ТПИ

РУКОВОДСТВО
ПО ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОМУ ПРАКТИКУМУ

Таллин
1970

ТАЛЛИНСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Кафедра математики

Ю. Эйнпаул

РУКОВОДСТВО

ПО ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОМУ ПРАКТИКУМУ

Таллин

1970

Составил Ю.Эйнпаул

Отв. ред. А.Янсон

Сдано в печать 15 июля 1970 г.
Бумага 60х84/16. Печ.л.4,25. Усл.печ. л.3,95
Тираж 1000. Зак.№345 Ротапринт ТПИ
Таллин, Коскла 2/9
Цена 12 коп.

ВВЕДЕНИЕ

Особые требования к математической подготовке инженера предъявляет быстрое развитие вычислительной техники. Все лабораторные работы рассматриваемого здесь комплекса требуют применения лишь простейших вычислительных средств: математических таблиц, счетных линеек и настольных счетных машин.

Большинство вычислений проводится по приближенным формулам и над приближенными числами. Правила приближенных вычислений и правила оценки погрешностей, равно и как сама необходимость установления подобных правил, постигается лишь в процессе вычислений. Эти правила следует учитывать на всех этапах расчетной работы.

Приводим таблицу абсолютных и относительных погрешностей. (см. таблицу I)

Таблица I

Действие	Верхний предел абсолютной погрешности	Верхний предел относительной погрешности ($\delta_u = \frac{\Delta u}{\lvert u\rvert}$)
$u = a + b + c$	$\Delta u = \Delta a + \Delta b + \Delta c$ x	$\delta_u = \frac{\Delta a + \Delta b + \Delta c}{a + b + c}$
$u = a - b$	$\Delta u = \Delta a + \Delta b$	$\delta_u = \frac{\Delta a + \Delta b}{\lvert a - b\rvert}$
$u = a \cdot b$	$\Delta u = a \cdot \Delta b + b \cdot \Delta a$	$\delta_u = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}$
$u = \frac{a}{b}$	$\Delta u = \frac{b \cdot \Delta a + a \cdot \Delta b}{b^2}$	$\delta_u = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}$
$u = a^n$	$\Delta u = n \cdot a^{n-1} \cdot \Delta a$	$\delta_u = n \cdot \frac{\Delta a}{a}$
$u = \sqrt[n]{a}$	$\Delta u = \frac{1}{n} a^{\frac{1}{n} - 1} \cdot \Delta a$	$\delta_u = \frac{1}{n} \cdot \frac{\Delta a}{a}$
$u = \sin a$	$\Delta u = \lvert\cos a\rvert \cdot \Delta a$	$\delta_u = \lvert\cot a\rvert \cdot \Delta a$

Действие	Верхний предел абсолютной погрешности	Верхний предел относительной погрешности ($\delta_u = \frac{\Delta u}{\lvert u \rvert}$)
$u = \cos a$	$\Delta u = \lvert \sin a \rvert \cdot \Delta a$	$\delta_u = \lvert \tan a \rvert \cdot \Delta a$
$u = \tan a$	$\Delta u = \frac{\Delta a}{\cos^2 a}$	$\delta_u = \frac{2 \cdot \Delta a}{\lvert \sin 2a \rvert}$
$u = \cot a$	$\Delta u = \frac{\Delta a}{\sin^2 a}$	$\delta_u = \frac{2 \cdot \Delta a}{\lvert \sin 2a \rvert}$
$u = \frac{1}{a}$	$\Delta u = \frac{\Delta a}{a^2}$	$\delta_u = \frac{\Delta a}{a} = \delta_a$
$u = \ln a$	$\Delta u = \frac{\Delta a}{a} = \delta_a$	$\delta_u = \frac{\Delta a}{a \lvert \ln a \rvert}$
$u = \log a$	$\Delta u = 0{,}4343 \cdot \delta_a$	$\delta_u = \frac{0{,}4343 \cdot \Delta a}{a \lvert \log a \rvert}$
$u = n^a$	$\Delta u = n^a \lvert \ln n \rvert \cdot \Delta a$	$\delta_u = \lvert \ln n \rvert \cdot \Delta a$
$u = e^a$	$\Delta u = e^a \cdot \Delta a$	$\delta_u = \Delta a$

В общем виде абсолютную и относительную погрешности произвольной функции вычисляют следующим образом:

$$\Delta f(x) \approx df(x) = \lvert f'(x) \rvert \cdot \Delta x$$

$$\delta_{f(x)} = \left| \frac{f'(x)}{f(x)} \right| \cdot \Delta x.$$

Так как нас интересует в дальнейших работах только погрешность вычислений, в зависимости от погрешностей исходных данных, то мы здесь не будем рассматривать вопрос о методах оценки последних. Нашей основной задачей является оценка погрешностей результатов расчета по заданным погрешностям исходных данных.

Зная, что абсолютная погрешность алгебраической суммы нескольких чисел равна сумме абсолютных погрешностей слагаемых, относительная погрешность произведения нескольких чисел равна сумме относительных погрешностей сомножителей и относительная погрешность частного двух чисел равна сумме относительных погрешностей делимого и делителя, можно дать правила округления приближенных чисел.

I. При сложении (вычитании) приближенных чисел, имеющих разные абсолютные погрешности, сохраняем в них один десятичный знак больше, чем в слагаемом с наибольшей абсолютной погрешностью. Результат округляем на один знак.

Например: Вместо
$$\begin{array}{r} 68,374 \\ 5,4671 \\ \underline{2,3} \end{array}$$
Сложим
$$\begin{array}{r} 68,37 \\ 5,46 \\ \underline{2,3} \\ 76,13 \simeq 76,1 \end{array}$$

2. При умножении и делении приближенных чисел сохраняют столько знаков (значащих цифр), сколько в числе с наименьшим количеством знаков.

Например: $4270 \cdot 23 = 98 \cdot 10^3$ (не 98210).

Если действие промежуточное, то сохраняют в результате один знак больше.

Например: $982 \cdot 10^2$

3. При возведении в степень и извлечении корня в результате будет столько значащих цифр, сколько их в данном числе.

При стандартном округлении последняя сохраняемая цифра увеличивается на единицу, если последняя цифра 5 или больше пяти, и сохраняемая цифра остается без изменения, если последующая цифра меньше пяти. Абсолютная погрешность результата равняется половине единицы первого отбрасываемого десятичного знака.

Абсолютные и относительные погрешности округляют как исключение всегда с избытком. (Если при вычислении получили $\Delta a = 0,0421$ и $a = 17,62$, то пишем $a = 17,62(\pm 0,05)$.

Глава I. СОСТАВЛЕНИЕ И ПРИМЕНЕНИЕ ТАБЛИЦ ФУНКЦИЙ

При решении многих задач вычислительной математики приходится составлять таблицы функций или же пользоваться готовыми таблицами различных функций. В настоящем пособии мы ограничимся необходимыми сведениями лишь о таблицах функций одной независимой переменной.

§ I. Таблица функции одной переменной и пользование ею

I. Устройство таблицы. Таблица функции $y = f(x)$ составляется обычно для равноотстоящих значений аргумента:

x	y
x_o	$y_o = f(x_o)$
$x_1 = x_o + h$	$y_1 = f(x_1)$
$x_2 = x_1 + h$	$y_2 = f(x_2)$
...	...
$x_n = x_{n-1} + h$	$y_n = f(x_n)$
...	...

Положительное число h – разность двух соседних табличных значений аргумента – называется шагом таблицы. Таблицы большого объема иногда разбиваются на участки; в пределах каждого участка шаг таблицы постоянен, но разные участки могут иметь различный шаг.

Точность таблицы определяется количеством верных знаков табличных значений функции.

Например, "Пятизначные математические таблицы" Б.И. Сегала и К.А. Семендяева дают значения функций с пятью верными знаками. При этом обычно на каждой странице все значения функции округлены до одного и того же разряда; этот разряд мы будем называть младшим разрядом табличных значений функции (для данного участка таблицы). Для примера приведем два участка таблицы Сегала и Семендяева функции e^x.

x	e^x		x	e^x	
1,000	2,7183	27	6,000	403,43	40
01	7210	27	01	403,83	41
02	7237	27	02	404,24	40
03	7264	28	03	404,64	41
04	7292	27	04	405,05	40
1,005	2,7319	27	6,005	405,45	41
06	7346	28	06	405,86	40
07	7374	27	07	406,26	41
08	7401	28	08	406,67	41
09	7429	27	09	407,08	40
1,010	2,7456		6,010	407,48	

Здесь шаг $h = 0,001$; все пять знаков в значениях функции - верные. На первом участке младшим разрядом табличных значений функции является четвертый десятичный разряд (10^{-4}) и на втором - второй разряд (10^{-2}).

Между строками напечатаны разности двух соседних табличных значений функции, выраженные в целых единицах их младшего разряда. Эти табличные разности обычно обозначаются Δy_n:

$$\Delta y_n = y_{n+1} - y_n = f(x_{n+1}) - f(x_n).$$

Назначение табличных разностей будет пояснено дальше.

Заметим еще, что различные таблицы имеют те или иные особенности, которые указываются в пояснениях к таблицам. С этими пояснениями надо обязательно ознакомиться до применения таблиц.

2. Линейная интерполяция

Линейная интерполяция состоит в замене данной функции $f(x)$ на любом табличном отрезке $[x_0, x_I]$ линейной функцией у, определяемой из уравнения

$$\frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}, \qquad (1.1)$$

где $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = (x_1)$.

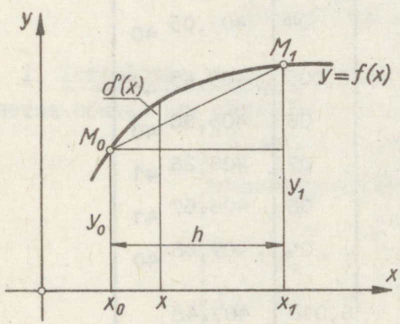

Рис. I.

Геометрически это означает замену дуги кривой $y = f(x)$ между точками $M_0(x_0, y_0)$ и $M_I(x_1, y_1)$ хордой M_0M_I (рис. I). Аналитически же это означает, что изменение величины у на отрезке $[x_0, x_I]$ считается пропорциональным изменению величины х, как видно из пропорции (I,I).

Линейная интерполяция позволяет приближенно вычислять значения функции для промежуточных значений аргумента, не указанных в таблице. С этой целью уравнение (I,I) решают относительно у:

$$y = y_0 + \frac{x - x_0}{h} \cdot \Delta y_0, \qquad (I.2)$$

где $h = x_I - x_0$ - шаг таблицы, $\Delta y_0 = y_I - y_0$ - табличная разность функции. Практически формулу (I.2) применяют в виде $y = y_0$ + поправка,

где поправка $= \frac{x - x_0}{h} \cdot \Delta y_0$. Так как значение х всегда берут из интервала (x_0, x_I), то $0 < \frac{x - x_0}{h} < 1$, так что поправка составляет правильную долю разности y_0; эту поправку всегда следует записывать целым числом единиц того же разряда, что и Δy_0, т.е. младшего разряда табличных значений функции y.

П р и м е р. Вычислить $e^{1,00233}$ по таблицам Сегала и Семендяева функции e^x

Здесь $x = 1,00233$, $x_0 = 1,002$; $\frac{x-x_0}{h} = 0,33$, $y_0 = 27\cdot 10^{-4}$

Поправка $0,33\cdot 27\cdot 10^{-4} = 8,9\cdot 10^{-4}$.

Поправку округляем и записываем в целых единицах четвертого десятичного разряда. Эту поправку прибавляем к табличному значению

$$y_0 = e^{x_0} = 2,7237 \quad y = e^{1,00233} = \begin{array}{r} 2,7237 \\ \underline{+ \quad 9} \\ 2,7246 \end{array}$$

Если табличная разность Δy_0 содержит не более 3-х знаков, то поправку удобно находить с помощью специальных таблиц пропорциональных частей, которые обычно прилагаются к таблицам, или с помощью счетной линейки.

Уравнение (I.I) позволяет находить также и значения аргумента x для промежуточных значений функций $f(x)$, т.е. промежуточные значения обратной функции (предполагается, что функция на данном интервале монотонная). С этой целью уравнение (I.I) решают относительно x:

$$x = x_0 + \frac{y - y_0}{\Delta y_0} h. \qquad (I.3)$$

П р и м е р. Вычислить ln 406 с помощью таблиц Сегала и Семендяева. Так как в названных таблицах нет таблиц натуральных логарифмов, то для решения нашей задачи воспользуемся таблицей обратной функции $y = e^x$ (см. стр. 7). Обозначим $\ln 406 = x$ и $e^x = 406 \doteq y$. Ближайшее табличное значение функции $y_0 = 405,86$,

$$y - y_0 = 0,14.$$

Поправка $x - x_0$ по формуле (I.3) составляет

$$\frac{y - y_0}{y_0} h = \frac{0,14}{0,40} \cdot 0,00I = 0,35 \cdot 0,00I.$$

Прибавляя эту поправку к табличному значению аргумента $x_0 = \ln y_0 = 6,006$, получаем:

$$\begin{array}{r} x = \ln 406 = 6,006 \\ + \quad 35 \\ \hline = 6,00635. \end{array}$$

Примечание. Из двух табличных значений, между которыми находится заданное значение y, в качестве y_0 целесообразно брать то, которое соответствует меньшему значению аргумента. Если шаг таблицы есть число вида $h = I0^{-k}$, то при указанном выборе значения y_0 поправку достаточно просто "приписать" к значению x_0, как в рассмотренном примере. Это объясняется тем, что отношение

$$\frac{y - y_0}{\Delta y_0}$$

есть правильная дробь, умножение которой на шаг $h = I0^{-k}$ сводится к переносу запятой на k единиц.

