als die 1. Auflage, und alle Freunde wissenschaftlicher Philosophie werden sich, dankbar und zugleich hoffnungsfreudig, in dem Wunsche vereinigen, daß dem Herrn Verfasser trotz der Fülle sonstiger Arbeiten Zeit genug bleibe, um die 2. Auflage des 2. Bandes seines Werkes wirksam zu fördern.

Zur Psychologie des Unendlichkeitsbegriffs.

Von **Gregor von Glasenapp**, Jurjew (Dorpat).

Inhalt.

Ibn Tofaïls Beweis für die Endlichkeit der Raumwelt. Historisches über den Ursprung dieses Beweises: bei Aristoteles, Euklides und Avicenna. Der Sinn des aufgeworfenen Problems — fixiert durch mathematische Symbole. Die Behandlung dieses mathematischen Ausdrucks $\infty - \infty$ durch die Infinitesimalrechnung Zurückführung eines arithmetischen oder geometrischen Verhältnisses auf einen bestimmten Inhalt. Beispiele für die Behandlung des Unendlichkeitsbegriffs aus neuerer Zeit. Deutung analoger Probleme nach dem Prinzip der psychischen Kausalität.

In dem arabischen Romane genannt رسالة حى بن يقظان „Riszalah Haj ben Jokhdhan" („Epistel vom Haj ben Jokhdhan"), den der Philosoph Ibn Tofail im 12. Jahrhundert geschrieben hat, wird erzählt, wie auf einer kleinen Insel unter dem Äquator der als Säugling ausgesetzte Haj ben Jokhdhan (d. h. „der Lebende, der Sohn des Wachenden") in völliger Einsamkeit, zuerst von einer Gazelle ernährt, aufwuchs und, infolge vorzüglicher philosophischer Beanlagung, allmählich durch eigenes Nachdenken, Naturbeobachtung und Erfahrung in stufenweisem Fortschritte sich zu hoher Erkenntnis aufschwang, ja schließlich sogar zu allen Gedanken, die eine zusammenhängende Weltanschauung ausmachen, gelangte. Dort wird (auf Seite 60 und 61 der neuesten Ausgabe, die Léon Gauthier im Jahre 1900 nach einem neuentdeckten Manuskripte in Algier hat drucken lassen), dargelegt, auf welche Weise der einsame Denker zu dem Schlusse kam: der Raum und, was ihn erfüllt: die Körperwelt, könne nicht unendlich sein: „Bald, heißt es, erkannte er, vermöge der Kraft, die bei ihm die Reflexion und der Scharfsinn besaßen, daß ein Körper ohne Grenzen etwas Absurdes, eine Unmöglichkeit, ein unvollziehbarer Begriff ist. In dieser Ansicht bestärkten ihn so manche Beweise, die sich seinem Nachdenken darboten.

Er sagte sich: dieser Körper ist in der Richtung, wo ich mich befinde, nach der Seite hin, wo ich ihn sinnlich auffasse, begrenzt. Daran darf ich nicht zweifeln, da mein Blick ihn erreicht. Was die Seite betrifft, die dieser entgegengesetzt ist, und in betreff deren ich zweifeln könnte, so halte ich gleicherweise für unmöglich, daß sie sich ins Unendliche erstrecke. Denn wahrlich, stelle ich mir zwei Linien vor, die (in gerader Richtung von zwei Punkten) an der begrenzten Außenfläche des Körpers beginnend, nach der Richtung der Tiefe des Körpers ohne Ende immer fortschreitend sich verlängern, so weit wie der Körper selbst sich erstreckt; stelle ich mir ferner vor, daß man von der einen der beiden geraden Linien ein beträchtliches Stück abschneidet, und zwar von der Seite, wo diese Linie begrenzt ist; ferner, daß man den übrig gebliebenen Teil dieser Linie nimmt, und daß man das Ende davon, wo der Schnitt gemacht worden, an den (diesseitigen) Endpunkt der heil gebliebenen Linie anlegt (resp. befestigt), indem man die Linie, von der man ein Stück abgeschnitten hat, mit der Linie, von der man nichts abgeschnitten hat, zusammenfallen läßt. Wenn man jetzt in Gedanken diese beiden Linien in der Richtung verfolgt, in der man vorausgesetzt hat, daß sie unendlich seien, so wird man entweder finden, daß sie sich immer ins Unendliche weiter erstrecken, ohne daß die eine von beiden kürzer wäre als die andere; und so wird dann diejenige, von der man ein Stück weggeschnitten hat, derjenigen, von der man nichts weggeschnitten hat, gleich sein, was absurd ist; oder diejenige, die verkürzt worden ist, wird sich nicht mit der anderen immer weiter fort gleich weit erstrecken; sie wird also anhalten und unterwegs stehen bleiben, indem sie aufhört, der anderen in deren Fortschritt zu folgen; folglich wird sie endlich sein. Und wenn man dann von neuem die Strecke, die man anfangs von ihr abgeschnitten hatte, und die doch endlich war, an sie anfügt, so wird diese ganze Linie (d. h. die Summe beider) ebenfalls endlich sein; und sie wird nicht kürzer sein als die Linie, von der man nichts abgeschnitten hatte, und auch nicht länger als sie; sie wird ihr gleich sein; folglich wird jene Linie auch endlich sein; und der Körper, durch den man diese Linien ziehen kann, ist endlich. Man kann jedoch diese Linien durch jeden Körper ziehen. Wenn wir also annehmen, ein Körper sei unendlich, so nehmen wir eine Ungereimtheit und Unmöglichkeit an.

