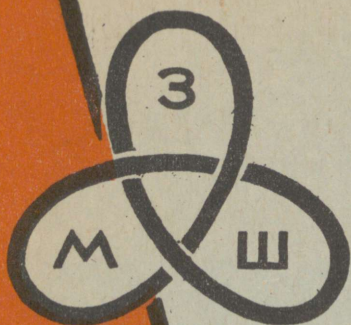


ТАРТУСКИЙ ГОС.  
УНИВЕРСИТЕТ



ЗАОЧНАЯ  
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ  
ШКОЛА

З



ТАРТУ 1966

LOG.

102176

Tagastage raamat õigeaegselt!

Возвратите книгу вовремя!


II XII  
A-4135

ТАРТУСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ  
К ЗАДАЧАМ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ № I  
НА ТЕМУ "НЕРАВЕНСТВА"

Тарту 1966

N

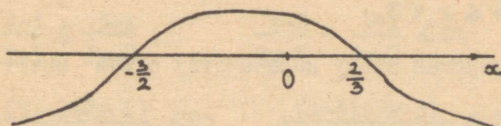
Tartu Riikliku Ülikooli  
Raamatukogu

102.176

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ  
К ЗАДАЧАМ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ № 1  
НА ТЕМУ "НЕРАВЕНСТВА"

Задача I.

1. Корнями отдельных множителей являются числа  $x = -\frac{3}{2}$  и  $x = \frac{2}{3}$ . Поскольку при  $x > \frac{2}{3}$  часть неравенства, содержащая неизвестное, отрицательна, то проведение кривой нужно начинать справа снизу, так что схема будет иметь вид



Отсюда видно, что неравенство удовлетворяется при следующих значениях неизвестного:

$$-\frac{3}{2} < x < \frac{2}{3}$$

2. Схема та же. Ответ:  $-\frac{3}{2} \leq x < \frac{2}{3}$

3. Схема та же. Ответ:  $-\frac{3}{2} < x \leq \frac{2}{3}$

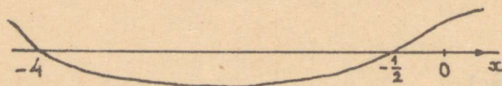
4. Представим неравенство в виде:

$$\frac{x-3}{2x+1} - 1 > 0 \quad \text{или} \quad \frac{x-3-2x-1}{2x+1} > 0.$$

Отсюда получим

$$\frac{-x-4}{2x+1} > 0 \quad \text{или} \quad \frac{x+4}{2x+1} < 0.$$

Корнями числителя и знаменателя являются числа  $x = -4$  и  $x = -\frac{1}{2}$ . Поскольку при  $x > -\frac{1}{2}$  часть неравенства, содержащая неизвестное, положительна, получим следующую схему



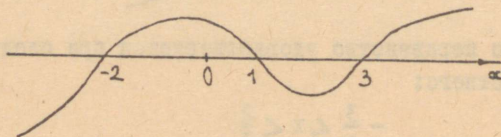
Отсюда ответ:  $-4 < x < -\frac{1}{2}$

5. При решении получим следующую последовательность равносильных неравенств:

$$\frac{2x+1}{x-3} \leq 1; \quad \frac{2x+1}{x-3} - 1 \leq 0; \quad \frac{2x+1-x+3}{x-3} \leq 0; \quad \frac{x+4}{x-3} \leq 0.$$

Отсюда ответ:  $-4 \leq x < 3$ .

6. Соответствующая этому неравенству схема имеет следующий вид:

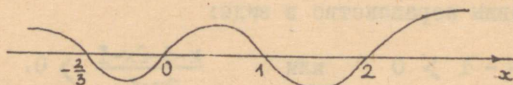


Ответ:  $x < -2$  или  $1 \leq x \leq 3$ .

7. Схема та же. Ответ:  $-2 < x < 1$  или  $3 < x$ .

8. Схема та же. Ответ:  $x \leq -2$  или  $1 < x < 3$ .

9. Схема имеет вид:



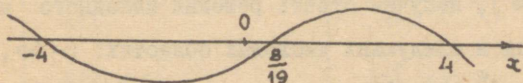
Следовательно,  $x < -\frac{2}{3}$  или  $0 \leq x \leq 1$  или  $2 < x$ .

10. При решении этого неравенства будем последовательно получать следующие равносильные неравенства:

$$\frac{5x-3}{4-x} > \frac{1-5x}{x+4}; \quad \frac{5x-3}{4-x} - \frac{1-5x}{x+4} > 0; \quad \frac{(5x-3)(x+4) - (4-x)(1-5x)}{(4-x)(x+4)} > 0;$$

$$\frac{5x^2 - 3x + 20x - 12 - 4 + x + 20x - 5x^2}{(4-x)(x+4)} > 0; \quad \frac{38x - 16}{(4-x)(x+4)} > 0.$$

Последнему неравенству соответствует схема



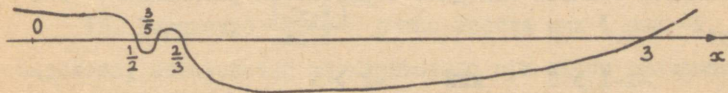
Отсюда ответ:  $x < -4$  или  $\frac{8}{19} < x < 4$ .

