}$
II	4.3	3.5	$3.2\cdot IO^{-I}$	$2.7\cdot IO^{-I}$
I2	$5.8\cdot IO^{-I}$	$3.3\cdot IO^{-I}$	$4.4\cdot IO^{-2}$	$2.6\cdot IO^{-I}$
I3	$2.2\cdot IO^{-2}$	$3.0\cdot IO^{-3}$	$3.3\cdot IO^{-2}$	$2.4\cdot IO^{-4}$
I4	$I.I\cdot IO^{-2}$	$2.5\cdot IO^{-7}$	$3.3\cdot IO^{-2}$	0.0
I5	$I.3\cdot IO^{-2}$	0.0	$3.3\cdot IO^{-2}$	–"–
I6	$I.3\cdot IO^{-2}$	–"–	$3.3\cdot IO^{-2}$	–"–
I7	$I.4\cdot IO^{-2}$	–"–	$I.7\cdot IO^{-2}$	–"–
I8	$I.6\cdot IO^{-2}$	–"–	$2.6\cdot IO^{-2}$	–"–
I9	$I.3\cdot IO^{-2}$	–"–	$3.0\cdot IO^{-2}$	–"–
20	$I.6\cdot IO^{-2}$	–"–	$2.2\cdot IO^{-2}$	–"–
T	I.I	I.2		

Таблица 3

$N = 50$

K	$E_k^{(1)}$	$E_k^{(2)}$	$G_k^{(1)}$	$G_k^{(2)}$
I0	$4.6\cdot IO^{-2}$	0.0	$5.5\cdot IO^{-2}$	0.0
II	$4.3\cdot IO^{-2}$	–"–	$6.2\cdot IO^{-2}$	–"–
I2	$3.9\cdot IO^{-2}$	–"–	$4.8\cdot IO^{-2}$	–"–
I3	$3.8\cdot IO^{-2}$	–"–	$5.5\cdot IO^{-2}$	–"–
I4	$4.I\cdot IO^{-2}$	–"–	$7.3\cdot IO^{-2}$	–"–
I5	$3.3\cdot IO^{-2}$	–"–	$6.I\cdot IO^{-2}$	–"–
I6	$3.5\cdot IO^{-2}$	–"–	$8.0\cdot IO^{-2}$	–"–
I7	$3.8\cdot IO^{-2}$	–"–	$6.5\cdot IO^{-2}$	–"–
I8	$3.6\cdot IO^{-2}$	–"–	$6.I\cdot IO^{-2}$	–"–
I9	$3.9\cdot IO^{-2}$	–"–	$6.I\cdot IO^{-2}$	–"–
20	$4.2\cdot IO^{-2}$	–"–	$6.0\cdot IO^{-2}$	–"–
T	9.0	9.3		

Таблица 4

$N = 50$

$c_0 = 4.9 \cdot 10^{-1}$ $c_1 = 3.0 \cdot 10^{-2}$

K	$D_k^{(1)}$	$D_k^{(2)}$	$H_k^{(1)}$	$H_k^{(2)}$
10	12.7	11.7	$7.8 \cdot 10^{-1}$	$7.2 \cdot 10^{-1}$
11	3.3	2.7	$2.1 \cdot 10^{-1}$	$1.6 \cdot 10^{-1}$
12	$2.1 \cdot 10^{-1}$	$1.4 \cdot 10^{-1}$	$6.7 \cdot 10^{-2}$	$8.0 \cdot 10^{-3}$
13	$6.1 \cdot 10^{-3}$	$4.0 \cdot 10^{-4}$	$6.4 \cdot 10^{-2}$	$2.0 \cdot 10^{-5}$
14	$8.7 \cdot 10^{-3}$	0.0	$5.8 \cdot 10^{-2}$	0.0
15	$7.8 \cdot 10^{-3}$	–"–	$6.7 \cdot 10^{-2}$	–"–
16	$8.6 \cdot 10^{-3}$	–"–	$7.8 \cdot 10^{-2}$	–"–
17	$8.4 \cdot 10^{-3}$	–"–	$6.6 \cdot 10^{-2}$	–"–
18	$6.4 \cdot 10^{-3}$	–"–	$7.4 \cdot 10^{-2}$	–"–
19	$9.5 \cdot 10^{-3}$	–"–	$5.6 \cdot 10^{-2}$	–"–
20	$6.9 \cdot 10^{-3}$	–"–	$6.4 \cdot 10^{-2}$	–"–
T	1.4	1.5		

Таблица 5

$N = 45$

$c_0 = 5.7 \cdot 10^{-1}$ $c_1 = 4.1 \cdot 10^{-2}$

K	$D_k^{(1)}$	$D_k^{(2)}$	$H_k^{(1)}$	$H_k^{(2)}$
10	13.0	11.5	1.1	$9.6 \cdot 10^{-1}$
11	4.1	3.2	$5.8 \cdot 10^{-1}$	$5.5 \cdot 10^{-1}$
12	$4.5 \cdot 10^{-1}$	$2.4 \cdot 10^{-1}$	$5.0 \cdot 10^{-1}$	$5.0 \cdot 10^{-1}$
13	$2.1 \cdot 10^{-2}$	$1.0 \cdot 10^{-3}$	$5.0 \cdot 10^{-1}$	$5.0 \cdot 10^{-1}$
14	$1.7 \cdot 10^{-2}$	0.0	$5.0 \cdot 10^{-1}$	$5.0 \cdot 10^{-1}$
15	$1.8 \cdot 10^{-2}$	–"–	$5.0 \cdot 10^{-1}$	$5.0 \cdot 10^{-1}$
16	$1.7 \cdot 10^{-2}$	–"–	$4.9 \cdot 10^{-1}$	$4.9 \cdot 10^{-1}$
17	$1.7 \cdot 10^{-2}$	–"–	$4.8 \cdot 10^{-1}$	$4.8 \cdot 10^{-1}$
18	$1.6 \cdot 10^{-2}$	–"–	$4.6 \cdot 10^{-1}$	$4.7 \cdot 10^{-1}$
19	$1.6 \cdot 10^{-2}$	–"–	$4.2 \cdot 10^{-1}$	$4.4 \cdot 10^{-1}$
20	$1.7 \cdot 10^{-2}$	–"–	$3.6 \cdot 10^{-1}$	$4.0 \cdot 10^{-1}$

Таблица 6

$N = 50$

$c_0 = 5.0 \cdot 10^{-1}$ $\qquad$ $c_1 = 3.2 \cdot 10^{-2}$

K	$D_k^{(1)}$	$D_k^{(2)}$	$H_k^{(1)}$	$H_k^{(2)}$
10	12.6	11.7	$9.4 \cdot 10^{-1}$	$8.9 \cdot 10^{-1}$
11	3.3	3.2	$5.4 \cdot 10^{-1}$	$5.3 \cdot 10^{-1}$
12	$2.0 \cdot 10^{-1}$	$2.4 \cdot 10^{-1}$	$5.0 \cdot 10^{-1}$	$5.0 \cdot 10^{-1}$
13	$6.1 \cdot 10^{-3}$	$1.0 \cdot 10^{-3}$	$5.0 \cdot 10^{-1}$	$5.0 \cdot 10^{-1}$
14	$7.0 \cdot 10^{-3}$	0.0	$5.0 \cdot 10^{-1}$	$5.0 \cdot 10^{-1}$
15	$7.0 \cdot 10^{-3}$	-"-	$5.0 \cdot 10^{-1}$	$5.0 \cdot 10^{-1}$
16	$8.0 \cdot 10^{-3}$	-"-	$5.0 \cdot 10^{-1}$	$5.0 \cdot 10^{-1}$
17	$7.2 \cdot 10^{-3}$	-"-	$5.0 \cdot 10^{-1}$	$5.0 \cdot 10^{-1}$
18	$6.1 \cdot 10^{-3}$	-"-	$4.9 \cdot 10^{-1}$	$4.9 \cdot 10^{-1}$
19	$7.1 \cdot 10^{-3}$	-"-	$4.8 \cdot 10^{-1}$	$4.9 \cdot 10^{-1}$
20	$7.6 \cdot 10^{-3}$	-"-	$4.6 \cdot 10^{-1}$	$4.8 \cdot 10^{-1}$

Литература

1. Вайникко Г. Методы решения линейных некорректно поставленных задач в гильбертовых пространствах. Тарту, ТГУ, 1982.
2. Минц А. Об устойчивости операторных итераций относительно погрешности округления. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1984, 672, 35-39.
3. Минц А. Погрешность операторных итераций в случае корректно поставленной задачи. Конф. "Теоретические и прикладные вопросы математики II". Тезисы докладов. Тарту, ТГУ, 1985, 95.

Поступило
10 III 1986

ON SOME RESULTS CONNECTED WITH THE OPERATOR ITERATIONS METHOD

A. Mints

Summary

In this work some numerical results concerning the operator iterations method are presented. Also some recommendations on the choice of a suitable starting operator are given.

Уч.зап.Тартуск.ун-та,1986,762,47-58.

О ПРИНЦИПЕ НЕВЯЗКИ В СЛУЧАЕ СМУТНОЙ ИНФОРМАЦИИ О ПОГРЕШНОСТИ ИСХОДНЫХ ДАННЫХ

Т. Раус

Рассматривается некоторая модификация принципа невязки при решении линейных некорректно поставленных задач в гильбертовом пространстве. Статья является продолжением исследований работы [2], и здесь рассматриваются некоторые возможности оценить погрешность приближенного решения в случае, когда погрешность свободного члена больше заданного нами числа δ.

Рассотрим уравнение

$$Au = f, \quad f \in R(A), \tag{I}$$

где A - линейный ограниченный самосопряженный неотрицательный оператор в гильбертовом пространство H; допукается незамкнутость области значений $R(A) \subseteq F$. Предполагается, что вместо f задано $f_\delta \in F$ и нам известна некоторая предполагаемая ошибка δ правой части, но в общем случае мы не знаем, действительно ли $\|f_\delta - f\| \le \delta$ или нет.

Рассмотрим класс методов решения уравнения (I) (см. [I]). Пусть $\{g_n\}_{n \in (0,\infty)}$ - семейство ограниченных, измеримых по Борелю функций $g_n : [0,a] \to R$ таких, что $\|A\| \le a$ и

$$\sup_{0 \le \lambda \le a} |g_n(\lambda)| \le \gamma n \qquad (n > 0), \tag{2}$$

$$\sup_{0 \le \lambda \le a} \lambda^p |1 - \lambda g_n(\lambda)| \le \gamma_p n^{-p} \quad (n > 0,\ 0 \le p \le p_0), \tag{3}$$

где γ, γ_p - некоторые постоянные, $p_0 > 0$, $\gamma_0 = 1$. Приближенное решение уравнения (I) строится по формуле

$$u_n = (I - Ag_n(A))u_0 + g_n(A) f_\delta, \tag{4}$$

где I - единичный оператор, u_0 - начальное приближение.

Далее рассмотрим подробнее следующие методы этого класса.

I. <u>Метод Лаврентьева и его итерированный вариант.</u> Вычислим m итераций

$$u_{n,n} = (n^{-1} I + A)^{-1} (n^{-1} u_{n-1,n} + f_\delta), \quad n = 1, 2, \dots m;$$

за приближенное решение уравнения (I) примем $u_n = u_{m,n}$. Это приближение имеет форму (4) с функцией $g_n(\lambda) = \frac{1}{\lambda}[1 - (1+n\lambda)^{-m}]$, для которой $\gamma = m$, $\gamma_p = (p/m)^p(1-p/m)^{m-p}$, $p_0 = m$. Если $m = 1$, $u_0 = 0$, то получим метод Лаврентьева.

2. <u>Неявный итерационный метод:</u>

$$(\alpha I + A)u_n = \alpha u_{n-1} + f_\delta, \quad n = 1,2,\ldots, \quad \alpha = const > 0;$$

$$g_n(\lambda) = \frac{1}{\lambda}\left[1 - \left(\frac{\alpha}{\alpha+\lambda}\right)^n\right], \quad \gamma = \alpha^{-1}, \quad \gamma_p = (\alpha p)^p, \quad p_0 = \infty.$$

3. <u>Явный итерационный метод:</u>

$$u_n = u_{n-1} - \mu(Au_{n-1} - f_\delta), \quad n = 1,2,\ldots, \quad \mu \in (0, 1/\|A\|);$$

$$g_n(\lambda) = \frac{1}{\lambda}[1 - (1-\lambda\mu)^n], \quad \gamma = \mu, \quad \gamma_p = [p/(\mu e)]^p, \quad p_0 = \infty.$$

Введём функцию $B_n(\lambda)$, которая зависит от квалификации метода p_0, положив

$$B_n(\lambda) = \begin{cases} (1 - \lambda g_n(\lambda))^{\frac{1}{p_0}} & \text{при} \quad p_0 < \infty, \\ 1 & \text{при} \quad p_0 = \infty, \end{cases}$$

и обозначим

$$\bar{\gamma}_p = \begin{cases} [\gamma_{p p_0/(p_0+1)}]^{1+\frac{1}{p_0}} & \text{при} \quad p_0 < \infty, \\ \gamma_p & \text{при} \quad p_0 = \infty. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что для методов I–3 выполнены ещё следующие неравенства:

$$1 - \lambda g_{n_2}(\lambda) \le 1 - \lambda g_{n_1}(\lambda) \qquad (0 \le \lambda \le a,\ n_2 \ge n_1 > 0), \tag{5}$$

$$n_1 g_{n_2}(\lambda) \le n_2 g_{n_1}(\lambda) \qquad (0 \le \lambda \le a,\ n_2 \ge n_1 > 0), \tag{6}$$

$$\gamma n B_{n/2}(\lambda)(1 - \lambda g_{n/2}(\lambda)) \le g_n(\lambda) \qquad (0 \le \lambda \le a,\ n > 0), \tag{7}$$

$$\left.\frac{d(g_s(\lambda))}{ds}\right|_{s=n} \ge \gamma c_M B_n(\lambda)(1 - \lambda g_n(\lambda)) \qquad (0 \le \lambda \le a,\ n > 0), \tag{8}$$

где для методов I–3 $c_M = 1$, $c_M = \frac{\alpha}{a}\ln(1+\frac{a}{\alpha})$, $c_M = 1$, соответственно. Также выполнено соотношение

$$\gamma n \lambda B_s(\lambda)(1 - \lambda g_s(\lambda)) \le 1 - \lambda g_n(\lambda) \qquad (0 \le \lambda \le a,\ n > 0,\ s \ge \rho_0(n)), \tag{9}$$

где для методов I–3 $\rho_0(n)$, соответственно,

$$\rho_0(n) = \begin{cases} [(mna)^{\frac{1}{m+1}}(1+na)^{\frac{m}{m+1}} - 1]/a, & \text{если } m \le 3 \text{ или} \\ \quad m > 3 \text{ и } n \le \bar{n}_1 = \frac{1}{a}(1+\frac{1}{m})/[m - (1+\frac{1}{m})^{m+1}], \\ (1 + \bar{\gamma}_1\gamma)n, & \text{если } m > 3 \text{ и } n > \bar{n}_1; \end{cases} \tag{10}$$

$$\rho_0(n)=\begin{cases} n+\dfrac{\ln\left(\frac{na}{\alpha}\right)}{\ln(1+a/\alpha)}, & \text{если } n\le \bar n_2=\frac{\alpha}{a}\left(1+\frac{a}{\alpha}\right)^{1+\frac{\alpha}{a}}, \\ (1+\bar\gamma_1\gamma)n, & \text{если } n>\bar n_2; \end{cases} \qquad (11)$$

$$\rho_0(n)=\begin{cases} n+\dfrac{\ln(\mu n a)}{\ln[(1-a\mu)^{-1}]}, & \text{если } n\le \bar n_3=\frac{1}{\mu a}(1-a\mu)^{1-\frac{1}{\mu a}}, \\ (1+\bar\gamma_1\gamma)n, & \text{если } n>\bar n_3. \end{cases} \qquad (12)$$

Сформулируем теперь правило выбора параметра.

<u>Правило П.</u> Зададим числа $b_1>1,\ b_2\ge b_1$. Если $\|B_0(A)(Au_0-f_\delta)\|\le b_2\delta$, то положим $n=0$. В противном случае выберем такое $n>0$, чтобы выполнялись неравенства

$$b_1\delta \le \|B_n(A)(Au_n-f_\delta)\|\le b_2\delta. \qquad (13)$$

Далее будем предполагать, что существует некоторое конечное значение параметра, для которого условие (13) выполнено. В противном случае наше предположение об ошибке правой части заведено неправильное (поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}\ \sup\limits_{f_\delta,\ \|f_\delta-f\|\le\delta}\|B_n(A)(Au_n-f_\delta)\|\le\delta$), и вместо δ надо брать некоторое $\delta'>\delta$. Отметим, что в случае $N(A)=\{0\}$ ($N(A)$ – нулевое пространство оператора A) $\lim\limits_{n\to\infty}\|B_n(A)(Au_n-f_\delta)\|=0$, и выбор параметра по правилу П всегда гарантирован. В случае $\|u_0-u_*\|\le M$, где M – известное нам число, можно использовать ещё следующее утверждение: если для $n\in\left[0,\ \frac{\gamma_* M}{(b_1-1)\delta}+1\right]$ условие (13) не выполнено, то $\|f_\delta-f\|>\delta$, и в таком случае выполнение условия (13) надо проверить только на конечном отрезке.

В [2] доказана

<u>Теорема 1.</u> Пусть u_* – ближайшее к начальному приближению u_0 решение уравнения (1) и параметр $n=n(\delta)$ выбран по правилу П. Если $\|f_\delta-f\|\le\delta$, то для методов 1–3 имеет место оценка

$$\|u_{n(\delta)}-u_*\|\le \max(c_{b_1},c_{b_2})\sup_{\tilde f,\ \|\tilde f-f\|\le\delta}\ \inf_{n\ge0}\|\tilde u_n-u_*\|, \qquad (14)$$

где

$$\tilde u_n=(I-Ag_n(A))u_0+g_n(A)\tilde f,$$

$$c_{b_1} = \sqrt{1+\left(\frac{\gamma \bar{\gamma}_1}{b_1-1}+1\right)^2}, \qquad c_{b_2} = \sqrt{\tau(c_*)}\,(b_2+1),$$

c_* – решение уравнения $\sqrt{\tau(c)}\,(b_2+1)=\sqrt{1+\eta(c)}$, причём в случае метода I

$$\tau(c)=m(e^{\frac{1}{m}}-1)[(m+1)e^{\frac{1}{m}}-m]^{-1}, \quad \eta(c)=c^2(m+1-me^{-\frac{1}{m}})^{-1},$$

а в случае методов 2 и 3

$$\tau(c)=(\ln c(1+\ln c))^{-1}, \quad \eta(c)=c^2(1+\ln c)^{-1}.$$

В случае $\|f_2-f\|>\delta$ имеет место

Теорема 2. Пусть параметр $n=n(\delta)$ выбран по правилу П. Если $\|f_2-f\|>\delta$, то для методов I–3 имеет место оценка

$$\|u_{n(\delta)}-u_*\| \le T_{n(\delta)}\left(\sup_{\bar f,\ \|\bar f-f\|\le\|f_2-f\|}\ \inf_{n\ge 0}\|\bar u_n-u_*\|+\frac{\|f_2-f\|}{a}\right), \tag{I5}$$

где

$$T_{n(\delta)} = \max\left\{2,\ c_{b_2},\ \sup_{s,\ s\ge n(\delta),\ s\in\frac{1}{\gamma}N} W(n(\delta),s)\right\},$$

$$W(n(\delta),s) = \frac{\|u_{n(\delta)}-u_{q(s)}\|}{\gamma s\,\|B_{p(s)}(A)(Au_{p(s)}-f_2)\|}+\frac{q(s)}{s},$$

N – множество натуральных чисел и для метода I

$$p(s)=\max(s/2,\ p_0(s)), \qquad q(s)=s,$$

а для методов 2 и 3

$$p(s)=\mathrm{INT}(p_0(s))+1, \quad q(s)=\min\{p(s),n(\delta)\};$$

функции $p_0(s)$ определены формулами (I0)–(I2).

Для доказательства теоремы 2 предварительно установим некоторые вспомогательные результаты.

Пусть $P(\lambda)$ – спектральное семейство проекторов оператора A. Сконструируем элемент $\bar f_2$ такой, что

$$\|P(\lambda)(\bar f_2-f)\| = \|P(\lambda)(f_2-f)\| \qquad (0\le\lambda\le a), \tag{I6}$$

$$\langle dP(\lambda)(u_0-u_*),\ \bar f_2-f\rangle \ge 0 \qquad (0\le\lambda\le a), \tag{I7}$$

где $\langle dP(\lambda)\ .\ ,\ .\rangle$ – спектральная мера оператора A. Обозначим $\bar u_n = (I-Ag_n(A))u_0+g_n(A)\bar f_2$ и докажем, что в случае $s\ge\max\{n/2,\ p_0(n)\}$ имеет место неравенство

$$\gamma n\,\|B_s(A)(Au_s-f_2)\| \le \|\bar u_n-u_*\|. \tag{I8}$$

Имеем

$$u_n - u_* = (I - Ag_n(A))(u_0 - u_*) + g_n(A)(f_z - f),$$
$$B_n(A)(Au_n - f_z) = B_n(A)(I - Ag_n(A))A(u_0 - u_*) - B_n(A)(I - Ag_n(A))(f_z - f).$$
Теперь, учитывая (7), (9), (I6), (I7), получим
$$(\gamma n)^2 \| B_s(A)(Au_s - f_*)\|^2 =$$
$$= (\gamma n)^2 \int_0^a B_s^2(\lambda)(1-\lambda g_s(\lambda))^2 \lambda^2 \, d\langle P(\lambda)(u_0 - u_*), u_0 - u_*\rangle -$$
$$- (\gamma n)^2 \int_0^a B_s^2(\lambda)(1-\lambda g_s(\lambda))^2 \lambda \, d\langle P(\lambda)(u_0 - u_*), f_z - f\rangle +$$
$$+ (\gamma n)^2 \int_0^a B_s^2(\lambda)(1-\lambda g_s(\lambda))^2 d\langle P(\lambda)(f_z - f), f_z - f\rangle \le$$
$$\le \int_0^a (1-\lambda g_n(\lambda))^2 \, d\langle P(\lambda)(u_0 - u_*), u_0 - u_*\rangle +$$
$$+ \int_0^a (1-\lambda g_n(\lambda)) g_n(\lambda) \, d\langle P(\lambda)(u_0 - u_*), \bar f_z - f\rangle +$$
$$+ \int_0^a g_n^2(\lambda) \, d\langle P(\lambda)(\bar f_z - f), \bar f_z - f\rangle = \|\bar u_n - u_*\|^2,$$
что доказывает неравенства (I8).