Als er dann, dank seinen bedeutenden natürlichen Anlagen, die ihn ein derartiges Beweismittel hatten aussinnen lassen, die Gewißheit erlangt hatte, daß die körperliche Substanz des Himmels endlich ist" usw. Der hier entwickelte Gedanke: daß nämlich zwei unendliche Größen (die Linien A und B) angenommen seien; daß dann die eine, B, um ein gewisses Maß h vermindert werde, und daß nach ihrer Verminderung das arithmetische Verhältnis der beiden unendlichen Größen A und $(B - h)$, die doch beide unendlich bleiben müssen, durch Subtraktion zu bestimmen sei; daß also der sich in der Rechnung einstellende Ausdruck: $\infty - \infty$ (unendlich minus unendlich) begrifflich präzisiert werden solle: — dieser Gedanke, sage ich, wird wohl kaum für irgend jemanden die Endlichkeit der Raumwelt in wirklich überzeugender Weise dartun. Bevor wir jedoch die mathematisch eingekleidete Argumentation ihrem Inhalte und ihrer Form nach betrachten und das anscheinend Paradoxe an ihr aufklären, sei es gestattet, dem Ursprunge des zu beweisenden Lehrsatzes nachzugehen. Abubacer — so heißt Ibn Tofail im Abendlande, — war in den meisten philosophischen Fragen Aristoteliker und entnahm, wie unser Beispiel zeigt, dem System des Stagiriten auch den Satz: Die Körperwelt sei nicht unendlich, sondern räumlich begrenzt. Seine hier von uns zitierte spitzfindige Beweisführung findet man indessen weder bei Aristoteles noch bei den griechischen Geometern, Mathematikern und Astronomen. Denn den Raum, abgesehen von irgendwelchen ihn erfüllenden Körpern, kannte Aristoteles noch nicht, und gegen das von früheren Philosophen behauptete ἄπειρον, die Unendlichkeit der Körperwelt, beruft er sich (Physika, lib. III, 5 ff.) darauf, daß die Welt nur als ein Fertiges und Vollendetes, ein vollkommen Gestaltetes zu denken sei: eine Meinung, die natürlich auf das engste mit der Gottesidee und Metaphysik des großen Philosophen zusammenhängt.

Die mannigfachen Ideen, die die Denker längst beschäftigt haben, müssen, bevor das Unendlichkeitsproblem in der hier gebotenen Form von Abubacer aufgestellt wurde: z. B. die Idee unendlicher Zunahme und Abnahme, wie sie in den konvergenten geometrischen Progressionen zutage tritt:

$$\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \frac{1}{1024} + \ldots\ldots\right)$$

die Idee mathematischer Symbole, die die ungeheuerlichsten Ziffern in Kürze darzustellen erlauben; die Idee irrationaler Größen, unbestimmter Probleme und Grenzwerte usw., werden von den Astronomen und Geometern des Altertums, besonders von Archimedes (die beiden ersten Ideen), von Apollonius, Diophantus und Aristarchus (die drei letzten Ideen) konzipiert und mehrfach in die Rechnung eingeführt; und so wird dem Problem des dem Raume nach und der Teilbarkeit nach Unendlichen und seiner exakten Formulierung vorgearbeitet. Aber wenn auch das vielumstrittene elfte Axiom des Euklides (daß nämlich zwei eine gegebene Gerade in der Ebene schneidende gerade Linien, die ins Unendliche verlängert sich nicht treffen, mit der gegebenen geraden innere Gegenwinkel im Werte von zwei Rechten bilden) in der sinnlichen Vorstellung lebhaft an das uns vom arabischen Philosophen gezeichnete Bild erinnert, so läßt sich das Urbild zu diesem letzteren doch so wenig bei Euklides wie sonst in den Werken des klassischen Altertums entdecken. Sextus Empirikus, der mit manchem arabischen Denker diese Vorliebe für die Form des Apagogischen, ad absurdum führenden Beweises (den auch schon die alten Inder kannten), gemein hat, sammelte zwar alles, womit er die positiven Lehren der Peripatetiker glaubte erschüttern zu können, ließ jedoch die Frage nach der Endlichkeit oder Unendlichkeit der Raumwelt unberührt. Einen prolapsus in infinitum kennt Sextus Empirikus nur als den „τρόπος ἀπὸ τῆς εἰς ἄπειρον ἐκπτώσεως“ (Pyrrhon, Inst. lib. I, cap. 15) und versteht darunter ein dem Skeptiker in der Disputation mit anderen Philosophen anempfohlenes endloses Zurückgehen auf Begründungen der Begründungen aller Argumente.

Allein, um die nächste Quelle von der ins Unendliche sich erstreckenden und dann zerschnittenen Linie und von der daraus folgenden Subtraktion des Unendlichen vom Unendlichen zu finden, brauchen wir nur die Angabe Abubacers in der Einleitung zu seinem Romane zu beachten: er habe beim Erforschen der Wahrheit vor allem die Werke des Scheich Abu Ali studiert. Dieser Abu Ali kann kein anderer sein als der im Abendlande unter dem Namen Avicenna bekannte große Aristoteliker Abu Ali al-Husain Ibn Abdallah Ibn Sina aus Bokhara (980—1037), dessen mystischen Traktaten ja auch der Name „Haj ben Jokhdhan“ entlehnt ist[1]). In der Tat enthält seine „Physik“ das Urbild der uns interessierenden merkwürdigen Argumentation; und wir entnehmen folgendes Zitat dem Werke des hundert Jahre jüngeren Al-Schahrastani, dem „Kitab al-Milal van-Nihal“ („Buch der Religionsparteien und Philosophenschulen“)[2]).

(Seite 403 des Textes; Seite 295 des zweiten Bandes der Übersetzung von Haarbrücker): „Er (Avicenna) behauptet denen gegenüber, die ein Ende der Körperwelt negieren, daß jedes Ding, das, seinem Wesen nach, Lage und Anordnung hat, ein Ende habe, da es, wenn es ohne Ende wäre, entweder ohne Ende auf allen Seiten oder ohne Ende auf einer Seite wäre. Wenn es nun ohne Ende wäre auf einer Seite, so wäre es möglich, daß von ihm auf der endlichen Seite in Gedanken ein Stück abgeschnitten würde,

---

[1]) Vgl. Mehren, „Abou Ali al-Hisam b Abdallah b Sina ou d'Avicenne Traités mystique . . . I. fascicule; l'Allégorie mystique Hay ben Yaqzan. 1889, Leiden. E. J. Brill, Seite 10 des arabischen Textes und Seite 13 der französischen Übersetzung.

