Tartu Ülikool
Loodus- ja täppisteaduste valdkond
Matemaatika ja statistika instituut

Reemet Ammer

Projektiivsed ja I-regulaarsed järjestatud polügoonid

Matemaatika eriala
Bakalaureusetöö (9 EAP)

Juhendaja: Valdis Laan

TARTU 2017

Projektiivsed ja I-regulaarsed järjestatud polügoonid

Bakalaureusetöö

Reemet Ammer

Lühikokkuvõte. Käesoleva bakalaureusetöö valdkonnaks on abstraktne algebra. Töö põhineb artiklile *"Indecomposable, Projective, and Flat S-Posets"* (X. Shi, Z. Liu, F. Wang, S. Bulman-Fleming), 2005. Töö eesmärgiks on esitada ning tõestada põhitulemused projektiivsete järjestatud polügoonide struktuuri ning projektiivsete ja I-regulaarsete järjestatud polügoonide vaheliste seoste kohta. Selleks vaadeldakse muuhulgas ka vabasid ja lahutumatuid järjestatud polügoone.

CERCS teaduseriala: P120 Arvuteooria, väljateooria, algebraline geomeetria, algebra, rühmateooria.

Märksõnad: Järjestatud polügoon, projektiivsus, I-regulaarsus.

Projective and I-regular S-posets

Bachelor's thesis

Reemet Ammer

Abstract. The domain of this bachelor's thesis is abstract algebra. This thesis is based on the article *"Indecomposable, Projective, and Flat S-Posets"* (X. Shi, Z. Liu, F. Wang, S. Bulman-Fleming), 2005. The goal of this thesis is to present and prove the main results about the structure of projective S-posets and the relations between projective and I-regular S-posets. For this, also free and indecomposable S-posets are considered.

CERCS research specialisation: P120 Number theory, field theory, algebraic geometry, algebra, group theory.

Keywords: S-poset, projectivity, I-regularity.

Sisukord

Sissejuhatus **3**

1 Põhimõisted **5**

2 Vabad järjestatud polügoonid **7**

3 Lahutumatud järjestatud polügoonid **10**

4 Projektiivsed järjestatud polügoonid **14**

5 I-regulaarsed järjestatud polügoonid **21**

Viited **27**

Sissejuhatus

Abstraktses algebras on paljusid struktuure võimalik *esitada* mingite teiste struktuuride kaudu. See võimaldab keerulisemaid struktuure uurida paremini tuntud struktuuride abil.

Monoidi esitusel hulkade teisenduste abil tekib polügooni mõiste. Lisaks monoidide uurimisele on polügoonide teooria oluline ka teistes matemaatikaharudes, nagu näiteks graafiteoorias ja algebraliste automaatide teoorias. Käesolevas bakalaureusetöös vaadeldakse *järjestatud* polügoone, mis tekivad hulkade ja monoidide asendamisel järjestatud hulkade ja järjestatud monoididega.

Projektiivsus on üldine kategoorne mõiste, mida saab vaadelda mistahes kategoorias. Järjestamata polügoonide kategoorias andis projektiivsete polügoonide kirjelduse Ulrich Knauer ([1]) aastal 1971. Tuleb välja, et projektiivsed parempoolsed polügoonid on isomorfismi täpsuseni idempotendi poolt tekitatud parempoolsete peaideaalide lõikumatud ühendid. Aastal 2005 ilmunud artiklis [3] üldistati see tulemus järjestatud polügoonide juhule. Kuigi sõnastus järjestatud juhul on sarnane järjestamata juhule, on tõestus siiski keerulisem. Projektiivseid polügoone (nii järjestatud kui järjestamata) on uuritud paljudes artiklites, muuhulgas näiteks seoses monoidide homoloogilise klassifikatsiooniga ja projektiivsete katete leidmisega. Projektiivsetel polügoonidel on oluline roll ka Morita ekvivalentsuse uurimisel, nagu nähtub juba artiklist [1].

Käesolev töö on referatiivne ja põhineb peamiselt artiklil [3]. Võrreldes selle artikliga on käesolevas töös mitmeid erinevusi, millest olulisim on lahutumatute polügoonide käsitluses. Töö esimeses peatükis defineeritakse põhimõisted: järjestatud polügoon ja järjestatud polügoonide homomorfism. Teises peatükis esitatakse vaba järjestatud polügooni mõiste ning edasiseks vajalikke tulemusi vabade järjestatud polügoonide kohta. Kolmandas peatükis esitatakse tugevalt kumera alampolügooni ja lahutuva polügooni mõisted ning tõestatakse nende abil järjestatud polügoonide lahutuvuse teoreem. Neljandas peatükis esitatakse projektiivse järjestatud polügooni mõiste ning terve hulk tulemusi projektiivsete järjestatud polügoonide struktuuri kohta. Viiendas peatükis esitatakse I-regulaarse järjestatud polügooni mõiste ning tulemused, mis kirjeldavad seoseid I-regulaarsete ja projektiivsete järjestatud polügoonde ning paremalt taanduvate järjestatud monoidide ja järjestaud *rpp*-monoidide vahel.

1 Põhimõisted

Definitsioon 1.1. Monoidi S nimetatakse *järjestatud* monoidiks, kui temal on defineeritud järjestusseos $\leq$ selliselt, et kehtib implikatsioon

$$x \leq y \Rightarrow zx \leq zy \text{ ja } xz \leq yz$$

iga $x, y, z \in S$ korral.

Järjestuse all mõtleme kogu selle töö vältel *osalist* järjestust.

Definitsioon 1.2. Alamhulka $I \subseteq S$ nimetatakse järjestatud monoidi S *parempoolseks ideaaliks*, kui

$$is \in I$$

iga $i \in I$ ja $s \in S$ korral. Parempoolseid ideaale

$$sS = \{st \mid t \in S\},$$

kus $s \in S$, nimetatakse *parempoolseteks peaideaalideks*.

Definitsioon 1.3. Olgu S järjestatud monoid. Järjestatud hulka A nimetatakse *parempoolseks järjestatud S-polügooniks*, kui on antud kujutus $\tau : A \times S \longrightarrow A$, nii, et iga $a \in A$ ja $s, t \in S$ korral, tähistades

$$\tau(a, s) = as,$$

kehtivad võrdused

$$(as)t = a(st)$$

ja

$$a1 = a$$

ning τ säilitab järjestuse, s.t iga $a, b \in A$ ja $s, t \in S$ korral kehtib implikatsioon

$$a \leq b,\ s \leq t \Rightarrow as \leq bt.$$

Kujutust τ nimetatakse järjestatud monoidi S *toimeks* järjestatud hulgal A. Sellist S-polügooni tähistatakse sümboliga A_S.

Näide 1.1. Üheelemendilist hulka $\Theta = \{\theta\}$ võib vaadelda järjestatud S-polügoonina toime $\theta s = \theta, s \in S$, ja triviaalse järjestuse suhtes.

Näide 1.2. Järjestatud monoidi S iga parempoolset ideaali I võib vaadelda järjestatud S-polügoonina, mille toime on defineeritud monoidi S korrutamise poolt. Muuhulgas võib vaadelda järjestatud S-polügoone S_S ja $(sS)_S$, kus $s \in S$.

Definitsioon 1.4. Olgu A_S ja B_S järjestatud polügoonid. Kujutust $f : A_S \longrightarrow B_S$ nimetatakse järjestatud polügoonide *homomorfismiks*, kui

$$f(as) = f(a)s$$

iga $a, b \in A$ ja $s \in S$ korral ja f säilitab järjestuse, s.t

$$a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b).$$

Definitsioon 1.5. Järjestatud polügoonide homomorfismi $f : A_S \to B_S$ nimetatakse *isomorfismiks*, kui leidub selline järjestatud polügoonide homomorfism $g : B_S \to A_S$, et $gf = 1_A$ ja $fg = 1_B$. Järjestatud polügoone A_S ja B_S nimetatakse *isomorfseteks* (tähistatakse $A_S \cong B_S$), kui leidub isomorfism $f : A_S \to B_S$.

Lemma 1.1. *Järjestatud polügoonide homomorfism $f : A_S \to B_S$ on isomorfism parajasti siis, kui f on sürjektiivne ja kehtib implikatsioon*

$$f(a) \leq f(b) \Rightarrow a \leq b$$

mistahes $a, b \in A$ korral.