Погрешность линейной интерполяции

Замена функции $y = f(x)$ линейной функцией

$$y = y_0 + \frac{x - x_0}{h} \cdot \Delta y_0$$

приводит к ошибке, равной

$$\Delta f(x) = f(x) - (y_0 + \frac{x - x_0}{h} \Delta y_0) =$$

$$= f(x) - f(x_0) - \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \left[f(x_1) - f(x_0) \right].$$

После некоторых преобразований получаем следующую оценку погрешности линейной интерполяции для отрезка $[x_0, x_I]$

$$\Delta f(x) \leq \frac{M_2 h^2}{8}, \qquad (I.4)$$

где M_2 наибольшее значение $|f''(x)|$ на отрезке $[x_0, x_1]$.

О допустимости линейной интерполяции

О таблице функции говорят, что она допускает линейную интерполяцию, если погрешность линейной интерполяции не превосходит половины единицы младшего разряда табличных значений функции.

Если таблица функции содержит m верных десятичных знаков, то в силу (I.4) для допустимости линейной интерполяции достаточно, чтобы величина

$$\frac{M_2 h^2}{8} \leq \frac{1}{2} \cdot 10^{-m} \quad \text{или} \quad M_2 h^2 \leq 4 \cdot 10^{-m}. \qquad (I.5)$$

Полученный признак допустимости предполагает известным M_2, что на практике часто вызывает затруднения.

При предположении, что вторая производная функции $f''(x)$ монотонная, можно доказать: таблица допускает линейную интерполяцию, если соседние табличные разности отличаются не более, чем на четыре единицы младшего разряда.

В рассмотренных выше примерах таблиц функции e^x на каждом из участков табличные разности удовлетворяют указанному условию, а функция e^x и все её производные монотонны; поэтому линейная интерполяция допустима. Но для немонотонных функций указанный признак надо применять с осторожностью; например, если составить таблицу значений функции $f(x) = H \sin \pi x$ в целых точках $x_n = n = 0, 1, 2, \ldots$, то такая таблица будет вся состоять из нулей, и линейная интерполяция даст нуль в любой точке; в то же время значения функции колеблются от $-H$ до $+H$.

3. Таблица разностей, применение ее для контроля

Если табличные разности функции $\Delta y_0 = y_I - y_0$, $\Delta y_I = y_2 - y_I$, ..., $\Delta y_n = y_{n+I} - y_n$, ... не остаются постоянными (в пределах погрешности округления), то целесообразно ввести разности второго порядка $\Delta^2 y_0 = \Delta y_I - \Delta y_0$, $\Delta^2 y_I = \Delta y_2 - \Delta y_I, \ldots, \Delta^2 y_n = \Delta y_{n+I} - \Delta y_n \ldots$

Так, например, для таблицы функции a^x с шагом $h =$ 0,02 на отрезке [I,0; I,I] имеем

x	$e^x = y$	Разности Δy	Разности $\Delta^2 y$
1,00	2,7183		
02	2,7732	549	11
04	2,8292	560	12
06	2,8864	572	11
08	2,9447	583	12
1,10	3,0042	595	

Порядок записи разностей виден из приведенного примера.

Процесс образования разностей можно продолжить далее; общая формула для разности порядка к

$$\Delta^k y_n = \Delta^{k-1} y_{n+1} - \Delta^{k-1} y_n .$$

Примечание. Видно, что с возрастанием порядка разностей быстро возрастают абсолютные погрешности их округления. Если погрешности округления значений функции y_0, y_I, ... составляют $0{,}5 \cdot 10^{-m}$, то погрешности разностей первого порядка $\Delta y_0 = y_I - y_0$, ... составляют уже $1 \cdot 10^{-m}$; погрешности разностей второго порядка $\Delta^2 y_0 = y_I - y_0$, .. могут достигать $2 \cdot 10^{-m}$ и т.д. Если еще учесть, что с возрастанием порядка разностей их абсолютные величины обычно убывают, то станет ясным, что точность вычисления разностей быстро убывает с возрастанием их порядка.

Во многих случаях вычисление разностей все более и более высоких порядков приводит к столбцу таких разностей, различие между которыми не превосходит абсолютных погрешностей их округления. Такие разности называются <u>практически постоянными</u>, разности более высоких порядков в этих случаях не вычисляются. Выписывая разности до столбца практически постоянных разностей включительно, мы получаем так называемую <u>правильную таблицу разностей</u>, которая играет большую роль при контроле таблиц.

Если таблица разностей является правильной всюду, за исключением отдельного участка, то это указывает на возможность ошибки в таблице функции. Для быстрого обнаружения места такой ошибки полезно знать, как отдельная ошибка величины ε в таблице функции будет распространяться по таблице разностей:

y	Разности			
	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
	...		...	
y_{n-2}		$\Delta^2 y_{n-3}$		$(+\varepsilon)$
	Δy_{n-2}		$(+\varepsilon)$	
y_{n-1}		$\Delta^2 y_{n-2}+\varepsilon$		(-4ε)
	$\Delta y_{n-1}+\varepsilon$		(-3ε)	
$y_n+\varepsilon$		$\Delta^2 y_{n-1}-2\varepsilon$		$(+6\varepsilon)$
	$\Delta y_n-\varepsilon$		$(+3\varepsilon)$	
y_{n+1}		$\Delta^2 y_n+\varepsilon$		(-4ε)
	Δy_{n+1}		$(-\varepsilon)$	
y_{n+2}		$\Delta^2 y_{n+1}$		$(+\varepsilon)$
	...		...	

(В последних двух столбцах для сокращения записи указаны только ошибки).

П р и м е р. Рассмотрим таблицу:

n	y	Разности	
		Δy	$\Delta^2 y$
0	3,241	−103	
1	3,138	− 91	12
2	3,047	− 78	13
3	2,969	− 65	13
4	2,904	− 62	3
5	2,842	− 26	36
6	2,816	− 22	4
7	2,794	− 8	14
8	2,786	+ 7	15
9	2,793		

Нарушение плавного изменения вторых разностей в строках 4,5,6 указывает на возможность ошибки в значении y_5. Изменение y_5 на $11 \cdot 10^{-3}$ привело бы к правильной таблице разностей:

4	2,904	−51	14
5	2,853	−37	14
6	2,816		15

Конечно, надо проверить непосредственно значение y_5, так как нарушение правильности таблицы может быть вызвано и особенностями самой функции.

Следует помнить, что не всякая таблица функции имеет правильную таблицу разностей.

Замечание. Нарушение правильности таблицы разностей на отдельном участке может быть вызвано также и ошибкой вычисления самих разностей. Поэтому рекомендуется проверить правильность вычисления самих разностей. Это можно сделать с помощью их последовательного суммирования, например, так:

$$y_0 + (\Delta y_0 + \Delta y_1 + \ldots + \Delta y_{n-1}) = y_n,$$

$$\Delta y_0 + (\Delta^2 y_0 + \Delta^2 y_1 + \ldots + \Delta^2 y_{n-1}) = \Delta y_n,$$

§ 2. Схема расчета таблицы функции

Прежде чем приступить непосредственно к вычислению значений функции, надо составить программу расчета, продумать порядок действий и форму записи промежуточных результатов.

Вычисление значений функции $y = f(x)$ по заданной формуле разбивается на ряд "элементарных" действий. Под элементарным действием понимают сложение, вычитание, умножение, деление или взятие числа из какой-либо таблицы (или со шкалы прибора). Для записи результатов элементарных действий надо заготовить специальный расчетный бланк. Каждый столбец этого бланка отводится для записи результатов одного действия (над всеми значениями аргумента или над всеми результатами предыдущего действия). Все вычисления производят по столбцам. В зависимости от применяемых вычислительных средств возможно объединение нескольких элементарных действий без записи промежуточных результатов.

В качестве примера рассмотрим вопрос о форме расчетного бланка для составления таблицы одной и той же функции

$$y = \frac{\alpha x^2 + \beta}{\gamma x + \sqrt{x}}$$

с использованием различных вычислительных средств.

При вычислениях с помощью одной только счетной линейки можно рекомендовать следующую форму расчетного бланка:

n	x	x^2	αx^2	$\alpha x^2 + \beta$	γx	$\sqrt{x}$	$\gamma x + \sqrt{x}$	$y = \frac{\alpha x^2 + \beta}{\gamma x + \sqrt{x}}$	Разности		
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	Δy	$\Delta^2 y$	...
0											
1											
2											
3											
...											

(столбцы нумеруются для удобства ссылок и указания порядка действий, например (7) = (5) + (6), или (8) = (4) : (5).

При составлении таблицы той же функции с помощью счетных машин и таблиц квадратов и квадратных корней можно опустить в расчетном бланке столбцы (2), (3), (5), (6), если только значения x^2 и $\sqrt{x}$ берутся непосредственно из таблиц (без интерполяции). При этом расчетный бланк примет вид:

n	x	$\alpha x^2 + \beta$	$\gamma x + \sqrt{x}$	$y = \dfrac{\alpha x^2 + \beta}{\gamma x + \sqrt{x}}$	Разности		
					Δy	$\Delta^2 y$	...
0 1 2 3 ...							

На расчетном бланке следует заранее предусмотреть столбцы для табличных разностей, которые служат для контроля вычислений, а также для решения некоторых задач, связанных с расчетом таблиц (например, для выяснения вопроса о допустимости линейной интерполяции в полученной таблице).

Одним из наиболее важных вопросов является вопрос обеспечения требуемой точности вычисляемых значений функции. Можно рекомендовать сначала произвести "прикидочный расчет" с малым числом знаков, как это дано на примере (стр. 21), и уже затем решать вопрос о количестве знаков, сохраняемых на каждом этапе вычислений.

Контроль составленной таблицы производится по таблице разностей или графически. Если правильность таблицы разностей нарушается на отдельном участке или расположение отдельных точек на графике вызывает сомнение, то соответствующие значения функции надо пересчитать заново (и либо исправить их, либо выяснить причину нарушения).

§ 3. Лабораторная работа № I

Составление таблицы функции по заданной формуле с заданной точностью

Лабораторная работа состоит из двух частей.

I. Первая часть - составление таблицы функции с помощью счетной линейки (на заданном интервале с заданным шагом) - представляет собой прикидочный расчет с малым числом знаков. Цель этого расчета - определение необходимой точности отдельных вычислений для получения заданной точности значений функции.

З а д а н и е: Составить таблицу функции $y = \dfrac{\alpha x^2 + \beta}{\gamma x + \sqrt{x}}$ на отрезке $[a, b]$ с шагом h с помощью счетной линейки и построить график этой функции. Контроль полученных значений функции графический.

Указания по выполнению задания

1^0 Ознакомиться с характером задания, представить весь расчет в виде определенной последовательности элементарных действий: сложений, умножений, делений, возведений в квадрат и извлечения квадратного корня.

2^0 Подготовить расчетный бланк, выделив столбец для каждого элементарного действия. Обозначения элементарных действий вписать в заглавную строку. Заполнить столбец значений аргумента x $(x_n = a + nh)$.

3^0 Изучить технику работы на счетной линейке.

4^0 Провести весь расчет по столбцам. Использовать все возможности ускорения расчета. Во всех результатах выписывать наибольшее число знаков, даваемое линейкой.

5^0 Окончательные результаты округлить до одного и того же разряда и составить таблицу их разностей.

6^0 Для контроля по найденным точкам построить график заданной функции, соединяя точки плавной кривой.

2. Вторая часть - составление таблицы функции с заданной точностью и при дополнительном условии, чтобы эта таблица допускала линейную интерполяцию. Эта часть работы выполняется с помощью счетных машин и таблиц соответствующих элементарных функций. Шаг расчета для всей таблицы или для ее участков выбирается в зависимости от результатов, полученных в первой части работы. Для построения графика заданной функции вычислить значения при шести до восьми значений аргумента.

З а д а н и е. Построить график для функции данной в первой части на отрезке $[c, d]$ с шагом, позволяющим линейную интерполяцию, и чтобы из графика можно было получить значения функции с точностью четыре знака.

Такая замена таблицы графиком очень важна для инженера, так как экономит время, затрачиваемое на вычисления и не снижает точности вычисляемых значений функции. На графике можно брать любые значения функции на данном отрезке не прибегая к интерполяции.

У к а з а н и я п о в ы п о л н е н и ю з а д а н и я.

I^0 Определить такой шаг функции $y = \dfrac{\alpha x^2 + \beta}{\gamma x + \sqrt{x}}$ на отрезке, $[c, d]$, чтобы допускалась линейная интерполяция. С этой целью использовать вторые разности, имеющиеся в расчетной таблице по первой части задания, и учесть, что при уменьшении шага таблицы в λ раз вторые разности уменьшаются приблизительно в λ^2 раз. Для нахождения λ нужно подобрать наибольшую разность второго порядка. В качестве шага расчета целесообразно выбрать "круглое" число, близкое к расчетному.