[2]) „كتاب الملل والنحل Book of religious and philosophical sects . . . . Now first edited . . . . by the Rev. William Cureton. London.“ I. Bd. 1842, II. Bd. 1846.

so daß jenes (angenommene) Maß (des Dinges) mit dem Stücke zusammen etwas für sich bildete und ohne dasselbe etwas für sich bildete. Würden dann in Gedanken die beiden endlichen Seiten (d. h. die endliche Seite bevor sie verkürzt und nachdem sie verkürzt worde) aneinandergehalten (d. h. einander parallel gelegt), so ist es nur möglich, daß sie, insofern sie gleiche Ausdehnung haben, miteinander in der Ausdehnung kongruent sind; so daß beide: das was mehr ist und das was weniger ist, gleich lang sind, was aber unmöglich ist; — oder daß es nicht ebenso weit ausgedehnt ist, vielmehr jenem ungleich ist, so daß es folglich ein Ende hat. Der (abgeschnittene) Teil hat auch ein Ende; es hat also auch die Summe beider ein Ende, und das Ursprüngliche hat ein Ende. — Wenn der Körper aber nach allen Seiten ohne Ende wäre, so läge es nahe, einen Einschnittspunkt anzunehmen, und dann nach allen Seiten hin ebenso verfahrend, zur selben Schlußfolgerung zu gelangen.“ —

Man sieht: von diesem Passus der „Physik“ Avicennas ist die anfangs zitierte Partie des Romans „Haj ben Jokhdhan“ eigentlich nur eine vermehrte und verbesserte Auflage; und was die darin vorgetragene Untersuchung über die Unendlichkeit betrifft, — was speziell die Frage betrifft: ob das Unendliche, wie jede Größe, sich selbst gleich sei, oder ob es sich selbst ungleich sei, so kann sie im Vergleich zu dem hohen Gedankenfluge eines Aristoteles uns wie eine bloße Spielerei mit abstrakten Ideen vorkommen. Denn auch der Verstand des in Hinsicht der Philosophie ungeschulten Denkers ergeht sich ja leicht in derartigen Reflexionen. Wie hier die unendliche Linie um eine beliebige Menge vermindert und dann der Rest von derselben unendlichen, aber intakt gebliebenen Linie subtrahiert wird ($\infty - \infty$), so stellt man sich auch vor, das Unendliche werde halbiert, so daß die Hälften natürlich wieder unendlich sind; die Hälften werden wieder halbiert und so fort ins Unendliche. Das gibt dann die Form $\frac{\infty}{\infty}$; und man fragt sich, was diese Form wohl bedeute; ob $\frac{\infty}{\infty} = 1$ sei oder wieder $= \infty$, und ob $\infty - \infty = 0$ sei. Ebenso können wir durch die ins Unendliche fortgesetzte Teilung bei dem Ausdehnungslosen, bei der Null anlangen und das geometrische Verhältnis des unendlich Kleinen, Verschwindenden in der Form $\frac{0}{0}$ fixieren und auch hier fragen, ob, da $0 = 0$, auch $\frac{0}{0} = 1$ ist?

Ob nun zwar das alles samt dem apagogischen Endlichkeitsbeweise Abubacers anscheinend Spielerei ist, so ist doch Methode darin; die Probleme harren darauf, entweder gelöst oder als nichtig erkannt zu werden; und was sollen wir schließlich dem Haj ben Jokhdhan sagen, wenn er uns vorhält, daß $\infty - \infty = 0$ sein müßte, und daß wiederum $\infty - (\infty - x)$ nicht gleich Null sein darf, sondern $= -x$, da Gleiches von Gleichem subtrahiert werden muß? Wie sollen wir dem grübelnden Denker wenigstens durch eine Analogie, — will sagen, durch ein ähnliches Rechenexempel wie das von ihm vorgebrachte, einen exakteren Beweis dafür, daß er sich verrechnet hat, liefern, als es durch den Hinweis auf Kants Antinomien möglich wäre?

Nun steht der Mathematiker solchen Fällen, wo die Untersuchung auf die, prima vista rätselhaften Formen $\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, $0 \cdot \infty$ führt, seit den Zeiten des Leibniz und Newton durchaus nicht mehr so ratlos gegenüber wie der einsame Naturphilosoph auf Ibn Tofails Tropeninsel. Es kann sich z. B. bei Funktionen mit einer unabhängig veränderlichen Größe x, die in der Astronomie, Physik usw. vorkommen, sehr leicht ein Ausdruck etwa wie der folgende einstellen: $f(x) = y = \frac{x}{x-1} - \frac{1}{lg.\,nat.\,x}$. Das gibt für verschiedene Werte von x einen ganz bestimmten, auf beliebig viele Dezimalstellen zu berechnenden Wert; aber für $x = 1$ wird, wie man sieht, $y = \frac{x}{x-1} - \frac{1}{lg.\,nat.\,x} = \infty - \infty$, erhält also genau die Form von Haj ben Jokhdhans Problem. Um den

Sinn des Problems festzustellen, bringen wir zuerst die beiden Brüche unter einen Nenner; dann haben wir für: $x = 1$; $y = \frac{x \cdot lg.\ nat.\ x - x + 1}{x\ lg.\ nat.\ x - lg. nat.\ x} = \frac{0}{0}$. Diesen gleichfalls unbestimmten Ausdruck differenzieren wir nach x; wobei natürlich $lg.\ nat.\ x = F(x)$ zu betrachten ist. Das gibt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{lg. nat. x + 1 - 1}{lg. nat. x + 1 - \frac{1}{x}} = \frac{0}{0} = f'(x),$$

für $x = 1$. Da diese Form noch immer ebenso unbestimmt ist, differenzieren wir zum zweiten Male und erhalten die zweite Abgeleitete; für

$$x = 1;\ \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2} = 0{,}5,$$

also einen völlig bestimmten Ausdruck als Lösung von Haj ben Jokhdhans Problem. In ähnlicher Weise lassen sich fast immer solche unbestimmte Formen erst auf $\frac{0}{0}$ reduzieren und dann nach den Regeln der Differenzialrechnung lösen.