Tõestus. TARVILIKKUS. Olgu kujutus $f : A_S \to B_S$ järjestatud polügoonide isomofrism. Siis isomorfismi definitsiooni kohaselt on f sürjektiivne. Olgu $f(a) \leq f(b)$. Kuna f on isomorfism, siis leidub homomorfism $g : B_S \to A_S$ nii, et $gf = 1_A$. Et g säilitab järjestuse, siis

$$a = (gf)(a) = g(f(a)) \leq g(f(b)) = (gf)(b) = b.$$

PIISAVUS. Olgu f sürjektiivne homomorfism ja kehtigu implikatsioon $f(a) \leq f(b) \Rightarrow a \leq b$. Näitame, et f on injektiivne. Olgu $f(a) = f(b)$. Siis $f(a) \leq f(b)$ ja $f(b) \leq f(a)$, millest eelduse kohaselt järelduvad võrratused $a \leq b$ ja $b \leq a$ ehk $a = b$. Seega f on injektiivne. Kuna f on bijektiivne, siis tal leidub pöördkujutus $g : B \to A$ nii, et $gf = 1_A$ ja $fg = 1_B$. Kui $x \leq y$ hulgas B, siis $f(g(x)) \leq f(g(y))$. Eelduse põhjal $g(x) \leq g(y)$, s.t g säilitab järjestust. Kui $x \in B$ ja $s \in S$, siis

$$f(g(xs)) = xs = f(g(x))s = f(g(x)s),$$

kust kujutuse f injektiivsuse tõttu $g(xs) = g(x)s$. Seega g on järjestatud polügoonide homomorfism ning järelikult f on isomorfism. $\square$

Definitsioon 1.6. Järjestatud polügooni A_S alamhulka $B \subseteq A_S$ nimetatakse tema *alampolügooniks*, kui iga $b \in B$ ja $s \in S$ korral $bs \in B$.

2 Vabad järjestatud polügoonid

Selles peatükis anname vabade järjestatud polügoonide kirjelduse ning näitame, et iga järjestatud polügoon on mingi vaba järjestatud polügooni homomorfne kujutis.

Definitsioon 2.1. Järjestatud polügooni A_S alamhulka $X \subseteq A_S$ nimetatakse tema *baasiks*, kui iga $a \in A$ korral leiduvad üheselt määratud elemenid $x \in X$ ja $s \in S$ nii, et

$$a = xs$$

ja mistahes $x \in X$ ja $s, t \in S$ korral kehtib implikatsioon

$$xs \leq xt \Rightarrow s \leq t.$$

Definitsioon 2.2. Järjestatud polügooni, milles leidub baas, nimetatakse *vabaks*.

Kui A_S on järjestatud polügoon ja $a \in A$, siis hulk

$$aS = \{as \,|\, s \in S\} \subseteq A$$

on polügooni A_S alampolügoon.

Definitsioon 2.3. Polügooni A_S nimetatakse *tsükliliseks*, kui leidub element $a \in A$ nii, et

$$A_S = aS.$$

Teoreem 2.1 ([2] teoreem 7.13)**.** *Järjestatud polügoon F_S on vaba parajasti siis, kui*

$$F_S = \bigsqcup_{i \in I} F_i,$$

kus $F_i \cong S_S$ iga $i \in I$ korral.

Tõestus. TARVILIKKUS. Kuna F_S on vaba, siis leidub tema baas X nii, et

$$F_S = \bigcup_{x \in X} xS\,.$$

Kuna iga element $a \in F_S$ esitub baasi X kaudu üheselt, siis iga $x, y \in X$, $x \neq y$ korral kehtib

$$xS \cap yS = \emptyset,$$

mistõttu F on tsükliliste alampolügoonide xS, $x \in X$ lõikumatu ühend:

$$F_S = \bigsqcup_{x \in X} xS\,.$$

Defineerime kujutuse $f : xS \longrightarrow S$ võrdusega

$$f(xs) = s\,.$$

Siis f on homomorfism, sest
$$f(xs) = s = 1s = f(x)s$$
iga $s \in S$ korral ning kui $xs \leq xt$, siis
$$f(xs) = s \leq t = f(xt).$$
Kuna iga $s \in S$ korral $s = f(xs)$, siis f on sürjektiivne. Kui $f(xs) \leq f(xt)$, siis
$$s = f(xs) \leq f(xt) = t,$$
millest saame, et $xs \leq xt$. Seega lemma 1.1 põhjal f on isomorfism ja $xS_S \cong S_S$ iga $x \in X$ korral.

PIISAVUS. Olgu $F_S = \coprod_{i \in I} F_i$, kus $F_i \cong S_S$ iga $i \in I$ korral. Siis leiduvad isomorfismid
$$f_i : S_S \longrightarrow F_i,$$
$i \in I$. Iga $a \in F$ korral leidub üheselt määratud $i \in I$ nii, et $a \in F_i$. Kujutuse f_i sürjektiivsuse tõttu leidub $s \in S$ nii, et
$$a = f_i(s) = f_i(1s) = f_i(1)s = x_i s,$$
kus tähistame $x_i := f_i(1)$. Kuna kujutuse f_i injektiivsuse tõttu on ka $s \in S$ üheselt määratud, siis $a = x_i s$ on ühene esitus. Kui $x_i s \leq x_i t,\ s, t \in S$, siis $f_i(s) \leq f_i(t)$. Kuna f_i on järjestatud polügoonide isomorfism, siis $s \leq t$. Seega on hulk $\{x_i \mid i \in I\}$ järjestatud polügooni F_S baas ning järelikult F_S on vaba. □

Definitsioon 2.4. Järjestatud polügooni B_S nimetatakse järjestatud polügooni A_S *homomorfseks kujutiseks*, kui leidub sürjektiivne homomorfism $f : A_S \to B_S$.

Lause 2.1 ([2] lause 7.14)**.** *Iga järjestatud polügoon on mingi vaba järjestatud polügooni homomorfne kujutis.*

Tõestus. Olgu A_S järjestatud polügoon. Defineerime hulgal $A \times S$ toime
$* : (A \times S) \times S \longrightarrow (A \times S)$ järgmiselt:
$$(a, s) * t = (a, st)$$
iga $a \in A$ ja $s, t \in S$ korral. Defineerime hulgal $A \times X$ järjestusseose järgmiselt:
$$(a, s) \leq (a', s') \Longleftrightarrow a \leq a' \text{ ja } s \leq s'.$$
Tulemuseks on järjestatud parempoolne S-polügoon, sest
$$((a, s) * t) * v = (a, st) * v = (a, (st)v) = (a, s(tv)) = (a, s) * (tv)$$
iga $(a, s) \in A \times S$ ja $t, v \in S$ korral ning
$$(a, s) * 1 = (a, s1) = (a, s)\,.$$

Samuti, kui $(a,s) \leq (a',s')$ ja $t \leq t'$, siis

$$(a,s) * t = (a,st) \leq (a', s't') = (a',s') * t'.$$

Tähistame saadud polügooni sümboliga F_S. Siis

$$F_S = A \times S = \bigsqcup_{a \in A} \{a\} \times S.$$

Alampolügoonid

$$\{a\} \times S = \{(a,s) \mid s \in S\}$$

on isomorfsed järjestatud polügooniga S_S, kusjuures isomorfismi realiseerib kujutus $S \to \{a\} \times S$, $s \mapsto (a,s)$. Teoreemi 2.1 põhjal on F_S vaba järjestatud polügoon. Defineerime kujutuse $f : F \longrightarrow A$ võrdusega

$$f(a,s) = as.$$

Siis f on homomorfism, sest

$$f((a,s) * t) = f(a,st) = a(st) = (as)t = f(a,s)t$$

iga $a \in A$ ja $s,t \in S$ korral ning iga $a,b \in A$ ja $s,t \in S$ korral

$$(a,s) \leq (b,t) \Rightarrow f(a,s) = as \leq bt = f(b,t).$$

Lisaks on f on sürjektiivne, sest iga $a \in A$ korral

$$a = a1 = f(a,1).$$

$\square$

3 Lahutumatud järjestatud polügoonid

Selles peatükis näitame, et iga järjestatud polügooni saab esitada teatud alampolügoonide lõikumatu ühendina.