Далее, если $n_2 \ge n_1$, то на основании (2), (5), (6), (I6), (I7) получим
$$\|\bar u_{n_2} - u_*\| \le \|(I - Ag_{n_2}(A))(u_0 - u_*) + g_{n_1}(A)(\bar f_z - f)\| +$$
$$+ \|(g_{n_2}(A) - g_{n_1}(A))(\bar f_z - f)\| \le$$
$$\le \|(I - Ag_{n_1}(A))(u_0 - u_*) + g_{n_1}(A)(\bar f_z - f)\| +$$
$$+ \|(\tfrac{n_2}{n_1} - 1) g_{n_1}(A)(\bar f_z - f)\| \le \|\bar u_{n_1} - u_*\| + \gamma(n_2 - n_1)\|f_z - f\|,$$
и, следовательно,
$$\inf_{s,\ s \in \frac{1}{\gamma a}N} \|\bar u_s - u_*\| \le \inf_{n \ge 0} \|\bar u_n - u_*\| + \|f_z - f\|/a \le$$
$$\le \sup_{\bar f,\ \|\bar f - f\| \le \|f_z - f\|} \ \inf_{n \ge 0} \|\bar u_n - u_*\| + \|f_z - f\|/a. \tag{20}$$
Используя (5), (6), (I6), (I7), получим при $n_2 \ge n_1$
$$\|u_{n_2} - u_*\| \le \|\bar u_{n_2} - u_*\| = \|(I - Ag_{n_2}(A))(u_0 - u_*) + g_{n_2}(A)(\bar f_z - f)\| \le$$
$$\le \|(I - Ag_{n_1}(A))(u_0 - u_*) + \tfrac{n_2}{n_1} g_{n_1}(A)(\bar f_z - f)\| \le \tfrac{n_2}{n_1}\|\bar u_{n_1} - u_*\|. \tag{2I}$$
Обозначим здесь и далее через s_* точку глобального минимума последовательности $\|\bar u_s - u_*\|$, $s \in \frac{1}{\gamma a}N$ и через n_* точку минимума функции $f(n) = \{\|(I - Ag_n(A))(u_0 - u_*)\|^2 + (\gamma n\|f_z - f\|)^2\}^{1/2}$. По лемме I в [2] имеет место неравенство

$$f(n_*) \le \sup_{\tilde f,\ \|\tilde f - f\| \le \|f_\delta - f\|} \ \inf_{n \ge 0} \|\tilde u_n - u_*\|. \tag{22}$$

<u>Доказательство теоремы 2</u>. Предполагая, что $\|f_\delta - f\| > \delta$, докажем оценку (I5). Предположим сначала, что $s_* \le n(\delta)$. Тогда используя неравенства (I8), (20), (2I) и учитывая, что для методов 2 и 3 $\rho_0(s) \ge s/2$, $q(s) \ge s$, получим

$$\|u_{n(\delta)} - u_*\| \le \|u_{n(\delta)} - u_{q(s_*)}\| + \|u_{q(s_*)} - u_*\| \le$$

$$\le \left[\frac{\|u_{n(\delta)} - u_{q(s_*)}\|}{\gamma s_* \|B_{\rho(s_*)}(A)(Au_{\rho(s_*)} - f_\delta)\|} + \frac{a(s_*)}{s_*}\right] \|\bar u_{s_*} - u_*\| \le \tag{23}$$

$$\le W(n(\delta), s_*)\left[\sup_{\tilde f,\ \|\tilde f - f\| \le \|f_\delta - f\|} \ \inf_{n \ge 0} \|\tilde u_n - u_*\| + \|f_\delta - f\|/a\right].$$

Если $s_* \ge n(\delta)$ и $n_* \le n(\delta)$, то в силу (5), (20), (22) получим

$$\|u_{n(\delta)} - u_*\| \le \|(I - Ag_{n(\delta)}(A))(u_0 - u_*)\| + \|g_{n(\delta)}(A)(f_\delta - f)\| \le$$

$$\le \|(I - Ag_{n_*}(A))(u_0 - u_*)\| + \|g_{s_*}(A)(f_\delta - f)\| \le \tag{24}$$

$$\le f(n_*) + \|\bar u_{s_*} - u_*\| \le 2 \sup_{\tilde f,\ \|\tilde f - f\| \le \|f_\delta - f\|} \ \inf_{n \ge 0} \|\tilde u_n - u_*\|.$$

В заключение, если $s_* \ge n(\delta)$ и $n_* \ge n(\delta)$, то на основании (3), (I3), (I9)

$$\|B_{n(\delta)}(A)(I - Ag_{n(\delta)}(A))A(u_0 - u_*)\| \le b_2\delta + \|f_\delta - f\| \le (b_2 + 1)\|f_\delta - f\|,$$

и аналогично доказательству теоремы 2 в [2] получим

$$\|u_{n(\delta)} - u_*\| \le C_{b_2} \sup_{\tilde f,\ \|\tilde f - f\| \le \|f_\delta - f\|} \ \inf_{n \ge 0} \|\tilde u_n - u_*\|. \tag{25}$$

Теперь оценка (I5) непосредственно следует из неравенств (23)-(25). Теорема 2 доказана.

В оценке (I5) $T_{n(\delta)}$ вычислимая функция, и следовательно, теорема I даёт возможность опостериори оценить погрешность приближенного решения в случае $\|f_\delta - f\| > \delta$. Так как при подходящем выборе постоянных b_1 и b_2 величины C_{b_1} и C_{b_2} будут достаточно малыми (см. [2]), то, судя по оценкам (I4), (I5), можно сказать, что независимо от величины $\|f_\delta - f\|/\delta$ параметр $n = n(\delta)$ хорошо выбран, если $T_{n(\delta)}$ будет мала. Если значение $T_{n(\delta)}$ будет большим, то в общем мы не можем судить, выбран ли параметр хорошо, поскольку для некоторых элементов u_0-u_* значение величины $T_{n(\delta)}$ будет большим даже в случае $\|f_\delta-f\|\le\delta$. Конечно, если например $T_{n(2\delta)}\ll T_{n(\delta)}$, то, судя по оценкам, за параметр регуляризации естественнее брать $n=n(2\delta)$. Далее рассмотрим поподробнее зависимость $T_{n(\delta)}$ от элемента u_0-u_*.

Теорема 3. Пусть выполнены неравенства

$$\|P(x_{k+1})(u_0-u_*)\|\le c_k\,\|P(x_k)(u_0-u_*)\|,\quad c_k<1,\quad k=1,2,\dots,n-1, \tag{26}$$

где $\|A\|=x_1>x_2>\dots>x_n>0$. Если $\|f_\delta-f\|\le\delta$ и параметр $n=n(\delta)$ выбран по правилу Π, то при $s\le n(\delta)$ имеет место неравенство

$$\frac{\|u_{n(\delta)}-u_{p(s)}\|}{\gamma s\,\|B_{p(s)}(A)(Au_{p(s)}-f_\delta)\|}\le c_0(s)\sqrt{\omega(s)}, \tag{27}$$

где

$$c_0(s)=\left(1+\frac{\gamma_1 1}{b_1-1}\right)\left(\frac{\|B_{q(s)}(A)(Au_{q(s)}-f_\delta)\|+\delta}{\|B_{p(s)}(A)(Au_{p(s)}-f_\delta)\|}\right),$$

$$\omega(s)=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(1-x_{k+1}q_{q(s)}(x_{k+1}))^2 b_k(1-c_k^2)}{\gamma^2 s^2\sum\limits_{k=1}^{n}d(\bar{x}_k,q(s))\,b_k(1-c_k^2)},$$

$$b_k=\Big(\prod_{i=k}^{n-1}c_i^2\Big)^{-1},\quad x_{n+1}=0,\quad d(x,n)-x^2B_n^2(x)(1-xq_n(x))^2,$$

$$\bar{x}_k=\begin{cases}x_k, & \text{если } x_{k+1}\ge\lambda_*(q(s)) \text{ или}\\ & x_{k+1}<\lambda_*(q(s))<x_k \text{ и } d(x_k,q(s))\le d(x_{k+1},q(s));\\ x_{k+1}, & \text{если } x_k<\lambda_*(q(s)) \text{ или}\\ & x_{k+1}<\lambda_*(q(s))<x_k \text{ и } d(x_k,q(s))>d(x_{k+1},q(s));\end{cases}$$

для методов I-3, соответственно,

$$\lambda_*(s)=\frac{1}{\gamma s};\qquad \lambda_*(s)=\frac{1}{\gamma\max(0,s-1)};\qquad \lambda_*(s)=\frac{1}{\gamma(s+1)}. \tag{28}$$

Доказательство. Из неравенства (I3) при $\|f_\delta-f\|\le\delta$ получим

$$\|B_{n(\delta)}(A)(I-Aq_{n(\delta)}(A))A(u_0-u_*)\|\ge(b_1-1)\delta. \tag{29}$$

Поскольку при $s\le n(\delta)$ имеет место неравенство (см. [2])

$$\|B_{n(\delta)}(A)(I-Aq_{n(\delta)}(A))A(u_0-u_*)\|\le\frac{\gamma_1}{n(\delta)-s}\|(I-Aq_s(A))(u_0-u_*)\|$$

и $q(s)\le n(\delta)$ при $s\le n(\delta)$, то в силу (29) имеем

$$\|u_{n(\delta)} - u_{q(s)}\| \le \|(I - Ag_{q(s)}(A))(u_0 - u_*)\| + \gamma(n(\delta) - q(s))\delta \le$$
$$\le \left(1 + \frac{\bar{\gamma}+\gamma}{b_1 - 1}\right) \|(I - Ag_{q(s)}(A))(u_0 - u_*)\|.$$

Теперь, учитывая неравенство

$$\|B_{q(s)}(A)(I - A_{q(s)}(A))A(u_0 - u_*)\| \le \|B_{q(s)}(A)(Au_{q(s)} - f_2)\| + \delta,$$

получим

$$\frac{\|u_{n(\delta)} - u_{q(s)}\|}{\gamma s\, \|B_{p(s)}(A)(Au_{p(s)} - f_2)\|} \le \tag{30}$$
$$\le C_0(s)\; \frac{\|(I - Ag_{q(s)}(A))(u_0 - u_*)\|}{\gamma s\, \|B_{q(s)}(A)(I - Ag_{q(s)}(A))A(u_0 - u_*)\|}.$$

Оценим функцию

$$\nu(s) = \left(\frac{\|(I - Ag_{q(s)}(A))(u_0 - u_*)\|}{(\gamma s\, \|B_{q(s)}(A)(I - Ag_{q(s)}(A))A(u_0 - u_*)\|)}\right)^2.$$

Легко проверить, что функция $t(\lambda) = B_n(\lambda)(1 - \lambda g_n(\lambda))\lambda$ для методов I–3 имеет единственную точку максимума в точке $\lambda_*(n)$, где $\lambda_*(n)$ определено формулами (28). Поскольку $t_0(\lambda) = 1/(\lambda B_n(\lambda))$ убывающая функция и

$$\|(P(x_k) - P(x_{k+1}))(u_0 - u_*)\|^2 \ge$$
$$\ge b_k(1 - c_k^2)\, \|P(x_n)(u_0 - u_*)\|^2, \quad k = 1, 2, \dots n-1,$$

то получим

$$\nu(s) = \frac{\sum_{k=1}^{n} \|(P(x_k) - P(x_{k+1}))(I - Ag_{q(s)}(A))(u_0 - u_*)\|^2}{(\gamma s)^2 \sum_{k=1}^{n} \|(P(x_k) - P(x_{k+1}))B_{q(s)}(A)(I - Ag_{q(s)}(A))A(u_0 - u_*)\|^2} \le$$

$$\le \max_{\lambda_k,\; x_{k+1} \le \lambda_k \le x_k} \left\{ \frac{\sum_{k=1}^{n} (1 - \lambda_k g_{q(s)}(\lambda_k))^2 b_k (1 - c_k^2)}{(\gamma s)^2 \sum_{k=1}^{n} d(\lambda_k, q(s))\, b_k (1 - c_k^2)} \right\} \le \omega(s),$$

что вместе с (30) доказывает теорему.

Отметим, что если некоторые последовательности $\{c_k\}_1^{n-1}$ и $\{x_k\}_1^n$ нам известны, то $\omega(s)$ – вычислимая функция и мы можем проверить выполнимость неравенства (27). Если хотя бы для одного параметра s, $s \in \frac{1}{\gamma a}N$, $s \le n(\delta)$ это неравенство не выполнено, то по теореме 3 $\|f_2 - f\| > \delta$, и параметр $n = n(\delta)$

выбран слишком большим.

В некоторых случаях оценку (I5) можно уменьшить. Имеет место

<u>Теорема 4</u>. Пусть выполнены условия теорема I и ещё одно из условий I^0–3^0:

I^0 $\|f_2 - f\| \le \bar{\delta}, \quad \bar{\delta} > \delta,$

2^0 $\|u_*\| \geq M > 0,$

3^0 $\|P(x_k)(u_0 - u_*)\| \geq a_k, \quad k = 1, 2, \dots n,$

где $\|A\| = x_1 > x_2 > \dots > x_n > 0.$

Тогда вместо оценки (I5) имеют место соответственно условиям I^0–3^0 оценки

$$\|u_{n(\delta)} - u_*\| \le T^{i}_{n(\delta)} \Big\{ \sup_{\tilde{f},\, \|\tilde{f} - f\| \le \|f_2 - f\|} \inf_{n \ge 0} \|\tilde{u}_n - u_*\| + \|f_2 - f\|/a \Big\}, \quad i = 1, 2, 3 \tag{31}$$

где

$$T^{1}_{n(\delta)} = \max \Big\{ 2, c_{\theta_2}, \sup_{\substack{s,\, s \in \frac{1}{\gamma_0} \mathbb{N}, \\ n_0(\bar{\delta}) \le s \le n(\delta)}} \max \big[W(n(\delta), s), W_1(n(\delta), s) \big] \Big\} \tag{32}$$

$$W_1(n(\delta), s) = \frac{\|u_{n(\delta)} - u_{q(s)}\|}{\max\{ P(n_0(\bar{\delta})),\, 2^{-1/2} \gamma s \|B_{p(s)}(A)(Au_{p(s)} - f_2)\| \}} + \sqrt{2}\, q(s)/s \tag{33}$$

$$P(n_0(\bar{\delta})) = \inf_{s,\, s \in \frac{1}{\gamma_0}\mathbb{N},\, s \le n_0(\bar{\delta})} \gamma s \|B_{p(s)}(A)(Au_{p(s)} - f_2)\|, \tag{34}$$

$$n_0(\bar{\delta}) \le \sup_{n \ge 0,\, \|B_n(A)(Au_n - f_2)\| > \bar{\delta}} \Big\{ \frac{v(n)}{1 + v(n)}\, n \Big\}, \tag{35}$$

$$v(n) = c_M \big(\gamma (\bar{\gamma}_{1/2})^2 \big)^{-1} \big(\|B_n(A)(Au_n - f_2)\| / \bar{\delta} - 1 \big)^2, \tag{36}$$

$c_M = 1;\ \frac{\alpha}{a} \ln\left(1 + \frac{a}{\alpha}\right);\ 1$, соответственно, для методов I–3,

$$T^{i}_{n(\delta)} = \max \Big\{ 2, c_{\theta_2}, \sup_{\substack{s,\, s \in \frac{1}{\gamma_0}\mathbb{N}, \\ s \le n(\delta)}} \min \big[W(n(\delta), s), W_i(n(\delta), s) \big] \Big\}, \quad i = 2, 3, \tag{37}$$

$$W_2(n(\delta), s) = \frac{\|u_{n(\delta)} - u_s\|}{\max\{ M - \|u_s\|, 0 \}} + 1, \tag{38}$$

$$W_3(n(\delta),s) = \frac{\|u_{n(\delta)} - u_\delta\|}{\left\{\sum_{i=1}^{n}(1 - x_i g_s(x_i))^2 (a_i^2 - a_{i+1}^2)\right\}^{1/2}} + 1, \quad a_{n+1} = 0. \tag{39}$$

Доказательству теоремы предпошлем одну лемму.

<u>Лемма</u>. Пусть $\bar{n}_*$ – точка минимума функции $f(n) = \|(I - Aq_n(A))(u_0 - u_*)\|^2 + \gamma^2 n^2 \bar{\delta}^2$ и $\|f_\delta - f\| \le \bar{\delta}$. Тогда для методов I–3 имеет место неравенство $\bar{n}_* \geq n_0(\bar{\delta})$, где $n_0(\bar{\delta})$ определено формулами (35)–(36).

<u>Доказательство</u>. Поскольку $\bar{n}_*$ – точка минимума функции $f(n) = \int_0^a (1 - \lambda g_*(\lambda))^2 d\langle P(\lambda)(u_0 - u_*), u_0 - u_*\rangle + (\gamma n \bar{\delta})^2$, то имеет место равенство

$$-\int_0^a \lambda(1 - \lambda g_{\bar{n}_*}(\lambda)) \left[\frac{dg_s(\lambda)}{ds}\right]_{s=\bar{n}_*} d\langle P(\lambda)(u_0 - u_*), u_0 - u_*\rangle + \gamma^2 \bar{n}_* \bar{\delta}^2 = 0.$$

Используя неравенство (8), получим

$$\gamma^2 \bar{n}_* \bar{\delta}^2 = \int_0^a \lambda(1 - \lambda g_{\bar{n}_*}(\lambda)) \left[\frac{dg_s(\lambda)}{ds}\right]_{s=\bar{n}_*} d\langle P(\lambda)(u_0 - u_*), u_0 - u_*\rangle \geq$$
$$\geq c_M \gamma \int_0^a B_{\bar{n}_*}(\lambda)\lambda(1 - \lambda g_{\bar{n}_*}(\lambda))^2 d\langle P(\lambda)(u_0 - u_*), u_0 - u_*\rangle = \tag{40}$$
$$= c_M \gamma \|A^{1/2} B_{\bar{n}_*}^{1/2}(A)(I - Ag_{\bar{n}_*}(A))(u_0 - u_*)\|^2.$$

Пусть n параметр, для которого $\|B_n(A)(Au_n - f_\delta)\| > \bar{\delta}$. Тогда получим

$$\|B_n(A)(I - Ag_n(A))A(u_0 - u_*)\| \geq \|B_n(A)(Au_n - f_\delta)\| - \delta. \tag{41}$$

Элементарный подсчёт при $\bar{n}_* \le n$ дает для методов I–3

$$\|B_n(A)(I - Ag_n(A))A^{1/2}(I - Ag_{\bar{n}_*}(A))^{-1} B_{\bar{n}_*}^{-1/2}(A)\| \le \bar{\gamma}_{1/2}(n - \bar{n}_*)^{-1/2}$$

и поэтому

$$\|B_n(A)(I - Ag_n(A))A(u_0 - u_*)\| \le$$
$$\le \bar{\gamma}_{1/2}(n - n_*)^{-1/2} \|B_{\bar{n}_*}^{1/2}(A)(I - Ag_{\bar{n}_*}(A))A^{1/2}(u_0 - u_*)\|. \tag{42}$$

Теперь в силу произвольности параметра n из (40)–(42) следует утверждение леммы.

<u>Доказательство теоремы 3</u>. Пусть выполнено условие I^0. Поскольку $\|f_\delta - f\| \le \bar{\delta}$, то по лемме I $n_* \geq \bar{n}_* \geq n_0(\bar{\delta})$. Рассмот-

рим случай $n_0(\bar\delta) \le n_* \le n(\delta)$, $s_* \le n_0(\bar\delta)$. Используя неравенства

$$\inf_{\substack{s \in \frac{1}{p_0} \mathbb{N},\\ s \le n_0(\bar\delta)}} \gamma s \| B_{p(s)}(A)(Au_{p(s)} - f_2)\| \le \gamma s_* \| B_{p(s_*)}(A)(Au_{p(s_*)} - f_2)\|,$$

$$\gamma n_* \| B_{p(n_*)}(A)(Au_{p(n_*)} - f_2)\| \le \| \bar u_{n_*} - u_* \| \le$$

$$\le \sqrt{2} \Big\{ \sup_{\tilde f,\, \|\tilde f - f\| \le \|f_2 - f\|} \inf_{n \ge 0} \| \tilde u_n - u_* \| + \|f_2 - f\|/a \Big\}$$

и (I8), (20), (2I), получим

$$\| u_{n(\delta)} - u_* \| \le \| u_{n(\delta)} - u_{q(n_*)} \| + \| u_{q(n_*)} - u_* \| \le$$

$$\le W_1(n(\delta), n_*) * \Big\{ \sup_{\tilde f,\, \|\tilde f - f\| \le \|f_2 - f\|} \inf_{n \ge 0} \| \tilde u_n - u_* \| + \frac{\|f_2 - f\|}{a} \Big\}. \tag{43}$$

Если $n_* \le n(\delta)$, $n_0(\bar\delta) \le s_* \le n(\delta)$ или $n_* \le n(\delta)$, $s_* \ge n(\delta)$ или $n_* \ge n(\delta)$, $s_* \ge n(\delta)$, то используем соответственно неравенства (23)-(25), которые вместе с (43) дают оценку (3I)-(36).

Пусть выполнено условие 2^0 или 3^0. Тогда используем при $s_* \le n(\delta)$ соответственно неравенства

$$\| u_{n(\delta)} - u_* \| \le \| u_{n(\delta)} - u_{s_*} \| + \| u_{s_*} - u_* \| \le$$

$$\le \left(\frac{\| u_{n(\delta)} - u_{s_*} \|}{\max(M - \|u_{s_*}\|, 0)} + 1 \right) \| \bar u_{s_*} - u_* \|,$$

$$\| u_{n(\delta)} - u_* \| \le \left(\frac{\| u_{n(\delta)} - u_{s_*} \|}{\| \bar u_{s_*} - u_* \|} + 1 \right) \| \bar u_{s_*} - u_* \| \le$$

$$\le \left(\frac{\| u_{n(\delta)} - u_{s_*} \|}{\| (I - A g_{s_*}(A))(u_0 - u_*) \|} + 1 \right) \| \bar u_{s_*} - u_* \| \le$$

$$\le \left(\frac{\| u_{n(\delta)} - u_{s_*} \|}{\Big\{ \sum_{i=1}^{n} (1 - x_i g_s(x_i))^2 (a_i^2 - a_{i+1}^2) \Big\}^{1/2}} + 1 \right) \| \bar u_{s_*} - u_* \|,$$

которые, учитывая неравенство (20), дают вместе с (23)-(25) оценки (3I), (37)-(39).

Литература

I. В а й н и к к о Г. Методы решения линейных некорректно поставленных задач в гильбертовых пространствах. Тарту, ТГУ, 1982.

2. Р а у с Т. О принципе невязки при решении некорректных задач. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1984, 672, 16-26.

Поступило
5 III 1986

ABOUT A DISCREPANCY PRINCIPLE WHEN THE LEVEL OF THE ERROR OF THE DATA IS GIVEN APPROXIMATELY

T. Raus

Summary

We study a modification of the discrepancy principle to choose the parameter in the regularization method for ill-posed problems. The results of [2] are generalized to the case, when the level of the error of the right-hand term of linear equation (1) is given approximately.

Уч.зап.Тартуск.ун-та,1986,762,59-68.

РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЙ ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД ДЛЯ ОТЫСКАНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРОВ СИММЕТРИЧНОЙ МАТРИЦЫ

Т.Саан

На основе тихоновской регуляризации строится итерационный метод пятого порядка точности. Доказываются соответствующие теоремы сходимости. Аналогичные метода третьего порядка точности (но без регуляризации) ранее исследованы в [1-4].

Пусть дана симметричная $(n\times n)$-матрица T. Нормы вектора $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ и матрицы T определим следующим образом:

$$\|x\|=\sqrt{(x,x)}=(x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2)^{1/2},\quad \|T\|=\sup_{\|x\|=1}\|Tx\|.$$

Через $\sigma(T)=\{\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_r\}$ и $\{X_1,X_2,\dots,X_r\}$ обозначим множество попарно различных собственных значний матрицы T и соответствующие им собственные подпространства, т.е. $X_i=\{x\,|\,Tx=\lambda_i x\}$, $i=1,2,\dots,r$, $r\leq n$. Далее, через P_j обозначим ортопроектор в R^n, проектирующий на X_j. Каждый вектор в R^n представляется единственным образом в виде

$$v=\sum_{j=1}^{r}P_jv,\quad \|v\|^2=\sum_{j=1}^{r}\|P_jv\|^2. \qquad (1)$$

Для отыскания собственного вектора x матрицы T и соответствующего ему собственного значения λ используем следующий итерационный метод. Сначала выбираем единичный вектор v_0. Затем для $k=0,1,2,\dots$ будем повторить следующие шаги:

(I) вычислим $\varrho_k=(Tv_k,v_k)$;

(II) решим уравнение $[\alpha_k+(T-\varrho_k)^2]w_{k+1}=v_k$, где $\alpha_k>0$ и $\lim\alpha_k=0$;

(III) формируем $v_{k+1}=w_{k+1}/\|w_{k+1}\|$.

Шаги (II) и (III) можно объединить в один,

(III') $v_{k+1}=\tau_k^2[\alpha_k+(T-\varrho_k)^2]^{-1}v_k$, $\tau_k^2=\|[\alpha_k+(T-\varrho_k)^2]^{-1}v_k\|^{-1}$.

Из (I) следует, что в итерационном процессе ортогональность векторов v_k к собственным подпространствам X_j сохраняется; не изменяется и

$$J(T,v)=\{j\in N\,|\,P_jv\neq 0 \text{ в разложении (I)}\},$$

т.е. в итерационном процессе

$$J(T,v_0)=J(T,v_1)=\dots=J(T,v_k)=\dots .$$

Пусть теперь для начального вектора v_0 имеет место представление

$$v_0 = \cos\xi_0 x_1 + \sin\xi_0 u_0$$

с $x_1 \in X_1$, $\|x_1\| = 1$, $u_0 \perp X_1$, $\|u_0\| = 1$, $\cos\xi_0 = (v_0, x_1)$.

Тогда каждый v_k может быть представлен в виде

$$v_k = \cos\xi_k x_1 + \sin\xi_k u_k \tag{2}$$

с $u_k \perp X_1$, $\|u_k\| = 1$, $\cos\xi_k = (v_k, x_1)$.