Somit hat sich die Relation zweier unmeßbarer und, insofern als sie unendlich groß oder unendlich klein angenommen werden mußten, unbestimmter Größen präzise in Zahlen ausdrücken lassen; und ohne daß wir uns in den unfruchtbaren Gedanken der Unendlichkeit der einen und der anderen abwechselnd zu vertiefen brauchten, sind wir zu einem Resultat gelangt, das sich zuversichtlich in die Rechnung einsetzen läßt. Denn daß man sich zwei Größen, einzeln genommen, nicht vorzustellen vermag, bedeutet noch nicht, daß auch ihr Verhältnis vom menschlichen Geiste nicht gefaßt werden könne. In diesem Gedanken liegt Poesie oder vielleicht mehr als Poesie.

Was ist nun, allgemeiner betrachtet, der Sinn des hier eingeschlagenen mathematischen Verfahrens? — und inwiefern rechtfertigt gerade der Begriff des Unendlichen solche

Operationen? Der Sinn mathematischer Ausdrücke im allgemeinen ist leicht zu definieren. Der mathematische Ausdruck verlangt die Vollziehung eines begrifflichen, abstrakten Prozesses nach dem von der Logik aufgestellten Ideal und weiter nichts.

Daß der Prozeß „abstrakt“ sein soll, bedeutet: daß von einem vorstellbaren Substrat unseres Denkverfahrens völlig abgesehen wird. Es ist verboten, daran zu denken, wie das Substrat beschaffen sei; ob ein adäquates Substrat möglich sei, oder ob der Prozeß sich überhaupt auf gar kein vorstellbares Substrat beziehen könne.

Daß die „Vollziehung eines Prozesses“ verlangt wird, bedeutet, daß der mathematische Ausdruck sich in purer Aktualität erschöpft; er sagt mir „Tu!“ — „Vollbringe!“ Er will aber nicht Kunde geben von irgendeinem Sein oder Dasein.

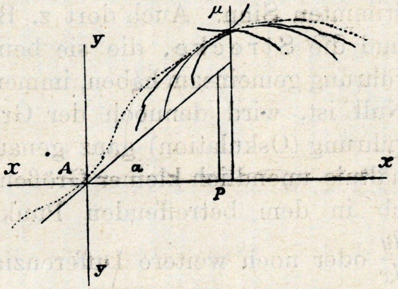
Daß der mathematische Ausdruck immer das „Ideal“ logischer Vollkommenheit erreicht, bedeutet, daß er völlig bestimmt und allgemeingültig ist. Daß der mathematische Ausdruck „weiter nichts“ verlangt, bedeutet, daß von dem Ausdruck außer diesem Einen nichts bekannt ist, daß also seine Gültigkeit keineswegs davon abhängt, ob er sich etwa schließlich auch auf etwas sinnlich Vorstellbares beziehen läßt. — Man hört nicht auf mit gebrochenen Zahlen zu operieren, obgleich es unzählige Dinge gibt, von denen eine Bruchzahl keinen Sinn hat; man fährt fort negative Größen zu verwerten, obgleich es unzählige Dinge gibt, die kein Entgegengesetztes zulassen. Denn die Negation, das Minus, bedeutet in der Mathematik: zwei Größen seien einander derart entgegengesetzt, daß ihre Vereinigung $(+a - a)$ der Vernichtung gleichkommt: also etwas, das nicht von wirklichen Dingen, sondern nur von den Relationen der Dinge zutreffen kann. Wenn sich mathematische Ausdrücke bisweilen geometrisch räumlich deuten lassen, so besagt das lediglich: daß wir hiermit demjenigen, was früher vom begrifflichen Prozesse bekannt war, ein neues, aber ebenfalls völlig abstraktes Merkmal hinzugefügt haben, nicht aber, daß die Anwendbarkeit des algebraischen Ausdrucks auf die empirische Wirklichkeit dadurch erst gewährleistet werde. Wenn ich also z. B. in dem Ausdrucke log vulg $1000 = 3$ den Sinn der Zahl 3 dadurch zu verdeutlichen suche, daß ich sage: ich muß nach 3 Richtungen mit einem 10 cm [als Basis] langen Stabe den Raum durchmessen, um in jenen 3 Dimensionen 1000 ccm zu umspannen; also ist num. log. $3 = 1000$; so darf ich nicht meinen, jetzt erst an der räumlichen Konstruktion begriffen zu haben, was ein Logarithmus eigentlich bedeutet; denn sonst könnte man auch bei log. vulg. $10\,000 = 4$ fortfahren, die Gültigkeit des Logarithmus erst durch das Suchen nach einer vierten Raumdimension beglaubigen zu wollen, was leider wirklich geschehen ist.

Was haben wir also davon zu halten, wenn z. B. die Zahl i, ($\sqrt{-1}$) dadurch erklärt wird, daß man sagt: das sei ein mathematisches Symbol für etwas bloß Denkbares, das in der Wirklichkeit nicht existiert? Vielmehr wird uns durch die Form $\sqrt{-1}$, wie durch jeden mathematischen Ausdruck, nur anbefohlen, ohne Rücksicht auf die Möglichkeit eines adäquaten Substrats einen rein begrifflichen Prozeß zu vollziehen (z. B. zu radizieren, zu subtrahieren). Die Vollbringung dieser einen, ganz bestimmten Handlung ist das einzige, was die Form $\sqrt{-1}$ aussagt; bei ihr muß man stehen bleiben. Da sie kein anderes Merkmal an sich trägt, so sind wir natürlich nie imstande, uns bei ihr etwas anschaulich-wirkliches vorzustellen. Man würde indes irren, wenn man meinte, an manchen andern durchaus nicht imaginären Formen, wie etwa l o g. a^e mehr zu besitzen, eine anschaulichere Größe zu haben und nicht bloß zur Durchführung gewisser algebraischer Handlungen aufgefordert worden zu sein.