Definitsioon 3.1. Järjestatud polügooni A_S alampolügooni B_S nimetatakse *tugevalt kumeraks*, kui iga $a \in A$ ja iga $b \in B$ korral võrratusest $a \leq b$ järeldub, et $a \in B$.

Definitsioon 3.2. Öeldakse, et järjestatud polügoon A_S on *lahutuv*, kui leiduvad tema tugevalt kumerad mittetühjad alampolügoonid $A_1, A_2 \subseteq A_S$ nii, et

$$A_S = A_1 \sqcup A_2,$$

s.t

$$A_S = A_1 \cup A_2 \text{ ja } A_1 \cap A_2 = \emptyset.$$

Kui järjestatud polügoon A_S ei ole lahutuv, siis öeldakse, et ta on *lahutumatu*.

Lemma 3.1. *Kui järjestatud polügoon A_S on lahutumatu ja $A_S \cong B_S$, siis ka järjestatud polügoon B_S on lahutumatu.*

Tõestus. Olgu A_S järjestatud lahutumatu polügoon ja olgu $A_S \cong B_S$. Näitame, et B_S on lahutumatu. Selleks oletame vastuväiteliselt, et B_S on lahutuv, s.t leiduvad tema kaks tugevalt kumerat mittetühja alampolügooni $B_1, B_2 \subseteq B_S$ nii, et

$$B_S = B_1 \sqcup B_2.$$

Kuna $A_S \cong B_S$, siis leidub isomorfism $f : B_S \to A_S$. Siis $f(B_1)$ ja $f(B_2)$ on polügooni A_S mittetühjad alampolügoonid. Näitame, et nad on tugevalt kumerad. Olgu $a \in f(B_1)$, $a' \in A$ ja olgu $a' \leq a$. Isomorfismi f sürjektiivsuse tõttu leiduvad $b \in B_1$ ja $b' \in B$ nii, et $a = f(b)$ ja $a' = f(b')$. Siis $f(b') \leq f(b)$. Et f on isomorfism, siis $b' \leq b$. Kuna B_1 on tugevalt kumer, siis $b' \in B_1$, millest järeldub, et $f(b') \in f(B_1)$, mis tähendab, et alampolügoon $f(B_1)$ on tugevalt kumer. Analoogiliselt saab näidata, et ka alampolügoon $f(B_2)$ on tugevalt kumer. Kuna f on sürjektiivne, siis

$$f(B_S) = f(B_1 \sqcup B_2) = f(B_1) \cup f(B_2) = A_S,$$

millest A_S lahutumatuse tõttu kas $f(B_1) = \emptyset$ või $f(B_2) = \emptyset$, kuid siis ka $B_1 = \emptyset$ või $B_2 = \emptyset$, mis on vastuolus eeldusega et B_1 ja B_2 on mittetühjad. Seega on B_S lahutumatu. $\square$

Lemma 3.2. *Olgu A_S järjestatud polügoon ja olgu $a \in A_S$. Siis tsükliline järjestatud polügoon aS on lahutumatu ja polügoon*

$$(aS] := \{b \in A | \, b \leq as \text{ mingi } s \in S \text{ korral}\}$$

on tugevalt kumer lahutumatu alampolügoon.

Tõestus. Oletame vastuväiteliselt, et $aS = A_1 \sqcup A_2$, kus A_1 ja A_2 on tugevalt kumerad mittetühjad alampolügoonid. Kui $a \in A_1$, siis $A_1 = aS$ ja $A_2 = \emptyset$, mis on vastuolus eeldusega $A_2 \neq \emptyset$. Kui $a \in A_2$, siis $A_2 = aS$ ja $A_1 = \emptyset$, mis on vastuolus eeldusega $A_1 \neq \emptyset$. Seega aS on lahutumatu. Olgu $b \in (aS]$. Siis leidub $s \in S$ nii, et $b \leq as$. Siis ka $bt \leq (as)t = a(st)$ iga $t \in S$ korral, mistõttu $(aS]$ on alampolügoon. Näitame, et alampolügoon $(aS]$ on tugevalt kumer. Olgu $c \in A$, $b \in (aS]$ ja olgu $c \leq b$. Kuna $b \leq as$ mingi $s \in S$ korral, siis $c \leq b \leq as$ mingi $s \in S$ korral, mistõttu $c \in (aS]$ ja seega $(aS]$ on tugevalt kumer alampolügoon.
Näitame, et $(aS]$ on lahutumatu. Selleks oletame vastuväiteliselt, et $(aS] = A_1 \sqcup A_2$, kus A_1 ja A_2 on tugevalt kumerad mittetühjad alampolügoonid. Kuna $a \leq a1$, siis $a \in (aS]$ ja seega $a \in A_1 \sqcup A_2$. Oletame, et $a \in A_1$ ning olgu $b \in (aS]$ suvaline. Siis $b \leq as \in A_1$ mingi $s \in S$ korral. Kuna A_1 on tugevalt kumer alampolügoon, siis võrratusest $b \leq as$ järeldub, et $b \in A_1$. Seega $(aS] \subseteq A_1$. Kuna ka $A_1 \subseteq (aS]$, siis kokkuvõttes $(aS] = A_1$ ja $A_2 = \emptyset$, mis on vastuolus eeldusega $A_2 \neq \emptyset$. Analoogiliselt saab arutleda juhul, kui $a \in A_2$. □

Lemma 3.3. *Olgu iga $i \in I$ korral A_i järjestatud polügooni A_S tugevalt kumer alampolügoon. Siis ka $\bigcap_{i \in I} A_i$ on polügooni A_S tugevalt kumer alampolügoon.*

Tõestus. Ilmselt ühisosa $\bigcap_{i \in I} A_i$ on alampolügoon. Näitame,et ta on tugevalt kumer. Olgu $a \in A$ ja $b \in \bigcap_{i \in I} A_i$ ning olgu $a \leq b$. Siis $b \in A_i$ iga $i \in I$ korral. Kuna A_i on tugevalt kumer alampolügoon iga $i \in I$ korral, siis võrratusest $a \leq b$ järeldub $a \in A_i$ iga $i \in I$ korral. Seega $a \in \bigcap_{i \in I} A_i$ ja $\bigcap_{i \in I} A_i$ on tugevalt kumer alampolügoon. □

Lemma 3.4. *Olgu iga $i \in I$ korral A_i polügooni A_S tugevalt kumer lahutumatu alampolügoon ja olgu $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$. Siis ka $\bigcup_{i \in I} A_i$ on polügooni A_S tugevalt kumer lahutumatu alampolügoon.*

Tõestus. Ilmselt ühend $\bigcup_{i \in I} A_i$ on alampolügoon. Näitame, et ta on tugevalt kumer. Olgu $a \in A$ ja $b \in \bigcup_{i \in I} A_i$ ja olgu $a \leq b$. Kuna $b \in \bigcup_{i \in I} A_i$, siis leidub $i \in I$ nii, et $b \in A_i$. Kuna A_i on tugevalt kumer alampolügoon, siis võrratusest $a \leq b$ järeldub $a \in A_i$, seega $a \in \bigcup_{i \in I} A_i$, mis tähendab, et $\bigcup_{i \in I} A_i$ on tugevalt kumer alampolügoon.
Näitame, et $\bigcup_{i \in I} A_i$ on lahutumatu. Selleks oletame vastuväiteliselt, et
$\bigcup_{i \in I} A_i = M \sqcup N$, kus M ja N on tugevalt kumerad mittetühjad alampolügoonid. Olgu $a \in \bigcap_{i \in I} A_i$. Üldisust kitsendamata eelame, et $a \in M$. Siis $a \in A_i \cap M$ iga $i \in I$ korral. Kuna $A_i \subseteq M \cup N$ iga $i \in I$ korral, siis

$$(M \cap A_i) \cup (N \cap A_i) = (M \cup N) \cap A_i = A_i.$$

Kuna $M \cap A_i$ ja $N \cap A_i$ on Lemma 3.3 tõttu tugevalt kumerad alampolügoonid,
$M \cap A_i \neq \emptyset$ ja A_i on lahutumatu iga $i \in I$ korral, siis

$$N \cap A_i = \emptyset,$$

millest järeldub, et ka $N \cap \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \emptyset$. Kuna $N \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$, siis $N = \emptyset$, mis on vastuolus eeldusega $N \neq \emptyset$. Seega $\bigcup_{i \in I} A_i$ on lahutumatu. □

Definitsioon 3.3. Järjestatud hulga A elemente a ja b nimetatakse *võrreldavateks*, kui kas $a \leq b$ või $b \leq a$. Asjaolu, et elemendid $a, b \in A$ on võrreldavad, tähistatakse sümboliga $a \perp b$.