11. Последовательно получаемые равносильные неравенства таковы:

$$\frac{x-3}{2x-1} \leq \frac{3-x}{3x-2}; \quad \frac{x-3}{2x-1} - \frac{3-x}{3x-2} \leq 0;$$

$$\frac{(x-3)(3x-2+2x-1)}{(2x-1)(3x-2)} \leq 0; \quad \frac{(x-3)(5x-3)}{(2x-1)(3x-2)} \leq 0$$

Последнему неравенству соответствует схема

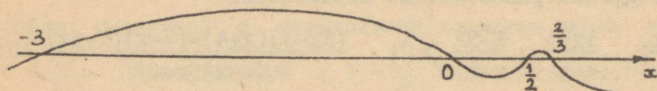


Отсюда ответ:  $\frac{1}{2} < x \leq \frac{3}{5}$  или  $\frac{2}{3} < x \leq 3$ .

12. Данное неравенство можно заменить более простым равносильным ему неравенством (ОДЗ этих неравенств отличаются одной точкой  $x = \frac{5}{2}$  и равносильность имеет место в ОДЗ исходного неравенства):

$$\frac{(2x-1) \times (x+3)}{2-3x} \leq 0$$

Ему соответствует схема



Следовательно, второе неравенство справедливо при  $x < -3$  или  $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$  или  $\frac{2}{3} < x$ . Сравнивая это множество решений с ОДЗ исходного неравенства, состоящей из промежутков  $(-\infty, \frac{2}{3})$ ,  $(\frac{2}{3}, \frac{5}{2})$  и  $(\frac{5}{2}, +\infty)$ , получим ответ: решения исходного неравенства находятся в следующих числовых областях:  $(-\infty, -3]$ ,  $[0, \frac{1}{2}]$ ,  $(\frac{2}{3}, \frac{5}{2})$  и  $(\frac{5}{2}, +\infty)$ .

13. Если  $x+1 \geq 0$ , т.е.  $x \geq -1$ , то  $|x+1| = x+1$  и исходное неравенство равносильно в этой числовой области неравенству

$$x+1 > 1$$

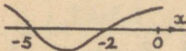
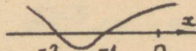
Все его решения  $x > 0$  принадлежат к этой числовой области и, следовательно, являются решениями исходного неравенства.

Если же  $x+1 < 0$ , т.е.  $x < -1$ , то  $|x+1| = -x-1$  и в этой числовой области исходное неравенство равносильно следующему:

$$-x-1 > 1 \quad \text{или} \quad -2 > x$$

Следовательно или  $x > 0$  или  $x < -2$ .

14. В зависимости от того, является ли  $x \geq 1$  или  $x < 1$ , получим различные неравенства, равносильные исходному. Их решение сведено в таблицу:

$x \gg 1$	$x < 1$
$\frac{x-1}{x+2} \gg 2$	$\frac{-x+1}{x+2} \gg 2$
$\frac{x-1}{x+2} - 2 \gg 0$	$\frac{-x+1}{x+2} - 2 \gg 0$
$\frac{x-1-2x-4}{x+2} \gg 0$	$\frac{-x+1-2x-4}{x+2} \gg 0$
$\frac{-x-5}{x+2} \gg 0$	$\frac{-3x-3}{x+2} \gg 0$
$\frac{x+5}{x+2} \leq 0$	$\frac{x+1}{x+2} \leq 0$
	

Поскольку решение  $-5 \leq x < -2$ , полученное в левой половине таблицы не принадлежит к рассматриваемой числовой области  $x \gg 1$ , то получаем следующий результат:  $-2 < x \leq -1$ .

15. Выражение  $\frac{|2x+1|}{2x+1}$  равно всегда или  $1$  или  $-1$ . Следовательно, неравенство удовлетворено при любом значении  $x$ .

Ответ:  $-\infty < x < +\infty$ .

16. Если  $x \gg 1$ , то получим неравенство

$$x-1 \gg x+2 \quad \text{или} \quad -1 \gg 2,$$

которое не удовлетворяется ни при одном значении неизвестного. Если  $x < -2$ , то получим неравенство

$$-x+1 \gg -x-2 \quad \text{или} \quad 1 \gg -2,$$

которое справедливо для всех значений неизвестного (так что оно выполняется и для всех  $x < -2$ ). Наконец, если  $-2 \leq x < 1$ , то получим неравенство

$$1-x \gg x+2 \quad \text{или} \quad -1 \gg 2x,$$

которое справедливо при  $x \leq -\frac{1}{2}$  (в рассматриваемой числовой области эти  $x$  заполняют отрезок  $-2 \leq x \leq -\frac{1}{2}$ ).

Суммируя, заключаем, что  $-\infty < x \leq -\frac{1}{2}$ .

17. Выясним сперва когда  $x^3+x^2-x-1$  положительно, а когда отрицательно. Для этого разложим данный многочлен на множители. Получим:

$$x^3+x^2-x-1 = x^2(x+1)-(x+1) = (x+1)(x^2-1) = (x+1)^2(x-1)$$

Следовательно,  $x^3+x^2-x-1 \gg 0$ , если  $x \gg 1$  и  $x^3+x^2-x-1 < 0$ , если  $x < 1$ .

Итак, пусть  $x \gg 1$ . Тогда  $|x^3+x^2-x-1| = x^3+x^2-x-1$  и нам нужно будет решить неравенство

$$x^3+x^2-x-1 \gg x^3+x^2+x+1 \quad \text{или} \quad -2 \gg 2x.$$

Последнее неравенство справедливо лишь для  $x < -1$ . Однако эти значения не принадлежат рассматриваемой числовой области  $(1, +\infty)$ .

Пусть теперь  $x < 1$ . Получим неравенство

$$-x^3-x^2+x+1 \gg x^3+x^2+x+1 \quad \text{или} \quad 0 \gg x^2(x+1),$$

которое справедливо при  $x < -1$ . Так как все такие значения принадлежат числовой области  $(-\infty, 1)$ , то это и будет решением задачи.