2^0 Изучить технику работы на счетной машине. Ознакомиться с устройством таблиц.

3° Определить количество верных знаков, которые следует сохранять на каждом этапе расчета для обеспечения четырех верных знаков в вычисляемых значениях функции. Определить количество знаков, с которыми следует брать из таблицы значения x^2 и $\sqrt{x}$.

4° Провести весь расчет по столбцам. Округлить окончательные значения у до 4-х знаков.

5° Так найденные шесть или восемь точек (х, у) нанести на координатную плоскость на миллиметровке и соединить плавной линией. За единицей масштаба взять от двух до десяти дециметров. Чертеж начертить очень точный.

6° Работу оформить в формате 200 х 300 согласно требуемой форме, добавляя полученный график на миллиметровке.

7° Научиться находить из полученного графика значения функции с достаточной точностью.

Для пояснения порядка выполнения и оформления работы прилагается к каждой лабораторной работе соответствующий образец.

Образец

ТАЛЛИНСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Лаборатория математики

Лабораторная работа №1

СОСТАВЛЕНИЕ ТАБЛИЦЫ ФУНКЦИИ ПО ЗАДАННОЙ ФОРМУЛЕ С ЗАДАННОЙ ТОЧНОСТЬЮ

Группа . . . .

Выполнил . . . .

Проверил . . . .

Дата . . . .

I часть

Задание. Составить таблицу функции $y = \dfrac{0,382x^2 + 5}{0,4385x + \sqrt{x}}$ на отрезке $[1,06;\ 8,26]$ с шагом $h = 0,72$ и построить график этой функции. Вычислять на счетной линейке и окончательные результаты функции дать с точностью 10^{-2}.

n	x	x^2	$0,382x^2 + 5$	$0,4385x$	$\sqrt{x}$	$0,4385x + \sqrt{x}$	y	Разности	
								Δy	$\Delta^2 y$
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)=(4)+(5)	(7)=$\frac{(3)}{(6)}$	(8)	(9)
0	1,06	1,12	5,43	0,465	1,030	1,495	3,63	−69	
1	1,78	3,17	6,21	0,781	1,33	2,11	2,94	−18	51
2	2,50	6,25	7,39	1,10	1,58	2,68	2,76	4	22
3	3,22	10,4	8,97	1,41	1,79	3,20	2,80	14	10
4	3,94	15,5	10,92	1,73	1,98	3,71	2,94	22	8
5	4,66	21,7	13,29	2,04	2,16	4,20	3,16	27	5
6	5,38	28,9	16,04	2,36	2,32	4,68	3,43	31	4
7	6,10	37,2	19,2	2,67	2,47	5,14	3,74	33	2
8	6,82	46,5	22,8	2,99	2,61	5,60	4,07	34	1
9	7,54	56,9	26,7	3,31	2,75	6,06	4,41	38	4
10	8,26	68,2	31,1	3,62	2,87	6,49	4,79		

2 часть

Задание. Построить график функции $y = \dfrac{0,382x^2 + 5}{0,4385x + \sqrt{x}}$ на отрезке $[3;\ 6]$ с таким шагом, чтобы допускалась линейная интерполяция и на графике можно было читать значения функции с четырьмя знаками.

Решение. В расчетной таблице значения функции имеют три знака и округлены до 10^{-2}. Поэтому в четырехзначной таблице значения функции будут округлены до 10^{-3}. При этом табличные разности второго порядка надо будет довести до $4 \cdot 10^{-3}$, а так как в таблице I части разности второго порядка на отрезке [2,50; 6,10] достигают величины $10 \cdot 10^{-2}$, то их придется уменьшать в $\lambda^2 = \frac{10 \cdot 10^{-2}}{4 \cdot 10^{-3}} = 25$ раз. Для этого шаг таблицы надо уменьшить в $\sqrt{25} = 5$ раз. Так как $\frac{h}{5} = \frac{0,72}{5} = 0,14$, то в качестве нового шага берем $h_1 = 0,1$.

Подсчитаем значения функции y_n, соответствующие шести значениям аргумента x_n. Составим таблицу ($x_n = x_0 + n \cdot h_1$).

n	x	$0,382x^2 + 5$	$0,4385x + \sqrt{x}$	$y = \frac{0,382x^2+5}{0,4385x+\sqrt{x}}$
0	3,0	8,4380	3,0476	2,769
2	3,2	8,9117	3,1921	2,792
5	3,5	9,6795	3,4056	2,842
10	4,0	11,1120	3,7540	2,960
20	5,0	14,5500	4,4286	3,285
30	6,0	18,7520	5,0805	3,691

Найденные шесть точек нанести на координатную плоскость на миллиметровке, притом единицей масштаба взять два дециметра. Точки соединить плавной линией (пользоваться лекалом).

Из полученного графика можно получить, что $y_1(3,1) = 2,779$; $y_7(3,7) = 2,885$; $y_{24}(5,4) = 3,440$ и т.д.

П р и м е ч а н и я. В первой части столбец (3) содержит сразу два элементарных действия, так как прибавление целого числа 5 к полученному на линейке произведению $0,382x^2$ легко выполняется в уме. При умножении на линейке на множитель 0,4385 (столбец (4)) нельзя учесть все его 4 знака, приходится этот множитель округлять; округление выполняется на глаз при установке движка. Правильность таблицы разностей в строках (3) - (10) показывает, что в этих строках ошибок нет. Построив по точкам график заданной функции (рис. 2), мы видим, что он получается достаточно плавным.

Во второй части можно опустить столбцы (2), (4), (5), и значения из таблицы сразу перенести на счетную машину. Учитывая порядок величин и правила подсчета верных знаков, определяем количество знаков в промежуточных вычислениях, а именно: значения x^2 берем точные (эти значения имеют всего 4 знака, так что округлять не приходится); сумму $0{,}382x^2 + 5$ достаточно выписывать с четырьмя десятичными знаками; значения $\sqrt{x}$ берем с пятью верными знаками; сумму $0{,}4385x + \sqrt{x}$ достаточно выписывать с четырьмя десятичными знаками.

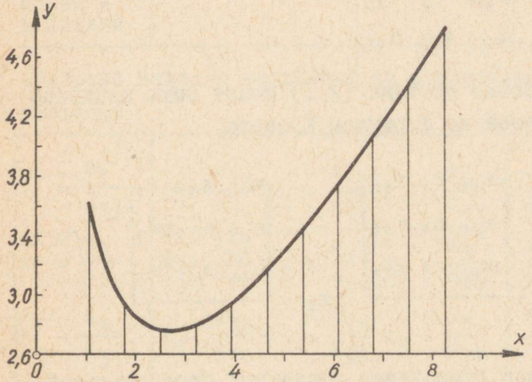

Рис. 2.

Глава II. РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

§ 4. Метод последовательного исключения неизвестных

Ограничимся рассмотрением трех уравнений с тремя неизвестными. Пусть дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = r_1 , \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = r_2 , \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = r_3 \end{cases} \qquad (2.1)$$

с отличным от нуля определителем

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Как известно, решение системы (2.I) может быть записано с помощью определителей по формулам Крамера

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} r_1 & a_{12} & a_{13} \\ r_2 & a_{22} & a_{23} \\ r_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{D}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & r_1 & a_{13} \\ a_{21} & r_2 & a_{23} \\ a_{31} & r_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{D}, \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & r_1 \\ a_{21} & a_{22} & r_2 \\ a_{31} & a_{32} & r_3 \end{vmatrix}}{D}. \qquad (2.2)$$

Но непосредственное вычисление указанных определителей требует слишком большого количества умножений и сложений и поэтому при числовых, обычно многозначных коэффициентах уравнений практически мало пригодно (особенно при большом числе уравнений).

Более эффективным оказывается последовательное исключение неизвестных путем составления подходящих комбинаций заданных уравнений. Предлагаемая далее схема весьма проста и не нуждается в специальных пояснениях.

Схема расчета и контроля

Обозначение уравн. и действ.	Расчет	Контроль
A_1	$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = r_1$	$s_1 = a_{11} + a_{12} + a_{13} + r_1$
A_2	$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = r_3$	$s_2 = a_{21} + a_{22} + a_{23} + r_2$
A_3	$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = r_3$	$s_3 = a_{31} + a_{32} + a_{33} + r_3$

Обозначение уравнений и действий	Расчет	Контроль

(Деление каждого уравнения на коэффициент при первом неизвестном)

$A'_1 = \frac{A_1}{a_{11}}$	$x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}} x_3 = \frac{r_1}{a_{11}}$	$\frac{s_1}{a_{11}} (=1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} + \frac{a_{13}}{a_{11}} + \frac{r_1}{a_{11}})$
$A'_2 = \frac{A_2}{a_{21}}$	$x_1 + \frac{a_{22}}{a_{21}} x_2 + \frac{a_{23}}{a_{21}} x_3 = \frac{r_2}{a_{21}}$	$\frac{s_2}{a_{21}} (=1 + \frac{a_{22}}{a_{21}} + \frac{a_{23}}{a_{21}} + \frac{r_2}{a_{21}})$
$A'_3 = \frac{A_3}{a_{31}}$	$x_1 + \frac{a_{32}}{a_{31}} x_2 + \frac{a_{33}}{a_{31}} x_3 = \frac{r_3}{a_{31}}$	$\frac{s_3}{a_{31}} (=1 + \frac{a_{32}}{a_{31}} + \frac{a_{33}}{a_{31}} + \frac{r_3}{a_{31}})$

(Вычитание первого уравнения из всех последующих)[1]

$B_2 = A'_2 - A'_1$	$b_{22}x_2 + b_{23}x_3 = r'_2$	$s'_2 = \frac{s_2}{a_{21}} - \frac{s_1}{a_{11}} (=b_{22} + b_{23} + r'_2)$
$B_3 = A'_3 - A'_1$	$b_{32}x_2 + b_{33}x_3 = r'_3$	$s'_3 = \frac{s_3}{a_{31}} - \frac{s_1}{a_{11}} (=b_{32} + b_{33} + r'_3)$

(Дальнейшее исключение неизвестных проводится в том же порядке)[2]

$B'_2 = \frac{B_2}{b_{22}}$	$x_2 + \frac{b_{23}}{b_{22}} x_3 = \frac{r'_2}{b_{22}}$	$\frac{s'_2}{b_{22}} (= 1 + \frac{b_{23}}{b_{22}} + \frac{r'_2}{b_{22}})$
$B'_3 = \frac{B_3}{b_{32}}$	$x_2 + \frac{b_{33}}{b_{32}} x_3 = \frac{r'_3}{b_{32}}$	$\frac{s'_3}{b_{32}} (= 1 + \frac{b_{33}}{b_{32}} + \frac{r'_3}{b_{32}})$
$C_3 = B'_3 - B'_2$	$c_{33}x_3 = r''_3$	$s''_3 = \frac{s'_3}{b_{32}} - \frac{s'_2}{b_{22}} (=c_{33} + r''_3)$
$C'_3 = \frac{C_3}{c_{33}}$	$x_3 = \frac{r''_3}{c_{33}}$	$\frac{s''_3}{c_{33}} (= 1 + \frac{r''_3}{c_{33}}$

[1] Здесь введены обозначения

$$b_{22} = \frac{a_{22}}{a_{21}} - \frac{a_{12}}{a_{11}} , \; r_2' = \frac{r_2}{a_{21}} - \frac{r_1}{a_{11}} \qquad \text{и т.д.}$$

[2] Здесь введены обозначения

$$c_{33} = \frac{b_{33}}{b_{32}} - \frac{b_{23}}{b_{22}} , \; r_3'' = \frac{r_3'}{b_{32}} - \frac{r_2'}{b_{22}} .$$

Особого внимания заслуживает построчный контроль всех вычислений с помощью контрольных сумм. Над контрольными числами (суммами коэффициентов каждого уравнения) производятся те же действия, что и над самими коэффициентами (в той же строке). Сумма полученных коэффициентов в каждой строке должна совпадать с контрольным числом этой строки в пределах точности расчета.

Подчеркнутые в схеме уравнения (A_I', B_2', C_3') образуют "приведенную систему" вида:

$$\begin{cases} x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = \rho_1 \\ \qquad\quad x_2 + \beta_3 x_3 = \rho_2 \\ \qquad\qquad\qquad x_3 = \rho_3 , \end{cases} \tag{2.3}$$

равносильную исходной системе (2.I).

Здесь для удобства записи введены новые обозначения:

$$\alpha_2 = \frac{a_{12}}{a_{11}} , \quad \alpha_3 = \frac{a_{13}}{a_{11}} , \; \rho_1 = \frac{r_1}{a_{11}} ,$$

$$\beta_3 = \frac{b_{23}}{b_{22}} , \; \rho_2 = \frac{r_2'}{b_{22}} ,$$

$$\rho_3 = \frac{r_3''}{c_{33}} .$$

Последнее из этих уравнений системы (2.3) уже дает значение неизвестного x_3. Остальные неизвестные находятся с помощью последовательных подстановок в предыдущие уравнения:

$$\begin{cases} x_3 = \rho_3 , \\ x_2 = \rho_2 - \beta_3 x_3 , \\ x_1 = \rho_1 - \alpha_2 x_2 - \alpha_3 x_3 . \end{cases} \qquad (2.4)$$

Переход от заданной системы (2.I) к приведенной системе (2.3) называется "прямым ходом", а получение из системы (2.3) решения (2.4) называется "обратным ходом".

