

0009.

Die diophantische Gleichung

ersten Grades

mit zwei Unbekannten

auf der Schule.

Tartu Riikliku Ülikooli
Raamatukogu
182879

Von

J. G. G. Kieseritzky,

Oberlehrer der mathematischen Wissenschaften am Progymnasium zu Pernau.

Dorpat, 1861.

Druck von Schönmann's Witwe u. C. Mattiesen

Est. A-7317

Der Druck wird unter der Bedingung gestattet, daß nach Beendigung desselben der Abgetheilten Censur in Dorpat die vorschristmäßige Anzahl Exemplare angesetzt werde.

Dorpat, den 3. November 1861.

N^o 190.

Abgetheilter Censor de la Croix.

Est. A

Tartu Riikliku Ülikooli
Raamatukogu

19309

§ 1. Zur Ermittlung der Werthe unbekannter Größen sind im Allgemeinen soviel von einander unabhängige, in Gleichungen auszudrückende Bedingungen erforderlich, als unbekannte Größen vorhanden sind. Zudem nämlich mit der Elimination je einer unbekanntes Größe aus den vorliegenden Gleichungen zugleich auch die Anzahl der letzteren um 1 kleiner wird, so bleibt bei successiver Elimination die Anzahl der Gleichungen stets der der in ihnen vorkommenden unbekanntes Größen gleich. Es müssen jene Eliminationen daher schließlich auf eine Gleichung mit einer Unbekanntes führen, aus welcher diese bestimmt werden kann. Sobald aber der Werth einer Unbekanntes ermittelt ist, ergeben sich durch rückwärtschreitendes Einsetzen auch die der übrigen Unbekanntes.

§ 2. Hieraus folgt unmittelbar, daß die Anzahl der gegebenen Gleichungen nicht kleiner sein darf als die der Unbekanntes, falls letztere definitiv bestimmt werden sollen. Wenn z. B. n Gleichungen mit $n + m$ Unbekanntes gegeben sind, so kann man m Unbekanntes beliebige Werthe beilegen und behält alsdann n derselben nach, die aus ebensoviel Gleichungen berechnet werden können. Mit den gewählten m Werthen werden sich nun aber im Allgemeinen offenbar auch die zu berechnenden n Werthe ändern, so daß eine unendliche Anzahl von Lösungen der gegebenen Gleichungen denkbar ist.

Aus diesem Grunde werden Gleichungen, deren Anzahl kleiner ist als die der in ihnen vorkommenden unbekanntem Größen, unbestimmte genannt. Nach einem Mathematiker des Alterthums, Namens Diophantus, von dem wir das älteste Werk über dieselben überkommen haben, heißen sie auch diophantische.

§ 3. Nach dem Vorhergehenden dürfte es scheinen, als hätten diese Gleichungen keinen Stoff zu besonderen Untersuchungen — als brauchte man nur für einzelne der Unbekannten beliebige Werthe zu wählen und alsdann nach den gewöhnlichen Regeln für die Rechnung mit Gleichungen zu verfahren. Es treten nun aber für die diophantischen Gleichungen mannigfache Beschränkungen ein — daß die Lösungen z. B. nur in ganzen, und sogar positiven, oder doch in Rational-Zahlen zu geben seien — und mit diesen Beschränkungen gewinnen sie ein Recht auf einen besonderen Platz in der Lehre von den algebraischen Gleichungen.

§ 4. Bei Eintheilung der diophantischen Gleichungen unterscheiden wir, wie bei den algebraischen Gleichungen überhaupt und von demselben Gesichtspunkte aus, Gleichungen verschiedener Grade. Ferner stellen wir unter den Gleichungen ersten Grades diejenigen Aufgaben, bei welchen die Zahl der Gleichungen durch die der Unbekannten um mehr als 1 übertroffen wird, denen entgegen, in denen nur eine Unbekannte mehr vorkommt, als Gleichungen da sind. Indem aber diese letzte Classe von diophantischen Aufgaben stets auf eine Gleichung mit zwei Unbekannten führt, so wird die Untersuchung der letzteren ein Hauptgegenstand der Lehre von den diophantischen Gleichungen sein müssen. Die Theorie der diophantischen Gleichung ersten Gra-

des mit zwei unbekanntten Größen zu entwickeln, will nun eben vorliegendes Schriftchen versuchen.

§ 5. Jede Gleichung ersten Grades mit zwei unbekanntten Größen läßt sich stets auf folgende Form bringen:

I. $mx + ny = k.$

Da m , n und k hierin sowol positiv als negativ sein können, so bieten sich 8 verschiedene Fälle dar; wir können diese Anzahl aber verringern, indem wir festsetzen, daß der Coefficient von x stets positiv sein soll, was nöthigenfalls durch Multiplication der ganzen Gleichung mit -1 leicht bewerkstelligt werden kann. Somit bleiben, wenn a , b und c absolute Zahlen bedeuten, nur noch folgende 4 verschiedenen Formen übrig:

1. $ax - by = c$
2. $ax - by = -c$
3. $ax + by = c$
4. $ax + by = -c,$

deren Lösungen der Beschränkung unterworfen sind, daß sie in positiven, ganzen Zahlen gegeben werden müssen.

§ 6. Im Hinblick auf diese Bedingung wirkt sich uns aber, ehe wir daran gehen, nach Lösungen für die vorstehenden Gleichungsformen zu suchen, die nothwendige Frage auf, ob solche Lösungen überhaupt möglich und wirklich sind. Zum Zwecke der betreffenden Untersuchung mögen hier einige Betrachtungen über das Maß und die Reste ganzer Zahlen ihre Stelle finden, ohne welche eine wissenschaftliche Antwort auf jene Frage nicht gegeben werden kann.

§ 7. Unter dem Maße einer Zahl a versteht man bekanntlich jede ganze Zahl m , durch welche jene ohne Rest theilbar oder kurzweg theilbar ist; auch heißt a alsdann

ein Vielfaches von m . — Wenn eine Zahl aber nur die Einheit und sich selbst zum Maße hat, so heißt sie eine absolute Primzahl oder Primzahl schlechtweg.

Seht m in jede (der beiden Zahlen a und b ohne Rest auf, so heißt es ein gemeinschaftliches Maß von a und b . — Haben zwei Zahlen dagegen kein gemeinschaftliches Maß, so nennt man sie relative Primzahlen.

§ 8. Da $(a + b) : m = a : m + b : m$ eine ganze Zahl ist, sobald m gemeinschaftliches Maß von a und b ist, so haben wir den Satz: Das gemeinschaftliche Maß zweier Zahlen ist auch ein Maß ihrer Summe.

Ebenso ist das gemeinschaftliche Maß zweier Zahlen auch ein Maß ihrer Differenz.

§ 9. Diese Sätze lassen sich auch umkehren; denn es sei $s = p + q$ und s und p mögen ein gemeinschaftliches Maß m haben, so folgt $s - p = q$ und ferner hieraus in Verbindung mit dem vorigen Satze, daß q gleichfalls durch m theilbar ist. Dieses giebt den Satz: Haben eine Summe und ein Posten derselben ein gemeinschaftliches Maß, so ist dieses auch ein Maß des anderen Postens.

Oder es sei $d = p - q$ und m gemeinschaftliches Maß von d und q , so folgt $d + q = p$ und weiter vermittelt § 8, daß m auch ein Maß von p ist. — Eben so leicht ist einzusehen, daß ein gemeinschaftliches Maß von d und p auch in q ohne Rest aufgehen muß. Beides vereint liefert den Lehrsatz: Haben eine Differenz und ihr Minuend oder Subtrahend ein gemeinschaftliches Maß, so ist dieses auch ein Maß bezüglich des Subtrahenden oder Minuenden.

§ 10. Ferner sei wiederum m ein Maß der Zahl a , so gibt $(n \times a) : m = n \times (a : m)$ ebenfalls eine ganze Zahl;

in Worten: Das Maß eines Factors ist auch ein Maß des Productes.

§ 11. Um die Möglichkeit zu erforschen, in wie weit dieser Satz sich umkehren läßt, untersuchen wir, ob m ein Maß des Productes $a \cdot b$ sein kann, wenn keiner der beiden Factors a und b ohne Rest durch m theilbar ist.