18. Так как всегда  $x^{1966} > 0$ , то при  $x < 0$  неравенство справедливо:  $x^{1966} > 0 > x$ . Покажем, что и при  $x > 1$  оно справедливо. Покажем даже больше, а именно, что в этом случае  $x$  меньше любой своей степени. Умножая все члены каждого предыдущего неравенства на  $x$ , получим

$1 < x, x < x^2, x^2 < x^3, \dots, x^{1964} < x^{1965}, x^{1965} < x^{1966}$   
и т.д., откуда  $x < x^n$ , где  $n = 2, 3, \dots$ , и, конечно,  $x < x^{1966}$ .

Если же  $0 < x < 1$ , то совершенно аналогично показывается, что  $x$  меньше любой своей степени и исходное неравенство, следовательно, не выполняется.

Итак, неравенство  $x^{1966} > x$  справедливо, если  $x < 0$  или  $x > 1$ .

19. Если  $x > 0$ , то ситуация в точности такая же, как и в предыдущей задаче в этой же числовой области. Если же  $x < 0$ , то при  $x < -1$   $|x^{1965}| > |x|$ , т.е.  $x^{1965} < x$ . Наоборот, если  $-1 < x < 0$ , то  $|x^{1965}| < |x|$  и, следовательно,  $x^{1965} > x$ .

Итак,  $x^{1965} > x$ , если  $x > 1$  или  $-1 < x < 0$ .

20. Неравенству

$$\frac{2x}{x+a} - 1 < 0 \quad \text{или} \quad \frac{2x-x-a}{x+a} < 0 \quad \text{или} \quad \frac{x-a}{x+a} < 0$$

удовлетворяют при положительном  $a$  такие  $x$ , для которых  $-a < x < a$ , и при отрицательном  $a$  такие  $x$ , для которых  $a < x < -a$ . Если  $a = 0$ , то неравенство решений не имеет.

21. Найдем ОДЗ неравенства. Поскольку ОДЗ выражения  $\sqrt{x-3}$  определяется условием  $x \geq 3$ , а ОДЗ выражения  $\sqrt{1-x}$  условием  $1 \geq x$ , причем эти два условия несовместимы, то ОДЗ неравенства не содержит ни одного числа. Следовательно, неравенство не выполняется ни при каких значениях неизвестного.

22. Как известно  $\sin x \geq 0$ , если  $2t\pi \leq x \leq (2t+1)\pi$ , где  $t$  — произвольное целое число. Если  $x \geq 2$ , то знак произведения  $(x-2)\sin x$  совпадает со знаком  $\sin x$ . Поскольку  $\pi > 2$ , то для  $t = 1, 2, 3, \dots$   $2t\pi \leq x \leq (2t+1)\pi$  или  $2 \leq x \leq \pi$ . Если же  $x < 2$ , то произведение  $(x-2)\sin x$  положительно там, где  $\sin x$  отрицателен, т.е. в числовых областях  $(2t-1)\pi \leq x \leq 2t\pi$ , где  $t = 0, -1, -2, \dots$ .

### Задача П.

Любая задача рассматриваемого типа может иметь бесконечно много решений. Например, кроме уравнения  $2x-3 < 0$ , промежутки  $(-\infty, \frac{3}{2})$  имеют в качестве области решений также уравнения  $\frac{x}{3} - \frac{1}{2} < 0$ ,  $4x-6 < 0$  и т.д.

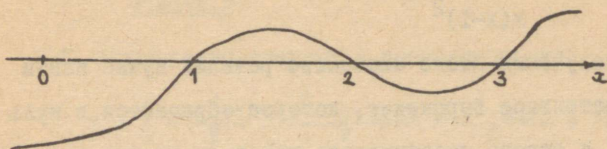
1. Если неравенство имеет вид  $a < 0$ , то  $a$  может быть квадратным трехчленом с корнями  $-2$  и  $2$ . Если у такого трехчлена коэффициент при  $x^2$  положителен, то в промежутке между корнями он будет принимать отрицательные значения. Итак, искомым неравенством может быть

$$(x+2)(x-2) < 0 \quad \text{или} \quad x^2-4 < 0 \quad \text{или} \quad x^2 < 4.$$

2. Множество решений искомого неравенства отличается от множества решений предыдущего неравенства только одним числом. Замена знака  $<$  в неравенстве  $x^2 < 4$  на знак  $\leq$  привела бы к появлению двух новых решений. Зато нас вполне устроит неравенство

$$\frac{x+2}{x-2} \leq 0.$$

3. Такому множеству решений соответствует схема



Такая же схема соответствует неравенству  $a < 0$ , содержащая неизвестное сторона которого есть  $(x-1)(x-2)(x-3)$ . Итак, имеем

$$(x-1)(x-2)(x-3) < 0$$

4. Потребность добавить к множеству решений еще два числа диктует переход к нестрогому неравенству. Но поскольку добавить нужно только некоторые из корней сомножителей левой стороны предыдущего неравенства, то множители, соответствующие остальным корням, придется поместить в знаменатель. Итак, получим

$$\frac{(x-1)(x-3)}{x-2} \leq 0.$$

5. Исходя из тех же соображений, что и при решении предыдущего случая, получим

$$\frac{x(x-1)}{(x+2)(x-2)(x-3)} > 0$$

6. Если бы  $x = 1$  являлось решением искомого неравенства, то множество решений определялось условием:  $x \leq -1$  или  $0 < x$ . Этой области решений соответствовало бы, например, неравенство