Будем пользоваться отношением Релея

$$\rho(v) = (Tv, v)/(v, v), \quad 0 \neq v \in \mathbb{R}^n.$$

Лемма I. Для каждого единичного вектора вида (2) выполнено равенство

$$\rho_k - \lambda_1 = \sin^2\xi_k \left(\rho(u_k) - \lambda_1\right).$$

Доказательство. Так как

$$v_k - x_1 = (\cos\xi_k - 1)\, x_1 + \sin\xi_k u_k,$$

то

$$\rho_k - \lambda_1 = (Tv_k, v_k) - \lambda_1(v_k, v_k) = ((T-\lambda_1)v_k, v_k) =$$

$$= ((T-\lambda_1)v_k, v_k - x_1) = ((T-\lambda_1)(v_k - x_1), v_k - x_1) =$$

$$= ((T-\lambda_1)[(\cos\xi_k - 1)x_1 + \sin\xi_k u_k, (\cos\xi_k - 1)x_1 + \sin\xi_k u_k) =$$

$$= \sin^2\xi_k ((T-\lambda_1)u_k, u_k) = \sin^2\xi_k (\rho(u_k) - \lambda_1). \ \square$$

Теорема I. Предположим, что последовательность $\{v_k\}$ сходится к собственному вектору x_1. Если $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_k/\xi_k^4 = 0$, то $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} |\xi_{k+1}/\xi_k^5| \leq 1$.

Доказательство. Поскольку $\rho(\cdot)$ непрерывная функция на единичной сфере, то из сходимости $v_k \xrightarrow[k\to\infty]{} x_1$ следует $\rho_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \lambda_1$. Исходя из вектора v_k в виде (2) найдём (см. шаг (III'))

$$v_{k+1} = \tau_k^{-1}[\alpha_k + (T-\rho_k)^2]^{-1} v_k =$$

$$= \tau_k^{-1}[\alpha_k + (\lambda_1 - \rho_k)^2]^{-1} \cos\xi_k x_1 + \tau_k^{-1} \|[\alpha_k + (T-\rho_k)^2]^{-1} u_k\| \sin\xi_k u_{k+1}, \tag{3}$$

где $u_{k+1} = [\alpha_k + (T-\rho_k)^2]^{-1} u_k / \|[\alpha_k + (T-\rho_k)^2]^{-1} u_k\|$ и $(u_{k+1}, x_1) = 0$.

Поскольку вектор v_{k+1} можно представить в виде

$$v_{k+1} = \cos\xi_{k+1} x_1 + \sin\xi_{k+1} u_{k+1},$$

то из (3) следует

$$\tan \xi_{k+1} = \frac{\tau_k^2 \,\|[\alpha_k + (T-\rho_k)^2]^{-1} u_k\| \sin \xi_k}{\tau_k^2 [\alpha_k + (\lambda_1 - \rho_k)^2]^{-1} \cos \xi_k} =$$

$$= \tan \xi_k [\alpha_k + (\lambda_1 - \rho_k)^2] \,\|[\alpha_k + (T-\rho_k)^2]^{-1} u_k\|. \qquad (4)$$

Упорядочим собственные значения матрицы T так, что

$$\lambda_2 = \arg \min_{j \in J(T, u_0) \setminus \{1\}} |\lambda_j - \lambda_1| , \quad \lambda_3 = \arg \min_{j \in J(T, u_0) \setminus \{1,2\}} |\lambda_j - \lambda_1|$$

(в случае $n < 3$ видоизменения, которые следует внести в последующие рассуждения, довольно очевидны). В случае $|\lambda_2 - \lambda_1| = |\lambda_3 - \lambda_1|$ выберем индексы так, что $\lambda_2 < \lambda_3$. Пусть u_0 представлен в виде

$$u_0 = \cos\theta_0 \, x_2 + \sin\theta_0 \, t_0 ,$$

где $x_2 \in X_2$, $\|x_2\| = 1$, $t_0 \perp \{X_1, X_2\}$, $\|t_0\| = 1$, $\cos\theta_0 = (u_0, x_2)$. Тогда

$$u_k = \cos\theta_k \, x_2 + \sin\theta_k \, t_k , \qquad (5)$$

где $\cos\theta_k = (u_k, x_2)$ и единичный вектор t_k ортогонален X_1 и X_2. Благодаря представлениям (2) и (5), получим

$$v_k = \cos \xi_k x_1 + \sin \xi_k \cos\theta_k x_2 + \sin \xi_k \sin\theta_k t_k .$$

Найдем вектор v_{k+1}:

$$v_{k+1} = \tau_k^2 [\alpha_k + (T-\rho_k)^2]^{-1} v_k = \tau_k^2 [\alpha_k + (\lambda_1 - \rho_k)^2]^{-1} \cos \xi_k x_1 +$$

$$+ \tau_k^2 [\alpha_k + (\lambda_2 - \rho_k)^2]^{-1} \sin \xi_k \cos\theta_k x_2 + \tau_k^2 \,\|[\alpha_k + (T-\rho_k)^2]^{-1} t_k\| \sin \xi_k \sin\theta_k t_{k+1} . \quad (6)$$

Поскольку v_{k+1} можно представить в виде

$$v_{k+1} = \cos \xi_{k+1} x_1 + \sin \xi_{k+1} \cos\theta_{k+1} x_2 + \sin \xi_{k+1} \sin\theta_{k+1} t_{k+1} ,$$

то из (6), $\alpha_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ и $\rho_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \lambda_1$ следует

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} |\tan\theta_{k+1} / \tan\theta_k| =$$

$$= \overline{\lim_{k\to\infty}} \left| \frac{\tau_k^2 \,\|[\alpha_k + (T-\rho_k)^2]^{-1} t_k\| \sin \xi_k \sin\theta_k}{\tau_k^2 [\alpha_k + (\lambda_2 - \rho_k)^2]^{-1} \sin \xi_k \sin\theta_k \tan\theta_k} \right| =$$

$$= \overline{\lim_{k\to\infty}} [\alpha_k + (\lambda_2 - \rho_k)^2] \,\|[\alpha_k + (T-\rho_k)^2]^{-1} t_k\| =$$

$$= \overline{\lim_{k\to\infty}} (\lambda_2 - \lambda_1)^2 \,\|[(T-\lambda_1)^2]^{-1} t_k\| \le (\lambda_2 - \lambda_1)^2 / (\lambda_3 - \lambda_1)^2 . \qquad (7)$$

В случае $|\lambda_2 - \lambda_1| < |\lambda_3 - \lambda_1|$

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} |\tan\theta_{k+1} / \tan\theta_k| \le (\lambda_2 - \lambda_1)^2 / (\lambda_3 - \lambda_1)^2 < 1 ,$$

и из этого следует, что $\theta_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ и $u_k \xrightarrow[k\to\infty]{} x_2$. Опираясь на эти сходимости, соотношение (4) и лемму I, получим

$$\lim_{k\to\infty} |\zeta_{k+1}/\zeta_k^5| = \lim_{k\to\infty} |\tan\zeta_{k+1}/(\tan\zeta_k \cdot \sin^4\zeta_k)| =$$

$$= \lim_{k\to\infty} (\rho(u_k)-\lambda_1)^2/(\lambda_2-\lambda_1)^2 = (\lambda_2-\lambda_1)^2/(\lambda_2-\lambda_1)^2 = 1. \qquad (8)$$

В случае $|\lambda_2-\lambda_1| = |\lambda_3-\lambda_1| \equiv \delta$ выпишем вектор u_k и приближения v_k и v_{k+1} более точно:

$$u_k = \cos\theta_k x_2 + \sin\theta_k \cos\eta_k x_3 + \sin\theta_k \sin\eta_k s_k, \qquad (9)$$

где $x_3 \in X_3$, $\|x_3\| = 1$, $s_3 \perp \{X_1, X_2, X_3\}$, $\|s_k\| = 1$, $\cos\eta_k = (t_k, x_3)$,

$$v_k = \cos\zeta_k x_1 + \sin\zeta_k\cos\theta_k x_2 + \sin\zeta_k \sin\theta_k \cos\eta_k x_3 + \sin\zeta_k \sin\theta_k \sin\eta_k s_k, \qquad (10)$$

$$v_{k+1} = \tau_k^2[\alpha_k + (\lambda_1-\rho_k)^2]^{-1}\cos\zeta_k x_1 + \tau_k^2[\alpha_k+(\lambda_2-\rho_k)^2]^{-1}\sin\zeta_k\cos\theta_k x_2 +$$

$$+\tau_k^2[\alpha_k+(\lambda_3-\rho_k)^2]^{-1}\sin\zeta_k\sin\theta_k\cos\eta_k x_3 + \tau_k^2\|[\alpha_k+(T-\rho_k)^2]^{-1}s_k\|\sin\zeta_k\sin\theta_k\sin\eta_k s_{k+1}. \qquad (11)$$

Аналогично пределу (7) получим из (I0) и (II)

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} |\tan\eta_{k+1}/\tan\eta_k| =$$

$$= \overline{\lim_{k\to\infty}} \left| \frac{\tau_k^2\|[\alpha_k+(T-\rho_k)^2]^{-1}s_k\|\sin\zeta_k\sin\theta_k\sin\eta_k}{\tau_k^2[\alpha_k+(\lambda_3-\rho_k)^2]^{-1}\sin\zeta_k\sin\theta_k\cos\eta_k\tan\eta_k} \right| =$$

$$= \overline{\lim_{k\to\infty}} [\alpha_k+(\lambda_3-\rho_k)^2]\|[\alpha_k+(T-\rho_k)^2]^{-1}s_k\| =$$

$$= \overline{\lim_{k\to\infty}} (\lambda_3-\lambda_1)^2 / \min_{j\in J(T,s_k)\setminus\{1,2,3\}} (\lambda_j-\lambda_1)^2 < 1. \qquad (12)$$

Из оценки (I2) следует, что $\eta_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$. Учитывая представление (9), получим, что каждая точка накопления последовательности $\{u_k\}$ имеет вид $\beta x_2 + \gamma x_3$, где $\beta^2+\gamma^2 = 1$. Вычислим

$$\rho(\beta x_2+\gamma x_3) = (T(\beta x_2+\gamma x_3), (\beta x_2+\gamma x_3))/(\beta x_2+\gamma x_3, \beta x_2+\gamma x_3) =$$

$$= \beta^2\lambda_2 + \gamma^2\lambda_3 + \beta\gamma(Tx_3, x_2) + \beta\gamma(Tx_2, x_3) =$$

$$= \beta^2(\lambda_1-\delta) + \gamma^2(\lambda_1+\delta) + \beta\gamma(\lambda_3 x_3, x_2) + \beta\gamma(\lambda_2 x_2, x_3) =$$

$$= \beta^2(\lambda_1-\delta) + \gamma^2(\lambda_1+\delta) = \lambda_1 + (\gamma^2-\beta^2)\delta. \qquad (13)$$

Учитывая теперь соотношения (4), (I3), лемму I и $\lim_{k\to\infty} \alpha_k/\zeta_k^4 = 0$, найдём

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} |\xi_{k+1}/\xi_k^5| = \overline{\lim_{k\to\infty}} |\tan\xi_{k+1}/(\tan\xi_k\cdot\sin^4\xi_k)| =$$

$$= \overline{\lim_{k\to\infty}} (\rho(u_k)-\lambda_1)^2/\delta^2 = (\gamma^2-\beta^2)^2 \leq 1. \qquad (I4)$$

Оценки (8) и (I4) дают утверждение теоремы. □

Теорема 2. Пусть λ_1 – собственное значение матрицы T и $\mathcal{X}_1$ – соответствующее ему собственное подпространство. Если какое-то приближение v_p удовлетворяет условию

$$\|(T-\rho_p)v_p\| \leq \sqrt{qm/\|T\|}\cdot m, \qquad (I5)$$

где $m = dist(\rho_p, \sigma(T)\setminus\lambda_1)$ и $q<1$, то $v_k \longrightarrow x_1 \in \mathcal{X}_1$ при $k\longrightarrow\infty$.

Доказательство. Из (I5) на основе следствия 6.22 из [2] получим

$$dist(v_p, \mathcal{X}_1) \leq \sqrt{qm/\|T\|}. \qquad (I6)$$

Представим вектор v_p в виде (2). Тогда

$$dist(v_p, \mathcal{X}_1) = \min_{x\in\mathcal{X}_1} \|v_p - x\| = \|v_p - (v_p, x_1)x_1\| =$$

$$= \|\sin\xi_p u_p\| = |\sin\xi_p|. \qquad (I7)$$

При помощи леммы I, оценки (I6) и равенства (I7) получаем

$$(\lambda_1-\rho_p)^2 = \sin^4\xi_p(\rho(u_p)-\lambda_1)^2 \leq \sin^4\xi_p\cdot\|T\|^2 \leq q^2m^2.$$

Используя соотношение (4) получим оценку

$$|\tan\xi_{p+1}/\tan\xi_p| = [\alpha_p+(\lambda_1-\rho_p)^2]\,\|[\alpha_p+(T-\rho_p)^2]^{-1}u_p\| \leq$$

$$\leq [\alpha_p+(\lambda_1-\rho_p)^2]/(\alpha_p+m^2) \leq [\alpha_p+q^2m^2]/(\alpha_p+m^2) < 1. \qquad (I8)$$

Результаты (I6), (I7) и (I8) гарантируют, что $dist(v_p, \mathcal{X}_1) \leq \sqrt{qm/\|T\|}$ при $k>p$. В итоге получим $\tan\xi_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$, и из этого следует, что $v_k \xrightarrow[k\to\infty]{} x_1$.

Лемма 2 (см. [I] стр. 27). Для любого $u\in R^n$ и $\mu\in R$

$$\|[T-\rho(u)]u\| \leq \|[T-\mu]u\|,$$

где $\rho(u) = (Tu,u)/(u,u)$.

Наилучшей вычислимой мерой точности пары (ρ_k, v_k) как собственной пары для T является вектор невязки $r_k = (T-\rho_k)v_k$.

Лемма 3. Для данного итерационного метода при всех к справедливо неравенство $\|r_{k+1}\| \leq \|r_k\|$.

<u>Доказательство</u>. Если $\|r_{k+1}\|=0$, то лемма справедлива. Если $\|r_{k+1}\|\neq 0$, то представим шаг (III') в виде

$$\alpha_k v_{k+1} + (T-\rho_k)^2 v_{k+1} = \tau_k^2 v_k. \tag{19}$$

Умножая (19) на v_k получим

$$\alpha_k (v_{k+1}, v_k) + ((T-\rho_k)^2 v_{k+1}, v_k) = \tau_k^2. \tag{20}$$

Обозначим

$$\cos\varphi_k = (v_{k+1}, v_k),$$

$$\cos\psi_k = ((T-\rho_k) v_{k+1}, r_k)/\|(T-\rho_k) v_{k+1}\|\|r_k\|.$$

Используя (19) и (20), преобразуем

$$\|(T-\rho_k)v_{k+1}\|^2 = ((T-\rho_k)v_{k+1}, (T-\rho_k)v_{k+1}) =$$

$$= (v_{k+1}, (T-\rho_k)^2 v_{k+1}) = (v_{k+1}, \tau_k^2 v_k - \alpha_k v_{k+1}) =$$

$$= \tau_k^2 \cos\varphi_k - \alpha_k = [\alpha_k \cos\varphi_k + ((T-\rho_k) v_{k+1}, r_k)] \cos\varphi_k - \alpha_k =$$

$$= \alpha_k \cos^2\varphi_k + \|(T-\rho_k)v_{k+1}\|\|r_k\| \cos\psi_k \cos\varphi_k - \alpha_k =$$

$$= \|(T-\rho_k)v_{k+1}\|\|r_k\| \cos\psi_k \cos\varphi_k - \alpha_k \sin^2\varphi_k. \tag{21}$$

Опираясь на лемму 2 и оценку (21), получим

$$\|r_{k+1}\| = \|(T-\rho_{k+1})v_{k+1}\| \leqslant \|(T-\rho_k)v_{k+1}\| =$$

$$= \|r_k\| \cos\psi_k \cos\varphi_k - \alpha_k \sin^2\varphi_k / \|(T-\rho_k)v_{k+1}\| \leqslant$$

$$\leqslant \|r_k\| \cos\psi_k \cos\varphi_k \leqslant \|r_k\|. \ \square \tag{22}$$

<u>Лемма 4</u>. Для каждого k при данной итерации углы φ_k и ψ_k из доказательства леммы 3 острые.

<u>Доказательство</u>.Умножая (19) на v_{k+1} получим

$$\alpha_k (v_{k+1}, v_{k+1}) + ((T-\rho_k)^2 v_{k+1}, v_{k+1}) = \tau_k^2 (v_k, v_{k+1}),$$

$$\alpha_k + \|(T-\rho_k)v_{k+1}\|^2 = \tau_k^2 \cos\varphi_k.$$

Из последнего равенства вытекает, что $\cos\varphi_k > 0$ для каждого $k \geqslant 0$. Теперь из соотношения (21) следует, что $\cos\psi_k > 0$.

<u>Лемма 5</u>. Для данного итерационного метода $\lim\limits_{k\to\infty} |\rho_k - \rho_{k+1}| = 0$.

<u>Доказательство</u>. Найдём

$$\|r_{k+1}\|^2 = (v_{k+1}, (T-\rho_{k+1})^2 v_{k+1}) = (v_{k+1}, (T-\rho_k+\rho_k-\rho_{k+1})^2 v_{k+1}) =$$

$$= (v_{k+1}, (T-\rho_k)^2 v_{k+1}) + 2(\rho_k - \rho_{k+1})(v_{k+1}, (T-\rho_k)v_{k+1}) + (\rho_k - \rho_{k+1})^2 =$$

$$= \|(T-\rho_k)v_{k+1}\|^2 + 2(\rho_k-\rho_{k+1})[(v_{k+1}, Tv_{k+1}) - \rho_k] + (\rho_k-\rho_{k+1})^2 =$$

$$= \|(T-\rho_k)v_{k+1}\|^2 + 2(\rho_k-\rho_{k+1})(\rho_{k+1}-\rho_k) + (\rho_k-\rho_{k+1})^2 =$$

$$= \|(T-\rho_k)v_{k+1}\|^2 - (\rho_k-\rho_{k+1})^2. \tag{23}$$

Из оценки (22) и равенств (2I), (23) следует

$$\|r_{k+1}\|^2 = \|(T-\rho_k)v_{k+1}\|^2 - (\rho_k-\rho_{k+1})^2 \leqslant \|r_k\|^2 - (\rho_k-\rho_{k+1})^2. \tag{24}$$

Из (24) и монотонности норм невязок следует утверждение леммы. □

Теорема 3. Пусть $\{v_k\}$ – последовательность итераций, порождаемая единичным вектором v_0. Если $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_k/\gamma_k^4 = 0$, то при $k\to\infty$ либо

I. $(\rho_k, v_k) \longrightarrow (\lambda, x)$, где $Tx = \lambda x$, причём сходимость будет пятого порядка, либо

2. $(\rho_k, v_k) \longrightarrow (\bar\rho, \bar v)$, где $\bar v$ направлена по биссектрисе пары собственных векторов, для которых соответствующие собственные значения имеют полусумму $\bar\rho$. Ситуация в 2 неустойчива относительно возмущений v_k.

Доказательство. Из леммы 3 следует, что

$$\|r_k\| = \|(T-\rho_k)v_k\| \longrightarrow \tau \geqslant 0$$

при $k\to\infty$. Поскольку последовательность $\{v_k\}$ принадлежит единичной сфере в $\mathbb{R}^n$, то $\{v_k\}$ должна иметь хотя бы одну точку накопления. Заметим также, что $\rho_k \in [-\|T\|, \|T\|]$. Изучим отдельно случаи $\tau = 0$ и $\tau > 0$.

Случай А: $\tau = 0$. Всякая точка накопления $(\bar\rho, \bar v)$ последовательности $\{(\rho_k, v_k)\}$ есть по определению предел подпоследовательности $\{(\rho_j, v_j) : j \in \mathfrak{J}\}$ для некоторого индексного множества $\mathfrak{J}$. Поскольку $\rho(\cdot)$ непрерывная функция на единичной сфере, то

$$\rho(\bar v) = \lim_{\mathfrak{J}} \rho(v_j) = \lim_{\mathfrak{J}} \rho_j = \bar\rho,$$

$$\|(T-\bar\rho)\bar v\| = \lim_{\mathfrak{J}} \|r_j\| = \tau = 0.$$

Таким образом, $(\bar\rho, \bar v)$ должна быть собственной парой T. Так как количество собственных значений матрицы T конечно и $\lim |\rho_k - \rho_{k+1}| = 0$, по лемме 5, то для достаточно больших k последовательность $\{\rho_k\}$ не может перескочить расстояние между двумя точками накопления. По теореме I при $k\to\infty$ сходимость будет пятого порядка.

Случай Б. Имеет место неравенство (см. (22))

$$\|r_{k+1}\| \leq \|r_k\| \cos\psi_k \cos\varphi_k .$$

Перейдем в этом неравенстве к пределу $k \to \infty$, и учитывая лемму 4, получим

$$\lim_{k\to\infty} \cos\psi_k = 1, \quad \lim_{k\to\infty} \cos\varphi_k = 1.$$

Из соотношения (23) и леммы 5 следует, что

$$\lim_{k\to\infty} \|(T-\rho_k)v_{k+1}\|^2 = \lim_{k\to\infty} \|r_{k+1}\|^2 + \lim_{k\to\infty} |\rho_k - \rho_{k+1}|^2 - \tau^2. \tag{25}$$

Из соотношениях (20) и (25) вытекает, что

$$\lim_{k\to\infty} \tau_k^2 = \lim_{k\to\infty} (\alpha_k \cos\varphi_k + \|(T-\rho_k)v_{k+1}\| \|r_k\| \cos\psi_k) = \tau^2. \tag{26}$$

Покажем, что $\lim\limits_{k\to\infty} \|(T-\rho_k)^2 v_k\| = \tau^2$ Действительно,

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \|(T-\rho_k)^2 v_k\| \leq \overline{\lim_{k\to\infty}} \|(T-\rho_k)^2 v_{k+1}\| + \overline{\lim_{k\to\infty}} \|(T-\rho_k)^2\| \|v_k - v_{k+1}\| =$$

$$= \overline{\lim_{k\to\infty}} \|\tau_k^2 v_k - \alpha_k v_{k+1}\| + \overline{\lim_{k\to\infty}} \|(T-\rho_k)^2\| (2 - 2\cos\varphi_k)^{1/2} = \tau^2,$$

$$\underline{\lim_{k\to\infty}} \|(T-\rho_k)^2 v_k\| \geq \underline{\lim_{k\to\infty}} \|(T-\rho_k)^2 v_{k+1}\| - \underline{\lim_{k\to\infty}} \|(T-\rho_k)^2\| \|v_k - v_{k+1}\| = \tau^2.$$

Вычислим теперь

$$\lim_{k\to\infty} \|(T-\rho_k)^2 v_k - \|r_k\|^2 v_k\|^2 =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \|(T-\rho_k)^2 v_k\|^2 - 2\|r_k\|^2 \lim_{k\to\infty} (v_k, (T-\rho_k)^2 v_k) + \lim_{k\to\infty} \|r_k\|^4 =$$

$$= \tau^4 - 2\tau^4 + \tau^4 = 0. \tag{27}$$

Из (27) вытекает, что всякая точка накопления $\bar{\rho}$ ограниченной последовательности $\{\rho_k\}$ должна удовлетворять уравнению

$$\det[(T-\bar{\rho})^2 - \tau^2] = 0,$$

т.е. $|\lambda_j - \bar{\rho}| = \tau$ для некоторого собственного значения λ_j матрицы T. Таким образом, у последовательности $\{\rho_k\}$ конечное число точек накопления, и поскольку $|\rho_k - \rho_{k+1}| \to 0$ при $k \to \infty$, то $\lim\limits_{k\to\infty} \rho_k = \bar{\rho}$. В итоге получим что всякая точка накопления $\bar{v}$ последовательности $\{v_k\}$ должна быть собственным вектором для матрицы $(T-\bar{\rho})^2$:

$$(T-\bar{\rho})^2 \bar{v} = \tau^2 \bar{v}; \tag{28}$$

при этом $\bar{v}$ не будет собственным вектором матрицы T (тогда было бы $\tau = 0$, а это случай А. Имеем (см. (I))

$$\sum_{j=1}^{k} (\lambda_j - \bar{\rho})^2 \beta_j x_j = \tau^2 \sum_{j=1}^{k} \beta_j x_j,$$

где $x_j \in \mathfrak{X}_j$, $\|x_j\| = 1$, $\beta_j^2 = \|P_j \bar{v}\|^2$.