Paneme tähele, et mistahes $a, b \in A$ ja $s \in S$ korral

$$a \perp b \Rightarrow as \perp bs.$$

Järgneva teoreemi tõestuses on teatud sarnasusi konspektis [2] esineva lause 7.7 tõestusega.

Teoreem 3.1. *Iga mittetühi järjestatud polügoon on esitatav tugevalt kumerate lahutumatute alampolügoonide lõikumatu ühendina.*

Tõestus. Olgu A_S järjestatud S-polügoon. Defineerime hulgal A seose ρ järgmiselt: $a\rho b \Leftrightarrow$ leiduvad $b_1, ..., b_n \in A$ ja $s_1, ..., s_n, t_1, ..., t_n \in S$ nii, et

$$\begin{aligned} a &\perp b_1 s_1 \\ b_1 t_1 &\perp b_2 s_2 \\ &\dots \\ b_{n-1} t_{n-1} &\perp b_n s_n \\ b_n t_n &\perp b. \end{aligned} \tag{1}$$

Siis ρ on ekvivalentsiseos, sest
1. hulga A järjestusseose refleksiivsuse tõttu $a \perp a$ ning seega $a\rho a$, mistõttu ρ on refleksiivne;
2. kui $a\rho b$, siis võrdluste ahelas (1) alt üles liikudes saame, et $b\rho a$, mistõttu ρ on sümmeetriline;
3. kui $a\rho b$ ja $b\rho c$, siis võrdluste ahelat (1) jätkates võrdluste ahelaga elemendist b elemendini c (see ahel leidub, sest $b\rho c$) saame, et $a\rho c$, mistõttu ρ on transitiivne.
Seega on järjestatud hulk A ρ-klasside lõikumatu ühend. Näitame, et iga ρ-klass $[a]_\rho$ on alampolügoon.
Olgu $b \in [a]_\rho$. Siis $a\rho b$, s.t leiduvad sobivad elemendid nii, et kehtivad võrdlused (1). Võrdluste (1) mõlemaid pooli suvalise elemendiga $s \in S$ korrutades saame

$$\begin{aligned} as &\perp b_1 s_1 s \\ b_1 t_1 s &\perp b_2 s_a s \\ &\dots \\ b_{n-1} t_{n-1} s &\perp b_n s_n s \\ b_n t_n s &\perp bs, \end{aligned}$$

millest järeldub, et $as\rho bs$. Kuna

$$\begin{aligned} a &\perp a1 \\ as &\perp as, \end{aligned}$$

siis $a\rho as$. Seose ρ transitiivsuse tõttu $a\rho bs$, s.t $bs \in [a]_\rho$, mistõttu $[a]_\rho$ on alampolügoon.
Näitame, et alampolügoon $[a]_\rho$ on tugevalt kumer. Olgu $b \in [a]_\rho$, $c \in A$ ja olgu $c \leq b$. Siis

$$\begin{aligned} a &\perp b_1 s_1 \\ b_1 t_1 &\perp b_2 s_2 \\ &... \\ b_{n-1} t_{n-1} &\perp b_n s_n \\ b_n t_n &\perp b1 \\ b1 &\perp c, \end{aligned}$$

mistõttu $c \in [a]_\rho$ ja seega on alampolügoon $[a]_\rho$ tugevalt kumer.
Näitame, et $[a]_\rho$ on lahutumatu. Selleks oletame vastuväiteliselt, et $[a]_\rho = C_S \sqcup D_S$, kus C_S ja D_S on tugevalt kumerad mittetühjad alampolügoonid. Valime mingid $c \in C$ ja $d \in D$. Siis $c\,\rho\,a\,\rho\,d$ ehk $c\rho d$. Järelikult leiduvad $b_1, ..., b_n \in A$ ja $s_1, ..., s_n, t_1, ...t_n \in S$ nii, et

$$\begin{aligned} c &\perp b_1 s_1 \\ b_1 t_1 &\perp b_2 s_a \\ &... \\ b_{n-1} t_{n-1} &\perp b_n s_n \\ b_n t_n &\perp d. \end{aligned} \tag{2}$$

Eelnevaid võrdlusi arvestades saame, et $a\,\rho\,c\,\rho\,b_1\,\rho ... \rho\,b_n\,\rho\,d$, sest $as \perp bt$ korral

$$\begin{aligned} a &\perp a1 \\ as &\perp bt \\ b1 &\perp b \end{aligned}$$

ehk $a\rho b$. Seega $b_1, ..., b_n, d \in [a]_\rho = C \sqcup D$. Oletame, et $b_1 s_1 \in D$. Kuna võrdluste (2) põhjal $c \perp b_1 s_1$, siis kas $c \leq b_1 s_1$ või $b_1 s_1 \leq c$. Esimesel juhul, alampolügooni D_S tugeva kumeruse tõttu $c \in D$ ja seega $c \in C \cap D$, millest saame vastuolu eeldusega $C \cap D = \emptyset$.
Teisel juhul, alampolügooni C_S tugeva kumeruse tõttu $b_1 s_1 \in C$ ja seega $b_1 s_1 \in C \cap D$, millest saame sama vastuolu. Seega $b_1 s_1 \in C$ ning ka $b_1 \in C$. Analoogiliselt näeme, et $b_2 s_2, ..., b_n s_n, d \in C$. Viimane sisalduvus $d \in C$ on aga vastuolus d valikuga. Seega on alampolügoon $[a]_\rho$ lahutumatu. $\square$

4 Projektiivsed järjestatud polügoonid

Selles peatükis esitame ning tõestame põhilised tulemused projektiivsete järjestatud polügoonide struktuuri kohta, muuhulgas näitame, et mistahes projektiivne parempoolne polügoon on isomorfismi täpsuseni idempotendi poolt tekitatud parempoolsete peaideaalide lõikumatu ühend.

Definitsioon 4.1. Järjestatud polügooni P_S nimetatakse *projektiivseks*, kui iga sürjektiivse homomorfismi $\pi : A_S \longrightarrow B_S$ ja iga homomorfismi $f : P_S \longrightarrow B_S$ korral leidub üheselt määratud homomorfism $g : P_S \longrightarrow A_S$ nii, et $f = \pi g$, s.t. järgmine diagramm on kommutatiivne:

$$\begin{tikzcd} & P_S \arrow[dl, dashed, "g"'] \arrow[d, "f"] \\ A_S \arrow[r, two heads, "\pi"] & B_S . \end{tikzcd}$$

Definitsioon 4.2. Järjestatud polügoonide homomorfismi $f : A_S \to B_S$ nimetatakse *retraktsiooniks*, kui ta on paremalt pööratav, s.t leidub järjestatud polügoonide homomorfism $g : B_S \to A_S$ nii, et

$$fg = 1_B.$$

Sellisel juhul nimetatakse järjestatud polügooni B_S järjestatud polügoonid A_S *retraktiks.*

Definitsioon 4.3. Järjestatud monoidi S elementi e nimetatakse *idempotendiks*, kui $e \cdot e = e$.

Lause 4.1. *Olgu S osaliselt järjestatud monoid. Siis kehtivad järgmised väited.*

1) Järjestatud S-polügoon eS on projektiivne iga idempotendi $e \in S$ korral.

2) Olgu $P_i, i \in I$ järjestatud S-polügoonid. Siis järjestatud S-polügoon $P_S = \bigsqcup_{i \in I} P_i$ on projektiivne parajasti siis, kui P_i on projektiivne iga $i \in I$ korral.

3) Olgu P_S järjestatud S-polügoon. Kui P_S on projektiivne, siis iga sürjektiivne homomorfism järjestatud S-polügooni P_S on retraktsioon.

4) Projektiivsete järjestatud S-polügoonide retraktid on projektiivsed.