$$\frac{x+1}{x} \geq 0$$

Для исключения же точки  $x = 1$  из числа решений искомого неравенства достаточно поместить в знаменатель дроби, стоящей в правой стороне этого неравенства, множитель  $(x-1)^2$ . Итак, будем иметь в качестве одного из возможных ответов

$$\frac{x+1}{x(x-1)^2} \gg 0.$$

7. Для получения этого множества решений нужно найти такое неотрицательное выражение, которое обращается в нуль в точке  $x = 2$  и строго положительно при всех других значениях  $x$ . Таким выражением является, например,  $(x-2)^2$ . Итак, один из ответов имеет вид

$$(x-2)^2 > 0.$$

8. Если бы среди решений не было точки  $x = 2$ , неравенство выглядело бы, например, так

$$\frac{x-1}{x(x-3)} \gg 0.$$

Чтобы превратить это неравенство в такое, для которого  $x = 2$  тоже является решением и все остальные решения сохраняются, можно поместить в числитель стоящей слева дроби множитель  $(x-2)^2$ . Он положителен и не влияет на решение неравенства нигде, кроме точки  $x = 2$ ; здесь он превращает неравенство в тождественно справедливое ( $0 \gg 0$ ). Итак, данную числовую область имеет в качестве множества решений, например, неравенство

$$\frac{(x-1)(x-2)^2}{x(x-3)} \gg 0.$$

9. Такие решения имеет уравнение  $x(x-1)(x-3) = 0$ . Для того, чтобы неравенство оказалось равносильным этому уравнению, можно от заведомо неотрицательного выражения  $a$ , составленного из тех же множителей, что и левая часть уравнения, потребовать справедливости неравенства  $a \leq 0$ . Таким образом мы можем получить следующие ответы:

$$x^2(x-1)^2(x-3)^2 \leq 0 \quad \text{и} \quad |x(x-1)(x-3)| \leq 0.$$

### Задача III.

1. Произведем следующие преобразования:

$$x + \frac{1}{x} = \frac{x^2+1}{x} = \frac{x^2-2x+1+2x}{x} = \frac{x^2-2x+1}{x} + \frac{2x}{x} = \frac{(x-1)^2}{x} + 2$$

Поскольку всегда  $(x-1)^2 \geq 0$ , то при положительном  $x$ , отличном от единицы  $x + \frac{1}{x} > 2$ . Если  $x = 1$ , то  $x + \frac{1}{x} = 2$ . При отрицательном  $x$  же безусловно  $x + \frac{1}{x} < 2$ . При  $x = 0$  первое выражение не определено.

2. Поскольку  $(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1})^2 = n+1 + 2\sqrt{n^2-1} + n-1 = 2n+2\sqrt{n^2-1}$ , а  $(2\sqrt{n})^2 = 4n = 2n+2n = 2n+2\sqrt{n^2}$ , то  $2\sqrt{n}$  при любом натуральном числе  $n$  больше, чем сумма  $\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}$ .

3. Поскольку в случае неотрицательных  $x$  и  $y$

$$\frac{x+y}{2} = \frac{x-2\sqrt{xy} + y}{2} + \frac{2\sqrt{xy}}{2} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2}{2} + \sqrt{xy}$$

и  $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$ , то в этом случае

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \quad (x \geq 0, y \geq 0).$$

Если же  $x$  и  $y$  неположительны ( $x$  и  $y$  всегда имеют одинаковый знак - иначе  $\sqrt{xy}$  не был бы определен), то  $x+y \leq 0$  и, конечно,

$$\frac{x+y}{2} \leq \sqrt{xy}.$$

4. Поскольку для маленьких натуральных чисел

$$d = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} > \frac{1}{2} \quad (\text{например, при } n=1 \text{ имеем}$$
$$d = \sqrt{2} \approx 1,4 > \frac{1}{2}; \quad \text{при } n=2 \quad d = \sqrt{3} - 1 \approx 0,7 > \frac{1}{2};$$

при  $n=3 \quad d = 2 - \sqrt{2} > \frac{1}{2}$ ), то может возникнуть предполо-

жение, что  $d > \frac{1}{2}$  для любых натуральных чисел  $n$ . Однако, возведя обе стороны этого неравенства в квадрат, получим

$$n+1 - 2\sqrt{n^2-1} + n-1 > \frac{1}{4} \quad \text{или} \quad 2n - 2\sqrt{n^2-1} > \frac{1}{4}.$$

Отсюда

$$n - \frac{1}{8} > \sqrt{n^2-1} \quad \text{или} \quad n^2 - \frac{n}{4} + \frac{1}{64} > n^2-1$$

Следовательно,  $n < 4\frac{1}{16}$ , т.е.  $d > \frac{1}{2}$ , только для чисел  $n=1, n=2, n=3$  и  $n=4$ . В общем же случае  $\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} < \frac{1}{2}$ .

5. Вычислим разности

$$\frac{937}{948} - \frac{853}{863} = \frac{937 \cdot 863 - 948 \cdot 853}{948 \cdot 863} = \frac{808631 - 808644}{818124} = -\frac{13}{818124};$$

$$\frac{937}{948} - \frac{731}{739} = \frac{937 \cdot 739 - 948 \cdot 731}{948 \cdot 739} = \frac{692443 - 692988}{700572} = -\frac{545}{700572};$$

$$\frac{853}{863} - \frac{731}{739} = \frac{853 \cdot 739 - 863 \cdot 731}{863 \cdot 739} = \frac{630367 - 630853}{637757} = -\frac{486}{637757}.$$

Следовательно,  $\frac{937}{948} < \frac{853}{863}$ ,  $\frac{937}{948} < \frac{731}{739}$  и  $\frac{853}{863} < \frac{731}{739}$ .