Setzen wir zunächst den Fall, daß a und b kleiner als m sind. Dann kann man m durch a dividiren: der Quotient sei n , der Rest a_1 , so daß $a_1 < a$ ist; mithin ergibt sich für m der Ausdruck

$$m = na + a_1,$$

und multipliciren wir diese Gleichung mit b , so erhalten wir

$$mb = nab + a_1b.$$

Wir wollen nun annehmen, daß ab durch m ohne Rest theilbar ist, obgleich dieses von keinem der Factors a oder b gilt. Nach vorstehender Gleichung und gemäß §§ 9 und 10 ist dann auch a_1b ein Vielfaches von m .

Wir dividiren ferner m durch a_1 : der Quotient sei n_1 , der Rest a_2 , so daß $a_2 < a_1$ ist; daraus folgt

$$m = n_1a_1 + a_2$$

und nach beiderseitiger Multiplication mit b

$$mb = n_1a_1b + a_2b.$$

Aus dieser Gleichung schließen wir wie oben, daß a_2b sich durch m ohne Rest theilen läßt, weil a_1b ein Vielfaches von m ist.

In dieser Art können wir fortfahren, m durch den jedesmaligen Rest zu dividiren, und erhalten dann eine Reihe abnehmender Reste

$a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5 \dots$
 deren Producte in b , also

$a_1b \ a_2b \ a_3b \ a_4b \dots$

sämmtlich durch m ohne Rest theilbar sind, sobald dieses für ab gilt. Diese Reste werden aber immer kleiner, und da sie nothwendig ganze Zahlen sind, muß endlich einer von ihnen 0 werden, oder, mit anderen Worten, der letzte Rest, den wir a_k nennen wollen, ein Maß der Größe m sein.

Und hier zeigt es sich, daß es darauf ankommt, ob m absolute Primzahl ist oder nicht. Findet nämlich Ersteres statt, so kann a_k nur 1 sein, da keine andere Zahl ein Maß einer Primzahl ist; dann muß aber in Folge der Annahme, daß ab durch m ohne Rest theilbar ist, wie wir gezeigt haben, auch $1 \cdot b$ durch m ohne Rest theilbar sein, und dieses ist unmöglich, da nach der Bedingung $b < m$. Rückwärtschließend kommen wir also zu dem Resultate, daß $a \cdot b$ durch m nicht theilbar ist.

Ist m dagegen keine absolute Primzahl, so kann a_k allerdings auch einen andern Werth als 1 haben, und die obigen Schlüsse auf $a_k b$ und weiter auf ab haben in diesem Falle keine Gültigkeit. Im Allgemeinen läßt sich dann ohne nähere Kenntniß der Beziehungen zwischen a , b und m nichts bestimmen. Wir kommen in § 14 darauf zurück.

Wir haben bisher nur den Fall betrachtet, daß a und b beide kleiner als m sind. Es mögen nun aber beide größer als m sein. Es sei z. B. $a = pm + r$ und $b = qm + t$, wo $r < m$ und $t < m$, so ist

$$a \cdot b = (pqm + pt + qr) m + rt$$

und wir sehen wiederum, daß ab sich nur dann durch m ohne Rest theilen lassen wird, wenn rt ein Vielfaches von m ist. Dieses ist aber nach dem Obigen nicht der Fall, sobald m eine Primzahl ist; folglich kann unter dieser Bedingung m auch kein Maß des Productes ab sein. — Dasselbe läßt sich beweisen,

falls $a > m$ und $b < m$ oder das Umgekehrte stattfindet, wenn zugleich m absolute Primzahl ist.

Alles dieses zusammengefaßt dient als Beweis für den wichtigen Lehrsatz: Wenn die Factoren eines Productes durch eine und dieselbe Primzahl beide nicht theilbar sind, so ist auch das Product durch diese Primzahl nicht theilbar.

§ 12. Mit Hilfe dieses Satzes läßt sich nun leicht zeigen, daß der Satz in § 10 allerdings umgekehrt werden kann, sobald m eine Primzahl ist. Denn da m in diesem Falle in a nicht ohne Rest aufgeht, solange weder a noch b dadurch theilbar ist, so muß, wenn m ein Maß von ab ist, dasselbe auch ein Maß eines der beiden Factoren sein. Folglich gilt allgemein der Satz: Wenn eine Primzahl ein Maß eines Productes ist, so ist sie auch ein Maß wenigstens eines Factors dieses Productes.

§ 13. Die Lösung der Aufgabe, zu zwei gegebenen Zahlen das größte gemeinschaftliche Maß zu suchen, hat nach dem Vorhergehenden weiter keine Schwierigkeiten.

Die gegebenen Zahlen seien a und b und $a < b$. Wir dividiren b durch a , und bleibt bei dieser Division kein Rest, so ist a das gesuchte größte gemeinschaftliche Maß. Sonst sei der Quotient p , der Rest r , also

$$b = pa + r.$$

Diese Gleichung lehrt uns, daß das größte gemeinschaftliche Maß von a und b auch ein Maß von r ist (§§ 9 und 10), und daß a und r kein größeres gemeinschaftliches Maß haben können, weil dieses sonst auch ein Maß von b sein müßte (§ 8); dann hätten a und b nämlich noch ein größeres gemeinschaftliches Maß, als das größte, was ungereimt ist. — Die Aufgabe kommt jetzt darauf heraus, das größte gemeinschaftliche

Maß von a und r zu suchen. Wir dividiren also a durch r und schließen wie oben: bleibt kein Rest, so ist r größtes gemeinsames Maß von a und r und mithin auch von a und b ; geht die Division dagegen nicht auf, so nennen wir den Rest r_1 und den Quotienten p_1 , woraus für a der Ausdruck folgt

$$a = p_1 r + r_1.$$

Aus dieser Gleichung folgern wir wiederum, daß das größte gemeinschaftliche Maß von r und r_1 auch größtes gemeinsames Maß von a und r , also auch von a und b ist.

Man fährt so fort, den jedesmaligen Rest in den vorhergehenden zu dividiren, und erhält eine Reihe abnehmender Reste

$$r \quad r_1 \quad r_2 \quad r_3 \quad r_4 \quad \dots$$

Welche zwei auf einander folgenden Glieder dieser Reihe wir auch herausgreifen mögen, stets ist ihr größtes gemeinschaftliches Maß auch größtes gemeinschaftliches Maß von a und b . Die Reihe muß aber mit Null endigen, da die Glieder ganze Zahlen sind und fortwährend abnehmen. Der letzte Rest muß also in dem vorhergehenden aufgehen, d. h. er ist größtes gemeinschaftliches Maß der beiden letzten Reste; folglich ist der letzte Rest auch größtes gemeinschaftliches Maß von a und b .

Anmerkung: Sind a und b relative Primzahlen, so muß der letzte Rest 1 sein.

§ 14. Nach Lösung dieser Aufgabe knüpfen wir an die früheren Betrachtungen wieder an und untersuchen, unter welcher Bedingung das Product ab durch m theilbar ist, wenn m keine absolute Primzahl bedeutet, sondern aus mehreren Primzahlen durch Multiplication zusammengesetzt ist.

Wenn die Primfactoren von m durchweg ungleich sind, also $m = p \cdot q \cdot r$ ist, wo p , q und r Primzahlen bedeuten,

so ist, wenn wir annehmen, daß ab durch m dividirt keinen Rest lasse, und k eine ganze Zahl darstellt,

$$ab = k \cdot (pqr)$$

oder nach einem bekannten Lehrsatz der Arithmetik

$$ab = p \cdot (kqr).$$

Diese Gleichung besagt, daß ab ein Vielfaches von p sein müsse; nach § 12 aber muß p als Primzahl alsdann ein Maß von a oder b sein. Wenigstens die eine der beiden Zahlen a oder b hat also mit m den Primfactor p gemein, und dasselbe läßt sich von den Primfactoren q und r erweisen.

Der Nachweis ist im Wesentlichen derselbe, wenn unter den Primfactoren von m auch mehrere gleiche vorkommen. Somit haben wir überhaupt: Ein Product ist durch eine andere Zahl nur dann theilbar, wenn sämtliche Primfactoren dieser Zahl auch Primfactoren wenigstens eines Factors des Products sind.

Die letzte Bedingung wird nicht erfüllt, sobald die Factoren des Products relative Primzahlen gegen die gegebene Zahl sind; der Satz des § 11 gilt also auch in folgender Verallgemeinerung: Sind die Factoren eines Products relative Primzahlen gegen irgend eine andere Zahl, so ist das Product durch diese Zahl nicht theilbar.