Tõestus. 1) Olgu $\pi : A_S \longrightarrow B_S$ sürjektiivne homomorfism ja olgu $f : eS \longrightarrow B_S$ homomorfism. Tähistame $b := f(e)$, kus $b \in B$. Kujutuse π sürjektiivsuse tõttu leidub $a \in A$ nii, et $\pi(a) = b$. Defineerime kujutuse $g : eS \longrightarrow A_S$ võrdusega

$$g(es) = aes$$

iga $s \in S$ korral.

$$\begin{tikzcd} & eS \arrow[dl, dashed, "g"'] \arrow[d, "f"] \\ A_S \arrow[r, two heads, "\pi"] & B_S \end{tikzcd} .$$

Siis g on homomorfism, sest

$$g(est) = aest = g(es)t$$

ja kui $es \leq et$, siis

$$g(es) = aes \leq aet = g(et)$$

iga $s, t \in S$ korral. Lisaks sellele

$$(\pi g)(es) = \pi(aes) = bes = f(e)es = f(ees) = f(es)$$

iga $s \in S$ korral. Seega $\pi g = f$ ja eS on projektiivne.

2) TARVILIKKUS ([2] lause 7.16). Olgu $P_S = \bigsqcup_{i \in I} P_i$ projektiivne ja olgu $i \in I$ suvaline. Näitame, et P_i on projektiivne. Olgu $\pi : A_S \longrightarrow B_S$ sürjektiivne homomorfism ja olgu $f : P_i \longrightarrow B_S$ homomorfism. Defineerime kujutuse $f' : P_S \longrightarrow B_S \sqcup \Theta_S$, kus $\Theta = \{\theta\}$ on üheelemendiline polügoon, selliselt, et

$$f'(x) = \begin{cases} f(x), & \text{kui } x \in P_i \\ \theta, & \text{kui } x \in P \setminus P_i \end{cases}$$

Siis f' on homomorfism, sest $f'(xs) = f'(x)s$ iga $x \in P_i,\ s \in S$ korral ja

$$f'(xs) = \theta = \theta s = f'(x)s$$

iga $x \in P \setminus P_i,\ s \in S$ korral. Samuti säilitab f' järjestuse, sest f teeb seda iga $x \in P_i$ korral ning kui $x, x' \in P \setminus P_i$ ja $x \leq x'$, siis

$$f(x) = \theta \leq \theta = f(x').$$

Defineerime lisaks kujutuse $\pi' : A_S \sqcup \Theta_S \longrightarrow B_S \sqcup \Theta_S$ selliselt, et

$$\pi'(x) = \begin{cases} \pi(x), & \text{kui } x \in A \\ \theta, & \text{kui } x = \theta\ . \end{cases}$$

$$\begin{tikzcd} & P_i \arrow[dl, dashed, "g"'] \arrow[d, "f"] \\ A_S \arrow[r, two heads, "\pi"] & B_S \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & P_S \arrow[dl, dashed, "g'"'] \arrow[d, "f'"] \\ A_S \sqcup \Theta_S \arrow[r, two heads, "\pi'"] & B_S \sqcup \Theta_S \end{tikzcd} .$$

Kujutus π' on sürjektiivne homomorfism, sest kujutus π on sürjektiivne homomorfism ja $\theta = \pi'(\theta)$. Kuna P_S on projektiivne, siis leidub homomorfism $g' : P_S \longrightarrow A_S \sqcup \Theta$ nii, et $\pi' g' = f'$. Kuna mistahes $x \in P_i$ korral $f'(x) \neq \theta$ ja $(\pi' g')(x) = f'(x)$, siis ka

$(\pi' g')(x) = \pi'(g'(x)) \neq \theta$, mis kujutuse π' definitsiooni tõttu kehtib ainult juhul, kui $g'(x) \neq \theta$, s.t $g'(x) \in A$. Seega saame defineerida kujutuse $g : P_i \longrightarrow A$ selliselt, et

$$g(x) = g'(x)$$

iga $x \in P_i$ korral. Siis g on homomorfism, sest

$$g(xs) = g'(xs) = g'(x)s = g(x)s$$

iga $x \in P_i$ ja iga $s \in S$ korral. Samuti g säilitab järjestuse, sest g' teeb seda. Lisaks

$$(\pi g)(x) = \pi(g(x)) = \pi(g'(x)) = f'(x) = f(x)$$

iga $x \in P_i$ korral. Seega P_i on projektiivne.

PIISAVUS ([2] lause 7.16). Olgu P_i projektiivne iga $i \in I$ korral ja olgu $P_S = \bigsqcup_{i \in I} P_i$. Olgu $\pi : A_S \longrightarrow B_S$ sürjektiivne homomorfism ja olgu $f : P_S \longrightarrow B_S$ homomorfism. Tähistame $f_i := f|_{p_i}$ iga $i \in I$ korral. Kuna P_i on projektiivne iga $i \in I$ korral, siis iga homomorfismi $f_i : P_i \longrightarrow B_S$ korral leidub homomorfism $g_i : P_i \longrightarrow A_S$ nii, et $\pi g_i = f_i$. Defineerime kujutuse
$g : P_S \longrightarrow A_S$ nii, et

$$g(x) = g_i(x)$$

iga $i \in I$ ja $x \in P_i$ korral. Siis

$$(\pi g)(x) = \pi(g(x)) = \pi(g_i(x)) = f_i(x) = f(x)$$

iga $x \in P_i$ korral. Seega P_S on projektiivne.

3) Olgu P_S projektiivne, olgu $\pi : A_S \longrightarrow P_S$ sürjektiivne homomorfism ning olgu $1_{P_S} : P_S \longrightarrow P_S$ ühikmorfism. Kuna P_S on projektiivne, siis leidub homomorfism $g : P_S \longrightarrow A_S$ nii, et $\pi g = 1_{P_S}$, mis tähendab, et π on retraktsioon.

4) Olgu P_S projektiivne ja olgu A_S tema retrakt. Siis leiduvad homomorfismid $s : P_S \longrightarrow A_S$ ja $t : A_S \longrightarrow P_S$ nii, et $st = 1_A$. Näitame, et A_S on projektiivne. Olgu $\pi : B_S \longrightarrow C_S$ sürjektiivne homomorfism ja olgu $f : A_S \longrightarrow C_S$ homomorfism. Kuna P_S on projektiivne, siis leidub homomorfism $h : P_S \longrightarrow B_S$ nii, et $\pi h = fs$, kus $fs : P_S \longrightarrow C_S$ on homomorfism. Seega $\pi ht = fst = f1_A = f$ ja A_S on projektiivne.

□

Järeldus 4.1. *Järjestatud monoid S on järjestatud S-polügoonina projektiivne.*

Tõestus. Kuna järjestatud monoidi S ühikelement 1 on idempotent ja $S = 1S$, siis eelneva lause esimese osa kohaselt on S_S projektiivne. □

Järeldus 4.2. *Vabad järjestatud S-polügoonid on projektiivsed.*

Tõestus. Teoreemi 2.1 kohaselt on mistahes vaba järjestatud S-polügoon esitatav kujul $F_S = \bigsqcup_{i \in I} F_i$, kus $F_i \cong S_S$ iga $i \in I$ korral. Kuna S_S on järjestatud polügoonina projektiivne ja $F_i \cong S_S$, siis ka F_i on projektiivne iga $i \in I$ korral. Eelneva lause teise osa põhjal on siis ka F_S projektiivne. □

Järeldus 4.3. *Projektiivse järjestatud polügooniga isomorfne järjestatud polügoon on samuti projektiivne.*

Tõestus. See järeldus tuleneb lause 4.1 väitest 4, sest isomorfsed järjestatud polügoonid on teineteise retraktid. $\square$

Näide 4.1. Vaatleme hulka $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$, kus naturaalarvud on omavahel järjestatud nagu harilikult ning $\infty \leq \infty$ ja $n \leq \infty$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral. Vaatleme sellel hulgal tehet

$$x * y = \min(x, y).$$

On lihtne näha, et $S = (\mathbb{N} \cup \{\infty\}, *, \leq)$ on järjestatud monoid, kus kõik elemendid on idempotendid. Siis parempoolsed ideaalid $n * S = \{1, 2, \ldots, n\}$ on projektiivsed.

Lause 4.2. *Olgu A_S järjestatud S-polügoon ja olgu $a \in A$. Siis järgmised väited on samaväärsed:*

1) aS on projektiivne;

2) leidub idempotent $e \in S$ nii, et $a = ae$ ja võrratusest $as \leq at$ järeldub võrratus $es \leq et$ iga $s, t \in S$ korral;

3) $aS \cong eS$ mingi idempotendi $e \in S$ korral.