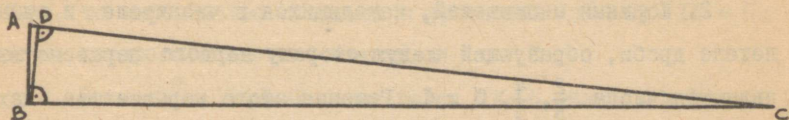
Отсюда заключаем, что  $\frac{937}{948} < \frac{853}{863} < \frac{731}{739}$ .

Замечание. Достаточно было бы вычислить только первую и третью разности.

### Задача IV.

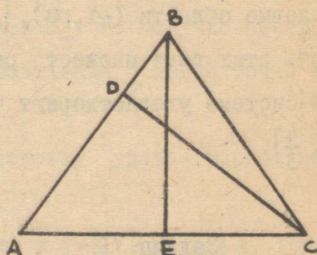
1. Да, такой треугольник существует. В качестве него можно взять, например, прямоугольный треугольник ABC (см. черт. 1) с катетами  $AB = 0,8$  м и  $BC = 300$  м. Его площадь равна  $120$  м<sup>2</sup>. Нужными высотами являются катет AB и опущенная на гипотенузу высота BD, которая, являясь катетом в прямо-

угольном треугольнике  $ABD$ , короче гипотенузы  $AB$  этого треугольника.



Черт. 1.

2. Нет, такого треугольника не существует. Если высота  $CD$  длиннее  $100$  м (см. черт. 2), то основание  $AC$  треугольника будет и подавно длиннее  $100$  м. Поскольку высота  $BE$  тоже длиннее, чем  $100$  м, то площадь треугольника  $ABC$  будет не меньше, чем  $5000$  м<sup>2</sup>.



Черт. 2.

### Задача 7.

1. Первое неравенство тождественно истинно, так что решение системы сводится к решению второго неравенства. В зависимости от того, будет ли  $x^2+x \geq 0$  (т.е.  $x \leq -1$  или  $x \geq 0$ ) или же  $x^2+x < 0$  (т.е.  $-1 < x < 0$ ), сможем представить это неравенство соответственно в виде  $x^2+x-1 < x^2-x+1$  или  $-x^2-x-1 < x^2-x+1$ . Решая эти неравенства, получим в первом случае  $x < 1$  и во втором случае  $x^2 > -1$ . Итак, первому неравенству удовлетворяют следующие числовые области из

его ОДЗ:  $(-\infty, -1]$  и  $[0, 1)$ . Второе неравенство справедливо для всей ОДЗ:  $(-1, 0)$ . Суммируя, получаем промежуток  $(-\infty, 1)$ .

2. Корнями множителей, находящихся в числителе и знаменателе дроби, образующей левую сторону первого неравенства, являются числа  $\frac{2}{5}$ ,  $\frac{4}{3}$ , 0 и 1. Решения этого неравенства находятся на двух полуотрезках  $(0, \frac{2}{5}]$  и  $(1, \frac{4}{3}]$ . Для второго неравенства будем иметь соответственно  $\frac{5}{2}$ ,  $\frac{3}{4}$ ,  $\frac{5}{3}$ , 0, -1 и 2 и числовые области  $(-1, 0)$ ,  $[\frac{3}{4}, \frac{5}{3}]$  и  $(2, \frac{5}{2}]$ . Найдя общую часть этих двух множеств решений, получим ответ: рассмотренной системе удовлетворяют числа, находящиеся на полуотрезке  $(1, \frac{4}{3}]$ .

### Задача VI.

Основные этапы решения первых пяти примеров приведены в следующей таблице:

№№ пп	Неравенства	Действительные корни многочлена, входящего в нера- венство	Решения
1	$x^2 + x - 6 \geq 0$	-3, 2	$(-\infty, -3]$ , $[2, +\infty)$
2	$-x^2 + x + 6 > 0$	-2, 3	$(2, 3)$
3	$x^2 + x + 1 \geq 0$	Отсутствуют	$(-\infty, +\infty)$
4	$2x^2 + x + 2 < 0$	Отсутствуют	Отсутствуют
5	$x^2 - 14x + 49 \leq 0$	7	$x = 7$

6. Числитель дроби, стоящей в левой стороне неравенства, имеет корни -6 и 2, знаменатель же 3 и 5. Следовательно, ре-

шения заполняют отрезок  $[-6, 2]$  и промежуток  $(3, 5)$ .

7. Поскольку абсолютная величина любого числа неотрицательна, то неравенство сводится к уравнению  $x^2 + 6x - 16 = 0$ , корнями которого являются  $x = -8$  и  $x = 2$ .

8. Если  $x^2 + 6x \geq 0$ , т.е. если  $x \leq -6$  или  $x \geq 0$ , то неравенство примет вид  $(x+8)(x-2) \leq 0$ . Из точек отрезка  $[-8, 2]$ , которые все удовлетворяют этому неравенству, к ОДЗ принадлежат все точки двух отрезков  $[-8, -6]$  и  $[0, 2]$ . Если же  $x^2 + 6x < 0$ , т.е. если ОДЗ =  $[-6, 0]$ , то получим неравенство  $x^2 + 6x + 16 \geq 0$ , которое справедливо в любой точке из ОДЗ.

Итак, рассматриваемому неравенству удовлетворяют все точки отрезка  $[-8, 2]$  и только они.

