E. MITT · O. PRINITS · K. VELSKER

MATEMAATIKA OLÜMPIAADID EESTI NSV-s

E. MITT, O. PRINITS, K. VELSKER

MATEMAATIKA OLÜMPIAADID EESTI NSV-s

KIRJASTUS «VALGUS» • TALLINN 1970

Kunstiliselt kujundanud *M. Ruljand*

2—2—2

ÜLEVAADE MATEMAATIKA OLÜMPIAADIDEST EESTI NSV-S

«Eesti NSV 10. aastapäeva tähistamiseks otsustas TRÜ ÜTÜ füüsika-matemaatika osakond kooskõlas ENSV Haridusministeeriumi ja TRÜ Matemaatika-Loodusteaduskonna dekanaadiga korraldada ülesannete lahendamise võistluse ENSV keskkoolide õpilastele täppisteaduste alal.

Kaasaegsed täppisteadused moodustavad inimühiskonna tehnilise kultuuri aluse. Täppisteaduste abil võime leida üha uusi teid oma sotsialistliku kodumaa võimsuse edasiseks suurendamiseks, lähenemiseks kommunismile.

Ülesannete lahendamise võistlus toimub viiel alal: matemaatikas, füüsikas, mehhaanikas, astronoomias ja keemias.»

Nii kirjutati 1950. aastal Tartu Riikliku Ülikooli Üliõpilaste Teadusliku Ühingu füüsika-matemaatika osakonna poolt välja antud brošüüris, milles esitati keskkooliõpilastele lahendamiseks ülesandeid nimetatud aladelt.

Järgmise analoogilise ülesannete lahendamise võistluse organiseeris TRÜ ÜTÜ füüsika-matemaatika osakond 1954. aasta kevadel. Siis oli aga ainete arvu vähendatud kolmele: matemaatika, füüsika ja keemia.

Nende võistluste korraldamise initsiaatoreiks ja organiseerijaiks olid Harald E p l e r, Ivar P e t e r s e n, Aleksei T ü m a n o k, Maret T a m m, Tullio I l o m e t s. Esimesed ülesannete lahendamise võistlused näitasid, et leidub asjast huvitatud kooliõpilasi ja see innustas ürituse organiseerijaid otsima uusi teid, et kaasa tõmmata laiemat õpilaskonda. Selleks loodigi kontakt Eesti NSV Haridusministeeriumiga. Tänu Haridusministeeriumi tookordse inspektori Mihkel J a a g u s e energilisele tegevusele organiseeriti juba 1954. a. kevadel matemaatika, füüsika ja keemia ülesannete lahendamise võistlus Haridusministeeriumi ja kõrgemate õppeasutuste ühise üritusena. Ühtlasi otsustati hakata neid ülesannete lahendamise võistlusi nimetama t ä p p i s t e a d u s t e o l ü m p i a a d i d e k s.

Esimesed olümpiaadid toimusid kahevoorulistena, hiljem kolmevoorulistena. Olümpiaadi võitjatele olid ette nähtud väärtuslikud auhinnad. See oli kahtlemata üheks oluliseks põhjuseks, miks olümpiaadidest osavõtjate arvud tunduvalt ületasid varem toimunud ülesannete lahendamise võistlustest osavõtvate õpilaste arvud.

Olümpiaadid muutusid traditsioonilisteks, neid on organiseeritud igal õppeaastal.

1953/54. õ.-a. toimunud **I täppisteaduste olümpiaadi** organiseerisid ENSV Haridusministeerium ja Tallinna Polütehniline Instituut. Osa võttis õpilasi ca 30 koolist, kokku umbes 400 õpilast, neist 63 kutsuti lõppvoorule Tallinna Polütehnilisse Instituuti. Lõppvoorul anti kõigile osavõtjaile lahendamiseks 2 ülesannet matemaatikast, 2 füüsikast ja 2 keemiast. Paremateks lahendajateks osutusid Tartu 4. Keskkooli abituriendid Georgi Tammaru ja Sergei Kutuzov. I olümpiaadi paremate hulka kuulusid veel Märjamaa Keskkooli abiturient Hannes Tammet ning Väike-Maarja Keskkooli X klassi õpilane Eduard Tamm.

II olümpiaadi organiseerimisest 1954/55. õ.-a. võttis osa 6 asutust: ENSV Haridusministeerium, ELKNÜ Keskkomitee, Tallinna Polütehniline Instituut, Tallinna Pedagoogiline Instituut, Vabariiklik Õpetajate Täiendusinstituut ja Tartu Riiklik Ülikool.

Ka sellel olümpiaadil pidid kõik õpilased lahendama ülesandeid nii matemaatikast, füüsikast kui ka keemiast. Lõppvoor toimus samaaegselt Tallinna Polütehnilises Instituudis ja Tartu Riiklikus Ülikoolis. Lisaks keskkooli lõpuklassi õpilaste olümpiaadile organiseeriti 1955. a. kevadel matemaatika olümpiaad ka VII klassi õpilastele.

Tallinnas olid II olümpiaadi paremateks kõigil olümpia-aladel kokku Pärnu 1. Keskkooli abiturient Jüri Soontalu, Kohtla-Järve 1. Keskkooli õpilased Villu Soom ja Valdur Laager ning Tapa Keskkooli õpilane Enn Lüütre, Tartus aga Tartu 1. Keskkooli abituriendid Aare Purga ja Ants Kask ning Viljandi 2. Keskkooli abiturient Jüri Nilson. Tallinnas olid paremateks matemaatikuteks Väike-Maarja Keskkooli abiturient Eduard Tamm ja Rapla Keskkooli abiturient Ants Tauts, parimaks füüsikuks Valdur Laager ja parimaks keemikuks Enn Lüütre. Tartus olid paremateks matemaatikuteks Aare Purga, Ants Kask ja Andres Kippasto (kõik Tartu 1. Keskkoolist), parimaks füüsikuks Jüri Nilson ja parimaks keemikuks Valga 1. Keskkooli õpilane Jüri Vabaoja.

1955/56. õ.-a. toimus **III olümpiaad**, kus lahendati ülesandeid ainult matemaatikas ja füüsikas. Korraldavateks asutusteks jäid ENSV Haridusministeerium ja Tartu Riiklik Ülikool. VII klasside õpilastele organiseerisid matemaatika olümpiaadi Haridusministeerium koos Tallinna Pedagoogilise Instituudiga.

III olümpiaadil toimub eraldi arvestus matemaatikas ja füüsikas. Matemaatikas osutusid paremateks Arvo Jägel Otepää Keskkoolist, Vello Kuusik Abja Keskkoolist, Valdek Loko Ahja Keskkoolist ja Jevgeni Gabovitš Tartu 4. Keskkoolist. Paremate hulka kuulusid veel Jüri Marran ja Märt Kask Tartu 5. keskkoolist ning Gennadi Vainikko Kehra Keskkoolist.

Füüsikas olid paremad Ain Ainsaar Pärnu 2. Keskkoolist, Ilmar Rammo Tartu 3. Keskkoolist ja Gennadi Vainikko. Paremate hulka kuulusid ka matemaatika olümpiaadi võitja Arvo Jägel ja Tartu 1. Keskkooli õpilane Agu Laisk.

1956/57. õ.-a. toimunud **IV olümpiaadi** organiseerisid ENSV Haridusministeerium, ELKNÜ Keskkomitee ja Tallinna Polütehniline Instituut. Olümpiaad organiseeriti endiselt kahevoorulisena, kusjuures toimusid eraldi olümpiaadid matemaatikas, füüsikas ja keemias. Vastavalt juhendile hõlmati selle olümpiaadiga õpilasi IX—XI klassini. IX ja X klasside olümpiaadi teise vooru läbiviimine jäeti aga rajoonide ja linnade komisjonide hooleks. XI klasside olümpiaadi lõppvoor toimus Tallinna Polütehnilises Instituudis.

Paremateks osutusid: matemaatikas Tallinna 2. Keskkooli õpilased Henn Tuherm ja Rein Laul ning Tartu 1. Keskkooli õpilane Peeter Loog; füüsikas Kohtla-Järve 1. Keskkooli õpilane Kalju Seljamäe, Tallinna 11. Keskkooli õpilane Aleksander Tšuhvitšev ja Viljandi 2. Keskkooli õpilane Ando Puksa; keemias Kalju Seljamäe, Tallinna 22. Keskkooli õpilane Jaan Hiie, Tallinna 23. Keskkooli õpilane Markovitš ja Tallinna 10. Keskkooli õpilane Ilmar Köstner. Kolme ala kokkuvõttes osutusid paremateks Kalju Seljamäe, Väike-Maarja Keskkooli õpilane Ants Kivistu ja Räpina Keskkooli õpilane Lembit Kolli.

1957/58. õ.-a. toimunud **V olümpiaadi** korraldasid Tartu Riiklik Ülikool ja ENSV Haridusministeerium. Seekord piirduti jälle ainult matemaatika ja füüsika ülesannetega.

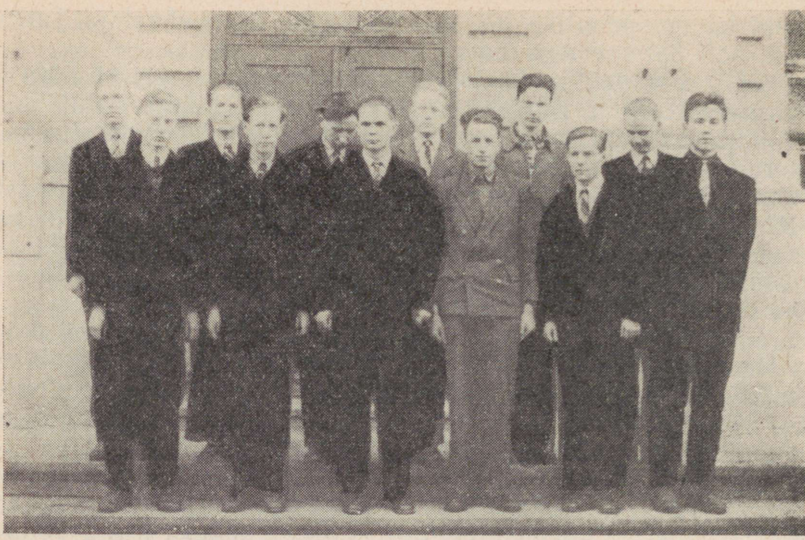
Matemaatikas osutusid paremateks Pärnu 2. Keskkooli abiturient Rein Ludri, Haapsalu 1. Keskkooli X klassi õpilane Vello Loorits, Tallinna 32. Keskkooli õpilane Ilja Koltunov ja Viljandi 2. Keskkooli abiturient Tiit Nilson. Tublilt esinesid sellel olümpiaadil ka Tallinna 2. Keskkooli õpilased Rein Jõers, Kaarel Pärkma ja Tõnu Viik, kes kõik tulid esimese kümne hulka.

Füüsikas osutusid paremateks Undo Uus Kehra Keskkoolist, Tõnu Kipper Tartu 1. Keskkoolist ning Rein Jõers Tallinna 2. Keskkoolist.

Esimese nn. juubeliolümpiaadi puhul pani TRÜ rektoraat välja ränddiplomid parematele koolidele. Nende esimesteks omanikeks said matemaatika alal Tallinna 2. Keskkool ja füüsika alal Kehra Keskkool.

Selle olümpiaadi järel tegi olümpiaadi organiseeriv komitee kõrgematele õppeasutustele ettepaneku arvestada vastuvõtul olümpiaadide võitjaid võrdselt kuldmedali omanikega ning Haridusministeeriumile ettepaneku vabastada olümpiaadi võitjad vastava aine küpsuseksameist. Teine neist ettepanekuist leidis kohe realiseerimist. Samal aastal muudeti aga kõrgemate koolide vastuvõtutingimusi nii, et kuldmedal ei vabastanud enam vastuvõtueksameist. Esimene ettepanek kaotas selle tõttu oma tähtsuse.

1958/59. õ.-a. toimunud **VI olümpiaadi** kavva võeti õpetajate



V täppisteaduste olümpiaadi paremad TRÜ peahoone ees.
Esireas vasakult teine füüsika olümpiaadi võitja Kehra Keskkooli X klassi õpilane Undo Uus ja kolmas matemaatika olümpiaadi võitja Pärnu 2. Keskkooli abiturient Rein Ludri.

vastavasisuliste taotluste põhjal matemaatika ja füüsika kõrval uuesti keemia ülesannete lahendamine.

VI olümpiaad oli eriti tulemusrikas juba V olümpiaadil silma paistnud Kehra Keskkooli õpilasele Undo Uusile ja Haapsalu 1. Keskkooli õpilasele Vello Looritsale. Esimene neist võitis matemaatika ja füüsika olümpiaadi ning tuli keemia olümpiaadil kolmandaks. V. Loorits oli aga kõigil aladel teine. Matemaatikas osutusid paremateks veel Pärnu 1. Keskkooli abituriendid Jüri Rebane ja Uno Kaljulaid, füüsikas esitasid paremaid lahendusi aga Kalle Talvik Tallinna 7. Keskkoolist ja Leo-Henn Humal Tallinna 10. Keskkoolist. Keemia olümpiaadi võitis Tartu 5. Keskkooli õpilane Rein Kalliver. Tartu Riikliku Ülikooli ränddiplomid võitsid matemaatikas Pärnu 1. Keskkool, füüsikas kordas oma eelmise aasta tulemust Kehra Keskkool ning keemias osutus parimaks Haapsalu 1. Keskkool.

Alates **VII olümpiaadist**, mis toimus 1959/60. õ.-a., muudetakse olümpiaadid kolmevoorulisteks. I vooru ülesanded pidid õpilased lahendama kodus, II vooru ülesanded ülesannete lahendamise võistlusena koolis ja III vooru ülesanded samasugusel kujul Tartu Riiklikus Ülikoolis.

VII olümpiaadi osatähtsust suurendas asjaolu, et Moskvas organiseeriti 1960. a. kevadel üleliiduline matemaatika olümpiaad, kuhu

VI täppisteaduste olümpiaadi paremad koos organiseerimiskomisjoni liikmetega.

VI täppisteaduste olümpiaadil matemaatikas esikoha saavutanud Undo Uus ülesandeid lahendamas.

1960. a. kevadel ühes TRÜ peahoone auditooriumis olümpiaadist osavõtjad ülesandeid lahendamas.

kutsuti ka meie vabariigi koolinoori. Selle ürituse tegidki kaasa matemaatika olümpiaadi võitjad Enn Muda Tallinna 21. Keskkoolist ning Kalju Jurkatamm ja Aavo Lossmann Tallinna 1. Keskkoolist. Füüsika olümpiaadil osutusid paremateks Viljo Korsen Tallinna 22. Keskkooli X klassist, Henn Ludri Pärnu 2. Keskkooli X klassist ja Tartu 1. Keskkooli abiturient Ants Mitt.

Keemias osutusid paremateks Henn Ludri, Enn Talvis Haapsalu 1. Keskkoolist ja Mati Haga Võru Keskkoolist.

Koolidest olid parimad matemaatikas Tallinna 1. Keskkool, füüsikas Tartu 1. Keskkool ning keemias Pärnu 2. Keskkool.

Tartu Riikliku Ülikooli arvutuskeskuse poolt pandi sellel olümpiaadil välja auhind õpilasele, kes kolme ala kokkuvõttes saavutab parima tulemuse. Selleks osutus Võru Keskkooli õpilane Tõnu Anton.

1960/61. õ.-a. toimunud **VIII olümpiaad** valmistas nii korraldajaile kui ka osavõtjaile suure üllatuse. Matemaatika olümpiaadi võitjaks tuli Tallinna 2. Keskkooli 8. klassi (!) õpilane Jaak Tepandi, kes lahendas kõik ülesanded vigadeta. Samuti tublilt lahendasid matemaatika ülesandeid Viljandi 2. Keskkooli õpilased Vello Oja ja Toomas Saks ning Kohtla-Järve 1. Keskkooli õpilane Harri Tipp.

VII täppisteaduste olümpiaadi paremad matemaatikas koos organiseerimiskomisjoni esimehe O. Prinitsaga.

Tallinna 2. Keskkool pakkus VIII olümpiaadil veel teisegi meeldiva üllatuse. Nimelt andsid nad meie täppisteaduste olümpiaadide ajaloos esimese naistšempioni. Selleks oli tookordne X klassi õpilane Hilja Iher, kes koos Rein Ahmaniga Märjamaa Keskkoolist ja Viljo Korseniga Tallinna 22. Keskkoolist jagasid füüsika olümpiaadil esikohta. Keemia olümpiaadil näitas endiselt oma üleolekut Pärnu 2. Keskkooli õpilane Henn Ludri. Koos Ene Rampe ja Helmi Grahviga kindlustasid nad teistkordselt Pärnu 2. Keskkoolile parima kooli nimetuse keemia alal ja sellega koos ka TRÜ ränddiplomi. Hästi esinesid ka Tartu 7. Keskkooli ja Tallinna 30. Keskkooli õpilased. Matemaatikas päris parima kooli nimetuse Viljandi 2. Keskkool Tallinna 2. Keskkooli ja Kohtla-Järve 1. Keskkooli ees. Füüsikas aga tuli võitjaks Tallinna 2. Keskkool Märjamaa Keskkooli ja Tartu 7. Keskkooli ees.

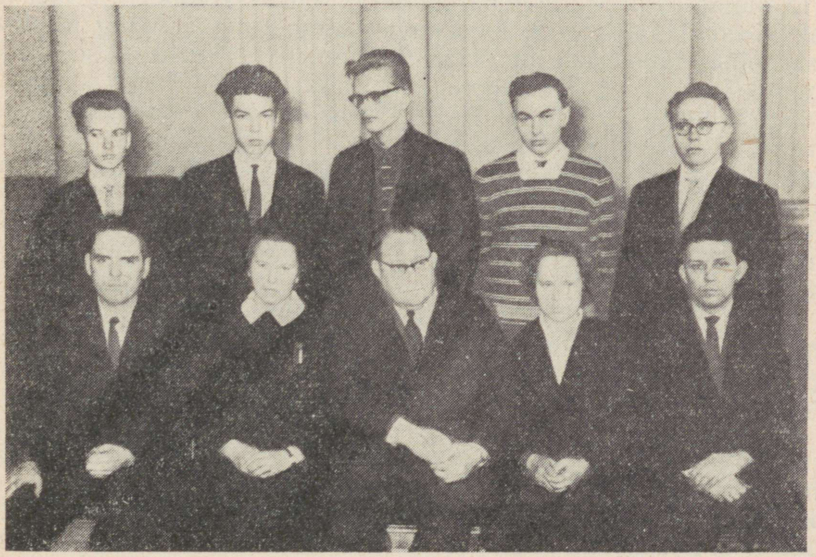
1961/62. õ.-a. organiseeriti **IX olümpiaad** mõnevõrra muudetud juhendi järgi. Ülesannete lahendamise võistlusesse tõmmati nüüd kaasa õpilased VII klassist alates. Moodustati omaette olümpiaadi grupid klasside järgi. C-gruppi kuulusid VII ja VIII klasside õpilased, B-gruppi IX ja X klasside õpilased ning A-gruppi XI klasside õpilased, kusjuures noorematel õpilastel oli lubatud kaasa võistelda ka vanemas grupis. Uue juhendi rakendamise tagajärjel suu-

VIII täppisteaduste olümpiaadi paremad koos organiseerimiskomisjoni liikmetega.

Tallinna 2. Keskkooli VIII klassi õpilane Jaak Tepandi võtab 1961. a. kevadel vastu VIII täppisteaduste olümpiaadi võitja diplomi matemaatikas.

VIII täppisteaduste olümpiaadi paremad matemaatikas koos organiseerimiskomisjoni liikmetega. Esimeses reas (vasakult): J. Tepandi, dots. A. Mitt, v.-õp. K. Velsker, V. Oja. Teises reas: A. Õispuu, H. Tipp, M. Uus, T. Saks.

IX täppisteaduste olümpiaadi paremad matemaatikas koos organiseerimiskomisjoni liikmetega. Istuvad (vasakult): dots. O. Prinits, L. Tooding, dots. A. Mitt, H. Iher, v.-õp. K. Velsker. Seisavad: T. Toodo, M. Piirmets, J. Tepandi, V. Vares, E. Saar.



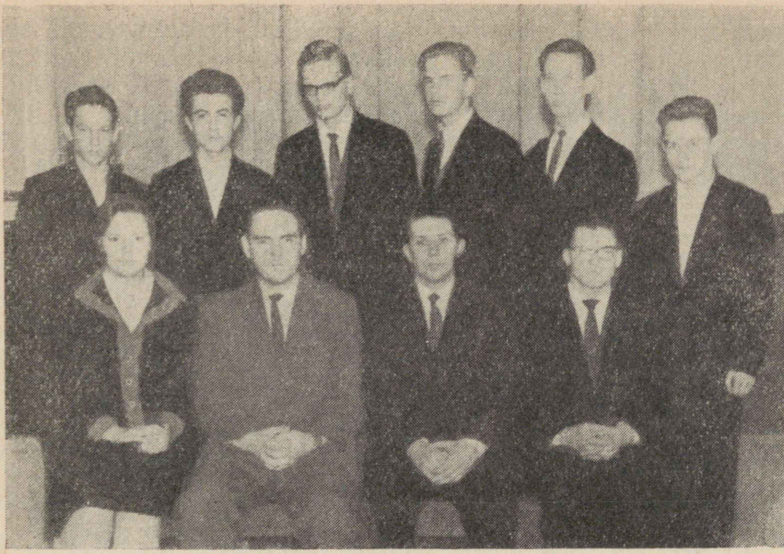
IX täppisteaduste olümpiaadil matemaatikas esikoha saavutanud Tallinna 2. Keskkooli õpilane Hilja Iher auhindu vastu võtmas.

renes olümpiaadist osavõtjate arv ja kasvas olümpiaadi linna-, rajooni- ja koolikomisjonide osatähtsus.

IX olümpiaadil osutusid paremateks: matemaatikas Hilja Iher ja Jaak Tepandi Tallinna 2. Keskkoolist ning Liina Tooding Räpina Keskkoolist; füüsikas Enn Saar Tallinna 21. Keskkoolist, Jaak Tepandi Tallinna 2. Keskkoolist ning Märt Aints Tartu 5. Keskkoolist; keemias aga Tartu 2. Keskkooli õpilane Peeter Liblik ja Pärnu 2. Keskkooli õpilased Ene Rampe ning Helmi Grahv. Viimaste tulemused ei suutnud aga kindlustada ränddiplomit Pärnu 2. Keskkoolile. Selle said Tallinna 10. Keskkooli õpilased Anne Toomela ja Harry Gustavson. Parimaks kooliks matemaatikas oli Tallinna 21. Keskkool ning füüsikas Tartu 5. Keskkool. Kolme ala kokkuvõttes oli parimaks Peeter Liblik.

1962/63. õ.-a. organiseeriti **X olümpiaad** eelmisega samadel põhimõtetel. C-grupis piirduti nüüd ainult matemaatika olümpiaadiga, B-grupis olid aga olümpiaadid eraldi nii matemaatikas, füüsikas kui ka keemias.

Tartu Riiklikus Ülikoolis toimunud lõppvoorule saabus 120 õpilast 58 koolist. Matemaatika olümpiaadi lõppvoor viidi seekord läbi kaheringilisena koolinoorte rahvusvaheliste matemaatikaolümpiaadide eeskujul. Lõppkokkuvõttes osutusid paremateks Jaak Tepandi Tallinna 2. Keskkoolist, Mare Koit Viljandi 1. Keskkoolist ja Paul



X täppisteaduste olümpiaadi paremad matemaatikas koos organiseerimiskomisjoni liikmetega. Esimeses reas (vasakult): G. Jemeljanova, dots. O. Prinits, v.-õp. K. Velsker, P. Mälk. Teises reas: I. Volodin, B. Bekker, J. Tepandi, P. Tammela, J. Heinloo, V. Zaitsev.

XII täppisteaduste olümpiaadı paremad koos organiseerimiskomisjoni liikmetega pärast olümpiaadi pidulikku lõpetamist TRÜ aulas 1965. a. kevadel.

Tammela Tallinna 2. Keskkooli X klassist. Füüsika olümpiaadil olid paremateks Matti Jõgi Tapa 1. Keskkoolist, Jaak Tepandi Tallinna 2. Keskkoolist ning Anatoli Starostin Narva 7. Keskkoolist, keemia olümpiaadil aga Ants Reimo Rapla Keskkoolist, Mihkel Aul Tartu 5. Keskkooli VIII klassist ja Ilmar Krigul Võru Keskkooli X klassist.

Koolidest osutusid parimaiks ja omandasid TRÜ ränddiplomi: matemaatikas Tallinna 2. Keskkool, füüsikas Narva 7. Keskkool ja keemias Rapla Keskkool.

Kolme ala kokkuvõttes osutus parimaks ja omandas TRÜ füüsikaosakonna poolt välja pandud eriauhinna Tallinna 19. Keskkooli õpilane Valentin Zaitsev.

1963/64. õ.-a. toimunud **XI olümpiaad** viidi läbi IX olümpiaadi juhendi järgi, s. t. et matemaatika olümpiaad ei olnud kaheringiline. Tublilt esinesid matemaatika olümpiaadil Tallinna 2. Keskkooli õpilased Oleg Kangur, Paul Tammela ja Gunnar Kose, kes võitsid vastavalt esimese, teise ja kolmanda koha ning kindlustasid oma koolile järjekordselt ka TRÜ ränddiplomi.

Füüsika ja keemia olümpiaadil oli parimaks Tartu 5. Keskkooli IX klassi õpilane Mihkel Aul. Füüsika olümpiaadil järgnesid talle Tartu 1. Keskkooli abiturient Tõnu Haldre ja Suure-Jaani Keskkooli abiturient Ants Kõpp, keemia olümpiaadil aga Tallinna 2. ja 10. Keskkooli abituriendid Oleg Kangur ja Uku Kurvet.

Koolidest osutusid parimaiks füüsikas Tartu 1. Keskkool ja keemias Tallinna 10. Keskkool.

XIII täppisteaduste olümpiaadil matemaatikas, füüsikas ja keemias võitjaks tulnud Tartu 5. Keskkooli õpilane Mihkel Aul (paremal) koos klassikaaslase Rein Mälliga, kes keemia olümpiaadil saavutas 2. koha.

XIII täppisteaduste olümpiaadi võitjad koos organiseerimiskomisjoni liikmetega.

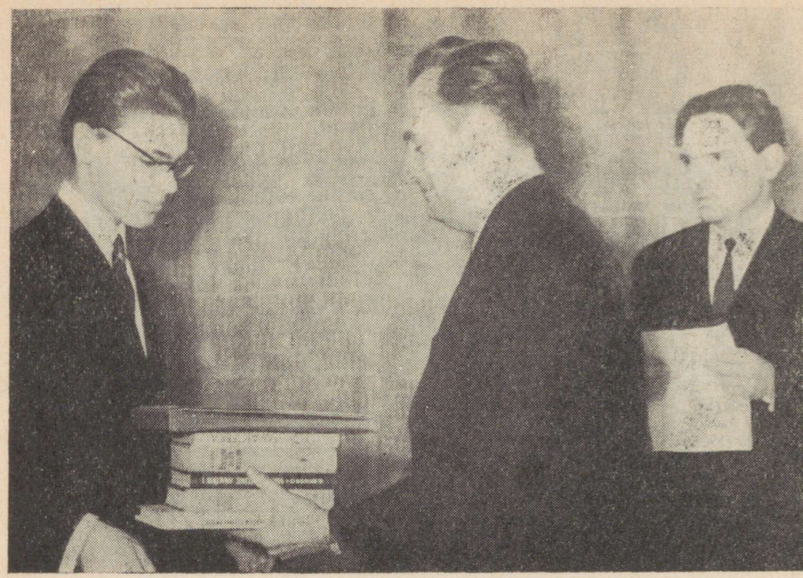
1964/65. õ.-a. toimus **XII täppisteaduste olümpiaad.** Tartu 5. Keskkooli õpilane Mihkel Aul oli seekord parim kõigil olümpiaaladel. Matemaatika olümpiaadil järgnesid talle Mihhail Popov Tallinna 6. Keskkoolist ja Natalia Kolossova Tallinna 31. Keskkoolist, keemias Rein Mäll Tartu 5. Keskkoolist ja Rein Hiob Pärnu 2. Keskkoolist ning füüsikas Vladimir Nõmm Tallinna 6. Keskkoolist ja Boris Freidin Tallinna 19. Keskkoolist.

Koolidest osutus matemaatikas ja füüsikas parimaks Tallinna 6. Keskkool ning keemias Tartu 5. Keskkool.

1965. a. ülikooli peahoonet tabanud tulekahju tõttu toimus **XIII olümpiaadi** lõppvoor 1966. a. kevadel Nõo Keskkoolis. Matemaatika olümpiaadil olid paremateks Tallinna 2. Keskkooli õpilane Tiit Kändler, Tallinna 15. Keskkooli õpilane Sergei Kovbasa ja Tallinna 21. Keskkooli õpilane Ain Sarv. Parimad lahendused esitas aga väljaspool arvestust kaasa lahendanud Tallinna 2. Keskkooli õpilane Kalle Kaarli.

Füüsika ja keemia olümpiaadi võitis Mihkel Aul Tartu 5. Keskkoolist, kellele järgnesid füüsika olümpiaadil Peeter Oja Nõo Keskkoolist ja Vladimir Mürk Tallinna 6. Keskkoolist ning keemia olümpiaadil Jaak Loit Märjamaa Keskkoolist ja Rein Mäll Tartu 5. Keskkoolist.

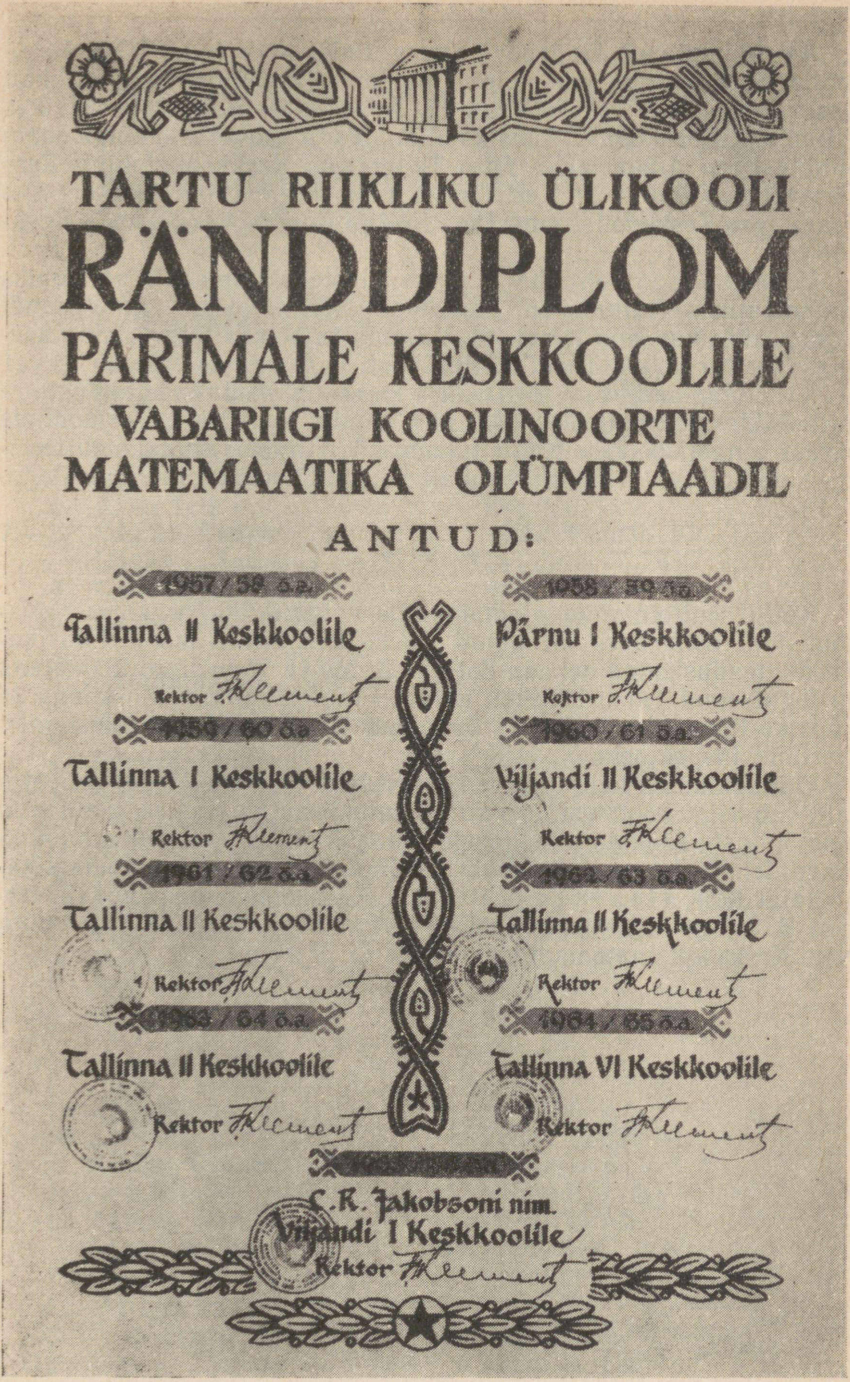
Matemaatikas tunnistati parimaks kooliks Viljandi 1. Keskkool, füüsikas Tallinna 6. Keskkool ja keemias Tartu 5. Keskkool.



XIII täppisteaduste olümpiaadil matemaatikas esikohale tulnud Tallinna 2. Keskkooli õpilasele Tiit Kändlerile annab auhinnad üle ENSV Haridusministeeriumi koolivalitsuse juhataja sm. R. Virkus.

XIV olümpiaadi eel otsustati muuta olümpiaadi juhendit, sest eriklasside õpilastel on õppeplaani kohaselt vastavas aines märksa ulatuslikum ettevalmistus ja seetõttu on nad ka olümpiaadil eelistatud olukorras. Uue juhendi kohaselt muudeti olümpiaadid võistkondlikeks, kusjuures iga linn ja rajoon ning erikool võib esineda olümpiaadi lõppvoorul oma võistkonnaga. 1966/67. õ.-a. täppisteaduste olümpiaadi lõppvoor toimus jällegi Nõo Keskkoolis. Individuaalselt olid paremateks: matemaatikas Toomas Täht Tallinna 1. Keskkoolist, Jaak Kikas Tallinna 2. Keskkoolist, Otto Teller ja Tiit Prank Nõo Keskkoolist; füüsikas Peeter Oja Nõo Keskkoolist, Jaak Kikas Tallinna 2. Keskkoolist ning Otto Teller ja Tiit Prank Nõo Keskkoolist; keemias Rein Prank ja Peeter Oja Nõo Keskkoolist ning Jüri Vedru Tallinna 10. Keskkoolist. Parimateks võistkondadeks osutusid Nõo Keskkool, Tallinna 1. Keskkool ja Tartu rajoon matemaatikas, Nõo Keskkool, Tartu rajoon ja Tallinna Keskrajoon füüsikas ning Tartu rajoon, Tartu 5. Keskkool ja Tallinna Keskrajoon keemias.

Tartu rajooni eduka esinemise kindlustas Nõo Keskkool. Selle kooli füüsika eriklassi õpilased moodustasid rajooni võistkonna matemaatika alal ja matemaatika eriklassi õpilased füüsika alal. Keemias olid aga tublid nii matemaatika kui ka füüsika eriklasside esindajad.



TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI

RÄNDDIPLOM

PARIMALE KESKKOOLILE

VABARIIGI KOOLINOORTE

MATEMAATIKA OLÜMPIAADIL

ANTUD:

1957/58 õ.a.

Tallinna II Keskkoolile

Rektor F. Klement

1958/59 õ.a.

Pärnu I Keskkoolile

Rektor F. Klement

1959/60 õ.a.

Tallinna I Keskkoolile

Rektor F. Klement

1960/61 õ.a.

Viljandi II Keskkoolile

Rektor F. Klement

1961/62 õ.a.

Tallinna II Keskkoolile

Rektor F. Klement

1962/63 õ.a.

Tallinna II Keskkoolile

Rektor F. Klement

1963/64 õ.a.

Tallinna II Keskkoolile

Rektor F. Klement

1964/65 õ.a.

Tallinna VI Keskkoolile

Rektor F. Klement

[illegible]

C. R. Jakobsoni nim.

Viljandi I Keskkoolile

Rektor F. Klement

XV olümpiaadi lõppvoor toimus 1968. a. kevadel Nõo Keskkoolis. Seekord olid parimateks matemaatika olümpiaadil Mihhail Ossin ja Sergei Paal Tallinna 15. Keskkoolist ning Arvo Kivikas Viljandi 1. Keskkoolist. Füüsika olümpiaadil saavutasid kõige enam punkte Peep Adamson ja Otto Teller Nõo Keskkoolist ning Eero Järvekülg Viljandi 1. Keskkoolist ning keemia olümpiaadil Tiit Prank Nõo Keskkoolist ning Inge Suit ja Imbi Novek Tartu 5. Keskkoolist.

Võistkondlikult olid XV täppisteaduste olümpiaadil paremaiks matemaatikas Tallinna 15. Keskkool, Nõo Keskkool ja Viljandi rajoon, füüsikas Nõo Keskkool, Viljandi rajoon ja Narva, ning keemias Tartu rajooni, Tartu 5. Keskkooli ja Pärnu õpilased.

XV olümpiaadil arvestati võitja ka eraldi eriklasside õpilaste ja mitteeriklasside õpilaste osas, mis muutis konkurentsi esikohtade pärast pingelisemaks. Nagu tulemused näitasid, suutsid mitteeriklasside õpilased küllaltki edukalt võistelda eriklasside õpilastega.

* * *

Kõigi senitoimunud olümpiaadide vabariikliku organiseerimiskomisjoni esimeheks on olnud Tartu Riikliku Ülikooli Füüsika-Keemiateaduskonna dekaan dotsent A. Mitt. Komisjoni liikmetena on tegutsenud Tartu Riikliku Ülikooli Matemaatikateaduskonna ja Füüsika-Keemiateaduskonna õppejõud ning ENSV Haridusministeeriumi inspektorid.

Olümpiaadide käigus on esile kerkinud rida matemaatikaõpetajaid vabariigi koolidest, kes suure entusiasmiga on kaasa aidanud oma õpilaste edukale esinemisele vabariiklikel täppisteaduste olümpiaadidel. Nimetagem siinkohal Tallinna 2. Keskkooli matemaatikaõpetajat K. Kallastet, Viljandi 1. Keskkooli matemaatikaõpetajaid B. Henrichsoni, H. Keerutajat ja E. Meidlat ning Nõo Keskkooli matemaatikaõpetajat O. Karu.