Tõestus. 1) $\Rightarrow$ 2) Olgu aS projektiivne. Defineerime kujutuse $\pi : S \longrightarrow aS$ võrdusega

$$\pi(s) = as.$$

Siis π on sürjektiivne homomorfism, sest iga $s, t \in S$ korral

$$\pi(st) = a(st) = (as)t = \pi(s)t$$

ja kui $s \leq t$, siis

$$\pi(s) = as \leq at = \pi(t).$$

Kuna aS on projektiivne, siis π on lause 4.1 osa 3 põhjal retraktsioon. Seega leidub homomorfism $g : aS \longrightarrow S$ nii, et

$$\pi g = 1_{aS}.$$

$$\begin{tikzcd}
 & aS \arrow[dl, dashed, "g"'] \arrow[d, "1_{aS}"] \\
S \arrow[r, two heads, "\pi"] & aS\,.
\end{tikzcd}$$

Olgu $g(a) = e \in S$. Siis

$$a = (\pi g)(a) = \pi(g(a)) = \pi(e) = ae$$

ja

$$e = g(a) = g(ae) = g(a)e = e \cdot e.$$

Seega e on järjestatud monoidi S idempotent. Kui $as \leq at$, siis

$$es = g(a)s = g(as) \leq g(at) = g(a)t = et$$

iga $s, t \in S$ korral, sest g säilitab järjestuse.

2) $\Rightarrow$ 3) Kehtigu väide 2). Defineerime kujutuse $g : aS \longrightarrow eS$ võrdusega

$$g(as) = es$$

iga $s \in S$ korral. Kui $as = at$, siis võrratustest $as \leq at$ ja $at \leq as$ järelduvad võrratused $es \leq et$ ja $et \leq es$, millest $es = et$. Seega g on korrektselt defineeritud. Kujutus g on homomorfism, sest

$$g(as) = es = g(a1)s = g(a)s$$

iga $s, t \in S$ korral ja kui $as \leq at$, siis

$$g(as) = es \leq et = g(at).$$

On selge, et g on sürjektsioon. Kui $es \leq et$, $s, t \in S$, siis

$$as = aes \leq aet = at.$$

Seega g on lemma 1.1 põhjal isomorfism.

3) $\Rightarrow$ 1) Kuna eS on projektiivne iga idempotendi $e \in S$ korral ja $aS \cong eS$, siis järelduse 4.3 põhjal on ka aS projektiivne.

□

Olgu A_i, $i \in I$ järjestatud S-polügoonid. Siis nende polügoonide lõikumatu ühend $\coprod_{i \in I} A_i$ on samuti järjestatud S-polügoon, kui defineerida sellel polügoonil toime polügoonide A_i toimete abil ning järjestus defineerida järgmiselt:

$$x \leq y \Leftrightarrow \exists i \in I : \ x, y \in A_i \text{ ja } x \leq y \text{ polügoonis } A_i.$$

Lemma 4.1. *Olgu P_S mittetühi lahutumatu järjestatud S-polügoon. Siis P_S on projektiivne parajasti siis, kui $P_S \cong eS$ mingi idempotendi $e \in S$ korral.*

Tõestus. TARVILIKKUS. Olgu P_S projektiivne ja lahutumatu S-polügoon. Kuna P_S on teoreemi 2.1 põhjal mingi vaba järjestatud S-polügooni homomorfne kujutis, siis leidub sürjektiivne homomorfism $f : \coprod_{i \in I} S_i \longrightarrow P_S$, kus $S_i \cong S$ iga $i \in I$ korral. Kuna lause 4.1 osa 3 põhjal on iga sürjektiivne homomorfism projektiivsesse polügooni retraktsioon, siis f

on retraktsioon, s.t leidub $g : P_S \to \bigsqcup_{i \in I} S_i$ nii, et $fg = 1_{P_S}$.
Vaatleme polügooni $\bigsqcup_{i \in I} S_i$ alampolügooni

$$A_S := g(P) = \{g(p) \mid p \in P\}.$$

Kuna P on mittetühi, siis leidub $p_0 \in P$ ja $g(p_0) \in A \neq \emptyset$. Samuti leidub selline $j \in I$, et $g(p_0) \in A \cap S_j$. Defineerime kujutuse $g' : P \to A$ võrdusega

$$g'(p) := g(p),$$

kus $p \in P$. Siis g' on homomorfism, sest g on homomorfism. On selge, et g' on sürjektsioon. Oletame, et $g'(p) \leq g'(p')$, $p, p' \in P$. Siis $g(p) \leq g(p')$ ja

$$p = (fg)(p) \leq (fg)(p') = p'.$$

Järelikult g' on isomorfism lemma 1.1 põhjal. Kuna P_S on lahutumatu ja $A_S \cong P_S$, siis lemma 3.1 põhjal on ka A_S lahutumatu. Kui

$$a \in A,\ b \in S_i \cap A \text{ ja } a \leq b,$$

siis

$$b \in S_i \text{ ja } A \subseteq \bigsqcup_{i \in I} S_i \text{ tõttu } a \in \bigsqcup_{i \in I} S_i,$$

millest $\bigsqcup_{i \in I} S_i$ järjestuse definitsiooni tõttu $a \in S_i$. Seega $S_i \cap A$ on polügooni A tugevalt kumer alampolügoon. Kuna

$$A_S = A_S \cap \bigsqcup_{i \in I} S_i = \bigsqcup_{i \in I} (A_S \cap S_i)$$

ja A_S on lahutumatu, siis $A_S = A_S \cap S_j$, sest $g(p_0) \in A_S \cap S_j \neq \emptyset$. Seega $A \subseteq S_j$ ja

$$P = (fg)(P) = f(g(P)) = f(A) \subseteq f(S_j) \subseteq P,$$

kust

$$P = f(S_j).$$

Kuna $S \cong S_j$ järjestatud polügoonidena, siis leidub mingi isomorfism $h_j : S \to S_j$. Tähistame

$$1_j := h_j(1) \in S_j,$$

kus 1 on monoidi S ühikelement. Siis $S_j = 1_j S$ tänu h_j sürjektiivsusele. Seega

$$P_S = f(S_j) = f(1_j S) = f(1_j)S = aS,$$

kus tähistame $a := f(1_j)$. Kuna $P_S = aS$ on projektiivne, siis tänu lausele 4.2 kehtib $P_S = aS \cong eS$ mingi idempotendi $e \in S$ korral.

PIISAVUS. Kuna eS on lause 4.1 osa 1 põhjal projektiivne ja eelduse põhjal $P_S \cong eS$ mingi idempotendi $e \in S$ korral, siis järelduse 4.3 põhjal on ka P_S projektiivne. $\square$

Teoreem 4.1 ([3] teoreem 3.4)**.** *Järjestatud mittetühi S-polügoon P_S on projektiivne parajasti siis, kui*

$$P_S = \coprod_{i \in I} P_i,$$

kus $P_i \cong e_i S$ mingite idempotentide $e_i \in S$ $(i \in I)$ korral.

Tõestus. TARVILIKKUS. Olgu lause 3.1 põhjal $P_S = \coprod_{i \in I} P_i$ esitatud tugevalt kumerate lahutumatute järjestatud alampolügoonide lõikumatu ühendina. Kuna P_S on projektiivne, siis lause 4.1 osa 2 põhjal on P_i projektiivne iga $i \in I$ korral. Kuna P_i on ka lahutumatu, siis lemma 4.1 põhjal $P_i \cong e_i S$ mingi $e_i \in S$ korral.

PIISAVUS. Olgu $P_S = P_i$, kus $P_i \cong e_i S$ iga $i \in I$ korral. Kuna lause 4.1 osa 1 põhjal on $e_i S$ projektiivne iga $e_i \in S, i \in I$ korral, siis lause 4.1 osa 2 ning järelduse 4.3 põhjal on ka P_S projektiivne. $\square$

5 I-regulaarsed järjestatud polügoonid

Selles peatükis esitame seosed projektiivsete ja I-regulaarsete järjestatud polügoonide ning samuti paremalt taandatavate järjestatud monoidide ja järjestatud *rpp*-monoidide vahel, muuhulgas uurime erinevate polügoonide klasside kokkulangevust teatud tingimustel.