§ 15. Wenn ferner b relative Primzahl gegen m und $a < m$ ist, so ist ab durch m nicht theilbar; denn sonst müßten nach § 14 sämtliche Primfactoren von m auch Primfactoren von a , d. h. a ein Vielfaches von m sein, was unmöglich ist, da $a < m$ ist. Ist also von den Factoren eines Products der eine kleiner als eine dritte Zahl und der andere relative Primzahl gegen dieselbe, so ist das Product durch diese Zahl nicht ohne Rest theilbar.

§ 16. Bilden wir nun, während a und b relative Primzahlen sind, die Reihe

$$1a \ 2a \ 3a \ 4a \ 5a \ \dots \ (b-2)a \ (b-1)a,$$

so kann erstens kein Glied dieser Reihe durch b ohne Rest theilbar sein, weil a relative Primzahl zu b und der Coefficient von a kleiner als b ist (§ 15). Sodann fragt sich, ob irgend zwei Glieder der obigen Reihe, durch b dividirt, gleiche Reste geben können.

Angenommen nun, ma und na seien zwei solche Glieder der Reihe, und zwar gebe ma durch b dividirt p zum Quotienten und r zum Reste, na aber q zum Quotienten und r zum Reste, so haben wir

$$ma = pb + r \text{ und}$$

$$na = qb + r,$$

also durch Subtraction

$$(m-n)a = (p-q)b.$$

Diese Gleichung sagt aus, daß $(m-n)a$ ein Vielfaches von b sei. Nun ist aber $m < b$ und $n < b$, mithin auch $m-n < b$, und a relative Primzahl gegen b . Aus diesen Gründen kann b in $(m-n)a$ nicht ohne Rest aufgehen (§ 15), und wir überzeugen uns, daß die letztentwickelte Gleichung Falsches aussagt. Wir schließen, daß die Annahme, durch welche wir zu derselben gelangt sind, fehlerhaft gewesen ist; folglich können ma und na durch b dividirt nicht denselben Rest lassen, sondern sind vielmehr alle Reste der obigen Reihe von einander verschieden.

Verbinden wir hiermit, daß keiner jener Reste 0 sein kann und keiner größer als $b-1$ ist, ihre Anzahl aber nur $b-1$ beträgt, so folgt daraus, daß sie in irgend welcher Reihenfolge

die natürlichen Zahlen von 1 bis $b - 1$ darstellen, d. h. jede der Zahlen von 1 bis $b - 1$ kommt unter jenen Resten vor.

§ 17. Jetzt können wir an die Beantwortung der Frage gehen, ob die Gleichungen des § 5 unter den ebendasselbst angegebenen Bedingungen lösbar sind.

Da belehrt uns nun zunächst die allgemeine Gleichung I. des genannten Paragraphen

$$mx + ny = k,$$

daß ein Factor, den die Coefficienten der unbekanntenen Größen gemein haben, nach § 8 auch ein Maß des bekannten Gliedes der Gleichung sein müsse. Weil es nun aber zum Ordnen einer Gleichung gehört, einen sämtlichen Gliedern derselben gemeinsamen Factor durch Division fortzuschaffen, so können wir den Satz aufstellen: Die Coefficienten der unbekanntenen Größen in einer unbestimmten Gleichung des ersten Grades mit zwei Unbekannten müssen relative Primzahlen sein, falls die Gleichung in ganzen Zahlen lösbar sein soll.

§ 18. Sodann ist ohne Weiteres klar, daß die vierte der speciellen Gleichungsformen des § 5

$$ax + by = -c$$

fortan von unseren Untersuchungen ausgeschlossen werden muß, indem sonst bei positiven Werthen von x und y — und solche werden ja nur zugelassen — eine positive Größe einer negativen gleich sein müßte.

Berücksichtigt man ferner, daß die zweite der in Frage stehenden Formen

$$ax - by = -c$$

sich durch Multiplication beider Seiten mit -1 auf die Form

$$by - ax = c$$

bringen läßt, also bereits in der ersten Gleichungsform enthalten ist, so beschränkt sich die fernere Betrachtung auf die beiden Gleichungen

$$A. \quad ax - by = c$$

$$B. \quad ax + by = c$$

in welchen a und b relative Primzahlen sind.

§ 19. Die Frage nach der Lösbarkeit der Gleichung

$$A. \quad ax - by = c$$

reducirt sich offenbar auf die andere, ob der aus A. folgende Ausdruck $x = \frac{c + by}{a}$ mit y zugleich zu einer ganzen Zahl werden kann.

Um diese zu beantworten, entfernen wir aus dem Bruche $\frac{c + by}{a}$ so viel Ganze, als uns möglich ist, indem wir c durch a dividiren. Bedeutet k den Quotienten dieser Division und r den Rest, so daß $r < a$ ist, so haben wir für x folgenden Ausdruck

$$x = k + \frac{r + by}{a},$$

welcher zu einer ganzen Zahl wird, sobald wir $\frac{r + by}{a}$ dazu machen. Dieses ist aber immer möglich. Nach § 16 existirt nämlich für y stets ein positiver, ganzer Werth, der kleiner als a und so beschaffen ist, daß by , durch a dividirt, den Rest $a - r$ läßt. Setzen wir diesen Werth für y ein, so wird der Zähler des Bruches $\frac{r + by}{a}$ offenbar ein positives Vielfache von a ; hiermit erhält aber auch dieser Bruch selbst den Werth einer positiven ganzen Zahl, und mit dem Bruche zugleich die unbekannte Größe x .

Die Zulässigkeit der Gleichungsform A. $ax - by = c$ ist hiermit bewiesen.

§ 20. Der Nachweis für die Lösbarkeit der Gleichung B. $ax + by = c$

folgt denselben Principien. Man gelangt auf dem entsprechenden Wege und unter denselben Annahmen zu dem Ausdruck

$$x = k - \frac{by - r}{a}.$$

Hier kommt es aber nicht allein darauf an, den Bruch $\frac{by - r}{a}$

zu einer ganzen Zahl zu machen, sondern diese muß außerdem auch kleiner sein als k , wodurch die Untersuchung verwickelter wird. Ersteres ist immer möglich; denn nach § 16 giebt es stets einen Werth von y , der kleiner als a und so beschaffen ist, daß by , durch a dividirt, den Rest r läßt, oder, mit anderen Worten, $by - r$ zu einem Vielfachen von a , dabei aber kleiner als ab wird. Demgemäß wird auch $\frac{by - r}{a}$ eine ganze Zahl, aber kleiner als b . Soll

$$x = k - \frac{by - r}{a}$$

also unter allen Umständen eine positive Größe, mit Ausschluß der Null, sein, so muß k mindestens den Werth b haben, d. h. $c > ab$ sein. — Hiermit ist jedoch nicht gesagt, daß es nicht einzelne Werthe von c geben könne, die kleiner als ab sind und für welche die gegebene Gleichung lösbar ist. Nur im Allgemeinen ist sie es bei solchen Werthen von c nicht.

§ 21. Fassen wir den Inhalt der §§ 17—20 zusammen, so erhalten wir den Satz: Wenn a und b relative Primzahlen sind, so ist die Gleichung $ax - by = \pm c$ jederzeit in positiven, ganzen Zahlen löslich, die

Gleichung $ax + by = c$ aber mit Sicherheit nur dann, wenn $c > ab$ ist.

Hiermit ist die Frage beantwortet, die wir § 6 aufwarfen; unter gewissen Beschränkungen ist eine unbestimmte Gleichung ersten Grades mit zwei Unbekannten in positiven ganzen Zahlen stets löslich, d. h. es läßt sich ein Paar von Wurzeln finden, die der gegebenen Gleichung Genüge leisten. Aus dieser einen Lösung sind aber auch alle anderen leicht abzuleiten, wie wir jetzt nachweisen wollen.