Wir gestehen uns das aber auch ganz offen und kennen die Schranken unserer Einsicht. Wenn dahingegen abstrakte Ausdrücke, wie „Freiheit, Gesetz, Fortschritt, Liberalismus, Wahrheit, Echtheit, Geschmack usw.“ ganz unbedenklich von aller Welt mit großer Sicherheit angewandt werden und dröhnend erschallen, so gehört nur wenig Nachdenken dazu, sich davon zu überzeugen, daß diese Abstrakta an sich selbst durchaus nicht mehr Wirklichkeit besitzen als $\sqrt{-1}$; sie heischen ebenfalls bloß den Vollzug begrifflicher Prozesse, ohne selbst ein Substrat zu liefern. Was jene Ausdrücke von $\sqrt{-1}$ unserscheidet, ist einzig der Umstand, daß der begriffliche Prozeß, den die meisten Menschen bei ihrem Gebrauche vollziehen, nicht das logische Merkmal der Bestimmtheit und Allgemeingültigkeit besitzt, was daraus zu ermessen, daß über sie beständig gestritten wird, nicht aber über $\sqrt{-1}$ (i). Letzterer Ausdruck ist vielmehr, dem Begriffsideal der Logik entsprechend, in der Rechnung ganz eindeutig; alle verstehen darunter dasselbe, indem sie, durch diesen Ausdruck aufgefordert, ein und dieselbe Denkhandlung vornehmen und weiter nichts. Der Ausdruck tut seine Dienste, liefert seine Beisteuer zum Schatz der Verhältnisse der reellen Größen und wird dann wieder aus der Rechnung entfernt, oder er bietet uns Formeln, die reellen Werten gleichzusetzen sind; z. B. die Form $e^{ix} + e^{-ix} = 2 \cos x$; $i^i = \frac{1}{\sqrt{e^\pi}}$ oder er ist mittlere proportionale zwischen (+ 1) und (— 1), so daß $+1 : \sqrt{-1} = \sqrt{-1} : -1$; das gibt: $(+1) \cdot (-1) = (\sqrt{-1}) \cdot (\sqrt{-1})$; $-1 = -1$. Hingegen solche Worte, wie jene oben aufgezählten, die man als „unschätzbare Errungenschaften der Kultur“ preist, sind wirklich „unschätzbar“ im Sinne der Unbestimmtheit; sie, die das Weltgetriebe beherrschen sollen, sind die eigentlich imaginären Größen, die Größen, bei denen man sich etwas einbildet, und um deren Sinn das Menschengeschlecht eine unausgesetzte, nicht immer unblutige Fehde führt.

Diese Abschweifung vom Thema war nicht unternommen worden, um das „satiram non scribere difficile est“ von neuem zu illustrieren, sondern um den Umstand besonders deutlich zu machen, daß alle mathematischen Ausdrücke den Sinn eines Geschehens, Stattfindens, den Sinn eines „verbi finiti“ besitzen; daß sie also nie ein Sein, eine

Substanz in irgendeiner Hinsicht fixieren, ihrem Wesen nach ausdrücken, vielmehr bloß das zwischen den Substanzen oder das zwischen ihren Beziehungen sich ereignende, besonders oft die fließenden Übergänge, in Symbolen bezeichnen. Die Funktion $y = f(x)$ mag zuerst starr erscheinen; sie erwacht jedoch bald zu bedeutsamem Leben als $\frac{dy}{dx} = f'(x), \frac{d^2y}{dx^2} = f''(x); \ldots \frac{d^ny}{dx^n} = f^n(x)$. Nur wer diesen Standpunkt der Aktualität, des kontinuierlichen Entstehens und Vergehens, des Werdens ohne Rücksicht auf das, was wird und woraus es wird, einzunehmen vermag, begreift, welchen Sinn die Operationen der Infinitesimalrechnung, der Analysis des Unendlichen, in dem oben von uns gegebenen Beispiele, besitzen. Solche Beispiele werden uns besonders häufig durch geometrische Betrachtungen aufgedrängt. Die beiden Veränderlichen einer Funktion können z. B. in einem bestimmten Falle gleich Null werden; die Funktion



drückt vielleicht eine Kurve aus, die durch den Anfangspunkt des Koordinatensystems x, y geht. Für diesen Punkt werden dann die Abszisse und die Ordinate, beide x und y, gleich Null; ihr Verhältnis ist also $\frac{0}{0}$. Um nun doch zu erfahren, welchen Verlauf die Kurve gerade in diesem Punkte hat: ob sie dort konkav oder konvex ist, ein Maximum besitzt oder eine Wendung macht, lassen wir die Abzisse und mit ihr die Ordinate einen ganz leisen, unendlich kleinen Zuwachs erfahren, eine Anwandlung von der Bewegung des Wachsens durchmachen. Da der Zuwachs unendlich klein, also gleich Null ist, so ist er an sich selbst nicht vorstellbar; aber das Verhältnis der Zuwächse von x und y

(also $\frac{dy}{dx}$), wie es durch den Winkel ausgedrückt wird, den an diesem Punkte die geometrische Tangente mit der Abszissenachse bildet, muß immer dasselbe bleiben: unabhängig von der minimalen Kleinheit des Zuwachses. Dieses Verhältnis oder dieser Winkel wird nun durch das Verhältnis der Ordinate zur Abszisse, d. h. durch die trigonometrische Tangente jenes Winkels α im Schnittpunkt bezeichnet. Da die Größe des Zuwachses (die Länge der Schenkel des Winkels) völlig gleichgültig für die Bestimmung der trigonometrischen Tangente ist, so können die Zuwächse, dx und dy beide einzeln genommen, ebensogut gleich Null und gleich unendlich sein, das Verhältnis $\frac{dy}{dx}$ hat dennoch einen bestimmten Sinn. Auch dort z. B., wo sich Kurven berühren und die Strecke, die sie beim Schnitt oder bei der Berührung gemeinsam haben, immer unendlich klein, also gleich Null ist, wird dennoch der Grad der Innigkeit ihrer Berührung (Oskulation) ganz genau an dem gegenseitigen Verhältnis unendlich kleiner Größen bestimmt, nämlich danach, ob in dem betreffenden Punkte für beide Kurven bloß $\frac{dy}{dx}$ oder noch weitere Differenzialquotienten $\frac{d^2y}{dx^2} \ldots\ldots \frac{d^ny}{dx^n}$ übereinstimmen.