9. Пусть  $x^2 - 16 \geq 0$ , т.е. или  $x \leq -4$  или  $x \geq 4$ . Тогда рассматриваемое неравенство будет иметь вид  $x^2 + 6x - 16 \leq 0$ . Из точек отрезка  $[-8, 2]$ , удовлетворяющих этому неравенству, к ОДЗ принадлежат только точки отрезка  $[-8, -4]$ . Пусть теперь  $x^2 - 16 < 0$ , т.е. ОДЗ =  $[-4, 4]$ . В этом случае мы будем иметь дело с неравенством  $x^2 - 6x - 16 \geq 0$  или  $(x-8)(x+2) \geq 0$ . Решения этого неравенства образуют два полуотрезка:  $(-\infty, -2]$  и  $[8, +\infty)$ , но только отрезок  $[-4, -2]$  принадлежит в этом случае к ОДЗ.

Суммируя, получаем ответ:  $[-8, -2]$ .

10. Так как  $x^2 \geq 0$  и  $|6x - 16| \geq 0$ , то неравенство сводится к уравнению  $x^2 + |6x - 16| = 0$ , откуда  $x^2 = 0$ ,  $|6x - 16| = 0$ . Но поскольку два последних уравнения не имеют общих решений, то и у исходного неравенства решения отсутствуют.

11. В следующей таблице проиллюстрированы основные этапы решения неравенства в каждой из трех числовых областей  $(-\infty, -4]$ ,  $[-4, 4]$ ,  $[4, +\infty)$ .

Числовая область	Вид неравенства	Вид неравенства после упрощений	Решения
$(-\infty, -4]$	$\frac{x^2 - 4x - 16}{x^2 - 4x - 16} \geq 0$	$1 \geq 0$	$(-\infty, -4]$
$[-4, 4]$	$\frac{x^2 + 4x + 16}{-x^2 - 4x + 16} \geq 0$	$\frac{-1}{[x - (-2 - \sqrt{20})][x - (-2 + \sqrt{20})]} \geq 0$	$[-4, -2 + \sqrt{20})$
$[4, +\infty)$	$\frac{x^2 + 4x + 16}{x^2 - 4x - 16} \geq 0$	$\frac{1}{[x - (2 - \sqrt{20})][x - (2 + \sqrt{20})]} \geq 0$	$(2 + \sqrt{20}, +\infty)$

Отсюда видно, что решения исходного неравенства образуют два промежутка  $(-\infty, -2 + \sqrt{20})$  и  $(2 + \sqrt{20}, +\infty)$ .

12. Запишем неравенство в виде  $\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1} > \sqrt{x-5}$ . Теперь очевидно, что неравенство не имеет решений, ибо слева стоит отрицательное, а справа положительное число.

13. Если  $x > 0$ , то обе стороны неравенства можно умножить на  $3x$ , в результате чего получим  $2 - \sqrt{2-x^2} < -3x$  или  $2 + 3x < \sqrt{2-x^2}$ . Однако последнее неравенство не имеет решений, ибо здесь слева стоит число, большее двух, справа же число, меньшее, чем два.

Если же  $x < 0$ , то при умножении на  $3x$  знак неравенства изменится на противоположный и мы получим

$$2 - \sqrt{2-x^2} > -3x \quad \text{или} \quad 2 + 3x > \sqrt{2-x^2}$$

Возведя обе стороны этого неравенства в квадрат, получим

$$10x^2 + 12x + 2 > 0 \quad \text{или} \quad 5x^2 + 6x + 1 > 0,$$

откуда  $x < -1$  или  $x > -\frac{1}{5}$ . Сравнивая эту числовую область с ОДЗ исходного неравенства, которое состоит из полуотрезков  $[-\sqrt{2}, 0)$  и  $(0, \sqrt{2}]$ , и учитывая, что  $x < 0$ , получим ответ: исходное неравенство удовлетворено при  $x$ , заполняющих полуотрезок  $[-\sqrt{2}, -1)$  и промежуток  $(-\frac{1}{5}, 0)$ .

### Задача УП.

1. Уравнение  $x^2 = 0$ .

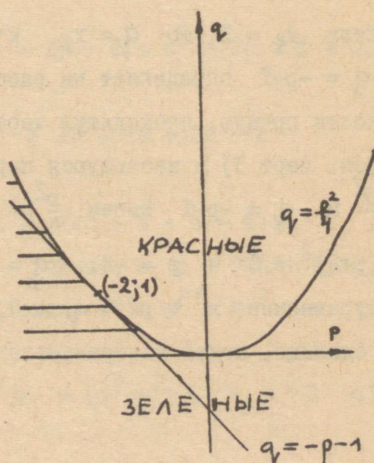
2. Уравнения  $x^2 + q = 0$  и  $x^2 + px = 0$ .

3. Если сумма корней равна нулю, то и  $p = 0$ , а все точки  $(0, q)$  расположены на нашей  $pq$ -плоскости на оси ординат. Наоборот, каждой точке оси  $q$  соответствует уравнение с нулевой суммой корней.

4. Уравнение  $x^2 + px + q = 0$  имеет два различных действительных корня в том случае, если  $p^2 - 4q > 0$ . Следовательно, все зеленые

точки расположены на нашей координатной плоскости под параболой  $q = \frac{p^2}{4}$  (см. черт. 3). Аналогично заключаем, что все красные расположены над этой параболой.

Точкам же самой параболы соответствуют квадратные урав-



Черт. 3.

нения  $x^2 + px + q = 0$ , имеющие один действительный корень.