Так как собственные подпространства $X_j, j=1,2,\dots,n$ ортогональны, то

$$(\lambda_j-\bar\rho)^2\beta_j=\tau^2\beta_j. \qquad (29)$$

Отсюда при всех $\beta_j\neq 0$ получим

$$(\lambda_j-\bar\rho)^2=\tau^2. \qquad (30)$$

Поскольку $|\beta_j|<1$ при всех j ($\bar v$ не собственный вектор матрицы T) и $\sum_{j=1}^{n}\beta_j^2=1$, то найдется по меньшей мере два индекса, при которых $\beta_j\neq 0$. Так как у квадратного уравнения (30) два решения, то найдётся точно два индекса j , для которых $\beta_j\neq 0$. Обозначим эти индексы j_1 и j_2 , следовательно,

$$\bar v=\beta_{j_1}x_{j_1}+\beta_{j_2}x_{j_2}, \qquad (31)$$

$$\lambda_{j_1}=\bar\rho-\tau,\quad \lambda_{j_2}=\bar\rho+\tau. \qquad (32)$$

Аналогично формуле (13) найдём

$$\rho(\bar v)=\bar\rho+(\beta_{j_2}^2-\beta_{j_1}^2)\tau.$$

Учитывая, что $\rho(\bar v)=\bar\rho$ и $\beta_{j_1}^2+\beta_{j_2}^2=1$, получим

$$\beta_{j_1}^2=\beta_{j_2}^2=1/2. \qquad (33)$$

Обозначим векторы (31), со свойством (33), следующим образом:

$$v_+=\pm(\sqrt2/2)(x_{j_1}+x_{j_2}),\quad v_-=\pm(\sqrt2/2)(x_{j_1}-x_{j_2}). \qquad (34)$$

Итак, имеет место утверждение 2 теоремы с $\bar v=v_+$ или $\bar v=v_-$.

Покажем, что сходимость $v_k\longrightarrow\bar v$ неустойчива относительно возмущения. Имеем

$$(T-\bar\rho)v_+=-\tau v_-,\quad (T-\bar\rho)v_-=-\tau v_+.$$

Пусть μ произвольная величина. Вычислим

$$\rho(\cos\mu\, v_++\sin\mu\, v_-)=(T(\cos\mu\, v_++\sin\mu\, v_-),\cos\mu\, v_++\sin\mu\, v_-)=$$

$$=\cos^2\mu\,(Tv_+,v_+)+\sin^2\mu\,(Tv_-,v_-)+\sin\mu\cos\mu\,[(Tv_-,v_+)+(Tv_+,v_-)]=$$

$$=\bar\rho\cos^2\mu+\bar\rho\sin^2\mu+\sin\mu\cos\mu[(T(v_++v_-),v_++v_-)-(Tv_+,v_+)-(Tv_-,v_-)]=$$

$$=\bar\rho+\sin\mu\cos\mu\,[(\lambda_{j_1}(v_++v_-),v_++v_-)-2\bar\rho]=$$

$$=\bar\rho+\sin\mu\cos\mu\,[2\lambda_{j_1}-2\bar\rho]=\bar\rho-\tau\sin2\mu.$$

Наконец, вычислим

$$\|[T-\rho(\cos\mu\, v_++\sin\mu\, v_-)](\cos\mu\, v_++\sin\mu\, v_-)\|^2=$$

$$=\|(T-\bar\rho)(\cos\mu\, v_++\sin\mu\, v_-)+\tau\sin2\mu(\cos\mu\, v_++\sin\mu\, v_-)\|^2=$$

$$= \| -\tau \cos\mu\, v_- - \tau \sin\mu\, v_+ + \tau \sin 2\mu \cos\mu\, v_+ + \tau \sin 2\mu \sin\mu\, v_- \|^2 =$$

$$= \tau^2 \| (2\cos^2\mu - 1)\sin\mu\, v_+ + (2\sin^2\mu - 1)\cos\mu\, v_- \|^2 =$$

$$= \tau^2 \cos^2 2\mu \, \| \sin\mu\, v_+ - \cos\mu\, v_- \|^2 = \tau^2 \cos^2 2\mu. \qquad (35)$$

Из равенства (35) вытекает, что при возмущении, для которого $|\cos 2\mu| \neq 1$ норма невязки опустится ниже τ,

$$\lim_{k\to\infty} \| (T - \varrho_k) v_k \| = \tau' < \tau.$$

Если $\tau' = 0$, то получим случай А. Для $\tau' > 0$ повторим рассуждение случая Б, после возмущений, получим (см. 32))

$$\lambda_{j_2'} - \lambda_{j_1'} = 2\tau' < 2\tau = \lambda_{j_2} - \lambda_{j_1}. \qquad (36)$$

Из (36) следует, что пара (x_{j_1}, x_{j_2}) отличается от $(x_{j_1'}, x_{j_2'})$ □

Литература

1. П а р л е т т Б. Симметричная проблема собственных значений. М., Мир, 1983.
2. C h a t e l i n, F. Spectral Approximation of Linear Operators. New York, Academic Press, 1983.
3. O s t r o w s k i, A.M. On the convergence of the Rayleigh quotient iteration for the computation of characteristic roots and vectors I-VI. Arch. Rational Mech. Anal., 1958/59, v. 1-4.
4. P a r l e t t, B.N. The Rayleigh quotient iteration and some generalizations for nonnormal matrices. Math. of Computation, 1974, v. 28, 679-693.

Поступило
15 III 1986

THE REGULARIZED ITERATIVE METHOD FOR FINDING EIGENVALUES AND EIGENVECTORS OF SYMMETRIC MATRICES

T. Saan

Summary

The iterative method constructed in this work is based on the Tikhonov regularization and the Rayleigh Quotient Iteration. The iteration can be developed for real symmetric matrices only. The asymptotic convergence rate to an eigenvector and eigenvalue is quintic. Its global properties are due to a monotone decrease in the norms of the residuals.

Уч.зап.Тартуск.ун-та,1986,762,69-76.

О КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА С РАЗРЫВНЫМ РЕШЕНИЕМ

И.-И. Саарниит

Исследуется вариационная постановка и разрешимость краевых задач для линейных уравнений эллиптического типа, решения которых могут иметь разрывы первого рода. Рассматривается возможность применения для их приближенного решения метода конечных элементов.

§ I. Введение

Краевые задачи, в которых разрывы первого рода претерпевают не только коэффициенты уравнения, но и его решение, возникают, например, при исследовании тепловых процессов в телах, имеющих разрезы с неидеальным тепловым контактом (подробнее, напр., в [4]). Вариационная постановка таких задач для уравнений эллиптического типа рассматривалась в [2], [3], [5], но только в случае одно- или двухмерного пространства и при разбиении области интегрирования (отрезка или прямоугольника) на две подобласти непрерывности решения. Ниже дается вариационная постановка таких задач при произвольной размерности пространства и при разбиении области интегрирования на любое конечное число подобластей, в которых решение непрерывно, исследуется их разрешимость и возможность применения для их приближенного решения метода конечных элементов.

§ 2. Функциональные пространства

Пусть ограниченная область $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ разбита на подобласти $\Omega_1,\dots,\Omega_\tau$ так, что $\Omega_\varrho\cap\Omega_\sigma=\emptyset$, если $\varrho\neq\sigma$, и $\overline{\Omega}=\bigcup\limits_{\varrho=1}^{\tau}\overline{\Omega}_\varrho$. Введем обозначение $\Omega_0=\mathbb{R}^n\setminus\overline{\Omega}$. Пусть границы подобластей $\partial\Omega_\varrho$, $\varrho=0,1,\dots,\tau$, непрерывны по Липшицу, пусть вдоль них определена поверхностная мера $d\gamma$. Обозначим через $\Gamma_{\varrho\sigma}$ замкнутые множества $\partial\Omega_\varrho\cap\partial\Omega_\sigma$, $0\leq\varrho<\sigma\leq\tau$, а через $\nu_{\varrho\sigma}$ - нормали к $\Gamma_{\varrho\sigma}$, направленные внутрь Ω_ϱ.

Введем пространство кусочно непрерывно дифференцируемых на Ω функций

$$\mathcal{L}^m = \{u(x) : u(x) = u_\varrho(x),\ x \in \Omega_\varrho;\ u_\varrho \in C^m(\overline{\Omega}_\varrho),\ \varrho = 1,\dots,\tau\},$$

где $C^m(\overline{\Omega}_\varrho)$ – пространство функций m раз ($0 \le m \le +\infty$) непрерывно дифференцируемых на $\overline{\Omega}_\varrho$. Возможность существования у функции $u \in \mathcal{L}^m$ на стыках $\Gamma_{\varrho\sigma}$ подобластей Ω_ϱ и Ω_σ двух разных значений следует понимать как возможность существования у функции u там разрыва первого рода. Подмножеством пространства $\mathcal{L}^\infty$ является множество $\mathcal{P}^j$ кусочно полиномиальных функций, степень которых на каждом Ω_ϱ не превышает j $(0 \le j < +\infty)$.

Введем также соболевские пространства

$$\mathfrak{M}^{k,p} = \{u(x) : u(x) = u_\varrho(x),\ x \in \Omega_\varrho;\ u_\varrho \in W^{k,p}(\Omega_\varrho),\ \varrho = 1,\dots,\tau\},$$

$k \ge 1,\ p \ge 1$, определим норму в них равенством

$$\|u\|_{k,p} = \Big(\sum_{\varrho=1}^{\tau} \sum_{|\alpha| \le k} \int_{\Omega_\varrho} |D^\alpha u_\varrho(x)|^p dx\Big)^{1/p}. \tag{I}$$

В частном случае $p = 2$ пространство $\mathfrak{M}^{k,2}$ является гильбертовым со скалярным произведением

$$(u, v)_k = \sum_{\varrho=1}^{\tau} \sum_{|\alpha| \le k} \int_{\Omega_\varrho} D^\alpha u_\varrho(x)\, D^\alpha v_\varrho(x)\, dx.$$

На пространства $\mathfrak{M}^{k,p}$ переносятся теоремы вложения и теоремы о следе ([I], [6]), а также следующая теорема об эквивалентных нормах.

Теорема I. Пусть на пространстве $\mathfrak{M}^{k,p}$ определен функционал φ со следующими свойствами:

а) $0 \le \varphi u \le \mathrm{const}\, \|u\|_{k,p}$;

б) $\varphi(\lambda u) = |\lambda| \varphi u,\ \lambda \in \mathbb{R}^1$;

в) $\varphi(u + v) \le \varphi u + \varphi v$;

г) если $\varphi z = 0$ и $z \in \mathcal{P}^{k-1}$, то $z = 0$.

Тогда норма

$$\|u\|^*_{k,p} = \Big((\varphi u)^p + \sum_{\varrho=1}^{\tau} \sum_{|\alpha| = k} \int_{\Omega_\varrho} |D^\alpha u_\varrho(x)|^p dx\Big)^{1/p}$$

эквивалентна норме (I).

При доказательстве можно следовать, например, доказательству аналогичной теоремы в [I].

Рассмотрим подробнее пространство $\mathfrak{M}^{1,2}$.

Пусть $\Xi = \{\xi : \xi = (\varrho_1, \dots, \varrho_\sigma)\}$ – множество всевозможных сочетаний индексов $\varrho_i \in \{1, \dots, \tau\}$, $1 \le \sigma \le \tau$. Через Ω_ξ обозначим соответствующие объединения подмножеств $\Omega_\varrho \subset \Omega$: Ω_ξ –

$= \bigcup_{\varrho_i \in \xi} \Omega_{\varrho_i}$. Границу $\overline{\Omega}_\xi$ обозначим через Γ_ξ. Из теоремы I следует

Лемма I. Пусть заданы множества $\gamma_{\varrho\sigma} \subset \Gamma_{\varrho\sigma}$, удовлетворяющие условию: для любого $\xi \in \Xi$ множество γ_ξ – сумма всех $\gamma_{\varrho\sigma}$ принадлежащих Γ_ξ, имеет положительную $d\gamma$– меру.

Тогда норма $\|u\|_{1,2}$ эквивалентна в $\mathfrak{M}^{1,2}$ норме

$$|u| = \Big(\sum_{\varrho=1}^{\tau} \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega_\varrho} \Big|\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big|^2 dx +$$

$$+ \sum_{\sigma=1}^{\tau} \int_{\gamma_{0\sigma}} |u_\sigma|^2 d\gamma + \sum_{\sigma=2}^{\tau} \sum_{\varrho=1}^{\sigma-1} \int_{\gamma_{\varrho\sigma}} |u_\varrho - u_\sigma|^2 d\gamma \Big)^{1/2}. \qquad (2)$$

Разобьем каждое $\Gamma_{\varrho\sigma}$ на два (не обязательно связных) подмножества $\Gamma^0_{\varrho\sigma}$ и $\Gamma^1_{\varrho\sigma}$ так, что $\Gamma_{\varrho\sigma} = \Gamma^0_{\varrho\sigma} \cup \Gamma^1_{\varrho\sigma}$, $\Gamma^0_{\varrho\sigma} \cap \Gamma^1_{\varrho\sigma} = \emptyset$. При этом предполагаем, что $\Gamma^0_{\varrho\sigma}$ замкнуты. Описанные выше множества Γ_ξ тоже разбиваются на Γ^0_ξ – сумму всех $\Gamma^0_{\varrho\sigma} \subset \Gamma_\xi$, и $\Gamma^1_\xi = \Gamma_\xi \setminus \Gamma^0_\xi$.

Пусть $\mathcal{U}(\Gamma^0_{\varrho\sigma}) \subset \mathbb{R}^n$ – некоторая окрестность $\Gamma^0_{\varrho\sigma}$, т.е. открытое множество в $\mathbb{R}^n$ такое, что $\Gamma^0_{\varrho\sigma} \subset \mathcal{U}(\Gamma^0_{\varrho\sigma})$. Определим множества

$$\mathcal{U}^0_{0\sigma} = \mathcal{U}(\Gamma^0_{0\sigma}) \cap \overline{\Omega}_\sigma, \quad \sigma = 1,\dots,\tau;$$

$$\mathcal{U}^0_{\varrho\sigma} = \mathcal{U}(\Gamma^0_{\varrho\sigma}) \cap [\overline{\Omega}_\varrho \cup \overline{\Omega}_\sigma], \quad \sigma = 2,\dots,\tau; \ \varrho = 1,\dots,\sigma-1.$$

Введем обозначение

$$\Gamma = \bigcup_{\sigma=1}^{\tau} \bigcup_{\varrho=0}^{\sigma-1} \Gamma^0_{\varrho\sigma}$$

и определим пространство $\mathcal{L}^\infty_\Gamma \subset \mathcal{L}^\infty$.

Мы будем говорить, что функция $u \in \mathcal{L}^\infty$ принадлежит $\mathcal{L}^\infty_\Gamma$, если у всех непустых $\Gamma^0_{\varrho\sigma}$ существуют окрестности $\mathcal{U}^0_{\varrho\sigma}$ (у разных u они, вообще говоря, разные) такие, что

$$u_\sigma(x) = 0 \quad \text{в} \quad \mathcal{U}^0_{0\sigma}, \ \sigma = 1,\dots,\tau;$$

и сужения u на $\overline{\Omega}_\varrho \cup \overline{\Omega}_\sigma$

$$u\big|_{\overline{\Omega}_\varrho \cup \overline{\Omega}_\sigma} \in C^\infty(\overline{\mathcal{U}}^0_{\varrho\sigma}), \ \sigma = 2,\dots,\tau; \ \varrho = 1,\dots,\sigma-1.$$

Обозначим через $\mathfrak{M}^{1,2}_\Gamma$ замыкание множества $\mathcal{L}^\infty_\Gamma$ в $\mathfrak{M}^{1,2}$ относительно нормы $\|\cdot\|_{1,2}$. Пространство $\mathfrak{M}^{1,2}_\Gamma$ тоже гильбертово со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_1$. Из соответствующей теоремы о следе вытекает: если $u \in \mathfrak{M}^{1,2}_\Gamma$, то при

$\operatorname{mes} \Gamma^{0}_{\varrho\sigma} > 0$

$$u_\sigma(x) = 0 \text{ почти всюду на } \Gamma^{0}_{0\sigma}, \tag{3}$$

$$u_\varrho(x) = u_\sigma(x) \quad \text{почти всюду на } \Gamma^{\Phi}_{\varrho\sigma} \text{ с } \varrho \geq 1. \tag{4}$$

Отсюда следует в свою очередь, что при выполнении предпосылок леммы I норма $\|u\|_{1,2}$ эквивалентна в пространстве $\mathfrak{M}^{1,2}_{\Gamma}$ норме

$$|u|_\Gamma = \left(\sum_{\varrho=1}^{\tau} \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega_\varrho} \left|\frac{\partial u_\varrho}{\partial x_i}\right|^2 dx + \right.$$
$$\left. + \sum_{\sigma=1}^{\tau} \int_{\gamma^1_{0\sigma}} |u_\sigma|^2 d\gamma + \sum_{\sigma=2}^{\tau} \sum_{\varrho=1}^{\sigma-1} \int_{\gamma^1_{\varrho\sigma}} |u_\varrho - u_\sigma|^2 d\gamma \right)^{1/2},$$

где $\gamma^1_{\varrho\sigma} = \gamma_{\varrho\sigma} \cap \Gamma^1_{\varrho\sigma}$.

§ 3. Вариационное равенство

Пусть функции $a, a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$, $i,j = 1,\dots,n$, и почти при всех $x \in \Omega$ имеют место неравенства

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\eta_i\eta_j \geq \alpha \sum_{i=1}^{n} \eta_i^2 \quad \text{для} \quad \forall (\eta_1,\dots,\eta_n) \in \mathbb{R}^n, \; a(x) \geq 0,$$

где $\alpha = \mathrm{const} > 0$. Сужения a_{ij} и a на Ω_ϱ обозначим через $a_{\varrho ij}$ и a_ϱ.

Пусть на множествах $\Gamma^1_{\varrho\sigma}$ с положительной $d\gamma$-мерой определены функции $b_{\varrho\sigma} \in L^\infty(\Gamma^1_{\varrho\sigma})$, обладающие следующим свойством:

$$b_{\varrho\sigma}(x) \geq 0 \text{ почти всюду на } \Gamma^1_{\varrho\sigma}.$$

Зададим на $\mathfrak{M}^{1,2}_\Gamma \times \mathfrak{M}^{1,2}_\Gamma$ билинейную форму

$$a(u,v) = \sum_{\varrho=1}^{\tau} \int_{\Omega_\varrho} \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{\varrho ij} \frac{\partial u_\varrho}{\partial x_j} \frac{\partial v_\varrho}{\partial x_i} + a_\varrho u_\varrho v_\varrho \right) dx +$$
$$+ \sum_{\sigma=1}^{\tau} \int_{\Gamma^1_{0\sigma}} b_{0\sigma} u_\sigma v_\sigma \, d\gamma + \sum_{\sigma=2}^{\tau} \sum_{\varrho=1}^{\sigma-1} \int_{\Gamma^1_{\varrho\sigma}} b_{\varrho\sigma}(u_\varrho - u_\sigma)(v_\varrho - v_\sigma)\, d\gamma.$$

Пусть задана функция $f \in L^2(\Omega)$. Рассмотрим задачу: найти $u \in \mathfrak{M}^{1,2}_\Gamma$ такую, что

$$a(u,v) = \int_\Omega f v \, dx \quad \text{для} \quad \forall v \in \mathfrak{M}^{1,2}_\Gamma. \tag{5}$$

Обозначим через $\gamma^1_{\varrho\sigma} \subset \Gamma^1_{\varrho\sigma}$ множества, для которых существуют постоянные $\beta_{\varrho\sigma} > 0$ такие, что $b_{\varrho\sigma}(x) \geq \beta_{\varrho\sigma}$ почти всюду на $\gamma^1_{\varrho\sigma}$, а через γ^1_ξ – сумму всех таких $\gamma^1_{\varrho\sigma} \subset \Gamma^1_\xi$, $\xi \in \Xi$.

Теорема 2. Если

$$\operatorname{mes}(\Gamma_\xi^0 \cup \Gamma_\xi^1) > 0 \quad \text{для любого} \quad \xi \in \Xi, \tag{6}$$

то вариационное равенство (5) имеет единственное решение в $\mathfrak{M}_\Gamma^{1,2}$.

Утверждение теоремы вытекает при сделанных в этом параграфе предположениях как следствие леммы Лакса—Мильграма (см., напр., [7]) из эквивалентности норм $\|\cdot\|_{1,2}$ и $|\cdot|_\Gamma$ в пространстве $\mathfrak{M}_\Gamma^{1,2}$.

Замечание. Если функция a удовлетворяет неравенству $a(x) \geq \alpha = \mathrm{const} > 0$ почти при всех $x \in \Omega$, то утверждение теоремы 2 справедливо и без предположения (6).

§ 4. Краевая задача

Введем обозначения для конормальных производных, определенных почти всюду на $\Gamma_{\varrho\sigma}$:

$$\frac{\partial u_\varrho}{\partial N_{\varrho\sigma}} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{\varrho ij} \frac{\partial u_\varrho}{\partial x_j} \cos(\nu_{\varrho\sigma}, x_i),$$

$$\frac{\partial u_\sigma}{\partial N_{\varrho\sigma}} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{\sigma ij} \frac{\partial u_\sigma}{\partial x_j} \cos(\nu_{\varrho\sigma}, x_i),$$

$\sigma = 1, \ldots, \tau; \ \varrho = 0, \ldots, \sigma - 1.$

Пусть коэффициенты $a_{ij} \in \mathcal{L}^1$, $i, j = 1, \ldots, n$; $a \in \mathcal{L}^0$; $b_{\varrho\sigma}$ – кусочно непрерывны на $\Gamma_{\varrho\sigma}^1$, $\sigma = 0, \ldots, \tau$; $\varrho = 1, \ldots, \sigma - 1$. Если решение задачи (5) $u \in \mathfrak{M}^{2,2}$ то оно будет решением краевой задачи

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{\varrho ij} \frac{\partial u_\varrho}{\partial x_j}\right) + a_\varrho u_\varrho = f_\varrho, \ x \in \Omega_\varrho, \ \varrho = 1, \ldots, \tau; \tag{7}$$

$$u_\varrho\Big|_{\Gamma_{0\varrho}^0} = 0, \ \frac{\partial u_\varrho}{\partial N_{0\varrho}} + b_{0\varrho} u_\varrho\Big|_{\Gamma_{0\varrho}^1} = 0, \ \varrho = 1, \ldots, \tau; \tag{8}$$

с условиями сопряжения

$$\begin{gathered} u_\varrho\Big|_{\Gamma_{\varrho\sigma}^0} = u_\sigma\Big|_{\Gamma_{\varrho\sigma}^0}, \quad \frac{\partial u_\varrho}{\partial N_{\varrho\sigma}}\Big|_{\Gamma_{\varrho\sigma}^0} = \frac{\partial u_\sigma}{\partial N_{\varrho\sigma}}\Big|_{\Gamma_{\varrho\sigma}^0}, \\ \frac{\partial u_\varrho}{\partial N_{\varrho\sigma}}\Big|_{\Gamma_{\varrho\sigma}^1} = \frac{\partial u_\sigma}{\partial N_{\varrho\sigma}}\Big|_{\Gamma_{\varrho\sigma}^1} = b_{\varrho\sigma}(u_\varrho - u_\sigma)\Big|_{\Gamma_{\varrho\sigma}^1}, \end{gathered} \tag{9}$$

$\sigma = 2, \ldots, \tau; \ \varrho = 1, \ldots, \sigma - 1.$

Здесь f_ϱ – сужение функции f на Ω_ϱ, равенства (7)–(9) выполняются на соответствующих множествах почти всюду.

Обратно, решение краевой задачи (7)–(9) $u \in \mathfrak{M}^{2,2}$ будет решением вариационного равенства (5).

10

Эти утверждения доказываются обычными рассуждениями об эквивалентности краевой задачи и ее вариационной постановки. Таким образом решение задачи (5) можно рассматривать как обобщенное решение краевой задачи (7)-(9).

§ 5. Метод конечных элементов

При изложении этого параграфа мы следуем [7].

Пусть $K\subset\mathbb{R}^n$ замкнутый многоугольник, P_K – пространство многочленов, однозначно определяемых на K конечным множеством значений их и их производных в некоторых точках K – т.н. множеством степеней свободы Σ_K. Тройку (K, P_K, Σ_K) назовем конечным элементом в $\mathbb{R}^n$. Через h_K обозначим диаметр K, а через ρ_K – диаметр наибольшей сферы, вписанной в K.