Mithin hatten wir nicht nötig bei $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$ oder bei $\frac{\infty}{\infty}$ stehen zu bleiben, so wenig wie bei $\infty - \infty$, sondern haben das Unendliche mit Erfolg in der Rechnung verwertet. Genau dasselbe Verfahren, das die Differenzialrechnung lehrt, führte auch in der obigen Form $y = \frac{x}{x-1} - \frac{1}{lg.\ nat.\ x}$ zum Ziele, und es ist im Prinzip bei der von Haj ben Jokhdhan aufgeworfenen Frage ebenfalls maßgebend; denn auch jene Frage hatte es gar nicht mit einer einzelnen unendlichen Größe, sondern nur mit dem Verhältnisse, mit der Proportion von zwei auf verschiedene Weise zustande gekommenen Unendlichkeiten, die voneinander subtrahiert werden sollten, zu tun. Ganz direkt lassen sich an dem Falle, den Haj ben Jokhdhan seiner Seele vorführte, die Operationen der Infinitesimalrechnung natürlich erst wiederholen, sobald für die vorgenommenen Messungen und Teilungen usw. bestimmte algebraische Ausdrücke eingeführt werden. Bis dahin fehlen dazu die arithmetischen Anhaltspunkte; denn es handelt sich dort nicht um eine Form, in der die Wirklichkeit uns das Problem aufdrängt, sondern um eine Erfindung der im Unbestimmten schweifenden Phantasie.

Nun muß man nicht meinen, mit diesen Ausführungen werde gegen Gespenster vergangener Zeiten zu Felde gezogen, indem samt anderen Spitzfindigkeiten des Mittelalters auch Avicennas und Abubacers kindliche Rechenkünste für uns ein überwundener Standpunkt seien. Daß dem nicht so ist, daß vielmehr das Jonglieren mit dem Begriffe der Unendlichkeit selbst von den Philosophen und Physikern der neuesten Zeit fortgesetzt wird, möge hier an zwei Beispielen nachgewiesen werden, obwohl sich ihrer viele beibringen ließen.

Gegen die Lehren von der kausalen Geschlossenheit des Naturlaufs, die für jedes einzelne physische Geschehen ein Zurückgehen auf unbegrenzte Ketten von Ursachen und eine Einordnung in den unendlichen Kausalzusammenhang der Welt nötig macht, wendet J. Petzoldt ein[1]: der Unendlichkeitsbegriff sei hier unanwendbar, „denn es müßte nur jedesmal ein derart großer Teil des Universums in Rechnung gestellt werden, daß die Summe der Wirkungen im ausgeschlossenen unendlichen übrigen Teil unter jeder vorgeschriebenen noch so kleinen Größe bliebe, daß also diese Wirkungen sich aufheben; das würde aber stets möglich sein, da um jedes noch so große endliche Teilsystem des Universums (z. B. um das menschliche Gehirn) herum von einer für jeden Fall besonders zu bestimmenden Entfernung ab die Zahl und die Masse der übrigen Teile

[1]) „Vierteljahrsschrift für wissensch. Philosophie" XVIII, S. 50.

des Universums nach allen Richtungen hin in gleicher Ordnung als unendlich angenommen werden dürfen, ihre Wirkungen auf das betrachtete, abgegrenzte System also als sich gegenseitig aufhebend angesehen werden müssen".

Das heißt doch, daß man sich um etwas herum, etwa um ein menschliches Gehirn, strahlenartig Linien ins Unendliche erstreckt denkt, und daß die auf je zwei entgegengesetzten unendlich langen Linien gelegenen wirksamen Elemente, deren Zahl ebenfalls unendlich sein soll, sich dann aufheben, daß also, wie im Mittelalter $\infty - \infty = 0$ ist. Hier ist es vielleicht am Platze, nochmals darauf aufmerksam zu machen, was wir dem arabischen Philosophen bereits geantwortet haben, daß nämlich für den Mathematiker das Unendliche und sein Zeichen ∞ eine unbestimmte Form ist, mit der er direkt nicht weiterrechnen kann; nur falls er von anderen, bestimmten Größen zu ihr überzugehen imstande ist, bewältigt er sie in der oben angegebenen Weise.

Bedenklicher als dieses Pröbchen von den Schwindelerscheinungen, die der Unendlichkeitsbegriff in den Köpfen noch immer erregt, ist das Aufsehen und die äußerst umfangreiche „wissenschaftliche" Literatur, die J. K. F. Zöllner, Professor der Astrophysik an der Universität Leipzig, in den Jahren 1871 bis etwa 1886 mit seinen Werken „Über die Natur der Kometen" und über anderes hervorgerufen hat[1]). Zöllner lehrt sehr einfach: Da alle Materie der Verdampfung ausgesetzt ist, so müßten alle endlichen kosmischen Massen, während der unendlichen Zeit, in der sie sich im unendlichen Raume befinden, schon längst sich verflüchtigt haben. Da sie sich nun aber faktisch zum Teil noch im flüssigen und festen Aggregatzustande befinden, also nicht verflüchtigt haben, so bleibe nur die Annahme übrig, daß der Raum nicht unendlich, sondern endlich sei.

Hier wird also eigentlich dasselbe Kunststück mit dem

---

[1]) J. K. F. Zöllner, „Über die Natur der Kometen", 3. Auflage, 1886. „Wissenschaftliche Abhandlungen", Leipzig 1878. „Naturwissenschaft und christl. Offenbarung", Zur ... Theorie der vierten Dimension, 1881.