5. Если оба корня  $x_1$  и  $x_2$  положительны, то  $p = -(x_1 + x_2) < 0$  и  $q = x_1 x_2 > 0$ . Таким образом, уравнениям с двумя положительными корнями соответствуют точки на координатной плоскости, расположенные между левой ветвью параболы и отрицательным направлением оси абсцисс (на чертеже 3 соответствующая область заштрихована). При этом точки левой ветви параболы принадлежат этой области, а точки на оси абсцисс нет.

С другой стороны любой точке заштрихованной области соответствует уравнение, корни  $x_1$  и  $x_2$  которого удовлетворяют условиям

$$-(x_1 + x_2) < 0, \quad x_1 x_2 > 0 \quad \text{или} \quad x_1 + x_2 > 0, \quad x_1 x_2 > 0.$$

Поэтому  $x_1 > 0$  и  $x_2 > 0$ . Этим показано, что рассматриваемым уравнениям соответствуют все точки заштрихованной области.

6. Если  $x_1 = 1$ , то  $q = x_2$  и  $p = -x_1 - x_2 = -1 - q$ . Условие  $q = -p - 1$  определяет на рассматриваемой координатной плоскости прямую, проходящую через точки  $(0; -1)$  и  $(-1; 0)$  (см. черт 3) и касающуюся параболы в точке  $(-2; 1)$ : из  $q = \frac{p^2}{4}$  и  $q = -p - 1$  имеем  $\frac{p^2}{4} = -p - 1$  или  $p^2 = -4p - 4$ ; отсюда  $(p+2)^2 = 0$  и  $p = -2$ ,  $q = -(-2) - 1 = 1$ . Таким образом уравнение  $x^2 + px + q = 0$ , один из корней которого равен единице, может изображаться одной из точек прямой  $q = -p - 1$ .

### Задача VIII.

Для доказательства утверждений 1 и 2 нужно рассмотреть все возможные комбинации знаков чисел  $a$  и  $b$ . В каждом отдельном случае оба эти утверждения очевидны.

3. Неравенство следует из очевидного неравенства

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (a-c)^2 \geq 0.$$

Действительно, отсюда имеем

$$a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + a^2 - 2ac^2 + c^2 \geq 0$$

или, что то же,

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 2bc + 2ac,$$

что и требовалось доказать.

4. Доказательство аналогично предыдущему. Исходя из очевидного неравенства

$$(a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 \geq 0,$$

получим

$$a^2 - 2a + 1 + b^2 - 2b + 1 + c^2 - 2c + 1 \geq 0.$$

Отсюда

$$a^2 + b^2 + c^2 + 1 \geq 2a + 2b + 2c - 2$$

или

$$a^2 + b^2 + c^2 + 1 \geq 2(a + b + c - 1).$$

5. Пусть  $x$  и  $y$  - катеты, а  $z$  - гипотенуза прямоугольного треугольника. Тогда  $x^2 + y^2 = z^2$  и  $x \leq z$ ,  $y \leq z$ . Отсюда заключаем, что

$$x^3 + y^3 \leq x^2 z + y^2 z = (x^2 + y^2) z = z^2 z = z^3.$$

6. Поскольку

$$\begin{aligned} 100! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 98 \cdot 99 \cdot 100 = \\ &= (1 \cdot 100) \cdot (2 \cdot 99) \cdot \dots \cdot (49 \cdot 52) \cdot (50 \cdot 51) > 100^{50}, \end{aligned}$$

то доказываемое неравенство действительно имеет место:

$$(100!)^2 > (100^{50})^2 = 100^{100}.$$

7. Утверждение следует из такой последовательности очевидных неравенств:

$$\begin{aligned} 1000! &= \\ &= (1 \cdot \dots \cdot 9) \cdot (10 \cdot \dots \cdot 99) \cdot (100 \cdot \dots \cdot 199) \cdot \dots \cdot (900 \cdot \dots \cdot 999) \cdot 1000 > \\ &> (100 \cdot \dots \cdot 199) \cdot \dots \cdot (900 \cdot \dots \cdot 999) > 100^{100} \cdot 200^{100} \cdot \dots \cdot 900^{100} = \\ &= 100^{900} \cdot 2^{100} \cdot 3^{100} \cdot \dots \cdot 9^{100} > \\ &> 10^{1800} \cdot 2^{100} \cdot 2^{100} \cdot 4^{100} \cdot 4^{100} \cdot 4^{100} \cdot 4^{100} \cdot 8^{100} \cdot 8^{100} = \\ &= 10^{1800} \cdot 2^{100+100+200+200+200+200+300+300} = \\ &= 10^{1800} \cdot 2^{1600} = 10^{1800} \cdot (2^{10})^{160} = 10^{1800} \cdot 10^{24 \cdot 160} > \\ &> 10^{1800} \cdot 1000^{160} = 10^{1800} \cdot 10^{480} = 10^{2280} > 10^{2250} = 100^{750}. \end{aligned}$$

8. Каковы бы ни были  $x$  и  $y$ , удовлетворяющие условию  $x^2 + y^2 = 1$ , найдется такое число  $t$ , что

$$x = \sin t, \quad y = \cos t.$$

Поэтому можем написать

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = 1 + 2 \sin t \cos t = 1 + \sin 2t \leq 2.$$

Отсюда и получим

$$x + y \leq \sqrt{2}.$$

9. Поскольку  $a + b = 2$ , можем считать, что

$$a = 1 + c \quad \text{и} \quad b = 1 - c.$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} a^4 + b^4 &= (1 + c)^4 + (1 - c)^4 = \\ &= 1 + 4c + 6c^2 + 4c^3 + c^4 + 1 - 4c + 6c^2 - 4c^3 + c^4 = \\ &= 2 + (12c^2 + 2c^4). \end{aligned}$$

Поскольку всегда  $12c^2 + 2c^4 \geq 0$ , то  $a^4 + b^4 \geq 2$ .