Definitsioon 5.1. Järjestatud polügooni A_S elementi a nimetatakse *I-regulaarseks*, kui leidub homomorfism $f : aS \to S$ nii, et

$$af(a) = a.$$

Järjestatud polügooni nimetatakse *I-regulaarseks*, kui kõik tema elemendid on I-regulaarsed.

Lemma 5.1. *I-regulaarse polügooni mistahes alampolügoon on I-regulaarne ning I-regulaarsete järjestatud polügoonide lõikumatu ühend on I-regulaarne.*

Tõestus. Järjestatud polügooni A_S alampolügooni iga element on I-regulaarne polügooni A_S elemendina. I-regulaarsete järjestatud polügoonide lõikumatu ühendi mistahes element on I-regulaarne kui I-regulaarse polügooni element, kuhu ta kuulub. □

Lemma 5.2. *Kui järjestatud polügoon A_S on I-regulaarne ja $A_S \cong B_S$, siis ka järjestatud polügoon B_S on I-regulaarne.*

Tõestus. Olgu $b \in B_S$. Polügooni B_S I-regulaarsuse näitamiseks tuleb leida selline homomorfism $f : bS \to S$, mille korral $bf(b) = b$. Kuna $A_S \cong B_S$, siis leidub isomorfism $g : A_S \to B_S$. Kujutuse g sürjektiivsuse tõttu leidub $a \in A$ nii, et $b = g(a)$. Kuna A_S on I-regulaarne, siis elemendi $a \in A$ korral leidub homomorfism $h : aS \to S$ nii, et $ah(a) = a$. Defineerime kujutuse $f : bS \to S$ võrdusega

$$f(bs) = h(g^{-1}(bs)).$$

Paneme tähele, et kuna $g(a) = b$, siis

$$g^{-1}(bs) = g^{-1}(b)s = as \in aS$$

Siis

$$bf(b) = g(a)(h(g^{-1}(b))) = g(a)h(a) = g(ah(a)) = g(a) = b$$

ning lihtne on näha, et f on homomorfism. □

Lause 5.1. *Järjestatud polügoon S_S on I-regulaarne parajasti siis, kui kõik projektiivsed S-polügoonid on I-regulaarsed.*

Tõestus. TARVILIKKUS. Olgu S_S I-regulaarne ja olgu A_S projektiivne järjestatud polügoon. Teoreemi 4.1 kohaselt

$$A_S = \bigsqcup_{i \in I} A_i,$$

kus $A_i \cong e_iS$ mingite idempotentide $e_i \in S$ $(i \in I)$ korral. Kuna lemma 5.1 põhjal on ka polügooni S_S alampolügoonid e_iS I-regulaarsed ning lõikumatu ühend $\bigsqcup_{i\in I} e_iS$ on I-regulaarne, kusjuures $A_i \cong e_iS$ tõttu $A_S = \bigsqcup_{i\in I} A_i \cong \bigsqcup_{i\in I} e_iS$, siis A_S on eelneva lemma tõttu I-regulaarne.

PIISAVUS. Kuna S_S on järjestatud S-polügoonina projektiivne, siis eelduse tõttu on ta ka I-regulaarne. $\square$

Lause 5.2. *Olgu A_S järjestatud polügoon ja olgu $a \in A$. Siis järgmised väited on samaväärsed:*

1) a on I-regulaarne;

2) leidub idempotent $e \in S$ nii, et $a = ae$ ja võrratusest $as \leq at$ järeldub võrratus $es \leq et$ iga $s, t \in S$ korral;

3) $aS \cong eS$ mingi idempotendi $e \in S$ korral;

4) aS on projektiivne.

Tõestus. 1) $\Rightarrow$ 2) Kuna a on I-regulaarne, siis I-regulaarsuse definitsiooni kohaselt leidub homomorfism $f : aS \to S$ selliselt, et $af(a) = a$. Siis tähistades $f(a) := e \in S$ näeme, et

$$e = f(a) = f(ae) = f(a)e = ee.$$

Seega on e monoidi S idempotent. Olgu $s, t \in S$. Kui $as \leq at$, siis

$$es = f(a)s = f(as) \leq f(at) = f(a)t = et.$$

2) $\Leftrightarrow$ 3) $\Leftrightarrow$ 4) on tõestatud lauses 4.2.

3) $\Rightarrow$ 1) Kuna $aS \cong eS$ mingi idempotendi $e \in S$ korral, siis leidub isomorfism $f : aS \to eS$. Tähistame $f(a) := s$. Kuna $s \in es$, siis leidub mingi $s' \in S$ nii, et $s = es'$. Siis aga

$$es = ees' = es' = s.$$

Kujutuse f sürjektiivsuse tõttu leidub $at \in aS$ nii, et $f(at) = e$. Siis

$$sts = f(a)ts = f(at)s = es = s$$

ning

$$(ts)(ts) = t(sts) = ts,$$

mis tähentab, et ts on monoidi S idempotent. Tähistame $e' := ts \in S$. Defineerime kujutuse $g : aS \to S$ võrdusega

$$g(ax) = e'x$$

iga $x \in S$ korral. Siis g on kooskõlas toimega, sest

$$g(axs) = e'xs = g(ax)s$$

iga $x, s \in S$ korral. Samuti

$$ax \leq ay \Rightarrow f(ax) \leq f(ay) \Rightarrow sx \leq sy \Rightarrow tsx \leq tsy \Rightarrow e'x \leq e'y.$$

iga $x, y \in S$ korral. Seega g on korrektselt defineeritud ja säilitab järjestust, mis tähendab, et g on homomorfism. Iga elemendi $e's \in e'S$ korral $g(as) = e's$, seejuures $g(a) = e'$ ning seega on g sürjektiivne. Samuti on g injektiivne, sest iga $x, y \in S$ korral

$$e'x = e'y \Rightarrow tsx = tsy \Rightarrow atsx = atsy \Rightarrow f(at)sx = f(at)sy \Rightarrow$$

$$esx = esy \Rightarrow sx = ey \Rightarrow f(ax) = f(ay) \Rightarrow as = ay.$$

Seega on g isomorfism. Kuna

$$g(ag(a)) = g(a)g(a) = e'e' = e' = g(a),$$

siis peavad võrdsed olema ka argumendid, s.t $ag(a) = a$, mis tähendab, et a on I-regulaarne.

$\square$

Definitsioon 5.2. Järjestatud monoidi S nimetatakse *I-regulaarseks*, kui iga $s \in S$ korral leidub järjestatud monoidide homomorfism $g : S \to S$ nii, et

$$sg(s)s = s.$$

Meenutame, et monoidi nimetatakse *regulaarseks*, kui iga $s \in S$ korral leidub element $t \in S$ nii, et $s = sts$. Definitsioonidest on vahetult selge, et iga I-regulaarne monoid on regulaarne.

Lemma 5.3. *Kui järjestatud monoid S on I-regulaarne, siis S on ka järjestatud S-polügoonina I-regulaarne.*

Tõestus. Olgu S järjestatud I-regulaarne monoid. Siis leidub järjestatud monoidide homomorfism $g : S \to S$ selliselt, et

$$sg(s)s = s$$

iga $s \in S$ korral. Defineerime kujutuse $f : sS \to S$ võrdusega

$$f(sx) = g(s)sx$$

iga $x \in S$ korral. Siis f on järjestatud polügoonide homomorfism, sest

$$f(sxy) = g(s)sxy = f(sx)y$$

iga $x, y \in S$ korral ning kui $sx \leq sy$, siis

$$f(sx) = g(s)sx \leq g(s)sy = f(sy).$$

iga $x, y \in S$ korral. Kuna

$$sf(s) = sg(s)s = s$$

iga $s \in S$ korral, siis S on järjestatud S-polügoonina I-regulaarne. $\square$

Järgnevast näitest järeldub, et vastupidine väide üldjuhul ei kehti.