§ 22. Lassen wir $x = \alpha$ und $y = \beta$ eine Lösung der Gleichung

$$A. \quad ax - by = c$$

bedeuten, so können wir jede andere Lösung durch $x = \alpha + x_1$ und $y = \beta + y_1$ bezeichnen, wo x_1 und y_1 positive oder negative, stets aber ganze Zahlen vorstellen. Setzen wir diese Werthe in die Gleichung A. hinein, so erhalten wir

$$a\alpha + ax_1 - b\beta - by_1 = c.$$

Nun haben aber α und β als Wurzeln der Gleichung A. die Eigenschaft, daß

$$a\alpha - b\beta = c$$

ist, und ziehen wir diese Gleichung von der vorhergehenden ab, so bleibt $ax_1 - by_1 = 0$ nach. Hieraus folgt

$$x_1 = \frac{by_1}{a}.$$

Soll x_1 demnach eine ganze Zahl sein, so muß $\frac{by_1}{a}$ zu einer solchen gemacht werden, d. h. by_1 ein Vielfaches von a sein. Da nun b relative Primzahl gegen a ist, so ist dieses nur möglich, wenn y_1 selbst sich durch a ohne Rest theilen läßt (§ 14). Bezeichnen wir den Quotienten dieser Division durch n , so ist $y_1 = na$ und somit $x_1 = nb$. Sämmtliche Lösungen der Gleichung

$$A. \quad ax - by = c$$

sind also in den Ausdrücken

$$x = \alpha + nb$$

$$y = \beta + na$$

enthalten. Indem wir hierin für n nach und nach alle positiven und negativen Zahlen einsetzen — soweit solches nämlich in Hinsicht auf die Bedingung, daß die Werthe von x und y positiv sein sollen, angeht — erhalten wir alle möglichen Lösungen der gegebenen Gleichung. Dabei fällt in die Augen, daß die Werthe von x und y , wenn mit dem kleinsten Paar zusammengehöriger Werthe begonnen wird, zwei steigende arithmetische Reihen darstellen, und zwar ist b die Differenz der x -Reihe u. a die Differenz der y -Reihe.

§ 23. Auf demselben Wege erhält man für die Gleichung

$$B. \quad ax + by = c$$

aus der Lösung $x = \alpha$ und $y = \beta$ die allgemeine Lösung

$$x = \alpha - nb$$

$$y = \beta + na.$$

Zu denselben Wurzelformen können wir aber auch gelangen, wenn wir berücksichtigen, daß die Gleichung B. aus der Gleichung A. hervorgeht, indem $-b$ an die Stelle von b tritt, daß also auch in den Ausdrücken für die Wurzeln der Gleichung A. nur diese Veränderung vorzunehmen ist, um die Wurzeln der Gleichung B. zu erhalten. Demgemäß erscheint denn auch nur die eine der beiden Wurzelreihen der Gleichung B. als steigende arithmetische Progression, die andere dagegen als fallende, während die Differenzen der Reihen auch hier wieder gleich den Coefficienten der Unbekannten sind, und zwar die Dif-

ferenz der x -Reihe dem Coefficienten von y und die Differenz der y -Reihe dem Coefficienten von x .

§ 24. Vermittelt der allgemeinen Ausdrücke für die Wurzeln der Gleichungen A. und B. kann man nun auch leicht einen Schluß auf die Anzahl aller überhaupt möglichen Lösungen dieser Gleichungen machen.

Die Gleichung A. $ax - by = c$ hat die Lösungen

$$x = \alpha + nb, \quad y = \beta + na.$$

Solange die Werthe von α , β , a , b und n hierin so beschaffen sind, daß x und y positiv bleiben, so lange gehört die betreffende Lösung zu den möglichen. Da nun α , β , a und b unveränderliche Größen sind, so kommt es nur noch auf n an, welches der obigen Bedingung entsprechend so gewählt werden muß, daß $\alpha + nb > 0$ und $\beta + na > 0$ wird. Die erste dieser

Ungleichheiten giebt $n > -\frac{\alpha}{b}$, die zweite aber $n > -\frac{\beta}{a}$.

Die Wahl der Werthe für n ist also nur nach der negativen Seite hin beschränkt, nicht aber nach der anderen, d. h. wir dürfen für n unzählig viele verschiedene positive Werthe annehmen, welche alle, in die allgemeinen Wurzel ausdrücke der Gleichung A. gesetzt, diese zu positiven, ganzen Zahlen machen. Mit anderen Worten: Die Gleichung A. $ax - by = c$ hat unendlich viele Lösungen.

Betrachten wir ferner die Gleichung B. $ax + by = c$ mit ihren Lösungen

$$x = \alpha - nb, \quad y = \beta + na$$

von demselben Gesichtspunkte aus, so erkennen wir, daß hier $\frac{\alpha}{b} > n > -\frac{\beta}{a}$ sein müsse. Weil n hiernach zwischen einem positiven und einem negativen Werthe eingeschlossen ist, so ist

die Anzahl der dafür zu setzenden Größen jedenfalls eine beschränkte, d. h. die Anzahl der möglichen Lösungen der Gleichung B. ist eine endliche.

Bezeichnen wir nun durch N die Anzahl aller möglichen brauchbaren Werthe von n und also auch aller möglichen Lösungen der Gleichung B., durch $\left(\frac{\alpha}{b}\right)$ die größte ganze Zahl, welche kleiner ist als der Quotient $\frac{\alpha}{b}$, und ebenso durch $\left(\frac{\beta}{a}\right)$ die größte ganze Zahl, welche kleiner ist als der Quotient $\frac{\beta}{a}$, so ist

$$N = \left(\frac{\alpha}{b}\right) + \left(\frac{\beta}{a}\right) + 1$$

der Ausdruck für die Anzahl aller möglichen Lösungen der Gleichung B.

§ 25. In dem bisherigen ist nachgewiesen, unter welchen Bedingungen die diophantische Gleichung ersten Grades mit zwei Unbekannten lösbar ist; ferner ist festgestellt, wie aus einem Paar von Wurzeln alle übrigen berechnet werden können; endlich ist die Anzahl der möglichen Lösungen nach den einzelnen Formen bestimmt worden. Es bleibt jetzt nur noch übrig, Methoden anzugeben, mit deren Hilfe man jederzeit mit Sicherheit zu einer Lösung gelangen könne.

§ 26. Einer der einfachsten Fälle, welche hinsichtlich der Gleichungen A. und B. eintreten können, findet statt, wenn $e = 0$ ist; denn in diesem Falle gehen jene Gleichungen in

$$A. a \quad ax - by = 0$$

$$B. a \quad ax + by = 0$$

über, und diesen beiden Gleichungen wird offenbar Genüge geleistet, wenn $x = 0$ und $y = 0$ gesetzt wird.

Für A. a folgt daraus die allgemeine Lösung (§ 22)

$$x = bn, y = an,$$

wo n jede beliebige positive ganze Zahl bedeutet.

Für B. a wäre den Formeln des § 23 zufolge

$$x = -bn, y = an$$

die allgemeine Lösung. Da aber hiernach die eine der beiden Unbekannten immer negativ ausfällt, es sei denn $n = 0$, in welchem Falle $x = 0$ und $y = 0$ wird, wir also auf die erste Lösung zurückkommen: so giebt es, wenn wir diese überhaupt gelten lassen wollen, nur diese eine, sonst gar keine. Wir werden sogleich sehen, daß die Lösung $x = 0$ und $y = 0$ in mehreren Fällen mit großem Vortheile in Anwendung gebracht werden kann.

§ 27. Auf die Form $ax \pm by = 0$ können wir nämlich jede Gleichung bringen, in welcher einer der Coefficienten, etwa a , der Einheit gleich ist. In diesem Falle heißt die ursprüngliche Gleichung

$$x \pm by = c,$$

und hieraus erhält man, wenn c auf die linke Seite gebracht und $x - c = x_1$ gesetzt wird:

$$x_1 \pm by = 0,$$

die Gleichungsform des vorigen Paragraphen, welcher durch $x_1 = 0$, d. h. $x = c$ und $y = 0$ Genüge geschieht. Die allgemeine Lösung der gegebenen Gleichung ist folglich

$$x = c \mp bn, y = n.$$

§ 28. Zu demselben Resultate kann man übrigens auch unmittelbar, ohne auf § 26 zurückzugehen, gelangen; denn es folgt aus der Gleichung

$$x \pm by = c$$

ohne Weiteres die Gleichung

$$x = c \pm by.$$

Bedeutet nun n jeden ganzen Werth von y , bei welchem die rechte Seite des vorstehenden Ausdrucks positiv bleibt, so haben wir auch auf diesem Wege wieder die Lösungen:

$$x = c \mp bn, y = n.$$

Daß die Rechnung nach beiderlei Weise im Wesentlichen dieselbe bleibt, wenn in der gegebenen Gleichung $b = 1$, ist leicht zu übersehen.