Zeichen ∞ unendlich, das AVICENNA und ABUBACER auf longimetrischem Gebiete produziert hatten, unter Beihilfe der Begriffe „Zeit und Kraft" auf dynamischem Gebiete wiederholt, und zwar zu genau demselben Zwecke. Um den Lärm größer zu machen, berief man sich dabei auf die von LOBATSCHEWSKY und GAUSS, später von RIEMANN und HELMHOLTZ aufgebrachten Ideen: Es sei ein Raum von n-Dimensionen denkbar und auch ein Raum, der nicht ein ebenes, sondern ein sphärisches, respektive pseudosphärisches (negatives) Krümmungsmaß habe, und nur der Raum mit dem ebenen Krümmungsmaße $\left(\frac{1}{\rho} = 0\right)$ sei unendlich: Ideen, die noch jetzt hier und da, z. B. in den Werken von HOUSTON STEWART CHAMBERLAIN, herumspuken. Als ob das Krümmungsmaß ein Merkmal des Raumes selbst wäre und nicht vielmehr bloß ein Merkmal der Gebilde — Kurven, Flächen — im Raume! Ob nun gleich damals sofort bedeutende Philosophen wie LOTZE[1]), WUNDT[2] und DÜHRING[3]) vor solchen Verirrungen warnten, haben diese konfusen Ideen doch lange genug ihr Wesen getrieben und können, wie einige Verfechter der Deszendenztheorie und Auslese durch die Berufung auf unendliche Zeiträume befürchten lassen, in irgendeiner neuen Metamorphose leicht wieder auferstehen.

Allein, wie es uns in den aus der Mathematik entlehnten Beispielen über die Anwendung der vier Spezies auf das Unendliche lediglich darum zu tun war, eine Relation kennen zu lernen, nicht aber die Elemente, die sie zustande bringen, isoliert zu betrachten; wie wir deshalb, trotz der Unvorstellbarkeit der Teile, überzeugt waren, für das Resultat der Vergleichung einen Ausdruck zu finden, und daher zuerst

---

[1]) LOTZE, „Logik", 1874, S. 217: Das seien „Grimmassen der Wissenschaft, die durch völlig nutzlose Paradoxien das gewöhnliche Bewußtsein einschüchtern" usw.

[2]) WUNDT, „Über das kosmologische Problem", Vierteljahrsschrift für wissenschaftl. Philos.", I, Heft 1.

[3]) E. DÜHRING, „Kursus der Philosophie", 1874, S. 67: Das sei „eine ephemere Torheit der Mode einer Generation, deren mathematischer Mystizismus" usw.

ganz getrost an den mathematischen Symbolen die Gedankenoperation so vollzogen, als ob sie sich mit brauchbaren Größen deckten, und dann nachher, als durch die Bedingungen der Rechnung die unhandlichen Ausdrücke für das Unendliche eliminiert waren, das befriedigende Ergebnis unseres Verfahrens in Empfang nahmen; — so steht auch sonst oft bei unserem diskursiven Denken im Hintergrunde unseres Bewußtseins eine Gesamtvorstellung, deren einzelne Elemente, wenn wir sie mit logischer Schärfe denken wollten, uns unübersteigliche Schwierigkeiten bereiten würden; da es jedoch nicht auf die Analyse jener Teilvorstellungen, sondern auf das Resultat ihrer Synthese ankommt, dürfen sie oft mehr oder weniger unbestimmt bleiben, und wir fassen dennoch ihr Verhältnis als eine neue, ihnen selbst unähnliche Vorstellung. Auch hier gilt von der menschlichen Psyche das „volentem fata ducunt, nolentem trahunt". Unterschiede kann man nicht selten feststellen, auch ohne daß man vorher eine erschöpfende Kenntnis dessen hat, was unterschieden wird; und die Beziehungen nicht deutlich vorstellbarer Vorgänge können eindeutig vorstellbar gemacht werden, wie hier $\infty - \infty$. Denn wenn die Gesamtvorstellung, die in uns dem Zustandekommen des Urteils vorausgeht, in allen ihren Bestandteilen denselben Grad der Klarheit besäße wie das Urteil, das wir infolge ihrer produzieren, so müßte sie selbst bereits das Ergebnis solcher logisch unanfechtbarer, mit Bewußtsein gefällter Urteile sein: was aller psychologischen Erfahrung über den intuitiven Charakter der Urteils- und Begriffsbildung widerspricht. Ist doch der Begriff, psychologisch betrachtet, immer anzusehen als das mit Bewußtsein erfaßte Resultat eines, wenn nicht ganz unbewußten, so doch unbemerkten inneren Vorgangs.