EESTI NSV KESKKOOLIÕPILASTE MATEMAATIKA OLÜMPIAADIDE VÕITJAD

I olümpiaad (1954. a.)

1.—2.	Georgi **Tammaru**	Tartu 4. Kk.
	Sergei **Kutuzov**	Tartu 4. Kk.
3.—5.	Dimitri **Küün**	Haapsalu 1. Kk.
	Viktor **Adamov**	Tallinna 30. Kk.
	Hannes **Tammet**	Märjamaa Kk.
6.	Aavo **Teigar**	Räpina Kk.
7.—8.	Eduard **Tamm**	Väike-Maarja Kk.
	Ludmilla **Ivanova**	Tallinna 30. Kk.
9.	Taso **Erima**	Räpina Kk.
10.	Eduard **Tšernasko**	Tallinna 32. Kk.

II olümpiaad (1955. a.)

Lõppvoorul Tallinnas:

1.	Eduard **Tamm**	Väike-Maarja Kk.
2.—4.	Ants **Tauts**	Rapla Kk.
	Enn **Lüütre**	Tapa Kk.
	Jüri **Soontalu**	Pärnu 1. Kk.
5.—7.	Valdo **Ratassepp**	Tallinna 24. Kk.
	Valdur **Laager**	Kohtla-Järve 1. Kk.
	Villu **Soom**	Kohtla-Järve 1. Kk.
8.	Madis **Sulev**	Tapa 1. Kk.
9.	Ülo **Uder**	Võru 1. Kk.
10.	Tõnu **Kolli**	Tallinna 22. Kk.

Lõppvoorul Tartus:

1.	Aare **Purga**	Tartu 1. Kk.
2.—3.	Ants **Kask**	Tartu 1. Kk.
	Andres **Kippasto**	Tartu 1. Kk.
4.	Jüri **Nilson**	Viljandi 2. Kk.
5.—6.	Andres **Karolin**	Tartu 1. Kk.
	Kalev **Peedumäe**	Põlva Kk.
7.	Heiki **Past**	Viljandi 2. Kk.
8.	Margus **Tõnnov**	Elva Kk.
9.	Taso **Erima**	Räpina Kk.
10.	Taissia **Eksina**	Tartu 4. Kk.

III olümpiaad (1956. a.)

1.	Arvo **Jägel**	Otepää Kk.
2.	Vello **Kuusik**	Abja Kk.
3.	Valdek **Loko**	Abja Kk.
4.	Jevgeni **Gabovitš**	Tartu 4. Kk.
5.	Henn **Tuherm**	Tallinna 2. Kk.
6.	Jüri **Marran**	Tartu 5. Kk.
7.	Jüri **Savitski**	Tallinna 14. Kk.
8.	Aarne **Koik**	Viljandi 2. Kk.
9.	Märt **Kask**	Tartu 5. Kk.
10.	Gennadi **Vainikko**	Kehra Kk.

IV olümpiaad (1957. a.)

1.	Henn **Tuherm**	Tallinna 2. Kk.
2.	Rein **Laul**	Tallinna 2. Kk.
3.	Peeter **Loog**	Tartu 1. Kk.
4.	Hain **Toss**	Viljandi 2. Kk.
5.	Oleg **Porozov**	Tallinna 6. Kk.
6.	Leonid **Šandrik**	Tartu 4. Kk.
7.—8.	Arnold **Oberschneider**	Lihula Kk.
	Viktor **Gobuzov**	Valga Kk.
9.—11.	Aleksander **Russanov**	Kingissepa 1. Kk.
	Enn **Hendre**	Suure-Jaani Kk.
	Sergei **Przibelski**	Tallinna 23. Kk.

V olümpiaad (1958. a.)

1.	Rein **Ludri**	Pärnu 2. Kk.
2.	Vello **Loorits**	Haapsalu 1. Kk.
3.	Ilja **Koltunov**	Tallinna 32. Kk.
4.	Tiit **Nilson**	Viljandi 2. Kk.
5.	Rein **Jõers**	Tallinna 2. Kk.
6.	Kaarel **Pärkma**	Tallinna 2. Kk.
7.	Juhan **Palm**	Kehra Kk.
8.	Tõnu **Viik**	Tallinna 2. Kk.
9.	Peep **Gorelov**	Tallinna 21. Kk.
10.	Tiit **Saluvere**	Türi 1. Kk.

VI olümpiaad (1959. a.)

1.	Undo **Uus**	Kehra Kk.
2.	Vello **Loorits**	Haapsalu 1. Kk.
3.	Jüri **Rebane**	Pärnu 1. Kk.

4. Uno **Kaljulaid** Pärnu 1. Kk.
5. Aarne **Vahur** Rakvere 1. Kk.
6. Rein **Oivo** Võru 1. Kk.
7. Rein **Avarmaa** Kehra Kk.
8. Leo-Henn **Humal** Tallinna 10. Kk.
9. Gabriel **Jakobson** Tallinna 2. Kk.

VII olümpiaad (1960. a.)

1. Enn **Muda** Tallinna 21. Kk.
2. Kalju **Jurkatamm** Tallinna 1. Kk.
3. Aavo **Lossmann** Tallinna 1. Kk.
4. Valentina **Jekimova** Tallinna 30. Kk.
5. Ants **Mitt** Tartu 1. Kk.
6. Kalle **Valdna** Tallinna 10. Kk.
7. Anu **Eichhorn** Tallinna 16. Kk.
8. Rein **Raamat** Võru 1. Kk.
9. Einar **Jõgisu** Kehra Kk.
10. Peep **Kirsima** Tallinna 16. Kk.

VIII olümpiaad (1961. a.)

1. Jaak **Tepandi** Tallinna 2. Kk.
2. Vello **Oja** Viljandi 2. Kk.
3. Harri **Tipp** Kohtla-Järve 1. Kk.
4. Toomas **Saks** Viljandi 2. Kk.
5. Vladimir **Mihlin** Tallinna 32. Kk.
6. Rein **Saar** Märjamaa Kk.
7. Mati **Uus** Kehra Kk.
8. Arne **Õispuu** Kärdla Kk.
9. Ants **Varjas** Haapsalu 1. Kk.
10. Vladimir **Rõkunov** Tallinna 32. Kk.

IX olümpiaad (1962. a.)

1. Hilja **Iher** Tallinna 2. Kk.
2. Jaak **Tepandi** Tallinna 2. Kk.
3. Liina **Tooding** Räpina Kk.
4. Tiit **Toodo** Pärnu 4. Kk.
5. Mihhail **Zimirev** Tallinna 32. Kk.
6. Villu **Vares** Viljandi 2. Kk.
7. Peeter **Liblik** Tartu 2. Kk.
8. Asta **Männik** Viljandi 2. Kk.
9. Enn **Saar** Tallinna 21. Kk.
10. Maidu **Piirmets** Rakvere 1. Kk.

X olümpiaad (1963. a.)

1.	Jaak **Tepandi**	Tallinna 2. Kk.
2.	Mare **Koit**	Viljandi 2. Kk.
3.	Paul **Tammela**	Tallinna 2. Kk.
4.	Valentin **Zaitsev**	Tallinna 19. Kk.
5.	Jaak **Heinloo**	Tallinna 2. Kk.
6.	Peeter **Mälk**	Otepää Kk.
7.	Igor **Volodin**	Tapa Kk.
8.	Raivo **Vilu**	Rakvere 1. Kk.
9.	Galina **Jemeljanova**	Tallinna 14. Kk.
10.	Boris **Bekker**	Tallinna 14. Kk.

XI olümpiaad (1964. a.)

1.	Oleg **Kangur**	Tallinna 2. Kk.
2.	Paul **Tammela**	Tallinna 2. Kk.
3.	Gunnar **Kose**	Tallinna 2. Kk.
4.	Tõnu **Haldre**	Tartu 1. Kk.
5.	Evald **Übi**	Märjamaa Kk.
6.	Jaan **Tibar**	Tallinna 10. Kk.
7.	Vello **Nurmela**	Tallinna 2. Kk.
8.	Toivo **Arak**	Tallinna 21. Kk.
9.	Ants **Ronk**	Tallinna 46. Kk.
10.	Irina **Grinblat**	Tallinna 23. Kk.

XII olümpiaad (1965. a.)

1.	Mihkel **Aul**	Tartu 5. Kk.
2.	Mihhail **Popov**	Tallinna 6. Kk.
3.	Natalia **Kolossova**	Tallinna 31. Kk.
4.	Piret **Keres**	Tartu 1. Kk.
5.	Viktor **Näkk**	Tapa 2. Kk.
6.	Boris **Freidin**	Tallinna 19. Kk.
7.	Aleksander **Petrušin**	Tallinna 23. Kk.
8.	Indrek **Kolka**	Viljandi 1. Kk.
9.	Anatoli **Stulov**	Tallinna 19. Kk.
10.	Vladimir **Simonov**	Tallinna 25. Kk.

XIII olümpiaad (1966. a.)

1.	Tiit **Kändler**	Tallinna 2. Kk.
2.	Sergei **Kovbasa**	Tallinna 15. Kk.
3.	Ain **Sarv**	Tallinna 21. Kk.
4.	Eve **Martin**	Tallinna 1. Kk.
5.	Aleksander **Striž**	Tallinna 6. Kk.
6.	Mihkel **Aul**	Tartu 5. Kk.

7.	Peeter **Tooming**	Viljandi 1. Kk.
8.	Rein **Prank**	Nõo Kk.
9.	Meelis **Krigul**	Viljandi 1. Kk.
10.	Sulev **Vaim**	Tallinna 1. Kk.

XIV olümpiaad (1967. a.)

1.	Toomas **Täht**	Tallinna 1. Kk.
2.	Jaak **Kikas**	Tallinna 2. Kk.
3.—5.	Otto **Teller**	Nõo Kk.
	Tiit **Prank**	Nõo Kk.
	Sergei **Papernõi**	Tallinna 15. Kk.
6.—8.	Tiit **Kändler**	Tallinna 2. Kk.
	Kalev **Pärna**	Viljandi 1. Kk.
	Semjon **Reifman**	Tartu 4. Kk.
9.	Krista **Vendt**	Rakvere 1. Kk.
10.	Peeter **Oja**	Nõo Kk.

XV olümpiaad (1968. a.)

1.—2.	Mihhail **Ossin**	Tallinna 15. Kk.
	Sergei **Paal**	Tallinna 15. Kk.
3.	Arvo **Kivikas**	Viljandi 1. Kk.
4.—5.	Tiit **Prank**	Nõo Kk.
	Nikolai **Karakin**	Tallinna 6. Kk.
6.—7.	Eero **Järvekülg**	Viljandi 1. Kk.
	Arvi **Kruusing**	Loksa Kk.
8.—9.	Agu **Eensaar**	Nõo Kk.
	Enok **Sein**	Nõo Kk.
10.	Enn **Silmere**	Nõo Kk.

MATEMAATIKA OLÜMPIAADIDE ÜLESANDED

Aritmeetika ja algebra

1. Õpilased laenutasid jõesadamast paadi, sõudsid veidi aega vastuvoolu ja asusid siis sõitma pärivoolu. Kümme minutit pärast suuna muutmist jõudsid nad paadisadamast 1 km kaugusel järele parvele, mis ujus sadamast mööda just nende väljumise ajal. Leida voolu kiirus.

(I, h.)*

2. Metsatöölistel lõpeb töö teatud kindlal kellaajal ja täpselt selleks ajaks tuleb neile järele auto, mis viib nad koju. Ühel päeval lõppes aga töö varem ja töölised hakkasid jalgsi koju minema. Teel tuli neile auto vastu ja viis nad sihtkohta, kuhu töölised jõudsid seekord 1 tund varem kui tavaliselt. Teades, et auto ja jalakäijate keskmiste kiiruste suhe on 10, leida, mitu tundi varem lõppes töö sel päeval.

(49/50)**

3. Moskvast Vladivostokki ja vastassuunas sõidavad rongid iga päev, kattes selle vahemaa 20 ööpäevaga. Mitut Moskva—Vladivostoki rongi kohtab teel Vladivostokist Moskvasse sõitev rong?

(49/50)

4. Tõestada, et kolme järjestikuse täisarvu kuupide summa jagub 3-ga.

(II, 2.)

5. Murru lugejaks on kahe paaritu arvu ruutude vahe, nimetajaks samade arvude ruutude summa. Näidata, et seda murdu saab alati taandada 2-ga, kuid ei saa taandada 4-ga.

(VII, 1.)

6. Tõestada, et viie järjestikuse täisarvu ruutude summa jagub 5-ga, kuid ei jagu 25-ga.

(VIII, 1.)

7. Tõestada, et iga täisarvu n korral $n(n^2+5)$ jagub 6-ga.

(III, 2.; XI, 1.)

8. Tõestada, et iga täisarvu n korral n^5-5n^3+4n jagub 120-ga.

(IV, 2.; XI, 2.)

---

* Esimene arv sulgudes näitab olümpiaadi järjekorranumbrit, teine vastava olümpiaadi vooru numbrit. Täht *h* tähendab harjutusülesannet.

** 49/50 — õppeaasta, mil toimus nn. eelolümpiaad.

9. Avaldis $a+b+c$, kus a, b ja c on täisarvud, jagub 6-ga. Näidata, et siis ka $a^3+b^3+c^3$ jagub 6-ga.

(XIII, 1.)

10. Tõestada, et murd $\frac{14n+3}{21n+4}$ ei ole taanduv ühegi täisarvulise n väärtuse korral.

(XII, 2.)

11. Tõestada, et summa $\left\{\left[(7^7)^7\right]^7\right\}^7 + \left[(7^7)^7\right]^7$ jagub 10-ga.

(I, h.)

12. Leida väikseim arv, mis 2-ga jagades annab jäägi 1, 3-ga jagades jäägi 2 jne., 9-ga jagades jäägi 8.

(VII, 1.)

13. Arvutada summa

$$\frac{6}{5\cdot 7} + \frac{6}{7\cdot 9} + \frac{6}{9\cdot 11} + \frac{6}{11\cdot 13} + \frac{6}{13\cdot 15} + \frac{6}{15\cdot 17} + \frac{6}{17\cdot 19} + \frac{6}{19\cdot 21}.$$

(VI, 3.)

14. Kirjutada 1000 000 viie nelja abil.

(VII, 2.)

15. Asendada tähed numbritega ja näidata, et kehtib summa

$$\begin{array}{r} send \\ +\ more \\ \hline money \end{array}$$

Märkus. Erinevatele tähtedele vastavad erinevad numbrid.

(VI, 1.)

16. Asendada tähed numbritega ja näidata, et kehtib summa

$$\begin{array}{l} forty \\ \quad ten \\ +\ ten \\ \hline sixty \end{array}$$

Märkus. Erinevatele tähtedele vastavad erinevad numbrid.

(IV, h. ja VI, 2.)

17. Kirjutades järjestikused täisarvud 1, 2, 3, ... üksteise kõrvale, saame neist moodustada järgmise numbrite jada

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 1, 0, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 4, ...

Missugune number seisab selles jadas miljonendal kohal?

(49/50; XI, 1.)

18. Mitme nulliga lõpeb kõikide 1-st kuni 100-ni (viimane kaasa arvatud) võetud täisarvude korrutis? (II, 2.)

19. Leida viga järgmises mõttekäigus:

$$a=b$$
$$ab=b^2$$
$$ab-a^2=b^2-a^2$$
$$a(b-a)=(b-a)(b+a)$$
$$a=b+a$$
$$a=2a$$
$$1=2$$
(V, 1.)

20. Jagada kaksliige $a^{128}-b^{128}$ avaldisega

$$(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)(a^8+b^8)(a^{16}+b^{16})(a^{32}+b^{32})(a^{64}+b^{64}).$$
(II, 3.)

21. Leida viga järgmises mõttekäigus:

$$16-36=25-45$$
$$16-36+\frac{81}{4}=25-45+\frac{81}{4}$$
$$\left(4-\frac{9}{2}\right)^2=\left(5-\frac{9}{2}\right)^2$$
$$4-\frac{9}{2}=5-\frac{9}{2}$$
$$4=5.$$
(I, h.)

22. Lahutada tegureiks hulkliige

$$a^8+a^4b^4+b^8,$$

kus a ja b on reaalarvud. 49/50)

23. Lahutada tegureiks hulkliige

$$(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3.$$
(XIII, 2.)

24. Tõestada, et

$$n^2+(n^2+1)+(n^2+2)+\ldots+(n^2+n)=$$
$$=(n^2+n+1)+(n^2+n+2)+\ldots+(n^2+2n).$$
(X, 1.)

25. Tõestada, et

$$a(a+1)(a+2)(a+3)+1$$
(IV, 1.)

on täisruut.

26. Tõestada, et

$$a=b=c,$$

kui $a^2+b^2+c^2=ac+ab+bc$, kus a, b ja c on reaalarvud.

(IX, 1.)

27. Tõestada, et hulkliige

$$a^3(b^2-c^2)+b^3(c^2-a^2)+c^3(a^2-b^2)$$

jagub korrutisega $(b-c)(c-a)(a-b)$.

(IX, 2.)

28. Leida

$$a^4+b^4+c^4,$$

kui $a+b+c=0$ ja $a^2+b^2+c^2=a$. (VI, 2.)

29. Koostada ruutvõrrand, mille lahenditeks on võrrandi ax^2+ $+bx+c=0$ lahendite pöördväärtused vastupidiste märkidega. (I, 1.)

30. Millistel p ja q väärtustel on võrrandi $x^2+px+q=0$ lahenditeks p ja q? (IV, 1.)

31. Võrrandi $ax^2+bx+c=0$ lahendid on x_1 ja x_2. Avaldada võrrandit lahendamata võrrandi kordajate kaudu järgmised avaldised:

a) $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}$,

b) $x_1^4+x_1^2x_2^2+x_2^4$. (VIII, 1.)

32. Lahendada võrrand

$$x(x+2)(x+3)(x+5)=8.$$ (VIII, 1.)

33. Lahendada võrrand

$$(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)=144.$$ (VI, 1.)

34. Lahendada võrrand

$$(8x+7)^2(4x+3)(x+1)=4{,}5.$$ (XII, 2.)

35. Lahendada võrrand

$$(3x+2)^4+(2x-4)^4=(2x+3)^4+(4x-2)^4.$$ (XII, 3.)

36. Lahendada võrrand

$$x^8+5x^7-20x^5-x^4+20x^3-5x+1=0.$$ (49/50)

37. Lahendada võrrand

$$\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2x-3}=\sqrt[3]{12(x-1)}.$$ (VI, 1.)

38. Lahendada võrrand

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1.$$ (I, h.)

39. Lahendada võrrand

$$\sqrt{a-\sqrt{a+x}}=x.$$ (XIII, 3.)

40. Lahendada võrrandisüsteem

$$\begin{cases} x^3+y^3=1 \\ x^2y+2xy^2+y^3=2. \end{cases}$$ (X, 1.)

41. Lahendada võrrandisüsteem

$$\begin{cases} (x+y+1)^2+(x+y)^2=25 \\ x^2-y^2=3. \end{cases}$$ (IX, 1.)

42. Lahendada võrrandisüsteem

$$\begin{cases} (x+y)(x^2-y^2)=9 \\ (x-y)(x^2+y^2)=5. \end{cases}$$ (VIII, 3.)

43. Lahendada võrrandisüsteem

$$\begin{cases} 2x^2y^2-4y^2-xy+2=0 \\ 3x^2y^2-8y^2+3xy-2=0. \end{cases}$$ (VIII, 1.)

44. Lahendada võrrandisüsteem

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{xy}+\dfrac{xy}{x+y}=\dfrac{a^2+1}{a} \\ \dfrac{x-y}{xy}+\dfrac{xy}{x-y}=\dfrac{b^2+1}{b}. \end{cases}$$ (I, h.)

45. Lahendada võrrandisüsteem

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}=\dfrac{7}{\sqrt{xy}}+1 \\ x\sqrt{xy}+y\sqrt{xy}=78, \text{ kus } x>0,\ y>0. \end{cases}$$ (XII, 1.)

46. Lahendada võrrandisüsteem

$$\begin{cases} x+y+z=9 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1 \\ xy+xz+yz=27. \end{cases}$$ (VIII, 2.)

47. Lahendada võrrandisüsteem

$$\begin{cases} \dfrac{xy}{x+y}=a \\ \dfrac{xz}{x+z}=b \\ \dfrac{yz}{y+z}=c, \text{ kus } abc\neq 0. \end{cases}$$ (XV, 3.)

48. Lahendada võrrandisüsteem

$$\begin{cases} x+y+z=a \\ x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x^3+y^3+z^3=a^3. \end{cases} \qquad \text{(IX ,3.)}$$

49. Lahendada võrrandisüsteem

$$\begin{cases} x+y=5z \\ x^2+y^2=13z \\ x^3+y^3=35z. \end{cases} \qquad \text{(IX, 2.)}$$

50. Lahendada võrrandisüsteem

$$\begin{cases} x+y+z+u=8 \\ x^2+y^2+z^2+u^2=20 \\ xy+xu+zy+zu=16 \\ xyzu=9 \end{cases} \qquad \text{(VI, 3.)}$$

51. Lahendada võrrandisüsteem

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ (x+y)(y+z)+(y+z)(z+x)+(z+x)(x+y)=1 \\ x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)=-6. \end{cases} \qquad \text{(XIII, 1.)}$$

52. Lahendada võrrandisüsteem

$$\begin{cases} x+y=2 \\ xy-z^2=1. \end{cases} \qquad \text{(XIII, 1.)}$$

53. Millise parameetri a väärtuse korral on süsteemil

$$\begin{cases} x^2+y^2=z \\ x+y+z=a \end{cases} \qquad \text{(XIII, 2.)}$$

üks reaalne lahend? Leida see.

54. Ihtüoloog tahtis määrata tiigis elunevate püügiks kõlblike kalade arvu. Selleks heitis ta tiiki sobiva tihedusega võrgu ja sai selle väljatõmbamisel 30 kala. Ihtüoloog märgistas need kalad ja laskis siis tiiki tagasi. Järgmisel päeval püüdis ta samal viisil 40 kala, nende hulgas oli 2 märgistatut. Saadud andmete järgi määras ta ligikaudselt kalade arvu tiigis. Kui suur see oli? (XIII, 1.)

55. Turist, kellel oli vaja rongile jõuda, arutles, et käies tunnis 3 km, jõuaks ta jaama 20 minutit pärast rongi väljumist. Et rongile mitte hilineda, käis ta igas tunnis 0,5 km rohkem ning jõudis jaama 40 minutit enne rongi väljumist. Kui palju maad oli jaama ja kui palju aega oli turisti käsutuses? (I, 2.)

56. Kell 12 kattuvad kella osutid. Mitme minuti pärast nad jälle kattuvad? (X, 1.)

57. Kell, mis käib ette, on teatud ajamomendil 2 minutit taga õigest ajast. Kui see kell oleks samal ajamomendil 3 minutit taga ja käiks ööpäevas $^1/_2$ minutit rohkem ette kui praegu, siis näitaks ta õiget aega ööpäev varem. Mitu minutit käib see kell ööpäevas ette? (XII, 1.)

58. Antikvariaat alandas raamatu esialgset hinda 10% võrra ja sai ostuhinnaga võrreldes siiski 8% kasumit. Mitu % kasumit oli esialgu planeeritud? (III, 2.)

59. Punktidest *A* ja *C* saadeti samaaegselt välja käskjalad, kes pidid viima teate punkti *B*. Punktist *C* väljuv käskjalg tahtis jõuda punkti *B* samaaegselt teise käskjalaga ja seepärast pidi ta iga kilomeetri läbima $1^1/_4$ minuti võrra kiiremini kui teine. Punkt *C* asub seejuures punktist *B* 20 km kaugemal kui punkt *A*. Käskjalad liikusid ühtlase kiirusega ja jõudsid punkti *B* 5 tunni pärast. Leida punktide *A* ja *C* kaugus punktist *B*. (V, 2.)

60. Teatud arv töölisi oleks koos töötades lõpetanud kraavi kaevamise 24 tunniga. Nad asusid aga tööle ükshaaval võrdsete ajavahemike järel ning töötasid siis koos kuni töö lõpetamiseni. Mitu tundi kaevas kraavi esimesena tööle asunud tööline, kui ta töötas 5 korda kauem kui viimasena tööle asunud tööline? (XIII, 2.)

61. Jalakäija läheb paralleelselt trammiteega. Iga 12 minuti järel möödub temast tramm ja iga 4 minuti järel tuleb talle tramm vastu. Eeldades, et nii jalakäija kui ka tramm liiguvad ühtlaselt, leida mitmeminutilise intervalliga väljuvad trammid liini otspunktidest, kui kõik trammid liiguvad sama kiirusega. (VII, 1.)

62. Jõe vool punktide *A* ja *B* vahel on nii aeglane, et see paadi liikumise kiirust praktiliselt ei mõjusta. Punktide *B* ja *C* vahel on aga vool tunduvalt kiirem. Aerutaja sõuab punktist *A* punkti *C* 3 tunniga ja tagasi (vastuvoolu) punkti *A* $3^1/_2$ tunniga. Kui voolu kiirus oleks *A* ja *C* vahel kogu ulatuses niisugune, nagu ta tegelikult *B* ja *C* vahel on, siis kuluks punktist *A* punkti *C* sõudmiseks $2^3/_4$ tundi. Kui palju aega kuluks sel juhul punktist *C* punkti *A* sõudmiseks? (XII, 1.)

63. Ruumala *A* on pool ruumalade *B* ja *C* summast ning ruumala *B* on kolmandik ruumalade *A* ja *C* summast. Kui suure osa ruumalade *A* ja *B* summast moodustab ruumala *C*? (XIII, 3.)

64. Tööpingi A tootlikkus moodustab m % tööpinkide B ja C tootlikkuste summast, aga tööpingi B tootlikkus moodustab n % A ja C tootlikkuste summast. Mitu protsenti moodustab tööpingi C tootlikkus tööpinkide A ja B tootlikkuste summast? (VIII, 1.)

65. Sadamast A väljusid voolu suunas samaaegselt mootorpaat ja parv. Mootorpaat sõitis pärivoolu 96 km, pöördus siis ümber ning jõudis tagasi sadamasse A 14 tunni pärast. Leida voolu ja mootorpaadi kiirused seisvas vees, kui on teada, et mootorpaat kohtas tagasiteel parve 24 km kaugusel sadamast A. (XI, 1.)

66. Kaks masinat alustavad tunneli kaevamist üks ühest, teine teisest tunneli otsast. Nad peavad tunneli valmis kaevama 60 päevaga. On teada, et kui esimene masin on teinud 30% ja teine $26^2/_3$% temale ettenähtud tööst, siis on kaevatud 60 meetrit tunnelit. Samuti on teada, et kui esimene masin läbib $^2/_3$ teisele masinale kaevamiseks ettenähtud tunneli pikkusest ja teine masin $^3/_{10}$ esimesele masinale kaevamiseks ettenähtud tunneli pikkusest, siis on esimesel masinal kulunud selleks 6 päeva rohkem aega kui teisel masinal. Mitu meetrit tunnelit kaevab kumbki masin päevas? (III, 1.)

67. Kahe metallraha väärtuste suhe on $^1/_3$. Mitu niisugust väiksema väärtusega ja mitu suurema väärtusega metallraha on vaja, et saada rahasumma, mis on võrdne nende kahe metallraha väärtuste korrutisega, kui on teada, et vajaminevate metallrahade koguarv jagub kolmega? (IV, 1.)

68. Läänest itta kulgev sirgjooneline maantee läbib asulaid A ja B, kusjuures B asub A-st 9 km ida pool. Asulast A väljub ida suunas auto, sõites ühtlase kiirusega 40 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Samaaegselt väljub asulast B samuti ida suunas mootorrattur, liikudes konstantse kiirendusega 32 $\frac{\text{km}}{\text{h}^2}$. Leida auto ja mootorratta vaheline suurim kaugus kahe esimese tunni jooksul. (IX, 1.)

69. Leida kaks naturaalarvu, mille vahe on 66 ja väikseim ühiskordne on 360. (XIV, 3.)

70. Kas kahe tundmatuga võrrandil

$$m^2+1958=n^2$$

on täisarvulisi lahendeid? (IV, h.)

71. Leida võrrandi

$$xyz+7xy+3xz+yz+21x+7y+3z=7000$$

naturaalarvulised lahendid. (49/50)

72. Näidata, et

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}. \qquad \text{(VI, 1.)}$$

73. Tõestada, et

$$\frac{\sqrt{a}(b-1)}{\sqrt{b}-a^{-1}}+\frac{\sqrt{b}(a-1)}{\sqrt{a}-b^{-1}}<\left[\sqrt{a}+\left(\frac{1}{b}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]^2,$$

kui $a>1$ ja $b>1$. (V, 3.)

74. Milliste parameetri a väärtuste korral on võrratus

$$-3<\frac{x^2+ax-2}{x^2-x+1}<2$$

rahuldatud x iga väärtuse korral? (XIII, 1.)

75. Tõestada, et

$$x^2+y^2\geqslant\frac{1}{20},$$

kui $2x+4y=1$. (XI, 1.)

76. Kas leidub niisugune täisarv a, mis rahuldab tingimust

$$\frac{4}{13}<\frac{a}{20}<\frac{5}{13}? \qquad \text{(IV, h.)}$$

77. Paat sõidab 10 km pärivoolu ja seejärel 6 km vastuvoolu. Voolu kiirus on $1\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Missugune võib olla paadi enda kiirus, kui sõit ei kesta alla 3 ega üle 4 tunni? (X, 1.)

78. Leida kaks kolmekohalist arvu, mille summa jagub 504-ga ja jagatis 6-ga. (VI, 1.)

79. Vabaneda juurtest murru nimetajas

$$\frac{1}{2+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}. \qquad \text{(XIII, 1.)}$$

80. Vabaneda juurtest murru nimetajas

$$\frac{1}{a+\sqrt[n]{a^{n-1}}+\sqrt[n]{a^{n-2}}+\ldots+\sqrt[n]{a^3}+\sqrt[n]{a^2}+\sqrt[n]{a}}. \qquad \text{(V, 1.)}$$

81. Kas kolm arvu võivad samaaegselt moodustada aritmeetilise ja geomeetrilise progressiooni? (IX, 1.)

82. Arvutada $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{\ldots}}}}$ (XII, 2.)

83. Kolm arvu moodustavad geomeetrilise progressiooni. Kui teisele arvule liita 8, muutub see geomeetriline progressioon aritmeetiliseks progressiooniks. Suurendades seejärel veel kolmandat arvu 64 võrra, saame aritmeetilisest progressioonist jälle geomeetrilise progressiooni. Leida need arvud. (X, 3.)

84. Aritmeetilise ja geomeetrilise progressiooni esimesed ja teised liikmed on vastavalt võrdsed positiivsed reaalarvud. Näidata, et nende progressioonide järgmised vastavad liikmed ei ole võrdsed. (XIII, 1.)

85. Kolme arvu summa on 93 ja nad moodustavad geomeetrilise progressiooni; ühtlasi on need arvud ühe ja sama aritmeetilise progressiooni esimeseks, teiseks ja seitsmendaks liikmeks. Leida need arvud. (V, 1.)

86. Tõestada, et

$$\frac{a_m}{a_n}=\frac{2_m-1}{2_n-1},$$

kui $\frac{S_m}{S_n}=\frac{m^2}{n^2}$, kus a_m ja a_n ning S_m ja S_n on vastavalt aritmeetilise progressiooni üldliikmed ja summad. (XI, 2.)

87. Näidata, et

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}=\frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}},$$

kui arvud $a_1, a_2, \ldots, a_n$ moodustavad aritmeetilise progressiooni. (VII, 1.)

88. Leida summa

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2+\ldots+\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)^2. \quad \text{(XII, 1.)}$$

89. Arvud a^2, b^2 ja c^2 moodustavad aritmeetilise progressiooni. Tõestada, et siis ka arvud $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{c+a}$, $\frac{1}{a+b}$ moodustavad aritmeetilise progressiooni. (XI, 1.)

90. Leida summa kolmekümnele esimesele niisugusele positiivsele paaritule arvule, mis jagamisel 5-ga annavad jäägi 1. (VI, 1.)

91. Arvutada summa

$$\frac{3}{1\cdot 4}+\frac{3}{4\cdot 7}+\frac{3}{7\cdot 10}+\ldots+\frac{9}{94\cdot 97}+\frac{3}{97\cdot 100}. \quad \text{(IV, h.)}$$

92. Leida summa $\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\frac{1}{a_3a_4}+\ldots+\frac{1}{a_na_{n+1}}$, kui arvud a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n, a_{n+1} moodustavad aritmeetilise progressiooni. (IV, h.)

93. Tõestada, et

$$1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots+(-1)^{n+1}n^2=(-1)^{n+1}\frac{n(n+1)}{2}. \quad \text{(IV, h.)}$$

94. Tõestada, et

$$(ac)^{\log_a b}=c^2,$$

kui $\log_a N$, $\log_b N$ ja $\log_c N$ moodustavad aritmeetilise progressiooni. (VII, 3.)

95. Tõestada, et

$$\log a+\log_a 10\geqslant 2,$$

kui $a>1$. (XV, 3.)

96. Kas on võimalik, et

$\sin x=\log\sin x$? (IV, 1.)

97. Leida summa

$$\frac{3}{7}(1+4^{\log_2 5})^{\log_{26} 7}+(5^{\log_{25} 9}+3^{\log_9 16})^{2\log_7 5}. \quad \text{(VI, 1.)}$$

98. Lihtsustada avaldis

$$b^{\frac{\log_a(\log_a b)}{\log_a b}}. \quad \text{(IV, h.)}$$

99. Arvutada avaldise

$\log 5\cdot\log 20+\log^2 2$

väärtus logaritmide tabeleid kasutamata. (IV, h.)

100. Leida $\log 48$, kui $\log_3 5=a$ ja $\log_5 8=b$. (X, 3.)

101. Leida $\log_6 16$, kui $\log_{12} 2=a$. (XIII, 1.)

102. Geomeetrilise progressiooni esimene liige on a ja tegur q ning n esimese liikme korrutis on c. Leida $\log_c b$, kui $\log_a b=A$ ja $\log_q b=B$. (X, 2.)

103. Tõestada, et

$$a^2+b^2=c^2,$$

kui $\log_{c+b} a+\log_{c-b} a=2\log_{c-b} a\cdot\log_{c+b} a$. (IV, h.)

104. Tõestada, et

$$\frac{\log_b x}{\log_{ab} x}-\log_b a=5^{\log\cos 2\pi}. \quad \text{(I, h.)}$$

105. Lahendada võrrand

$\log_x(5x^2)\cdot\log_5^2 x=1.$ (VII, 1.)

106. Lahendada võrrand

$\log_x 2x=\log_{2x} x.$ (49/50)

107. Lahendada võrrand

$\log_{\frac{1}{3}} 3x+\log_{\frac{1}{9}} 9x=\log_{\frac{3}{\sqrt{3}}} \frac{x}{3}+\log_{\frac{9}{\sqrt{9}}} \frac{x}{9}.$ (49/50)

108. Lahendada võrrand

$(1+\log_c a)\cdot\log_a x\cdot\log_b c=\log_b x\cdot\log_c x\cdot\log_a c.$ (X, 1.)

109. Lahendada võrrand

$3\log_{a^2x} x+\frac{1}{2}\log_{\frac{x}{\sqrt{a}}} x=2.$ (VII, 2.)

110. Lahendada võrrand

$2\log_x a+3\log_{a^2x} a+\frac{\log_x a}{\log_x ax}=0.$ (XI, 1.)

111. Lahendada võrrand

$\log_x 2\cdot\log_{2x} 2=\log_{4x} 2.$ (III, 2.)

112. Leida parameetri a väärtused, nii et võrrandil

$\log(ax)=2\log(x+1)$

on ainult üks reaalarvuline lahend. (XIV, 3.)

113. Lahendada võrrand

$9^x-6^x=2\cdot 4^x.$ (IV, h.)

114. Lahendada võrrand

$\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=4.$ (XV, 3.)

115. Lahendada võrrandisüsteem

$$\begin{cases} 2x^2=y^2+z^2 \\ xyz=64, \end{cases}$$

teades, et $\log_y x$, $\log_z y$ ja $\log_x z$ moodustavad geomeetrilise progressiooni. (XIII, 3.)

116. Leida a ja b väärtused, nii et polünoom

$x^4+(a+b)x^3+(a-b)x^2+(a^2+2b-1)x+a+b+4$

jaguks avaldisega $(x-1)^2$. (IX, 1.)

117. Määrata A ja B nii, et hulkliige $Ax^{15}+Bx^{14}+1$ jaguks avaldisega $(x-1)^2$. (IV, h.)

118. Tõestada, et

$$1^3+2^3+\ldots+n^3=(C_{n+1}^2)^2. \qquad \text{(IV, h.)}$$

119. Tõestada, et avaldis $\frac{(2n)!}{(n!)^2}$ kujutab täisarvu, mis jagub arvuga $n+1$. (I, h.; X, 3.)

120. Lihtsustada avaldis

$$\frac{(1+2i)(3-i)-\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)^4},$$

kui $i^2=-1$. (49/50)

Trigonomeetria.

121. Tõestada, et

$$\tan 20^\circ \tan 40^\circ \tan 80^\circ=\sqrt{3}. \qquad \text{(IX, 1.; XI, 1.)}$$

122. Tõestada, et

$$\tan 20^\circ+\tan 40^\circ+\sqrt{3}\tan 20^\circ \tan 40^\circ=\sqrt{3}. \qquad \text{(VI, 1.)}$$

123. Tõestada, et

$$\cos^2 x+\frac{2\sin\alpha-\sin 2\alpha}{2\sin\alpha+\sin 2\alpha}+\cos^2(x+\alpha)-$$

$$-2\cos x\cos\alpha\cos(x+\alpha)=\tan^2\frac{\alpha}{2}\left(1+4\cos^4\frac{\alpha}{2}\right). \qquad \text{(V, 2.)}$$

124. Tõestada, et

$$\tan 3\alpha-\tan 2\alpha-\tan\alpha=\tan\alpha\tan 2\alpha\tan 3\alpha. \qquad \text{(IX, 2.)}$$

125. Tõestada, et

$$\sin^2 x+\sin^2 y+\sin^2 z-2\cos x\cos y\cos z=1,$$

kui $x+y+z=\pi$. (VII, 2.)