Для контроля обратного хода используется то обстоятельство, что параллельно с системой (2.I) решается контрольная система, отличающаяся от данной только правыми частями,

$$\begin{cases} a_{11}\bar{x}_1 + a_{12}\bar{x}_2 + a_{13}\bar{x}_3 = s_1 , \\ a_{21}\bar{x}_1 + a_{22}\bar{x}_2 + a_{23}\bar{x}_3 = s_2 , \\ a_{31}\bar{x}_1 + a_{32}\bar{x}_2 + a_{33}\bar{x}_3 = s_3 , \end{cases} \qquad (2.5)$$

здесь через ($\bar{x}_I$, $\bar{x}_2$, $\bar{x}_3$) обозначено решение контрольной системы.

Так как над контрольными числами s_1, s_2, s_3 производятся те же действия, что и над правыми частями r_1, r_2, r_3, то система (2.5) равносильна "приведенной контрольной системе".

$$\begin{cases} \bar{x}_1 + \alpha_2 \bar{x}_2 + \alpha_3 \bar{x}_3 = \dfrac{s_1}{a_{11}} , \\ \bar{x}_2 + \beta_3 \bar{x}_3 = \dfrac{s_2}{b_{22}}, \\ \bar{x}_3 = \dfrac{s_3''}{c_{33}} . \end{cases} \qquad (2.6)$$

Решение контрольной системы должно отличаться от решения заданной системы точно на единицу:

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = x_1 + 1, \\ \bar{x}_2 = x_2 + 1, \\ \bar{x}_3 = x_3 + 1. \end{cases} \qquad (2.7)$$

Последнее утверждение легко проверить непосредственной подстановкой выражений (2.7) в уравнения (2.5), например,

$$a_{11}(x_1 + 1) + a_{12}(x_2 + 1) + a_{13}(x_3 + 1) =$$
$$=(a_{11} x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) + (a_{11} + a_{12} + a_{13}) =$$
$$= r_1 + a_{11} + a_{12} + a_{13} = s_1.$$

Если условия (2.7) выполнены, то можно считать,что вычисления проведены без ошибок.

Для иллюстрации предыдущего приводим пример (четыре уравнения с четырьмя неизвестными), причем в таблице выписаны только коэффициенты уравнений и результаты соответствующих действий. Во избежание накопления погрешностей от округления весь расчет ведем с двумя запасными знаками. В дальнейших вычислениях мы округляем результаты.

Как именно сказываются погрешности округления при вычислениях,видно из сравнения полученного решения системы $x_I = 7,80121$, $x_2 = -5,24253$, $x_3 = -0,90306$, $x_4 = 3,39518$.

С решением контрольной системы

$\bar{x}_I = 8,80121$, $\bar{x}_2 = -4,24253$, $\bar{x}_3 = 0,09694$, $\bar{x}_4 = 4,39518$.

Погрешности округления сказываются лишь во втором запасном знаке. (Кстати, хорошее соответствие полученных решений заданной и контрольной систем указывает на отсутствие ошибок при вычислениях).

В решении надо отбросить сомнительные знаки.

$x_I = 7,8012$, $x_2 = -5,2425$, $x_3 = -0,9031$, $x_4 = 3,3952$.

Обозн. уравн. и действ.	Коэффициенты системы				Свободные члены	Контр. числа
	x_1	x_2	x_3	x_4		
A_1	0,5174	0,2654	-0,2117	0,1699	3,413	4,1540
A_2	1,1301	1,6511	0,1227	1,2007	4,126	8,2306
A_3	0,4366	1,4222	-0,9808	1,6415	2,409	4,9285
A_4	0,2171	-1,0523	1,3418	2,0271	12,881	15,4147
$A_1' = \frac{A_1}{a_{11}}$	1	0,512949	-0,409161	0,328373	6,59644	8,028604
$A_2' = \frac{A_2}{a_{21}}$	1	1,461021	0,108574	1,062472	3,65100	7,283072
$A_3' = \frac{A_3}{a_{31}}$	1	3,257444	-2,246450	3,759734	5,51764	11,288364
$A_4' = \frac{A_4}{a_{41}}$	1	-4,847075	6,180562	9,337171	59,33210	71,002760
$B_2=A_2'-A_1'$	-	0,948072	0,517735	0,734099	-2,94544	-0,745532
$B_3=A_3'-A_1'$	-	2,744495	-1,837289	3,431361	-1,07880	3,259760
$B_4=A_4'-A_1'$	-	-5,360024	6,589723	9,008798	52,73566	62,974156
$B_2'= \frac{B_2}{b_{22}}$	-	1	0,546092	0,774307	-3,10677	-0,786366
$B_3'= \frac{B_3}{b_{32}}$	-	1	-0,669445	1,250271	-0,39308	1,187745
$B_4'= \frac{B_4}{b_{42}}$	-	1	-1,229420	-1,680738	-9,83870	-11,748851
$C_3=B_3'-B_2'$	-	-	-1,215537	0,475964	2,71369	1,974111
$C_4=B_4'-B_2'$	-	-	-1,775512	-2,455045	-6,73193	-10,962485
$C_3'=\frac{C_3}{c_{33}}$	-	-	1	-0,391567	-2,23250	-1,624065
$C_4'=\frac{C_4}{c_{43}}$	-	-	1	1,382725	3,79154	6,174267
$D_4=C_4'-C_3'$	-	-	-	1,774292	6,02404	7,798332
$D_4'= \frac{D_4}{d_{44}}$	-	-	-	1	3,39518	4,395180
Обратный ход				$x_4=$	3,39518	4,395180
			$x_3=1,32944-2,23250$	=	-0,90306	0,09694
		$x_2=0,49315-2,62891-3,10677$		=	-5,24253	-4,24253
	$x_1=$ 2,68915-0,36950-1,11488+6,59644			=	7,80121	8,80121

Но может оказаться, что и среди оставленных знаков имеются сомнительные. Поэтому требуется оценить погрешность полученного решения в зависимости от погрешностей исходных данных, т.е. коэффициентов заданной системы.

§ 5. Оценка погрешности решения

I. Понятие неустранимой погрешности

Метод исключения неизвестных является точным методом. Но округления при вычислениях приводят к тому, что получаемый результат дает не точное, а лишь приближенное решение системы. Особенно опасна потеря точности при вычитании близких чисел.

Некоторого повышения точности решения, полученного методом последовательного исключения неизвестных, удается добиться путем такой перегруппировки уравнений и неизвестных, при которой наибольший коэффициент оказывается каждый раз первым коэффициентом в первом уравнении. Это так называемая схема Гаусса с выбором главного элемента. Но всегда остается неустранимая погрешность решения, определяемая самой природой уравнений. Эта погрешность может быть очень велика, если определитель системы мал по сравнению с ее коэффициентами. Такие системы требуют специальных исследований. Мы рассмотрим лишь вопрос об оценке неустранимой погрешности решения для таких систем, у которых малое изменение коэффициентов вызывает относительно малое изменение решения.

2. Зависимость решения системы от правых частей уравнений

Выразим решение системы (2.I) в явной форме через правые части уравнений - свободные члены r_1, r_2, r_3. С этой целью разложим определители в формулах Крамера (2.2) по элементам столбца свободных членов. Мы получим формулы следующего вида:

$$\begin{cases} x_1 = r_1x_1^{(1)} + r_2x_1^{(2)} + r_3x_1^{(3)}, \\ x_2 = r_1x_2^{(1)} + r_2x_2^{(2)} + r_3x_2^{(3)}, \\ x_3 = r_1x_3^{(1)} + r_2x_3^{(2)} + r_3x_3^{(3)}. \end{cases} \qquad (2.8)$$

Отсюда видно, что при $r_1 = 1, r_2 = 0, r_3 = 0$, будут иметь место равенства

$$x_1 = x_1^{(1)},\ x_2 = x_2^{(1)},\ x_3 = x_3^{(1)}.$$

Это означает, что $(x_1^{(I)},\ x_2^{(I)},\ x_3^{(I)})$ есть решение системы с теми же коэффициентами a_{ij}, что и в системе (2.I), но с правыми частями, равными

$$r_1^{(1)} = 1, r_2^{(1)} = 0,\ r_3^{(1)} = 0.$$

Точно так же $(x_1^{(2)},\ x_2^{(2)},\ x_3^{(2)})$ есть решение аналогичной системы с правыми частями, равными

$$r_1^{(2)} = 0,\ r_2^{(2)} = 1,\ r_3^{(2)} = 0,$$

а $(x_1^{(3)},\ x_2^{(3)},\ x_3^{(3)})$ - решение системы с правыми частями, равными

$$r_1^{(3)} = 0,\ r_2^{(3)} = 0,\ r_3^{(3)} = 1.$$

Решив три системы с указанными правыми частями, мы можем выразить решение системы (2.I) с любыми правыми частями через $x_i^{(k)}$ по формулам (2.8). Заметим, что схема последовательного исключения неизвестных позволяет одновременно решать любое количество систем при неизвестных и различными правыми частями (подобно тому как это делается в схеме для правых частей r_1, r_2, r_3 и s_1, s_2, s_3).

Так как числа $x_i^{(k)}$ не зависят от правых частей r_1, r_2, r_3, то представление (2.8) позволяет просто исследовать зависимость погрешностей решения системы (2.I) от погрешностей правых частей. Будем считать коэффициенты a_{ij} при неизвестных точными числами и лишь правые части r_1, r_2, r_3 - приближенными числами с абсолютными погрешностями, равными $\Delta r_1, \Delta r_2, \Delta r_3$. Далее будем считать, что $x_i^{(k)}$ - точные решения соответствующих систем.

Тогда из формулы

$$x_2 = r_1 x_1^{(1)} + r_2 x_1^{(2)} + r_3 x_1^{(3)}$$

следует, что абсолютная погрешность x_I, вызванная погрешностями правых частей равна

$$\Delta x_1 = \Delta r_1 \, |x_1^{(1)}| + \Delta r_2 |x_1^{(2)}| + \Delta r_3 |x_1^{(3)}|.$$

Если абсолютные погрешности правых частей не превосходят λ, то абсолютная погрешность значения x_1 оценивается так:

$$\Delta x_1 \leq (|x_1^{(1)}| + |x_1^{(2)}| + |x_1^{(3)}|).$$

Аналогичные оценки получаются и для погрешностей Δx_2 и Δx_3. Обозначая

$$\sigma_i = |x_i^{(1)}| + |x_i^{(2)}| + |x_i^{(3)}|, (i = 1, 2, 3), \qquad (2.9)$$

запишем оценки абсолютных погрешностей решения, вызываемых погрешностями правых частей, в виде

$$\begin{cases} \Delta x_1 \leq \lambda \sigma_1, \\ \Delta x_2 \leq \lambda \sigma_2, \\ \Delta x_3 \leq \lambda \sigma_3 . \end{cases} \qquad (2.10)$$

3. Оценка погрешности решения

Для того чтобы оценить погрешность решения, вызываемую погрешностями коэффициентов при неизвестных, сведем этот вопрос к рассмотренному выше вопросу о погрешностях решения, вызываемых погрешностями правых частей.

Так как уравнение

$$(a_{11}+\alpha)\,\tilde{x}_1 + a_{12}\,\tilde{x}_2 + a_{13}\,\tilde{x}_3 = r_1$$

равносильно уравнению

$$a_{11}\,\tilde{x}_1 + a_{12}\,\tilde{x}_2 + a_{13}\,\tilde{x}_3 = r_1 - \alpha\tilde{x}_1\,,$$

то погрешность α в коэффициенте a_{II} вызывает такую же погрешность решения, как погрешность $\alpha\,\tilde{x}_I$ в правой части в случае неизвестных коэффициентов при неизвестных. Здесь через $(\tilde{x}_I,\ \tilde{x}_2,\ \tilde{x}_3)$ обозначено решение измененной системы (в которой коэффициент a_{II} заменен коэффициентом $a_{II}+\alpha$).

Мы условились рассматривать лишь такие системы, в которых малое изменение коэффициентов при неизвестных вызывает малое относительное изменение решения. Поэтому при малом α в получаемых оценках погрешности можно заменить решение $(\tilde{x}_I,\ \tilde{x}_2,\ \tilde{x}_3)$ найденным нами приближенным решением $(x_I,\ x_2,\ x_3)$.

Обозначим через ε наибольшую абсолютную погрешность всех коэффициентов при неизвестных. При достаточно малом ε можно считать, что погрешности всех коэффициентов при неизвестных влияют на решение не больше, чем погрешности порядка $\varepsilon(|x_I| + |x_2| + |x_3|)$ в правых частях уравнений. Учитывая оценки (2.10), мы получаем отсюда следующий вывод.