Пусть Ω_ρ – многоугольники, а $\overset{\circ}{\Gamma}_{\rho\sigma}$ – или пустые множества, или покрываются в точности гранями некоторых многоугольников, содержащихся в Ω_ρ или Ω_σ.

Рассмотрим на $\overline{\Omega}$ семейство триангуляций T_h такое, что все $\overline{\Omega}_\rho$ в точности покрываются элементами $K\subset T_h$, а $\overset{\circ}{\Gamma}_{\rho\sigma}$ записываются как объединения граней некоторых K. Пусть при этом величина

$$h = \max_{K\in T_h} h_K$$

аппроксимирует нуль и существует такая постоянная $\lambda>0$, что

$$\frac{h_K}{\rho_K}\le\lambda \quad \text{при} \quad \forall K\in\bigcup_h T_h .$$

Далее предположим, что все конечные элементы (K, P_K, Σ_K) $K\in\bigcup\limits_h T_h$ аффино-эквивалентны одному исходному конечному элементу $(\hat K, \hat P, \hat\Sigma)$, т.е. для каждого $K\in\bigcup\limits_h T_h$ существует такое обратимое аффинное отображение $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, что $K=F(\hat K)$. Обозначим через $P^j(\hat K)$ множество (рассматриваемых на $\hat K$) многочленов степени не больше j.

С каждой такой триангуляцией ассоциируем пространство X_h кусочно полиномиальных функций $u_h(x)$: $u_h(x)=u_{\rho h}(x), x\in\overline{\Omega}_\rho$, $\rho=1,\dots,\tau$, сужения которых $u_{\rho h}|_K\in P_K$. Потребуем, чтобы

$$X_h\subset\mathcal{L}^\circ\cap\mathfrak{M}^{1,2}_\Gamma ,$$

т.е. функции u_h удовлетворяли условиям (3), (4).

Рассмотрим наряду с задачей (5) задачу: найти $u_h\in X_h$ такую, что

$$a(u_h, v_h)=\int_\Omega f v_h dx \quad \text{для} \quad \forall v_h\in X_h . \tag{10}$$

При сделанных в § 3 предположениях имеет место

Теорема 3. Вариационная задача (10) имеет единственное решение u_h. Если существует такое число $j \geq 1$, что имеют место следующие включения

$$P^j(\hat{K}) \subset \hat{P} \subset W^{1,2}(\hat{K}), \quad W^{j+1,2}(\hat{K}) \subset C^s(\hat{K}),$$

где s – максимальный порядок частных производных, встречающихся в определении множества $\hat{\Sigma}$, и решение вариационной задачи (5) $u \in \mathfrak{M}^{j+1,2}$, то существует такая не зависящая от h постоянная c, что

$$\|u - u_h\|_{1,2} \leq c h^j \|u\|_{j+1,2}.$$

Теорема доказывается аналогично соответствующему утверждению в [7]. Нетрудно перенести и некоторые другие утверждения из [7].

Литература

1. Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных. М., Высшая школа, 1977.
2. Молчанов И.Н., Дейнека В.С. Решение краевой задачи для дифференциального уравнения эллиптического типа второго порядка с разрывом в решении. "Вычисл. и прикл. мат." Киев, 1983, № 50, с. 23-31.
3. Молчанов И.П., Николенко Л.Д. Вариационной метод в некоторых краевых задачах с разрывными решениями. В сб. "Числ. анализ". Киев, 1975, с. 71-83.
4. Самарский А.А., Андреев В.Б. Разностные методы для эллиптических уравнений. М., Наука, 1976.
5. Семенченко С.П. Численное решение эллиптических уравнений второго порядка с разрывными решениями. В сб. "Научн. конф. "Вычисл. мат. в соврем. научн-техн. прогрессе", 1974. Вып. 2", Канев, 1974, с. 186-192.
6. Соболев С.П. Некоторые приложения функционального анализа в математической физике. Ленинград, ЛГУ, 1950.
7. Съярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. М., Мир, 1980.

Поступило
23 IV 1986

AN ELLIPTIC BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH DISCONTINUOUS SOLUTION

I. Saarniit

Summary

The variational setting and solvability of boundary value problems for linear elliptic equations with discontinuous solutions are studied. A possibility of using the finite element method is considered for their numerical solution.

Уч.зап.Тартуск.ун-та,1986,762,77-82.

О ЧИСЛЕННОМ ИНТЕГРИРОВАНИИ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ НА НЕРАВНОМЕРНЫХ СЕТКАХ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СУТОЧНОГО ХОДА ТЕМПЕРАТУРЫ ПОВЕРХНОСТНОГО СЛОЯ МОРЯ

Х. Арст, В. Соомер

1. Введение. В настоящее время широко распространено изучение природных объектов и явлений методом численного эксперимента. Это позволяет оценить чувствительность изучаемого явления к различным влияющим факторам и даже в некоторой мере прогнозировать его поведение при рассматриваемых условиях. В настоящей работе рассматриваются некоторые проблемы, связанные с численным интегрированием уравнения теплопроводности на неравномерных сетках. Это уравнение использовано авторами для определения ожидаемого суточного хода температуры поверхностного слоя моря при различных видах и количествах загрязнения воды. Физический подход весьма примитивный: рассматривается распространение тепла только по вертикалям в предположении однородности температурного поля в горизонтальных направлениях. С аспекта основной цели работы (оценка влияния загрязнения моря на температуру воды) важно отметить, что загрязнение воды влияет на температурный режим моря прежде всего путем вертикального хода лучистого притока тепла - т.е. изменяется вертикальный ход функции источника в уравнении теплопроводности. Поэтому на первом этапе можно ограничиться одномерной моделью распространения тепла. Как уже отмечено, математически этот подход описывается уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = H(z,t)\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\partial H}{\partial z}\frac{\partial T}{\partial z} + F(z,t) \qquad (1)$$

с начальным и краевыми условиями

$$T(z,0)=\varphi(z), \quad \frac{\partial T}{\partial z}(z^*,t)=0, \quad \frac{\partial T}{\partial z}(0,t)=g(t). \qquad (2)$$

Уравнение (1) рассмотрим в области

$$D=\{(z,t):\ 0\le z\le z^*,\quad 0<t\le t^*\}.$$

Известно, что существуют постоянные c_1 и c_2, что

$$0<c_1\le H(z,t)\le c_2 \qquad (3)$$

и функция $H(z,t)$ непрерывно дифференцируема в области $\bar{D}$.

Здесь $T(z,t)$ – искомая температура морской воды, z – глубина, t – время, $H(z,t)$ – коэффициент вертикального турбулентного обмена в воде за счет поглощенной солнечной энергии (функция источника). Следует принимать во внимание весьма большой градиент функций $H(z,t)$ и $F(z,t)$ вблизи водной поверхности. Поэтому задачу (I), (2) целесообразно решать с переменным шагом по глубине, выбирая вблизи водной поверхности более малые шаги.

2. Метод решения задачи (I), (2). Введем на отрезке $[0,z^*]$ (в общем неравномерное) разбиение $0=z_0<z_1<\ldots<z_n=z^*$ и на $[0,t^*]$ равномерное разбиение $0=t_0<t_1<\ldots<t_m=t^*$. Обозначим $h_i=z_i-z_{i-1}$, $i=1,\ldots,n$ и $\ell=t_k-t_{k-1}$, $k=0,\ldots,m$. Предположим, что $h_i\le h_{i+1}$. Частные производные в уравнении (I) приближаем при помощи формул (обозначим $T_{ik}=T(z_i,t_k)$, $i=0,\ldots,n$; $k=0,\ldots,m$)

$$\frac{\partial T(z_i,t_{k+1})}{\partial t}=\frac{T_{i,k+1}-T_{ik}}{\ell}+O(\ell) \tag{4}$$

$$\frac{\partial T(z_i,t_{k+1})}{\partial z}=\frac{T_{i+1,k+1}-T_{i-1,k+1}}{h_i+h_{i+1}}+O(h_{i+1}-h_i+h_ih_{i+1}), \tag{5}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}=2\left[\frac{T_{i-1,k+1}}{h_i(h_i+h_{i+1})}+\frac{T_{i+1,k+1}}{h_{i+1}(h_i+h_{i+1})}-\frac{T_{i,k+1}}{h_ih_{i+1}}\right]+$$
$$+O(h_{i+1}-h_i+h_ih_{i+1}) \tag{6}$$

Формулы (4)–(6) справедливы, если функция $T(z,t)$ имеет в области D непрерывные частные производные четвертого порядка по z и второго порядка по t. Формула (4) хорошо известна, формула (6) доказана в книге [2] на стр. 8I, формула (5) доказывается аналогично.

Замечание I. При $h_i=h=const$ из (5) и (6) получаем общеизвестные формулы для аппроксимации $\frac{\partial T}{\partial z}$, $\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$ (см. напр. [2], стр. 73).

Предполагаем, что функция $T(z,t)$ определена и является достаточно гладкой и при $z\in[-h_1,0]$ и $z\in[z^*,z^*+h_n]$. Тогда производные в дополнительных условиях (2) можем аппроксимировать по известным формулам

$$\frac{\partial T(0,t_k)}{\partial z} = \frac{T_{1,k} - T_{-1,k}}{2h_1} + \psi_{-1,k},$$
$$\frac{\partial T(z^*,t_k)}{\partial z} = \frac{T_{n+1,k} - T_{n-1,k}}{2h_n} + \psi_{n+1,k}, \tag{7}$$
где $T_{-1,k} = T(-h_1, t_k)$, $T_{n+1,k} = T(z^* + h_n, t_k)$. Известно, что $\psi_{-1,k} = O(h_1^2)$, $\psi_{n+1,k} = O(h_n^2)$.

Обозначим $H_{i,k} = H(z_i, t_k)$ и $F_{ik} = F(z_i, t_k)$ и рассмотрим разностную схему

$$\frac{\tau_{i,k+1} - \tau_{ik}}{l} = 2H_{i,k+1}\left[\frac{\tau_{i-1,k+1}}{h_i(h_i+h_{i+1})} + \frac{\tau_{i+1,k+1}}{h_{i+1}(h_i+h_{i+1})} - \frac{\tau_{i,k+1}}{h_i h_{i+1}}\right] +$$
$$+ \frac{\partial H(z_i, t_{k+1})}{\partial z} \cdot \frac{\tau_{i+1,k+1} - \tau_{i-1,k+1}}{h_i + h_{i+1}} + F_{i,k+1}, \tag{8}$$
$$i = 0, \ldots, n, \quad k = 0, \ldots, m-1,$$
$$\tau_{i0} = \rho_i, \quad i = 0, \ldots, n, \tag{9}$$
$$\tau_{1k} - \tau_{-1,k} = \mu_k, \quad \tau_{n+1,k} - \tau_{n-1,k} = \nu_k, \quad k = 1, \ldots, m \tag{10}$$

Тогда из формул (4)-(7) следует, что при $\rho_i = \varphi_i = \varphi(z_i)$, $\mu_k = 2h_1 g_k$, $\nu_k = 0$ разностная схема (8)-(I0) аппроксимирует задачу (I), (2). Уравнение (I) аппроксимируется в точках (z_i, t_{k+1}), $i = 0, \ldots, n$; $k = 0, \ldots, m-1$ уравнением (8), погрешность аппроксимации

$$\psi_{i,k+1} = O(h_{i+1} - h_i + h_i h_{i+1} + l)$$

Напишем уравнение (8) в виде

$$(1 + \alpha_{ik} + \beta_{ik})\tau_{i,k+1} =$$
$$= \alpha_{ik}\tau_{i+1,k+1} + \beta_{ik}\tau_{i-1,k+1} + \tau_{ik} + lF_{i,k+1}, \tag{II}$$

где

$$\alpha_{ik} = \frac{l}{h_i + h_{i+1}}\left[\frac{2H_{i,k+1}}{h_{i+1}} + \frac{\partial H(z_i, t_{k+1})}{\partial z}\right],$$
$$\beta_{ik} = \frac{l}{h_i + h_{i+1}}\left[\frac{2H_{ik+1}}{h_i} - \frac{\partial H(z_i, t_{k+1})}{\partial z}\right].$$

Пусть выполнено условие

$$\left| \frac{\partial H(z_i, t_k)}{\partial z} \right| \leqslant \frac{2 H_{ik}}{h_{i+1}}, \quad k = 1, \ldots, m, \qquad (12)$$

тогда $\alpha_{ik} \geqslant 0$, $\beta_{ik} \geqslant 0$.

Замечание 2. Из условия (3) и из дифференцируемости функции $H(z,t)$ следует, что условие (12) выполнено при достаточно малых h_i.

Учитывая краевые условия (10), можем уравнения (11) написать в виде

$$(1+\alpha_{0k}+\beta_{0k})\tau_{0,k+1} = (\alpha_{0k}+\beta_{0k})\tau_{1,k+1} - \beta_{0k}\mu_{k+1} + \tau_{0k} + \ell F_{0,k+1},$$

$$(1+\alpha_{ik}+\beta_{ik})\tau_{i,k+1} = \alpha_{ik}\tau_{i+1,k+1} + \beta_{ik}\tau_{i-1,k+1} + \tau_{ik} + \ell F_{i,k+1},$$
$$i = 1, \ldots, n,$$

$$(1+\alpha_{nk}+\beta_{nk})\tau_{n,k+1} = (\alpha_{nk}+\beta_{nk})\tau_{n-1,k+1} - \alpha_{nk}\nu_{k+1} + \tau_{nk} + \ell F_{n,k+1}.$$

Из этих равенств выводим следующее неравенство (напомним, что $\alpha_{ik} \geqslant 0$, $\beta_{ik} \geqslant 0$)

$$\|\tau^{k+1}\| \leqslant \|\tau^k\| + \ell\|F^{k+1}\| + \max(|\beta_{0k}\mu_{k+1}|, |\alpha_{nk}\nu_{k+1}|)$$

где

$$\|\tau^k\| = \max_{0\leqslant i\leqslant n} |\tau_{ik}|, \qquad \|F^k\| = \max_{0\leqslant i\leqslant n} |F_{ik}|$$

Тогда нетрудно убедиться, что имеет место неравенство

$$\|\tau^k\| \leqslant \|\tau^0\| + k\ell \max_{1\leqslant j\leqslant k-1} \|F^j\| + k \max_{1\leqslant j\leqslant k-1} (|\beta_{0j}\mu_j|, |\alpha_{nj}\nu_j|). \qquad (13)$$

Из неравенства (13) вытекает, что при $\mu_k = \nu_k = 0$ разностная схема (8)-(10) равномерно устойчива.

Оценим теперь погрешность разностного метода (8)-(10). Если разностная задача (8)-(10) аппроксимирует задачу (1), (2), то в точках (z_i, t_k), $i = 0, \ldots, n$; $k = 1, \ldots, m$ погрешность аппроксимации $\psi_{ik} = O(h_{i+1} - h_i + h_i h_{i+1} + \ell)$. Пусть $\varepsilon_{ik} = T_{ik} - \tau_{ik}$, т.е. ε_{ik} – погрешность метода в точке (z_i, t_k). Тогда числа ε_{ik} являются решениями разностной задачи (8)-(10) при $F_{ik} = \psi_{ik}$, $\varphi_i = 0$, $\mu_k = 2h_1\psi_{-1,k}$ и $\nu_k = 2h_n\psi_{n+1,k}$.

Тогда из условия (13) получаем

$$\|\varepsilon^k\| \leqslant k\ell \max_{1\leqslant j\leqslant k-1} \|\psi^j\| + k \max\left(\max_{1\leqslant j\leqslant k-1} |2h_1\beta_{0j}\psi_{-1,j}|, \max_{1\leqslant j\leqslant k-1} |2h_n\psi_{n+1,j}|\right) \qquad (14)$$

где $\|\varepsilon^k\| = \max\limits_{0\le i\le n} |\varepsilon_{ik}|$, $\|\psi^k\| = \max\limits_{0\le i\le n} |\psi_{ik}|$.

Но из условий (3) и (I2) вытекает

$$\beta_{0k} = \frac{\ell}{2h_1^2}\left[2H_{0,k+1} - h_1 \frac{\partial H(0,t_{k+1})}{\partial z}\right] \le \frac{\ell}{2h_1^2}\cdot 4c_2 = \frac{2\ell c_2}{h_1^2}$$

и аналогично

$$\alpha_{nk} \le \frac{2\ell c_2}{h_n^2}$$

Значит, из условия (I4) следует оценка (учитываем, что $k\ell < t^*$)

$$\|\varepsilon^k\| \le t^* \max_{1\le k\le m} \|\psi^k\| + 4c_2 t^* \max\left(\max_{1\le k\le m}\left|\frac{1}{h_1}\psi_{-1k}\right|, \max_{1\le k\le m}\left|\frac{1}{h_n}\psi_{n+1,k}\right|\right)$$

Так как $\psi_{ik} = O(h_{i+1} - h_i + h_i h_{i+1} + \ell)$, $\psi_{-1,k} = O(h_1^2)$,

$\psi_{n+1,k} = O(h_n^2)$ и $h_1 \le h_n$, то можем сказать, что существует такая постоянная $M>0$ что

$$\|\varepsilon\| = \max_{1\le k\le m} \|\varepsilon^k\| \le M(\ell + h_n).$$

3. <u>О решении задачи на ЭВМ</u>. Задача (8)-(I0) была решена на ЭВМ ЕС-I022. Мы выбирали шаги сетки

$$h_i = z^* \frac{q-1}{q^n - 1} q^{i-1}, \quad i = 1, \dots, n,$$

где $q > 1$. Рассматривались разные значения q, z^*, t^*, ℓ и h_1. Например, рассматривался случай, где q = I,09, $h_1 = z_1 =$ 0,32I·I0^{-3}см, z^*= 20 м, ℓ= I20 сек, t^*= 24 ч. Функции H и φ были следующие

$$H(z,t) = H_0 + \alpha(1 - e^{-\varkappa z}) + \beta(1 + e^{-\varkappa z})(1 - e^{-\gamma z^3})\left(1 + \sin\frac{at+b}{1+\varkappa z}\right),$$

$$\varphi(z) = T(z,0) = T_1 - e^{-\varepsilon z} \quad \text{или} \quad \varphi(z) = const,$$

где $H_0, \alpha, \beta, \gamma, \varkappa, a, b, T_1, \varepsilon$ – некоторые положительные постоянные. Функция $g = g(t)$ аппроксимируется по формулам, которые приведены например в книге [I]. Для вычисления функции $F = F(z,t)$ пока известны только приближенные методы и она была вычислена на ЭВМ при помощи специальной программы (в некоторых случаях можно полагать, что $T(z,t) = const$).

Надо отметить, что при аппроксимации краевых условий при помощи формул

$$\frac{\partial T(0,t_k)}{\partial z} = \frac{T_{1k} - T_{0k}}{h_1} + O(h_1) \quad \text{и} \quad \frac{\partial T(z^*,t_k)}{\partial z} = \frac{T_{nk} - T_{n-1,k}}{h_n} + O(h_n)$$

полученные результаты были достаточно близкие к результатам, полученным при применении более точных формул (7).

Выбирая переменный шаг по глубине, мы убедились, что затрата времени при решении задачи на ЭВМ была значительно меньше, чем например в случае, где шаг по глубине постоянно равен $h = \min_{1 \leq i < n} h_i$ Кроме того, полученные результаты (т.е. значения функции T) в этих двух случаях были достаточно близкие (их разность было не более 3% от приращения температуры воды). Намного существенной являлось требование расчетов на ЭВМ с двойной точностью.

Графики функций $T_\tau = T(z, t_\tau)$, где $t_\tau \in [0, t^*]$, построенные по результатам решения задачи на ЭВМ, приведены в работе [3].

Литература

1. Г о р о д е ц к и й А.К., О р л о в А.П. Радиационной режим и излучательная способность водной поверхности в ИК-диапасоне спектра. В кн.: Физические аспекты дистанционного зондирования системы океана-атмосфера. М., 1981, 36-43.
2. С а м а р с к и й А.А. Теория разностных схем. М., Наука, 1977.
3. A r s t, H. Water pollution effect on mesoscale temperature variability in the sea surface layer. Proc. XIV Conf. Baltic Oceanographers, vol. 1. Gdynia, 1984, 55-68.

Поступило
20 I 1986

ABOUT THE NUMERICAL INTEGRATION OF HEAT EQUATION BY USING THE VARIABLE STEP FOR DETERMINING SEA WATER TEMPERATURE VARIATIONS

H. Arst, V. Soomer

Summary

Heat equation (1) in the initial and boundary conditione (2), was solved with the help of the method of finite differences (8), (9), (10). The variable step was applied in our calculations. The vertical and daily variations of the sea water temperature are described by equation (1).

Уч.зап.Тартуск.ун-та,1986,762,83-88.

ЗАМЕТКА К ТЕОРЕМАМ СХОДИМОСТИ ПРИБЛИЖЕННЫХ МЕТОДОВ ОТЫСКАНИЯ АВТОКОЛЕБАНИЙ

П. Мийдла

В статье [I] доказаны теоремы сходимости методов коллокации, Галеркина и конечных разностей для нахождения нетривиальных периодических решений автономных дифференциальных уравнений

$$z^{(m)}(t) = g(z(t), \ldots, z^{(m-1)}(t)). \tag{I}$$

В настоящей заметке более подробно открывается суть одного предположения этих теорем.

I. Поскольку нас интересуют основные предположения именуемых теорем, которые одинаковы для всех трех методов, то достаточно привести здесь формулировку только одной теоремы; пусть, например, для метода коллокации. Нам удобно привести эту формулировку в случае нормальной системы

$$Z'(t) = F(Z(t)), \tag{2}$$

где Z и F – m-мерные вектор-функции; $Z(t) = (z_1(t), \ldots, z_m(t))$, $F(Z) = (f_1(Z), \ldots, f_m(Z))$, $f_i(Z) = f_i(z_1, \ldots, z_m)$.

Допустим, что

(i) вектор-функция F непрерывна и непрерывно дифференцируема по всем переменным $z_1, \ldots, z_m$;

(ii) система (2) имеет нетривиальное ω^*-периодическое решение Z^*, $Z^*(t) = Z^*(t+\omega^*)$, $Z^{*\prime}(t) \neq 0$.

Обозначив через ω искомый период решения, можем задачу (2) рассмотреть в виде

$$X'(t) = \frac{1}{\lambda} F(X(t)), \tag{3}$$

где $\lambda = 2\pi/\omega$. Здесь искомыми являются 2π-периодическая вектор-функция X и значение параметра λ. Соответствующее предпосылке (ii) решение системы (3) будем обозначать через $\{\lambda^*, X^*\}$, $\lambda^* = 2\pi/\omega^*$, $X^*(t) = (x_1^*(t), \ldots, x_m^*(t))$, а матрицу Якоби системы (3) через

$$J(t)=\frac{1}{\lambda^*}\left(\frac{\partial f_i(X^*)}{\partial z_j}\right),\ i,j=1,\dots,m. \tag{4}$$

Решения Z^* и X^* связаны соотношением

$$X^*(t)=Z^*(t/\lambda^*). \tag{5}$$

Пусть

(iii) известно некоторое число α из области значений x_1^* – первой компоненты вектор-функции X^*:

$$x_1^*(0)=\alpha,\quad x_1^{*\prime}(0)\neq 0.$$

Следующие два предположения являются основными и будут анализироваться в дальнейшем. Допустим, что

(iv) линеаризованная система (см. (4))

$$U'(t)=J(t)U(t) \tag{6}$$

имеет в качестве 2π-периодических решений только вектор-функции вида $const\cdot X^{*\prime}$.

Введем вектор-функцию

$$y(t)=\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[X'(t)-F(X(t))\right]_{\substack{\lambda=\lambda^*\\ X=X^*}}=-\frac{1}{\lambda^*}X^{*\prime}(t).$$

Наконец, потребуем, что

(v) неоднородная система

$$U'(t)=J(t)U(t)+y(t) \tag{7}$$

не имеет 2π-периодических решений.

Комментируя условия (iv) и (v), можно отметить, что $X^{*\prime}$ всегда является решением системы (6), а вектор-функция

$$U_1(t)=\frac{d}{d\lambda}X^*(t)=\frac{d}{d\lambda}Z^*(t/\lambda^*)=-\frac{t}{\lambda^*}X^{*\prime}(t)$$

– решением системы (7). В этом легко убедится, соответственно, дифференцированием по t системы (3) и непосредственной подстановкой.