### Задача IX.

Пусть  $a_1, a_2, \dots, a_{15}$  - самые высокие люди соответственно первого, второго и т.д. поперечного ряда. Пусть с другой стороны  $b_1, b_2, \dots, b_{15}$  - самые короткие люди соответственно первого, второго и т.д. поперечного ряда. Покажем, что любой из  $a$  выше любого из  $b$ .

Действительно, пусть  $c$  - человек, находящийся с  $a$  в одном поперечном ряду и с  $b$  в одном продольном ряду. Тогда  $a \gg c$  и  $c \gg b$ , так что действительно  $a \gg b$ .

А раз так, то и самый короткий из  $a$ , т.е. Сидоров, будет длиннее любого из  $b$ , в том числе и длиннее Бутылкиной (равенство в данном случае отпадает ввиду явной невозможности для Сидорова быть буфетчицей).

### Задача X.

Уже в случае четырех человек, построенных по два в ряд, результат предыдущей задачи может не сохраниться, если убрать хотя бы одного человека. Пусть, например, четыре человека А, В, С и Д, длиной соответственно 165, 170, 160, 175 см, построены следующим образом:

А (165)	В (170)
С (160)	Д (175),

тогда самый длинный из коротышек будет совпадать с самым коротким из долговязых. Им окажется А. Если же убрать А, то самым длинным коротышкой будет В, а самым коротким среди долговязых будет С, который короче В.

### Задача XI.

Такое расположение костей домино нереально, так как пятерка находится на восьми половинках костей домино, а на каждом стыке внутри цепи, в котором принимает участие пятерка, расходуется две таких половинки. Поэтому, если на одном конце цепи оказалась пятерка, то и на другом конце тоже должна быть пятерка.

Дополнение I. Другое решение задачи III.5.

Будем исходить из того, что если две дроби имеют одинаковые числители, то та из них меньше, у которой знаменатель больше. Поэтому разделим числитель и знаменатель каждой из трех дробей на ее числитель:

$$\frac{937}{948} = \frac{937}{937+11} = \frac{1}{1 + \frac{11}{937}}; \quad \frac{853}{863} = \frac{853}{853+10} = \frac{1}{1 + \frac{10}{853}};$$

$$\frac{731}{739} = \frac{731}{731+8} = \frac{1}{1 + \frac{8}{731}}$$

и сравним между собой дроби  $\frac{11}{937}$ ,  $\frac{10}{853}$  и  $\frac{8}{731}$ . При этом будем снова делить числитель и знаменатель дроби на ее числитель:

$$\frac{11}{937} = \frac{11}{11 \cdot 85 + 2} = \frac{1}{85 + \frac{2}{11}}; \quad \frac{10}{853} = \frac{10}{10 \cdot 85 + 3} = \frac{1}{85 + \frac{3}{10}};$$

$$\frac{8}{731} = \frac{8}{8 \cdot 91 + 3} = \frac{1}{91 + \frac{3}{8}}.$$

Знаменатель последней дроби больше знаменателей двух предыдущих дробей, так что сама эта дробь меньше двух других, а, следовательно,  $\frac{731}{739}$  — наибольшая из исходных дробей. С другой стороны, поскольку  $\frac{2}{11} < \frac{3}{10}$ , то  $\frac{11}{937} > \frac{10}{853}$  и  $\frac{937}{948} < \frac{853}{863}$ .

Итак,  $\frac{937}{948}$  — наименьшая из рассматриваемых дробей:

$$\frac{937}{948} < \frac{853}{863} < \frac{731}{739}.$$

Дополнение 2. В русском варианте брошюры "Неравенства" в тексте задачи У1 контрольной работы № I допущены две опечатки:

Напечатано

$$5. x^2 + 14 + 49 \leq 0$$

$$9. |x^2 - 16| + 6 \leq 0$$

Должно быть

$$5. x^2 - 14x + 49 \leq 0$$

$$9. |x^2 - 16| + 6x \leq 0$$

В настоящей брошюре приведены решения задач из правого столбика. Ниже дается решение задач из левого столбика.

5. Поскольку при любых значениях  $x$   $x^2 + 14 + 49 = x^2 + 63 > 0$ , неравенство решений не имеет.

9. Поскольку  $|x^2 - 16| \geq 0$ , то, безусловно,  $|x^2 - 16| + 6 > 0$ . Поэтому неравенство не удовлетворяется ни при каких значениях  $x$ .



Тартуский государственный университет  
ЭССР, г. Тарту, ул. Пинкооли, 18

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ  
К ЗАДАЧАМ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ № I  
НА ТЕМУ "НЕРАВЕНСТВА"

На русском языке

Составил Е. Габович

Перевод с эстонского и чертежи М. Рахула

Ответственный редактор Х. Тяррпу

-----  
Ротапринт ТГУ 1966. Печ. листов I,6 (условных I,46).

Учетн.-издат. листов I,22. Тираж 400 экз.

Бумага 30x42. I/4. Сдано в печать 5/IV 1966 г.

МВ-03465. Заказ № I48.

Цена 4 коп.

4 коп.

XII

ЛA-4135

5023124

TÜ RAAMATUKOGU



1 0300 00502312 4