Если абсолютные погрешности коэффициентов при неизвестных не превосходят ε, а абсолютные погрешности правых частей не превосходят τ, то абсолютные погрешности не превосходят величин

$$\begin{cases} \Delta x_1 \le [\tau + \varepsilon(|x_1| + |x_2| + |x_3|)]\,\sigma_1, \\ \Delta x_2 \le [\tau + \varepsilon(|x_1| + |x_2| + |x_3|)]\,\sigma_2, \\ \Delta x_3 \le [\tau + \varepsilon(|x_1| + |x_2| + |x_3|)]\,\sigma_3, \end{cases} \qquad (2.11)$$

где $\sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3$ определены формулой (2.9). Оценка (2.II) получается из оценки (2.10) заменой λ на $\tau + \varepsilon(\,|x_I| +$

$+ |x_2| + |x_3|$). Оценка (2.II) будет справедлива, если это произведение не превосходит величины 0,02 - 0,05. Доказательство этого утверждения мы опускаем.

4. Замечание о нахождении решения системы

Значение решения системы без знания оценки его погрешности практически имеет малое значение. Для применения оценки (2.II) следует найти все $x_i^{(к)}$, т.е. решить три системы, аналогичные заданной и отличающиеся от нее лишь правыми частями специального вида (I,0,0), (0,I,0) и (0,0,I). Но решение трех таких специальных систем делает уже излишним отдельное нахождение решения заданной системы, так как последнее может быть просто выражено $x_i^{(к)}$ по формулам (2.8) Особенно большое значение это имеет в тех случаях, когда приходится решать много систем, различающихся только правыми частями. Таким образом, решение системы мы будем проводить в два этапа: сначала мы будем решать, и притом одновременно, три системы специального вида для нахождения $x_i^{(к)}$, а затем с помощью $x_i^{(к)}$ будем вычислять решение заданной системы и оценивать его погрешность.

Остается еще походящим образом выбрать контрольные числа s_1, s_2, s_3 для контроля правильности всех производимых вычислений. В качестве контрольных чисел s_1, s_2, s_3 целесообразно брать суммы всех чисел соответственно первой, второй и третьей строки;

$$\left\{\begin{aligned} s_1 &= a_{11} + a_{12} + a_{13} + r_1^{(1)} + r_1^{(2)} + r_1^{(3)} = a_{11} + a_{12} + a_{13} + 1, \\ s_2 &= a_{21} + a_{22} + a_{23} + r_2^{(1)} + r_2^{(2)} + r_2^{(3)} = a_{21} + a_{22} + a_{23} + 1, \\ s_3 &= a_{31} + a_{32} + a_{33} + r_3^{(1)} + r_3^{(2)} + r_3^{(3)} = a_{31} + a_{32} + a_{33} + 1. \end{aligned}\right. \qquad (2.12)$$

Решая систему с правыми частями s_1, s_2, s_3 параллельно с указанными выше тремя специальными системами, мы имеем возможность контролировать вычисления в каждой строке.

Кроме того, мы получаем возможность проконтролировать все найденные $x_i^{(к)}$. Действительно, если решение контрольной системы обозначить через ($\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, $\bar{x}_3$), то легко проверить, что должны иметь место соотношения

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = x_1^{(1)} + x_1^{(2)} + x_1^{(3)} + 1 , \\ \bar{x}_2 = x_2^{(1)} + x_2^{(2)} + x_2^{(3)} + 1 , \\ \bar{x}_3 = x_3^{(1)} + x_3^{(2)} + x_3^{(3)} + 1 . \end{cases} \qquad (2.13)$$

Эта проверка осуществляется так же, как и аналогичная проверка на стр. 28, например:

$$a_{11} (x_1^{(1)} + x_1^{(2)} + x_1^{(3)} + 1) + a_{12}(x_2^{(1)} + x_2^{(2)} + x_2^{(3)} + 1) +$$
$$+a_{13} (x_3^{(1)} + x_3^{(2)} + x_3^{(3)} + 1) = r_1^{(1)} + r_1^{(2)} + r_1^{(3)} + a_{11} +$$
$$+ a_{12} + a_{13} = s_1 .$$

§ 6. Лабораторная работа № 2

Решение системы линейных уравнений и оценка погрешности решения

З а д а н и е. Решить систему четырех линейных уравнений с четырьмя неизвестными.

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + a_{14} x_4 = r_1 , \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + a_{24} x_4 = r_2 , \\ a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 + a_{34} x_4 = r_3 , \\ a_{41} x_1 + a_{42} x_2 + a_{43} x_3 + a_{44} x_4 = r_4 . \end{cases} \qquad (2.1)$$

Оценить погрешность полученного решения, считая верными все заданные знаки коэффициентов (абсолютная погрешность коэффициентов не превосходит половины единицы их младшего разряда).

Указания по выполнению задания

1^0 Результаты вычислений вносятся в таблицу в соответствии с данным образцом.

2^0 Все вычисления ведутся по строкам, в соответствии со схемой, указанной в левом столбце расчетного бланка. Контроль вычислений проводится с помощью контрольных чисел по схеме, аналогичной схеме, приведенной на стр. 24. После выполнения каждого действия над всеми числами одной строки обязательно проверяется равенство контрольного числа и суммы остальных чисел этой строки. В случае обнаружения расхождений, которые нельзя отнести за счет погрешностей округления, строку нужно пересчитать заново.

3^0 Полученные решения $x_i^{(k)}$ проверяются как путем сравнения их с решением контрольной системы по формулам (2.13), так и путем подстановки их в специальные уравнения, описанные на стр. 31 . Решение заданной системы находится по $x_i^{(k)}$ с помощью формул (2.8). Оценка погрешности этого решения производится также по $x_i^{(k)}$ с помощью формул (2.11). Проверка решения производится путем подстановки его в исходные уравнения заданной системы (целесообразно производить уже после округления полученного решения).

4^0 Весь расчет проводится с двумя-тремя запасными знаками. Округление окончательных результатов производится после оценки погрешности решения. При округлении окончательных результатов следует иметь в виду, что оценки (2.11) являются завышенными и поэтому в решении целесообразно сохранять один сомнительный знак.

О б р а з е ц

ТАЛЛИНСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
Лаборатория математики

Л а б о р а т о р н а я р а б о т а №2

РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ И ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ РЕШЕНИЯ

Группа . . . .

Выполнил . . . .

Проверил . . . .

Дата . . . .

З а д а н и е. Решить систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными.

$$\begin{cases} 0{,}5174\ x_1 + 0{,}2654\ x_2 - 0{,}2117\ x_3 + 0{,}1699\ x_4 = 3{,}413 \\ 1{,}1301\ x_1 + 1{,}6511\ x_2 + 0{,}1227\ x_3 + 1{,}2007\ x_4 = 4{,}126 \\ 0{,}4366\ x_1 + 1{,}4222\ x_2 - 0{,}9808\ x_3 + 1{,}6415\ x_4 = 2{,}409 \\ 0{,}2171\ x_1 - 1{,}0523\ x_2 + 1{,}3418\ x_3 + 2{,}0271\ x_4 = 12{,}881. \end{cases}$$

Оценить погрешность этого решения, считая верными все заданные знаки коэффициентов (см. табл. с вычислениями на стр. 39.)

Решение системы получим по формулам (2.8)

$x_I = 7{,}801212$, $x_2 = -5{,}242539$, $x_3 = -0{,}903054$, $x_4 = 3{,}395185$.

Оценим погрешность, абсолютная погрешность коэффициентов не превосходит $\varepsilon = 0{,}00005$, свободных членов $\tau = 0{,}0005$

$$|x_I| + |x_2| + |x_3| + |x_4| = 17{,}35$$

(округляя в большую сторону!)

$$|x_1| + |x_2| + |x_3| + |x_4| = 17{,}35\ ,$$

$$\sigma_1 = |x_1^{(1)}| + |x_1^{(2)}| + |x_1^{(3)}| + |x_1^{(4)}| = 2{,}62,$$

$$\sigma_2 = |x_2^{(1)}| + |x_2^{(2)}| + |x_2^{(3)}| + |x_2^{(4)}| = 2{,}23,$$

$$\sigma_3 = |x_3^{(1)}| + |x_3^{(2)}| + |x_3^{(3)}| + |x_3^{(4)}| = 2{,}51,$$

$$\sigma_4 = |x_4^{(1)}| + |x_4^{(2)}| + |x_4^{(3)}| + |x_4^{(4)}| = 0{,}94 \quad \text{ja}$$

$$\tau + \varepsilon \cdot (|x_1| + |x_2| + |x_3| + |x_4|) = 0{,}0005 + 0{,}00005 \cdot 17{,}35 \approx$$
$$\approx 0{,}0014.$$

Итак, погрешность решения оценивается следующим образом:

$$\Delta x_1 \le 0{,}0014 \cdot 2{,}62 < 0{,}004\ ,$$

$$\Delta x_2 \le 0{,}0014 \cdot 2{,}23 < 0{,}004\ ,$$

$$\Delta x_3 \le 0{,}0014 \cdot 2{,}51 < 0{,}004\ ,$$

$$\Delta x_4 \le 0{,}0014 \cdot 0{,}94 < 0{,}002\ ,$$

Обозначение уравн. и действ.	Коэффициент системы				Правые части специальных систем				Контрольные числа
	x_1	x_2	x_3	x_4	(1)	(2)	(3)	(4)	
A_1	0,5174	0,2654	−0,2117	0,1699	1	0	0	0	1,7410
A_2	1,1301	1,6511	0,1227	1,2007	0	1	0	0	5,1046
A_3	0,4366	1,4222	−0,9808	1,6415	0	0	1	0	3,5195
A_4	0,2171	−1,0523	1,3418	2,0271	0	0	0	1	3,5337
$A_1' = \frac{A_1}{a_{11}}$	1	0,512949	−0,409161	0,328373	1,932741	0	0	0	3,364901
$A_2' = \frac{A_2}{a_{21}}$	1	1,461021	0,108574	1,062472	0	0,884877	0	0	4,516945
$A_3' = \frac{A_3}{a_{31}}$	1	3,257444	−2,246450	3,759734	0	0	2,290426	0	8,061154
$A_4' = \frac{A_4}{a_{41}}$	1	−4,847075	6,180562	9,337171	0	0	0	4,606172	16,276830
$B_2 = A_2' - A_1'$	–	0,948072	0,517735	0,734099	−1,932741	0,884877	0	0	1,152044
$B_3 = A_3' - A_1'$	–	2,744495	−1,837289	3,431361	−1,932741	0	2,290426	0	4,696253
$B_4 = A_4' - A_1'$	–	−5,360024	6,589723	9,008798	−1,932741	0	0	4,606172	12,911929
$B_2' = \frac{B_2}{b_{22}}$		1	0,546092	0,774307	−2,03861	0,933344	0	0	1,215144
$B_3' = \frac{B_3}{b_{32}}$		1	−0,669445	1,250271	−0,704225	0	0,834553	0	1,711154
$B_4' = \frac{B_4}{b_{42}}$		1	−1,229420	−1,680738	0,360584	0	0	−0,859356	−2,408931
$C_3 = B_3' - B_2'$		–	−1,215537	0,475964	1,334376	−0,933344	0,834553	0	0,496010
$C_4 = B_4' - B_2'$		–	−1,775512	−2,455045	2,399185	−0,933344	0	−0,859356	−3,624075
$C_3' = \frac{C_3}{c_{33}}$			1	−0,391567	−1,097767	−0,767845	−0,686571	0	−0,408058
$C_4' = \frac{C_4}{c_{43}}$			1	1,382725	−1,351264	0,525676	0	0,484005	2,041144
$D_4 = C_4' - C_3'$			–	1,774292	−0,253497	−0,242169	0,686571	0,484005	2,449202
$D_4' = \frac{D_4}{d_{44}}$				1	−0,142872	−0,136488	0,386955	0,272788	1,380383
Обратный ход				x_4 =	−0,142872	−0,136488	0,386955	0,272788	1,380383
			x_3	=	−1,153711	0,714401	−0,535052	0,106815	0,132454
		x_2		=	−1,297942	0,648899	−0,007434	−0,269553	0,073972
	x_1			=	2,173380	0,004272	−0,342175	0,092395	2,927872

При этом условие применимости оценки выполнено

$$\varepsilon\cdot(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3+\sigma_4)=0,00005\cdot 8,3=0,000415\ll 0,01.$$

Получаем решением

$$x_1 = 7,801 \pm 0,004\ ,$$
$$x_2 = -5,242 \pm 0,004,$$
$$x_3 = -0,903 \pm 0,004,$$
$$x_4 = 3,395 \pm 0,002.$$

Для проверки этого решения подставим его в заданную систему

$$),5174\cdot 7,801 + 0,2654\cdot(-5,242)-0,2117\cdot(-0,903)+0,1699\cdot 3,395=3,4130$$
$$1,1301\cdot 7,801 + 1,6511\cdot(-5,242)+0,1227\cdot(-0,903)+1,2007\cdot 3,395=4,1264$$
$$),4366\cdot 7,801 + 1,4222\cdot(-5,242)-0,9809\cdot(-0,903)+1,6415\cdot 3,395=2,4093$$
$$),2171\cdot 7,801 - 1,0523\cdot(-5,242)+1,3418\cdot(-0,903)+2,0271\cdot 3,395=12,8801.$$

Совпадение результатов с правыми частями заданных уравнений вполне удовлетворительно.