Näide 5.1. Vaatleme järjestatud monoidi $S = \{0, 1, a, b, c\}$, mille korrutamine on antud järgneva tabeli abil:

	0	1	a	b	c
0	0	0	0	0	0
1	0	1	a	b	c
a	0	a	0	a	a
b	0	b	0	b	b
c	0	c	0	c	c

ning mille järjestusseos on

$$\leq := \{(0,0), (1,1), (a,a), (b,b), (c,c), (a,0), (b,0), (c,0)\}$$

Paneme tähele, et element a ei ole I-regulaarne ($axa = 0 \neq a$ iga $x \in S$ korral), kuid järjestatud monoid S on järjestatud polügoonina I-regulaarne, sest elemendid $0, 1, b, c$ on monoidi S idempotendid ning defineerides homomorfismi $f : S \to S$ võrdusega

$$f(s) := s$$

iga $s \in S$ korral, kehtivad võrdused $f(s)s = ss = s$ iga $s \in S \backslash \{a\}$ korral, s.t elemendid $0, 1, b, c$ on I-regulaarsed. Elemendi a korral $a = ab$ ja kui $x, y \in S$ ja $ax \leq ay$, siis $bx \leq by$ eelnevast tabelist ning seega lause 5.2 teise osa põhjal on I-regulaarne ka element a. Kokkuvõttes on S järjestatud S-polügoonina I-regulaarne.

Definitsioon 5.3. Järjestatud monoidi S nimetatakse *järjestatud rpp-monoidiks*, kui alampolügoon $xS \subseteq S$ on projektiivne iga $x \in S$ korral.

Definitsioon 5.4. Järjestatud monoidi S nimetatakse *vasakult taandatavaks*, kui võrratusest $as \leq at$ järeldub võrratus $s \leq t$ iga $a, s, t \in S$ korral.

Definitsioon 5.5. Järjestatud polügooni A_S nimetatakse *tugevalt täpseks*, kui iga $a \in A_S$ ja $s, t \in S$ korral võrratusest $as \leq at$ järeldub võrratus $s \leq t$.

Lemma 5.4. *Järjestatud polügoon S_S on tugevalt täpne parajasti siis, kui S on vasakult taandatav monoid.*

Tõestus. Järeldub vahetult vastavatest definitsioonidest. □

Lemma 5.5. *Järjestatud monoid S on I-regulaarne järjestatud S-polügoon parajasti siis, kui S on järjestatud rpp-monoid.*

Tõestus. Järeldub lausest 5.2 ($1 \Leftrightarrow 4$). □

Lemma 5.6. *Iga tugevalt täpne S-polügoon on I-regulaarne.*

Tõestus. Olgu A_S tugevalt täpne polügoon ning olgu $a \in A$. Defineerime kujutuse $f : aS \to S$ võrdusega

$$f(as) := s$$

iga $s \in S$ korral. Kujutus f on korrektselt defineeritud: kui $as = as'$, siis tugeva täpsuse tõttu $s = s'$. Kujutus f on homomorfism, sest mistahes $s, t \in S$ korral

$$f(ast) = st = f(as)t$$

ning kui $s, t \in S$ ja $as \leq at$, siis $s \leq t$ ja

$$f(as) = s \leq t = f(at).$$

Homomorfismi f korral

$$af(a) = af(a1) = a1 = a,$$

mistõttu a on I-regulaarne ning seega on I-regulaarne ka A_S. □

Järgnevas kahes teoreemis uurime, milliste järjestatud monoidide korral teatud polügoonide klassid langevad kokku. Sellist tüüpi probleemide lahendamist kutsutakse vahel ka monoidide homoloogiliseks klassifikatsiooniks.

Teoreem 5.1 ([3] teoreem 4.9)**.** *Olgu S järjestatud monoid. Siis järgmised väited on samaväärsed:*

1) S on järjestatud vasakult taandatav monoid;

2) S_S on I-regulaarne järjestatud S-polügoon ja temas on ainult üks idempotent;

3) S_S on I-regulaarne järjestatud S-polügoon ja I-regulaarsete järjestatud S-polügoonide klass langeb kokku tugevalt täpsete järjestatud S-polügoonide klassiga;

4) I-regulaarsete järjestatud S-polügoonide klass on mittetühi ja langeb kokku tugevalt täpsete järjestatud S-polügoonide klassiga;

5) iga projektiivne järjestatud S-polügoon on tugevalt täpne.

Tõestus. 1) $\Rightarrow$ 2) Olgu S järjestatud vasakult taandatav monoid. Siis S on tugevalt täpne S-polügoon lemma põhjal. Lemma 5.6 põhjal on S_S seega ka I-regulaarne. Näitame, et järjestatud monoidis S on ainult üks idempotent. Kuna monoidi S ühikelement 1 on idempotent, siis oletame vastuväiteliselt, et leidub veel üks ühikelemendist erinev monoidi S idempotent $e \neq 1$. Kuna $e = e1 = ee$, siis $e1 \leq ee$ ja $ee \leq e1$, millest monoidi S vasakult taandatuvuse tõttu järelduvad võrratused $1 \leq e$ ja $e \leq 1$ ehk $e = 1$, mis on vastuolus eeldusega, et $e \neq 1$. Seega on monoidis S ainult üks idempotent $e = 1$.

2) $\Rightarrow$ 3) Olgu A_S I-regulaarne järjestatud polügoon. Siis iga $a \in A$ korral leidub monoidi S idempotent $e \in S$ nii, et $a = ae$ ja võrratusest $as \leq at$ järeldub võrratus $es \leq et$ iga $s, t \in S$ korral. Kuna monoidil S on ainult üks idempotent, siis $e = 1$ ja seega võrratusest $as \leq at$ järeldub võrratus $s \leq t$, mistõttu A_S on tugevalt täpne. Kui järjestatud polügoon A'_S on tugevalt täpne, siis lemma 5.6 tõttu on ta ka I-regulaarne.

3) $\Rightarrow$ 4) On ilmne.

4) $\Rightarrow$ 5) Olgu A_S I-regulaarne järjestatud polügoon ja olgu $a \in A$. Lemma 5.1 põhjal on I-regulaarse polügooni A_S alampolügoon aS samuti I-regulaarne. Eelduse tõttu on aS tugevalt täpne. Seega $aS \cong S$ ning S on I-regulaarne järjestatud S-polügoon. Lause 5.1 põhjal on iga projektiivne järjestatud S-polügoon I-regulaarne ja eelduse tõttu seega ka tugevalt täpne.

5) $\Rightarrow$ 1) Kuna S on järjestatud S-polügoonina projektiivne, siis eelduse kohaselt on ta tugevalt täpne ja lemma 5 kohaselt on järjestatud monoid S vasakult taandatav. $\square$

Teoreem 5.2 ([3] teoreem 4.10). *Olgu S järjestatud monoid. Siis järgmised väited on samaväärsed:*

1) kõik vabad järjestatud S-polügoonid on I-regulaarsed;

2) kõik projektiivsed järjestatud S-polügoonid on I-regulaarsed;

3) S on järjestatud rpp-monoid.

Tõestus. 1) $\Rightarrow$ 3) Kuna järjestatud S-polügoon S_S on vaba, siis ta on I-regulaarne. Lemma 5.5 põhjal on S järjestatud *rpp*-monoid.

3) $\Rightarrow$ 2) Kuna S on järjestatud *rpp*-monoid, siis lemma 5.5 põhjal on ta järjestatud S-polügoonina I-regulaarne. Kuba S_S on I-regulaarne, siis lause 5.1 põhjal on iga projektiivne S-polügoon I-regulaarne.

2) $\Rightarrow$ 1) Olgu A_S vaba polügoon. Siis ta on projektiivne ja eelduse tõttu on A_S I-regulaarne. $\square$

Viited

[1] U. Knauer, Projectivity of acts and Morita equivalence of monoids, Semigroup Forum 3 (1971), 359-370.

[2] V. Laan, aine "Sissejuhatus algebra struktuuridesse" loengukonspekt, 2016. http://math.ut.ee/pmi/kursused/algstruk/kon.pdf

[3] X. Shi, Z. Liu, F. Wang, S. Bulman-Fleming, Indecomposable, Projective, and Flat S-Posets, Comm. Algebra 33 (2005), 235-251.

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Reemet Ammer,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose "Projektiivsed ja I-regulaarsed järjestatud polügoonid", mille juhendaja on Valdis Laan,

1.1. reprodutseerimiseks säilitamise ja üldsusele kättesaadavaks tegemise eesmärgil, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace-is lisamise eesmärgil kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni;

1.2. üldsusele kättesaadavaks tegemiseks Tartu Ülikooli veebikeskkonna kaudu, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace'i kaudu kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni.

2. olen teadlik, et punktis 1 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

3. kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.