§ 29. Der in den §§ 27 und 28 betrachtete Fall ist enthalten in dem allgemeineren, daß einer der Coefficienten a oder b ein Maß des bekannten Gliedes c ist. Die Behandlung der entsprechenden Gleichung ist demgemäß auch eine ähnliche. Wir beschränken uns hier darauf, a ein Maß von c sein zu lassen, indem die Rechnung für den anderen Fall nichts Eigenthümliches hat. Die gegebene Gleichung sei also:

$$ax \pm by = fa.$$

Bringen wir hier fa nach links und setzen $x - f = x_1$, so erhält die Gleichung die Form

$$ax_1 \pm by = 0,$$

und wir sind hiermit wiederum auf § 26 zurückgekommen. Demzufolge ist $x_1 = 0$, d. h. $x = f$, und $y = 0$. Mit Hülfe der §§ 22 und 23 giebt dieses die Wurzeln

$$x = f \pm bn, y = an.$$

Wir ziehen hieraus die Regel: Wenn in der Gleichung $ax \pm by = c$ der Coefficient einer Unbekannten ein Maß des bekannten Gliedes c ist, so hat die andere Unbekannte unter anderen auch den Null-Werth, während jene zugleich den Werth $\frac{c}{a}$ hat.

Als Beispiel diene die Gleichung:

$$3x - 5y = 12,$$

welche nach Obigem auf die Form

$$3(x - 4) - 5y = 0$$

gebracht werden muß. Nach § 26 folgt hieraus $x = 4$, $y = 0$, mithin als allgemeine Lösung

$$x = 4 + 5n, \quad y = 3n,$$

welcher folgende Werthreihen entsprechen:

$$x = 9, 14, 19, 24, 29, \dots$$

$$y = 3, 6, 9, 12, 15, \dots$$

§ 30. Auch diese Art von Aufgaben können wir unmittelbar lösen. Berechnen wir nämlich diejenige Unbekannte, deren Coefficient ein Maß von c ist, also in vorliegendem Falle x , nach den gewöhnlichen Regeln, so haben wir folgenden Ausdruck

$$x = f \mp \frac{by}{a}.$$

Soll x nun eine ganze Zahl werden, so muß $\frac{by}{a}$ eine solche sein, d. h. da b relative Primzahl gegen a ist, y sich durch a ohne Rest theilen lassen. Setzen wir den Quotienten $\frac{y}{a} = n$ so erhalten wir

$$y = an, \quad x = f \mp bn,$$

die nach der anderen Methode bereits erzielte Lösung.

Auch hiefür führen wir ein Beispiel vor:

$$3x + 5y = 35.$$

Hier ist y zu berechnen; wir erhalten

$$y = 7 - \frac{3x}{5},$$

und wird hier $\frac{x}{5} = n$ gesetzt, so ergibt sich die allgemeine Lösung

$$x = 5n, y = 7 - 3n,$$

derzufolge die gegebene Gleichung nur zwei Paare von Wurzeln hat:

$$\left. \begin{array}{l} x = 5 \\ y = 4 \end{array} \right\} \text{ und } \left. \begin{array}{l} x = 10 \\ y = 1 \end{array} \right\}$$

§ 31. Durch eine einfache Substitution kann man eine Gleichung häufig auf die in den §§ 29 und 30 untersuchte Form bringen. Setzt man nämlich in der Gleichung

$$A. \quad ax - by = c$$

$x = u + v$ und $y = u - v$, so erhält dieselbe die Form

$$(a - b)u + (a + b)v = c.$$

Dagegen wird aus der Gleichung

$$B. \quad ax + by = c$$

auf demselben Wege die Gleichung

$$(a + b)u + (a - b)v = c$$

erzielt. Stellen wir Beides zusammen, so ergibt sich die Regel: Führt man in eine der Formen A. und B. an Stelle der beiden Unbekannten Summe und Differenz zweier anderen Unbekannten ein, so entsteht eine neue Gleichung, deren Coefficienten aus Summe und Differenz der Coefficienten der früheren Gleichung bestehen.

Diese Regel läßt nach den §§ 29 und 30 eine sehr bequeme Anwendung zu, sobald c ein Vielfaches von $a + b$ oder $a - b$ ist. Als Beispiel diene die Gleichung

$$8x + 5y = 51.$$

Wenden wir die angegebene Substitution an, so entsteht

$$13u + 3v = 51$$

und da 51 ein Vielfaches von v ist, so folgt nach § 29

$$u = 0, v = 17, \text{ also}$$

$x = 17, v = -17$, und allgemein

$$x = 17 - 5n, y = -17 + 8n.$$

Hiernach ist $x = 2, y = 7$ die einzige Lösung der gegebenen Gleichung.

Anmerkung: Die angeführte Substitution ist stets anwendbar, wenn die Coefficienten a und b um die Einheit verschieden sind. In der abgeleiteten Gleichung wird alsdann der Coefficient einer der Unbekannten der Einheit gleich, und somit kann dieselbe nach § 27 oder 28 gelöst werden.

Als Beispiel sei die Gleichung

$$7x - by = 12$$

gegeben. Die Substitution $x = u + v, y = u - v$ läßt dieselbe in

$$u + 13v = 12$$

übergehen, und nach § 27 folgt hieraus

$$u = 12, v = 0.$$

Rückwärtschließend ergibt sich also

$x = 12, y = 12$, und allgemein

$$x = 12 + 6n, y = 12 + 7n.$$

Die beiden unendlichen Reihen sind, da $n > -2$ sein muß,

$$x = 6, 12, 18, 24, 30 \dots$$

$$y = 5, 12, 19, 26, 33 \dots$$

§ 32. Wir könnten, wie wir es bei den früheren Aufgaben gethan, auch noch von der Aufgabe des vorigen Paragraphen zeigen, wie sie unmittelbar zu lösen ist, ziehen es aber vor, weil diese Lösung nichts Eigenthümliches hätte, jetzt zu der Lösung der allgemeinen Gleichung $ax + by = c$ überzugehen, wo für die Größen a, b und c keine weitere Beschränkung existirt, als daß a und b relative Primzahlen sind. Bei derjenigen Methode

der Lösung, die wir zunächst zu entwickeln beabsichtigen, besteht übrigens zwischen den Formen A. und B. kein wesentlicher Unterschied, so daß nur die Form $ax + by = c$ in allgemeiner Entwicklung vorgeführt zu werden braucht. Unter den einzelnen Beispielen aber wird die Form $ax - by = c$ nicht fehlen.

§ 33. Aus der Gleichung

$$1) ax + by = c$$

hat man zunächst, ähnlich dem Verfahren des § 30, nach den gewöhnlichen Regeln aus der Lehre von den algebraischen Gleichungen diejenigen Unbekannten zu berechnen, deren Coefficient der kleinere ist. Es sei $a < b$; dann erhält man auf diesem Wege den Ausdruck

$$2) x = \frac{c - by}{a},$$

von dem in den §§ 19 und 20 nachgewiesen ist, daß er zugleich mit y zu einer ganzen Zahl gemacht werden kann. Es gebe nun b , durch a dividirt, zum Quotienten p , zum Reste r , so daß $b = pa + r$, wo $r < a$, so geht obiger Ausdruck in

$$3) x = -py + \frac{c - ry}{a}$$

über; dieser aber wird nur dann zu einer ganzen Zahl, wenn $\frac{c - ry}{a}$ eine ganze Zahl wird. Wir setzen deshalb

$$4) \frac{c - ry}{a} = z,$$

wo z zunächst irgend eine ganze Zahl bedeutet, und erhalten hieraus die Gleichung

$$5) az + ry = c,$$

die die Form der gegebenen Gleichung hat; doch ist der Coef-

ficient von y , der früher größer als a war, jetzt kleiner geworden als dasselbe.