Vorstehende Erörterungen haben uns zu einem noch allgemeineren philosophischen Problem hinübergeleitet: zu der Frage nach dem Wesen der psychischen Kausalität. Denn überall wo, wie in den angeführten Beispielen, zwei oder mehr allgemeine Vorstellungen, sog. Begriffsvorstellungen, z. B. Vorstellungen von longimetrischen oder dynamischen Größen, im Bewußtsein simultan auftreten, richtiger gesagt: von dem Willen des Denkenden zusammengebracht werden, erhebt sich die Frage: was ist die Wirkung dieser inneren Tat? Kann auf die sogenannte Assoziation von Vorstellungen und ihr Ergebnis auch noch das Prinzip der Erhaltung der Energie oder das Prinzip: „causa aequat effectum“ angewandt werden? Oder wie kennzeichnen sich sonst die Resultate der Wechselwirkung simultaner psychischer Inhalte? Wenn man nun meint, die beiden zusammentreffenden Vorstellungen, — hier also Unendlichkeiten — blieben dabei erhalten und träten im Endergebnis etwa ebenso wieder zutage wie die Komponenten im Parallelogramm der Kräfte, so verwechselt man gerade dasjenige, was in den angeführten Beispielen die arabischen Philosophen des Mittelalters verwechselt haben: die Vorstellung von der Unendlichkeit mit der vorgestellten Unendlichkeit, d. h. einen psychischen Vorgang mit etwas Objektivem. Die Vorstellung von der Unendlichkeit bleibt, wie jede Vorstellung, sich selbst gleich. Wie oft hat das nicht schon, mutatis mutandis, der Platonische SOKRATES den Athenern vorgehalten! Aber daraus folgt noch nicht, daß die vorgestellte Unendlichkeit auch selbst als eine bestimmte Größe irgendwie für uns existiert und sich folglich von ihr „Gleichheit mit sich selbst“ prädizieren läßt. Nun lehrt aber die Selbstbeobachtung und das psychologische Experiment in betreff aller Arten geistiger Vorgänge, vom Zustandekommen der einfachen Sinneswahrnehmung an bis zu den kompliziertesten Wahlhandlungen des Willens, daß die Synthese psychischer Inhalte etwas Neues schafft, daß in der Wirkung also nicht einfach die Ursachen wiederzufinden seien. Deshalb hat WUNDT diese Besonderheit der psychischen Kausalität das Prinzip der schöpferischen Synthese genannt und darauf hingewiesen, daß alles Wachstum, das das psychische Leben kennzeichnet, aller geistige und moralische Fortschritt erst dank diesem Prinzip erklärbar werden. WUNDTS Ausführungen dürfen wir als bekannt oder als dem Leser zugänglich voraussetzen[1]. Während aber die Selbstbeobachtung wohl qualitative Unterschiede erkennen läßt, auch wohl auf dem Gebiete des quantitativen an den psychischen Inhalten eine allgemeine Abschätzung des Mehr und Minder gestattet, jedoch niemals etwas unmittelbar Meßbares finden läßt, hat uns im Obigen ein exaktes mathematisches Verfahren das Prinzip der schöpferischen Synthese auf dem Gebiete der psychischen Kausalität dadurch exemplifiziert, daß von zwei oder mehr Erzeugnissen psychischer Tätigkeit (sog. Bewußtseinsinhalten) das Verhältnis im Sinne der arithmetrischen oder geometrischen Proportion zu etwas völlig Neuem führen kann: zu etwas, das, wie klar zu erkennen, in den Teilen des Verhältnisses noch gar nicht enthalten war. Wir haben hier das Resultat der schöpferischen Synthese sozusagen im Momente seiner Entstehung aufgefangen. Denn der Hergang war dabei nicht, — wie sonst gewöhnlich, — eine mehr oder weniger intuitiv zustande kommende, sondern eine völlig durchsichtige Synthese; und wenn sie einerseits uns einen weiteren Ausblick auf die Möglichkeit gestattet, das Verhältnis beziehungsweise veränderlicher Größen (im Sinne einer Funktion) als etwas Konstantes — ja auch das Verhältnis zweier Begriffe als eine Idee höherer Ordnung zu erfassen — aus dem Verhältnis zweier Gefühle (im Sinne gefühlsstarker Vorstellungen) mehr als bloß ein aus den ursprünglichen entstandenes drittes Gefühl abzuleiten —, so gibt andererseits die Anwendung der Infinitesimalrechnung auf historische Beispiele und deren Korrektur uns einen Fingerzeig dafür, in welcher Weise die Mathematik überhaupt bisweilen zur Grundlage einer kritischen Behandlung philosophischer Fragen werden, ja zur Kontrolle mancher Erscheinungen unseres Seelenlebens dienen kann, wofern sie nur selbst philosophisch begriffen wird.

---

[1]) Wundt, „Physiologische Psychologie", 4. Aufl., II, S. 490ff.; „Ethik", 2. Aufl., S. 266; „Philos. Studien", Bd. X, 1; „System der Philosophie", 2. Aufl., 1897; „Vorlesungen über die Menschen- und Tierseele", 2. Aufl., S. 334; „Völkerpsychologie", passim, besonders in betreff der Sprachphilosophie.

Verlag von O. R. REISLAND in LEIPZIG.

Von **Prof. Dr. Harald Höffding** erschienen:

Lehrbuch der Geschichte der neueren Philosophie.

1907. 18 Bogen 8°. M. 4.50, gebunden M. 5.20.

Ein Seitenstück zu Zellers Grundriſs der Geschichte der griechischen Philosophie (jetzt 8. Auflage).

Moderne Philosophen.

Vorlesungen, gehalten an der Universität in Kopenhagen im Herbst 1902.

1905. 14 Bogen gr. 8°. M. 5.—, gebunden M. 5.60.

ETHIK.

Eine Darstellung der ethischen Prinzipien und deren Anwendung auf besondere Lebensverhältnisse.

Zweite Auflage der deutschen Ausgabe.

1901. 40 Bogen gr. 8°. M. 10.—; geb. in Halbfranz M. 11.20.

Geschichte der neueren Philosophie.

Eine Darstellung der Geschichte der Philosophie von dem Ende der Renaissance bis zu unseren Tagen.

1895/96. 2 Bände. 38 und $42^3/_4$ Bogen gr. 8°. M. 20.—, geb. M. 22,—.

Philosophische Probleme.

1903. $7^1/_2$ Bogen gr. 8°. M. 2.40.

Inhalt: Einleitung. — I. Das Bewuſstseinsproblem. 1. Der Persönlichkeitsbegriff und die analytische Psychologie. 2. Diskontinuitäten auf dem psychischen Gebiete. 3. Psychologie und Physiologie. 4. Wille und Energie. — II. Das Erkenntnisproblem. 1. Arten der Erkenntnis. 2. Prinzipien der Erkenntnis. 3. Qualität und Quantität. 4. Elementarer und idealer Kausalitätsbegriff. 5. Subjekt und Objekt. — III. Das Daseinsproblem. 1. Problem und Methode. 2. Metaphysik als Kunst. 3. Erstes Urphänomen (Einheit oder Mannigfaltigkeit). 4. Zweites Urphänomen (Geist oder Materie). 5. Drittes Urphänomen (Beharrung oder Entwicklung). — IV. Das Wertungsproblem. 1. Einleitung. A. Das ethische Problem. a) Die ethische Arbeit. 2. Das Kontinuitätsprinzip in der Ethik. b) Die Rationalität der ethischen Wertung. 3. Kampf der Grundwerte. 4. Verschiedenheit der individuellen Bedingungen. B. Das religiöse Problem. 5. Das Kontinuitätsprinzip in der Religionsphilosophie. 6. Der psychologische Ort der Religion. — 7. Geschichtliche Formen der Religion.

Psychologie in Umrissen

auf Grundlage der Erfahrung.

Dritte Auflage.

1901. 31 Bogen gr. 8°. M. 9.—; gebunden in Halbfranz M. 10.20.

Religionsphilosophie.

1901. 24 Bogen gr. 8°. M. 6.40; gebunden in Halbfranz M. 7.60.

Piererſche Hofbuchdruckerei Stephan Geibel & Co. in Altenburg.