126. Tõestada, et

$$\cot x\cot y+\cot x\cot z+\cot y\cot z=1,$$

kui $x+y+z=\pi$ ja kui ükski nurkadest ei võrdu nulliga. (VIII, 2.)

127. Teisendada logaritmitavaks

$$\cos 11\alpha+3\cos 9\alpha+3\cos 7\alpha+\cos 5\alpha. \qquad \text{(XIII, 2.)}$$

128. Tõestada, et
$$\sin(\alpha+2\beta)=\sin\alpha,$$
kui $\cot(\alpha+\beta)=0$.

129. Tõestada, et
$$\tan(\alpha+\beta)=2\tan\alpha,$$
kui $3\sin\beta=\sin(2\alpha+\beta)$. (XV, 3.)

130. Tõestada, et igas kolmnurgas kehtib seos
$$\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}+\tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2}=\frac{b}{p},$$
kus b on kolmnurga külg ja $2p$ on ümbermõõt. (XII, 3.)

131. Leida nurk α, kui kolmnurga nurgad rahuldavad võrdust
$$\sin\beta+\sin\gamma+\sin\alpha\cos(\alpha+\beta)+\sin\alpha\cos(\alpha+\gamma)=0.$$
(XIV, 3.)

132. Tõestada, et $\cot\frac{\alpha}{2}$, $\cot\frac{\beta}{2}$ ja $\cot\frac{\gamma}{2}$ moodustavad aritmeetilise progressiooni, kui kolmnurga küljed a, b ja c moodustavad aritmeetilise progressiooni. (XIII, 3.)

133. Tõestada, et
$$\cot\frac{x}{2}\geqslant 1+\cot x,$$
kui $0<x<\frac{\pi}{2}$. (IV, h.)

134. Tõestada, et
$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma\geqslant\frac{3}{4},$$
kui α, β ja γ on kolmnurga sisenurgad. (XII, 1.)

135. Arvutada tabeleid kasutamata $\sin 18°45'$. (49/50; XI, 1.)

136. Arvutada tabeleid kasutamata
$$\sin^2 43°+\sin^2 17°+\sin 43°\sin 17°.$$
(VII, 1.)

137. Arvutada tabeleid kasutamata
$$\cos 6°\cos 66°\cos 42°\cos 78°,$$
kui $\sin 18°=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

(VII, 3.)

138. Arvutada $\sin^2 2x$, kui
$$\frac{1}{\tan^2 x}+\frac{1}{\cot^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{1}{\cos^2 x}=7.$$
(IV, h.)

139. Tõestada, et

$\alpha+\beta+\gamma+\delta=45°$,

kui $\cot\alpha=3$, $\cot\beta=5$, $\cot\gamma=7$ ja $\cot\delta=8$. (49/50)

140. Lahendada võrrand

$\sin x+\sin 2x+\sin 3x=1+\cos x+\cos 2x$. (VI, 3.)

141. Lahendada võrrand

$\cos 2x+\cos 6x-\cos 8x=1$. (II, h.)

142. Lahendada võrrand

$\cos^2 x+\cos^2 2x+\cos^2 3x=1$. (X, 3.)

143. Lahendada võrrand

$2\sin^3 x+9\cos^2 x+5\frac{\sin 2x}{\cos x}-12=0$. (II, 1).

144. Lahendada võrrand

$\sin^3 x\cos 3x+\sin 3x\cos^3 x=0{,}375$. (VI, 2.)

145. Lahendada võrrand

$\sin^3 x+\cos^3 x=1-\frac{1}{2}\sin 2x$. (IX, 1.)

146. Lahendada võrrand

$\sin^4 x+\cos^4 x=\cos 4x$. (IX, 3.)

147. Lahendada võrrand

$32\cos^6 x-\cos 6x=1$. (XIII, 1.)

148. Lahendada võrrand

$\sin^8 x+\cos^8 x=\frac{17}{32}$. (X, 1.)

149. Lahendada võrrand

$\tan x+\tan 2x+\tan 3x=0$. (49/50)

150. Lahendada võrrand

$$\frac{(1-\tan 8)(1-\tan x^2\cdot\tan 2x)+(1+\tan 8)(\tan x^2+\tan 2x)}{(1+\tan 8)(1-\tan x^2\cdot\tan 2x)-(1-\tan 8)(\tan x^2+\tan 2x)}=1.$$ (V, 1.)

151. Lahendada võrrand

$$2^{1-n}\cdot n\cdot\frac{\sin x}{\sin\frac{x}{2^n}}\cdot\log_a x=\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\ldots\cos\frac{x}{2^n}.$$ (I, h.)

152. Lahendada võrrand

$$\sin^6 x+\cos^6 x=a$$

ning leida, millise a korral on võrrandil reaalsed lahendid. (XI, 2.)

153. Lahendada võrrand

$$(a-1)\cos x+(a+1)\sin x=2a.$$ (I, h.)

154. Lahendada võrrandisüsteem

$$\begin{cases} 4^{2\sin^2 x+2\cos^2 y-1}=1 \\ 2^{\sin x+3}=\dfrac{16}{2^{\cos y}}. \end{cases}$$ (III, 1.)

155. Lahendada võrrandisüsteem

$$\begin{cases} \sin^2 x+\sin^2 y=\dfrac{3}{4} \\ x+y=\dfrac{5}{12}\pi. \end{cases}$$ (V, 3.)

156. Lahendada võrrandisüsteem

$$\begin{cases} \cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}=\dfrac{1}{2} \\ \cos x\cos y=\dfrac{1}{4}. \end{cases}$$ (II, 2.)

157. Arvutada $\arctan 2+\arctan 3$. (XIII, 1.)

Geomeetria

158. Avaldada täisnurkse kolmnurga täisnurga poolitaja pikkus kaatetite pikkuste kaudu. (IV, h.)

159. Ümber ruudu, mille külg on a, on joonestatud ringjoon ja ühte tekkinud väikestest segmentidest on konstrueeritud ruut (vt. joon. 3, lk. 109). Leida selle ruudu külg. (IX, 1.)

160. Punktid D, E ja F asetsevad lõigu AB keskristsirgel. Nende kaugused lõigust AB on vastavalt $\frac{1}{2}AB$, AB ja $\frac{3}{2}AB$. Leida $\angle ADB+\angle AEB+\angle AFB$. (XIII, 3.)

161. Ringjoon on joonestatud nii, et tema kõõluks on võrdhaarse kolmnurga alus a ning puutujateks selle kolmnurga haarad. Avaldada ringi raadius r kolmnurga aluse a ja kõrguse h kaudu. (IV, h.)

162. Punktide A ja B vaheline kaugus on a. Leida punkti C kaugus sirgest AB, kui $\angle CBA=\frac{\pi}{4}$ ja $\angle BAC=\frac{2}{3}\pi$. (I, 2.)

163. Leida täisnurkse kolmnurga nurgad, kui ümberringjoone ja siseringjoone raadiuste suhe on 5:2. (X, 2.)

164. On antud kolmnurga kaks külge a ja b. Leida kolmas külg, kui antud külgedele tõmmatud mediaanid on omavahel risti. (I, h.)

165. Avaldada kolmnurga nurga α poolitaja kolmnurga külgede a, b ja c kaudu. (X, 3.)

166. Läbi kolmnurga ABC sisepiirkonna mingi punkti on tõmmatud kolm sirget paralleelselt kolmnurga külgedega. Need sirged jaotavad kolmnurga kuueks osaks, millest kolm on kolmnurgad pindaladega S_1, S_2 ja S_3. Leida kolmnurga ABC pindala. (XII, 2.)

167. Korrapärases kolmnurgas ABC vabalt võetud punktist P on tõmmatud ristlõigud PD, PE ja PF vastavalt külgedele BC, AC ja AB. Arvutada

$$\frac{PD+PE+PF}{BD+CE+AF}.$$ (XII, 1.)

168. Ring, ruut ja võrdkülgne kolmnurk on võrdse pindalaga. Leida nende kujundite ümbermõõtude suhe. (VII, 1.)

169. On antud ruut küljepikkusega a. Selle ruudu sisse on joonestatud uus ruut, mille tipud asuvad esimese ruudu külgede keskpunktides. Teise ruudu sisse on joonestatud samal viisil kolmas ruut, kolmanda sisse neljas jne. Leida nende ruutude pindalade summa, eeldades, et see protsess on lõpmatult jätkatav. (IV, h.)

170. Rombi $ABCD$ nürinurga tipust B on tõmmatud ristlõigud BE ja BF vastavalt külgedele AD ja DC. Leida rombi pindala, kui $BE=a$ ja $EF=b$. (IV, 3.)

171. Leida võrdhaarse trapetsi pindala, kui trapetsi kõrgus on h ning haar on nähtav ümberringjoone keskpunktist nurga α all. (XI, 1.)

172. Trapets alustega a ja b ning kõrgusega h on jaotatud alustega paralleelsete lõikude abil kolmeks pindvõrdseks osaks. Leida nende lõikude pikkused ja tekkinud osade kõrgused. (IV, 2.)

173. Ringi raadiusele OA kui diameetrile on ehitatud poolringjoon, mis lõikab raadiust OB punktis C. Leida kaarte AC ja AB pikkuste suhe, kui $\angle AOB < \frac{\pi}{2}$. (I, h.)

174. Leida kesknurk, millele vastava segmendi kõõl on võrdne segmendi sisse joonestatud suurima ringjoone pikkusega. (XII, 1.)

175. Ringjoonest kaugusel a asetsevast punktist on ringjoonele tõmmatud puutuja pikkusega $2a$. Leida selle ringjoone sisse joonestatud korrapärase kolmnurga pindala. (XIII, 1.)

176. Konstrueerida lõik

$$x=\sqrt{a^2+\left(\frac{bc}{b+c}\right)^2}. \qquad (X, 1.)$$

177. On antud nurk ja selles punkt A. Tõmmata läbi punkti A sirge s nii, et tema lõik nurga haarade vahel poolituks antud punktis. (IV, h.)

178. Kolmnurga kaks külge on a ja b. Leida kolmas külg, kui on teada, et ta võrdub temale tõmmatud mediaaniga. Konstrueerida see kolmnurk antud lõikude a ja b abil. (IV, 2.)

179. Konstrueerida täisnurkne kolmnurk, kui on antud hüpotenuus c ja hüpotenuusile tõmmatud kõrgus h. Avaldada antud suuruste kaudu kaatetite pikkused ja selgitada, millise h ja c suhte korral on ülesanne lahenduv. (IX, 1.)

180. Kolmnurga küljed on a, b ja c. Avaldada nende kaudu selle kolmnurgaga pindvõrdse ruudu külg x. Konstrueerida:
1) antud kolmnurk (a, b ja c kaudu);
2) ruudu külg x (saadud avaldise põhjal);
3) otsitav ruut (külje x abil). (VII, 3.)

181. Konstrueerida kolmnurk, kui on antud a, $c - b$ ja γ. (VIII, 2.)

182. Konstrueerida kolmnurk, kui on antud a, $c - b$ ja β. (VIII, 1.)

183. Konstrueerida kolmnurk, kui on antud tema kaks nurka ja ümbermõõt. (VIII, 3.)

184. Konstrueerida kolmnurk, kui on antud tema kaks külge ja on teada, et kolmandale küljele tõmmatud mediaan võrdub antud külgede geomeetrilise keskmisega. (VII, 1.)

185. On antud trapets alustega a ja b. Konstrueerida alustega paralleelne lõik c, mis jaotab antud trapetsi kaheks pindvõrdseks trapetsiks. Selgitada ülesande lahendamise ühesust. (V, 3.)

186. On antud kaks ringi. Konstrueerida kolmas ring, mille pindala on võrdne kahe antud ringi pindalade vahega. (VII, 1.)

187. On antud kolmnurk ja ristkülik. Konstrueerida ristkülik, mille pindala võrdub antud kolmnurga pindalaga ja ümbermõõt antud ristküliku ümbermõõduga. Millistel tingimustel on see ülesanne lahenduv? (VI, 1.)

188. On antud kaks lõikuvat sirget s_1 ja s_2. Konstrueerida ringjoon, mis läbib sirgel s_1 vabalt valitud punkte A ja B ning lõikab sirgest s_2 lõigu pikkusega c. (V, 2.)

189. Konstrueerida etteantud raadiusega ringjoon, mis puudutab antud sirget ja antud ringjoont. (IX, 1.)

190. On antud kolm punkti, mis ei asetse ühel sirgel. Konstrueerida kolm paarikaupa puutuvat ringjoont, mille keskpunktideks on antud punktid. (XII, 1.)

191. Tasapinnal on antud sirge s ning sellest ühel ja samal pool punktid A ja B. Konstrueerida ringjoon, mis läbib antud punkte ja millele sirge s on puutujaks. Millisel juhul on ülesandel üks, millisel juhul kaks lahendit? (IV, 1.)

192. Milliste tõkete vahel võib muutuda geomeetrilise progressiooni tegur, kui selle progressiooni kolm järjestikust liiget on mingi kolmnurga külgede pikkusteks? (XIV, 3.)

193. Tõestada, et

$$\log_{b+c} a + \log_{c-b} a = 2 \log_{b+c} a \, \log_{c-b} a,$$

kui a ja b on täisnurkse kolmnurga kaatetid ja c sama kolmnurga hüpotenuus. (XII, 1.)

194. Tõestada, et täisnurkse kolmnurga hüpotenuusile tõmmatud kõrguse ruudu pöördväärtus on võrdne kaatetite ruutude pöördväärtuste summaga. (IV, h.)

195. Tõestada, et täisnurkses kolmnurgas on kaatetite summa võrdne sise- ja ümberringjoone diameetrite summaga. (IX, 2.)

196. Täisnurkse kolmnurga ABC täisnurga tipust C tõmmatakse kõrgus CK ja nurga ACK poolitaja; lõigaku viimane hüpotenuusi punktis E. Kaateti AC keskpunkt olgu D. Sirgete DE ja CK lõikepunkt olgu F. Tõestada, et lõigud BF ja CE on paralleelsed. (IX, 3.)

197. Tõestada, et kolmnurga nurk $\gamma = \frac{\pi}{4}$, kui kolmnurga pindala

$$S = \frac{a^2+b^2-c^2}{4}.$$ (XIII, 1.)

198. Tõestada, et mistahes kolmnurgas ümberringjoone raadius ei ole väiksem siseringjoone raadiuse kahekordsest. (IX, 1.)

199. Tõestada, et kolmnurga ABC ümberringjoone keskpunkti kaugus küljest BC on 2 korda väiksem kui kõrguste lõikepunkti kaugus tipust A. (XIII, 2.)

200. Punkt M on kolmnurga ABC külje BC keskpunkt. Nurga AMB poolitaja lõikab külge AB punktis E ja nurga AMC poolitaja külge AC punktis D. Tõestada, et kolmnurk AED ja kolmnurk ABC on sarnased. (III, 1.)

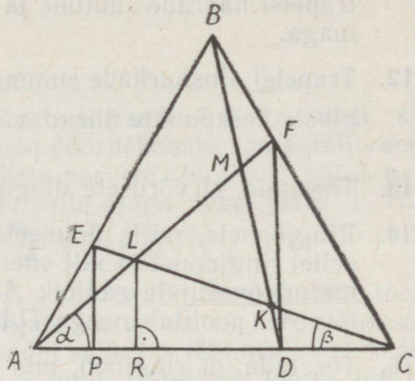
201. Tõestada, et kolmnurk on võrdhaarne, kui tema kaks nurgapoolitajat on võrdsed. (X, 3.)

202. Tõestada, et kolmnurgas ABC

$$l_a^2 = bc - b'c',$$

kus l_a on nurga poolitaja, b' ja c' lõigud, milleks nurgapoolitaja l_a jaotab külje a. (VI, 1.; XIII, 1.)

203. Võrdkülgse kolmnurga ABC küljed on jaotatud kolmeks võrdseks osaks, kusjuures iga tipp on ühendatud vastaskülje ühe jaotuspunktiga joonisel 1 näidatud viisil. Avaldada kolmnurga ABC pindala kolmnurga KLM pindala kaudu. (XIV, 3.)



Joon. 1

204. Rööpkülikus $ABCD$ on punktid K, L, M ja N vastavalt külgede AB, BC, CD ja AD keskpunktideks. Lõigud AL, MB, CN ja DK moodustavad lõikumisel nelinurga. Tõestada, et see nelinurk on rööpkülik ja leida tema pindala, teades, et rööpküliku $ABCD$ pindala on Q. (II, 2.; X, 1.)

205. Tõestada, et rööpküliku sisenurkade poolitajad moodustavad lõikudes ristküliku, mille diagonaalid on võrdsed rööpküliku kahe lähiskülje vahega. (I, 1.)

206. Rööpküliku $ABCD$ tipp C on ühendatud sirglõikude abil külgede AB ja AD keskpunktidega. Tõestada, et need sirglõigud jaotavad diagonaali BD kolmeks võrdseks osaks. (XI, 2.)

207. Rööpküliku $ABCD$ külg AD on jaotatud n võrdseks osaks. Esimene jaotuspunkt P ja tipp B on ühendatud sirgega, mis lõikab diagonaali AC punktis Q. Tõestada, et

$$AQ = \frac{1}{n+1} AC. \qquad \text{(I, h.)}$$

208. Tõestada, et kumeras nelinurgas lähiskülgede keskpunktide ühendamisel tekib rööpkülik. (VIII, 2.)

209. Olgu kumera nelinurga $ABCD$ külgede AB ja CD keskpunktideks vastavalt punktid E ja F. Lõigud AF ja DE lõikuvad punktis G ning lõigud BF ja CE punktis H. Tõestada, et kolmnurkade AGD ja BHC pindalade summa on võrdne nelinurga $EHFG$ pindalaga. (VIII, 1.)

210. On antud rööpkülik $ABCD$. Küljega AB paralleelne sirge lõikab külgi BC ja AD ning diagonaali AC vastavalt punktides K, M ja L. Tõestada, et kolmnurgad ABK ja ALD on pindvõrdsed. (XII, 3.)

211. Tõestada, et trapetsi diagonaalide ruutude summa on võrdne trapetsi haarade ruutude ja aluste kahekordse korrutise summaga. (VIII, 3.)

212. Trapetsi alusnurkade summa on $\frac{\pi}{2}$. Tõestada, et selle trapetsi aluste keskpunkte ühendav lõik on võrdne aluste poolvahega. (XI, 1.)

213. Tõestada, et võrdsete diagonaalidega trapets on võrdhaarne.

214. Ringjoonele, mille diameeter on AB, on tõmmatud puutuja sellel ringjoonel vabalt võetud punktist C. Punktist A on tõmmatud puutujale ristlõik AD ning kõõl AC. Tõestada, et lõik AC poolitab nurga DAB. (49/50)

215. Tõestada, et ringjoon, mis läbib korrapärase viisnurga kaht kõrvuti asetsevat tippu ja tema ümberringjoone keskpunkti, läbib ka selle viisnurga samadest tippudest väljuvate diagonaalide lõikepunkte. (VIII, 1.)

216. Kahel korrapärasel kolmnurksel püramiidil on ühine kõrgus h. Kummagi püramiidi tipp asub teise püramiidi põhja keskpunktis. Püramiidide külgservad lõikuvad. Nurk külgserva ja kõrguse vahel on ühes püramiidis α, teises β. Määrata püramiidide ühise osa ruumala. (XII, 1.)

217. Korrapärase tetraeedri põhja tipud ja kõrguse keskpunkt on ühendatud sirgetega. Tõestada, et need kolm sirget on üksteisega risti. (IV, 2.)

218. Rööptahuka tahkudeks on võrdsed rombid, mille külje pikkus on a ja teravnurk α. Avaldada selle rööptahuka ruumala, kui rööptahukal leidub kaks kolmetahulist nurka, mille kõik tasanurgad on teravnurgad. (IV, h.)

219. Kerakujulise ballooni seinad paksusega a on valmistatud materjalist tihedusega b. Balloon on täidetud vedelikuga, mille tihedus on c. Milline peaks olema ballooni sisemine raadius r, et ballooni asetamisel vedelikku tihedusega d oleks balloon hõljuvas asendis? Millist tingimust peavad rahuldama suurused b, c ja d, et ülesandel oleks mõtet? (XV, 3.)

220. Põrandale on asetatud kolm kera võrdsete raadiustega r, nii et nad puudutavad üksteist. Nendele toetub neljas kera, mille madalaim punkt on põrandast $^3/_2\ r$ kõrgusel. Kui suur on neljanda kera raadius? (49/50)

LAHENDUSED

1. Et vool kannab ühtlaselt edasi nii parve kui ka paati, siis kulub paadil sõiduks sadamast pöördekohani sama palju aega kui sõiduks pöördekohast ujuva parveni. Järelikult sõitis paat kohtamiseni 20 minutit ja et selle ajaga läbis parv 1 kilomeetri, siis on voolu kiirus $\frac{1000}{20}=50\left(\frac{\text{m}}{\text{min}}\right)$.

2. Autol oleks kulunud $1/2$ tundi selle tee läbimiseks, mille töölised käisid jalgsi. Et jalakäijate kiirus on 10 korda väiksem auto kiirusest, siis kulus nendel selle tee läbimiseks 10 korda rohkem aega kui autol, s. o. 5 tundi. Järelikult lõppes töö sel päeval 5 tundi varem.

3. Vladivostokist Moskvasse sõitev rong kohtab vastutulevaid ronge iga 12 tunni järel. Kui eeldada, et Moskvast ja Vladivostokist väljuvad rongid samaaegselt, siis kohtab Vladivostokist Moskvasse sõitev rong esimest vastassuunalist rongi jaamast väljumise momendil ning viimast rongi Moskva jaama saabumise momendil. Seega kohtab Vladivostokist Moskvasse sõitev rong oma teel 41 vastassuunalist rongi. Eeldades aga, et rongid väljuvad Vladivostokist ja Moskvast erinevatel aegadel, saame ülesande vastuseks 40.

4. Olgu kolm järjestikust täisarvu $n-1$, n ja $n+1$, kus n on mistahes täisarv. Nende arvude kuupide summa

$$(n-1)^3+n^3+(n+1)^3=3(n^3+2n).$$

Et saadud korrutis jagub 3-ga, siis ka mistahes kolme järjestikuse täisarvu kuupide summa jagub 3-ga.

5. Olgu vaadeldav murd

$$\frac{(2n-1)^2-(2n_1-1)^2}{(2n-1)^2+(2n_1-1)^2},$$

mida teisendades saame

$$\frac{4(n^2-n-n_1^2+n_1)}{2(2n^2-2n+2n_1^2-2n_1+1)}.$$

Pärast taandamist 2-ga jääb murru lugejasse paarisarv $2(n^2-n-n_1^2+n_1)$, nimetajasse aga paaritu arv $2n^2-2n+$ $+2n_1^2-2n_1+1$. Seega pole esialgse murru teistkordne 2-ga taandamine võimalik. Järelikult saab vaadeldavat murdu taandada 2-ga, kuid ei saa taandada 4-ga.

6. Olgu viis järjestikust täisarvu

$n-2$, $n-1$, n, $n+1$ ja $n+2$,

kus n on mistahes täisarv. Nende arvude ruutude summa

$$(n-2)^2+(n-1)^2+n^2+(n+1)^2+(n+2)^2=5n^2+10.$$

Seega tuleb näidata, et $5n^2+10$ jagub 5-ga, kuid ei jagu 25-ga. Kuna 5-ga jaguvus on ilmne, siis jääb näidata, et $5n^2+10$ ei jagu 25-ga ehk n^2+2 ei jagu 5-ga. Kuna ühegi täisarvu ruut ei lõpe numbriga 3 ega numbriga 8, siis n^2+2 ei jagu 5-ga.

7. Lahendame ülesande kahel viisil.

I. Tähistame $n(n^2+5)=N$. Vaatleme arvu n suhtes järgnevaid võimalusi:

1) kui $n=6k$ (siin ja edaspidi $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), siis $N=6k(36k^2+5)$;

2) kui $n=6k+1$, siis $N=6(6k+1)(6k^2+2k+1)$;
3) kui $n=6k+2$, siis $N=6(3k+1)(12k^2+8k+3)$;
4) kui $n=6k+3$, siis $N=6(2k+1)(18k^2+18k+7)$;
5) kui $n=6k+4$, siis $N=6(3k+2)(12k^2+16k+7)$;
6) kui $n=6k+5$, siis $N=6(6k+5)(6k^2+10k+5)$.

Siit ilmneb, et kõigil vaadeldud juhtudel jagub $n(n^2+5)$ 6-ga. Et nende juhtudega on hõlmatud 6-ga jaguvuse suhtes arvu n kõik võimalused, siis ongi väide tõestatud.

II. Teisendame antud avaldist järgmiselt:

$$n(n^2+5)=n[(n-1)(n+1)+6]=(n-1)n(n+1)+6n.$$

Et kolmest järjestikusest täisarvust vähemalt üks jagub 2-ga ja vähemalt üks 3-ga, siis jagub korrutis $(n-1)n(n+1)$ 6-ga. Kuna ka $6n$ jagub 6-ga, siis $n(n^2+5)$ jagub 6-ga.

8. Avaldis n^5-5n^3+4n on esitatav viie järjestikuse täisarvu korrutisena

$(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$.

Et viie järjestikuse täisarvu hulgas leidub vähemalt üks arv, mis jagub 2-ga, üks arv, mis jagub 3-ga, üks arv, mis jagub 4-ga, ja üks arv, mis jagub 5-ga, siis jagub avaldis $(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$ korrutisega $2\cdot 3\cdot 4\cdot 5$, s. o. 120-ga.

9. Et

$$(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(ab^2+ac^2+a^2b+a^2c+bc^2+b^2c)+$$
$$+6abc,$$

siis

$$a^3+b^3+c^3=(a+b+c)^3-3[ab(a+b)+ac(a+c)+bc(b+c)]+$$
$$+6abc.$$

Kuna $a+b+c$ jagub eelduse põhjal 6-ga ning $6abc$ jagub ka 6-ga, siis jääb veel näidata, et

$$ab(a+b)+ac(a+c)+bc(b+c) \qquad (1)$$

jagub 2-ga.

Ülesande tingimuste kohaselt $a+b+c$ jagub 6-ga. Järelikult on arvud a, b ja c kas kõik paarisarvud või on ainult üks neist paarisarv. Seetõttu on summa (1) igas liidetavas vähemalt üks paarisarvuline tegur. Järelikult jagub summa (1) 2-ga ning avaldis $a^3+b^3+c^3$ 6-ga.

10. Antud murru lugeja ja nimetaja ühistegurid on ka avaldise

$$p(14n+3)+q(21n+4)$$

tegureiks kordajate p ja q mistahes väärtustel. Olgu $p=3$ ja $q=-2$, siis on

$$3(14n+3)-2(21n+4)=1,$$

millest järeldub, et ühistegureiks saavad olla ainult arvud ±1. Seega ei ole antud murd taandatav.

11. Kirjutame ülesandes antud summa kujul

$$(7)^{7^4}+(7)^{7^3} \text{ ehk } (7)^{7^3}(7^{6\cdot7^3}+1).$$

Arv $6\cdot7^3=2058$ jagub 2-ga, kuid ei jagu 4-ga. Et arvu 7 astmed, kus astendajaks on 4-ga mittejaguv paarisarv, lõpeb 9-ga, siis arv $7^{6\cdot7^3}$ lõpeb 9-ga. Seega lõpeb arv $7^{6\cdot7^3}+1$ nulliga ning antud summa jagub 10-ga.

12. Väikseim arv, mis jagub arvudega 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, on nende arvude väikseim ühiskordne 2520. Et otsitava arvu jagamisel 2-ga, 3-ga, . . ., 9-ga tekib jääk, mis on ühe võrra väiksem jagajast, siis on otsitav arv $2520-1$, s. o. 2519.

13. Kuigi ülesandes on nõutud leida

$$\frac{6}{5\cdot7}+\frac{6}{7\cdot9}+\ldots+\frac{6}{19\cdot21}=\sum_{n=1}^{8}\frac{6}{(2n+3)(2n+5)}, \qquad (1)$$

lahendame ülesande kõigepealt üldjuhul, s. t. leiame valemi

$$\sum_{n=1}^{n}\frac{6}{(2n+3)(2n+5)}$$

arvutamiseks. Selleks arvutame osasummad:

$$S_1=\frac{6}{35},$$

$$S_2=\frac{6}{35}+\frac{6}{63}=\frac{12}{45},$$

mille põhjal oletame, et

$$S_n=\frac{6n}{(n+2)\cdot 10+5}=\frac{6n}{5(2n+5)}. \qquad (2)$$

Tõestame valemi (2) õigsuse matemaatilise induktsiooni meetodil. Oletame, et seos (2) kehtib $n=k$ korral, s. t.

$$S_k=\frac{6k}{5(2k+5)},$$

ning näitame, et see kehtib ka $n=k+1$ korral. Selleks leiame

$$S_{k+1}=\frac{6}{5\cdot 7}+\frac{6}{7\cdot 9}+\ldots+\frac{6}{(2k+3)(2k+5)}+\frac{6}{(2k+5)(2k+7)}=$$

$$=S_k+\frac{6}{(2k+5)(2k+7)}=\frac{6(k+1)}{5(2k+7)}.$$

Pole raske veenduda selles, et viimane avaldis on saadav valemist (2), asendades seal n summaga $k+1$. Seega seose (2) kehtivusest mingi täisarvu $n=k$ korral järeldub selle kehtivus järgneva täisarvu $n=k+1$ korral. Et seos (2) kehtis $n=2$ korral, siis kehtib ta äsja tõestatu põhjal $n+1=2+1=3$ korral. Samuti järgneb seose kehtivusest $n=3$ korral seose kehtivus $n+1=4$ korral. Jne. Seega kehtib seos (2) mistahes positiivse täisarvu n korral.

Kasutame äsja tõestatud valemit (2) ülesandes antud summa (1) arvutamiseks.

$$\sum_{n=1}^{8}\frac{6}{(2n+3)(2n+5)}=\frac{6n}{5(2n+5)}=\frac{16}{35}.$$

14. Et $1000\,000=10^6$, siis ülesande tingimuste kohaselt $1000\,000=(4+4+\sqrt{4})^{4+\sqrt{4}}$.

15. Et kahe neljakohalise arvu summa on viiekohaline arv, siis peab summa esimene number olema 1, s. t. $m=1$. Neljandate järkude liitmisel kas

$s+m+1=10+o$ või $s+m=10+o$

ehk, arvestades, et $m=1$,

$s-o=8$ (1) või $s-o=9$ (2).

Seos (1) kehtib, kui $s=9$ ja $o=1$ või $s=8$ ja $o=0$. Et aga $m=1$, siis vastavalt ülesande tingimustele $o \neq 1$. Juhul, kui $s=8$ ja $o=0$, järeldub seostest

$$e+o+1=10+n \text{ või } e+o=10+n,$$

et

$$e+n=9 \text{ või } e-n=10.$$

Võrdus $e+n=9$ saab kehtida, kui $e=9$ ja $n=0$. Et aga o on juba null, siis $n \neq 0$ ning $e \neq 9$. Ilmselt ei saa kehtida ka võrdus $e-n=10$. Järelikult ei saa kehtida seos (1) ning jääb üle, et peab kehtima seos (2), s. t. peavad leiduma niisugused s ja o väärtused, et $s-o=9$. Siit $s=9$ ja $o=0$. Seni saadud tulemuste põhjal

$$\begin{array}{r} 9\ e\ n\ d \\ 1\ o\ r\ e \\ \hline 1\ o\ n\ e\ y. \end{array}$$

Viimasest ilmneb, et $n+r \geqslant 10$, sest vastasel juhul peaks $e=n$ (vt. kolmandate järkude liitmist), mis on aga vastuolus ülesande tingimustega. Järelikult $n=e+1$. Arvestades eelnevat, saame võrdustest

$$n+r=10+e \text{ ja } n+r+1=10+e,$$

et $r=9$ või $r=8$. Eespool aga leidsime, et $s=9$, järelikult $r \neq 9$. Seega $r=8$ ning $n+r+1=10+e$. Viimasest järeldub, et esimeste järkude liitmisel toimub ülekanne, s. t. $d+e=10+y$. Arvestades varem leitud suurusi, saab e olla kas 2, 3, 4, 5, 6 või 7 ning n vastavalt kas 3, 4, 5, 6, 7 või 8. Võimalus $e=7$ ja $n=8$ on vastuoluline, kuna $r=8$. Et erinevatele tähtedele vastavad erinevad numbrid ja

$$d+e=10+y \text{ ning } d+e>11, \text{ siis}$$

ainsateks sobivateks väärtusteks on $e=5$, $n=6$ ja $d=7$. Seega

$$\begin{array}{r} 9\ 5\ 6\ 7 \\ 1\ 0\ 8\ 5 \\ \hline 1\ 0\ 6\ 5\ 2. \end{array}$$

M ä r k u s. Vaadeldud tüüpi ülesannete lahendamist vt.

1) Ü. Kaasik. Loogilistest keerdülesannetest. «Noorus», 1963, nr. 5, lk. 49—51.

2) Tartu Riiklik Ülikool. Mittestatsionaarne matemaatikakool. 1966, nr. 6.

16. Teiste järkude liitmisel ilmneb, et $e=0$ või $e=5$. Samast järeldub, et $y+n+n<10$. Seega $2n+y=y$, millest $n=0$. Järelikult $e=5$ ning $t+2e=10+t$, s. t. toimub ühe ühiku ülekanne järgnevasse, s. o. kolmandasse järku.

Et viiendate järkude liitmisel saadakse summaks s, aga mitte f, siis $f+1=s$.

Kolmandate järkude liitmisel saab tulla ülekanne kas 1 või 2, seega peab täht o olema kas 9 või 8, sest vastasel juhul ei toimuks neljandate järkude liitmisest ülekannet viiendasse järku. Järelikult

$o+1=10+i$ või $o+2=10+i$,

millest

$o-i=9$ või $o-i=8$.

Viimaste võrduste põhjal

kas $o=9$ ja $i=0$
või $o=9$ ja $i=1$
või $o=8$ ja $i=0$.

Kuna n on juba 0, siis viimasest kolmest võimalusest jääb püsima vaid teine, s. o. $o=9$ ja $i=1$. Ühtlasi järeldub siit, et kolmandate järkude liitmisel toimub kahe ühiku ülekanne neljandasse järku, s. t.

$r+2t+1=20+x$.

Siit

$r+2t=19+x$,

millest

$r+2t \geqslant 21$.

Viimasest võrratusest leiame, et suuruse t jaoks sobivad vaid väärtused 7 ja 8. Kasutades seost

$r+2t=19+x$,

koostame järgmise tabeli:

t	7	8	8
r	8	6	7
x	3	3	4

Seose $s=f+1$ põhjal $f=2$ ja $s=3$ või $f=3$ ja $s=4$. Sel juhul sobivad tabelis olevatest väärtustest vaid

$t=8$, $r=7$ ja $x=4$

ning vastavalt

$f=2$ ja $s=3$.

Seega

$$\begin{array}{r} 29786 \\ +\quad 850 \\ 850 \\ \hline 31486. \end{array}$$

17.

Ühekohalisi	arve on	9,	nendes numbreid		9,
kahekohalisi	„ „	90,	„	„	180,
kolmekohalisi	„ „	900.	„	„	2700,
neljakohalisi	„ „	9000,	„	„	36000,
viiekohalisi	„ „	90000,	„	„	450000,
kuuekohalisi	„ „	900000.	„	„	5400000.

Võttes jada elementideks kõigi järjestikuste täisarvude numbrid kuni kuuekohaliste arvudeni, neist esimene (100000) kaasa arvatud, saame $488889+6=488895$ liiget (numbrit). Kuni miljonenda liikmeni jääb puudu 511105 liiget (numbrit), millest saab moodustada $511105:6=85184$ (jääk 1) kuuekohalist arvu. Seega on viimane kuuekohaline arv, mille kõik numbrid tuleb võtta jada elementideks, $100000+85184=$ $=185184$. Et jagamisel oli jääk 1, siis tuleb järgnevast arvust (185185) võtta vaid esimene number, mis on 1.

Järelikult seisab jadas miljonendal kohal number 1.

18. Tegurid 50 ja 100 annavad korrutise lõppu kumbki kaks nulli, ülejäänud täiskümned aga igaüks ühe nulli. Seega annavad täiskümned 10—100 korrutise lõppu 12 nulli. Numbriga 5 lõppevatest teguritest 25 ja 75 annavad korrutise lõppu kumbki 2 nulli, ülejäänud aga igaüks ühe nulli. Seega annavad kõik 5-ga lõppevad tegurid korrutise lõppu 12 nulli. Järelikult kogu korrutis lõpeb 24 nulliga.

19. Viga tekkis võrduse $a(b-a)=(b-a)(b+a)$ jagamisel vahega $(b-a)$, mis on null.

20. Et

$$(a-b)(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)(a^8+b^8)(a^{16}+b^{16})(a^{32}+b^{32})\times$$
$$\times(a^{64}+b^{64})=a^{128}-b^{128},$$

siis otsitav jagatis on $a-b$.

4*

21. Viga tekkis juurimisel, kus võrduse paremast poolest on võetud aritmeetiline juur, vasakust poolest aga algebraline juur.

M ä r k u s. Aritmeetilisest juurest vt.

1) S. Baron. Mõningatest vigadest keskkooli matemaatika õpetamisel. Matemaatika metoodiliste artiklite kogumik II, Tallinn, 1964, lk. 13—15.

2) В. Л. Гончаров. Начальная алгебра, Москва, 1960, стр. 309—310.

3) С. И. Новоселов. Специальный курс элементарной алгебры, Москва, 1958, стр. 112—113.

22. Teisendame antud avaldist järgmiselt:

$$a^8+a^4b^4+b^8=(a^4+b^4)^2-a^4b^4=$$
$$=(a^4+b^4-a^2b^2)(a^4+b^4+a^2b^2)=$$
$$=[(a^2+b^2)^2-a^2b^2][a^2+b^2)^2-3a^2b^2]=$$
$$=(a^2+b^2-ab)(a^2+b^2+ab)(a^2+b^2-\sqrt{3}\,ab)(a^2+b^2+\sqrt{3}\,ab).$$

Et sulgavaldised pole reaalarvude vallas tegureiks lahutatavad, siis on ülesanne lahendatud.