Jetzt behandeln wir Gleichung 5) ganz ebenso, wie früher (Gleichung 1). Da $r < a$, so berechnen wir y ; das giebt

$$6) \quad y = \frac{c - az}{r}.$$

Man dividirt ferner a durch r ; der Quotient sei p_1 und der Rest $r_1 < r$. Es wird also $a = p_1 r + r_1$, zugleich aber auch

$$7) \quad y = - p_1 z + \frac{c - r_1 z}{r}$$

Hier hat man, um y zu einer ganzen Zahl zu machen,

$$8) \quad \frac{c - r_1 z}{r} = z_1$$

zu setzen, indem man unter z_1 irgend eine ganze Zahl versteht, und aus 8) geht nach hinlänglichem Ordnen

$$9) \quad r_1 z + r z_1 = c$$

hervor, abermals eine Gleichung von der Form der gegebenen Gleichung 1); doch sind die Coefficienten der Unbekannten beide kleiner als in 1).

Fassen wir die Entstehung dieser Coefficienten in's Auge: b ließ durch a dividirt den Rest r , a durch r den Rest r_1 , und setzen wir die Rechnung in gleicher Weise fort, so ist leicht ersichtlich, daß die Coefficienten der nach und nach entstehenden Gleichungen von ursprünglicher Form den Resten beim Aufsuchen des größten gemeinschaftlichen Divisors von a und b gleich sind (siehe § 13). Bei diesem Verfahren aber wird nach § 13. Anmerk. in dem Falle, daß a und b relative Primzahlen sind, der letzte Rest stets 1. Da dieser Fall hier stattfindet, so folgt, daß ein Coefficient schließlich 1 werden muß, d. h.

wenn wir die Rechnung hinlänglich weit fortsetzen, so kommen wir zuletzt auf eine Gleichung von der Form

$$z_{n-1} + r_{n-1} z_n = c.$$

Hieraus folgt ohne Weiteres

$$z_{n-1} = c - r_{n-1} z_n,$$

wo wir für z_n zunächst jede beliebige ganze Zahl setzen können, und durch rückwärts schreitendes Einsetzen der gefundenen Werthe erhalten wir nach und nach die Werthe von

$$z_{n-1} \quad z_{n-2} \quad z_{n-3} \quad \dots \quad z_1 \quad z \quad y \quad x.$$

Aus dem Gange dieser Rechnung geht hervor, daß jedes Glied vorstehender Reihe eine ganze Zahl wird, sobald die beiden vorhergehenden die Form einer solchen erhalten. Da nun z_n und z_{n-1} offenbar dieser Bedingung genügen, so erscheinen auch alle folgenden Glieder der Reihe als ganze Zahlen. Die beiden letzten Glieder jener Reihe sind die Unbekannten der gegebenen Gleichung; folglich ist diese gelöst.

Man nennt das in Vorstehendem aneinandergesetzte Verfahren die algebraische Reduction, auch wol die Eulersche Methode.

§ 34. Einige Beisp. mögen zum leichteren Verständniß dienen.

Aufgabe 1. Gegeben sei die Gleichung

$$1) \quad 5x + 13y = 151.$$

Daraus folgt in gewöhnlicher Weise

$$2) \quad x = \frac{151 - 13y}{5}$$

und wenn man die Division theilweise ausführt

$$3) \quad x = -2y + \frac{151 - 3y}{5}$$

Damit x eine ganze Zahl werde, muß man $\frac{151 - 3y}{5}$ zu

einer solchen machen; deshalb setzt man

$$4) \frac{151 - 3y}{5} = z,$$

wo z eine ganze Zahl bedeutet. Aus 4) folgt die Gleichung

$$5) 3y + 5z = 151,$$

mit welcher die Rechnung von Neuem beginnt. Man erhält

$$6) y = \frac{151 - 5z}{3} \text{ oder}$$

$$7) y = -z + \frac{151 - 2z}{3}.$$

Übermals muß $\frac{151 - 2z}{3}$ eine ganze Zahl sein, wenn y eine

sein soll. Bedeutet z_1 eine solche, so kann man

$$8) \frac{151 - 2z}{3} = z_1$$

setzen und gelangt nach einfacher Umformung zu

$$9) 2z + 3z_1 = 151,$$

der 2. Reductions-gleichung. Wie früher muß man hier, weil $2 < 3$, die Größe z entwickeln:

$$10) z = \frac{151 - 3z_1}{2} \text{ oder}$$

$$11) z = -z_1 + \frac{151 - z_1}{2}.$$

Setzen wir endlich, um z zu einer ganzen Zahl zu machen,

$$12) \frac{151 - z_1}{2} = z_2,$$

so führt diese Substitution zur Gleichung

$$13) z_1 + 2z_2 = 151,$$

mit welcher das nächste Ziel der Rechnung erreicht ist, eine Gleichung, deren einer Coefficient 1 ist. Aus derselben folgt

$$14) z_1 = 151 - 2z_2$$

und rückwärts der Reihe nach

$$z = -z_1 + z_2 = -151 + 3z_2$$

$$y = -z + z_1 = -302 - 5z_2$$

$$x = -2y + z = -755 + 13z_2.$$

Damit x und y beide positiv sind, muß $\frac{302}{5} > z_2 > \frac{755}{13}$ sein; deshalb kann z_2 nur die Werthe 59 und 60 haben und sind

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 25 \\ y = 2 \end{array} \right\} \text{ und } \left\{ \begin{array}{l} x = 12 \\ y = 7 \end{array} \right\}$$

die beiden allein möglichen Lösungen der gegebenen Aufgabe.

Wir haben uns bei dieser Auflösung strenge an die allgemeine Entwicklung der Gleichung $ax + by = c$ angeschlossen, um den Gedankengang jener Entwicklung an einem bestimmten Beispiele sich genau wieder spiegeln zu lassen. Es lassen sich nun aber mehrfache Vereinfachungen anbringen. So z. B. braucht die Gleichung 5) um der allendlichen Lösung willen garnicht besonders hervorgehoben zu werden, sondern kann man von 4) direct auf 6) übergehen. Dasselbe gilt von 9) und 13). Die Gleichungen 5), 9) und 13) sind als Seitenstücke zu 1) nur dann unumgänglich nöthig, wenn man zeigen will, wie man immer wieder auf Gleichungen von der ursprünglichen Form kommt, die Coefficienten aber von Gleichung zu Gleichung abwechselnd abnehmen, bis endlich einer derselben 1 wird. — Kürzer wird demgemäß die Rechnung bei Aufgabe 2: Die gegebene Gleichung sei

$$17x - 11y = 5.$$

Hier muß zunächst y berechnet werden, da $11 < 17$ ist. Man erhält

$$y = \frac{17x - 5}{11} = x + \frac{6x - 5}{11}$$

und setzt aus den bekannten Gründen, z als ganze Zahl angesehen, $\frac{6x - 5}{11} = z$ oder kürzer, wie fortan stets, $6x - 5 = 11z$. Daraus folgt

$$15) \quad x = \frac{11z + 5}{6} = z + \frac{5z + 5}{6}.$$

Nun wird $5z + 5 = 6z_1$ gesetzt, was weiter zu

$$z = \frac{6z_1 - 5}{5} = z_1 + \frac{z_1 - 5}{5}$$

führt, wo schließlich $z_1 - 5 = 5z_2$ zu setzen ist, um z und damit zugleich x und y zu ganzen Zahlen zu machen. Aus der letzten Gleichung folgt

$z_1 = 5z_2 + 5$ und hieraus in Verbindung mit den früheren

$$z = z_1 + z_2 = 6z_2 + 5$$

$$x = z + z_1 = 11z_2 + 10$$

$$y = x + z = 17z_2 + 15.$$

Der kleinste Werth, den z_2 zufolge den Ausdrücken für x und y annehmen kann, ist 0; (somit sind die beiden unendlichen Reihen von Werthen

$$x = 10, 21, 32, 43, \dots$$

$$y = 15, 32, 49, 66, \dots$$

§ 35. Zufolge Gleichung 15) des vorigen Paragraphen mußte $\frac{5z + 5}{6}$ einer ganzen Zahl gleichgesetzt werden. Wir

wissen aber nach § 14, daß, wenn $\frac{5z + 15}{6} = \frac{5(z + 1)}{6}$, eine

ganze Zahl ist, auch $\frac{z + 1}{6}$ eine solche sein muß, und das

Umgekehrte erhellt ohne Weiteres. Deshalb hätten wir auch

$\frac{z + 1}{6} = z_1$, oder unmittelbar $z + 1 = 6z_1$, setzen können

und daraus

$$z = 6z_1 - 1$$

$$x = z + 5z_1 = 11z_1 - 1$$

$$y = x + z = 17z_1 - 2$$

erhalten. Diese Formen gehen in die obigen Formen für x und y über, wenn wir $z_2 + 1$ für z_1 setzen; daher ist es einleuchtend, daß beide Verfahrensweisen gleiche Gültigkeit haben. Letztere ist aber vorzuziehen, weil sie auf kürzerem Wege zum Ziele führt. Wir können sie folgendermaßen formuliren: Wenn

ein Ausdruck $\frac{mfz + mg}{n}$, in welchem m und n relative Prim-

zahlen sind, eine ganze Zahl werden soll, so braucht man nach Weglassung des Factors m , nur die Gleichung $fz + g = nu$ nach z und u in ganzen Zahlen aufzulösen; denn die aus dieser Gleichung resultirenden Werthe von z machen auch den gegebenen Quotienten zu einer ganzen Zahl.