Обозначим через $X_n=(x_{1n},\dots,x_{mn})$ вектор-функцию с компонентами в виде тригонометрических многочленов

$$x_{in}=\frac{c_{0i}}{2}+\sum_{k=1}^{n}(c_{ki}\cos kt+d_{ki}\sin kt);$$

$$t_j=jh,\quad h=2\pi/(m(2n+1)+1).$$

Теорема сходимости метода коллокации [I] формулируется так.

<u>Теорема.</u> Пусть выполнены условия (i) – (v).

Тогда при почти всех n метод коллокации

$$\begin{cases} X_n'(t_i) = \frac{1}{\lambda} F(X(t_i)), \ i = 0, 1, \dots, m(2n+1), \\ x_{1n}(0) = \alpha \end{cases}$$

определяет изолированное приближенное решение $\{\lambda_n^*, X_n^*\}$ задачи (3), причем

$$|\lambda_n^* - \lambda| \leq c \cdot \varepsilon_n, \quad \|X_n^* - X^*\|_{H^1} \leq c \cdot \varepsilon_n,$$

где

$$\varepsilon_n = \|X^{*\prime} - P_n X^{*\prime}\|_{L_2} \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \longrightarrow \infty.$$

Здесь P_n - проектор Лагранжа, соответствующий интерполированию тригонометрическими многочленами по равноотстоящим узлам; H^1 - класс 2π-периодических абсолютно непрерывных вектор-функций, производные которых принадлежат L_2; $\|X\|_{H^1} = \left(\sum_{k=0}^{1} \|X^{(k)}\|^2_{L_2(0,2\pi)}\right)^{1/2}$.

Доказательство теоремы в приведенной формулировке объясняется в замечании 2 статьи [I].

2. Целью настоящей заметки является анализ содержания предпосылки (v) теоремы. Напомним некоторые необходимые для этой цели результаты; их доказательства можно найти в главах IУ и XII книги [2].

а) Любые две фундаментальных матрицы $\Phi_1(t)$ и $\Phi_2(t)$ системы (6) связаны равенством $\Phi_1(t) = \Phi_2(t)C$, где C - некоторая невырожденная постоянная матрица. Если $\Phi(t)$ -фундаментальная матрица системы (6), то этой, ввиду 2π-периодичности $J(t)$, будет и $\Phi(t+2\pi)$. Связывающую (невырожденную постоянную) C в равенстве $\Phi(t+2\pi) = \Phi(t)C$ называют основной матрицей для $\Phi(t)$.

б) Собственные значения основных матриц инвариантны относительно преобразования фундаментальных матриц, они однозначно определяются системой (6) и носят название мультипликаторов системы (6).

Приведем доказательство инвариантности.

Пусть $\Phi_1(t)$ и $\Phi_2(t)$ - две фундаментальных матрицы с основными матрицами C_1 и C_2, соответственно. Пусть C - связывающая их матрица, $\Phi_1(t) = \Phi_2(t)C$. Тогда имеем

$$\lambda E - C_1 = \lambda E - \Phi_1^{-1}(0)\Phi_1(2\pi) = \lambda E - C^{-1}\Phi_2^{-1}(0)\Phi_2(2\pi)C =$$

$$= C^{-1}(\lambda E - C_2)C,$$

т.е. собственные значения матриц C_1 и C_2 совпадают; здесь

E – единичная матрица.

Отметим, что, по построению, число 1 всегда является мультипликатором системы (6).

в) Обозначим через $\varphi^1(t), \ldots, \varphi^m(t)$ столбцы фундаментальной матрицы $\Phi(t)$ системы (6), а через $c^1, \ldots, c^m$ – столбцы основной матрицы C для $\Phi(t)$. Из определения основной матрицы (2 а)) вытекает, что если c^i имеет вид единичного вектора e^i (все компоненты кроме i -той – нули, а i -тая компонента равняется единице), то $\varphi^i(t)$ будет 2π-периодическим решением системы (6).

Пусть теперь $\Phi(t)$ такая фундаментальная матрица системы (6), что ее основная матрица C имеет жорданову нормальную форму; $C = \operatorname{diag}(J_1, \ldots, J_p)$, где J_1 – единственная (единственная —по построению) жорданова клетка, отвечающая мультипликатору $\lambda = 1$ системы (6). В таком случае $c^1 = e^1$ и $\varphi^1(t)$ будет 2π-периодическим решением системы (6), причем, в силу (iv), $\varphi^1(t) = \mathrm{const} \cdot X^{*\prime}(t)$; без ограничения общности можем считать, что $\varphi^1(t) = X^{*\prime}(t)$.

Обозначим порядок жордановой клетки J_1 через r.

г) Наряду с системой (6) рассмотрим ее сопряженную

$$V'(t) = -J^T(t)V(t). \tag{8}$$

Система (8), как и (6), имеет точно одно линейно независимое 2π-периодическое решение $V^*(t)$, т.е. все нетривиальные 2π-периодические решения системы (8) отличаются лишь константным множителем.

Условие (v) выполняется тогда и только тогда, когда свободный член $y(t)$ системы (7) неортогонален собственному подпространству задачи (8), т.е.

$$\int_0^{2\pi} (X^{*\prime}(t), V^*(t))\,dt \neq 0. \tag{9}$$

Здесь под интегралом находится эвклидическое скалярное произведение векторов.

д) Если $\Phi(t)$– фундаментальная матрица системы (6) с основной матрицей C, то $\Psi(t) = [\Phi^{-1}(t)]^T$ будет фундаментальной для системы (8) и ее основная матрица имеет вид $D = [C^{-1}]^T$

Докажем сказанное для основных матриц:

$$\Psi(t+2\pi) = [\Phi^{-1}(t+2\pi)]^T = [[\Phi(t)C]^{-1}]^T =$$
$$= [\Phi^{-1}(t)]^T[C^{-1}]^T = \Psi(t)[C^{-1}]^T.$$

3. Завершим анализ предположения (v) теоремы. Пусть $\Phi(t)$ – фундаментальная матрица системы (6), обладающая свойством 2в). Выделим две возможности.

Рассмотрим сперва случай, когда порядок r жордановой клетки J_1 равняется единице. Оказывается, что тогда условие (v) выполняется.

Действительно, в этом случае все элементы первой строки и первого столбца основной матрицы C – нули, кроме их общего элемента, который равняется единице. Тем же свойством обладает и матрица $D = [C^{-1}]^T$ (см. 2д)). Значит – первым столбцом матрицы $\Psi(t)$ будет $V^*(t)$ (см. 2 г)). Скалярное произведение, стоящее под интегралом в соотношении (9) равняется первому элементу первой строки матрицы-произведения

$$\Psi^T(t)\ \Phi(t) = E, \tag{10}$$

т.е. – единице. Следовательно, условие (9) выполняется и, ввиду 2 г), имеет место и (v).

Рассмотрим вторую возможность: $r > 1$. Теперь в первой строке основной матрицы C два элемента (первый и второй) равняются единице и первый столбец основной матрицы D (см. 2 д)) уже отличается от единичного вектора, им будет r-ый столбец. Значит – 2π-периодическим решением системы (8) будет r-ый столбец фундаментальной матрицы $\Psi(t)$, ввиду (10) $(X^{*1}, V^*) = 0$, следовательно, неравенство (9) и тем самым и предположение (v) опровергаются.

Отметим, что (при $r > 1$) система (6) имеет $r-1$ линейно независимых решений со свойством

$$u(t+2\pi) - u(t) = X^{*\prime}(t). \tag{11}$$

Это вытекает из определения основной матрицы и предположения (iv).

В итоге можем заключить, что условие (v) выполняется тогда когда: (vi) единица является простым мультипликатором системы (6).

Но (vi) достаточно и для выполненности (iv), следовательно, в формулировке теоремы вместо предположений (iv) и (v) можем требовать выполнение только (vi). Одно лишь (v) в формулировке можно, на основе (11), заменить требованием, чтобы для всех решений $u(t)$ системы (6) разность $u(t+2\pi) - u(t)$ не являлась нетривиальной 2π-периодической функцией.

Литература

1. Вайникко Г.М., Мийдла П.Х. О сходимости приближенных методов отыскания автоколебаний. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1977, 430, 75–88.
2. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., Мир, 1970.

Поступило
9 У 1986

A NOTE TO CONVERGATION THEOREMS FOR THE NUMERICAL METHODS OF FINDING PERIODIC SOLUTIONS

P. Miidla

Summary

In the paper [1] the proofs of convergation of the methods of collocations, Galerkin's and finite differences for finding periodic solutions of equations (1) are given.

In this note we consider the relation between two convergation conditions, (iv) and (v), in the case of autonomous system (2) and of the method of collocations. It is proved that the simplicity of the multiplication $\lambda = 1$ for system (6) implies (iv) and (v).

Уч.зап.Тартуск.ун-та,1986,762,89-97.

О РЕШЕНИИ СЛАБО-СИНГУЛЯРНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ МЕХАНИЧЕСКИХ КВАДРАТУР С ФОРМУЛОЙ ТРАПЕЦИЙ

А. Педас

Исследуется скорость сходимости одной модификации метода механических квадратур решения слабо-сингулярных интегральных уравнений и проблемы собственных значений для указанных уравнений. Аппроксимационные схемы базируются на квадратурной формуле трапеций и способе уничтожения особенности в ядре при совпадений аргументов.

§ I. Введение

Рассмотрим интегральное уравнение

$$u(t) = \int_0^b a(t,s)\,\varkappa(t-s)\,u(s)\,ds + f(t)\,, \quad 0 \le t \le b. \tag{I.I}$$

и проблему собственных значений для уравнения (I.I):

$$\lambda u(t) = \int_0^b a(t,s)\,\varkappa(t-s)\,u(s)\,ds\,, \quad 0 \le t \le b. \tag{I.2}$$

Введём следующие условия[I]:

$$f \in C^2[0,b]; \tag{I.3}$$

$$a \in C^2([0,b]\times[0,b]); \tag{I.4}$$

$$\varkappa \in C^2([-b,b]\setminus\{0\}), \tag{I.5}$$

причём при $-b \le t < 0$ и $0 < t \le b$ справедлива оценка

$$|\varkappa''(t)| \le c\,|t|^{-\beta}\,, \quad 0 < \beta < 3. \tag{I.6}$$

Заметим, что в случае дробного β из (I.6) вытекают неравенства

$$|\varkappa^{(k)}(t)| \le c\left(|t|^{-\beta+2-k} + 1\right), \quad k = 0,1,2. \tag{I.7}$$

В частности, при $0<\beta<2$ ядро $\varkappa(t)$ может при $t=0$ иметь лишь разрыв первого рода; при $2<\beta<3$ оно может иметь при $t=0$ интегрируемую степенную особенность. В случае целого β

[I] Через $C^m[a,b]$ обозначаем совокупность m раз непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ функций; буквой "c" обозначаем положительные постоянные, которые в разных неравенствах могут принимать различные значения.

($\beta=1,2$) оценки (I.7) верны для всех производных $\varkappa^{(\kappa)}(t)$, $\kappa=0,1,2$, кроме производной порядка $\kappa=2-\beta$; для неё из (I.6) вытекает неравенство

$$|\varkappa^{(\kappa)}(t)|\le c\left(|\ln|t||+1\right),\ \kappa=2-\beta. \qquad (I.8)$$

Особенность ядра, как правило, влечёт за собой особенность решения уравнения (I.I) и собственных функций уравнения (I.2). Точнее ([4], стр. 7), если уравнение (I.I) имеет интегрируемое решение $u(t)$, то $u\in C[0,b]\cap C^2(0,b)$ и в случае дробного β ($0<\beta<3$) справедливы оценки

$$|u^{(\kappa)}(t)|\le c\left[t^{-\beta+3-\kappa}+(b-t)^{-\beta+3-\kappa}+1\right],\ 0<t<b;\ \kappa=1,2. \qquad (I.9)$$

В случае целого β справедливы следующие оценки:

$$|u'(t)|\le c,\ 0<t<b, \qquad (I.I0)$$

$$|u''(t)|\le c\left[|\ln t|+|\ln(b-t)|+1\right],\ 0<t<b \qquad (I.II)$$

при $\beta=1$ и

$$|u'(t)|\le c\left[|\ln t|+|\ln(b-t)|+1\right],\ 0<t<b, \qquad (I.I2)$$

$$|u''(t)|\le c\left[t^{-1}+(b-t)^{-1}\right],\ 0<t<b \qquad (I.I3)$$

при $\beta=2$. В случае $f=0$ оценки (I.9)-(I.I3) являются оценками производных собственных функций уравнения (I.2). Если $u(0)\ne 0,\ u(b)\ne 0$, то оценки (I.9)-(I-I3) не могут быть улучшены в смысле порядка.

Ниже для приближённого решения задач (I.I) и (I,2) применяется метод механических квадратур с формулой трапеций, модифицированный по Канторовичу—Крылову (см. (2.I)-(2.4) и (3.I)). Доказывается, что этот метод сходится со скоростью $O(h^2)$ (или "почти" $O(h^2)$), где h - шаг дискретизации (см. теоремы I и 3).

Некоторые варианты метода механических квадратур для решения слабо-сингулярных уравнений второго рода исследовались в работах [2, 5, 6]. По точности они уступают методу механических квадратур, модифицированному по Канторовичу—Крылову [3, 4, 8-I0]. В [4] указанный метод применялся и для решения проблемы собственных значений. Настоящая работа представляет собой уточнение и продолжение работы [3] и одной части работы [4].

§ 2. Аппроксимация неоднородного уравнения

Рассмотрим уравнение (I.I). Переписав (I.I) в виде ([7], стр. II5)

$$u(t)=\int_0^b a(t,s)\,\varkappa(t-s)[u(s)-u(t)]ds+u(t)\int_0^b a(t,s)\varkappa(t-s)ds+f(t) \quad (2.I)$$

применим метод механических квадратур с формулой трапеций:

$$u_{in}=h\sum_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}{}' a(s_i,s_j)\varkappa(s_i-s_j)[u_{jn}-u_{in}]+$$

$$+u_{in}\int_0^b a(s_i,s)\varkappa(s_i-s)ds+f(s_i),\ i=0,1,\dots,n. \quad (2.2)$$

Здесь u_{in}, $i=0,1,\dots,n$ – приближённые значения решения уравнения (2.I) (уравнения (I.I)) в узлах

$$s_i=ih,\ i=0,1,\dots,n;\ h=\frac{b}{n}, \quad (2.3)$$

а

$$\sum_{j=0}^{n}{}' z(s_j)=\frac{1}{2}z(s_0)+z(s_1)+\dots+z(s_{n-1})+\frac{1}{2}z(s_n). \quad (2.4)$$

<u>Теорема I</u>. Пусть выполнены условия (I.3)-(I.6). Пусть уравнение (I.I) имеет единственное решение $u(t)$.

Тогда система уравнений (2.2) имеет при достаточно больших n единственное решение $(u_{0n},u_{1n},\dots,u_{nn})$ и справедлива оценка

$$\max_{0\le i\le n}|u_{in}-u(ih)|\le c\cdot\varepsilon_n, \quad (2.5)$$

где

$$\varepsilon_n=\begin{cases} h^2 & \text{при}\quad 0<\beta<2, \quad (2.6)\\ h^2(|\ln h|^2+1) & \text{при}\quad \beta=2, \quad (2.7)\\ h^{2(3-\beta)} & \text{при}\quad 2<\beta<3. \quad (2.8)\end{cases}$$

<u>Доказательство</u>. Интегральное уравнение (I.I) рассмотрим как операторное уравнение

$$u=Tu+f \quad (2.9)$$

в банаховом пространстве $C[0,b]$, а систему уравнений (2.2) как операторное уравнение

$$u_n=T_nu_n+p_nf \quad (2.I0)$$

в банаховом пространстве m_{n+1} векторов вида $u_n=$ $=(u_{0n},u_{1n},\dots,u_{nn})$ с нормой

$$\|u_n\|_{m_{n+1}}=\max_{0\le i\le n}|u_{in}|. \quad (2.II)$$

Здесь T и T_n – линейные вполне непрерывные операторы соответственно в пространствах $C[0,b]$ и m_{n+1}, задаваемые формулами

$$(Tu)(t)=\int_0^b a(t,s)\varkappa(t-s)u(s)\,ds \tag{2.12}$$

и

$$(T_n u_n)_i = h\sum_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}{}' a(s_i,s_j)\varkappa(s_i-s_j)\left[u_{jn}-u_{in}\right]+$$

$$+u_{in}\int_0^b a(s_i,s)\varkappa(s_i-s)\,ds,\ i=0,1,\dots,n, \tag{2.13}$$

а p_n – линейные непрерывные операторы из $C[0,b]$ в m_{n+1} (связывающие отображения), задаваемые формулами

$$p_n u=(u(s_0),u(s_1),\dots,u(s_n)),\quad u\in C[0,b]. \tag{2.14}$$

Стандартными рассуждениями (ср. [4], стр. 27–29) устанавливается, что последовательность операторов $\{T_n\}$ компактно сходится к оператору T относительно связывающих отображений p_n:

$$T_n\longrightarrow T \qquad \text{компактно.} \tag{2.15}$$

По теореме сходимости для операторных уравнений ([I], стр. 49; [4], стр. 27) получаем, что при достаточно больших n уравнение (2.10) имеет единственное решение u_n и справедлива оценка

$$\|u_n-p_n u\|_{m_{n+1}}\le c\,\|p_n Tu-T_n p_n u\|_{m_{n+1}}. \tag{2.16}$$

Для завершения доказательства теоремы I достаточно показать, что

$$\|p_n Tu-T_n p_n u\|_{m_{n+1}}\le c\cdot\varepsilon_n. \tag{2.17}$$

Мы имеем

$$\|p_n Tu-T_n p_n u\|_{m_{n+1}}=\max_{0\le i\le n}\left|\int_0^b v_i(s)\,ds-h\sum_{j=0}^{n}{}' v_i(s_j)\right|, \tag{2.18}$$

где

$$v_i(s)=a(s_i,s)\varkappa(s_i-s)\left[u(s)-u(s_i)\right]. \tag{2.19}$$

Условие $j\neq i$ в (2.18) при суммировании величин $v_i(s_j)$ может быть опущено, так как

$$a(t,s)\varkappa(t-s)\left[u(s)-u(t)\right]\longrightarrow 0 \qquad \text{при} \quad s\to t$$

(см. (I.4)–(I.13)). Для оценки правой части (2.18) отрезок интегрирования $[0,b]$ разделим на части

$$[0,h],\ [h,(i-1)h],\ [(i-1)h,ih],\ [ih,(n-1)h],\ [(n-1)h,b].$$

На отрезках с длиной h применим оценку ($k<\ell$)

$$\left| \int_{kh}^{lh} z(s)ds - h\sum_{j=k}^{l}{}' z(jh) \right| \le c\cdot h \cdot \int_{kh}^{lh} |z'(s)|ds, \qquad (2.20)$$

а на остальных отрезках оценку

$$\left| \int_{kh}^{lh} z(s)ds - h\sum_{j=k}^{l}{}' z(jh) \right| \le c\cdot h^2 \int_{kh}^{lh} |z''(s)|ds. \qquad (2.2I)$$

Соотношения (2.20) и (2.2I) вытекают из аналогичных соотношений для квадратурной формулы средних прямоугольников ([3]; [4], стр. 3I).

Покажем, что

$$\left| \int_{0}^{h} v_i(s)ds - h\sum_{j=0}^{1}{}' v_i(jh) \right| \le c\cdot \varepsilon_n, \quad i=0,1,\dots,n. \qquad (2.22)$$

Из (2.20) и (2.I9) вытекает, что

$$\left| \int_{0}^{h} v_i(s)ds - h\sum_{j=0}^{1}{}' v_i(jh) \right| \le c\,h \int_{0}^{h} |v_i'(s)|ds \le a_i + b_i, \qquad (2.23)$$

где

$$a_i = c\,h \int_0^h \left| \frac{\partial a(s_i,s)}{\partial s} \varkappa(s_i-s) - a(s_i,s)\varkappa'(s_i-s)\right| |u(s)-u(s_i)|ds,$$

$$b_i = c\,h \int_0^h |a(s_i,s)\varkappa(s_i-s)||u'(s)|ds.$$

Из (I.4)-(I.I0) и (I.I2) вытекает, что

$$a_i \le c\,\varepsilon_n, \quad b_i \le c\,\varepsilon_n, \quad i=0,1,\dots,n. \qquad (2.24)$$

Из (2.24) и (2.23) следует (2.22). Аналогично устанавливается, что

$$\left| \int_{b-h}^{b} v_i(s)ds - h\sum_{j=n-1}^{n}{}' v_i(jh) \right| \le c\cdot \varepsilon_n, \quad i=0,1,\dots,n; \qquad (2.25)$$

и

$$\left| \int_{(i-1)h}^{ih} v_i(s)ds - h\sum_{j=i-1}^{i}{}' v_i(jh) \right| \le c\cdot \varepsilon_n, \quad i=1,2,\dots,n. \qquad (2.26)$$

Далее, из (2.2I) и (2.I9) (для $i \ge 3$) вытекает, что

$$\left| \int_{h}^{(i-1)h} v_i(s)ds - h\sum_{j=1}^{i-1}{}' v_i(jh) \right| \le c\,h^2 \int_{h}^{(i-1)h} |v_i''(s)|ds \le a_i + b_i + c_i + d_i,$$

где

$$a_i = c\,h^2 \int_h^{(i-1)h} |a(s_i,s)\varkappa''(s_i-s)||u(s)-u(s_i)|ds,$$

$$b_i = c\,h^2 \int_h^{(i-1)h} \left| \frac{\partial^2 a(s_i,s)}{\partial s^2}\varkappa(s_i-s) - 2\frac{\partial a(s_i,s)}{\partial s}\varkappa'(s_i-s)\right| |u(s)-u(s_i)|ds,$$

$$c_i = ch^2 \int_h^{(i-1)h} \left| \frac{\partial a(s_i, s)}{\partial s} æ(s_i - s) - a(s_i, s) æ'(s_i - s) \right| |u'(s)| \, ds,$$

$$d_i = ch^2 \int_h^{(i-1)h} |a(s_i, s)\, æ(s_i - s)| \, |u''(s)| \, ds.$$

Из (I.4)–(I.I3) и равенства

$$u(s) - u(s_i) = \int_{s_i}^{s} u'(t)\, dt$$

вытекает, что

$$a_i \le c\,\varepsilon_n, \quad b_i \le c\,\varepsilon_n, \quad c_i \le c\,\varepsilon_n, \quad d_i \le c\,\varepsilon_n, \quad i = 3, \ldots, n.$$

Поэтому

$$\left| \int_h^{(i-1)h} v_i(s)\, ds - h \sum_{j=1}^{i-1}{}' v_i(jh) \right| \le c \cdot \varepsilon_n, \quad i = 3, \ldots, n. \qquad (2.27)$$

Аналогично устанавливается, что

$$\left| \int_{ih}^{(n-1)h} v_i(s)\, ds - h \sum_{j=i}^{n-1}{}' v_i(jh) \right| \le c \cdot \varepsilon_n, \quad i = 0, \ldots, n-2. \qquad (2.28)$$

Оценка (2.I7) теперь следует из (2.I8), (2.22), (2.25)–(2.28).

Доказательство теоремы I завершено.

§ 3. Аппроксимация проблемы собственных значений

Рассмотрим задачу (I.2). Аппроксимирующую конечномерную задачу для (I.2) построим в виде

$$\lambda u_{in} = h \sum_{\substack{j=0 \\ j \ne i}}^{n}{}' a(s_i, s_j)\, æ(s_i - s_j) \left[u_{jn} - u_{in} \right] +$$

$$+ u_{in} \int_0^b a(s_i, s)\, æ(s_i - s)\, ds, \quad i = 0, 1, \ldots, n, \qquad (3.I)$$

где s_i, h и $\sum'$ определены в (2.3) и (2.4) соответственно.

Уравнение (I.2) рассмотрим как операторное уравнение $\lambda u = Tu$ в банаховом пространстве $C[0,b]$ и систему уравнений (3.I) как операторное уравнение $\lambda u_n = T_n u_n$ в банаховом пространстве m_{n+1} с нормой (2.II). Здесь T и T_n – линейные вполне непрерывные операторы соответственно в пространствах $C[0,b]$ и m_{n+1}, задаваемые формулами (2.I2) и (2.I3).

<u>Теорема 2.</u> Пусть выполнены условия (I.4)–(I.6).

Тогда для каждого ненулевого собственного значения λ_0 уравнения (I.2) найдется последовательность $\{\lambda_n\}$ собственных значений систем уравнений (3.I) такая, что $\lambda_n \to \lambda_0$ при $n \to \infty$.