23. Teisendame antud avaldist järgmiselt:

$$(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3=[(a+b+c)^3-a^3]-(b^3+c^3)=$$
$$=(b+c)[(a+b+c)^2+a(a+b+c)+a^2-b^2+bc-c^2]=$$
$$=(b+c)(3a^2+3ab+3bc+3ac)=3(b+c)[(a+b)a+c(a+b)]=$$
$$=3(a+b)(b+c)(a+c).$$

24. Lahendame ülesande kahel viisil.

I. Kasutades aritmeetilise progressiooni summa valemit, arvutame võrduse vasakul poolel olevate liikmete summa S_v ja paremal poolel olevate liikmete summa S_p:

$$S_v=\frac{n^2+(n^2+n)}{2}(n+1)=n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{n}{2},$$

$$S_p=\frac{(n^2+n+1)+(n^2+2n)}{2}n=n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{n}{2}.$$

Et $S_v=S_p$, siis on väide tõestatud.

II. Kirjutame võrduse vasakul poolel oleva esimese liikme n^2 summana $n+n+\ldots+n$, kus liidetavaid on n. Lisame saadud summast ühe liidetava kaupa suuruse n võrduse vasaku poole igale ülejäänud liidetavale, mida on arvult n. Tulemusena saamegi võrduse paremal poolel seisva avaldise.

25. Teisendame antud avaldist järgmiselt:

$$a(a+1)(a+2)(a+3)+1=a^4+6a^3+11a^2+6a+1=$$
$$=(a^2+3a)^2+2(a^2+3a)+1=(a^2+3a+1)^2.$$

26. Antud võrdust kahega korrutades ja sobivalt rühmitades saame

$$(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2=0.$$

Et ruutude summa saab olla null vaid siis, kui liidetavad ise on nullid, siis järelikult

$$a=b=c.$$

27. Ülesandes esitatud väite tõestamiseks on tarvis näidata, et antud hulkliiget saab kirjutada korrutisena, milles esinevad tegurid $(b-c)$, $(c-a)$ ja $(a-b)$. Selleks teisendame hulkliiget järgmiselt:

$$a^3(b^2-c^2)+b^3(c^2-a^2)+c^3(a^2-b^2)=a^3(b+c)(b-c)+$$
$$+b^3c^2-b^3a^2+c^3a^2-c^3b^2=a^3(b+c)(b-c)+b^2c^2(b-c)-$$
$$-a^2(b^3-c^3)=(b-c)(a^3b+a^3c+b^2c^2-a^2b^2-a^2bc-a^2c^2)=$$
$$=(b-c)(a-b)(a^2b+a^2c-bc^2-ac^2)=$$
$$=-(b-c)(a-b)(c-a)[ac+b(c+a)]=$$
$$=-(b-c)(a-b)(c-a)(ac+ab+bc).$$

28. Tõstes võrduse $a+b+c=0$ ruutu, saame

$$a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)=0$$

ja et

$$a^2+b^2+c^2=a,$$

siis

$$a=-2(ab+ac+bc).$$

Sellest võrdusest saame, et

$$a^2=4(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)+2abc(a+b+c)$$

ehk

$$\frac{a^2}{4}=a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2.$$

Tõstes võrduse $a^2+b^2+c^2=a$ ruutu, saame, et

$$a^4+b^4+c^4=a^2-2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2),$$

kust eelmise võrduse põhjal

$$a^4+b^4+c^4=\frac{a^2}{2}.$$

29. Olgu antud ruutvõrrandi lahendid x_1 ja x_2. Siis $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ ja $x_1x_2=\frac{c}{a}$. Otsitava ruutvõrrandi lahendid on $-\frac{1}{x_1}$ ja $-\frac{1}{x_2}$. Kasutades Vieta valemeid leiame otsitava võrrandi kordajad:

$$-\left(-\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right)=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}=-\frac{b}{c},$$

$$\left(-\frac{1}{x_1}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x_2}\right)=\frac{1}{x_1x_2}=\frac{1}{\frac{c}{a}}=\frac{a}{c}.$$

Otsitav võrrand on

$$x^2-\frac{b}{c}x+\frac{a}{c}=0$$

ehk

$$cx^2-bx+a=0.$$

30. Vieta valemite põhjal

$$\begin{cases} pq=q \\ p+q=-p. \end{cases}$$

Vaadeldes saadud võrdusi võrrandisüsteemina suuruste p ja q suhtes saame, et

$p=q=0$ või $p=-q=1$.

31. Et $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ ning $x_1x_2=\frac{c}{a}$, siis

$$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{(x_1x_2)^2}=\frac{b^2-2ac}{c^2}$$

ja

$$x_1^4+x_1^2x_2^2+x_2^4=(x_1^2+x_2^2)^2-(x_1x_2)^2=$$
$$=[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2]^2-(x_1x_2)^2=\frac{(b^2-2ac)^2-a^2c^2}{a^4}.$$

32. Teisendame antud võrrandi tegurite rühmitamise teel kujule

$$(x^2+5x)(x^2+5x+6)=8.$$

Tehes nüüd asenduse

$$x^2+5x+3=y,$$

saame võrrandi

$$(y-3)(y+3)=8,$$

millest

$$y_{1,2}=\pm\sqrt{17}.$$

Seega

$$x_{1,2}=-2{,}5\pm\sqrt{3{,}25+\sqrt{17}},$$
$$x_{3,4}=-2{,}5\pm\sqrt{3{,}25-\sqrt{17}}.$$

33. Teisendades antud võrrandi kujule

$$(x^2+x-2)(x^2+x-12)=144$$

ning tehes asenduse

$$x^2+x-2=y,$$

saame esialgsele võrrandile kuju

$$y(y-10)=144,$$

millest

$$y_1=-8 \text{ ja } y_2=18.$$

Esialgse võrrandi lahendid on

$$x_1=4,\ x_2=-5.$$

34. Korrutades antud võrrandit arvuga 16, saame

$$(8x+7)^2(8x+6)(8x+8)=72.$$

Tehes viimases asenduse

$$8x+7=y$$

ning avades sulud, saame ruutvõrrandi y^2 suhtes

$$y^4-y^2-72=0.$$

Viimase võrrandi lahenditest

$$(y^2)_1=9,\ (y^2)_2=-8.$$

Teine on vastuoluline. Seega

$$y_1=3 \text{ ja } y_2=-3$$

ning vastavalt

$$x_1=-0{,}5,\ x_2=-1{,}25.$$

35. Kirjutame antud võrrandi kujul

$$(3x+2)^4-(2x+3)^4=(4x-2)^4-(2x-4)^4.$$

Kasutades ruutude vahe valemit, teisendame võrrandi mõlemad pooled korrutiseks

$$5(x-1)(x+1)(13x^2+24x+13)=12(x-1)(x+1)(20x^2-32x+20).$$

Siit

$$x_1=1,\ x_2=-1$$

ning

$$25x^2-72x-25=0,$$

millest

$$x_{3,4}=1{,}44\pm\sqrt{3{,}0736}.$$

36. Jagades antud võrrandi avaldisega x^4 ($x=0$ ei ole lahendiks) ning rühmitades liikmed sobivalt, saame võrrandi

$$\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)+5\left(x^3-\frac{1}{x^3}\right)-20\left(x-\frac{1}{x}\right)-1=0. \tag{1}$$

Tähistades

$$x-\frac{1}{x}=y$$

ja leides y^2, y^3 ning y^4, saame viimastest seosed

$$x^3-\frac{1}{x^3}=y^3+3y \text{ ja } x^4+\frac{1}{x^4}=y^4+4y^2+2,$$

mis lubavad võrrandi (1) kirjutada kujul

$$y^4+5y^3+4y^2-5y+1=0. \tag{2}$$

Võrrandit (2) teisendame analoogiliselt esialgsega: jagame teda avaldisega y^2 ($y\neq 0$), rühmitame, teeme asenduse

$$y-\frac{1}{y}=z,$$

mille tulemusena saame võrrandi

$$z^2+5z+6=0. \tag{3}$$

Leidnud, et $z_1=-2$ ja $z_2=-3$, arvutame asendusvalemite $x-\frac{1}{x}=y$ ja $y-\frac{1}{y}=z$ abil esialgse võrrandi lahendid. Need on

$$x_{1,2}=\frac{-(1-\sqrt{2})\pm\sqrt{7-2\sqrt{2}}}{2};\quad x_{3,4}=\frac{-(1+\sqrt{2})\pm\sqrt{7+2\sqrt{2}}}{2};$$

$$x_{5,6}=\frac{-3(-\sqrt{13})\pm\sqrt{38-6\sqrt{13}}}{4};\quad x_{7,8}=\frac{-(3+\sqrt{13})\pm\sqrt{38+6\sqrt{13}}}{4}.$$

Märkus. Vaadeldud võrrand kuulub nn. *pöördvõrrandite* hulka, mille kohta vt.:

1) H. Espenberg. Pöördvõrrandid. Matemaatika metoodiliste artiklite kogumik II, Tallinn, 1964, lk. 81—83.
2) G. Kangro. Kõrgem algebra, Tallinn, 1962, lk. 295—299.
3) С. И. Новоселов. Специальный курс элементарной алгебры, Москва, 1958, стр. 329—331.

37. Tõstes võrrandi mõlemad pooled kuupi ning lihtsustades, saame võrrandi

$$\sqrt[3]{x(2x-3)}\left[\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2x-3}\right]=3(x-1).$$

Et nurksulgudes olev avaldis on esialgse võrrandi vasak pool, siis

$$\sqrt[3]{12(x-1)(2x-3)}=3(x-1),$$

millest

$$(x-1)(x-3)^2=0$$

ja

$$x_1=1, \; x_2=3.$$

38. Esitame kaks lahendusviisi.

I. Jättes ühe juuravaldise vasakule, tõstame võrrandi ruutu ja koondame. Samal viisil vabaneme järelejäänud keerulisemast juuravaldisest. Koondamisel saame identsuse $0=0$. Sellest järeldub, et võrrandit rahuldavad kõik need x väärtused, mille korral võrrandis esinevad juured on aritmeetilised, s. t. juurealused avaldised on mittenegatiivsed:

$$x-1 \geqslant 0; \quad x+3-4\sqrt{x-1} \geqslant 0; \quad x+8-6\sqrt{x-1} \geqslant 0.$$

Et kahe mittenegatiivse arvu summa peab võrduma ühega (vt. võrrandit), lisanduvad eelnevatele tingimustele veel kaks võrratust

$$0 \leqslant \sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} \leqslant 1 \text{ ja } 0 \leqslant \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} \leqslant 1.$$

Viimaste võrratuste lahendamisel ilmneb, et need ei anna eelnevatele tingimustele uusi juurde.

Esimesest kolmest võrratusest saame:

$$x \geqslant 1; \quad 2 \leqslant x \leqslant 10; \quad 5 \leqslant x \leqslant 17.$$

Seega on antud võrrandi lahenditeks kõik need x väärtused, mille korral on rahuldatud võrratus $5 \leqslant x \leqslant 10$.

II. Esialgse võrrandi saab kirjutada kujul

$$\sqrt{(\sqrt{x-1}-2)^2}+\sqrt{(\sqrt{x-1}-3)^2}=1$$

ehk, arvestades ainult aritmeetilisi juuri,

$$|\sqrt{x-1}-2|+|\sqrt{x-1}-3|=1.$$

Võrrandi edasisel lahendamisel tuleb vaadelda nelja juhtumit:

1) $\sqrt{x-1}-2 \geqslant 0$ ja $\sqrt{x-1}-3 \geqslant 0$, s. t. $x \geqslant 5$ ja $x \geqslant 10$,

millest $x \geqslant 10$. Sel juhul saab võrrand kuju

$$\sqrt{x-1}-2+\sqrt{x-1}-3=1,$$

millest

$$x=10.$$

2) $\sqrt{x-1}-2\geqslant 0$ ja $\sqrt{x-1}-3\leqslant 0$, s. t. $x\geqslant 5$ ja $x\leqslant 10$, millest $5\leqslant x\leqslant 10$.

Võrrand

$$\sqrt{x-1}-2-\sqrt{x-1}+3=1$$

on samasus. Järelikult on lahendeiks kõik x väärtused, mis rahuldavad võrratust $5\leqslant x\leqslant 10$.

3) $\sqrt{x-1}-2\leqslant 0$ ja $\sqrt{x-1}-3\geqslant 0$, s. t. $x\leqslant 5$ ja $x\geqslant 10$.

Jõudsime vastuolule, seega võrrandil

$$-\sqrt{x-1}+2+\sqrt{x-1}-3=1$$

lahendeid ei ole.

4) $\sqrt{x-1}-2\leqslant 0$ ja $\sqrt{x-1}-3\leqslant 0$, s. t. $x\leqslant 5$, $x\leqslant 10$, millest $x\leqslant 5$.

Võrrandi

$$-\sqrt{x-1}+2-\sqrt{x-1}+3=1$$

lahendiks on $x=5$.

Seega on esialgse võrrandi lahendeiks x väärtused, mis rahuldavad võrratust $5\leqslant x\leqslant 10$.

39. Vabanedes juurtest, saame võrrandi

$$x^4-2ax^2-x+a^2-a=0,$$

mida vaatleme ruutvõrrandina a suhtes:

$$a^2-(2x^2+1)a+x^4-x=0.$$

Viimase võrrandi lahendid on:

$$a_1=x^2+x+1,\quad a_2=x^2-x.$$

Vaadeldes viimati saadud seoseid suuruse x suhtes ruutvõrranditena, saame antud võrrandi lahendeiks:

$$x_{1,2}=0{,}5\pm\sqrt{a+0{,}25},$$

$$x_{3,4}=-0{,}5\pm\sqrt{a-0{,}25}.$$

40. Süsteem on teisendatav kujule

$$\begin{cases} 2(x+y)(x^2-xy+y^2)=2 \\ y(x+y)^2=2. \end{cases}$$

Lahutades siin esimesest võrrandist teise ja arvestades, et $x+y \neq 0$, saame

$$2x^2-3xy+y^2=0$$

ehk

$$(y-2x)(y-x)=0.$$

Viimasest

$$y_1=2x \text{ ja } y_2=x.$$

Seega antud võrrandisüsteemi lahendite hulk * on:

$$\{(\tfrac{1}{3}\sqrt[3]{3};\ \tfrac{2}{3}\sqrt[3]{3}),\ (\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{4};\ \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{4})\}.$$

41. Tehes antud süsteemi esimeses võrrandis asenduse

$$x+y=z,$$

saame ruutvõrrandi

$$2z^2+2z+1=25,$$

millest

$$z_1=3,\ z_2=-4.$$

Kasutades eespool tehtud asendust ning antud süsteemi teist võrrandit, saame võrrandisüsteemid:

$$\begin{cases} x+y=3 \\ x^2-y^2=3, \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y=-4 \\ x^2-y^2=3, \end{cases}$$

millest leiame lahendite hulga

$$\{(2;\ 1),\ (-2\tfrac{3}{8};\ -1\tfrac{5}{8})\}.$$

42. Jagades süsteemi esimese võrrandi teisega $(x-y \neq 0)$, saame võrrandi

$$\frac{9}{(x+y)^2}=\frac{5}{x^2+y^2}.$$

Vaadeldes viimast ruutvõrrandina x suhtes, leiame, et

$$x_1=2y,\ x_2=\frac{y}{2}.$$

Antud võrrandisüsteemi lahendite hulk on:

$$\{(2;\ 1),\ (-1;\ -2)\}.$$

43. Lahutades kahekordsest esimesest võrrandist teise võrrandi, saame xy suhtes ruutvõrrandi

$$(xy)^2-5xy+6=0,$$

* Siin ja edaspidi on võrrandisüsteemi lahendid esitatud sulgudes hulkadena.

mille lahenditeks on

$(xy)_1=2, \ (xy)_2=3.$

Asendades saadud tulemused esialgsetesse võrranditesse, leiame antud võrrandisüsteemi lahendite hulga:

$$\left\{(\sqrt{2};\ \sqrt{2}),\ (-\sqrt{2};\ -\sqrt{2}),\ \left(\frac{6\sqrt{17}}{17};\ \frac{\sqrt{17}}{17}\right),\right.$$
$$\left.\left(-\frac{6\sqrt{17}}{17};\ -\frac{\sqrt{17}}{17}\right)\right\}.$$

44. Tähistades

$\frac{x+y}{xy}=u$ ja $\frac{x-y}{xy}=v,$

saame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} u+\dfrac{1}{u}=\dfrac{a^2+1}{a} \\ v+\dfrac{1}{v}=\dfrac{b^2+1}{b}. \end{cases}$$

Siit $u_1=a,\ u_2=\frac{1}{a},\ v_1=b,\ v_2=\frac{1}{b}.$

Lahendame nüüd võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{xy}=u \\ \dfrac{x-y}{xy}=v, \end{cases}$$

x ja y suhtes:

$x=\frac{2}{u-v},\ y=\frac{2}{u+v}.$

Et u ja v võivad omandada teineteisest sõltumatult varem leitud väärtusi, siis

1) kui $\begin{cases} u=a \\ v=b, \end{cases}$ siis $\begin{cases} x_1=\dfrac{2}{a-b} \\ y_1=\dfrac{2}{a+b} \end{cases}$ tingimusel $|a|\neq|b|,$

2) kui $\begin{cases} u=\dfrac{1}{a} \\ v=\dfrac{1}{b}, \end{cases}$ siis $\begin{cases} x_2=\dfrac{2ab}{b-a} \\ y_2=\dfrac{2ab}{a+b} \end{cases}$ tingimusel $|a|\neq|b|,$

3) kui $\begin{cases} u=a \\ v=\dfrac{1}{b}, \end{cases}$ siis $\begin{cases} x_3=\dfrac{2b}{ab-1} \\ y_3=\dfrac{2b}{ab+1} \end{cases}$ tingimusel $|ab|\neq 1$,

4) kui $\begin{cases} u=\dfrac{1}{a} \\ v=b, \end{cases}$ siis $\begin{cases} x_4=\dfrac{2a}{1-ab} \\ y_4=\dfrac{2a}{1+ab} \end{cases}$ tingimusel $|ab|\neq 1$.

45. Teisendades antud süsteemi kujule

$$\begin{cases} (x+y)-\sqrt{xy}=7 \\ \sqrt{xy}(x+y)=78 \end{cases}$$

ja tähistades

$x+y=t$ ning $\sqrt{xy}=v$,

saame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} t-v=7 \\ vt=78, \end{cases}$$

mille lahendiks on

$t=13$, $v=6$

($t=-6$, $v=-13$ ei sobi, sest $x+y>0$).

Antud võrrandisüsteemi lahendite hulk on:

$\{(9; 4), (4, 9)\}$.

46. Anname teisele võrrandile kuju

$$\frac{xy+xz+yz}{xyz}=1$$

ehk

$xy+xz+yz=xyz.$

Et

$xy+xz+yz=27,$

siis

$xyz=27,$

millest

$$yz=\frac{27}{x}.$$

Teisendades kolmanda võrrandi kujule

$$x(y+z)+yz=27$$

ning asendades siin

$$y+z=9-x \text{ ja } yz=\frac{27}{x},$$

saame kuupvõrrandi

$$x^3-9x^2+27x+27=0$$

ehk

$$(x-3)^3=0,$$

millest $x=3$.

Süsteemi lahendite hulk on $\{(3;\ 3;\ 3)\}$.

47. Et $abc \neq 0$, siis ka $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$ ning antud võrrandisüsteemi võib esitada kujul

$$\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{a} \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{1}{b} \\ \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{c}. \end{cases}$$

Siit

$$\left(\frac{2abc}{ac+bc-ab},\ \frac{2abc}{ab+bc-ac},\ \frac{2abc}{ac+ab-bc}\right),$$

kus $ac+bc-ab \neq 0$, $ab+bc-ac \neq 0$ ja $ab+ac-bc \neq 0$.

48. Kirjutame esimese võrrandi kujul

$$x+y=a-z$$

ja tõstame selle mõlemad pooled ruutu ning kuupi. Tulemusena saame kaks uut võrrandit

$$(x^2+y^2)+2xy=a^2-2az+z^2$$

ja

$$(x^3+y^3+z^3)+3xy(x+y)=a^3-3a^2z+3az^2.$$

Tehes vastavad asendused süsteemi esimesest, teisest ja kolmandast võrrandist ning koondades, saame süsteemi

$$\begin{cases} xy=z(z-a) \\ xy(a-z)=az^2-a^2z. \end{cases}$$

Elimineerides korrutise xy, jõuame võrrandini

$$z^2(z-a)=0,$$

millest

$$z_1=a,\ z_2=0.$$

Leides vastavad x ja y väärtused, saame esialgse süsteemi lahendite hulga

$$\{(0;\ 0;\ a),\ (0;\ a;\ 0),\ (a;\ 0;\ 0)\}.$$

49. Tõstes esimese võrrandi ruutu ning kuupi ja rühmitades liikmed sobivalt, saame võrrandid:

$$(x^2+y^2)+2xy=25z^2$$

ja

$$(x^3+y^3)+3xy(x+y)=125z^3.$$

Arvestades siin esialgseid võrrandeid leiame, et

$$2xy=25z^2-13z$$

ja

$$3xyz=25z^3-7z.$$

Elimineerides viimastest xy, saame võrrandi

$$25z^3-39z^2+14z=0,$$

mille lahendid on $z_1=0$, $z_2=1$, $z_3=\frac{14}{25}$. Antud võrrandisüsteemi lahendite hulk on:

$$\{(0;\ 0;\ 0),\ (2;\ 3;\ 1),\ (3;\ 2;\ 1),$$

$$\left(\frac{7+\sqrt{42}}{5};\ \frac{7-\sqrt{42}}{5};\ \frac{14}{25}\right),$$

$$\left.\left(\frac{7-\sqrt{42}}{5};\ \frac{7+\sqrt{42}}{5};\ \frac{14}{25}\right)\right\}.$$

50. Tõstes süsteemi esimese võrrandi ruutu, saame

$$(x^2+y^2+z^2+u^2)+2(xy+xu+zy+zu)+2xz+2yu=64.$$

Arvestades siin süsteemi teist ning kolmandat võrrandit, jõuame võrrandini

$$xz+yu=6.$$

Edasi moodustame süsteemi

$$\begin{cases}(xz)+(yu)=6\\(xz)(yu)=9,\end{cases}$$

mille lahenditeks on

$$xz=3 \text{ ja } yu=3.$$

Neist

$$z=\frac{3}{x} \text{ ja } u=\frac{3}{y}.$$

Kasutades saadud võrdusi, esitame esialgse võrrandisüsteemi teise võrrandi kujul

$$x^2+y^2+\frac{9}{x^2}+\frac{9}{y^2}=20 \qquad (1)$$

ehk

$$(x^2+y^2)+9\cdot\frac{x^2+y^2}{x^2y^2}=20$$

ja kolmanda võrrandi kujul

$$xy+3\frac{x}{y}+3\frac{y}{x}+\frac{9}{xy}=16$$

ehk

$$xy+3\cdot\frac{x^2+y^2}{xy}+\frac{9}{xy}=16. \qquad (2)$$

Kasutades Horneri skeemi (vt. ülesande 116 lahenduse juures olevat märkust), leiame, et

$$(xy)_1=1,\ (xy)_2=9,\ (xy)_{3,4}=3.$$

Arvestades viimati leitud tulemusi ja seoseid $x+y+z+u=8$, $xz=3$ ja $yu=3$, saame antud süsteemi lahendite hulga

$$\{(3;\ 3;\ 1;\ 1),\ (1;\ 3;\ 3;\ 1),\ (3;\ 1;\ 1;\ 3),\ (1;\ 1;\ 3;\ 3)\}.$$

51. Pärast sulgude avamist ja teisendamist saab teise võrrandi kirjutada kujul

$$(x+y+z)^2+xy+xz+yz=1$$

ehk, arvestades süsteemi esimest võrrandit,

$$xy+xz+yz=-3. \qquad (1)$$

Kirjutades süsteemi kolmanda võrrandi kujul

$$x(xy+xz)+y(yz+yx)+z(zx+zy)=-6$$

ning arvestades võrdust (1), saame

$$x(3+yz)+y(3+xz)+z(3+xy)=6$$

ehk

$$x+y+z+xyz=2,$$

millest

$$xyz=0.$$

Siit kas $x=0$, $y=0$ või $z=0$ ning antud süsteemi lahendite hulk on:

$$\{(0;3;-1),\ (0;-1;3),\ (-1;3;0),\ (3;-1;0),\ (-1;0;3),\ (3;0;-1)\}.$$

52. Avaldades esimesest võrrandist otsitava x ning asendades selle teise võrrandisse, saame

$$y^2-2y+1+z^2=0 \text{ ehk } (y-1)^2+z^2=0.$$

Et positiivsete suuruste summa on null, siis peavad need suurused ise nulliga võrduma. Seega $y=1$ ja $z=0$.
Esialgse võrrandisüsteemi lahendite hulk on

$$\{(1;1;0)\}.$$

53. Avaldades esimesest võrrandist z ja asendades selle teise võrrandisse, saame

$$x^2+x+y^2+y=a$$

ehk

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=a+\frac{1}{2}.$$

Et arvude ruutude summa on mittenegatiivne, siis

$$a+\frac{1}{2}\geqslant 0.$$

Kui $a+\frac{1}{2}>0$, siis on võrrandil rohkem kui üks lahend. Järelikult peab

$$a+\frac{1}{2}=0 \text{ ehk } a=-\frac{1}{2}.$$

Parameetri a leitud väärtuse korral on süsteemi ainuke reaalne lahend $\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

54. Tähistame kalade ligikaudse arvu tiigis tähega x. Siis

$$\frac{30}{x}=\frac{2}{40},$$

millest $x=600$.

Seega oli kalade ligikaudne arv tiigis 600.

55. Kui turist käiks 3 km tunnis, siis kuluks tal x km läbimiseks $\frac{x}{3}$ tundi. Et ta käis 3,5 km tunnis, siis kulus tal sama tee läbimiseks aega $\frac{x}{3{,}5}$ tundi. Seega

$$\frac{x}{3{,}5}+1=\frac{x}{3},$$

millest $x=21$.

Turisti käsutuses oli 6 tundi 40 minutit.

56. Suur osuti liigub 12 korda kiiremini kui väike. Järelikult, kui suur osuti on läbinud x minutit, on väike osuti läbinud $\frac{x}{12}$ minutit. Et osutid x minuti möödudes uuesti kattuksid, peab $x-60=\frac{x}{12}$. Siit $x=65\frac{5}{11}$ minutit.

Kella osutid kattuvad $65\frac{5}{11}$ minuti pärast.

57. Et kell käib ööpäevas x minutit ette, siis näitab ta õiget aega $\frac{2}{x}$ ööpäeva järel. Kui aga kell käiks ööpäevas ette $x+\frac{1}{2}$ minutit, siis näitaks ta õiget aega $\frac{3}{x+\frac{1}{2}}$ ööpäeva järel. Ülesande tingimuste kohaselt

$$\frac{2}{x}-\frac{3}{x+\frac{1}{2}}=1,$$

millest $x=\frac{1}{2}$ minutit.

Seega käib kell ööpäevas $\frac{1}{2}$ minutit ette.

58. Olgu raamatu ostuhind 1 ja planeeritud kasum $x\%$, siis on raamatu müügihind $1+\frac{x}{100}$. Pärast hinna alandamist 10% võrra on raamatu hind

$$\left(1+\frac{x}{100}\right)-\left(1+\frac{x}{100}\right)\cdot\frac{10}{100}.$$

Et kasumit saadi siiski 8%, siis

$$\left(1+\frac{x}{100}\right)-\left(1+\frac{x}{100}\right)\cdot 0{,}1-1=\frac{8}{100}.$$

Saadud võrrandist leiame, et planeeritud kasum oli 20%.

59. Tähistame punktide A ja B vahelise kauguse kilomeetrites tähega x. Punktide B ja C vaheline kaugus on siis $x+20$ km. Vastavalt ülesande tingimustele koostame võrrandi

$$\frac{300}{x}=\frac{300}{x+20}+\frac{5}{4},$$

millest $x=60$. Seega on punktide A ja B vaheline kaugus 60 km ning C ja B vaheline kaugus 80 km.

60. Olgu kraavi kaevamas n töölist. Kui viimasena tööle asunu töötas x tundi, siis esimesena tööle asunu $5x$ tundi. Et tööajad moodustavad aritmeetilise progressiooni, on kogu töötundide arv $\frac{x+5x}{2}n$.

Siis

$$\frac{x+5x}{2}n=24n,$$

millest

$$x=8.$$

Seega töötas esimesena tööle asunud tööline 40 tundi.

61. Väljugu trammid liini otspunktidest iga x minuti järel. Siis jõuab järgmine tramm kohta, kus esimene tramm möödub jalakäijast, x minuti pärast. Tee, mille jalakäija käib 12 minutiga, läbib tramm $12-x$ minutiga ja tee, mille jalakäija käib 1 minutiga, läbib tramm $\frac{12-x}{12}$ minutiga.

Jalakäija kohtab vastutulevat trammi 4 minutit pärast eelnevat. Tee, mille jalakäija käib 4 minutiga, läbib tramm $x-4$ minutiga ja tee, mille jalakäija käib 1 minutiga, läbib tramm $\frac{x-4}{4}$ minutiga. Järelikult,

$$\frac{12-x}{12}=\frac{x-4}{4},$$

millest $x=6$.

62. Olgu paadi kiirus seisvas vees v_1 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ ja voolu kiirus punktide B ja C vahel v_2 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, kaugus punktide A ja B vahel x km ning kaugus punktide A ja C vahel y km. Vastavalt ülesande tingimustele saame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} \dfrac{x}{v_1}+\dfrac{y-x}{v_1+v_2}=3 \\ \dfrac{x}{v_1}+\dfrac{y-x}{v_1-v_2}=3\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{y}{v_1+v_2}=2\dfrac{3}{4} \end{cases} \quad \text{ehk} \quad \begin{cases} xv_2+yv_1=3v_1(v_1+v_2) \\ -2xv_2+2yv_1=7v_1(v_1-v_2) \\ 4y=11(v_1+v_2). \end{cases}$$

Et $v_1 \neq 0$, siis saame kahest esimesest võrrandist, et

$$4y=13v_1-v_2.$$

Lahutades sellest võrrandist kolmanda võrrandi, jõuame seoseni $v_1=6v_2$. Kolmandast võrrandist leiame nüüd, et $v_2=\frac{4}{77}y$. Järelikult,

$$v_1=\frac{24}{74}y \text{ ja } v_1-v_2=\frac{20}{77}y$$

ning otsitav aeg

$$t=\frac{y}{v_1-v_2}=\frac{77}{20}.$$

Punktist C kulus punkti A sõudmiseks 3 tundi 51 minutit.

63. Ülesande tingimuste kohaselt

$$A=\frac{B+C}{2} \text{ ja } B=\frac{A+C}{3}.$$

Asendades esimeses võrduses B vastava avaldisega teisest võrdusest ning teises võrduses A vastava avaldisega esimesest võrdusest, saame seosed

$$4C=5A \text{ ja } 3C=5B.$$

Liites need võrdused, leiame, et

$$C=\frac{5}{7}(A+B).$$

64. Tähistades tööpingi A tootlikkuse tähega x, B tootlikkuse tähega y, C tootlikkuse tähega z ning otsitava protsendimäära tähega p, saame ülesande tingimuste põhjal seosed

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y+z}=\dfrac{m}{100} \\ \dfrac{y}{x+z}=\dfrac{n}{100} \\ \dfrac{z}{x+y}=\dfrac{p}{100} \end{cases} \quad \text{ehk} \quad \begin{cases} \dfrac{y}{x}+\dfrac{z}{x}=\dfrac{100}{m} \\ \dfrac{x}{y}+\dfrac{z}{y}=\dfrac{100}{n} \\ \dfrac{x}{z}+\dfrac{y}{z}=\dfrac{100}{p}. \end{cases}$$

Tähistades $\frac{z}{x}=v$ ning $\frac{x}{y}=u$, saame kahest esimesest võrrandist süsteemi u ja v suhtes

$$\begin{cases} \frac{1}{u}+v=\frac{100}{m} \\ u+uv=\frac{100}{n}, \end{cases}$$

millest

$$u=\frac{m(100+n)}{n(100+m)} \text{ ja } v=\frac{10000-mn}{m(100+n)}.$$

Et

$$\frac{x}{z}=\frac{1}{v} \text{ ja } \frac{y}{z}=\frac{1}{uv},$$

siis on võrrand

$$\frac{x}{z}+\frac{y}{z}=\frac{100}{p}$$

esitatav kujul

$$\frac{1}{v}+\frac{1}{uv}=\frac{100}{p}.$$

Asendades siin v ja u eespool leitud avaldistega, saame võrrandi

$$\frac{100(m+n)+2mn}{10000-mn}=\frac{100}{p},$$

millest otsitav protsendimäär

$$p=\frac{10000-mn}{100(m+n)+2mn}\cdot 100.$$

65. Olgu mootorpaadi kiirus seisvas vees $x\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ ja voolu kiirus $y\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$, siis vastavalt ülesande tingimustele saame koostada võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} \frac{96}{x+y}+\frac{96}{x-y}=14 \\ \frac{96}{x+y}+\frac{72}{x-y}=\frac{24}{y}, \end{cases}$$

kus teine võrrand teiseneb kujule $x=7y$. Kasutades saadud seost ja esimest võrrandit, leiame, et

$x=14$ ja $y=2$.

Järelikult on mootorpaadi kiirus seisvas vees $14\frac{\text{km}}{\text{h}}$ ja voolu kiirus $2\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

66. Läbigu esimene masin päevas x meetrit ja teine masin y meetrit tunnelit, siis 60 päevaga läbib esimene masin $60x$ meetrit ja teine masin $60y$ meetrit. Ülesande tingimuste põhjal saame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} 0{,}3\cdot 60x+\frac{8}{300}\cdot 60y=60 \\ \frac{2}{3}\cdot 60y : x-6=0{,}3\cdot 60x : y \end{cases}$$

ehk

$$\begin{cases} 9x+8y-30=0 \\ 20\frac{y}{x}-9\frac{x}{y}-3=0. \end{cases}$$

Tehes teises võrrandis asenduse $\frac{y}{x}=t$, saame ruutvõrrandi t suhtes

$20t^2-3t-9=0.$

Selle lahendid on

$t_1=\frac{3}{4},\ t_2=-\frac{3}{5}.$

Kasutades asendust $\frac{y}{x}=t$ ning võrrandit $3x+8y-30=0$, leiame, et esimene masin läbib päevas 2 meetrit tunnelit ja teine masin 1,5 m.

67. Kui metallrahadest võtta ühe- ja kolmekopikaline, siis on vaja kolm ühekopikalist, kui aga võtta viie- ja viieteistkümnekopikaline, siis esimesi tuleb võtta kas 6 või 15 ja teisi vastavalt 3 või 0.

68. Hetkel t asub auto $40t$ km kaugusel punktist A, mootorratas $16t^2+9$ km kaugusel. Nende omavaheline kaugus on

$s(t)=16t^2-40t+9.$

Parabooli $y=16t^2-40t+9$ haripunktiks on punkt $\left(1\frac{1}{4};16\right)$. Seega antud tingimustel on maksimaalne kaugus 16 km, mis saavutatakse 1 tund 15 minutit pärast liikumise algust.

69. Olgu otsitavad arvud km ja kn, kus k on nende arvude SÜT. Vastavalt ülesande tingimustele

$$\begin{cases} kmn=360 \\ k(m-n)=66. \end{cases}$$

Et arvud mn ja $m-n$ on ühistegurita, arvudel 360 ja 66 on aga ühistegur 6, siis $k=6$. Seega

$$\begin{cases} mn=60, \\ m-n=11, \end{cases}$$

millest

$$m=15,\ n=4$$

ning otsitavad arvud

$$km=90,\ kn=24.$$

70. Kirjutame antud võrrandi kujul

$$1958=(n-m)(n+m).$$

Arvu 1958 algtegurid on 2, 11 ja 89. Järelikult üks tegureist $n-m$ või $n+m$ on paarisarv, teine paaritu arv. Et aga kahe mistahes täisarvu summa ja vahe on samaaegselt kas paarisarvud või paaritud arvud, siis selliseid täisarve m ja n, mis rahuldaksid võrrandit

$$m^2+1958=n^2,$$

ei leidu.

71. Avaldame võrrandist tundmatu y ja lisame saadud murru lugejale nii $+21$ kui ka -21. Siis

$$y=\frac{7021}{xz+z+7x+7}-3.$$

Et y oleks naturaalarv, peab murd

$$\frac{7021}{xz+z+7x+7}=t_1$$

olema naturaalarv. Siit

$$x=\frac{7021}{zt_1+7t_1}-1.$$

Et ka x peab olema naturaalarv, siis peab murd

$$\frac{7021}{zt_1+7t_1}=t_2$$

olema samuti naturaalarv. Viimasest võrdusest

$$z=\frac{7021}{t_1t_2},$$

millest järeldame, et ka murd

$$\frac{7021}{t_1t_2}=t_3$$

peab olema naturaalarv. Seega

$7021=t_1t_2t_3$.

Et

$7021=7\cdot17\cdot59$ ja $x=t_2-1$, $y=t_1-3$, $z=t_3-7$,

siis

$t_1=7;\ 7;\ 59;\ 17,$
$t_2=17;\ 59;\ 7;\ 7,$
$t_3=59;\ 17;\ 17;\ 59$

ning võrrandi lahendite hulk on:

$\{(16;\ 4;\ 52),\ (58;\ 4;\ 10),\ (6;\ 56;\ 10),\ (6;\ 14;\ 52)\}$.

Märkus. Vaadeldud võrrand kuulub nn. Diophantose võrrandite hulka, mille lahendamist vt. J. I. Perelmann. Huvitav algebra, IV ptk.

72. On ilmne, et

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots+$$
$$+\frac{1}{\sqrt{n}}=n.$$

73. Teisendame võrratuse vasakut poolt järgmiselt:

$$\frac{\sqrt{a}(b-1)}{\sqrt{b}-\frac{1}{a}}+\frac{\sqrt{b}(a-1)}{\sqrt{a}-\frac{1}{b}}<\frac{\sqrt{a}(\sqrt{b}-1)(\sqrt{b}+1)}{\sqrt{b}-1}+\frac{\sqrt{b}(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}-1}=$$
$$=2\sqrt{ab}+\sqrt{a}+\sqrt{b}<2\sqrt{ab}+a+b=(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=$$
$$=\left[\sqrt{a}+\left(\frac{1}{b}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]^2.$$

74. Antud võrratuse lahendamine taandub võrratusesüsteemi

$$\begin{cases} -3<\dfrac{x^2+ax-2}{x^2-x+1} \\ \\ \dfrac{x^2+ax-2}{x^2-x+1}<2 \end{cases}$$

lahendamisele. Et x mis tahes väärtuse korral $x^2-x+1>0$, siis on võrratusesüsteem teisendatav kujule

$$\begin{cases} 4x^2+x(a-3)+1>0 \\ x^2-x(a+2)+4>0. \end{cases}$$

Ruutkolmliige on positiivne x iga väärtuse korral, kui vastava ruutvõrrandi diskriminant on negatiivne. Seega peavad olema täidetud tingimused

$$\begin{cases} (a-3)^2-16<0 \\ (a+2)^2-16<0, \end{cases}$$

kust $-1<a<2$.