Глава III. ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИИ ДАННОЙ ФУНКЦИЕЙ МЕТОДОМ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Часто на практике получается функциональная зависимость результатом измерения

$$\begin{array}{c|ccccc} x & x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ \hline y & y_1 & y_2 & y_3 & \dots & y_n \end{array}\ . \qquad (3.1)$$

. Притом не известно выражение для функции $f(x)$ и ее не найти непосредственно из таблицы. В этом случае нужно найти простую в смысле вычислений, функцию (например, полином), которая представила бы функцию $f(x)$ с достаточной точностью на данном отрезке $x_i \in [a,b]$, где $i = 1, 2, \ldots, n$. Это производится путем интерполяции функции: находят для функции $f(x)$ полином $P(x)$, который при данных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ принимал бы значение $P(x_1) = f(x_1)$, $P(x_2) = f(x_2), \ldots, P(x_n) = f(x_n)$ (рис. 3).

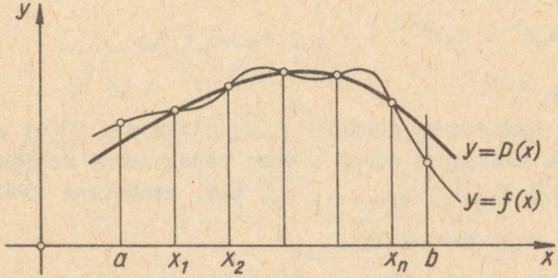

Рис. 3.

Во многих же случаях не целесообразно пользоваться интерполировочным полиномом, так как он искажает слишком данную функцию $f(x)$ или можно найти приближенную функцию проще другим методом.

§ 7. Постановка задачи

Выбор приближенной функции

Пусть результаты измерения даны в виде таблицы (3.1) и соответствующая ей эмпирическая формула

$$y = \varphi(x),$$

где функция зависит от произвольных параметров. Разности

$$\varphi(x_k) - y_k = v_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \qquad (3.2)$$

будем называть <u>отклонениями</u>. В функции $\varphi(x)$ параметры следует выбрать так, чтобы отклонения были бы в каком-то смысле наименьшие. Наиболее употребимый пример такого выбора - минимальность квадратов отклонения

$$\sum_{i=1}^{n} v_i^2 = v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2.$$

Это и есть основа метода наименьших квадратов.

Пусть приближенной функцией $\varphi(x)$ является полином

$$\varphi(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_{m-1} x + a_m, \qquad (3.3)$$

притом $a_0 \neq 0$.

Задача приблизить функцию $f(x)$ полиномом $\varphi(x)$ методом наименьших квадратов стоит в том: определить коэффициенты полинома (3.3) $a_I, a_2, \ldots, a_m$, так, чтобы при данном m $\sum_i v_i^2$ было наименьшим.

Отметим, что при $m \geqslant n$ бесчисленное множество полиномов (3.3) и при $m = n-1$ только один такой полином (3.3), которые удовлетворяют условию $\sum_i v_i^2 = 0$ и дают решение задаче интерполяции функции, приведенной в начале главы. Мы предполагаем, что $m < n-1$. В этом случае выполняется, для любых действительных коэффициентов $a_I, a_2, \ldots, a_m$, неравенство $\sum_i v_i^2 \geqslant 0$. Значит $\sum_i v_i^2$ неотрицательная функция m переменных $a_I, a_2, \ldots, a_m$ и существует всегда минимум.

Ясно, что искомый полином (3.3) тем проще, чем меньше натуральное число m. С другой стороны, чрезмерное уменьшение степени полинома (3.3) влечет за собой увеличение минимума $\sum_i v_i^2$. Как же подобрать степень m ?

Выбор степени m для полинома приближения происходит по разностям из таблицы (3.I). Рассмотрим разности первого, второго и т.д. i-того порядка.

$$\Delta y_k = y_{k+1} - y_k,$$

$$\Delta^2 y_k = \Delta y_{k+1} - \Delta y_k,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Delta^i y_k = \Delta^{i-1} y_{k+1} - \Delta^{i-1} y_k.$$

В рассматриваемой задаче эти разности не должны соответствовать следующему значению аргумента для постоянного шага h (т.е. не должно выполняться условие $x_к = x_I + (к - I)\cdot h$).

Наряду с обыкновенными разностями рассмотрим еще так называемые деленные разности.

$$\overline{\Delta y_k} = \frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}, \quad \text{где} \quad \Delta x_k = x_{k+1} - x_k,$$

$$\overline{\Delta^2 y_k} = \frac{\overline{\Delta y}_{k+1} - \overline{\Delta y}_k}{x_{k+2} - x_k},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\overline{\Delta^i y_k} = \frac{\overline{\Delta^{i-1} y_{k+1}} - \overline{\Delta^{i-1} y_k}}{x_{k+i} - x_k}.$$

Если в таблице (3.I) шаг h постоянный, то m выбирается по обыкновенным разностям, если шаг h переменная величина, то —по деленным разностям.

Линейный полином ($m = I$) годится в полином приближения только в том случае, если разности первого порядка мало отличаются друг от друга.

П р и м е р I. (шаг $h = 0,5$)

x	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5
y	0,2	0,8	1,2	1,7	2,3	2,9
Δy	6	4	5	6	6	

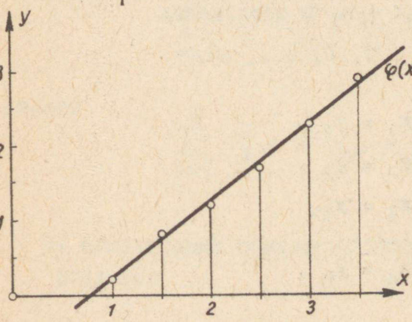

Рис. 4.

Если разности первого порядка значительно отличаются друг от друга, а разности второго порядка практически постоянные, то для приближения используем квадратный полином ($m = 2$).

П р и м е р 2. (шаг $h = 0{,}1$)

x	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
y	3,230	3,253	3,261	3,252	3,223	3,176
Δy	23	8	-9	-29	-47	
$\Delta^2 y$	-15	-17	-20	-18		

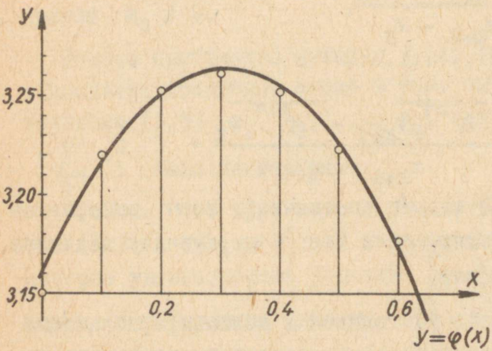

Рис. 5.

Аналогично приближается функция полиномом i-той степени.

В вышеприведенных примерах шаг таблицы был постоянный, полином приближения выбирали по обыкновенным разностям. Если же шаг h переменная величина, следует пользоваться деленными разностями. Несложно убедиться, что если табличные данные соответствуют линейной зависимости, должны деленные разности первого порядка быть постоянные.

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_1} = \ldots = \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k}.$$

Действительно, $\varphi(x) = a_0 x + a_1$ и отклонения

$$\varphi(x_k) - y_k = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Получаем

$$\begin{aligned} a_1 + a_0 x_1 &= y_1, \\ a_1 + a_0 x_2 &= y_2, \\ a_1 + a_0 x_3 &= y_3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1 + a_0 x_n &= y_n, \end{aligned}$$

Из которых

$$a_o\,(x_2 - x_1) = y_2 - y_1\,,$$

$$a_o\,(x_3 - x_2) = y_3 - y_2\,,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = \ldots = a_o\,.$$

§ 8. Приближение функции квадратным полиномом, линейным полиномом и функцией $ax + b + \frac{c}{x}$ методом наименьших квадратов

В данном случае $m = 2$ и полином приближения (3.3) приобретает форму

$$\varphi(x) = a_o x^2 + a_1 x + a_2.$$

Выпишем отклонения

$$\begin{cases} v_1 = a_2 + a_1 x_1 + a_o x_1^2 - y_1\,, \\ v_2 = a_2 + a_1 x_2 + a_o x_2^2 - y_2\,, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ v_n = a_2 + a_1 x_n + a_o x_n^2 - y_n\,, \end{cases}$$

из которых

$$\sum_{k=1}^{n} v_k^2 = \sum_{k=1}^{n} (a_2 + a_1 x_k + a_o x_k^2 - y_k)^2.$$

значит

$$\sum_{k=1}^{n} v_k^2 = F\,(a_o,\, a_1,\, a_2) \geq 0.$$

Из необходимых признаков экстремума функции $F(a_o,\, a_1,\, a_2)$ получаем

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial a_0} = 2 \sum\limits_{k=1}^{n} (a_2 + a_1 x_k + a_0 x_k^2 - y_k) \cdot x_k^2 = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial a_1} = 2 \sum\limits_{k=1}^{n} (a_2 + a_1 x_k + a_0 x_k^2 - y_k) \cdot x_k = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial a_2} = 2 \sum\limits_{k=1}^{n} (a_2 + a_1 x_k + a_0 x_k^2 - y_k) = 0. \end{cases}$$

Полученную систему перепишем системой нормированных уравнений, решение которой a_0, a_I, a_2 определяет искомый полином.

$$\begin{cases} a_0 \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^4 + a_1 \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^3 + a_2 \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 y_k, \\ a_0 \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^3 + a_1 \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 + a_2 \sum\limits_{k=1}^{n} x_k = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k y_k, \\ a_0 \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 + a_1 \sum\limits_{k=1}^{n} x_k + n \cdot a_2 = \sum\limits_{k=1}^{n} y_k. \end{cases} \qquad (3.4)$$

Приближая функцию линейным полиномом $\varphi(x) = a_0 x + a_I$ система нормированных уравнений (3.4) следующая:

$$\begin{cases} a_0 \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 + a_1 \sum\limits_{k=1}^{n} x_k = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k y_k, \\ a_0 \sum\limits_{k=1}^{n} x_k + a_1 \cdot n = \sum\limits_{k=1}^{n} y_k. \end{cases}$$

Аналогично можно получить систему нормированных уравнений для определения коэффициентов полинома приближения a_0,

$a_I, \ldots, a_m$ при приближении функции $f(x)$ произвольным полиномом m -го порядка (3.3).

При приближении функции функцией $ax + b + \frac{c}{x}$ будет

$$\sum_{k=1}^{n} V_k^2 = \sum_{k=1}^{n} \left(ax_k + b + \frac{c}{x_k} - y_k\right)^2,$$

из которых необходимые признаки экстремума будут:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial a} = 2 \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(ax_k + b + \frac{c}{x_k} - y_k\right)x_k = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial b} = 2 \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(ax_k + b + \frac{c}{x_k} - y_k\right) = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial c} = 2 \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(ax_k + b + \frac{c}{x_k} - y_k\right) \cdot \frac{1}{x_k} = 0. \end{cases}$$

Система нормированных уравнений для определения a, b, c принимает следующий вид

$$\begin{cases} a \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k^2 + b \sum_{k=1}^{n} x_k + nc = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k, \\ a \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k + nb + c \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} = \sum_{k=1}^{n} y_k, \\ na + b \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} + c \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{y_k}{x_k}. \end{cases} \tag{3.5}$$

§ 9. Лабораторная работа № 3

Приближение функции функцией $ax + b + \frac{c}{x}$ методом наименьших квадратов

З а д а н и е. Найти методом наименьших квадратов функцию приближения $ax + b + \frac{c}{x}$ функции представленной таблицей

x	x_1	x_2	x_3	...	x_n
y	y_1	y_2	y_3	...	y_n

Указания по выполнению задания

1^0 Заполнить таблицу для получения системы нормированных уравнений (3.5)

x	y	$\frac{1}{x}$	x^2	$\frac{1}{x^2}$	xy	$\frac{y}{x}$
x_1	y_1	...	...	...	...	$\frac{y_1}{x_1}$
x_2	y_2	...	...	...	...	$\frac{y_2}{x_2}$
...	...	...	...	...	...	...
x_n	y_n	...	...	...	...	$\frac{y_n}{x_n}$
$\sum x_k$	$\sum y_k$	$\sum \frac{1}{x_k}$	$\sum x_k^2$	$\sum \frac{1}{x_k^2}$	$\sum x_k y_k$	$\sum \frac{y_k}{x_k}$

2^0 Выписать систему нормированных уравнений (3.5) и решить ее по схеме Гаусса (см. лаборат. раб. № 2). Как при заполнении таблицы, так и при решении системы сохранять один запасной знак. В функцию приближения писать те значения коэффициентов a, b, c тем же количеством знаков, что в исходной таблице.

3^0 Выписать полученный полином приближения, беря коэффициенты с нужной точностью.

Образец

ТАЛЛИНСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Лаборатория математики

Лабораторная работа № 3

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИИ КВАДРАТНЫМ ПОЛИНОМОМ МЕТОДОМ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Группа . . . .

Выполнил . . . .

Проверил . . . .

Дата . . . .