Обратно, каждая ненулевая предельная точка любой последовательности $\{\lambda_n\}$ собственных значений систем уравнений

(3.I) является собственным значением уравнения (I.2).

<u>Доказательство</u>. Теорема 2 следует на основе (2.I5) непосредственно из общей теоремы о сходимости собственных значений ([I], стр. 68–74; [4], стр. 70).

Следуя [4], введём обозначения для собственного подпространства

$$V = V(\lambda_0; T) = N(\lambda_0 I - T) = \{u \in C[0,b] : (\lambda_0 I - T)u = 0\}$$

и корневого подпространства

$$W = W(\lambda_0; T) = N((\lambda_0 I - T)^{\nu}).$$

Здесь I – тождественный оператор, а ν – ранг собственного значения λ_0, т.е. наименьшее натуральное число, для которого

$$N((\lambda_0 I - T)^{\nu}) = N((\lambda_0 I - T)^{\nu+1});$$

$\dim W(\lambda_0; T)$ называется корневой кратностью λ_0.

Пусть $\delta > 0$ – такое число, что в круге $|\lambda - \lambda_0| \le \delta$ нет других собственных значений уравнения (I.2), кроме λ_0. Из теоремы 2 следует, что при достаточно больших n в этот круг попадает хотя бы одно собственное значение задачи (3.I). Пусть $\lambda_n^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, k_n)$ – попарно различные собственные значения задачи (3.I), попавшие в указанный круг,

$$\nu_n^{(i)} = \dim W(\lambda_n^{(i)}; T_n)$$

– их корневые кратности. Обозначим

$$\hat{\lambda}_n = \Big[\sum_i \nu_n^{(i)} \lambda_n^{(i)}\Big]\Big[\sum_i \nu_n^{(i)}\Big]^{-1}$$

– это среднее арифметическое чисел $\lambda_n^{(i)}$ с учетом их корневых кратностей. Линейную оболочку корневых подпространств $W(\lambda_n^{(i)}; T_n)$, $i = 1, \ldots, k_n$, обозначим через $W_n = W(\lambda_0; T_n; \delta)$. Собственное подпространство для T_n с $\lambda_n^{(i)}$ обозначим через

$$V_n = V(\lambda_n^{(i)}; T_n) = N(\lambda_n^{(i)} I - T_n) = \{u_n \in m_{n+1} : (\lambda_n^{(i)} I - T_n)u_n = 0\}.$$

<u>Теорема 3</u>. Пусть выполнены условия (I.4)-(I.6). Пусть $\lambda_n \to \lambda_0 \ne 0$, где λ_0 и λ_n – собственные значения уравнения (I.2) и систем уравнений (3.I) соответственно, причём λ_0 имеет ранг ν. Пусть, наконец, $\delta > 0$ – такое число, что в круге $|\lambda - \lambda_0| \le \delta$ нет других собственных значений уравнения (I.2), кроме λ_0.

Тогда справедливы следующие оценки:

$$|\lambda_n - \lambda_0| \le c\cdot \varepsilon_n^{\frac{1}{\nu}}, \quad |\hat{\lambda}_n - \lambda_0| \le c\cdot \varepsilon_n,$$

$$\sup_{u_n\in V_n, \|u_n\|_{m_{n+1}}=1} \ \inf_{u\in V} \ \max_{0\le i\le n} |u_{in} - u(ih)| \le c\cdot \varepsilon_n^{\frac{1}{\nu}},$$

$$\sup_{u_n\in W_n, \|u_n\|_{m_{n+1}}=1} \ \inf_{u\in W} \ \max_{0\le i\le n} |u_{in} - u(ih)| \le c\cdot \varepsilon_n,$$

$$\sup_{u\in W, \|u\|_{C[0,b]}=1} \ \inf_{u_n\in W_n} \ \max_{0\le i\le n} |u_{in} - u(ih)| \le c\cdot \varepsilon_n,$$

где ε_n - определенная в (2.6)-(2.8) величина, а u и $u_n = (u_{0n}, u_{1n}, \dots, u_{nn})$ - собственные (или корневые) элементы задач (I.2) и (3.I), соответствующие собственным значениям λ_0 и λ_n $(\lambda_n \to \lambda_0)$ соответственно.

Доказательство. Теорема 3 непосредственно следует из (2.I5), (2.I7) и общей теоремы о сходимости для проблемы собственных значений([I], стр. 68-84; [4] стр. 70).

Литература

I. Вайникко Г.М. Анализ дискретизационных методов. Тарту, ТГУ, I976.

2. Вайникко Г., Педас А. О решении интегральных уравнений с логарифмической особенностью методом механических квадратур. Уч. зап. Тартуск. ун-та, I97I, 28I, 20I-2I0.

3. Вайникко Г., Педас А. О методе механических квадратур для решения интегральных уравнений со слабой особенностью. В сб.: Материалы конференции "Методы алгебры и функционального анализа при исследовании семейств операторов". Тарту, ТГУ, I978, 58-60.

4. Вайникко Г., Педас А., Уба П. Методы решения слабо-сингулярных интегральных уравнений. Тарту, Изд-во Тартуск. ун-та, I984.

5. Габдулхаев Б.Г. Оптимальные аппроксимации решений линейных задач. Казань, Казанский ун-т, I980.

6. Габдулхаев Б.Г., Горлов В.Е. О сходимости полигонального метода решения слабо сингулярных интегральных уравнений. В сб.: Функциональный анализ и его

приложения. Казань, Казанский ун-т, 1975, 60-72.

7. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближённые методы высшего анализа. М.-Л., ГИТТЛ, 1952.

8. Anselone, P.M. Singularity subfraction in the numerical solution of integral equations. J. Austral. Math. Soc. (Series B), 1981, v. 22, 408-418.

9. Atkinson, K. The numerical solution of Fredholm integral equations of the second kind with singular kernels. Numer. Math., 1972, v. 19, 248-259.

10. Kussmaul, H., Werner, P. Fehlerabschätzungen für ein numerisches Verfahren zur Auflösung linearer Integralgleichungen mit schwachsingulären Kernen. Comput. Arch. elektron. Rechnen, 1968, Bd. 3, 21-46.

Поступило
8 IУ 1986

THE NUMERICAL SOLUTION OF WEAKLY SINGULAR INTEGRAL EQUATIONS BY QUADRATURE METHOD WITH TRAPEZOIDAL FORMULA

A. Pedas

Summary

Error estimates of approximate solutions for linear integral equations of the second kind with weakly singular kernels and for the eigenvalue problem are derived. The approximation schemes are based on the trapezoidal formula for numerical quadrature and in an idea of relaxation of singularities. It is shown that the approximation is of order $O(h^2)$ (or "hearly" $O(h^2)$), where h denotes the step-size in the quadrature formula (see Theorem 1 and Theorem 3).

Уч.зап.Тартуск.ун-та,1986,752,98-106.

О СЛАБОЙ СХОДИМОСТИ РЕШЕНИЙ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ

П. Оя

Хотя в практике интерес представляет прежде всего сильная сходимость решений разных приближенных задач, слабая сходимость является важным средством при изучении существования решений бесконечномерных задач. В рассматриваемых пространствах используем довольно общую аппроксимационную схему, называемую обычно в литературе дискретной [1, 6].

1. В основном рассмотрим вариационные неравенства

$$u \in K: \langle Tu, v-u \rangle \geq 0 \quad \forall v \in K, \tag{1}$$

где K — непустое выпуклое замкнутое множество вещественного банахова пространства E, оператор T действует из K в сопряженное к E пространство E^*, а $\langle \cdot, \cdot \rangle$ означает соотношение двойственности между E и E^*. Аналогичные обозначения примем и в других задачах. Предположим, что задана аппроксимация пространства E последовательностью вещественных банаховых пространств E_i, $i \in I$, где каждому элементу из E поставлено в соответствие класс сходящихся последовательностей элементов из E_i; точное определение и основные свойства см. в [1]. Предположим также, что задана аппроксимация E^* пространствами E_i^* и выполнено условие совместимости: если $v_i \to v$ и $f_i \to f$, то $\langle f_i, v_i \rangle \to \langle f, v \rangle$.

Последовательность $v_i \in E_i$ называется слабо сходящейся к $v \in E$, если для любого $f \in E^*$ и любой последовательности $f_i \to f$ выполняется $\langle f_i, v_i \rangle \to \langle f, v \rangle$, а $f_i \in E_i^*$ назовем слабо сходящейся к $f \in E^*$, если при $v_i \to v$ имеем $\langle f_i, v_i \rangle \to \langle f, v \rangle$. Отметим, что слабая сходимость функционалов обобщает понятие w^*-сходимости, а в случае рефлексивного E понятие слабой сходимости в банаховых пространствах.

Рассмотрим еще вариационные неравенства

$$u_i \in K_i: \langle T_i u_i, v_i - u_i \rangle \geq 0 \quad \forall v_i \in K_i, \tag{2}$$

где $K_i \subset E_i$ непустые замкнутые выпуклые множества, $T_i: K_i \to E_i^*$.

Пусть I', I'' и т.д. обозначают бесконечные подмножества I.

Для любой последовательности множеств $X_i \subset E_i$, $i \in I$, положим

$$s-\underline{\lim}\, X_i = \{v \in E : \exists\, v_i \in X_i,\ i \geq i_0,\ v_i \to v\},$$

$$w-\overline{\lim}\, X_i = \{v \in E : \exists\, v_i \in X_i,\ i \in I',\ v_i \to v \text{ слабо}\}.$$

Ясно, что $s-\underline{\lim}\, X_i \subset w-\overline{\lim}\, X_i$.

Предположим везде в дальнейшем, что

$$w-\overline{\lim}\, K_i \subset K \subset s-\underline{\lim}\, K_i,$$

это соотношение будем обозначать через $K = \lim K_i$. Через S и S_i, $i \in I$, обозначим множества решений неравенств (1) и (2) соответственно (в общем случае они могут быть и пустыми).

2. Будем говорить, что операторы $T_i, i \in I$, слабо аппроксимируют T на множествах $X \subset K$ и $X_i \subset K_i$, $i \in I$, если для любого $v \in X$ существуют $v_i \in X_i$, $i \in I' \subset I$, такие, что $v_i \xrightarrow[i \in I']{} v$ слабо, $T_i v_i \xrightarrow[i \in I']{} T v$ слабо. Последовательность $T_i, i \in I$, назовем слабо сходящейся к T на множествах X и $X_i, i \in I$, если из $v_i \to v$ слабо, $v_i \in X_i$, $v \in X$, следует, что $T_i v_i \to T v$ слабо.

Введем функции $\tau(v) = \langle T v, v\rangle, v \in K$, и $\tau_i(v_i) = \langle T_i v_i, v_i \rangle$, $v_i \in K_i$. Будем говорить, что функции τ_i, $i \in I$, слабо снизу аппроксимируют τ на множествах X и X_i, если для любого $v \in X$ существуют $v_i \in X_i, i \in I' \subset I$, такие, что $v_i \xrightarrow[i \in I']{} v$ слабо и

$$\tau(v) \leq \underline{\lim}_{i \in I'}\, \tau_i(v_i).$$

Последовательность τ_i, $i \in I$, назовем слабо снизу полусходящейся к τ на X и X_i, если из $v_i \to v$ слабо, $v_i \in X_i$, $v \in X$, следует, что

$$\tau(v) \leq \underline{\lim}\, \tau_i(v_i).$$

<u>Теорема 1</u> (принцип разделения переменных). Предположим, что если $u_i \in S_i$, $i \in I$, и $u_i \to u$ слабо, то найдется $I' \subset I$ такое, что

$$\langle T u, u\rangle \leq \underline{\lim}_{i \in I'} \langle T_i u_i, u_i \rangle$$

и для любого $v \in K$ существуют $v_i \in K_i$, $i \in I'$, такие, что

$$v_i \xrightarrow[i \in I']{} v,\quad \overline{\lim}_{i \in I'} \langle T_i u_i, v_i\rangle \leq \langle T u, v\rangle.$$

Тогда $u \in S$.

Доказательство. Из неравенства $\langle T_i u_i, v_i - u_i\rangle \geq 0$ следует, что

$$0 \leq \overline{\lim_{i\in I'}} \langle T_i u_i, v_i - u_i\rangle \leq \overline{\lim_{i\in I'}} \langle T_i u_i, v_i\rangle + \overline{\lim_{i\in I'}} \langle T_i u_i, -u_i\rangle.$$

Из этого, учитывая равносильность неравенств

$$\overline{\lim} \langle T_i u_i, -u_i\rangle \leq \langle Tu, -u\rangle \quad \text{и} \quad \underline{\lim} \langle T_i u_i, u_i\rangle \geq \langle Tu, u\rangle,$$

получаем, что $\langle Tu, v-u\rangle \geq 0$.

Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть T_i, $i\in I$, слабо аппроксимируют T на множествах $S_i' \subset S_i$, $i\in I$, и $\Sigma \subset w-\overline{\lim}\ S_i'$, а τ_i, $i\in I$, слабо снизу полусходится к τ на Σ и S_i'. Тогда $\Sigma \subset S$.

Теорема 3. Пусть T_i, $i\in I$, слабо сходится к T на Σ и S_i', а τ_i, $i\in I$, слабо снизу аппроксимируют τ на Σ и S_i'. Тогда $\Sigma \subset S$.

Теоремы 2 и 3 следуют из теоремы 1, нужно лишь для выбранного $v\in K$ взять $v_i \in K_i$, $v_i \to v$ (это возможно, поскольку $K = \lim K_i$), тогда даже

$$\lim_{i\in I'} \langle T_i u_i, v_i\rangle = \langle Tu, v\rangle.$$

3. Рассмотрим теперь операторы $T: D(T) \to E^*$ и $T_i: D(T_i) \to E_i^*$, $i\in I$, где $K \subset D(T) \subset E$, $K_i \subset D(T_i) \subset E_i$. Напомним, что T называется монотонным, если

$$\langle Tu - Tv, u - v\rangle \geq 0 \quad \forall u, v \in D(T);$$

в случае выпуклости $D(T)$ радиально непрерывным, если функция $t \to \langle T(u + t(v-u)), v-u\rangle$ непрерывна на $[0,1]$ при всех $u, v \in D(T)$, и хеминепрерывным, если функция $t \to \langle T(u + t(v-u)), w\rangle$ непрерывна на $[0,1]$ при всех $u, v\in D(T)$, $w\in E$. Будем говорить, что операторы T_i, $i\in I$, аппроксимируют T, если для любого $v\in D(T)$ существуют $v_i \in D(T_i)$, $i\in I' \subset I$, такие, что $v_i \xrightarrow[i\in I']{} v$ и $T_i v_i \xrightarrow[i\in I']{} Tv$.

Теорема 4. Пусть операторы T_i, $i\in I$, монотонны, аппроксимируют оператор T и при любой ограниченной последовательности $u_i \in S_i$, $i\in I$, ограничена $T_i u_i$, $i\in I$. Тогда, если $u_i \in S_i$, $u_i \to u$ слабо, то для любой последовательности $w_i \in D(T_i)$, $i\in I' \subset I$, такой, что $w_i \xrightarrow[i\in I']{} u$, $T_i w_i \xrightarrow[i\in I']{} Tu$, имеем

$$\langle T_i u_i - T_i w_i, u_i - w_i\rangle \xrightarrow[i\in I']{} 0. \tag{3}$$

Если, кроме того, T радиально непрерывен, то $u \in S$.

<u>Доказательство</u>. Из аппроксимации T операторами T_i следует существование последовательности v_i с приведенными свойствами. На основе равенства $K = \lim K_i$ выберем еще $u_i' \in K_i$ такие, что $u_i' \to u$. Равенство

$$\langle T_i u_i - T_i v_i, u_i - v_i \rangle = \langle T_i v_i, v_i - u_i \rangle +$$
$$+ \langle T_i u_i, u_i' - v_i \rangle + \langle T_i u_i, u_i - u_i' \rangle \qquad (4)$$

дает, что

$$\overline{\lim} \langle T_i u_i - T_i v_i, u_i - v_i \rangle = \overline{\lim} \langle T_i u_i, u_i - u_i' \rangle \leq 0.$$

С другой стороны, в силу монотонности T_i

$$\underline{\lim} \langle T_i u_i - T_i v_i, u_i - v_i \rangle \geq 0,$$

значит,

$$0 \leq \underline{\lim} \langle T_i u_i - T_i v_i, u_i - v_i \rangle \leq \overline{\lim} \langle T_i u_i - T_i v_i, u_i - v_i \rangle \leq 0,$$

т.е. имеет место сходимость (3) (отметим, что здесь удается также доказать сходимость $\lim \langle T_i u_i, u_i' - u_i \rangle = 0$).

Зададим $v \in K$ и выберем $v_i \in K_i$ такие, что $v_i \to v$, а также $z_i \in D(T_i)$ такие, что $z_i \to v$, $T_i z_i \to Tv$. Тогда из неравенства

$$0 \leq \langle T_i u_i, v_i - u_i \rangle =$$
$$= \langle T_i u_i, v_i - z_i \rangle + \langle T_i u_i - T_i z_i, z_i - u_i \rangle + \langle T_i z_i, z_i - u_i \rangle$$

в пределе (возьмем $\overline{\lim}$) получаем, что $\langle Tv, v - u \rangle \geq 0$ (при всех $v \in K$). Из этого в силу радиальной непрерывности T следует, что $\langle Tu, v - u \rangle \geq 0$ (это утверждается в лемме Минти, см. [2]).

Теорема доказана.

<u>Замечание</u>. Так как T_i монотонны и аппроксимируют T, то T монотонен.

4. В этом пункте остановимся на взаимоотношениях наших теорем с результатами других авторов.

Теорема 4 обобщает результаты У.Моско [4], где рассматривается идентичная аппроксимация, т.е. $E_i = E$ и сходимость означает обычную сходимость по норме, кроме того, мы требуем меньше от операторов T_i.

В работе Е.Строеску [5] фактически найдены разные содержательные достаточные условия, при которых выполнены предположения теоремы 1 (принципа разделения переменных), точнее, основная теорема в [5] и разные ее варианты следуют из теорем 2 и 3. Там же, как следствие из основной теоремы, получен следующий результат: если операторы T_i, T монотонны и хеминепрерывны, при любом $v \in D(T)$ существуют $v_i \in D(T_i), i \in I$, такие, что $v_i \to v$, $T_i v_i \to Tv$, существуют $S_i' \subset S_i$, $S_i' \neq \emptyset$, такие, что последовательности S_i' и $T_i S_i'$ слабо компактны (последовательность множеств $X_i \subset E_i$, $i \in I$, называется слабо компактной, если при любой последовательности $v_i \in X_i$, $i \in I' \subset I$, существуют $I'' \subset I'$ и $v \in E$ такие, что $v_i \xrightarrow[i \in I'']{} v$ слабо), при этом $D(T)$ плотно в E, то

$v - \overline{\lim}\, S_i' \subset S$. Добавим, что вместо плотности $D(T)$ в E достаточно требовать, что замыкание $D(T)$ содержало бы некоторую окрестность множества K или даже некоторую окрестность множества $v - \overline{\lim}\, S_i$.

А.А.Панков [3] доказывает утверждение $v - \overline{\lim}\, S_i \subset S$ в предположении, что операторы T_i равномерно ограничены и псевдомонотонно аппроксимируют T (мы понимаем под этим свойством, что если $u_i \xrightarrow[i \in I']{} u$ слабо, $u_i \in D(T_i)$, $u \in D(T)$, и при некоторой последовательности $v_i \xrightarrow[i \in I']{} u$, $v_i \in D(T_i)$, выполняется $\overline{\lim\limits_{i \in I'}} \langle T_i u_i, u_i - v_i \rangle \leqslant 0$, то $\langle Tu, u - v \rangle \leqslant$

$\leqslant \underline{\lim\limits_{i \in I'}} \langle T_i u_i, u_i - v_i \rangle$ при всех $v \in D(T)$ и $v_i \to v$, $v_i \in D(T_i)$). При этом в [3] рассматривается случай $D(T_i) = E_i$, $D(T) = E$. По существу в [5] показано, что тогда выполнены предположения нашей теоремы 2. Сходимость (3) доказана в [3] в более сильных предположениях, чем у нас в теореме 4.

5. Поставим вопрос о взаимоотношении предположений теорем 1 и 4. Приведем конкретные примеры, показывающие их независимость.

Пусть $E = E^* = E_i = E_i^* = \ell^2$ с идентичной аппроксимацией, $T_i = T$, $K_i = K$. Положим $u_i = e_{i+1} + e_1$, $i = 1, 2, \ldots$, где e_i — канонические единичные векторы, $K = \overline{co}\{u_i : i = 1, 2, \ldots\}$. Определим $Tu_i = e_1$ и продолжим T на множество $co\{u_i\}$ по формуле $T(\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_m u_m) = (2 - \lambda_1^2 - \ldots - \lambda_m^2) e_1$, где $\lambda_k \geqslant 0$, $\sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_k = 1$. Тогда, если $u = \sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_k u_k$, $v = \sum\limits_{k=1}^{m} \mu_k u_k$, то $u - v = \sum\limits_{k=1}^{m} (\lambda_k - \mu_k) e_{k+1}$, следовательно

$$\|u-v\|^2=\sum_{k=1}^{m}(\lambda_k-\mu_k)^2\geq\max_{1\leq k\leq m}(\lambda_k-\mu_k)^2.$$

Из этого и равенства $Tu-Tv=\sum_{k=1}^{m}(\mu_k^2-\lambda_k^2)e_1$ получаем, что

$$\|Tu-Tv\|\leq\sum_{k=1}^{m}|\mu_k^2-\lambda_k^2|=\sum_{k=1}^{m}|\mu_k-\lambda_k|(\mu_k+\lambda_k)\leq$$

$$\leq 2\max_{1\leq k\leq m}|\mu_k-\lambda_k|\leq 2\|u-v\|.$$

Теперь ясно, что осуществимо продолжение T по непрерывности на K, т.е. $Tv=\lim Tv_k$, если $v_k\to v$, $v_k\in co\{u_i\}$, $v\in K$, при этом выполняется неравенство

$$\|Tu-Tv\|\leq 2\|u-v\| \qquad \forall u,v\in K.$$

Из этого вытекают свойства непрерывности и аппроксимации, предполагаемые в теореме 4. Если $u,v\in co\{u_i\}$, то

$$\langle Tu-Tv,u-v\rangle=\langle\sum_{k=1}^{m}(\mu_k^2-\lambda_k^2)e_1,\sum_{k=1}^{m}(\lambda_k-\mu_k)e_{k+1}\rangle=0,$$

это же равенство распространяется на K предельным переходом, значит, T монотонен. Кроме того, при $v\in co\{u_i\}$ имеем

$$\langle Tu_i,v-u_i\rangle=\langle e_1,\sum_{k=1}^{m}(\lambda_k-\delta_{ik})e_{k+1}\rangle=0,$$

предельным переходом получаем, что

$$\langle Tu_i,v-u_i\rangle=0 \qquad \forall v\in K,$$

т.е. $u_i\in S_i$. Далее, $u_i\to e_1$ слабо, пусть $u=e_1$. Но $v_k=\frac{1}{k}u_1+\ldots+\frac{1}{k}u_k\to e_1$, $Tv_k=(2-\frac{1}{k})e_1\to 2e_1$, и в силу непрерывности T имеем $Tu=Te_1=2e_1$. Таким образом, $\langle Tu,u\rangle=2$, но $\langle Tu_i,u_i\rangle=1$, значит, предположения теоремы 1 не выполнены, хотя выполнены все предположения теоремы 4.

Отметим, что здесь выполнены также предположения теоремы Моско [4], которую, следовательно, невозможно доказывать принципом разделения переменных.

Предположения теоремы 1 выполнены при идентичной аппроксимации в случае непрерывного оператора, например, в конечномерном пространстве (тогда множество решений S непусто). Однако, если мы предполагаем, что этот оператор немонотонен, то не применима теорема 4.

6. Вместо (1) и (2) рассмотрим неравенства

$$u \in K: \langle Tu, v-u\rangle \geq \langle f, v-u\rangle \quad \forall v \in K,$$

$$u_i \in K_i: \langle T_i u_i, v_i - u_i\rangle \geq \langle f_i, v_i - u_i\rangle \quad \forall v_i \in K_i,$$

где $f \in E^*$, $f_i \in E_i^*$. Если требовать, что $f_i \to f$, то имеют место теоремы 1–4, так как при выполнении предположений этих теорем для операторов T, T_i они будут выполнены для операторов $v \longrightarrow Tv - f$ и $v_i \longrightarrow T_i v_i - f_i$.