75. Et $x=\frac{1-4y}{2}$, siis

$$x^2+y^2=\left(\frac{1-4y}{2}\right)^2+y^2=\frac{1-8y+2y^2}{4}=\frac{(10y-2)^2+1}{20}\geqslant\frac{1}{20}.$$

76. Tingimusest

$$\frac{4}{13}<\frac{a}{20}<\frac{5}{13}$$

saame, et

$$6\frac{2}{13}<a<7\frac{9}{13}.$$

Kuna a peab olema täisarv, siis $a=7$ ning otsitav murd on $\frac{7}{20}$.

77. Tähistades paadi enese kiiruse tähega x, saame koostada võrratuse

$$3<\frac{10}{x+1}+\frac{6}{x-1}<4 \text{ ehk } 3<\frac{16x-4}{x^2-1}<4,$$

mille lahendid on:

$$0<x<\frac{8-\sqrt{61}}{3} \text{ ja } 4<x<\frac{8+\sqrt{61}}{3}.$$

Ülesande tingimusi rahuldab vaid teine piirkond.

Märkus. Kõrgema astme võrratuste ja võrratusesüsteemide ratsionaalseid lahendusvõtteid vt. С. И. Новоселов. Специальный курс элементарной алгебры. Москва, 1958, § 91, стр. 360—366.

78. Olgu otsitavad arvud x ja y, siis

$$x+y<2000 \text{ ning } \frac{x}{y}<10.$$

Et $x+y$ peab jaguma 504-ga ja $\frac{x}{y}$ jaguma 6-ga, siis on $x+y$ kas 504, 1008 või 1512 ja $\frac{x}{y}=6$. Leitud võimaluste uurimisel selgub, et otsitavad arvud on 864 ja 144.

79. Avaldist, millega antud irratsionaalset avaldist korrutades saadakse ratsionaalne avaldis, nimetatakse antud irratsionaalse avaldise kaasteguriks.

Selleks et vabaneda juurtest murru nimetajas, tuleb leida nimetaja kaastegur ning korrutada sellega nii murru lugejat kui ka nimetajat.

Püüame antud murru nimetaja kaasteguri leida kujul

$$A+B\sqrt[3]{2}+C\sqrt[3]{2^2},$$

kus kordajad A, B ja C on esialgu tundmatud konstandid. Vastavalt kaasteguri mõistele peab korrutis

$$(2+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2^2})\,(A+B\sqrt[3]{2}+C\sqrt[3]{2^2})$$

ehk

$$2(A+B+C)+(A+2B+2C)\sqrt[3]{2}+(A+B+2C)\sqrt[3]{4}$$

olema ratsionaalne. See on võimalik siis, kui

$$A+2B+2C=0 \text{ ja } A+B+2C=0.$$

Viimastest seostest saame, et

$$B=0 \text{ ning } A=-2C.$$

Kui $C=-1$, siis $A=2$. Järelikult on antud murru nimetaja üks kaastegureist

$$2-\sqrt[3]{4}$$

ning

$$\frac{1}{2+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}=\frac{2-\sqrt[3]{4}}{(2+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})\,(2-\sqrt[3]{4})}=\frac{1}{2}\,(2-\sqrt[3]{4}).$$

80. Selleks et vabaneda juurtest murru nimetajas, tuleb leida nimetaja kaastegur, s. o. avaldis, millega nimetajat korrutades saame ratsionaalse avaldise.

Kaasteguri leidmisel lähtume valemist

$$x^n-1=(x-1)\,(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1).$$

Vastavalt sellele

$$a-1=(\sqrt[n]{a}-1)(\sqrt[n]{a^{n-1}}+\sqrt[n]{a^{n-2}}+\ldots+\sqrt[n]{a}+1).$$

Kirjutades nimetaja kujul

$$\sqrt[n]{a}(\sqrt[n]{a^{n-1}}+\sqrt[n]{a^{n-2}}+\ldots+\sqrt[n]{a}+1),$$

näeme, et antud murdu tuleb laiendada avaldisega

$$\sqrt[n]{a^{n-1}}(\sqrt[n]{a}-1).$$

Pärast lihtsustamist saame vastuseks

$$\frac{a-\sqrt[n]{a^{n-1}}}{a(a-1)}.$$

81. Kolm võrdset arvu moodustavad samaaegselt nii aritmeetilise kui ka geomeetrilise progressiooni. Selles veendume, kui kasutame seoseid $a_2=\frac{a_1+a_3}{2}$ ja $a_2^2=a_1a_3$.

82. Teisendame leitud avaldist järgmiselt:

$$\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\ldots}}}=a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{1}{4}}\cdot a^{\frac{1}{8}}\cdot\ldots=a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots}.$$

Kasutades astendaja arvutamiseks lõpmatult kahaneva geomeetrilise progressiooni summa valemit, saame, et

$$\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\ldots}}}=a.$$

83. Olgu otsitavateks arvudeks x, y, z, siis

$$\begin{cases} xz=y^2 \\ x+z=2(y+8) \\ x(z+64)=(y+8)^2. \end{cases}$$

Saadud süsteemi lahendamisel leiamegi otsitavad arvud 4; 12; 36 või $\frac{4}{9}$; $-\frac{20}{9}$; $\frac{100}{9}$.

84. Olgu antud aritmeetiline progressioon

$$a_1,\ a_1+d,\ a_1+2d,\ \ldots$$

ja geomeetriline progressioon

$$b_1,\ b_1q,\ b_1q^2,\ \ldots,$$

kus ülesande tingimuste põhjal

$$a_1=b_1$$

ja

$$a_1+d=a_1q.$$

Viimasest võrdusest

$$q=\frac{a_1+d}{a_1}=1+\frac{d}{a_1}$$

ja Newtoni binoomvalemit kasutades

$$q^n=\left(1+\frac{d}{a_1}\right)^n=1+\frac{nd}{a_1}+\ldots+\left(\frac{d}{a_1}\right)^n.$$

Kui $n>2$, siis

$$q^n>1+n\cdot\frac{d}{a_1}=\frac{a_1+nd}{a_1}.$$

Et $a_1>0$, siis

$$a_1q^2>a_1+nd$$

ehk

$$b_{n+1}>a_{n+1}.$$

85. Ülesande tingimuste kohaselt saame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} x+y+z=93 \\ y^2=xz \\ z=x+6(y-x), \end{cases}$$

mille lahenditeks on

(31; 31; 31), (3; 15; 75).

86. Ülesande tingimuste kohaselt

$$\frac{[2a_1+(m-1)d]m}{[2a_1+(n-1)d]n}=\frac{m^2}{n^2}$$

ehk

$$(2a_1-d)(m-n)=0,$$

millest

$$a_1=\frac{d}{2}.$$

Järelikult

$$\frac{a_m}{a_n}=\frac{a_1+(m-1)d}{a_1+(n-1)d}=\frac{\frac{d}{2}+(m-1)d}{\frac{d}{2}+(n-1)d}=\frac{2m-1}{2n-1}.$$

87. Et

$$a_1-a_2=a_2-a_3=\ldots=a_{n-1}-a_n=-d,$$

siis

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}=$$

$$=\frac{\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2}}{a_1-a_2}+\frac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_3}}{a_2-a_3}+\cdots+\frac{\sqrt{a_{n-1}}-\sqrt{a_n}}{a_{n-1}-a_n}=\frac{\sqrt{a_1}-\sqrt{a_n}}{-d}.$$

Korrutades saadud murru lugejat ja nimetajat avaldisega

$\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}$ ning arvestades, et

$$a_n-a_1=d(n-1),$$

saamegi pärast lihtsustamist avaldise

$$\frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}.$$

88. Avanud sulud, kirjutame x astmed astendajate kasvavas järjekorras ning lisame summale arvud $+1$ ja -1, saame

$$(x^{-2n}+x^{-2n+2}+\ldots+x^{-2}+1+x^2+\ldots+x^{2n})+2n-1.$$

Sulgavaldise edasiseks teisendamiseks kasutame geomeetrilise progressiooni summa valemit. Lõpptulemusena saab antud summa esitada kujul

$$\frac{x^{4n+2}-1}{(x^2-1)x^{2n}}+2n-1.$$

89. Tuleb tõestada, et kui $c^2-b^2=b^2-a^2$, siis

$$\frac{1}{a+b}-\frac{1}{c+a}=\frac{1}{c+a}-\frac{1}{b+c}$$

ehk

$$\frac{c-b}{(a+b)(c+a)}=\frac{b-a}{(c+a)(b+c)}.$$

Avaldades tingimusest $c^2-b^2=b^2-a^2$ vahe $c-b$ ning asendades selle viimase võrduse vasakusse poolde, saamegi pärast taandamist

$$\frac{b-a}{(c+a)(b+c)}.$$

90. Paaritud arvud, mis 5-ga jagamisel annavad jäägi 1, on saadavad üldkujust $10k+1$, kus k on 0, 1, 2, ... Vastavalt ülesande tingimustele tuleb leida

$$\sum_{k=0}^{29} (10k+1),$$

mis kujutab endast aritmeetilise progressiooni liikmete summat. Teostades arvutused, leiame, et otsitav summa on 4380.

91. Ülesandeks on arvutada summa

$$\frac{3}{1\cdot 4}+\frac{3}{4\cdot 7}+\frac{3}{7\cdot 10}+\ldots+\frac{3}{94\cdot 97}+\frac{3}{97\cdot 100}=$$

$$=\sum_{n=1}^{33}\frac{3}{(3n-2)(3n+1)}.$$

Leiame kõigepealt valemi

$$\sum_{n=1}^{n}\frac{3}{(3n-2)(3n+1)}$$

arvutamiseks. Esmalt arvutame osasummad:

$$S_1=\frac{3}{4},$$

$$S_2=\frac{3}{1\cdot 4}+\frac{3}{4\cdot 7}=\frac{6}{7},$$

$$S_3=\frac{3}{1\cdot 4}+\frac{3}{4\cdot 7}+\frac{3}{7\cdot 10}=\frac{6}{7}+\frac{3}{70}=\frac{9}{10}.$$

Saadud tulemuste põhjal oletame, et

$$S_n=\frac{3n}{3n+1}. \qquad (1)$$

Viimase valemi õigsuse tõestame matemaatilise induktsiooni meetodil. Oletame, et seos (1) kehtib mingi täisarvu $n=k$ korral, s. t.

$$S_k=\frac{3k}{3k+1},$$

ja näitame, et see kehtib siis ka $n=k+1$ korral. Selleks avaldame

$$S_{k+1}=\frac{3}{1\cdot 4}+\frac{3}{4\cdot 7}+\frac{3}{7\cdot 10}+\ldots+\frac{3}{(3k-2)(3k+1)}+$$

$$+\frac{3}{(3k+1)(3k+4)}=S_k+\frac{3}{(3k+1)(3k+4)}=\frac{3(k+1)}{3k+4}.$$

Viimane avaldis on saadav ka seosest (1), kui teeme seal asenduse $n=k+1$. Seega seose (1) kehtivusest mingi täisarvu $n=k$ korral järeldub sama seose kehtivus järgneva täisarvu $n=k+1$ korral. Et seos (1) kehtis $n=2$ korral, siis kehtib ta äsja tõestatu põhjal ka $n=2+1=3$ korral. Samuti järeldub seose kehtivusest $n=3$ korral seose kehtivus $n=3+1=4$ korral jne. Seega kehtib seos (1) mistahes positiivse täisarvu korral.

Kasutame nüüd äsja tõestatud valemit (1) nõutava summa arvutamiseks

$$\frac{3}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{3n}{3n+1}=\frac{99}{100}.$$

Märkus. Matemaatilise induktsiooni meetodi kohta vt.

1) Ü. Kaasik. Täielik induktsioon. Matemaatika metoodiliste artiklite kogumik. Tallinn, 1963, lk. 11—17.
2) Депман И. Я. Метод математической индукции. Ленинград, 1957.
3) Соминский И. С. Метод математической индукции. 1961. (Sarjast «Популярные лекции по математике».)

92. Et arvud $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n+1}$ moodustavad aritmeetilise progressiooni, siis

$$a_k=a_1+(k-1)d, \text{ kus } k=1, 2, 3, \ldots, n+1, \tag{1}$$

ja

$$a_k=\frac{a_{k-1}+a_{k+1}}{2}, \text{ kus } k=1, 2, 3, \ldots, n. \tag{2}$$

Kasutades valemeid (1) ja (2), leiame osasummad

$$S_1=\frac{1}{a_1a_2},$$

$$S_2=\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}=S_1+\frac{1}{a_2a_3}=\frac{a_3+a_1}{a_1a_2a_3}=\frac{2}{a_1a_3},$$

$$S_3=\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\frac{1}{a_3a_4}=S_2+\frac{1}{a_3a_4}=\frac{2}{a_1a_3}+\frac{1}{a_3a_4}=$$

$$=\frac{2a_4+a_1}{a_1a_3a_4}=\frac{3}{a_1a_4}.$$

Analoogia põhjal otsitav summa

$$S_n=\frac{n}{a_1a_{n+1}}. \tag{3}$$

Tõestame valemi (3) õigsuse matemaatilise induktsiooni meetodil. Oletame, et seos (3) kehtib mingi täisarvu $n=k$ korral, s. t.

$$S_k = \frac{k}{a_1 a_{k+1}}$$

ning näitame, et see kehtib ka $n=k+1$ korral. Selleks leiame

$$S_{k+1} = \frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \frac{1}{a_3a_4} + \ldots + \frac{1}{a_k a_{k+1}} + \frac{1}{a_{k+1}a_{k+2}} =$$

$$= S_k + \frac{1}{a_{k+1}a_{k+2}} = \frac{k}{a_1a_{k+1}} + \frac{1}{a_{k+1}a_{k+2}} =$$

$$= \frac{ka_{k+2}+a_1}{a_1a_{k+1}a_{k+2}} = \frac{(k+1)(a_1+kd)}{a_1a_{k+1}a_{k+2}} = \frac{k+1}{a_1a_{k+2}}.$$

Pole raske näha, et viimane avaldis on saadav valemist (3), asendades n $(k+1)$-ga.

Seega seose (3) kehtivusest mingi täisarvu $n=k$ korral järeldub selle kehtivus järgneva täisarvu $n=k+1$ korral. Et seos (3) kehtis $n=3$ korral, siis kehtib ta äsja tõestatu põhjal $n=3+1=4$ korral. Samuti järgneb seose kehtivusest $n=4$ korral seose kehtivus $n=4+1=5$ korral. Jne. Seega kehtib seos (3) mistahes positiivse täisarvu n korral.

93. Tõestuseks kasutame matemaatilise induktsiooni meetodit. On lihtne kontrollida, et antud seos kehtib $n=1$ ja $n=2$ korral. Eeldame, et seos kehtib mingi täisarvu $n=k$ korral, s. t.

$$1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots+(-1)^{k+1}k^2 = (-1)^{k+1}\frac{k(k+1)}{2}.$$

Näitame, et siis ülesandes antud seos kehtib ka täisarvu $n=k+1$ korral.

$$1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots+(-1)^{k+1}k^2+(-1)^{(k+1)-1}(k+1)^2 =$$

$$= (-1)^{k+1}\frac{k(k+1)}{2} + (-1)^{k+2}(k+1)^2 =$$

$$= (-1)^{k+2}\frac{-k^2-1+2k^2+4k+2}{2} =$$

$$= (-1)^{(k+1)+1}\frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Pole raske veenduda selles, et viimane avaldis on saadav avaldisest

$$(-1)^{n+1}\frac{n(n+1)}{2},$$

asendades siin n $(k+1)$-ga.

Seega ülesandes antud seose kehtivusest mingi täisarvu $n=k$ korral järeldub seose kehtivus järgneva täisarvu $n=k+1$ korral. Et antud seos kehtis $n=2$ korral, siis kehtib see äsja tõestatu põhjal ka $n=2+1=3$ korral. Samuti järgneb seose kehtivusest $n=3$ korral seose kehtivus $n=3+1=4$ korral. Jne.

Märkus. Vt. ülesande 91 lahenduse juures olevat märkust.

94. Arvud $\log_a N$, $\log_b N$ ja $\log_c N$ moodustavad aritmeetilise progressiooni. Järelikult

$$\log_b N=\frac{\log_a N+\log_c N}{2}. \tag{1}$$

Kasutades valemit

$$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a},$$

teisendame saadud võrduses olevad logaritmid alusele a. Võrdus (1) saab siis kuju

$$\frac{\log_a N}{\log_a b}=\frac{1}{2}\left(\log_a N+\frac{\log_a N}{\log_a c}\right).$$

Siit (eeldades, et $N\neq 1$)

$$\log_a b=\frac{2\log_a c}{\log_a c+1}.$$

Teisendades nüüd viimase võrduse paremal poolel olevad logaritmid alusele ac, saame

$$\log_a b=\frac{2\log_{ac} c}{\log_{ac} c+\log_{ac} a}=\frac{2\log_{ac} c}{\log_{ac}(ac)}=2\log_{ac} c=\log_{ac} c^2.$$

Seega $\log_a b=\log_{ac} c^2$, millest logaritmi definitsiooni põhjal $(ac)^{\log_a b}=c^2$.

Märkus. Ülesande lahendamisel kasutatud valemi

$$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$$

tõestamisel lähtume seosest

$$a^{\log_a b}=b.$$

Logaritmides viimast võrdust alusel c, saame

$$\log_a b\log_c a=\log_c b,$$

millest

$$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

95. Kasutades valemit

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a},$$

leiame, et

$$\log a + \log_a 10 = \log a + \frac{1}{\log a} = \frac{(\log a)^2 + 1}{\log a} =$$

$$= \frac{(\log a)^2 - 2\log a + 1 + 2\log a}{\log a} = \frac{(\log a - 1)^2 + 2\log a}{\log a}.$$

Kuna $a > 1$, siis $\log a > 0$ ning viimase murru lugeja ja nimetaja on positiivsed suurused. Seega

$$\frac{(\log a - 1)^2 + 2\log a}{\log a} \geqslant \frac{2\log a}{\log a} = 2$$

ning $\log a + \log_a 10 \geqslant 2$.

96. Et $\log \sin x$ ei ole määratud, kui $-1 < \sin x \leqslant 0$, siis peab kehtima võrratus $0 < \sin x < 1$. Sel juhul $\log \sin x < 0$. Järelikult võrdus $\sin x = \log \sin x$ ei saa kehtida.

97. Kirjutame antud avaldise kujul

$$\frac{3}{7}\left(1 + 2^{\log_2 5} \cdot 2^{\log_2 5}\right)^{\log_{26} 7} + \left(5^{\log_{5^2} 3^2} + 3^{\log_{3^2} 4^2}\right)^{2\log_7 5}.$$

Avaldise edasisel teisendamisel kasutame valemeid

$$a^{\log_a b} = b \text{ ja } \log_{a^2} b^2 = \log_a b.$$

Seega

$$\frac{3}{7}(1+25)^{\log_{26} 7} + (3+4)^{\log_7 25} = \frac{3}{7} \cdot 7 + 25 = 28.$$

98. Kasutades valemit

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a},$$

teisendame antud avaldist järgmiselt:

$$b^{\frac{\log_a(\log_a b)}{\log_a b}} = \left[b^{\frac{1}{\log_a b}}\right]^{\log_a(\log_a b)} = \left[b^{\log_b a}\right]^{\log_a(\log_a b)} =$$

$$= a^{\log_a(\log_a b)} = \log_a b.$$

99. Antud avaldise väärtuse arvutamiseks toimime järgmiselt:

$$\log 5 \cdot \log 20 + \log^2 2 = \log 5 \cdot \log(2^2 \cdot 5) + \log^2 2 =$$

$$= \log^2 5 + 2\log 2 \cdot \log 5 + \log^2 2 = (\log 5 + \log 2)^2 = 1.$$

100. Et $\log 48 = \log(3 \cdot 16) = \log 3 + 4 \log 2$, siis tuleb $\log 3$ ja $\log 2$ avaldada a ja b kaudu.

Kasutades valemit

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a},$$

kirjutame eeldused

$$\log_3 5 = a \text{ ja } \log_5 8 = b$$

kujul

$$\frac{\log 5}{\log 3} = a \text{ ja } \frac{3 \log 2}{\log 5} = b.$$

Lisades viimastele võrdustele seose

$$\log 2 = 1 - \log 5,$$

leiame, et

$$\log 3 = \frac{3}{a(b+3)} \text{ ja } \log 2 = \frac{b}{b+3}.$$

Seega

$$\log 48 = \frac{3+4ab}{a(b+3)}.$$

101. Kasutades valemit

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

ja eeldust $\log_{12} 2 = a$, leiame, et

$$\log_6 16 = \frac{\log_{12} 16}{\log_{12} 6} = \frac{4 \log_{12} 2}{1 - \log_{12} 2} = \frac{4a}{1-a}.$$

102. Vastavalt ülesande tingimustele

$$a \cdot (aq) \cdot (aq^2) \cdot \ldots \cdot (aq^{n-1}) = c$$

ehk

$$a^n q^{1+2+\cdots+(n-1)} = c.$$

Leides q astendaja kui aritmeetilise progressiooni summa, saame, et

$$c = a^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}. \qquad (1)$$

Kasutades valemit

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

ja võrdust (1), leiame, et

$$\log_c b = \frac{1}{\log_b c} = \frac{1}{n \log_b a + \frac{n(n-1)}{2} \log_b q} = \frac{2}{\frac{2n}{\log_a b} + \frac{n(n-1)}{\log_q b}} =$$

$$= \frac{2AB}{2nB + n(n-1)A}.$$

103. Kasutades valemit

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a},$$

teisendame antud võrduses kõik logaritmid alusele a.

$$\frac{1}{\log_a (c+b)} + \frac{1}{\log_a (c-b)} = \frac{2}{\log_a (c-b) \ \log_a (c+b)}. \qquad (1)$$

Teisendades siin murrud ühisele nimetajale ning arvestades, et $1 = \log_a a$, saame võrduse (1) kirjutada kujul

$$\log_a (c-b) + \log_a (c+b) = 2 \log_a a.$$

Viimase võrduse potentseerimisel leiame, et

$$(c-b)(c+b) = a^2$$

ehk

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

104. Antud võrduse parem pool

$$5^{\log \cos 2\pi} = 1.$$

Võrduse vasaku poole teisendamisel kasutame valemit

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a},$$

teisendades logaritmid alusele a.

$$\frac{\log_b x}{\log_{ab} x} - \log_b a = \frac{\log_a ab}{\log_a b} - \frac{1}{\log_a b} = 1.$$

Seega on väide tõestatud.

105. Kasutades valemit

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a},$$

teisendame võrrandi vasakul poolel olevat tegurit

$$\log_x(5x^2)=\log_x 5+2=\frac{1}{\log_5 x}+2.$$

Saadud tulemuse põhjal võib antud võrrandi kirjutada kujul

$$\left(\frac{1}{\log_5 x}+2\right)\cdot\log_5^2 x=1$$

ehk

$$2\log_5^2 x+\log_5 x-1=0.$$

Viimase lahendid on

$$(\log_5 x)_1=\frac{1}{2} \text{ ja } (\log_5 x)_2=-1,$$

millest

$$x_1=\sqrt{5} \text{ ja } x_2=\frac{1}{5}.$$

106. Kasutades valemit

$$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a},$$

saame antud võrrandi teisendada kujule

$$(\log_x 2x)^2=1,$$

millest

$$\log_x 2x=\pm 1.$$

Et $x^1\neq 2x$ $(x\neq 0)$, siis jääb üle vaid teine võimalus

$$x^{-1}=2x$$

ehk

$$x=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

107. Kasutades valemit

$$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a},$$

teisendame võrrandis olevad logaritmid alusele 3

$$-\log_3 3x+\frac{\log_3 9x}{-2}=\frac{\log_3 \frac{x}{3}}{\frac{1}{3}}+\frac{\log_3 \frac{x}{9}}{\frac{2}{9}}.$$

Siit

$$\log_3 x = \frac{10}{9}$$

ja

$$x = 3\sqrt[9]{3}.$$

108. Kasutades valemit

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a},$$

teisendame logaritmid alusele a ning lihtsustame. Antud võrrand saab kuju

$$\log_a x(\log_a x - \log_a c - 1) = 0,$$

millest

$$\log_a x = 0 \text{ ja } \log_a \frac{x}{c} = 1.$$

Siit

$$x_1 = 1 \text{ ja } x_2 = ac.$$

109. Kasutades valemit

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a},$$

saab antud võrrandi kirjutada kujul

$$3 \cdot \frac{\log_x x}{\log_x a^2 x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\log_x x}{\log_x \frac{x}{\sqrt{a}}} = 2,$$

mis pärast teisendusi taandub $\log_x a$ suhtes ruutvõrrandiks

$$4(\log_x a)^2 - 7\log_x a + 3 = 0.$$

Saadud võrrandi lahenditest

$$(\log_x a)_1 = 1 \text{ ja } (\log_x a)_2 = \frac{3}{4}$$

leiame, et

$$x_1 = a \text{ ja } x_2 = a\sqrt[3]{a}.$$

110. Kasutades valemit

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a},$$

teisendame logaritmid alusele a. Antud võrrand saab siis kuju

$$\frac{2}{\log_a x} + \frac{3}{2+\log_a x} + \frac{1}{\log_a x+1} = 0,$$

mis pärast lihtsustamist saab kuju

$$6 \log_a^2 x + 11 \log_a x + 4 = 0.$$

Siit

$$(\log_a x)_1 = -\frac{1}{2} \text{ ja } (\log_a x)_2 = -\frac{4}{3},$$

millest

$$x_1 = \frac{\sqrt{a}}{a} \text{ ja } x_2 = \frac{\sqrt[3]{a^2}}{a^2}.$$

111. Kasutades valemit

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a},$$

teisendame logaritmid alusele 2. Antud võrrand teisendub kujule

$$\frac{1}{\log_2 x} \cdot \frac{1}{\log_2 2x} = \frac{1}{\log_2 4x}.$$

Siit

$$\log_2 x \cdot \log_2 2x = \log_2 4x$$

ehk

$$\log_2^2 x = 2,$$

millest

$$x_1 = 2^{\sqrt{2}} \text{ ja } x_2 = 2^{-\sqrt{2}}.$$

112. Potentseerides antud logaritmvõrrandit ja teisendades tulemust, saame ruutvõrrandi

$$x^2 + (2-a)x + 1 = 0.$$

Siit

$$x = \frac{a-2 \pm \sqrt{a(a-4)}}{2}.$$

Et antud võrrandil oleks üks reaalne lahend, peab

$$a(a-4) = 0$$

ehk

$a_1=0$ ja $a_2=4$.

Ülesande vastuseks sobib vaid $a=4$, sest $a=0$ korral on logaritmitav null.

113. Lahendame ülesande kahel viisil.

I. Kandes võrrandi kõik liikmed vasakule poole võrdusmärki ning kasutades seejärel rühmitamise võtet, teiseneb antud võrrand kujule

$$(3^x-2\cdot 2^x)(3^x+2^x)=0$$

ehk

$$3^x-2\cdot 2^x=0 \quad (3^x+2^x\neq 0),$$

millest

$$x=\frac{\log 2}{\log 1{,}5}.$$

II. Tähistades $3^x=u$ ja $2^x=v$, saame võrrandi

$$u^2-uv-2v^2=0,$$

millest $u_1=2v$ ja $u_2=-v$. Kasutades tehtud asendust, saame I lahenduskäigus esinenud võrrandid.

114. Et

$$\sqrt{2-\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}=1,$$

siis on sobiv teha asendus

$$\sqrt{2-\sqrt{3}}=a.$$

Sel korral $\sqrt{2+\sqrt{3}}=\frac{1}{a}$ ning võrrand saab kuju

$$a^x+\frac{1}{a^x}=4,$$

millest

$$a^x=2+\sqrt{3} \text{ ehk } a^x=\frac{1}{\sqrt{a}}$$

ja

$$a^x=2-\sqrt{3} \text{ ehk } a^x=\sqrt{a}.$$

Seega on võrrandi lahendeiks

$$x_1=-\frac{1}{2} \text{ ja } x_2=\frac{1}{2}.$$

115. Vastavalt ülesande tingimusele peab kehtima võrdus

$$\frac{\log_z y}{\log_y x} = \frac{\log_x z}{\log_z y}.$$

Kasutades valemit

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a},$$

teisendame kõik logaritmid alusele z. Tulemusena saame võrduse

$$\log_z^3 y = 1,$$

millest

$$y = z.$$

Esialgne võrrandisüsteem teisendub nüüd kujule

$$\begin{cases} x^2 = y^2 \\ xy^2 = 64. \end{cases}$$

Antud võrrandisüsteemi lahendite hulk on:

$\{(4;\ 4;\ 4)$ ja $(4;\ -4;\ -4)\}$.

116. Et antud polünoom jaguks avaldisega $(x-1)^2$, peab ta jagamisel binoomiga $x-1$ andma jäägi null ja saadud jagatis uuesti jagamisel binoomiga $x-1$ jäägi null. Seega

$$\begin{cases} a^2 + 3a + 3b + 4 = 0 \\ a^2 + 5a + 3b + 3 = 0, \end{cases}$$

millest $a = \frac{1}{2}$ ja $b = -\frac{23}{12}$.

Märkus. Lähtepolünoomi jagamiseks avaldisega $(x-1)^2$ on sobiv kasutada Horneri skeemi, mille kohta vt.

1) J. Gabovitš. Horneri skeem. Matemaatika metoodiliste artiklite kogumik I. Tallinn, 1963, lk. 31—47.
2) Новоселов С. И. Специальный курс элементарной алгебры. Москва, 1958, стр. 71.

117. Hulkliikme $Ax^{15} + Bx^{14} + 1$ jagamisel kaksliikmega $x-1$ tekib jagatis

$$Ax^{14} + (A+B)x^{13} + (A+B)x^{12} + \ldots + (A+B)x + A + B \qquad (1)$$

ja jääk

$$A + B + 1.$$

Vastavalt ülesande tingimustele peab jagamine toimuma jäägita.
Seega peab

$$A+B+1=0. \qquad (2)$$

Et antud hulkliige $Ax^{15}+Bx^{14}+1$ jaguks avaldisega $(x-1)^2$, peab saadud jagatis (1) omakorda jaguma kaksliikmega $x-1$. Seega peab ka siin tekkiv jääk võrduma nulliga, s. t.

$$15A+14B=0. \qquad (3)$$

Võrdustest (2) ja (3) leiame, et

$$A=14 \text{ ja } B=-15.$$

118. Tõestame matemaatilise induktsiooni meetodil. Veendume, et antud seos kehtib, kui $n=1$ ja $n=2$:

$$1^3=1=(C_2^2)^2;$$

$$1^3+2^3=9=(C_3^2)^2.$$

Eeldame, et seos kehtib $n=k$ korral, s. t.

$$1^3+2^3+\ldots+k^3=(C_{k+1}^2)^2$$

ja näitame, et samasugune seos kehtib ka $n=k+1$ korral.

$$1^3+2^3+\ldots+k^3+(k+1)^3=(C_{k+1}^2)^2+(k+1)^3=\left[\frac{(k+1)!}{(k-1)!\,2!}\right]^2+$$
$$+(k+1)^3=\frac{(k+2)^2(k+1)^2}{(2!)^2}=(C_{k+2}^2)^2.$$

Et ülesandes antud seos kehtib $n=2$ korral, siis äsja tõestatu põhjal kehtib see ka $n=2+1=3$ korral. Võrduse kehtivusest $n=3$ korral järeldub aga võrduse kehtivus $n=3+1=4$ korral. Jne. Seega kehtib ülesandes antud seos mis tahes naturaalarvu n korral.

Märkus. 1) Matemaatilise induktsiooni meetodi kohta vt. ülesande 91 lahenduse juures olevat märkust.

2) Kombinatsioonidest (C_n^m) vt.

a) Ü. Kaasik. Ühendid. Matemaatika metoodiliste artiklite kogumik I. Tallinn, 1963, lk. 18—30.

b) P. Hanko jt. Täiendavaid teemasid koolimatemaatikale. Tallinn, 1967, lk. 3—13.

119. Pole raske veenduda selles, et

$$\frac{(2n)!}{(n!)^2}=C_{2n}^n.$$

Kuna kombinatsioonide arv on alati täisarv, siis

$\frac{(2n)!}{(n!)^2}$ on täisarv.

Et

$$C_{2n}^{n}=C_{2n}^{n-1}\cdot\frac{n+1}{n},$$

siis on ka $C_{2n}^{n-1}\cdot\frac{n+1}{n}$ täisarv. Summa $n+1$ ei jagu n-ga, seega peab C_{2n}^{n-1} jaguma n-ga. Järelikult $\frac{(2n)!}{(n!)^2}$ jagub $(n+1)$-ga.

120. Lihtsustame antud avaldist järgmiselt:

$$=\frac{(1+2i)(3-i)-\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)^4}=$$

$$\frac{\left[5+5i-\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]4}{(1+i)^4}=\frac{16}{(1+i)^3}=$$

$$=\frac{8}{1-i}=-4(1+i).$$

121. Tähistame võrduse vasaku poole tähega A ja esitame ta kujul

$$A=\frac{\sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 80^\circ}{\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ}.$$

Murru lugejat teisendame järgmiselt:

$$\sin 20^\circ\ \sin 40^\circ\ \sin 80^\circ=\frac{1}{2}\ (\cos 20^\circ-\cos 60^\circ)\ \sin 80^\circ=$$

$$=\frac{1}{2}\ (\sin 80^\circ\ \cos 20^\circ-\frac{1}{2}\sin 80^\circ)=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin 100^\circ+\sin 60^\circ}{2}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\sin 80^\circ\right)=\frac{\sqrt{3}}{8}.$$

Korrutame ja jagame murru nimetajat avaldisega 8 sin 20°. Seejärel teisendame saadud avaldist järgmiselt:

$$\frac{8\sin 20^\circ\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ}{8\sin 20^\circ}=\frac{4\sin 40^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ}{8\sin 20^\circ}=$$

$$=\frac{2\sin 80^\circ\cos 80^\circ}{8\sin 20^\circ}=\frac{\sin 160^\circ}{8\sin 120^\circ}=\frac{1}{8}.$$

Seega $A=\sqrt{3}.$

122. Teisendame võrduse vasakut poolt järgmiselt:

$$(\tan 20^\circ+\tan 40^\circ)+\sqrt{3}\tan 20^\circ \tan 40^\circ=$$

$$=\frac{\sin 60^\circ}{\cos 20^\circ \cos 40^\circ}+\sqrt{3}\frac{\sin 20^\circ \sin 40^\circ}{\cos 20^\circ \cos 40^\circ}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}(1+\sin 70^\circ-\sin 30^\circ)}{2\cos 20^\circ \cos 40^\circ}=\frac{\sqrt{3}(\frac{1}{2}+\sin 70^\circ)}{2\cos 20^\circ \cos 40^\circ}=$$

$$=\sqrt{3}\frac{2\sin 50^\circ \cos 20^\circ}{2\cos 20^\circ \cos 40^\circ}=\sqrt{3}.$$

123. Teisendame samasuse vasakut poolt järgmiselt:

$$\cos^2 x+\frac{2\sin\alpha[1-\cos\alpha]}{2\sin\alpha[1+\cos\alpha]}+\cos(\alpha+x)[(\cos x\cos\alpha-$$

$$-\sin x\sin\alpha)-2\cos x\cos\alpha]=\cos^2 x+\tan^2\frac{\alpha}{2}-$$

$$-(\cos x\cos\alpha-\sin x\sin\alpha)(\cos x\cos\alpha+\sin x\sin\alpha)=$$

$$=\tan^2\frac{\alpha}{2}+(\cos^2 x-\cos^2 x\cos^2\alpha)+\sin^2 x\sin^2\alpha=$$

$$=\tan^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2 x\sin^2\alpha+\sin^2 x\sin^2\alpha=\tan^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\alpha=$$

$$=\tan^2\frac{\alpha}{2}\left[1+\frac{4\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\tan^2\frac{\alpha}{2}}\right]=\tan^2\frac{\alpha}{2}\left[1+4\cos^4\frac{\alpha}{2}\right].$$

124. Teisendame samasuse vasakut poolt järgmiselt:

$$\tan 3\alpha-\tan 2\alpha-\tan\alpha=\frac{\sin 3\alpha}{\cos 3\alpha}-\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=$$

$$=\frac{\sin 3\alpha}{\cos 3\alpha}-\frac{\sin 2\alpha\cos\alpha+\cos 2\alpha\sin\alpha}{\cos\alpha\cos 2\alpha}=\frac{\sin 3\alpha}{\cos 3\alpha}-$$

$$-\frac{\sin 3\alpha}{\cos\alpha\cos 2\alpha}=\frac{\sin 3\alpha}{\cos 3\alpha}\left[1-\frac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha\cos 2\alpha}\right]=$$

$$=\tan 3\alpha\frac{\cos\alpha\cos 2\alpha-\cos(\alpha+2\alpha)}{\cos\alpha\cos 2\alpha}=$$

$$=\tan 3\alpha\frac{\sin\alpha\sin 2\alpha}{\cos\alpha\cos 2\alpha}=\tan 3\alpha\tan 2\alpha\tan\alpha.$$

125. Teisendame võrduse vasaku poole viimast liiget järgmiselt:

$$-2\cos x\cos y\cos z=-2\left[\frac{1}{2}\cos(x-y)+\frac{1}{2}\cos(x+y)\right]\cos z=$$

$$=-[\cos(x-y)\cos z+\cos(x+y)\cos z]=$$

$$=-\frac{1}{2}[\cos(x-y-z)+\cos(x-y+z)+\cos(x+y-z)+$$
$$+\cos(x+y+z)].$$

Et $x+y+z=\pi$, siis

$\cos(x-y-z)=\cos(y+z-x)=\cos(\pi-2x)=-\cos 2x,$

$\cos(x-y+z)=\cos(x+z-y)=-\cos 2y,$

$\cos(x+y+z)=\cos\pi=-1,$

$\cos(x+y-z)=-\cos 2z.$

Kuna

$\cos 2x=1-2\sin^2 x,$

$\cos 2y=1-2\sin^2 y,$

$\cos 2z=1-2\sin^2 z,$

siis pärast lihtsustamist

$$-2\cos x\cos y\cos z=1-\sin^2 x-\sin^2 y-\sin^2 z.$$

Seega

$$\sin^2 x+\sin^2 y+\sin^2 z-(1-\sin^2 x-\sin^2 y-\sin^2 z)=1.$$

126. Asendades antud võrduses kootangensid siinuste ja koosinuste kaudu, viies võrduse vasakul poolel olevad liikmed ühisele nimetajale ning arvestades ülesandes antud lisatingimust, teisendame võrduse vasakut poolt järgmiselt:

$$\cot x\cot y+\cot x\cot z+\cot y\cot z=$$
$$=\frac{\cos x\cos y\sin(x+y)-\cos(x+y)\sin(x+y)}{\sin x\sin y\sin(x+y)}=$$
$$=\frac{\sin(x+y)[\cos x\cos y-\cos(x+y)]}{\sin x\sin y\sin(x+y)}=$$
$$=\frac{\sin(x+y)\sin x\sin y}{\sin x\sin y\sin(x+y)}=1.$$

127. Võttes antud avaldises kokku esimese ja viimase ning teise ja eelviimase liikme, rakendame koosinuste summa valemit. Pärast ühise teguri sulgude ette toomist saame avaldise

$$2\cos 8\alpha(\cos 3\alpha+3\cos\alpha).$$

Et

$$\cos 3\alpha=\cos(\alpha+2\alpha)=\cos\alpha\cos 2\alpha-\sin\alpha\sin 2\alpha=$$
$$=\cos\alpha(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)-2\sin^2\alpha\cos\alpha=$$

$=\cos^3\alpha-3\cos\alpha\ \sin^2\alpha=\cos^3\alpha-3\cos\alpha\ (1-\cos^2\alpha)=$
$=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha,$

siis

$$2\cos 8\alpha\ (\cos 3\alpha+3\ \cos\alpha)=8\ \cos 8\alpha\ \cos^3\alpha$$

ning ülesanne ongi lahendatud.