З а д а н и е. Найти методом наименьших квадратов функцию приближения в виде $ax + b + \frac{c}{x}$ функции, которая задана таблицей.

x	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
y	3,261	3,252	3,228	3,181	3,117	3,034

Р е ш е н и е. Заполним таблицу

x	y	$\frac{1}{x}$	x^2	$\frac{1}{x^2}$	xy	$\frac{y}{x}$
0,5	3,261	2,000	0,25	4,000	1,6305	6,522
0,6	3,252	1,667	0,36	2,778	1,9512	5,420
0,7	3,228	1,429	0,49	2,041	2,2596	4,611
0,8	3,181	1,250	0,64	1,562	2,5448	3,976
0,9	3,117	1,111	0,81	1,235	2,8053	3,463
1,0	3,034	1,000	1,00	1,000	3,0340	3,034
4,5	19,073	8,457	3,55	12,616	14,2254	27,026

Получаем систему

$$\begin{cases} 3,55\,a + 4,5\,b + 6\,c = 14,2254\,, \\ 4,5\,a + 6\,b + 8,457\,c = 19,073\,, \\ 6\,a + 8,457\,b + 12,616\,c = 27,026. \end{cases}$$

Решим систему

Коэффициенты системы			Свободн. члены	Сумма строки	Контрольное число
a	b	c			
3,55	4,500	6,000	14,2254	28,2754	28,2754
4,50	6,000	8,457	19,0730	38,0300	38,0300
6,00	8,457	12,616	27,0260	54,0990	54,0990
1	1,2676	1,6901	4,0072	7,9649	7,9649
1	1,3333	1,8793	4,2384	8,4510	8,4511
1	1,4095	2,1027	4,5043	9,0165	9,0165
-	0,0657	0,1892	0,2312	0,4861	0,4862
-	0,1419	0,4126	0,4971	1,0516	1,0516
	1	2,8798	3,5190	7,3988	7,4003
	1	2,9077	3,5032	7,4109	7,4109
	-	0,0279	-0,0158	0,0121	0,0106
		1	-0,5663	0,4337	0,3799
	c = -0,5663				
	b = 3,5190 + 1,6308 = 5,1498				
a = 4,0072 + 0,9571 - 6,5279 = -1,5636					

Итак, функция приближения есть

$$\varphi(x) = -1,56x + 5,15 - \frac{0,57}{x}.$$

Глава IУ. ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

В задачах, которые приводят к решению дифференциальных уравнений, в большинстве случаев нужно найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям. Если дифференциальное уравнение непосредственно не интегрируется, то нужно прибегать к приближенным методам.

§ IO. Метод Эйлера

Пусть дано уравнение

$$y' = f(x,y). \tag{4.I}$$

Следует найти приближенное решение этого уравнения на отрезке $[a, b]$, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$, $x_0 = a$. Метод Эйлера заключается в том, что отрезок $[x_0, b]$ делят на n равных частей шагом

$$h = \frac{b - x_0}{n}.$$

Выбрав достаточно малый шаг h, построим систему равноотстоящих точек $x_k = x_0 + k \cdot h$ $(k = 0, I, 2, \ldots, n)$.

На каждом таком частичном отрезке заменим интегральную кривую отрезком касательной

$$y - y_k = f(x_k, y_k)(x - x_k), \tag{4.2}$$

проходящей через точку (x_k, y_k). (Из исходного уравнения (4.I) угловой коэффициент касательной в точке x_k есть $y'_k = f(x_k, y_k)$).

Такая ломанная называется ломанной Эйлера. Итак, можно подсчитать приближенные значения решения y в точках x_I, $x_2, \ldots, x_n$ формулами: $y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0)$

или $$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0) \cdot h,$$
$$y_2 = y_1 + f(x_1, y_1) \cdot h,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y_{k+1} = y_k + f(x_k, y_k) \cdot h. \qquad (4.3)$$

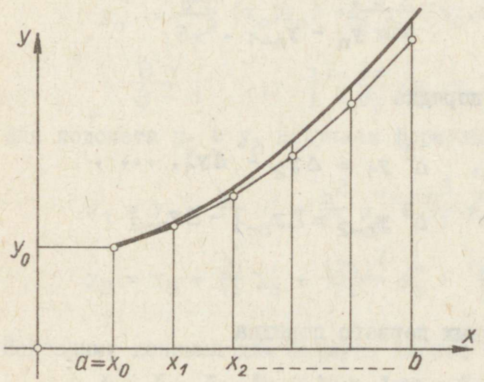

Рис. 6.

Сравнение точных значений с приближенными показывает, что точность метода Эйлера зависит от выбора шага h. Выбирая достаточно малый шаг, можно обеспечить любую заданную точность.

§ II. Метод Адамса

Метод Адамса, который обоснован на формуле Тейлора, дает более высокую точность, чем метод Эйлера. Применение метода Адамса геометрически означает заменить интегральную кривую полиномом второго, третьего и четвертого порядка в зависимости от числа членов в формуле Адамса.

Мы будем применять формулу с четырьмя членами, т.е. формулу с разностями второго порядка, которой соответствует полином второго порядка.

Опять же дано уравнение
$$y' = f(x,y).$$

Нужно найти решение на отрезке $[x_0, b]$, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$.

Обозначим приближенные значения решения в точках x_1, x_2, ..., x_n соответственно y_1, y_2, ..., y_n, приближенные значения производных – y'_1, y'_2, ..., y'_n, y''_1, y''_2, ..., y''_n и т.д.

Разности первого порядка

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0,\ \Delta y_1 = y_2 - y_1, \ldots, \Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1}.$$

Разности второго порядка

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0,\quad \Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1, \ldots, \quad \Delta^2 y_{n-2} = \Delta y_{n-1} - \Delta y_{n-2}$$

и т.д.

Разности производных первого порядка

$$\Delta y'_0 = y'_1 - y'_0,\ \Delta y'_1 = y'_2 - y'_1, \ldots, \quad \Delta y'_{n-1} = y'_n - y'_{n-1}.$$

Разности производных второго порядка

$$\Delta^2 y'_0 = \Delta y'_1 - \Delta y'_0,\quad \Delta^2 y'_1 = \Delta y'_2 - \Delta y'_1, \ldots, \quad \Delta^2 y'_{n-2} = \Delta y'_{n-1} - \Delta y'_{n-2}$$

и т.д.

Выпишем теперь формулу Тейлора для окрестности точки $x = x_0$

$$y = y_0 + \frac{x - x_0}{1!} y'_0 + \frac{(x - x_0)^2}{2!} y''_0 + \frac{(x - x_0)^3}{3!} y'''_0 + \ldots + \frac{(x - x_0)^k}{n!} y_0^{(k)} + R_k. \quad (4.4)$$

По последней формуле подсчитаем значения y_I и y_2 при значениях аргумента $x_I = x_o + h$ и $x_2 = x_I + h = x_o + 2h$, ограничиваясь первыми четырьмя членами. Величины y_o', y_o'' и y_o''' найдем из уравнения (4.I) $y_o' = f(x_o, y_o)$,

$$y_o'' = \frac{\partial f}{\partial x}(x_o,y_o) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_o,y_o) \cdot f(x_o,y_o)$$

$$y_o''' = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_o,y_o) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_o,y_o)\, f(x_o,y_o) +$$

$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left[f(x_o,y_o)\right]^2 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_o,y_o) \cdot y_o''.$$

Для подсчета y_I и y_2 получаем формулы

$$y_1 = y_o + \frac{h}{1!} y_o' + \frac{h^2}{2!} y_o'' + \frac{h^3}{3!} y_o''' ,$$

$$y_2 = y_o + \frac{2h}{1!} y_o' + \frac{(2h)^2}{2!} y_o'' + \frac{(2h)^3}{3!} y_o'''. \qquad (4.5)$$

Исходными данными для формулы Адамса будут

$$x_o,\ x_1,\ x_2,\ h,\ y_o,\ y_1,\ y_2,\ y_o',\ y_1' = f(x_1, y_1)$$

$$y_2' = f(x_2, y_2), \Delta y_o', \Delta y_1' \text{ ja } \Delta^2 y_o',$$

которые внесем в таблицу

k	x	y	y'	$\Delta y'$	$\Delta^2 y'$
0	x_o	y_o	y_o'		
				$\Delta y_o'$	
1	x_1	y_1	y_1'		$\Delta^2 y_o'$
				$\Delta y_1'$	
2	x_2	y_2	y_2'		...
				...	
...	...	...	...		...

(4.6)

Формулу Адамса получим следующим образом: предположим, что нам известны приближенные решения $y_0, y_1, \dots, y_к$, из последних найдем величины

$$y'_0, y'_1, y'_2, \dots, y'_k$$

$$\Delta y'_0, \Delta y'_1, \Delta y'_2, \dots, \Delta y'_{k-1}$$

и

$$\Delta^2 y'_0, \Delta^2 y'_1, \Delta^2 y'_2, \dots, \Delta^2 y'_{k-2}.$$

Теперь определим значение $y_{к-1}$ из формулы Тейлора (4.4), предполагая, что $x_0 = x_к$, $x = x_{к+1} = x_к + h$, и ограничимся опять четырьмя членами

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{1!} y'_k + \frac{h^2}{2!} y''_k + \frac{h^3}{3!} y'''_k. \qquad (4.7)$$

Чтобы найти величины $y''_к$ и $y'''_к$, используем известные нам разности производных первого и второго порядка. Для этого представим при помощи формулы Тейлора (4.4) величину $y'_{к-1}$ в предположении, что $x_0 = x_к$, $x - x_0 = -h$,

$$y'_{k-1} = y'_k + \frac{(-h)}{1!} y''_k + \frac{(-h)^2}{2!} y'''_k;$$

и величину $y'_{к-2}$ в предположении, что

$$x_0 = x_k, \quad x - x_0 = -2h:$$

$$y'_{k-2} = y'_k + \frac{(-2h)}{1!} y''_k + \frac{(-2h)^2}{2!} y'''_k.$$

Исходя из двух последних равенств получим:

$$y'_k = y'_{k-1} = \Delta y'_{k-1} = \frac{h}{1} y''_k - \frac{h^2}{2} y'''_k,$$

$$y'_{k-1} - y'_{k-2} = \Delta y'_{k-2} = \frac{h}{1} y''_k - \frac{3h^2}{2} y'''_k,$$

$$y'_{k-1} - y'_{k-2} = \Delta^2 y'_{k-2} = h^2 y'''_k,$$

из чего получим

$$y_k''' = \frac{1}{h^2} \Delta^2 y'_{k-2}$$

и

$$y''_k = \frac{\Delta y'_{k-1}}{h} + \frac{\Delta^2 y'_{k-2}}{2h}.$$

Подставляя полученные производные в формулу (4.7) получим <u>формулу Адамса с четырьмя членами или с разностями второго порядка</u>

$$y_{k+1} = y_k + hy'_k + \frac{h}{2} \Delta y'_{k-1} + \frac{5h}{12} \Delta^2 y'_{k-2}. \qquad (4.8)$$

По этой формуле можно найти значение y_3, если известны значения y_0, y_I, y_2 и дальше уже можно найти y_4, y_5 и т.д.

Вычисляя по формуле (4.8) абсолютная погрешность y_{k+I} будет порядка h^3. Так как формулу (4.8) достигаем путем предварительных подсчетов, то суммарная абсолютная погрешность будет порядка h^2.

Чтобы повысить точность, можно пользоваться формулами Адамса, содержащими пять, шесть и более членов:

$$y_{k+1} = y_k + hy'_k + \frac{h}{2} \Delta y'_{k-1} + \frac{5h}{12} \Delta^2 y'_{k-2} + \frac{3h}{8} \Delta^3 y'_{k-3}, \qquad (4.9)$$

$$y_{k+1} = y_k + hy'_k + \frac{h}{2} \Delta y'_{k-1} + \frac{5h}{12} \Delta^2 y'_{k-2} + \frac{3h}{8} \Delta^3 y'_{k-3} + \frac{251\,h}{720} \Delta^4 y'_{k-4} \ldots$$

При этом очень возрастает объем вычислительной работы. В образцовой работе ограничимся только четырьмя членами. Вышеупомянутая точность гарантирована, если разности производных второго порядка в таблице (4.6) мало отличаются друг от друга.

§ I2. Лабораторная работа № 4

Приближенное решение дифференциального уравнения первого порядка методом Адамса

Задание. Найти приближенное решение уравнения $y' = f(x, y)$ на отрезке $[x_0, b]$, которое удовлетворяет условию $y(x_0) = y_0$.

Указания по выполнению задания

I^0 Найти величины y_0', y_0'', y_0''' и из формул (4.5) подсчитать y_1 и y_2.

2^0 Подготовить таблицу (4.6), внести найденные значения в таблицу, заполняя и все остальные возможные графы. Добавить столбец со значениями $\Delta^3 y'$.

3^0 Употребляя постепенно формулу Адамса с пятью членами (4.9), найти все требуемые значения y_k и заполнить все остальные возможные графы таблицы.

Образец

ТАЛЛИНСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
Лаборатория математики

Лабораторная работа №4

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА МЕТОДОМ АДАМСА

Группа . . . .
Выполнил . . . .
Проверил . . . .
Дата . . . .

З а д а н и е. Найти приближенные значения решения уравнения $y = y^2 + x$ на отрезке $[0;\ 0,5]$ с шагом $h = 0,1$ при начальных условиях $y(0) = 1$. Вычисления производить с точностью до 4 знака после запятой.