Пусть еще заданы неравенства II рода

$$u \in K: \langle Tu, v-u\rangle + \varphi(v) - \varphi(u) \geq 0 \quad \forall v \in E,$$

$$u_i \in K_i: \langle T_i u_i, v_i - u_i\rangle + \varphi_i(v_i) - \varphi_i(u_i) \geq 0 \quad \forall v_i \in E_i,$$

где $\varphi: E \to \overline{\mathbb{R}}$, $\varphi_i: E_i \to \overline{\mathbb{R}}$, $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, собственные функции, $T: E \to E^*, T_i: E_i \to E_i^*$. Предположим, что $\operatorname{epi} \varphi = \lim \operatorname{epi} \varphi_i$. Тогда (см. [3]): 1) для любого $v \in E$ существуют $v_i \in E_i$, $i \in I$, такие, что $v_i \to v$ и $\varphi(v) \geq \overline{\lim}\, \varphi_i(v_i)$; 2) для любой последовательности $v_i \xrightarrow[i \in I']{} v$ слабо имеем $\varphi(v) \leq \underline{\lim}_{i \in I'} \varphi_i(v_i)$. Опираясь на это, получаем и здесь (ослабленный) принцип разделения переменных:

Теорема 5. Предположим, что если $u_i \in S_i, i \in I$, $u_i \to u$ слабо, то найдется $I' \subset I$ такое, что

$$\langle Tu, u\rangle \leq \underline{\lim}_{i \in I'} \langle T_i u_i, u_i\rangle$$

и для любых $v \in E$, $v_i \in E_i$, $i \in I'$, таких, что $v_i \xrightarrow[i \in I']{} v$, имеет место

$$\overline{\lim_{i \in I'}} \langle T_i u_i, v_i\rangle \leq \langle Tu, v\rangle.$$

Тогда $u \in S$.

Приведем еще аналог теоремы 4 для неравенств II рода.

Теорема 6. Если дополнительно предполагать, что $\operatorname{epi} \varphi = \lim \operatorname{epi} \varphi_i$, то имеют место утверждения теоремы 4 в тех же предположениях.

Доказательство. Приведем лишь нужные дополнения. Пусть $u_i' \in E_i$ такие, что $u_i' \to u$, $\overline{\lim}\, \varphi_i(u_i') \leq \varphi(u)$. Тогда при помощи равенства (4) получаем

$$\overline{\lim}\, \langle T_i u_i - T_i w_i, u_i - w_i\rangle \leq \overline{\lim}\, (\varphi_i(u_i') - \varphi_i(u_i)) \leq$$

$$\leq \overline{\lim}\ \varphi_i(u_i') - \underline{\lim}\ \varphi_i(u_i) \leq 0,$$

остальное в доказательстве сходимости (3) не изменяется. Для выбранного $v \in E$ пусть $v_i \in E_i$ такие, что $v_i \to v$, $\overline{\lim}\ \varphi_i(v_i) \leq \varphi(v)$, а также $z_i \in E_i$ такие, что $z_i \to v$, $T_i z_i \to Tv$. Тогда по аналогии с доказательством теоремы 4

$$\langle T_i u_i, v_i - u_i \rangle + \varphi_i(v_i) - \varphi_i(u_i) \geq 0$$

в пределе (возьмем $\overline{\lim}$) дает неравенство

$$\langle Tv, v - u \rangle + \varphi(v) - \varphi(u) \geq 0 \quad \forall v \in E,$$

а это в силу радиальной непрерывности T влечет

$$\langle Tu, v - u \rangle + \varphi(v) - \varphi(u) \geq 0 \quad \forall v \in E.$$

Теорема доказана.

По сравнению с аналогичным результатом из [3] у нас сходимость (3) доказана без условий непрерывности на T.

Отметим еще, что неравенства II рода в [3] сводят к неравенствам (1) и (2), однако, хотя бы формально, это влечет выпуклость функций φ и φ_i, так как $\mathrm{epi}\,\varphi$ и $\mathrm{epi}\,\varphi_i$ берутся в качестве K и K_i.

Литература

1. В а й н и к к о Г. Анализ дискретизационных методов. Тарту, ТГУ, 1976.
2. К и н д е р л е р е р Д., С т а м п а к к ь я Г. Введение в вариационные неравенства и их приложения. М., Мир, 1983.
3. П а н к о в А. А. Дискретные аппроксимации выпуклых множеств и сходимость решений вариационных неравенств. Math. Nachr., 1979, 91, № 1, 7-22.
4. M o s c o, U. Convergence of convex sets and of solutions of variational inequalities. Adv. Math., 1969, 3, № 4, 510-585.
5. S t r o e s c u, E. Weak discrete convergence of solutions of variational inequalities. Rend. Mat., 1975, 8, № 3, 815-841.
6. S t u m m e l, F. Discrete Konvergenz linearer Operatoren I. Math. Ann., 1970, 190, № 1, 45-92.

Поступило
3 III 1986

ON THE WEAK CONVERGENCE OF SOLUTIONS OF VARIATIONAL INEQUALITIES

P. Oja

Summary

Let us consider a variational inequality

$$u \in K : \langle Tu, v-u \rangle \geq 0 \quad \forall v \in K$$

with K a closed convex set in a real Banach space E, $T: K \to E^*$. We consider also a sequence of perturbated inequalities

$$u_i \in K_i : \langle T_i u_i, v_i - u_i \rangle \geq 0 \quad \forall v_i \in K_i$$

with $K_i \in E_i$, where the sequence E_i, $i \in I$ of Banach spaces presents a (discrete) approximation of E and a compatible approximation of E^* by E_i^* is given. We suppose that $K = \lim K_i$. The sets of the solutions of these inequalities are denoted by S and S_i respectively.

Theorem 1. Suppose that for $u_i \in S_i$, $i \in I$, $u_i \to u$ weakly there is $I' \subset I$ (a subsequence) such that

$$\langle Tu, u \rangle \leq \underline{\lim}_{i \in I'} \langle T_i u_i, u_i \rangle$$

and for every $v \in K$ there is a sequence $v_i \in K_i$, $i \in I'$ satisfying

$$v_i \xrightarrow[i \in I']{} v, \quad \overline{\lim}_{i \in I'} \langle T_i u_i, v_i \rangle \leq \langle Tu, v \rangle .$$

Then $u \in S$.

Let us consider now the operators $T: D(T) \to E^*$ with $K \subset D(T)$ and $T_i: D(T_i) \to E_i^*$ with $K_i \subset D(T_i)$. We say that the sequence T_i, $i \in I$ approximates T when for every $v \in D(T)$ there is a sequence $v_i \in D(T_i)$, $i \in I' \subset I$ such that $v_i \xrightarrow[i \in I']{} v$, $T_i v_i \xrightarrow[i \in I']{} Tv$.

Theorem 2. Suppose that T_i, $i \in I$ is a sequence of monotone operators which approximate T and for every bounded sequence $u_i \in S_i$, $i \in I$ the sequence $T_i u_i$, $i \in I$ is bounded. Then if $u_i \to u$ weakly, $u_i \in S_i$, for any sequence $v_i \in D(T_i)$, $i \in I' \subset I$ with $v_i \xrightarrow[i \in I']{} u$, $T_i v_i \xrightarrow[i \in I']{} Tu$ we have

$$\langle T_i u_i - T_i v_i, u_i - v_i \rangle \xrightarrow[i \in I']{} 0 .$$

Furthermore, if T is radially continuous then $u \in S$.

We show that the assumptions of Theorems 1 and 2 are independent. The results of U.Mosco, E.Stroescu and A.Pankov on the weak convergence of solutions of variational inequalities can be deduced from these theorems as applications.

Уч.зап.Тартуск.ун-та,1986,762,107-113.

ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ С ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬЮ

М.Флейдервиш

Рассмотрим уравнение

$$F(x)=0, \tag{1}$$

где $F: X \to Y$ -отображение вещественных гильбертовых пространств. Уравнение (1) эквивалентно уравнению

$$\|F(x)\|=0. \tag{2}$$

Для решения уравнения (2) построим итерационное отображение типа Ньютона:

$$\Phi(x)=x-x^{*^{-1}}[\|F(x)\|], \tag{3}$$

где функционал x^* есть производная Фреше от функционала $\|F(x)\|$:

$$x^*=\frac{F'^*(x)F(x)}{\|F(x)\|},$$

а под $x^{*^{-1}}$ понимается полный прообраз функционала x^*. Таким образом итерационное отображение (3) является многозначным. Для того, чтобы множество $x^{*^{-1}}[\|F(x)\|]$ представить в более конструктивном(параметрическом) виде, найдем обращение функционала x^* по наименьшей норме. Т.е. необходимо найти $\bar{x}\in X$, что

$$\|\bar{x}\|=\inf\{\|x\| \mid \langle x^*,x\rangle=a\}, \quad a\in R.$$

Лемма 1. Пусть X -нормированное рефлексивное пространство. Тогда для любого $x^*\in X^*$ $(x^*\neq 0)$ и для любого $a\in R$

а) $\inf\{\|x\| \mid \langle x^*,x\rangle=a\}=\dfrac{|a|}{\|x^*\|}$,

б) если X-гильбертово пространство, то

$$\bar{x}=\frac{a\,x^*}{\|x^*\|^2}.$$

Доказательство. С одной стороны

$$|a|=|\langle x^*,x\rangle|\le\|x^*\|\cdot\|x\|,$$

откуда

$$\|x\| \geqslant \frac{|\alpha|}{\|x^*\|} \qquad (4)$$

для всех $x \in X$. С другой стороны, по теореме Хана-Банаха существует $x^\circ \in X^{**} = X$ такой, что

$$\begin{cases} \langle x^*, x^\circ \rangle = \|x^*\| , \\ \|x^\circ\| = 1 \end{cases} \qquad (5)$$

Возьмем теперь $\bar{x} = \frac{\alpha x^\circ}{\|x^*\|}$. Тогда из (5) имеем

$$\langle x^*, \bar{x} \rangle = \frac{\alpha}{\|x^*\|} \langle x^*, x^\circ \rangle = \alpha$$

и

$$\|\bar{x}\| = \frac{|\alpha| \cdot \|x^\circ\|}{\|x^*\|} = \frac{|\alpha|}{\|x^*\|} .$$

Отсюда, имея в виду (4), следует утверждение а) этой леммы. Утверждение б) проверяется непосредственно.

Лемма доказана.

Перепишем отображение (3) в следующем виде

$$\begin{cases} \phi(x) = x - h , \\ \left\langle \frac{F'^*(x)F(x)}{\|F(x)\|}, h \right\rangle = \|F(x)\| . \end{cases}$$

Отметим, что отображение(3) включает в себя обычный метод Ньютона. В самом деле, в методе Ньютона $h = F'^{-1}(x)F(x)$. Тогда

$$\left\langle \frac{F'^*(x)F(x)}{\|F(x)\|}, F'^{-1}(x)F(x) \right\rangle = \left\langle \frac{F(x)}{\|F(x)\|}, F'(x)F'^{-1}(x)F(x) \right\rangle = \left\langle \frac{F(x)}{\|F(x)\|}, F(x) \right\rangle = \|F(x)\| .$$

Зададим теперь отображение $\phi(t,x): X \times X \to X$ по формуле

$$\begin{cases} \phi(t,x) = x - h , \\ h = t - \frac{F'^*(x)F(x)}{\|F'^*(x)F(x)\|^2} \left[\langle F'^*(x)F(x), t \rangle - \|F(x)\|^2 \right] . \end{cases} \qquad (6)$$

При доказательстве сходимости итерационных процессов (6) на отображение F будут наложены такие условия, что из $x \neq x_*$ будет следовать $F'^*(x)F(x) \neq 0$, где $x \in B(x_*, \tau)$ -некоторой окрестности точки x_*, а $F(x_*) = 0$. С этой оговоркой справедлива

<u>Лемма 2.</u> Образ отображения (6), где t пробегает все X, совпадает с образом отображения (3), причем при $t = 0$ норма h является наименьшей.

<u>Доказательство.</u> Для отображения (6) имеем

$$\left\langle \frac{F'^*(x)F(x)}{\|F(x)\|}, h \right\rangle = \left\langle \frac{F'^*(x)F(x)}{\|F(x)\|}, t \right\rangle - \qquad (7)$$

$$-\frac{1}{\|F(x)\|}\left[\langle F'^*(x)F(x),t\rangle-\|F(x)\|^2\right]=\|F(x)\|$$

при любом $t\in X$.А это означает, что образ $\Phi(t,x)$ содержится в образе $\Phi(x)$.Рассмотрим одномерное подпространство в X : $L=\{\gamma F'^*(x)F(x)\mid \gamma\in R\}$.Множество $\{x-\Phi(x)\}$ есть параллельный сдвиг пространства $L^\perp$.С другой стороны, для любого $z\in L^\perp$ из (6) имеем

$$h=z+\frac{\|F(x)\|^2F'^*(x)F(x)}{\|F'^*(x)F(x)\|^2}\quad.$$

Поэтому множество $\{x-\Phi(t,x)\}$ есть параллельный сдвиг пространства $L^\perp$ на элемент, кратный $F'^*(x)F(x)$. Из этого и из того, что эти подпространства пересекаются, следует, что они совпадают.

Далее, из леммы I имеем

$$\inf\left\{\|h\| \mid \left\langle\frac{F'^*(x)F(x)}{\|F(x)\|},h\right\rangle=\|F(x)\|\right\}=\frac{\|F(x)\|^2}{\|F'^*(x)F(x)\|}\ ,$$

при этом

$$\hat{h}=\frac{\|F(x)\|^2F'^*(x)F(x)}{\|F'^*(x)F(x)\|^2}\quad.$$

Из (6) при $t=0$ как раз и получается такое значение h .

Лемма доказана.

Рассмотрим итерационный процесс, задаваемый формулой(6):

$$\begin{gathered}x_{k+1}=x_k-\left\{t_k-\frac{F'^*(x_k)F(x_k)}{\|F'^*(x_k)F(x_k)\|^2}\left[\langle F'^*(x_k)F(x_k),t_k\rangle-\|F(x_k)\|^2\right]\right\},\\ \|t_k\|\leq C\|F(x_k)\|\ ,\end{gathered}\tag{8}$$

где константа C будет определена в лемме 3.

Теорема. Пусть отображение $F:X\to Y$ гильбертовых пространств непрерывно дифференцируемо в некотором шаре В (x_* , r), где x_* - изолированное решение уравнения (I).Пусть отображение (6) отображает шар В (x_* , r)= В в себя.

Если в этом шаре выполняются условия

а) $\inf_x\inf_y\|F'^*(x)y\|=m>0$, $x\in B$, $\|y\|=1$,

б) $\|F'(x_1)-F'(x_2)\|\leq L\|x_1-x_2\|$, $x_1,x_2\in B$,

в) $\sqrt{2}m>M$, $M=\sup_{x\in B}\|F'(x)\|$,

то итерационный процесс (8) сходится к решению уравнения (I), т.е. $x_k\to x_*$,а параметрические последовательности $\{t_k\}$ сходятся к нулю,т.е. $t_k\to 0$.

Доказательство. Без ограничения общности полагаем, что в шаре B (x_*, r) при $x \neq x_*$ следует $F(x) \neq 0$. Из условия а) теоремы следует, что оператор $F'^*(x)$ инъективен; а потому при $x \neq x_*$ имеем $F'^*(x)F(x) \neq 0$.

Из условия б) получаем $\|F'(x)\| \leq Lr + \|F'(x_*)\|$ при всех $x \in B(x_*, r)$. Поэтому существует константа $M < \infty$ такая, что

$$M = \sup_{x \in B} \|F'(x)\| .$$

Утверждение теоремы вытекает из следующей леммы.

Лемма 3. Пусть выполняются условия теоремы. Тогда существует такая константа $0 < q < 1$, не зависящая от выбора $x \in B(x_*, r)$, что при

$$\|t\| \leq \sqrt{\frac{q^2+1}{La+M^2} - \frac{1}{m^2}}\, \|F(x)\| \tag{9}$$

выполняется неравенство

$$\|F(x-h)\| \leq q \|F(x)\| ,$$

а константа $a > 0$ определяется шаром B (x_*, r).

Доказательство. Покажем вначале корректность оценки (9), т.е. установим, что подкоренное выражение неотрицательно. Из условия в) следует, что существует такое, не зависящее от x число $0 < q < 1$, что $(1+q^2)m^2 > M^2$.

Тогда

$$\frac{(1+q^2)m^2 - M^2}{L} > 0 .$$

Выберем число a таким образом, чтобы выполнялось соотношение

$$0 < a < \frac{(1+q^2)m^2 - M^2}{L} ,$$

откуда и следует неотрицательность подкоренного выражения в (9). Без ограничения общности полагаем, что $\|F(x)\| < a$ в шаре $B(x_*, r)$. В противном случае в силу непрерывности отображения F в этом шаре найдется такое $r_1 < r$, что в шаре $B(x_*, r_1)$ указанное неравенство будет выполнено. Далее, пусть $x \in B(x_*, r)$. Оценим $\|h\|$:

$$\|h\| = \langle h, h\rangle = \|t\|^2 - 2\frac{\langle F'^*(x)F(x), t\rangle}{\|F'^*(x)F(x)\|^2}\left[\langle F'^*(x)F(x), t\rangle - \|F(x)\|^2\right] +$$

$$+ \frac{\left[\langle F'^*(x)F(x), t\rangle - \|F(x)\|^2\right]^2}{\|F'^*(x)F(x)\|^2} = \|t\|^2 - \frac{\langle F'^*(x)F(x), t\rangle^2}{\|F'^*(x)F(x)\|^2} + \frac{\|F(x)\|^4}{\|F'^*(x)F(x)\|^2} .$$

Отсюда и из (9) , используя условие а), получим

$$\|h\|^2 \leq \|t\|^2 + \frac{\|F(x)\|^4}{\|F'^*(x)F(x)\|^2} \leq \left(\frac{q^2+1}{La+M^2} - \frac{1}{m^2}\right)\|F(x)\|^2 +$$

$$+\frac{\|F(x)\|^2}{m^2} = \frac{q^2+1}{La+M^2}\|F(x)\|^2 . \tag{10}$$

Из свойства скалярного произведения имеем

$$\|F(x-h)\|^2 = 2\langle F(x-h), F(x)\rangle + \|F(x-h)-F(x)\|^2 - \|F(x)\|^2 . \tag{11}$$

Но

$$F(x-h) = F(x) - \int_0^1 F'(x-th)h\,dt = F(x) - F'(x)h + \int_0^1 [F'(x) - F'(x-th)]h\,dt .$$

Из (7) следует, что

$$\langle F(x), F'(x)h\rangle = \langle F'^*(x)F(x), h\rangle = \|F(x)\|^2 .$$

Тогда

$$\langle F(x-h), F(x)\rangle = \|F(x)\|^2 - \|F(x)\|^2 + \langle F(x), \int_0^1 [F'(x) - F'(x-th)]h\,dt\rangle .$$

Отсюда и из условия б) получаем

$$|2\langle F(x-h), F(x)\rangle| \leq 2\|F(x)\|\cdot\left\|\int_0^1 [F'(x) - F'(x-th)]h\,dt\right\| \leq$$

$$\leq 2\|F(x)\|L\|h\|\int_0^1 \|th\|\,dt = 2\|F(x)\|L\|h\|^2\frac{1}{2} \leq \tag{12}$$

$$\leq \frac{L(q^2+1)}{La+M^2}\|F(x)\|^2 .$$

Последнее неравенство следует из (10). Далее , по теореме о среднем, используя (10), получим

$$\|F(x-h)-F(x)\|^2 \leq \sup_{0\leq\theta\leq 1}\|F'(x-\theta h)\|^2\|h\|^2 \leq M^2\frac{L(q^2+1)}{La+M^2}\|F(x)\|^2 . \tag{13}$$

Теоремой о среднем и условием Липшица мы смогли воспользоваться потому, что по условию теоремы $x-h \in B(x_*, r)$.
Из (11),(12) и (13) имеем

$$\|F(x-h)\|^2 \leq \frac{L\|F(x)\|(q^2+1)}{La+M^2}\|F(x)\|^2 + \frac{M^2(q^2+1)}{La+M^2}\|F(x)\|^2 - \|F(x)\|^2 \leq$$

$$\leq \left[\frac{(La+M^2)(q^2+1)}{La+M^2}\right]\|F(x)\|^2 - \|F(x)\|^2 = q^2\|F(x)\|^2 .$$

Откуда и следует утверждение леммы. В свою очередь, это означает сходимость итерационных процессов(8), так как если $x_0 \in B(x_*, r)$, то $\|F(x_k)\| \to 0$. Теорема доказана.

Если в итерационной последовательности (8) положить $t_k = 0$, то получим итерационный процесс

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\|F(x_n)\|^2 F'^*(x_n)F(x_n)}{\|F'^*(x_n)F(x_n)\|^2} . \qquad (14)$$

Последовательность (14) была подробно изучена в работах [1]-[5] ,где были найдены условия ее сходимости и показано,что эта последовательность сходится со скоростью геометрической прогрессии. Однако по нашему построению она принадлежит ньютоновскому типу и, поэтому, естественно предположить наличие условий, при которых итерационная последовательность (14) сходится к x_* с квадратичной скоростью.

Предположим в шаре $B(x_*, r)$ обратимость оператора $F'(x)$ и наличие условия

$$F'(x)F'^*(x)F(x) = \lambda(x)F(x), \qquad (15)$$

где $\lambda : X \to R$. Отсюда получим

$$F'^*(x)F(x) = \lambda(x)F'^{-1}(x)F(x) .$$

Тогда

$$\frac{\|F(x)\|^2 F'^*(x)F(x)}{\|F'^*(x)F(x)\|^2} = \frac{\lambda(x)\|F(x)\|^2 F'^{-1}(x)F(x)}{\langle F'(x)F'^*(x)F(x), F(x)\rangle} = \frac{\lambda(x)\|F(x)\|^2 F'^{-1}(x)F(x)}{\lambda(x)\langle F(x), F(x)\rangle} = F'^{-1}(x)F(x).$$

Таким образом, при выполнении условия (15) в окрестности $B(x_*, r)$ итерационная последовательность (14) совпадает с методом Ньютона.

Замечание. Условие (15) очевидным образом вытекает из следующих эквивалентных условий:

а) $F'(x)F'^*(x) = \|F(x)\|^2 I$,

б) $\|F'^{-1}(x)\| \, \|F'(x)\| = 1$.

Литература

1. К и в и с т и к Л. О некоторых итерационных методах для решения операторных уравнений в пространстве Гильберта. Изв. АН ЭССР, Сер. физ.-матем. и техн. н., 1960, т.9, № 3, 229-241.
2. К и в и с т и к Л. Об одном классе итерационных процессов в гильбертовом пространстве. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 129, 1962, 361-381.
3. К р а с н о с е л ь с к и й М.А., В а й н и к к о Г.М. и др. Приближенное решение операторных уравнений. М., Наука, 1969.
4. П у г а ч е в Б.П. Замечания по обоснованию некоторых

итерационных процессов.Ж.вычисл.матем.и матем.физ, 1962,2,№ 5,912-915.

5. Altman M. Connections between the method of steepest descent and Newtons method. Bull. Acad. sci. Cl. III, 5. N 11, 1957, 1031-1036.

Поступило
4 III 1986

ITERATIONAL METHODS WITH PARAMETRICAL SEQUENCE

M.Fleidervish

Summary

Iterational methods for solving F(x) = 0 in Hilbert space are studied. Methods are constructed similarly to the Newton Condition for a monotone convergence

$$\|F(x_{n+1})\| \leq q \|F(x_n)\|, \quad q < 1$$

is given. One certain example with a quadrative convergence is got.

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

Ученые записки Тартуского государственного университета.
Выпуск 762.
МЕТОДЫ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ.
Труды по математике и механике.
На русском языке.
Резюме на английском языке.
Тартуский государственный университет.
ЭССР, 202400, г.Тарту, ул.Юликооли, 18.
Ответственный редактор Э. Тамме.
Корректоры Г. Вайникко, И.-И. Саарнийт, А. Тийман, Х. Пулк.
Подписано к печати 23.12.1986.
МВ 08074.
Формат 60x90/16.
Бумага писчая.
Машинопись. Ротапринт.
Учетно-издательских листов 6,26. Печатных листов 7,25.
Тираж 400.
Заказ № 1106.
Цена 95 коп.
Типография ТГУ, ЭССР, 202400, г.Тарту, ул. Тийги, 78.
2 - 2