§ 36. Die Divisionen des § 33, wie sie z. B. in Gleichung 2) und 6) gefordert waren, wurden stets nur in Beziehung auf das unbekante Glied des Dividenden ausgeführt. In Folge dessen blieb das bekannte Glied in allen den nach und nach sich ergebenden Gleichungen dasselbe, und die allgemeine Darstellung der Methode war einfacher, als wenn wir auch an Stelle des bekannten Gliedes stets wieder von Neuem andere Größen hätten einführen müssen. Für die Praxis ist dagegen vorzuziehen, die Division auch mit dem bekannten Gliede vorzunehmen, indem dadurch zugleich mit den Coefficienten der Unbekannten auch dieses Glied fortwährend kleiner wird, der Ausdruck für z_n , also kleinere Zahlen enthält und hiermit

die rückwärtsschreitenden Substitutionen, an Einfachheit gewinnen. Daß außerdem das in § 33 Bewiesene durch diese Modification durchaus nicht unsicher gemacht wird, geht daraus hervor, daß die Coefficienten der successiven Unbekannten nach wie vor dem dort angegebenen Gesetze folgen, also auch alle Folgerungen ihre Gültigkeit behalten, die wir aus jenem Gesetze gezogen haben.

Zur Erläuterung diene die Gleichung

$$8x + 13y = 319,$$

an welcher wir sogleich die besprochene Erweiterung der Division vornehmen. Wir gewinnen dadurch

$$x = \frac{319 - 13y}{8} = 39 - y + \frac{7 - 5y}{8}$$

und setzen nun $7 - 5y = 8z$, woraus unmittelbar

$$y = \frac{7 - 8z}{5} = 1 - z + \frac{2 - 3z}{5}$$

folgt. Weiter setzen wir $2 - 3z = 5z_1$, so ergibt sich

$$z = \frac{2 - 5z_1}{3} = -z_1 + \frac{2 - 2z_1}{3}.$$

Jetzt können wir die Regel des § 35 anwenden und $1 - z_1 = 3z_2$ setzen. Mit dieser Gleichung hat die Reduction der Coefficienten ein Ende; wir leiten aus derselben noch den Ausdruck

$$z_1 = 1 - 3z_2$$

ab und beginnen darauf die zurückschreitenden Substitutionen, die uns zu folgenden Formen führen:

$$z = -z_1 + 2z_2 = 5z_2 - 1$$

$$y = 1 - z + z_1 = 3 - 8z_2$$

$$x = 39 - y + z = 35 + 13z_2.$$

Für z_2 ergeben sich aus den Ausdrücken für x und y die Gren-

zen $-\frac{7}{3}$ und $\frac{2}{3}$, d. h. die Werthe -2 , -1 und 0 . Die möglichen Lösungen der gegebenen Gleichung sind daher

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 9 \\ y = 19 \end{array} \right\} \text{ und } \left\{ \begin{array}{l} x = 22 \\ y = 11 \end{array} \right\} \text{ und } \left\{ \begin{array}{l} x = 35 \\ y = 3 \end{array} \right\}.$$

§ 37. Ferner ist es im Allgemeinen vortheilhaft, bei den Divisionen die Reste so zu wählen, daß sie kleiner als die Hälfte des Divisors werden. Dieses ist immer möglich, sobald wir auch negative Reste gelten lassen. Die vorige Gleichung z. B. gab den Ausdruck

$$x = \frac{319 - 13y}{8}.$$

Wir dividirten 319 durch 8 und erhielten den Quotienten 39 und den Rest 7. Wir hätten aber auch den Quotienten 40 und den Rest -1 wählen können, und eine ähnliche Abänderung läßt sich bei der Division des zweiten Gliedes anbringen. Dadurch erhält der erwähnte Ausdruck die Form

$$x = 40 - 2y + \frac{3y - 1}{8}.$$

Setzen wir jetzt $3y - 1 = 8z$, so wird, wenn wir wieder den negativen Rest wählen

$$y = \frac{8z + 1}{3} = 3z + \frac{1 - z}{3},$$

und mit der Setzung $1 - z = 3z_1$ sind wir am Ziele der Reduction angelangt, haben mithin eine Hilfsgröße und hiermit auch eine Substitution erspart. Aus $z = 1 - 3z_1$ brauchen wir jetzt nämlich nur noch x und y abzuleiten, welche in folgender Form erscheinen:

$$y = 3 - 8z_1, \quad x = 35 + 13z_1.$$

Diese Formen aber stimmen mit denen des vorigen Paragraphen vollständig überein.

§ 38. Bevor wir schließlich zu der Lösung der diophantischen Gleichung durch Kettenbrüche übergehen, erwähnen wir noch ein Verfahren, welches scheinbar originell und neu, in Wahrheit nichts weiter ist, als eine geringe Modification der Eulerschen Reductionsmethode.

Wenn wir die Gleichung 1) des § 33 durch a dividiren ($a < b$), ohne by auf die andere Seite zu bringen, so erhalten wir an Stelle der Gleichung 2) und 3) jenes Paragraphen

$$x + \frac{by}{a} = c \text{ und}$$

$$x + py + \frac{ry}{a} = c.$$

Setzen wir jetzt $x + py = z$, so ist dieses nur scheinbar eine Abweichung von dem Gange, den die Rechnung dort nimmt; in Wirklichkeit ist diese Substitution identisch mit der in Gleichung 4) jener Entwicklung vorgenommenen Gleichsetzung. Dort heißt es nämlich $\frac{c - ry}{a} = z$, und verbinden wir dieses mit Gleichung 3), so erhalten wir $x + py = z$, die angeführte Substitution. Wenden wir dieselbe nun auf die 2te der obigen Gleichungen an, so erhält diese, wenn man noch mit a multiplicirt, die Form

$$az + ry = c;$$

diese Gleichung ist aber bis auf die einzelnen Buchstaben genau die Gleichung 5) des § 33. Dieselbe wird nun ganz ebenso behandelt, wie die gegebene Gleichung, und es ist leicht einzusehen, daß auch fernerhin beide Verfahrensweisen mit einander parallel laufen werden, so daß die Schlüsse des § 33 ohne Weiteres herübergezogen werden können.

§ 39. Für die Praxis läßt sich das angegebene Verfahren folgendermaßen abkürzen.

In der Gleichung $ax + by = c$ führen wir die Division durch a nicht aus, sondern fassen die in by enthaltenen Vielfachen von a mit ax zusammen. Nach den angewandten Bezeichnungen giebt das

$$a(ax + py) + ry = c.$$

Wird nun $x + py = z$ gesetzt, so entspringt ohne Weiteres

$$az + ry = c$$

und so geht es weiter. — Es versteht sich von selbst, daß es auch hierbei in den häufigsten Fällen vortheilhaft sein wird, die Reste so einzurichten, daß jeder von ihnen kleiner wird als die Hälfte des vorhergehenden Restes.