Р е ш е н и е

$x_0 = 0;\ x_1 = 0,1;\ x_2 = 0,2;\ x_3 = 0,3;\ x_4 = 0,4;\ x_5 = 0,5.$

Из уравнения и начальных условий

$y_0 = 1$,

$y_0' = 1^2 + 0 = 1$,

$y'' = 2yy' + 1$, из которой $y_0'' = 2.1.1+1 = 3$,

$y''' = 2\left[(y')^2 + yy'\right]$, из которой $y_0''' = 2(1+1.3) = 8$.

Из формул (4.5) найдем

$$y_1 = 1 + 0,1 \cdot 1 + \frac{0,01}{2} \cdot 3 + \frac{0,001}{6} \cdot 8 = 1,1163$$

$$y_2 = 1 + 0,2 \cdot 1 + \frac{0,04}{2} \cdot 3 + \frac{0,008}{6} \cdot 8 = 1,2707.$$

Из уравнения

$$y_1' = (1,1163)^2 + 0,1 = 1,3461$$

$$y_2' = (1,2707)^2 + 0,2 = 1,8147.$$

Заполним таблицу

k	x_k	y_k	y_k'	$\Delta y'$	$\Delta^2 y'$
0	0	1,0000	1,0000		
				0,3461	
1	0,1	1,1163	1,3461		0,1225
				0,4686	
2	0,2	1,2707	1,8147		0,2092
				0,6778	
3	0,3	1,4807	2,4925		0,3718
				1,0496	
4	0,4	1,7726	3,5421		
5	0,5	2,1948			

Из формулы (4.8) и уравнения:

$$y_3 = 1{,}2707 + 0{,}1\cdot 1{,}8147 + \frac{0{,}1}{2}\cdot 0{,}4686 + \frac{0{,}5}{12}\cdot 0{,}1225 = 1{,}4807,$$

$$y_3' = (1{,}4807)^2 + 0{,}3 = 2{,}4925;$$

$$y_4 = 1{,}4807 + 0{,}1\cdot 2{,}4925 + \frac{0{,}1}{2}\cdot 0{,}6778 + \frac{0{,}5}{12}\cdot 0{,}2092 = 1{,}7726,$$

$$y_4' = (1{,}7726)^2 + 0{,}4 = 3{,}5421;$$

$$y_5 = 1{,}7726 + 0{,}1\cdot 3{,}5421 + \frac{0{,}1}{2}\cdot 1{,}0496 + \frac{0{,}5}{12}\cdot 0{,}3718 = \underline{2{,}1948}.$$

З а м е ч а н и е. Из таблицы видно, что разности производных второго порядка не стабильны, а возрастают, разности третьего порядка отличаются мало (практически постоянные). Нужно было бы использовать формулу Адамса с пятьючленами или разностями третьего порядка. Точное значение результата $y_5 = 2{,}114$, абсолютная погрешность 0,081 и относительная погрешность $\frac{0{,}081}{2{,}114} = 0{,}038 = 3{,}8\%$.

Г л а в а У. ВЫЧИСЛЕНИЕ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ КОРНЕЙ УРАВНЕНИЯ С ОДНИМ НЕИЗВЕСТНЫМ

В настоящей главе рассматривается задача вычисления действительных корней уравнения $f(x) = 0$ с заданной точностью. Задача приближенного вычисления корня с заданной точностью сводится к нахождению отрезка достаточно малой длины, отделяющего искомый корень.

Если искомый корень отделен таким отрезком $[a, b]$, на котором функция непрерывна и на концах которого ее значения $f(a)$ и $f(b)$ имеют разные знаки, то уменьшение отрезка можно производить делением отрезка пополам. Однако практически этот метод мало эффективен, так как каждое вычисление значения функции $f(x)$ уменьшает длину отрезка лишь в два раза.

§ 13. Получение приближений с помощью хорды и касательной

В дальнейшем мы будем считать, что искомый корень отделен таким отрезком $[a_1, b_1]$, на котором функция $f(x)$ непрерывна и дважды дифференцируема, причем производные $f'(x)$ и $f''(x)$ сохраняют каждая свой знак.

Из неизменности знака $f'(x)$ следует, что функция $f(x)$ монотонна на отрезке $[a_1, b_1]$. Поэтому в данном случае наличие разных знаков у значений функции $f(a_1)$ и $f(b_1)$ является и необходимым и достаточным признаком отделения корня отрезком $[a_1, b_1]$.

Четыре возможные комбинации знаков производных $f(x)$ и $f''(x)$ определяют четыре типа разложения кривой $y = f(x)$. В дальнейшем через a_I обозначается тот конец отрезка $[a_1, b_1]$, на котором значение функции $f(a_I)$ имеет такой же знак, как и вторая производная $f''(x)$.

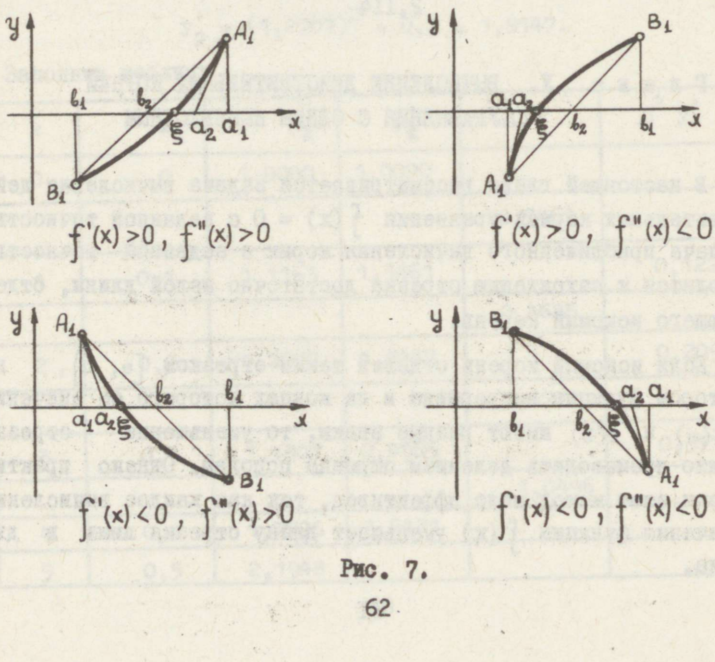

Рис. 7.

Из рис. 7 видно, что касательная к кривой $y = f(x)$ в точке A_I пересекает ось абсцисс между точкой a_I и корнем ξ, а хорда $A_I B_I$ пересекает ось абсцисс между точкой b_1, и корнем ξ. Точки a_2 и b_2 пересечения указанной касательной и хорды с осью абсцисс дают лучшее приближение к корню, чем точки a_I и b_1. Выведем расчетные формулы для a_2 и b_2.

Уравнение касательной в точке A_I есть

$$y - f(a_I) = f'(a_I)(x - a_I),$$

полагая $x = a_2$, $y = 0$ находим

$$a_2 = a_I - \frac{f(a_I)}{f'(a_I)}. \tag{5.I}$$

Уравнение хорды $A_I B_I$ есть

$$\frac{y - f(b_1)}{f(a_1) - f(b_1)} = \frac{x - b_1}{a_1 - b_1},$$

полагая здесь $x = b_2$, $y = 0$ находим

$$b_2 = b_1 - \frac{f(b_1)(a_1 - b_1)}{f(a_1) - f(b_1)}. \tag{5.2}$$

Для получения последовательных приближений к корню со стороны a_I обычно используют одну из следующих формул:

$$a_{n+I} = a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)}, \quad \text{или} \tag{5.3}$$

$$a_{n+I} = a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_I)} \quad \text{где } n = I,2,3,\ldots \tag{5.4}$$

В первом случае мы каждый раз проводим касательную в точке $A_n(a_n; f(a_n))$, во втором случае мы проводим из точки A_n прямую, параллельную касательной в начальной точке A_I

Для получения приближений к корню, с другой стороны, можно воспользоваться последовательным приближением по формуле

$$b_{n+1} = b_n - \frac{f(b_n)(a_n - b_n)}{f(a_n) - f(b_n)}, \qquad (5.5)$$

являющейся непосредственным обобщением формулы (4.2).

Последовательные приближения к корню одновременно с двух сторон позволяет весьма просто оценивать погрешность приближений на каждом этапе и контролировать расчеты.

Погрешность найденных приближенных значений a_n и b_n корня ξ не превышает величины $|b_n - a_n|$. Если эта погрешность больше допустимой, то надо продолжить процесс вычислений, беря теперь за исходный отрезок $[a_n - b_n]$.

§ I4. Лабораторная работа № 5

Вычисление действительного корня уравнения $f(x)=0$ с заданной точностью

З а д а н и е. Вычислить наименьший положительный корень данного уравнения $f(x) = 0$ с заданной точностью

Указания по выполнению задания

1^0 Проверить, что значения $f(a_1)$ и $f(b_1)$ имеют разные знаки.

2^0 Проверить, что производная $f'(x)$ непрерывна и сохраняет знак на отрезке $[a_1, b_1]$.

3^0 Проверить, что производная $f''(x)$ сохраняет знак на отрезке $[a_1, b_1]$.

4^0 Для контроля вычислений следить за знаками величин $f(a_n)$, $f(b_n)$ и $a_n - b_n$. (Эти величины должны сохранять при любом n тот же знак соответственно, что и $f(a_1)$, $f(b_1)$ и $a_1 - b_1$).

О б р а з е ц

ТАЛЛИНСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
Лаборатория математики

Л а б о р а т о р н а я   р а б о т а   № 5

ВЫЧИСЛЕНИЕ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО КОРНЯ УРАВНЕНИЯ
(x) = 0 С ЗАДАННОЙ ТОЧНОСТЬЮ

Группа . . . .

Выполнил . . . .

Проверил . . . .

Дата . . . .

З а д а н и е. Вычислить положительный корень уравнения.

$$f(x) \equiv x^2 - \sin 5x = 0$$

с точностью до 0,00001.

I ч а с т ь. Графическое отделение искомого корня. Строим графики функций $y = x^2$ и $y = \sin 5x$.

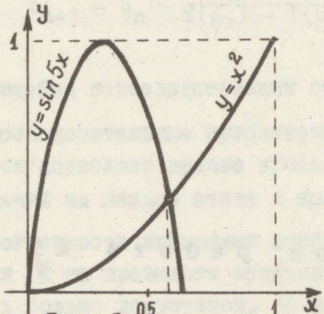

Рис. 8.

Из рис. 8 видно, что положительный корень заданного уравнения лежит между 0,5 и $\frac{\pi}{5} = 0,628...$ Попробуем в качестве исходного отрезка $[a_1, b_1]$ взять отрезок $[0,5; \ 0,6]$ для чего прежде всего проверим знаки функции $f(x)$ на концах отрезка:

$$f(0,5) = 0,25 - \sin 2,5 = 0,25 - 0,60 < 0 ,$$

$$f(0,6) = 0,36 - \sin 3,0 = 0,36 - 0,14 > 0 .$$

Далее проверим сохранение знака у производных :

$$f'(x) = 2x - 5\cos 5x > 0 \quad \text{при} \quad 0,5 < x < 0,6 ,$$

$$f''(x) = 2x + 25 \sin 5x > 0 \quad \text{при} \quad 0,5 < x < 0,6 .$$

II ч а с т ь. Выбор метода расчета и построение расчетного бланка. Будем вести расчеты по формулам (5.4) и (5.5), что не требует вычисления производной на каждом этапе и позволит просто контролировать расчеты.

Расчет ведем по формулам

$$a_{n+1} = a_n + \Delta a_n ,$$

$$b_{n+1} = b_n + \Delta b_n .$$

$$\Delta a_n = -\frac{I}{f'(a_I)} f(a_n)$$

$$\Delta b_n = -\frac{a_n - b_n}{f(a_n) - f(b_n)} f(b_n).$$

В качестве a_I выбрано $a_I = 0{,}6$, так как $f''(x) > 0$ и $f(0{,}6) > 0$.

При этом $-\frac{I}{f'(a_I)} = -\frac{I}{2a_I - 5\cos 5a_I} = -\frac{I}{I{,}2+4{,}9500} =$

$$= -0{,}I6260$$

Приближения	x	x^2	5^x	$f(x)$	Поправки
a_I	0,6	0,36	0,I4II2	0,2I888	$\Delta a_I = -0{,}0356$
b_1	0,5	0,25	0,59847	-0,34847	$\Delta b_1 = 0{,}06I4$
a_2	0,5644	0,3I855	0,3I4I8	0,00437	$\Delta a_2 = -0{,}0007I$
b_2	0,56I4	0,3I5I7	0,32838	-0,0I32I	$\Delta b_2 = 0{,}00225$
a_3	0,56369	0,3I775	0,3I755	0,00020	$\Delta a_3 = -0{,}000033$
b_3	0,56365	0,3I770	0,3I773	-0,00003	$\Delta b_3 = 0{,}000005$
a_4	0,56366				
b_4	0,56365				

Искомый корень лежит в интервале

$$0{,}56365 < \xi < 0{,}56366.$$

Полагая $\xi = 0{,}56365$ или $\xi = 0{,}56366$, мы допускаем погрешность, меньшую 0,0000I.

Полагая $\xi = 0{,}563655$, мы допускаем погрешность, меньшую 0,000005.

Содержание

Цена I2 коп,