128. Kui $\cot(\alpha+\beta)=0$, siis ka $\cos(\alpha+\beta)=0$ ehk

$$\cos\alpha\ \cos\beta=\sin\alpha\ \sin\beta.$$

Kasutades viimast võrdust ja liitmise valemeid, leiame, et $\sin(\alpha+2\beta)=\sin\alpha\ \cos^2\beta-\sin\alpha\ \sin^2\beta+2\ \cos\alpha\ \sin\beta\ \cos\beta=$ $=\sin\alpha\ \cos^2\beta-\sin\alpha\ \sin^2\beta+2\ \sin\alpha\ \sin^2\beta=\sin\alpha.$

129. Kirjutame ülesandes antud tingimuse kujul

$$3\ \sin\alpha=\sin 2\alpha\ \cos\beta+\cos 2\alpha\ \sin\beta$$

ehk

$$3\ \tan\beta=\sin 2\alpha+\cos 2\alpha\ \tan\beta.$$

Siit

$$\tan\beta=\frac{\sin 2\alpha}{3-\cos 2\alpha}.$$

Esitades tõestatava võrduse vasaku poole kujul

$$\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\ \tan\beta}$$

ja asendades siin $\tan\beta$ leitud avaldisega, saame

$$\frac{\tan\alpha+\dfrac{\sin 2\alpha}{3-\cos^2\alpha}}{1-\tan\alpha\ \dfrac{\sin 2\alpha}{3-\cos^2\alpha}},$$

mis pärast teisendamisi taandubki kujule $2\tan\alpha$.

130. Et koosinuslausest

$$\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},$$

siis

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\sqrt{\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc+b^2+c^2-a^2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{a^2-(b-c)^2}{(b+c)^2-a^2}}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}},\ \text{kus}\ p=\frac{a+b+c}{2}.$$

Analoogilise mõttekäigu teel leiame, et

$$\tan\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}},$$

$$\tan\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}.$$

Asendades saadud tulemused tõestatava võrduse vasakusse poolde, leiame, et

$$\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}+\tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2}=\frac{b}{p}.$$

131. Avaldades antud tingimusest suuruse $\sin\alpha$ ning arvestades, et $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, leiame

$$\sin\alpha=-\frac{\sin\beta+\sin\gamma}{\cos(\alpha+\gamma)+\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\beta+\sin\gamma}{\cos\beta+\cos\gamma}=$$

$$=\frac{\sin\frac{\beta+\gamma}{2}}{\cos\frac{\beta+\gamma}{2}}=\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Siit

$$\sin\alpha=\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

ehk

$$\cos\frac{\alpha}{2}\left(2\sin\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right)=0.$$

Viimasest

$$\cos\frac{\alpha}{2}=0 \text{ ja } 2\sin\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}=0$$

ning vastavalt

$$\alpha=\pi \text{ ja } \alpha=\frac{\pi}{2}.$$

Et aga α on kolmnurga sisenurk, siis $\alpha\neq\pi$. Järelikult $\alpha=\frac{\pi}{2}$.

132. Tuleb näidata, et

$$\cot\frac{\beta}{2}-\cot\frac{\alpha}{2}=\cot\frac{\gamma}{2}-\cot\frac{\beta}{2}$$

ehk

$$\cot\frac{\beta}{2}=\frac{1}{2}\left(\cot\frac{\alpha}{2}+\cot\frac{\gamma}{2}\right), \tag{1}$$

kui $b-a=c-b$.

Et

$$\cot x=\frac{1}{\tan x}$$

ning

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}},$$

$$\tan\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}},$$

$$\tan\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}},$$

siis tõestatav võrdus (1) saab kuju

$$\sqrt{\frac{p(p-b)}{(p-a)(p-c)}}=\frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{p(p-a)}{(p-b)(p-c)}}+\sqrt{\frac{p(p-c)}{(p-a)(p-b)}}\right]. \tag{2}$$

Tõstes võrduse (2) ruutu ning vabanedes nimetajast, saame

$$4(p-b)^2=[(p-a)+(p-c)]^2.$$

Siit

$$2(p-b)=2p-a-c$$

ehk

$$b-a=c-b.$$

Kuna tõestatava võrduse teisendamisel jõudsime ülesandes antud seoseni ja esitatud mõttekäik on korratav vastupidises suunas, siis on ülesandes esitatud väide tõestatud.

133. Tõestame võrratuse järgmiselt:

$$\cot\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{\sin x}=\frac{1}{\sin x}+\cot x\geqslant 1+\cot x.$$

134. Teisendame võrratuse vasakut poolt järgmiselt:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}+\frac{1+\cos 2\beta}{2}+\cos^2\gamma=$$

$$=1+\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+\cos^2\gamma=$$

$$=1-\cos\gamma[\cos(\alpha-\beta)-\cos\gamma]=$$

$$=1-\cos\gamma[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]=$$

$$=1-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$$

Kui üks nurkadest on täis- või nürinurk, siis

$$\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma \leqslant 0$$

ja tõestatav võrratus kehtib.

Juhul, kui kõik nurgad on teravnurgad, s. t. $\cos\alpha > 0$, $\cos\beta > 0$ ja $\cos\gamma > 0$, siis kasutame antud võrratuse tõestamiseks võrratust:

$$\sqrt[3]{abc} \leqslant \frac{a+b+c}{3},$$

kus a, b ja c on positiivsed arvud.

Viimase võrratuse tõestamiseks tähistame $a=x^3$, $b=y^3$, $c=z^3$. Seega on tarvis näidata, et kehtib võrratus

$$xyz \leqslant \frac{x^3+y^3+z^3}{3}$$

ehk

$$(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz) \geqslant 0.$$

Et $x+y+z \geqslant 0$, siis

$$x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz \geqslant 0$$

ehk

$$\frac{1}{2}(x-y)^2+\frac{1}{2}(y-z)^2+\frac{1}{2}(z-x)^2 \geqslant 0.$$

On ilmne, et see võrratus kehtib mistahes x, y ja z korral. Korrates nüüd mõttekäiku vastupidises järjekorras saamegi näidata, et

$$\sqrt[3]{abc} \leqslant \frac{a+b+c}{3}.$$

Järelikult kehtib siis ka võrratus

$$\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma \leqslant \left(\frac{\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma}{3}\right)^3,$$

kusjuures $\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma$ omab suurima väärtuse, kui $\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\frac{1}{2}$. Siis $2\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma \leqslant \frac{1}{4}$, millest järeldub, et

$$1-2\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma \geqslant \frac{3}{4}$$

ehk

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma \geqslant \frac{3}{4}.$$

135. Tähistame $18°45' = \frac{\alpha}{4}$. Siis $\alpha = 75°$. Et

$$\sin\frac{\alpha}{4}=\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\alpha}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{1-\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}}{2}},$$

siis tuleb esmalt arvutada $\cos\alpha$ väärtus.

$$\cos\alpha=\cos(30^\circ+45^\circ)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Nüüd

$$\sin\frac{\alpha}{4}=\frac{1}{4}\sqrt{8-2\sqrt{8+2\sqrt{6}-2\sqrt{2}}}.$$

136. Teisendame antud avaldist järgmiselt:

$$(\sin 43^\circ+\sin 17^\circ)^2-\sin 43^\circ\sin 17^\circ=$$

$$=4\sin^2 30^\circ\cos^2 13^\circ-\frac{1}{2}(\cos 26^\circ-\cos 60^\circ)=$$

$$=\cos^2 13^\circ-\frac{1}{2}\cos 26^\circ+\frac{1}{4}=\frac{1+\cos 26^\circ}{2}-\frac{1}{2}\cos 26^\circ+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}.$$

137. Teisendame antud avaldises esimese ja teise ning kolmanda ja neljanda teguri korrutised summaks:

$$\frac{1}{2}(\cos 60^\circ+\cos 72^\circ)\cdot\frac{1}{2}(\cos 36^\circ+\cos 120^\circ)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}+\cos 72^\circ\right)\left(\cos 36^\circ-\frac{1}{2}\right).$$

Et

$$\cos 36^\circ=\cos^2 18^\circ-\sin^2 18^\circ=1-2\sin^2 18^\circ=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

ja

$$\cos 72^\circ=\sin 18^\circ=\frac{\sqrt{5}-1}{4},$$

siis on otsitava avaldise väärtus

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{16}.$$

138. Teisendades tingimust

$$\frac{1}{\tan^2 x}+\frac{1}{\cot^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{1}{\cos^2 x}=7,$$

saame võrduse

$$\sin^2 x-\sin^4 x=\frac{2}{9}.$$

Et

$$\sin^2 2x = 4\sin^2 x - 4\sin^4 x,$$

siis antud ülesande korral

$$\sin^2 2x = \frac{8}{9}.$$

139. Ülesandes antud väite asemel tõestame temaga samaväärse väite

$$\cot(\alpha+\beta+\gamma+\delta) = 1.$$

Selleks arvutame

$$\cot(\alpha+\beta) = \frac{\cot\alpha\cot\beta - 1}{\cot\alpha + \cot\beta} = \frac{7}{4}$$

ja

$$\cot(\gamma+\delta) = \frac{\cot\gamma\cot\delta - 1}{\cot\gamma + \cot\delta} = \frac{11}{3}.$$

Siis

$$\cot(\alpha+\beta+\gamma+\delta) = \frac{\cot(\alpha+\beta)\cot(\gamma+\delta) - 1}{\cot(\alpha+\beta) + \cot(\gamma+\delta)} = 1.$$

Seega on väide tõestatud.

140. Teisendades nii võrrandi vasakul kui ka paremal poolel esimese ja kolmanda liikme summa korrutiseks, saame võrrandi

$$2\sin 2x\cos x + \sin 2x = 2\cos^2 x + \cos x,$$

millest

$$\sin 2x\,(2\cos x + 1) = \cos x\,(2\cos x + 1)$$

ehk

$$(2\cos x + 1)(2\sin x - 1)\cos x = 0.$$

Seega

$$2\cos x + 1 = 0,\ 2\sin x - 1 = 0 \text{ ja } \cos x = 0$$

ning antud võrrandi lahendid on:

$$x_1 = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi = (3k\pm 1)\frac{2\pi}{3},$$

$$x_2 = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi = (4k\pm 1)\frac{\pi}{2},$$

$$x_3 = (-1)^k\cdot\frac{\pi}{6} + k\pi.$$

141. Teisendame antud võrrandi kujule

$$2\cos 4x\cos 2x - (2\cos^2 4x - 1) = 1,$$

mida edasi teisendades saame

$\cos 4x\ (\cos 2x - \cos 4x) = 0$

ehk

$\cos 4x\ (-2\ \cos^2 2x + \cos 2x + 1) = 0.$

Siit

$\cos 4x = 0$ ja $-2\ \cos^2 2x + \cos 2x + 1 = 0$

ning antud võrrandi lahendid on

$$x_1 = (2k+1)\ \frac{\pi}{8},$$

$$x_2 = k\pi,$$

$$x_3 = \pm \frac{\pi}{6} + \frac{2k+1}{2} \pi.$$

142. Teisendame võrrandi kujule

$\cos^2 2x + (\cos^2 3x - \sin^2 x) = 0.$

Siit

$\cos^2 2x + (\cos 3x - \sin x)(\cos 3x + \sin x) = 0,$

millest

$\cos^2 2x + [\cos 3x - \cos (90° - x)][\cos 3x + \cos (90° - x)] = 0$

ehk

$\cos^2 2x - 4 \sin (x + 45°) \sin (2x - 45°) \cos (x + 45°) \cos (2x - 45°) =$
$= 0.$

Kasutades nüüd kahekordse nurga siinuse valemit, saame võrrandi

$\cos^2 2x - \sin (2x + 90°) \sin (4x - 90°) = 0,$

millest

$\cos^2 2x + \cos 2x \cos 4x = 0$

ehk

$\cos 2x \cos 3x \cos x = 0.$

Viimase võrrandi lahendid on:

$$x_1 = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi,$$

$$x_2 = \pm \frac{\pi}{6} + \frac{2k}{3} \pi,$$

$$x_3 = \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

Et aga x_3 väärtused esinevad x_2 väärtuste hulgas, siis jäävad esialgse võrrandi lahenditeks x_1 ja x_2, mis on esitatavad kujul

$$x_1=(2k+1)\frac{\pi}{4}$$

ja

$$x_2=(2k+1)\frac{\pi}{6}.$$

143. Antud võrrand on teisendatav kuupvõrrandiks $\sin x$ suhtes

$$2\sin^3 x-9\sin^2 x+10\sin x-3=0$$

ehk, asendades $\sin^3 x=z$, võrrandiks
$2z^3-9z^2+10z-3=0.$

Rühmitamise võtet kasutades on selle võrrandi vasak pool lahutatav tegureiks:

$$2z^3-2z^2-7z^2+7z+3z-3=0$$

$$2z^2(z-1)-7z(z-1)+3(z-1)=0$$

$$(z-1)(2z^2-7z+3)=0.$$

Siit

$$z_1=1,\ z_2=3 \text{ ja } z_3=\frac{1}{2}.$$

Ülesandest nähtub, et $\cos x\neq 0$, järelikult $\sin x\neq 1$; ei saa kehtida ka võrdus $\sin^3 x=3$. Seega sobib antud võrrandi lahendiks ainult z_3, s. t. et

$$\sin x=\frac{1}{2},$$

millest

$$x=(-1)^k\cdot\frac{\pi}{6}+k\pi.$$

144. Kirjutame võrrandi kujul

$$(1-\cos^2 x)\sin x\cos 3x+\sin 3x\cos x\,(1-\sin^2 x)=0{,}375,$$

millest pärast sulgude avamist ja rühmitamist saame

$$(\sin x\cos 3x+\sin 3x\cos x)-\sin x\cos x\,(\cos 3x\cos x+$$
$$+\sin 3x\sin x)=0{,}375.$$

Siit

$$\sin 4x-\frac{1}{2}\sin 2x\cos 2x=0{,}375 \text{ ehk } \sin 4x=\frac{1}{2},$$

millest

$$x=(-1)^k \frac{\pi}{24}+k\frac{\pi}{4}.$$

Märkus. Ülesande lahendamisel võib kasutada ka valemeid

$$\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x \text{ ja } \cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x,$$

mille kohta vt. näiteks С. И. Новоселов. Специальный курс тригонометрии. М., 1959, lk. 84—88.

145. Lahutame võrrandi vasaku poole tegureiks, saame

$$(\sin x+\cos x)\left(1-\frac{1}{2}\sin 2x\right)=1-\frac{1}{2}\sin 2x$$

ehk

$$\left(1-\frac{1}{2}\sin 2x\right)(\sin x+\cos x-1)=0.$$

Et

$$1-\frac{1}{2}\sin 2x\neq 0,$$

siis peab

$$\sin x+\cos x-1=0$$

ehk

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{4},$$

millest

$$x=n\pi+\frac{\pi}{4}[(-1)^n-1].$$

Kui $n=2k$, siis $x=2k\pi$;

kui $n=2k+1$, siis $x=(4k+1)\frac{\pi}{2}$.

146. Kirjutame võrrandi kujul

$$(\sin^4 x+2\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x)-2\sin^2 x\cos^2 x=$$
$$=\cos^2 2x-\sin^2 2x,$$

millest

$$(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x=1-2\sin^2 2x$$

ehk

$$1-\frac{1}{2}\sin^2 2x=1-2\sin^2 2x.$$

Viimasest

$\sin^2 2x=0$ ning $x=k\cdot\frac{\pi}{2}$.

147. Arvestades, et

$$\cos^6 x=(\cos^2 x)^3=\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^3=\frac{1}{8}(1+3\cos 2x+$$

$$+3\cos^2 2x+\cos^3 2x)$$

ja

$$\cos 6x=4\cos^3 2x-3\cos 2x,$$

saame antud võrrandi teisendada kujule

$$4\cos^2 2x+5\cos 2x+1=0.$$

Siit

$$(\cos 2x)_1=-1 \text{ ja } (\cos 2x)_2=-\frac{1}{4}$$

ning

$$x_1=\frac{\pi}{2}(2k+1),$$

$$x_2=\pm\frac{1}{2}(\pi-\arccos\frac{1}{4})+k\pi.$$

148. Antud võrrand on teisendatav kujule

$$(\sin^4 x+\cos^4 x)^2-2\sin^4 x\cos^4 x=\frac{17}{32}$$

ehk

$$[(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x]^2-2\sin^4 x\cos^4 x=\frac{17}{32}.$$

Kasutades kahekordse nurga siinuse valemit, saame võrrandi

$$(1-\frac{1}{2}\sin^2 2x)^2-\frac{1}{8}\sin^4 2x=\frac{17}{32}$$

ehk

$$(\sin^2 2x)^2+8\sin^2 2x+\frac{15}{4}=0,$$

millest leiame, et

$$\sin 2x=7{,}5 \text{ ja } \sin 2x=0{,}5.$$

Neist võrrandeist esimesel ei ole lahendit, teisel aga

$$x=(-1)^k\cdot\frac{\pi}{12}+k\cdot\frac{\pi}{2}.$$

149. Kasutades kahe nurga summa tangensi valemit, anname võrrandile kuju

$$\tan x + \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} + \frac{3\tan x - \tan^3 x}{1-3\tan^2 x} = 0$$

ehk

$$\tan x\left(1 + \frac{2}{1-\tan^2 x} + \frac{3-\tan^2 x}{1-3\tan^2 x}\right) = 0.$$

Siit

$\tan x = 0$ ja $2\tan^4 x - 7\tan^2 x + 3 = 0.$

Viimaste võrrandite lahendid on

$x_1 = k\pi,$

$x_2 = \frac{\pi}{3} + k\pi,$

$x_3 = \frac{2\pi}{3} + k\pi,$

$x_4 = \arctan\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + k\pi,$

$x_5 = \arctan\frac{\sqrt{2}}{2} + k\pi,$

millest kolm esimest saab kokku võtta kujul

$x = \frac{\pi}{3}k.$

Seega esialgse võrrandi lahendid on

$x_1 = \frac{\pi}{3}k,$

$x_2 = \arctan\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + k\pi,$

$x_3 = \arctan\frac{\sqrt{2}}{2} + k\pi.$

150. Vabanenud murrust, teisendame võrrandi kujule

$[(1+\tan 8) - (1-\tan 8)][1-\tan x^2 \tan 2x)] -$

$-[(1-\tan 8) + (1+\tan 8)][\tan x^2 + \tan 2x] = 0,$

millest

$\tan 8\,(1-\tan x^2 \tan 2x) = \tan x^2 + \tan 2x.$

Siit

$$\tan 8 = \frac{\tan x^2 + \tan 2x}{1-\tan x^2 \tan 2x}$$

ehk

$\tan 8 = \tan (x^2+2x)$.

Viimasest

$x^2+2x-8-k\pi=0$

ja

$x_{1,2}=-1\pm\sqrt{9+k\pi}$.

151. Korrutades võrrandit avaldisega

$2^n \sin \frac{x}{2^n}$

ning rakendades võrrandi paremal poolel n korda valemit

$2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha$,

saame võrrandile kuju

$2n \sin x \log_a x = \sin x$

ehk

$\sin x(1-2n \log_a x)=0$.

Siit

$\sin x=0$ ja $2n \log_a x=1$

ning

$x_1=k\pi$ ja $x_2=a^{\frac{1}{2n}}$.

Et ülesande lahendid peavad rahuldama tingimusi

$x>0$ ja $\sin \frac{x}{2^n} \neq 0$,

siis antud võrrandi lahendeiks on

$x_1=k\pi$, kui $x \neq 2^n \cdot m\pi$, kus m on täisarv ning $k>0$;

$x_2=a^{\frac{1}{2n}}$, kui $x \neq 2^n \cdot m\pi$, kus m on täisarv ning $a>0$.

152. Et

$\sin^6 x+\cos^6 x=(\sin^2 x)^3+(\cos^2 x)^3$,

siis on võrrand esitatav kujul

$\sin^4 x-\sin^2 x \cos^2 x+\cos^4 x=a$,

mida teisendades saame

$(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-3 \sin^2 x \cos^2 x=a$

ehk

$3 \sin^2 x \cdot \cos^2 x = 1 - a.$

Siit

$3 \sin^2 2x = 4 - 4a,$

millest

$\sin 2x = \pm \frac{2}{3} \sqrt{3-3a}.$

Viimasest

$x_1 = \frac{(-1)^k}{2} \arcsin \left(\frac{2}{3} \sqrt{3-3a}\right) + k \frac{\pi}{2},$

$x_2 = \frac{(-1)^k}{2} \arcsin \left(-\frac{2}{3} \sqrt{3-3a}\right) + k \frac{\pi}{2}.$

Parameetri a jaoks saame tingimused:

$$\begin{cases} \sqrt{3-3a} < \frac{3}{2}, \\ 3-3a \geqslant 0, \end{cases}$$

millest

$\frac{1}{4} < a \leqslant 1.$

153. Pärast asendust $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$ teiseneb võrrand kujule

$2(a^2+1) \sin^2 x - 4a(a+1) \sin x + 3a^2 + 2a - 1 = 0,$

millest

$\sin x = \frac{2a(a+1) \pm \sqrt{2(1-a)^3(a+1)}}{2(a^2+1)}.$

Et antud võrrandil oleks lahend, peab

$(1-a)^3(a+1) \geqslant 0$

ja

$-1 \leqslant \frac{2a(a+1) \pm \sqrt{2(1-a)^3(a+1)}}{2(a^2+1)} \leqslant +1.$

Siit leiame, et $-1 \leqslant a \leqslant 1$.

Järelikult on võrrandi lahendiks

$x = (-1)^k \arcsin \frac{2a(a+1) \pm (1-a)\sqrt{2(1-a^2)}}{2(a^2+1)} + k\pi,$

kus $-1 \leqslant a \leqslant 1$.

154. Kirjutame antud võrrandisüsteemi kujul

$$\begin{cases} 2 \sin^2 x + 2 \cos^2 y - 1 = 0, \\ \sin x + \cos y - 1 = 0, \end{cases}$$

mille lahendame $\sin x$ ja $\cos y$ suhtes:

$$\begin{cases} \sin x = \frac{1}{2}, \\ \cos y = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Siit

$$\begin{cases} x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi, \\ y = (6k \pm 1) \frac{\pi}{3}. \end{cases}$$

155. Rakendades asendusvõtet saame esimeses võrrandis vabaneda tundmatust x:

$$\sin^2 \left(\frac{5\pi}{12} - y\right) + \sin^2 y = \frac{3}{4}.$$

Siit

$$\left[\sin \frac{5\pi}{12} \cos y - \cos \frac{5\pi}{12} \sin y\right]^2 + \sin^2 y = \frac{3}{4}.$$

Et

$$\sin^2 \frac{5\pi}{12} = \frac{1 - \cos \frac{5\pi}{6}}{2} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}$$

ja

$$\cos^2 \frac{5\pi}{12} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4},$$

siis on viimane võrrand esitatav kujul

$$\frac{2 + \sqrt{3}}{4} \cos^2 y - \frac{1}{2} \sin y \cos y + \frac{2 - \sqrt{3}}{4} \sin^2 y + \sin^2 y = \frac{3}{4}.$$

Edasi

$$\frac{\sqrt{3}}{4} (\cos^2 y - \sin^2 y) - \frac{1}{4} \sin 2y + \frac{1 - \cos 2y}{2} = \frac{1}{4}$$

ehk

$$(\sqrt{3} - 2) \cos 2y - \sin 2y + 1 = 0.$$

Kasutades valemit $\sin 2y = \sqrt{1 - \cos^2 2y}$, saame võrrandi $\cos 2y$ suhtes

$$[(4 - 2\sqrt{3}) \cos 2y + \sqrt{3} - 2] \cos 2y = 0,$$

millest

$$\cos 2y = 0 \text{ ja } \cos 2y = \frac{1}{2}.$$

Siit

$$y_1=(2k+1)\frac{\pi}{4},\ y_2=(6k\pm 1)\frac{\pi}{6}.$$

Vastavad tundmatu x väärtused on

$$x_1=(1-3k)\frac{\pi}{6},\ x_2=(5\pm 2-12k)\frac{\pi}{12}.$$

156. Antud võrrandisüsteemi kirjutame kujul

$$\begin{cases}\cos x+\cos y=1\\ \cos x\cos y=\frac{1}{4},\end{cases}$$

millest

$$\begin{cases}\cos x=\frac{1}{2}\\ \cos y=\frac{1}{2}\end{cases}$$

ning

$$\begin{cases}x=(6k\pm 1)\frac{\pi}{3}\\ y=(6k\pm 1)\frac{\pi}{3}.\end{cases}$$

157. Et

$$\tan(\arctan 2+\arctan 3)=$$

$$=\frac{\tan(\arctan 2)+\tan(\arctan 3)}{1-\tan(\arctan 2)\tan(\arctan 3)}=\frac{2+3}{1-6}=-1,$$

siis

$$\arctan 2+\arctan 3=\operatorname{Arctan}(-1)=(4k-1)\frac{\pi}{4}.$$

158. Kolmnurgast ADC (joon. 2) siinuslause põhjal

$$\frac{m}{\sin\alpha}=\frac{x}{\sin 45^\circ},$$

millest

$$m=\frac{2x\sin\alpha}{\sqrt{2}}.$$

Kolmnurga nurgapoolitaja omaduse põhjal

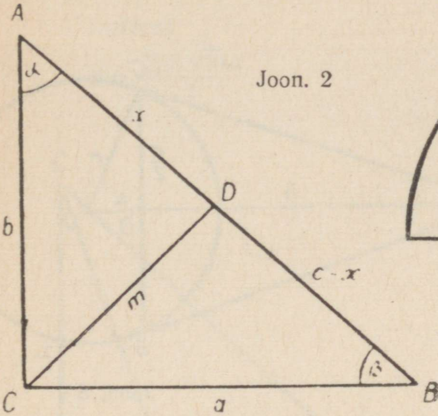
$$\frac{x}{b}=\frac{c-x}{a}.$$

Viimasest

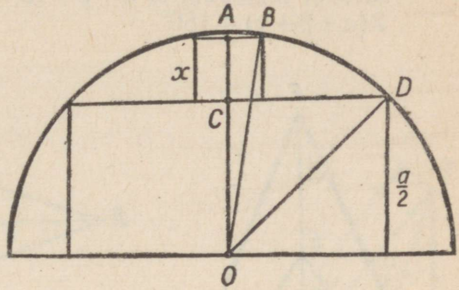
$$x=\frac{bc}{a+b} \qquad (1).$$

Arvestades, et $\sin\alpha=\frac{a}{c}$ ja võrdust (1), leiame, et

$$m=\frac{ab\sqrt{2}}{a+b}.$$



Joon. 2



Joon. 3

159. Olgu otsitava ruudu külg x (joon. 3). Kolmnurgast ABO

$$(AB)^2+(AC+CO)^2=OB^2. \qquad (1)$$

Et antud ruudu külg on a, siis

$$OB=OD=\frac{a\sqrt{2}}{2}$$

ning seos (1) saab kuju

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(x+\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2}{2}$$

ehk

$$5x^2+4ax-a^2=0.$$

Viimasest

$$x_1=\frac{a}{5},\ x_2=-a.$$

Seega otsitava ruudu külg on $\frac{a}{5}$.

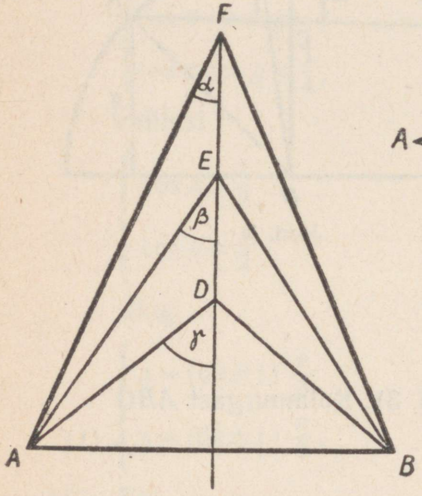
160. Otsitavaks summaks on $2(\alpha+\beta+\gamma)$ (joon. 4). Ülesande tingimuste kohaselt

$$\tan\gamma=1,\ \tan\beta=\frac{1}{2},\ \tan\alpha=\frac{1}{3}.$$

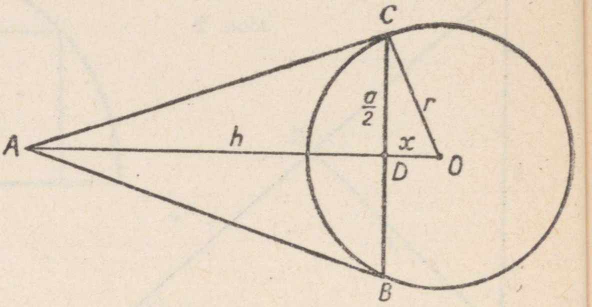
Järelikult

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}}=1,$$

millest järeldub, et $\alpha+\beta=45°$ ja et $\gamma=45°$, siis $2(\alpha+\beta+\gamma)=180°$.



Joon. 4



Joon. 5

161. Et $DC=\frac{a}{2}$ ja $AD=h$ (joon. 5), siis täisnurksest kolmnurgast ACO

$$\frac{a^2}{4}=hx,$$

millest

$$x=\frac{a^2}{4h}.$$

Kolmnurgast CDO otsitava ringjoone raadius

$$r=\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{a^4}{16h^4}}=\frac{a\sqrt{a^2+4h^2}}{4h}.$$

162. Et täisnurkses kolmnurgas BCD (joon. 6) $\angle CBD=\frac{\pi}{4}$, siis ka $\angle DCB=\frac{\pi}{4}$. Seega $CD=BD=x$ ning

$$DA=BD-AB=x-a.$$

Kuna $\angle CAB=\frac{2}{3}\pi$, siis

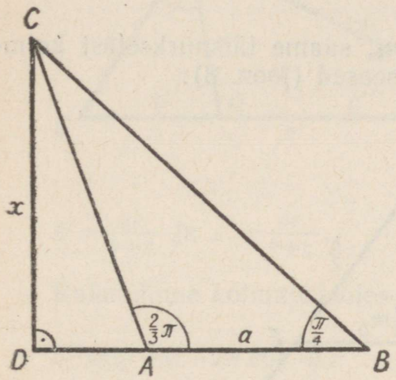
$\angle DAC=\frac{\pi}{3}$.

Kolmnurgast ACD

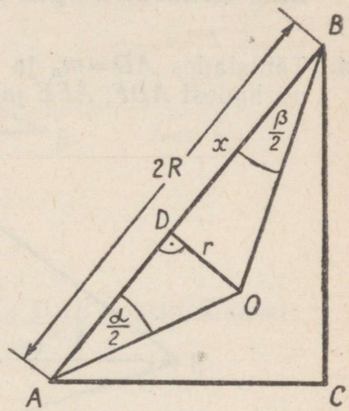
$\tan\frac{\pi}{3}=\frac{x}{x-a}$,

millest

$x=\frac{(3+\sqrt{3})a}{2}$.



Joon. 6



Joon. 7

163. Kui tähistada lõigu DB pikkus tähega x, siis $AD=2R-x$ (joon. 7). Kolmnurgast ADO

$\cot\frac{\alpha}{2}=\frac{2R-x}{r}$

ja kolmnurgast ODB

$\cot\frac{\beta}{2}=\frac{x}{r}$.

Lisades siia seosed

$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$ ja $\frac{R}{r}=\frac{5}{2}$,

saame kokku neli võrrandit viie tundmatuga. Asendades kahest viimasest $\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha$ ja $2R=5r$ eelmistesse võrranditesse, saame

$$\cot\frac{\alpha}{2}=5-\frac{x}{r},\ \cot\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{x}{r}.$$

Elimineerides $\frac{x}{r}$, saame võrrandi

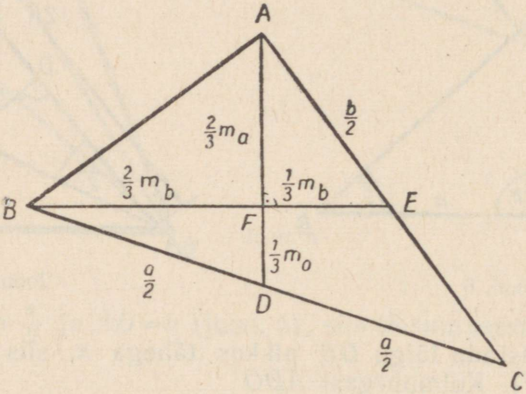
$$\cot^2\frac{\alpha}{2}-5\cot\frac{\alpha}{2}+6=0,$$

millest

$$\alpha_1=2\operatorname{arccot}2,\quad \alpha_2=2\operatorname{arccot}3$$

ning otsitavad nurgad on 53° 07′ ja 36° 53′.

164. Tähistades $AD=m_a$ ja $BE=m_b$, saame täisnurksetest kolmnurkadest ABF, AFE ja BDF seosed (joon. 8):



Joon. 8

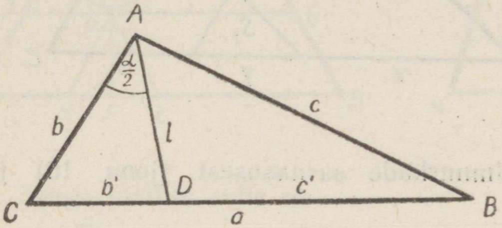
$$\begin{cases}\frac{4}{9}m_a^2+\frac{4}{9}m_b^2=c^2,\\ \frac{4}{9}m_a^2+\frac{1}{9}m_b^2=\frac{b^2}{4},\\ \frac{4}{9}m_b^2+\frac{1}{9}m_a^2=\frac{a^2}{4},\end{cases}$$

kus tundmatuteks on m_a, m_b ja c. Selle võrrandisüsteemi lahendamisel saame, et kolmnurga kolmas külg

$$c=\frac{\sqrt{5}}{5}\sqrt{a^2+b^2}.$$

M ä r k u s. Ülesande lahendamine on lihtsam, kui kasutada valemeid, mille abil saab mediaanide pikkuste ruute arvutada külgede pikkuste kaudu. Nimetatud valemid on esitatud raamatus: D. I. Perepjolkin. Elementaargeomeetria kursus I. Tallinn, 1951, § 71, lk. 214.

165. Nurgapoolitaja omaduse põhjal on $\frac{b'}{c'}=\frac{b}{c}$ ning konstruktsiooni põhjal $b'+c'=a$ (joon. 9). Nendest võrdustest



Joon. 9

$$b'=\frac{ab}{b+c} \text{ ja } c'=\frac{ac}{b+c}.$$

Rakendame kolmnurkades CAD ja DAB koosinuslauset:

$$b'^2=b^2+l^2-2b \cos\frac{\alpha}{2},$$

$$c'^2=c^2+l^2-2c \cos\frac{\alpha}{2}.$$

Avaldades nendest võrdustest $\cos\frac{\alpha}{2}$ ja võrdsustades saadud avaldised, saame

$$\frac{b^2+l^2-b'^2}{2bl}=\frac{c^2+l^2-c'^2}{2cl},$$

millest

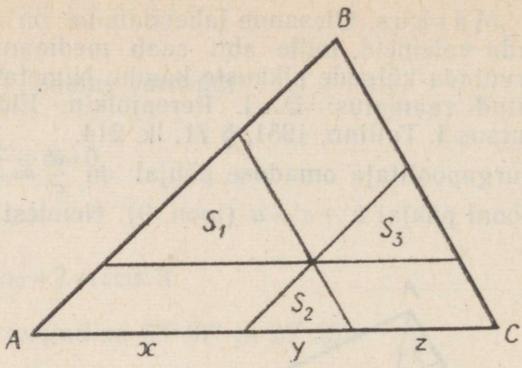
$$l=\sqrt{\frac{bc^2-bc'^2+cb'^2-cb^2}{c-b}}$$

ehk, arvestades b' ja c' avaldisi,

$$l=\sqrt{bc-\left(\frac{a^2bc}{b+c}\right)^2}=\frac{1}{b+c}\sqrt{bc(b+c+a)(b+c-a)}=$$

$$=\frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)},$$

kus $p=\frac{a+b+c}{2}$.