Wir wollen dieses Verfahren an einer Gleichung anschaulich machen, wobei die auf einander folgenden Ausdrücke selbst für sich sprechen mögen. Die Substitutionsgleichungen sind außerdem daran erkennbar, daß sie tiefer in die Zeile hineingerückt sind.

$$25x - 36y = 7$$

$$25(x - y) - 11y = 7$$

$$x - y = z$$

$$25z - 11y = 7$$

$$3z + 11(2z - y) = 7$$

$$2z - y = z_1$$

$$3z + 11z_1 = 7$$

$$3(z + 4z_1) - z_1 = 7$$

$$z + 4z_1 = z_2$$

$$3z_2 - z_1 = 7$$

Mit der letzten Gleichung ist die Reduction vollbracht. Wir erhalten aus ihr $z_1 = 3z_2 - 7$ und hieraus mit Benutzung der Substitutionsgleichungen

$$z = z_2 - 4z_1 = 28 - 11z_2$$

$$y = 2z - z_1 = 63 - 25z_2$$

$$x = y + z = 91 - 36z_2$$

Die unbestimmte Größe z_2 muß laut § 24 kleiner als 3 sein. Wir haben daher für x und y die Reihen

$$x = 19, 55, 91, 127, 163 \dots$$

$$y = 13, 38, 63, 88, 113 \dots$$

Das in § 39 benutzte Verfahren ist vom Professor Dr. Kunze angegeben.

§ 40. Bei der algebraischen Reduction konnte schon der Umstand, daß implicite die Rechnung durchgemacht wurde, welche zur Auffindung des größten gemeinschaftlichen Maßes von a und b erforderlich ist, verbunden mit dem anderen, daß a und b relative Primzahlen sind, ein Fingerzeig sein, daß der Kettenbruch, durch welchen $\frac{b}{a}$ dargestellt wird, bei der Lösung müsse wirksam angewandt werden können. Diese Vermuthung wird zur Gewißheit, wenn wir in Erwägung ziehen, daß die Gleichung $ax - by = \pm c$ durch die Substitution $x = cx_1$, $y = cy_1$ in die Gleichung $ax_1 - by_1 = \pm 1$ übergeht; denn daß diese durch Kettenbrüche lösbar ist, geht daraus hervor, daß, wenn wir $\frac{b}{a}$ in einen Kettenbruch verwandeln und durch $\frac{x_1}{y_1}$ den vorletzten Näherungswerth dieses Kettenbruchs bezeichnen, die Differenz $ax_1 - by_1 = \pm 1$ ist, je nachdem $\frac{x_1}{y_1}$ unter den Näherungswerthen eine gerade oder ungerade Stelle einnimmt, die in dem Bruche $\frac{b}{a}$ enthaltene ganze Zahl

als ersten Näherungswertb genommen. Nach dieser Betrachtung hat die Lösung selbst keine Schwierigkeiten mehr.

§ 41. Es werde zunächst die Gleichung $ax - by = c$ untersucht. Durch die Substitution $x = cx_1$ und $y = by_1$ erhält sie, wie schon oben bemerkt, die Form

$$ax_1 - by_1 = 1.$$

Nun entwickeln wir den Kettenbruch $\frac{b}{a}$ und die Näherungswertbe desselben. Den vorletzten Näherungswertb ($\frac{b}{a}$ selbst ist der letzte) bezeichnen wir durch $\frac{p}{q}$, und nach Obigem gilt für ihn eine der Relationen $ap - bq = 1$ oder $ap - bq = -1$. Es sei Ersteres der Fall, so ergibt die Vergleichung mit der Gleichung $ax_1 - by_1 = 1$, daß $x_1 = p$ und $y_1 = q$ eine Lösung der gegebenen Gleichung ist. — Findet dagegen die Beziehung $ap - bq = -1$ statt, so multipliciren wir dieselbe mit -1 ; das giebt

$$a(-p) - b(-q) = 1$$

und durch Vergleichung $x_1 = -p$, $y_1 = -q$. Hat man aber x_1 und y_1 , so ist x und y mit Berücksichtigung der oben gemachten Substitution und § 22 leicht berechnet, nämlich

$$x = \pm cp + bn$$

$$y = \pm cq + an$$

wo das Zeichen der bestimmten Glieder von dem Zeichen der besprochenen Differenz abhängt.

Wenn wir diese Methode auf die Gleichung

$$41x - 67y = 16$$

anwenden, so muß zuvörderst $x = 16x_1$, $y = 16y_1$ gesetzt werden; diese Substitution führt zu

$41 x_1 - 67 y_1 = 1$,
und hier ist nun $\frac{67}{41}$, in einen Kettenbruch zu verwandeln.

Es ist $\frac{67}{41} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}}}}}$

und seine Näherungswerthe sind

$$1, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{18}{11}, \frac{67}{41}.$$

Der vorletzte Näherungswerth ist $\frac{18}{11}$, und da er außerdem der sechste in der Reihe ist, so ist die Differenz

$$41 \cdot 18 - 67 \cdot 11 = 1.$$

Die Vergleichung mit

$$41 \cdot x_1 - 67 \cdot y_1 = 1$$

ergibt die Werthe $x_1 = 18$, $y_1 = 11$ und hieraus weiter $x = 288$, $y = 176$, also allgemein

$$x = 288 + 67n$$

$$y = 176 + 41n.$$

Da $n > -5$ sein muß, sind die einzelnen Lösungen

$$x = 20, 87, 154, 221 \dots \dots$$

$$y = 12, 53, 94, 135 \dots \dots$$

Als zweites Beispiel berechnen wir die Gleichung

$$125x - 87y = -5.$$

Nachdem wir hierin $x = -5x_1$ und $y = -5y_1$ gesetzt und dadurch die Gleichung

$$125 x_1 - 87 y_1 = 1$$

erzielt haben, bilden wir den Kettenbruch

$$\frac{87}{125} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{5}}}}}$$

unter dessen Näherungswerthen

$$0, \frac{1}{1}, \frac{2}{3}, \frac{7}{10}, \frac{16}{25}, \frac{87}{125}$$

der 5te und zugleich vorletzte $\frac{16}{25}$ ist. Deshalb ist die beziehliche Differenz

$$125 \cdot 16 - 87 \cdot 23 = -1;$$

um sie aber mit

$$125 \cdot x_1 - 87y_1 = 1$$

vergleichen zu können, bilden wir sie in

$$125 \cdot (-16) - 87 \cdot (-23) = 1$$

um, so daß $x_1 = -16$ und $y_1 = -23$, oder $x = 80$ und $y = 115$, also allgemein

$$x = 80 + 87n$$

$$y = 115 + 125n$$

hervorgehen. Die beiden Werthreihen sind hiernach, da $n > -1$,

$$x = 80, 167, 254 \dots \dots$$

$$y = 115, 240, 365 \dots \dots$$

§ 42. Um die Gleichung $ax + by = c$ mit Hülfe von Kettenbrüchen zu lösen, bedarf es jetzt nur $y = -y_1$ zu setzen; denn dadurch geht die Gleichung in

$$ax - by_1 = c$$

über, dieselbe Form, welche in § 41 abgemacht ist. Die Lösungen werden dem entsprechend in den Formen $x = \pm cp + bn$ und $y = \mp cq - an$ erscheinen.

Auch von dieser Art lösen wir noch ein Beispiel. Vereini- gen wir in der betreffenden Gleichung

$$8x + 5y = 47$$

die beiden vorzunehmenden Substitutionen und setzen $x = 47x_1$, $y = -47y_1$, so gibt dieses die Gleichung

$$8x_1 - 5y_1 = 1,$$

behufs welcher wir den Kettenbruch

$$\frac{5}{8} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}$$

nebst seinen Näherungswerten

$$0, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{8}$$

entwickeln. Durch Vergleichung der abgeleiteten Gleichung mit der aus vorstehenden Näherungswerten folgenden Differenz

$$8 \cdot 2 - 5 \cdot 3 = 1$$

findet sich nun $x_1 = 2$, $y_1 = 3$, also $x = 94$, $y = -141$, oder allgemein

$$x = 94 - 5n$$

$$y = -141 + 8n.$$

Diesen Formeln gemäß ist $19 > n > 17$; folglich ist die einzig brauchbare Lösung

$$x = 4, y = 3.$$

§ 43. Die Lösung durch Kettenbrüche wird im Allgemeinen in allen den Fällen zu empfehlen sein, wo das Auffuchen des größten gemeinsamen Maßes von a und b eine beträchtliche Anzahl von Divisionen verlangt. Alsdann ist sie auch bedeutend kürzer als die algebraische Reduction, welche von ihr an Eleganz wol stets übertroffen wird. Wir verdanken dieses Verfahren dem berühmten Analytisten Lagrange.



Est.
A-7317
Est. A-19309