Joon. 10

166. Vaadeldavate kolmnurkade sarnasusest (joon. 10) järeldub, et

$$\frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}}=\frac{x}{x+y+z}, \quad \frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}}=\frac{y}{x+y+z}, \quad \frac{\sqrt{S_3}}{\sqrt{S}}=\frac{z}{x+y+z},$$

kus S on antud kolmnurga pindala. Liites need võrdused, saame

$$\sqrt{S}=\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}$$

ehk

$$S=(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3})^2.$$

167. Tõmbame läbi kolmnurga sees võetud punkti P kolmnurga külgedega paralleelsed sirged: $HK \| AC$, $GJ \| AB$ ja $IL \| BC$ (joon. 11). Siis

$$\frac{PF+PD+PE}{AF+AD+CE}=\frac{PF+PD+PE}{IP+KF+LP+GD+PH+IE}=$$

$$=\frac{PF+PD+PE}{\frac{2}{\sqrt{3}}PE+\frac{1}{\sqrt{3}}PF+\frac{2}{\sqrt{3}}PF+\frac{1}{\sqrt{3}}PD+\frac{2}{\sqrt{3}}PD+\frac{1}{\sqrt{3}}PE}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

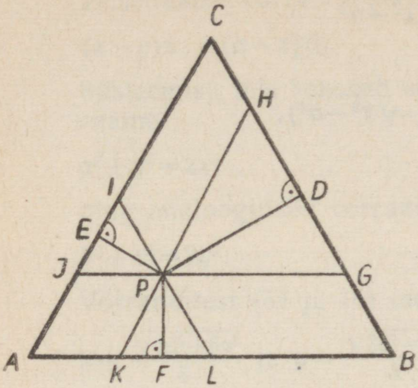
168. Vastavalt ülesande tingimusele

$$\pi r^2=a^2=\frac{b^2\sqrt{3}}{2}=S.$$

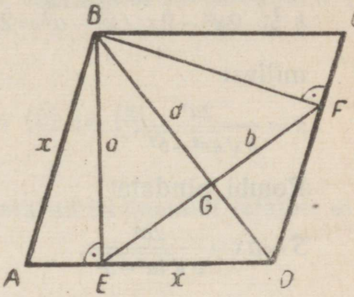
Siit

$$r=\sqrt{\frac{S}{\pi}}, \quad a=\sqrt{S}, \quad b=\frac{2}{3}\sqrt{S}\cdot\sqrt[4]{27}.$$

Joon. 11



Joon. 12



Seega otsitav suhe on

$$2\pi\sqrt{\frac{S}{\pi}} : 4\sqrt{S} : 2\sqrt{S}\cdot\sqrt[4]{27}$$

ehk

$$\sqrt{\pi} : 2 : \sqrt[4]{27}.$$

169. Ülesandes kirjeldatud viisil tekkinud ruutude pindalad a^2; $\frac{a^2}{2}$; $\frac{a^2}{4}$; $\frac{a^2}{8}$; ... moodustavad lõpmatult kahaneva geomeetrilise progressiooni, kus $a_1=a^2$ ja $q=\frac{1}{2}$. Vaadeldavate ruutude pindalade summa on $2a^2$.

170. Olgu rombi külg x. Pole raske veenduda, et $BF=BE=a$ ja $EF\perp BD$ ning $EG=GF=\frac{b}{2}$ (joon. 12). Kolmnurgas ABE

$$AE=\sqrt{x^2-a^2}.$$

Järelikult

$$ED=x-\sqrt{x^2-a^2}.$$

Täisnurksest kolmnurgast BDE

$$\frac{d\cdot EG}{2}=\frac{ED\cdot a}{2},$$

millest

$$d=\frac{2a(x-\sqrt{x^2-a^2})}{b}.$$

Teiselt poolt

$$d=\sqrt{a^2+ED^2}=\sqrt{2x^2-2x\sqrt{x^2-a^2}}.$$

Seega

$$b\sqrt{2x^2-2x\sqrt{x^2-a^2}}=2a(x-\sqrt{x^2-a^2}),$$

millest

$$x=\frac{2a^3}{b\sqrt{4a^2-b^2}}.$$

Rombi pindala

$$S=ax=\frac{2a^4}{b\sqrt{4a^2-b^2}}.$$

171. Et $\angle CAB=\frac{\alpha}{2}$ (joon. 13), siis

$$AH=h\cot\frac{\alpha}{2}.$$

Trapetsi kesklõik on võrdne lõiguga AH ja järelikult trapetsi pindala

$$S=h^2\cot\frac{\alpha}{2}.$$

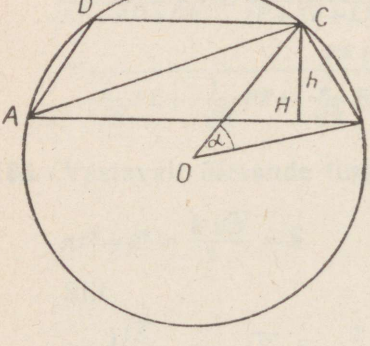
172. Trapetsi pindala valemi põhjal saame järgmised seosed (joon. 14):

$$(a+y)(h_1+h_2)=(a+x)h_1+(x+y)h_2 \tag{1}$$

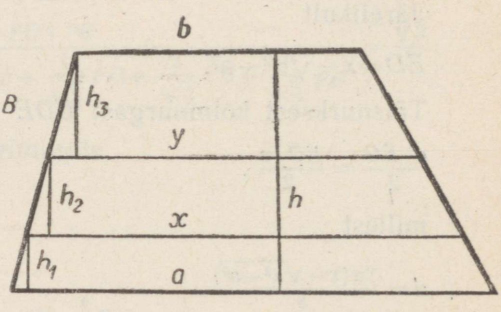
$$(b+x)(h_2+h_3)=(x+y)h_2+(y+b)h_3 \tag{2}$$

$$(b+y)h_3=(x+y)h_2, \tag{3}$$

$$(a+x)h_1=(x+y)h_2. \tag{4}$$



Joon. 13



Joon. 14

Teisendame võrrandi (1) kujule

$$(x-y)h_1=(a-x)h_2.$$

Süsteemist, mis koosneb sellest võrrandist ja võrrandist (4), saame

$$a^2+y^2=2x^2 \qquad (5)$$

ning analoogiliselt võrranditest (2) ja (3)

$$b^2+x^2=2y^2. \qquad (6)$$

Võrranditest (5) ja (6) moodustatud süsteemist leiame, et

$$x=\frac{\sqrt{3b^2+6a^2}}{3} \text{ ja } y=\frac{\sqrt{3a^2+6b^2}}{3}. \qquad (7)$$

Kõrguste h_1 ja h_2 leidmiseks kasutame ülesande tingimusele tuginevaid võrdusi:

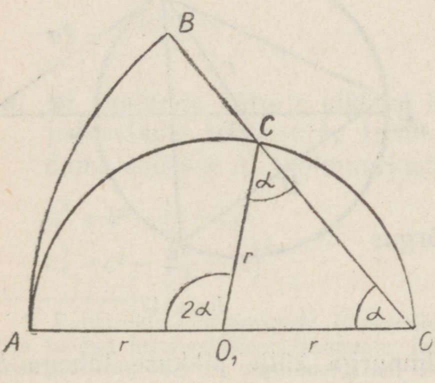
$$(a+b)h=3(a+x)h_1;\ (a+b)h=3(x+y)h_2;\ (a+b)h=$$
$$=3(y+b)h_3.$$

Kasutades ka avaldisi (7), saame

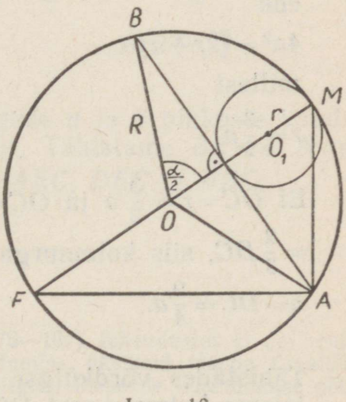
$$h_1=\frac{h(3a-\sqrt{3b^2+6a^2})}{3(a-b)};\ h_2=\frac{h(\sqrt{3b^2+6a^2}-\sqrt{3a^2+6b^2})}{3(a-b)};$$

$$h_3=\frac{h(\sqrt{3a^2+6b^2}-3b)}{3(a-b)}.$$

173. Olgu raadiusele $AO=2r$ kui diameetrile ehitatud poolringjoon keskpunktiga punktis O_1 (joon. 15). Punktide O_1 ja C ühendamisel tekib võrdhaarne kolmnurk O_1OC, milles $\angle O_1OC=$ $=\angle O_1CO=\alpha$. Järelikult $\angle AO_1C=2\alpha$. Kasutades kaare-



Joon. 15



Joon. 16

pikkuse valemit, leiame vastavate kaarte pikkuste suhte. Selleks on 1 : 1.

174. Täisnurkses kolmnurgas AFM on

$$AN^2=NF \cdot MN \tag{1}$$

(joon. 16). Ülesande tingimuste kohaselt on

$AN=\pi r$ ja $MN=2r$,

järelikult

$$R=\frac{\pi r}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

ning

$$NF=2R-2r=2r\left(\frac{\pi}{\sin\frac{\alpha}{2}}-1\right).$$

Asendades saadud tulemused võrdusesse (1), leiame, et

$$\pi^2 r^2=4r^2\left(\frac{\pi}{\sin\frac{\alpha}{2}}-1\right),$$

millest

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{4\pi}{4+\pi^2}$$

ning otsitav nurk $\alpha\approx 130°$.

175. Rakendades teoreemi ringjoonele tõmmatud puutujast ja lõikajast (joon. 17), saame

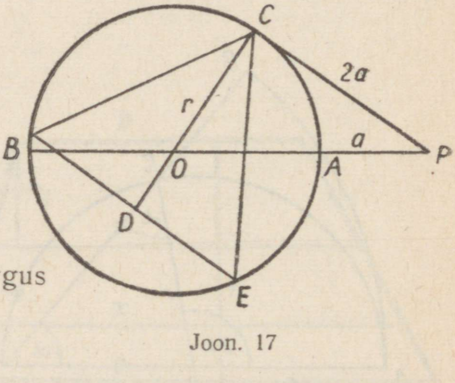
$$CP^2=BP\cdot AP$$

ehk

$$4a^2=(2r+a)a,$$

millest

$$r=\frac{3}{2}a.$$



Joon. 17

Et $OC=r=\frac{3}{2}a$ ja $OC=\frac{2}{3}DC$, siis kolmnurga kõrgus $h=DC=\frac{9}{4}a.$

Tähistades võrdkülgse kolmnurga külje pikkuse tähega b, leiame kolmnurgast DCB, et

$$b^2 = \frac{b^2}{4} + h^2,$$

millest

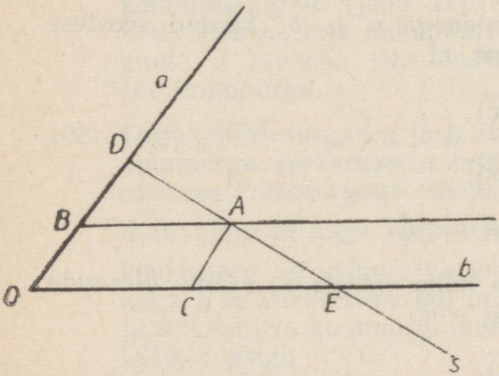
$$b = \frac{3\sqrt{3}a}{2}.$$

Otsitav pindala

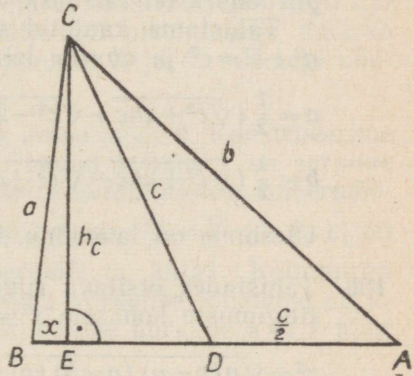
$$S = \frac{27\sqrt{3}a^2}{16}.$$

176.* Esmalt konstrueerime lõigu $p = b + c$, seejärel lõigu $k = \frac{bc}{p}$ kui neljanda võrdelise lõikudele b, c ja p ning lõpuks lõigu $x = \sqrt{a^2 + k^2}$.

177. Olgu antud punkt A (joon. 18). Konstrueerime $AB \| b$ ja $AS \| a$. Kanname nurga haaradele a ja b vastavalt lõigud 2 OB ja 2 OC. Saadud punktid D ja E on otsitava sirge s lõikepunktid nurga haaradega.



Joon. 18



Joon. 19

178. Et avaldada külje c pikkust külgede a ja b pikkuste kaudu, joonestame kõrguse h_c (joon. 19). Tähistame $BE = x$. Avaldame suuruse h_c^2 kolmnurkadest AEC, DEC ja BEC:

$$h_c^2 = b^2 - (c - x)^2,$$

$$h_c^2 = c^2 - \left(\frac{c}{2} - x\right)^2,$$

* Konstruktsioonülesannete (ülesanded 176—191) lahendustes ei ole eraldi välja toodud konstruktsioonülesannete lahendamise üksikuid etappe (analüüs, konstruktsioon, tõestus, uurimine), vaid on esitatud ülesande lahendamise põhiidee.

$h_c^2 = a^2 - x^2.$

Saadud võrdustest leiame, et

$$c = \sqrt{\frac{2}{5}(a^2+b^2)}.$$

Et konstrueerida kolmnurka, konstrueerime külje c ja seejärel a, b ning c kaudu otsitava kolmnurga ABC.

Külje c konstrueerimisel konstrueerime esmalt lõigu $k = \sqrt{a^2+b^2}$ ja seejärel lõigu

$$c = \sqrt{\frac{2}{5}k^2} = \sqrt{\frac{2k}{5}k} = \sqrt{pk}, \text{ kus } p = \frac{2k}{5}.$$

Märkus. Külje c avaldamisel on sobiv kasutada Stuarti teoreemi. Vt. D. I. Perepjolkin. Elementaargeomeetria kursus I. Tallinn, 1951, lk. 213.

179. Konstruktsioon on lihtsalt teostatav, kui tugineda lausele, et diameetrile (selleks võtame käesoleval juhul külje c) toetuv piirdenurk on täisnurk.

Tähistame kaatetid tähtedega a ja b. Tuntud seostest $a^2+b^2=c^2$ ja $ab=hc$ leiame, et

$$a = \frac{1}{2}\left(\sqrt{c^2+2hc} + \sqrt{c^2-2hc}\right),$$

$$b = \frac{1}{2}\left(\sqrt{c^2+2hc} - \sqrt{c^2-2hc}\right).$$

Ülesanne on lahenduv, kui $h \leqslant \frac{c}{2}$.

180. Tähistades otsitava ruudu külje tähega x, saame ülesande tingimuste kohasele $x^2 = S_\Delta$ ehk

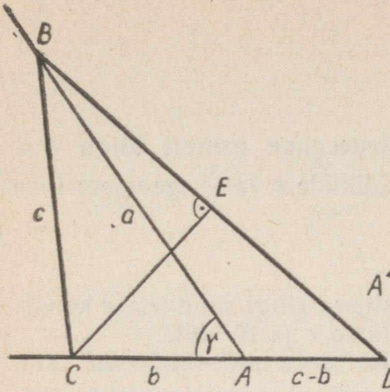
$$x^2 = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Tähistame nüüd $p-a=k$, $p-b=m$, $p-c=n$. Siis

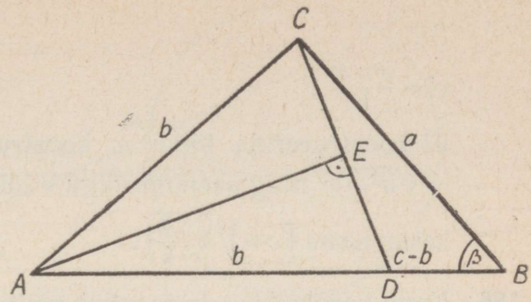
$$x = \sqrt{\sqrt{pkmn}} = \sqrt{\sqrt{pk}\sqrt{mn}}.$$

Tähistades omakorda $\sqrt{pk}=r$ ja $\sqrt{mn}=t$, saame, et $x=\sqrt{rt}$. Et konstrueerida lõik x, konstrueerime kõigepealt lõigud p, k, m ja n, seejärel lõigud r ja t kui vastavad geomeetrilised keskmised ja lõpuks lõigu x.

181. Konstrueerime nurga γ ja kanname selle ühele haarale alates nurga tipust A lõigu a, mille otspunkti tähistame tähega B (joon. 20). Nurga γ teise haara pikendusele kanname lõigu $AD=c-b$. Ühendades punktid B ja D, saame kolmnurga ABD. Kui tähistame otsitava kolmnurga kolmanda tipu



Joon. 20



Joon. 21

tähega C, siis $BC=AC+AD$, s. t. et kolmnurk BCD on võrdhaarne. Punkt, kus külje BD keskristsirge lõikab sirget AD, ongi otsitava kolmnurga tipp C.

182. Antud lõikude a ja $c-b$ ning nurga β abil konstrueerime kolmnurga BDC (joon. 21). Seejärel konstrueerime lõigu CD keskristsirge, mis lõikumisel külje DB pikendusega määrab punkti A asukoha. Ühendades punktid A ja C, saamegi nõutud kolmnurga.

183. Olgu antud nurgad α ja β ning ümbermõõt $ü$. Konstrueerime kolmnurga nurkadega α ja β. Saadud kolmnurk on sarnane otsitava kolmnurgaga. Et sarnaste kolmnurkade ümbermõõdud suhtuvad nagu vastavad küljed, siis $\frac{ü_1}{ü}=\frac{c_1}{c}$ ($ü_1$ ja c_1 on konstrueeritud kolmnurga ümbermõõt ja külg). Kolmnurga külje c konstrueerime kui neljanda võrdelise lõikudele c_1, $ü_1$ ja $ü$. Otsitava kolmnurga konstrueerime nurkade α ja β ning külje c järgi.

184. Konstruktsiooni viime läbi kahes osas: 1) leiame mediaani kui antud lõikude geomeetrilise keskmise, 2) konstrueerime rööpküliku kahe külje ning külgedevahelise diagonaali abil. Otsitavaks kolmnurgaks on pool saadud rööpkülikust.

185. Avaldame otsitava lõigu c trapetsi aluste a ja b kaudu. Trapetsite, milleks lõik c jaotab trapetsi alustega a ja b, kõrgused tähistame sümbolitega h_1 ja h_2. Nüüd

$$\frac{a+c}{2}h_1=\frac{c+b}{2}h_2$$

ja

$$\frac{a+b}{2}(h_1+h_2)=\frac{a+c}{2}h_1+\frac{c+b}{2}h_2.$$

Siit

$$c^2=\frac{a^2+b^2}{2}.$$

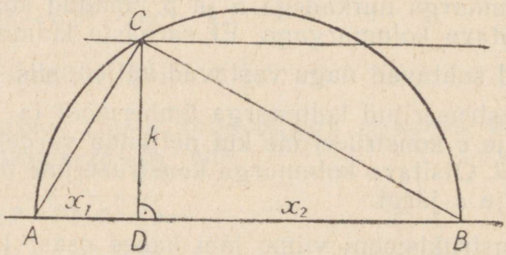
Et konstrueerida lõiku c, konstrueerime esmalt lõigu $k=\sqrt{a^2+b^2}$ ning seejärel lõigu c lõikude k ja $\frac{k}{2}$ geomeetrilise keskmisena $\left(c=\sqrt{k\cdot\frac{k}{2}}\right)$.

186. Kogu konstruktsioon taandub otsitava ringi raadiuse x konstrueerimisele antud ringide raadiuste r ja R abil.

Kuna pindalade vahel kehtib seos $\pi R^2-\pi r^2=\pi x^2$, siis $x=\sqrt{R^2-r^2}$, mis annabki võtte raadiuse x konstrueerimiseks.

187. Olgu kolmnurga alus a ning kõrgus h ja ristküliku küljed b ning c. Tähistame otsitava ristküliku küljed sümbolitega x_1 ja x_2.

Vastavalt ülesande tingimustele $x_1x_2=\frac{a}{2}\cdot h$ ja $x_1+x_2=b+c$. Kui konstrueerida esmalt lõigud $k=\sqrt{\frac{a}{2}\cdot h}$ ja $s=b+c$, siis võib lõikude x_1 ja x_2 konstrueerimist vaadelda kui ruutvõrrandi $x^2-sx+k^2=0$ lahendite konstrueerimist (vt. ülesanne 188).



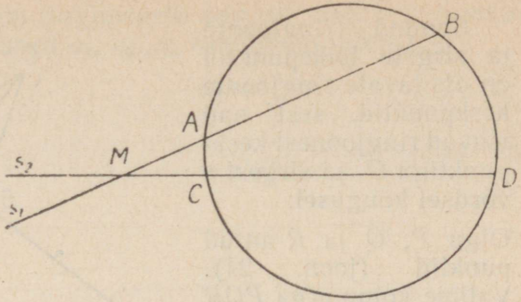
Joon. 22

Lõigud x_1 ja x_2 võib konstrueerida ka otse seoste $x_1x_2=k^2$, $x_1+x_2=s$ põhjal (joon. 22). Selleks konstrueerime lõigule s kui diameetrile ($AB=s$) täisnurkse kolmnurga (ABC) kõrgusega k ($CD=k$). Otsitavateks lõikudeks x_1 ja x_2 on lõigud AD ning DB.

188. Vaatleme eraldi kahte juhtu.

I. Punktid A ja B asuvad samal pool sirgete lõikepunkti M (joon. 23). Ülesanne on lahendatud, kui on teada kas punkti C või D asukoht. Tähistame $MD=x$, $MA=a$, $MB=b$, $CD=c$. Viimased kolm lõiku on teada, otsitavaks on x. Rakendades teoreemi ringjoone lõikajatest, saame, et

Joon. 23



$ab = x(x-c)$ ehk $x^2 - cx - ab = 0$.

Konstrueerime esmalt lõigu

$ab = h^2$,

seejärel võrrandi

$x^2 - cx - h^2 = 0$

lahendid

$$x = \frac{c}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + h^2}.$$

Selleks leiame kõigepealt lõigu $k = \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + h^2}$ ja seejärel lõigud $x_{1,2} = \frac{c}{2} \pm k$. Siis on ühtlasi teada otsitavast ringjoonest kolm punkti (A, B ja D) ning kogu ülesanne ongi lahendatud.

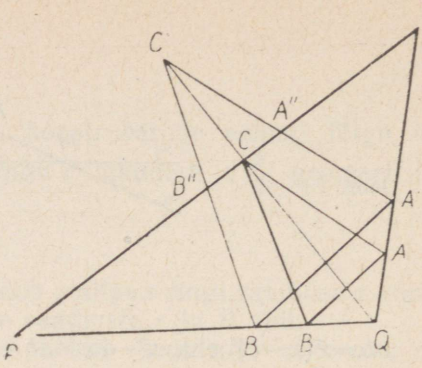
II. Punktid A ja B asuvad teine teisel pool sirgete lõikepunkti M. Kasutame samu tähistusi mis eelneval juhul. Rakendades teoreemi lõikuvatest kõõludest, jõuame võrrandini $x^2 - cx + ab = 0$. Lõigu x konstrueerimine toimub põhimõtteliselt samal viisil kui eelneval juhul.

Märkus. Võrrandite lahendite konstrueerimise kohta vt. D. I. Perepjolkin. Elementaargeomeetria kursus I. Tallinn, 1951, § 76, lk. 228—232.

189. On antud ringjoon keskpunktiga O_1 ja raadiusega r_1 ning sirge s. Tähistame otsitava ringjoone raadiuse tähega R.

Vastavalt ülesande tingimustele peab otsitava ringjoone keskpunkt asuma võrdsel kaugusel nii ringjoonest keskpunktiga O_1 kui ka sirgest s. Seega on ülesanne lahendatav geomeetriliste kohtade meetodil. Selleks joonestame sirgele s kaugusel R paralleelsed sirged s_1 ja s_2 ning ringjooned keskpunktiga O_1 ning raadiustega $r_1 + R$ ja $r_1 - R$ (kui $r_1 > R$).

Saadud ringjoonte ja sirgete lõikepunktid on otsitavate ringjoonte keskpunktid, sest nad asuvad ringjoonest keskpunktiga O_1 ja sirgest s võrdsel kaugusel.



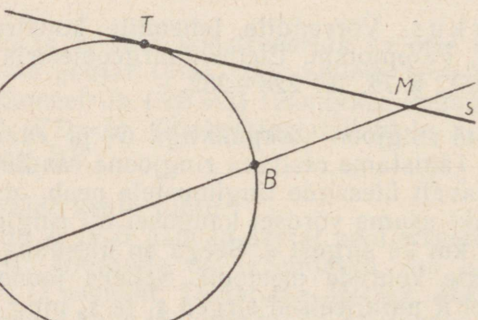
Joon. 24

190. Olgu P, Q ja R antud punktid (joon. 24). Valime kolmnurga PQR ühel küljel (RQ) suvalise punkti A' ja konstrueerime punkti B' nii, et $QB'=QA'$, punkti B'' nii, et $PB''=PB'$, ja punkti A'' nii, et $RA''=RA'$. Sirgete $B'B''$ ja $A'A''$ lõikepunkti tähistame tähega C'. Teeme kolmnurga $A'B'C'$ sarnasusteisenduse punkti Q suhtes nii, et C' teisend C tuleb kolmnurga PQR küljele PR. Saadud kolmnurga ABC tipud on otsitavate ringjoonte puutepunktideks.

191. Vaatleme eraldi kahte juhtu.

I. Sirge AB on paralleelne sirgega s. Vaadeldaval juhul on ülesande lahendamine lihtne, sest otsitava ringjoone keskpunkt peab asuma ühelt poolt võrdsel kaugusel sirgetest s ja AB ning teiselt poolt lõigu AB keskristsirgel. Lahendeid on üks.

II. Sirge AB lõikub sirgega s punktis M (joon. 25). Ülesande lahendamiseks tuleb leida puutepunkti T asukoht. Tähistades $MT=x$, $AM=a$ ja $BM=b$, saame $ab=x^2$. Viimase seose põhjal konstrueerime lõigu x. Sellega on punkti T asukoht leitud ja otsitavaks ringjooneks on ringjoon läbi punktide A, B ning T. Lahendeid on kaks, sest punkt T võib asuda mõlemal pool punkti M.



Joon. 25

192. Vastavalt ülesande tingimusele peavad antud geomeetrilise progressiooni liikmed a_1, a_2, a_3 rahuldama võrratusi

$$\begin{cases} a_1+a_2>a_3 \\ a_1+a_3>a_2 \\ a_2+a_3>a_1, \end{cases}$$

millest

$$\begin{cases} q^2-q-1<0 \\ q^2-q+1>0 \\ q^2+q-1>0. \end{cases}$$

Lahendades saadud võrrandisüsteemi, leiame, et

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2}<q<\frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

193. Vastavalt ülesande tingimustele

$$c^2=a^2+b^2$$

ehk

$$a^2=(c+b)(c-b). \tag{1}$$

Logaritmime viimast võrdust alusel $c+b$ ja alusel $c-b$. Siis

$$2 \log_{c+b} a=1+\log_{c+b}(c-b) \tag{2}$$

ja

$$2 \log_{c-b} a=1+\log_{c-b}(c+b). \tag{3}$$

Korrutades võrdused (2) ja (3), saame

$$4 \log_{c+b} a \log_{c-b} a=1+\log_{c-b}(c+b)+\log_{c+b}(c-b)+$$
$$+\log_{c+b}(c-b) \log_{c-b}(c+b). \tag{4}$$

Kasutades valemit

$$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a},$$

leiame, et

$$\log_{c+b}(c-b) \log_{c-b}(c+b)=1$$

ning võrdus (4) saab kuju

$$4 \log_{c+b} a \log_{c-b} a=2+\log_{c-b}(c+b)+\log_{c+b}(c-b). \tag{5}$$

Et

$$c-b=\frac{a^2}{c+b} \text{ ja } c+b=\frac{a^2}{c-b},$$

siis seos (5) saab kuju

$$4\log_{c+b} a \log_{c-b} a = 2+\log_{c-b}\frac{a^2}{c-b}+\log_{c+b}\frac{a^2}{c+b}.$$

Siit

$$2\log_{c+b} a \log_{c-b} a = \log_{c-b} a + \log_{c+b} a$$

ning nõutud väide ongi tõestatud.

194. Täisnurkses kolmnurgas (joon. 26)

$$h^2 = x(c-x),$$

millest

$$\frac{1}{h^2}=\frac{1}{x(c-x)}. \qquad (1)$$

Et

$$a^2 = xc \text{ ja } b^2=(c-x)c,$$

siis

$$x=\frac{a^2}{c} \text{ ja } c-x=\frac{b^2}{c}.$$

Tehes viimastest võrdustest vastavad asendused seosesse (1), saame

$$\frac{1}{h^2}=\frac{c^2}{a^2b^2}.$$

Kuna $c^2=a^2+b^2$, siis

$$\frac{1}{h^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2},$$

millega väide ongi tõestatud.

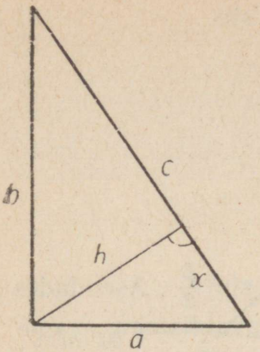
195. Et $CD=CF=r$ (joon. 27) ja $AE=AD=b-r$ ning $EB=BF=$ $=a-r$, siis

$$AB=AE+EB=b-r+a-r.$$

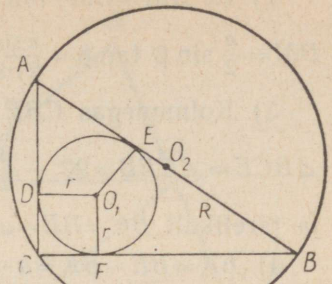
Et aga $AB=2R$, siis $2R=a+b-2r$ ehk

$$a+b=2(r+R).$$

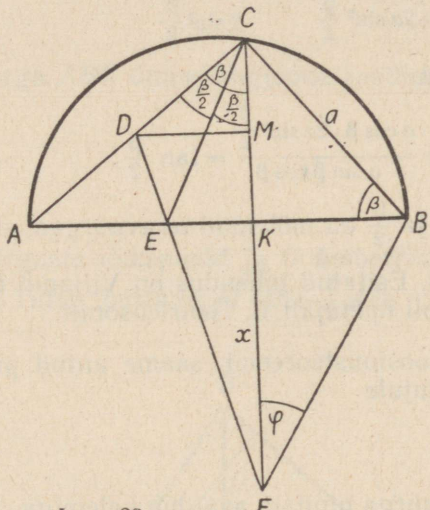
196. Ülesanne on lahendatud, kui tõestame, et $\varphi=\frac{\beta}{2}$ (joon. 28). Kolmnurgast KBF $\tan\varphi=\frac{BK}{KF}$ ja kolmnurgast CKB $BK=$ $=a\cos\beta$. Et leida $KF=x$, joonestame $DM \parallel EK$. Kolmnurkade FEK ning FDM sarnasuse põhjal



Joon. 26



Joon. 27



Joon. 28

$$\frac{MD}{EK}=\frac{MK+x}{x} \text{ ehk } \frac{MD-EK}{EK}=\frac{MK}{x}.$$

Siit

$$x=\frac{EK \cdot MK}{DM-KE}. \tag{1}$$

Leiame järgnevalt lõigud EK, MK ja DM.

1) $MK=\frac{1}{2}\ CK$, sest $AD=DC$ ja $DM \| AB$. Kolmnurgast KCB võime kirjutada, et $KC=a \sin \beta$ ja seega

$$MK=CM=\frac{a}{2}\sin \beta.$$

2) Et $DM=CM\cdot\tan\beta$ ($\triangle CDM$), siis

$$DM=\frac{a}{2}\sin\beta\,\tan\beta=\frac{a\sin^2\beta}{2\cos\beta}.$$

3) Kolmnurgas CBE

$$\angle BCE=\angle CEB=90^\circ-\frac{\beta}{2}$$

ja järelikult $BC=BE=a$.

4) $EK=BE-BK=a-a\cos\beta=2a\sin^2\frac{\beta}{2}$. Asendades seoses (1) lõigud EK, MK ja DM leitud avaldistega, saame

$$x=\frac{2a\sin^2\frac{\beta}{2}\cdot\frac{a}{2}\sin\beta}{\frac{a\sin^2\beta}{2\cos\beta}-2a\sin^2\frac{\beta}{2}}=\frac{a\sin\beta\cos\beta}{2\sin^2\frac{\beta}{2}}.$$

Leiame nüüd

$$\tan\varphi=\frac{BK}{KF}=\frac{a\cos\beta\cdot 2a\sin^2\frac{\beta}{2}}{a\sin\beta\cos\beta}=\tan\frac{\beta}{2}.$$

Et nurgad φ ja $\frac{\beta}{2}$ on mõlemad teravnurgad, siis $\varphi=\frac{\beta}{2}$.

Märkus. Esitatud lahendus on Viljandi C. R. Jakobsoni nim. Keskkooli õpetajalt B. Henrichsonilt.

197. Kasutades koosinusteoreemi, saame antud pindala avaldise teisendada kujule

$$S=\frac{ab\cos\gamma}{2}.$$

Et aga kolmnurga pindala avaldub valemiga

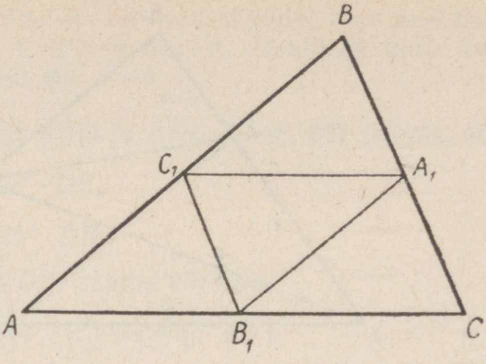
$$S=\frac{ab\sin\gamma}{2},$$

siis antud juhul peab

$$\cos\gamma=\sin\gamma,$$

millest järeldub, et $\gamma=45^\circ$.

198. Vaatleme kolmnurka ABC (joon. 29). Olgu tema ümberringjoone raadius R ja siseringjoone raadius r. Ühendades kolmnurga ABC külgede keskpunktid, saame kolmnurga $A_1B_1C_1$, mis on kolmnurgaga ABC sarnane. Et kolmnurga $A_1B_1C_1$ ümberringjoon raadiusega R_1 on kas kolmnurga ABC siseringjooneks või asub osalt väljaspool seda kolmnurka, siis



Joon. 29

$R_1 \geqslant r.$

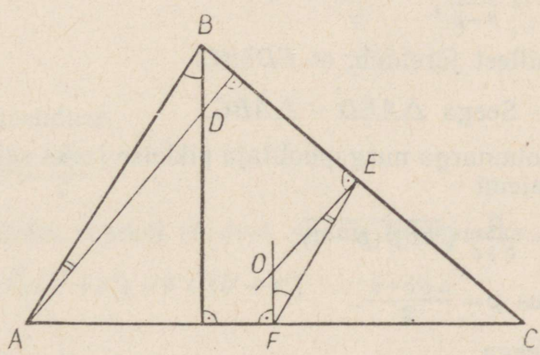
Et kolmnurga ABC ümberringjoone raadius

$R = 2R_1,$

siis

$R \geqslant 2r.$

199. Olgu D kõrguste lõikepunkt ja O ümberringjoone keskpunkt (joon. 30). Tuleb tõestada, et $OE = \frac{1}{2}\, AD$.

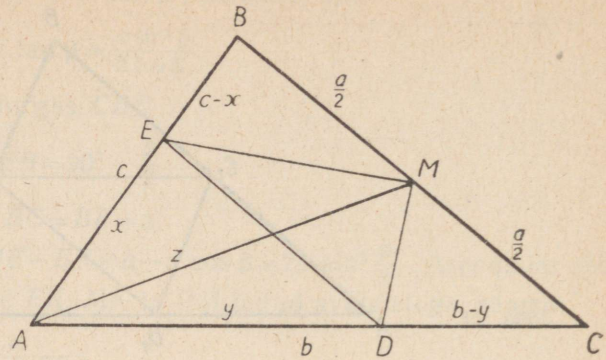


Joon. 30

Et $\triangle ABD \sim \triangle OFE$, siis

$\frac{OE}{AD} = \frac{EF}{AB} = \frac{1}{2},$

millest $OE = \frac{1}{2} AD.$



Joon. 31

200. Vaatleme kolmnurka ABM (joon. 31). Nurgapoolitaja (EM) omaduse põhjal

$$\frac{x}{z}=\frac{c-x}{\frac{a}{2}} \text{ ehk } \frac{x}{z}=\frac{2(c-x)}{a}.$$

Samal viisil saame kolmnurgast AMC võrduse

$$\frac{y}{z}=\frac{2(b-y)}{a}.$$

Jagades viimaste võrduste vastavad pooled omavahel, saame võrde

$$\frac{x}{y}=\frac{c-x}{b-y},$$

millest järeldub, et $ED \| BC$.

Seega $\triangle AED \sim \triangle ABC$.

201. Kolmnurga nurgapoolitaja pikkuse jaoks saime ülesandes 165 valemi

$$l=\frac{2}{b+c}\sqrt{bc\,p(p-a)},$$

kus $p=\frac{a+b+c}{2}$.

Seega

$$l_a=\frac{2}{b+c}\sqrt{bc\,p(p-a)},$$

$$l_b=\frac{2}{a+c}\sqrt{ac\,p(p-b)}.$$

Eelduse põhjal $l_a=l_b$, millest

$$(a-b)[4p(p-b)(p-a)+ab(p-a)+(p-b)a^2+pb^2]=0.$$

Et $p>b$ ja $p>a$, siis on nurksulgudes olev avaldis igal juhul positiivne, s. t. erineb nullist. Järelikult peab kehtima tingimus $a-b=0$ ehk $a=b$.

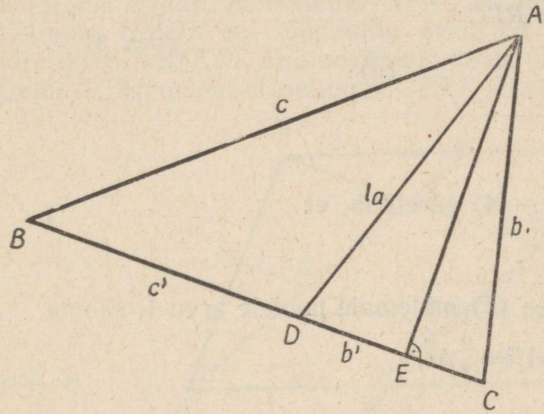
202. Kolmnurkadest ABD ja ADC (joon. 32) leiame, et

$$c^2=l_a^2+c'^2+2c'\cdot DE,$$

$$b^2=l_a^2+b'^2-2b'\cdot DE.$$

Elimineerides DE, saame võrduse

$$b'c^2+c'b^2=l_a^2(b'+c')+c'b'(c'+b').$$



Joon. 32

Tehes siin asenduse

$$c'=\frac{b'c}{b} \text{ ja } b'=\frac{c'b}{c}$$

ning teisendades saadud võrdust, saame tulemuseks

$$bc(c'+b')=l_a^2(b'+c')+b'c'(b'+c')$$

ehk

$$l_a^2=bc-b'c'.$$

203. Täisnurksetest kolmnurkadest AFD ja CFD (joon. 33)

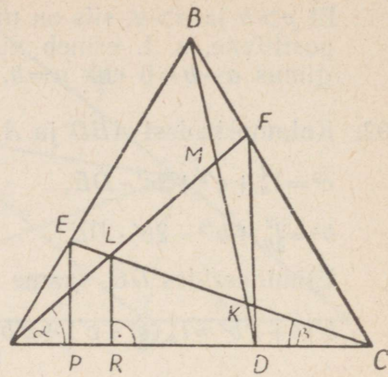
$$\tan\alpha=\frac{FD}{AD}$$

ja

$$\tan 60^\circ=\frac{FD}{DC}.$$

Siit

$$\tan\alpha = \frac{\tan 60^\circ}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \qquad (1)$$



Joon. 33

Kasutades analoogilist mõttekäiku, leiame täisnurksetest kolmnurkadest CEP ja AEP, kus $PC = 5AP$, et

$$\tan\beta = \frac{\sqrt{3}}{5}. \qquad (2)$$

Täisnurksetest kolmnurkadest ALR ja RLC

$$\tan\beta = \frac{LR}{AR} \qquad (3)$$

ja

$$\tan = \beta \frac{LR}{RC}. \qquad (4)$$

Seostest (1) – (4) järeldub, et

$$\frac{RC}{AR} = \frac{5}{2}. \qquad (5)$$

Liites võrduse (5) mõlemale poolele arvu 1, saame

$$\frac{AC}{AR} = \frac{7}{2} \text{ ehk } AR = \frac{2}{7}AC. \qquad (6)$$

Kuna

$$S_{ACL} = S_{BCK} = S_{ABM},$$

siis

$$S_{KLM} = S_{ABC} - 3S_{ACL}.$$

Leiame kummagi pindala eraldi:

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}AC^2$$

ja

$$S_{ACL} = \frac{AC \cdot LR}{2}. \qquad (7)$$

Kolmnurgast ALR

$$LR = AR \cdot \tan\alpha.$$

Kasutades seoseid (1) ja (6)

$$LR = \frac{\sqrt{3}}{7}AC.$$

Asendades saadud tulemuse seosesse (7) leiame, et

$$S_{ACL}=\frac{\sqrt{3}\cdot AC^2}{14}$$

ning

$$S_{KLM}=\frac{\sqrt{3}}{4}AC^2-\frac{3\sqrt{3}}{14}AC^2=\frac{\sqrt{3}}{28}AC^2.$$

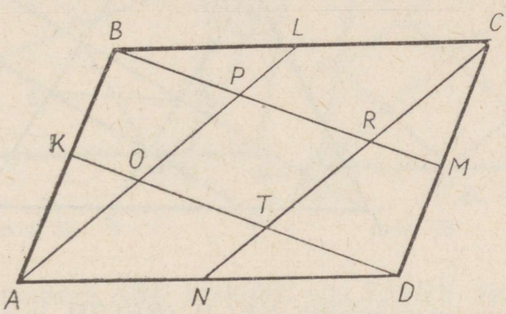
Järelikult

$$\frac{S_{ABC}}{S_{KLM}}=7,$$

millest

$$S_{ABC}=7S_{KLM}.$$

204. Tõestame esmalt, et nelinurk $OPRT$ on rööpkülik (joon. 34). Nelinurk $BMDK$ on rööpkülik, sest $BK=DM$ ja $BK\parallel DM$. Järelikult $BM\parallel KD$. Analoogiliselt saab näidata, et $AL\parallel NC$. Öeldust järgnebki, et nelinurk $OPRT$ on rööpkülik.



Joon. 34

Leiame pindala S_{OPRT}. Pole raske näha, et

$$S_{ABL}=S_{CDN}=\frac{1}{4}Q \text{ ja } S_{BCM}=S_{AKD}=\frac{1}{4}Q.$$

Selleks piisab vaid lõikude LN ja KM joonestamisest. Ühelt poolt

$$S_{OPRT}=Q-(S_{ABL}+S_{BCM}+S_{CDN}+S_{AKD})+S_{BLP}+S_{CMR}+$$

$$+S_{DNT}+S_{AKO}=Q-4\cdot\frac{1}{4}Q+S_{BLP}+S_{CMR}+S_{DNT}+S_{AKO}+$$

$$+S_{CMR}+S_{DNT}+S_{AKO}. \qquad (1)$$

Teiselt poolt aga

$$S_{OPRT}=Q-(S_{BCR}+S_{CDT}+S_{AOD}+S_{ABP}). \qquad (2)$$

Kolmnurkade CDT ja CMR sarnasusest ning suhtest $\frac{CM}{CD}=\frac{1}{2}$ järeldub, et

$$\frac{S_{CMR}}{S_{CDT}}=\frac{1}{4} \text{ ehk } S_{CDT}=4S_{CMR}.$$

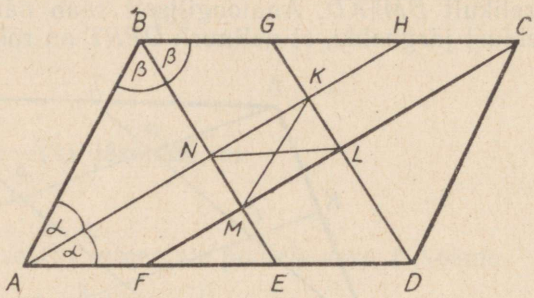
Analoogiliselt saab näidata, et

$$S_{BCR}=4S_{BLP},\ S_{AOD}=4S_{DNT} \text{ ja } S_{ABP}=4S_{AKO}.$$

Asendades leitud tulemused võrdusesse (2) ning arvestades võrdust (1) saame

$$S_{OPRT}=Q-4S_{OPRT} \text{ ehk } S_{OPRT}=\frac{1}{5}Q.$$

205. Et $\angle A+\angle B=2\alpha+2\beta=180°$, siis $\alpha+\beta=90°$. Järelikult $\angle KNM=\angle ANB=90°$ (joon. 35).



Joon. 35

Seega on rööpkülik $NKLM$ ($BE \parallel GD$ ja $AH \parallel FC$) ristkülik. Jääb veel tõestada, et ristküliku $NKLM$ diagonaalid NL ja KM võrduvad rööpküliku kahe lähiskülje vahega.

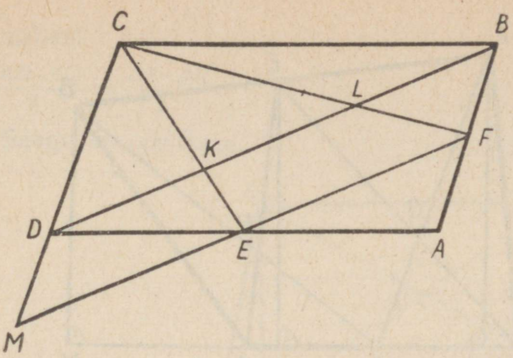
Et $AE=AB$, siis $ED=AD-AB$ ja et nelinurk $ENLD$ on rööpkülik ($NE \parallel LD$ ja $NE=LD$), siis $ED=NL$. Järelikult

$$KM=NL=AD-AB.$$

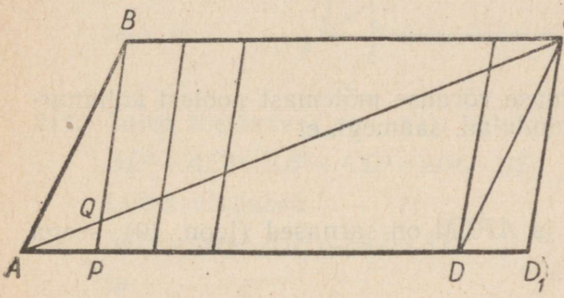
206. Kuna kolmnurgad DEM ja AFE on võrdsed, siis $ME=EF$ (joon. 36). Järelikult ka $DK=KL$. Analoogiliselt saab näidata, et $KL=LB$. Seega

$$DK=KL=LB.$$

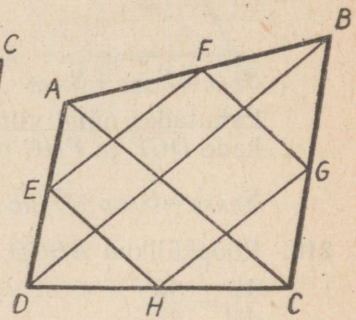
207. Pikendame rööpküliku külge AD lõigu $\frac{1}{n}AD$ võrra (joon 37). Saadud lõik AD_1 on jaotatud $n+1$ võrdseks osaks. Joonestades lõigu AD_1 igast jaotuspunktist (D_1 kaasa arvatud) paralleelsed lõigud lõiguga PB, jaotub nurga CAD_1 haar AC $n+1$ võrdseks osaks. Üks neist osadest on AQ. Järelikult $AQ=$ $=\frac{1}{n+1}AC$.



Joon. 36



Joon. 37



Joon. 38

208. Et EF on kolmnurga ABD kesklõik, siis $EF \| DB$ (joon. 38). Samuti ($\triangle DBC$) $GH \| DB$. Seega $EF \| HG$. Analoogilise mõttekäiguga leiame, et $FG \| EH$ ($\triangle DBC$ ja $\triangle ACD$).

Seega on kujund $EFGH$ rööpkülik.

209. Veendume esmalt (joon. 39), et kehtib võrdus

$$S_{DEC} = S_{DAF} + S_{FBC}.$$

Et

$$S_{DAF} = \frac{DF \cdot AK}{2} \text{ ja } S_{FBC} = \frac{FC \cdot BM}{2},$$

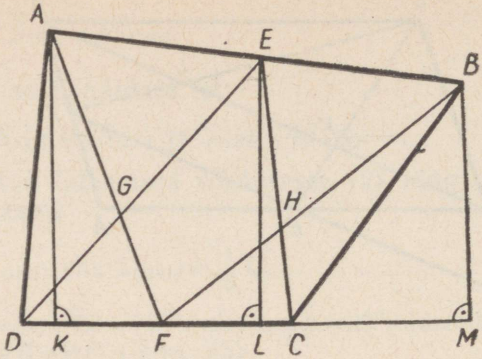
siis

$$S_{DAF} + S_{FBC} = \frac{DF}{2}(AK + BM).$$

Trapetsis $AKMB$ on EL kesklõiguks, mistõttu $AK + BM = 2EL$. Seega

$$S_{DAF} + S_{FBC} = DF \cdot EL.$$

Et aga $DF = \frac{DC}{2}$, siis



Joon. 39

$S_{DEC} = S_{DAF} + S_{FBC}.$

Lahutades nüüd viimase võrduse mõlemast poolest kolmnurkade DGF ja FHC pindalad, saamegi, et

$S_{EHFG} = S_{AGD} + S_{BHC}.$

210. Rööpkülikud $ABCD$ ja $APLM$ on sarnased (joon. 40), seega

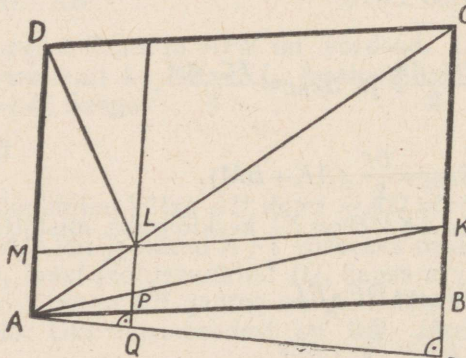
$\frac{AD}{AM} = \frac{AB}{AP}.$

Et

$\frac{AB}{AP} = \frac{AR}{AQ},$

siis ka

$\frac{AD}{BK} = \frac{AR}{AQ},$

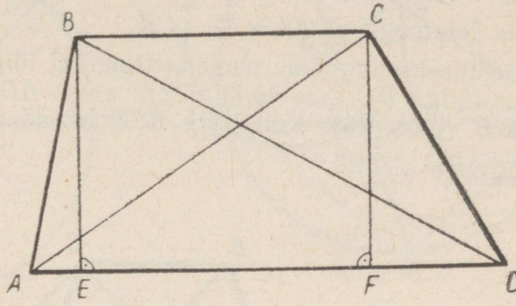


Joon. 40

millest

$$\frac{AD \cdot AQ}{2} = \frac{BK \cdot AR}{2}.$$

Seega $S_{ABK} = S_{ALD}$.



Joon. 41

211. Tuleb tõestada (joon. 41), et

$BD^2 + AC^2 = AB^2 + CD^2 + 2BC \cdot AD.$

Liites võrdused

$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AD \cdot AE$

ja

$AC^2 = CD^2 + AD^2 - 2AD \cdot FD$

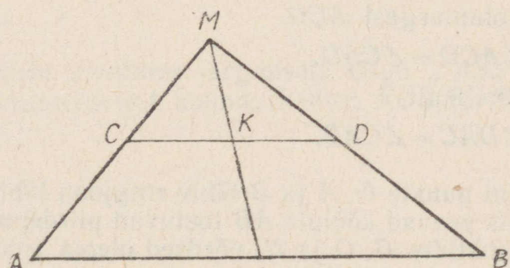
ning arvestades, et

$AD - AE - FD = BC,$

saamegi soovitud tulemuse

$BD^2 + AC^2 = AB^2 + CD^2 + BC \cdot 2AD.$

212. Olgu trapetsi aluste keskpunktid K ja L. Pikendades haarasid, saame kolmnurga AMB. Et trapetsi alusnurkade summa on $\frac{\pi}{2}$, siis on nurk M täisnurk (joon. 42). Seega



Joon. 42

$$MK = \frac{CD}{2}$$

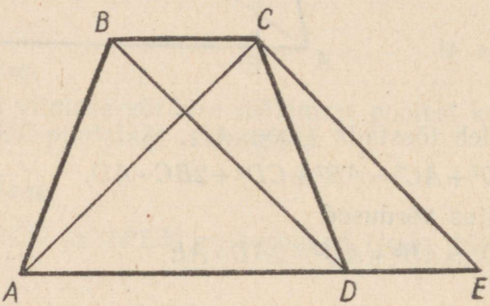
ja et

$$\frac{CK}{AL} = \frac{MK}{MK+KL},$$

siis leiamegi, et $KL = AL - CK$.

213. Tõestuseks tõmbame trapetsi tipust C lõigu paralleelselt diagonaaliga BD kuni lõikumiseni aluse AD pikendusega punktis E (joon. 43). Kolmnurk ACE on võrdhaarne, seetõttu

$$\angle CAE = \angle CEA.$$



Joon. 43

Et

$$\angle CEA = \angle BDA,$$

siis on kolmnurgad ACD ja ABD kongruentsed ning järelikult $AB = CD$.

214. Et (joon. 44)

$AD \perp s$ ja $OC \perp s$,

siis $AD \parallel OC$ ning

$\angle DAC = \angle ACO$.

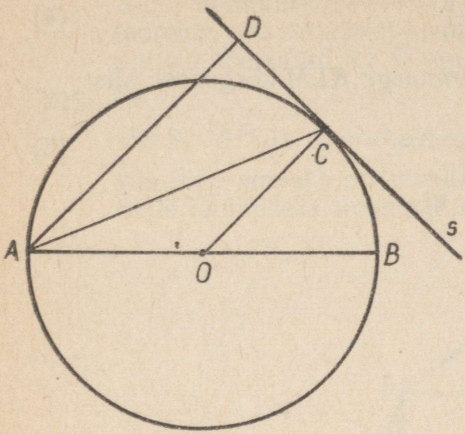
Kolmnurgast ACO

$\angle ACO = \angle CAO$.

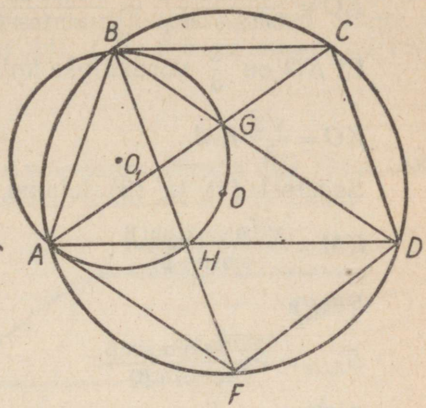
Järelikult

$\angle DAC = \angle CAB$.

215. Kui punkte O, A ja B läbiv ringjoon läbib ka punkte G ja H, siis peavad kõõlule AB toetuvad piirdenurgad, mille tipud on punktides G, O ja H, võrdsed olema (joon. 45). Et seda näidata, arvutame



Joon. 44



Joon. 45

$$\angle AOB = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ,$$

$$\angle ABC = \frac{5-2}{5} \cdot 180^\circ = 108^\circ,$$

$$\angle ABG = \frac{108^\circ}{3} \cdot 2 = 72^\circ,$$

$$\angle BAG = \frac{108^\circ}{3} = 36^\circ,$$

$$\angle AGB = 180^\circ - 72^\circ - 36^\circ = 72^\circ.$$

Järelikult $\angle AOB = \angle AGB = \angle AHB$.

216. Et $SS' = h$ (joon. 46), siis

$$V = \frac{1}{3} S_{KLM} \cdot OS + \frac{1}{3} S_{KLM} \cdot OS' = \frac{1}{3} S_{KLM} \cdot h.$$

Võrdkülgse kolmnurga KLM pindala

$$S_{KLM} = \frac{\sqrt{3}\, KM^2}{4}. \qquad (1)$$

Lõigu KM pikkuse arvutame järgmiselt. Olgu $\angle ASS' = \alpha$ ja $\angle A'S'S = \beta$. Täisnurksetest kolmnurkadest KOS ja KOS'

$$KO = x \tan \alpha \qquad (2)$$

ja

$$KO = (h - x) \tan \beta, \qquad (3)$$

kus $x = OS$.

Seostest (2) ja (3)

$$KO = \frac{h \tan\alpha \tan\beta}{\tan\alpha + \tan\beta} = \frac{h \sin\alpha \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}. \tag{4}$$

Et KO on $\frac{2}{3}$ võrdkülgse kolmnurga KLM kõrgusest, siis

$$KO = \frac{\sqrt{3}}{3} KM. \tag{5}$$

Seostest (4) ja (5) leiame, et

$$KM = \frac{\sqrt{3}\, h \sin\alpha \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Seega

$$S_{KLM} = \frac{3\sqrt{3} \sin^2\alpha \sin^2\beta}{4 \sin^2(\alpha+\beta)}$$

ning

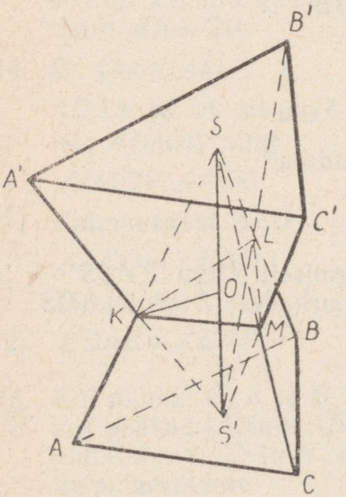
$$V = \frac{\sqrt{3}\; h^3 \sin^2\alpha \sin^2\beta}{4 \sin^2(\alpha+\beta)}.$$

217. Et $AF = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, siis $AE = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ (joon. 47).

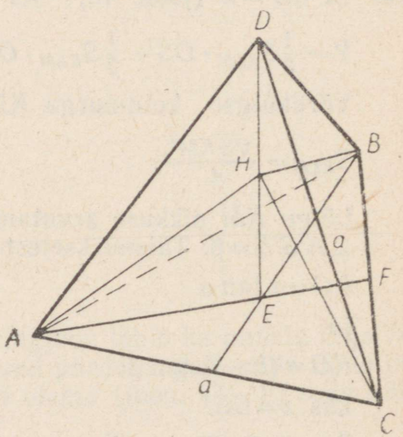
Kolmnurgast ADE $DE = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ ning $HE = \frac{a\sqrt{6}}{6}$ ning kolmnurgast AHE $AH = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Analoogiliselt leiame, et ka

$BH = HC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Joon. 46



Joon. 47

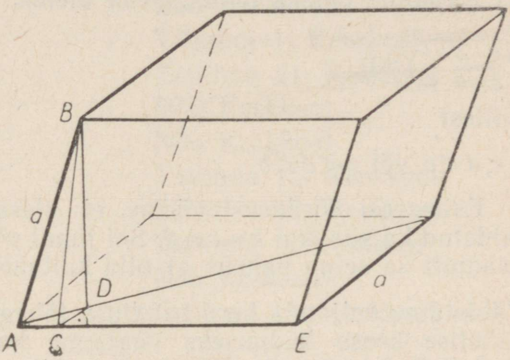


Kuna kolmnurkades AHC, CHB ja BHA kehtib Pythagorase teoreem, siis on nimetatud kolmnurgad täisnurksed. Seega on ühtlasi tõestatud, et lõigud AH, CH, BH on omavahel risti.

218. Et

$V=S_p \cdot BD$ ja $S_p=a^2 \sin \alpha$,

siis jääb ainsaks otsitavaks suuruseks kõrgus BD (joon. 48). Selle leidmiseks tõmbame $BC \perp AE$ ja $DC \perp AE$. Edasi



Joon. 48

kolmnurgast ABC: $BC=a \sin \alpha$ ja $AC=a \cos \alpha$,

kolmnurgast ADC: $DC=a \cos \alpha \tan \frac{\alpha}{2}$,

kolmnurgast BDC: $BD^2=a^2 \sin^2 \alpha - a^2 \cos^2 \alpha \tan^2 \frac{\alpha}{2}$.

Pärast teisendamist

$$BD=\frac{a}{\cos \frac{\alpha}{2}} \sqrt{\sin \frac{3\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2}}$$

ning

$$V=2a^3 \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{\sin \frac{3\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2}}.$$

219. Ülesande tingimuste kohaselt

$$\frac{4}{3}\pi r^3 c+\left[\frac{4}{3}\pi (r+a)^3-\frac{4}{3}\pi r^3\right]b=\frac{4}{3}\pi (r+a)^3 d$$

ehk

$$cr^3+[(r+a)^3-r^3]b=(r+a)^3 d.$$

Suuruse r avaldame siit järgmiselt:

$$(r+a)^3(b-d)=r^3(b-c),$$

millest

$$\left(\frac{r+a}{r}\right)^3=\frac{b-c}{b-d}$$

ning

$$r=\frac{a}{\sqrt[3]{\frac{b-c}{b-d}}-1}.$$

Et ülesanne omaks mõtet, peab olema

$$\sqrt[3]{\frac{b-c}{b-d}}-1>0,$$

millest

$$b<d<c \text{ või } c<d<b.$$

Esimesest võrdusest näeme, et ülesande tingimused on täidetud ka siis, kui $b=c=d$. Sel juhul võib ballooni raadius r (samuti ka seina paksus a) olla kuitahes suur.

220. Tähistame neljanda kera raadiuse tähega x. Suuruste x ja r vahelise seose leidmiseks vaatleme korrapärast püramiidi $O_1O_2O_3O$, kus O_1, O_2, O_3 on põrandal asuvate kerade keskpunktid ja O on neljanda kera keskpunkt (joon. 49). Püramiidi põhiservad on $2r$ ja külgservad $x+r$. Neljanda kera madalaim punkt $Q\,(OQ=x)$ asub püramiidi kõrgusel OP põhjast $O_1O_2O_3$ kõrgusel $\frac{1}{2}r$. Seega $OP=x+\frac{1}{2}r$.

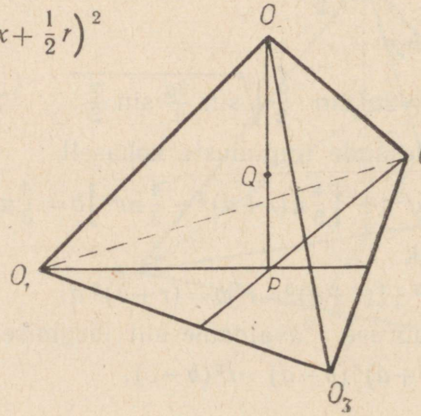
Kolmnurgas O_1OP

$$O_1P=\frac{2r\sqrt{3}}{3}$$

ning

$$(r+x)^2=\left(\frac{2r\sqrt{3}}{3}\right)^2+\left(x+\frac{1}{2}r\right)^2$$

ja siit $x=\frac{7}{12}r$.



Joon. 49

1969. A. TOIMUNUD XVI TÄPPISTEADUSTE OLÜMPIAADI VÕITJAD MATEMAATIKAS

1.	Vello **Altleis**	Nõo Keskkool
2.	Jaak **Kütt**	Viljandi 1. Keskkool
3.	Matti **Selg**	Tallinna 21. Keskkool
4.	Ülo **Samarüütel**	Nõo Keskkool
5.	Toomas **Vään**	Nõo Keskkool
6.	Vladimir **Ess**	Tallinna 15. Keskkool
7.	Jevgeni **Štšurov**	Tallinna 15. Keskkool
8.	Peeter **Normak**	Tallinna 1. Keskkool
9.	Ants **Soon**	Nõo Keskkool
10.	Nikolai **Korolkov**	Tallinna 15. Keskkool

XVI MATEMAATIKA OLÜMPIAADI ÜLESANDED JA NENDE LAHENDUSED

1. Leida võrrandi

$$x!+y!=10z+9$$

kõik täisarvulised lahendid.

L a h e n d u s. Et võrrandi parem pool on paaritu arv, siis peab võrrandi vasakul poolel kas $x!$ või $y!$ olema võrdne 1-ga. Olgu $x!=1$, s. t. $x=1$, siis $y!=10z+8$. Arv $10z+8$ ei jagu 5-ga. Järelikult peab $y\leqslant 4$. Asendades viimases võrrandis y tema võimalike väärtustega 1, 2, 3, 4, saame võrrandid vastavate z väärtuste jaoks. Neist ühelgi pole täisarvulist lahendit. Seega antud võrrandil puuduvad täisarvulised lahendid.

2. Kolmnurga külgede pikkused moodustavad geomeetrilise progressiooni. Tõestada, et see kolmnurk on sarnane kolmnurgaga, mille külgedeks on antud kolmnurga kõrgused.

L a h e n d u s. Olgu $a\leqslant b\leqslant c$. Siis geomeetrilise progressiooni omaduse põhjal $b^2=ac$. Kolmnurga kõrgused avaldame pindala ja vastava külje (aluse) kaudu:

$$h_a=\frac{2S}{a},\ h_b=\frac{2S}{b},\ h_c=\frac{2S}{c}$$

ning leiame siis kõrguste suhted, mille teisendamisel kasutame ka antud eeldust. Saame:

$$h_a:h_b:h_c=\frac{2S}{a}:\frac{2S}{b}:\frac{2S}{c}=\frac{1}{a}:\frac{1}{b}:\frac{1}{c}=\frac{ac}{a}:\frac{b^2}{b}:\frac{ac}{c}=$$
$$=c:b:a.$$

Järelikult on antud kolmnurk sarnane tema kõrgustest moodustatud kolmnurgaga.

3. Leida x, kui

$$\frac{\sin 3x\cos(60°-4x)+1}{\sin(60°-7x)-\cos(30°+x)+m}=0,$$

kus m on reaalarv.

L a h e n d u s. Antud võrrandist järeldub, et samaaegselt peavad kehtima tingimused:

$$\begin{cases} \sin 3x \cos(60^\circ - 4x) = -1 \\ \sin(60^\circ - 7x) - \cos(30^\circ + x) + m \neq 0. \end{cases} \quad (1)$$

Esimesest tingimusest järeldub, et

$$\begin{cases} \sin 3x = -1 \\ \cos(60^\circ - 4x) = 1 \end{cases} \quad (2) \text{ või } \begin{cases} \sin 3x = 1 \\ \cos(60^\circ - 4x) = -1. \end{cases} \quad (3)$$

Süsteemi (2) lahendamisel saame

$$x = \frac{2}{3} k\pi + \frac{\pi}{2} \text{ ja } x = \frac{\pi}{2} l + \frac{\pi}{12},$$

millest $6l - 8k = 5$. Et niisugust täisarvude paari k ja l ei leidu, mis seda võrrandit rahuldaks, siis süsteemil (2) pole lahendeid. Süsteemi (3) lahendiks on

$$x = 2\pi t + \frac{5}{6}\pi.$$

Asendades selle väärtuse süsteemi (1) teise tingimusse, leiame, et $m \neq 2$.

4. Anu, Katrin, Marika ja Sirje said olümpiaadil neli esimest kohta. Anu ütles, et ta ei tulnud esimeseks ega neljandaks, Katrin ütles, et ta ei jäänud neljandaks, Marika teatas, et ta tuli esimeseks ja Sirje kuulutas, et ta sai auhinnalise neljanda koha. Teha kindlaks tegelik paremusjärjestus, kui on teada, et ühe tütarlapse vastus on vale.

L a h e n d u s. Anu, Katrini, Marika ja Sirje vastused on skemaatiliselt antud järgnevas tabelis.

Koht / Nimi	I	II	III	IV
A	–			–
K				–
M	+			
S				+

1) Kui Anu valetaks, siis peaks ta jagama kas esikohta Marikaga või neljandat kohta Sirjega. See pole aga võimalik.
2) Kui Katrin valetaks, siis peaks ta jagama neljandat kohta Sirjega, mis pole võimalik.

3) Kui Marika valetaks, siis on Sirje neljas ja Katrin esimene ning Anu ja Marika on kas teisel või kolmandal kohal. Sel juhul on võimalikud 2 paremusjärjestust:

1. Katrin		1. Katrin
2. Anu	ja	2. Marika
3. Marika		3. Anu
4. Sirje		4. Sirje.

4) Kui Sirje valetaks, siis peaks Marika olema samaaegselt esimene ja neljas, mis pole aga võimalik.
Seega on ülesande lahendiks punkt 3 all toodud järjestused.

5. Leida lõpmatu kümnendmurru 0,123... periood ja 10^{10}-ndal kohal pärast koma seisev number.

Lahendus.

1) Oletame, et sellel lõpmatul kümnendmurrul on periood pikkusega k. Selle lõpmatu kümnendmurru üleskirjutamisel jõuame aga kohani, kus juurdekirjutatav arv on 10^k, s. t. kus selle kümnendmurru kümnendkohtadesse tuleb kirjutada järjest k nulli. See aga tõestabki, et vaadeldaval lõpmatul kümnendmurrul perioodi pikkusega k olla ei saa. Et naturaalarvu k suhtes ei olnud seatud mingeid kitsendavaid tingimusi, siis võime öelda, et antud lõpmatu kümnendmurd on mitteperioodiline.

2) n-kohalisi naturaalarve on $9 \cdot 10^{n-1}$ tükki ja nendes on kokku $n \cdot 9 \cdot 10^{n-1}$ numbrit. Kui oleme kümnendkohtadesse ära kirjutanud kõik 1, 2, 3, ..., 9-kohalised naturaalarvud, siis on arvus kümnendkohti

$$\sum_{n=1}^{9} n \cdot 9 \cdot 10^{n-1} = 8\,888\,888\,889.$$

Seega puudub veel meid huvitava kümnendkohani

$$10^{10} - 8\,888\,888\,889 = 1\,111\,111\,111$$

kümnendkohta. Neid täidame kümnekohaliste naturaalarvudega, milliseid 1 111 111 110 kümnendkoha täitmiseks kulub 111 111 111. Seega 10^{10} kümnendkoht on 111 111 112. kümnekohalise naturaalarvu esimene number. Et kümnekohalistest naturaalarvudest esimesed 10^9 algavad numbriga 1 ja $10^9 > 111\,111\,112$, siis otsitav number on 1.

6. Tõestada, et kui kumera nelinurga tipud ei asetse ühel ja samal ringjoonel, siis selle nelinurga diagonaalide korrutis on väiksem kui vastasküglede korrutiste summa.

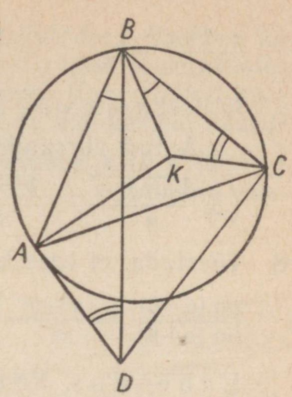
L a h e n d u s. Konstrueerime punkti K nii, et $\triangle BKC \sim \triangle ABD$ ($\angle KBC = \angle ABD$, $\angle KCB = \angle ADB$) (joon. 50). Järelikult

$\angle DBC = \angle ABK$,

$$\frac{KC}{AD} = \frac{BC}{BD} = \frac{BK}{AB},$$

millest

$$AD \cdot BC = BD \cdot KC. \qquad (1)$$



Joon. 50

Kuna $\triangle DBC \sim \triangle ABK$ $\left(\angle DBC = \angle ABK,\ \frac{BC}{BD} = \frac{BK}{AB}\right)$, siis

$$\frac{CD}{AK} = \frac{BD}{AB}$$

ehk

$$AB \cdot CD = BD \cdot AK. \qquad (2)$$

Seostest (1) ja (2) järeldub, et

$$AD \cdot BC + AB \cdot CD = BD(AK + KC). \qquad (3)$$

Et $\angle ACB > \angle ADB$, siis punkt K ei asetse lõigul AC ning $AK + KC > AC$.

Arvestades viimast võrratust, saame seosest (3) soovitud tulemuse

$$AC \cdot BD < AD \cdot BC + AB \cdot CD.$$

7. Lahendada võrrandisüsteem

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = ax = by = cz,$$

kus $a + b + c \neq 0$.

L a h e n d u s. Tähistades

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = k, \qquad (1)$$

näeme, et

$$x = \frac{k}{a},\ y = \frac{k}{b},\ z = \frac{k}{c}$$

ning

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{a+b+c}{k}.$$

Seega võrrand (1) saab kuju

$$\frac{a+b+c}{k}=k,$$

millest $k=\pm\sqrt{a+b+c}$.

Antud võrrandisüsteemi lahendiks on

$$\left(\pm\frac{\sqrt{a+b+c}}{a}, \pm\frac{\sqrt{a+b+c}}{b}, \pm\frac{\sqrt{a+b+c}}{c}\right).$$

8. Tõestada, et igas kolmnurgas kehtib võrdus

$$\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{a^2-b^2}{c^2}.$$

L a h e n d u s. Koosinuslause põhjal:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$$

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos\beta$$

Lahutades esimesest võrdusest teise ja teisendades saame, et

$$a^2-b^2=c(a\cos\beta-b\cos\alpha)$$

ehk

$$a^2-b^2=2Rc(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta),$$

kus R on kolmnurga ümberjoonestatud ringjoone raadius. Seega

$$\frac{a^2-b^2}{c^2}=\frac{2Rc\sin(\alpha-\beta)}{2Rc\sin\gamma}=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

9. On antud ringjoonel punkt M, seda punkti mitteläbiv kõõl AB ja ringjoone puutuja läbi punkti M. Tõestada, et punkti M kaugus kõõlust AB on keskmine võrdeline kõõlu otspunktide kaugustega antud puutujast.

L a h e n d u s. Lõikugu kõõlu pikendus antud puutujaga punktis L (joon. 51). Et

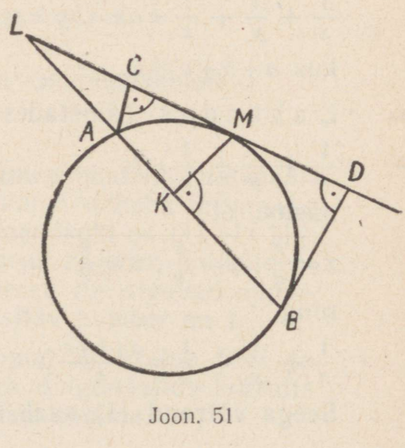
$$\triangle LAC \sim \triangle LKM \sim \triangle LBD,$$

siis

$$\frac{BD}{KM}=\frac{KM}{AC}$$

ehk

$KM^2=AC\cdot BD$, m. o. t. t



Joon. 51

10. Et kaaluda mittetäpsete kaaludega (ebavõrdsed õlad) 2 kg jahu, kaalus müüja 1 kg ühel kaalukausil, teise teisel, lootes kompenseerida sellega kaalude ebatäpsuse. Kas selliselt kaalutud jahu hulk oli tõepoolest 2 kg? Kui ei, siis kes sai kahju?

L a h e n d u s. Olgu kaalu õlgade pikkused x ja y $(x \neq y)$ ning jahu kaal esimesel kaalumisel kaalude tasakaalu seaduse põhjal

$$x \cdot 1 = y \cdot a,$$

millest

$$a = \frac{x}{y}.$$

Teisel kaalumisel, kui on vahetatud jahu ja vihtide asukoht, olgu jahu kaal c, siis tasakaalu tingimuse põhjal

$$y \cdot 1 = x \cdot c,$$

millest

$$c = \frac{y}{x}.$$

Seega kaalus müüja $a + c = \frac{x}{y} + \frac{x}{y}$ kilogrammi jahu. Et aga

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} > 2,$$

siis kahju sai müüja.

11. Tõestada, et kui $a > 0$, $b > 0$ ja $c > 0$, siis

$$\frac{a^2}{b^2+c^2} + \frac{b^2}{c^2+a^2} + \frac{c^2}{a^2+b^2} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Millisel juhul kehtib võrdus?

L a h e n d u s. Kasutame positiivsete suuruste vahelist seost

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n},$$

mille tõestust vt. näiteks К у щ е н к о, В. С. Сборник конкурсных задач по математике с решениями. Ленинград, 1967.

$$\frac{a^2}{b^2+c^2} + \frac{b^2}{c^2+a^2} + \frac{c^2}{a^2+b^2} \geqslant \frac{a^2}{2bc} + \frac{b^2}{2ac} + \frac{c^2}{2ab} =$$

$$= \frac{a^3+b^3+c^3}{2abc} \geqslant \frac{3abc}{2abc} = \frac{3}{2}.$$

Võrdus kehtib juhul, kui $a = b = c$.

SISUKORD

Эви Митт, Олаф Принитс, Калле Вельскер. ОЛИМПИАДЫ ПО МАТЕМАТИКЕ В ЭСТОНСКОЙ ССР. На эстонском языке. Художественное оформление М. Рульянда. Издательство «Валгус», Таллин, Пярнуское шоссе, 10.

Toimetaja K Kallaste. Kunstiline toimetaja H. Keigo. Tehniline toimetaja S. Kohu. Korrektor M. Maide. Laduda antud 3. II 1970. Trükkida antud 3. X 1970. Kohila Paberivabriku trükipaber nr. 2. 60×90/16. Trükipoognaid 9,5. Arvestuspoognaid 7,01. Trükiarv 6000. MB-08177. Tellimuse nr. 742. Hans Heidemanni nim. Trükikoda. Tartu, Ülikooli 17/19. I.

Hind 28 kop.

28 kop.