

TARTU ÜLIKOOL
LOODUS- JA TÄPPISTEADUSTE VALDKOND
MATEMAATIKA JA STATISTIKA INSTITUUT

Nikita Leo
Banachi ruumi ühikera plastilisus

Matemaatika ja statistika õppekava

Matemaatika eriala

Magistritöö (30 EAP)

Juhendajad:
Rainis Haller (Tartu Ülikool)
Olesia Zavarzina (V. N. Karazini nim. Harkivi Rahvuslik Ülikool)

TARTU 2024

BANACHI RUUMI ÜHIKKERA PLASTILISUS

Magistritöö

Nikita Leo

Lühikokkuvõte

Selles magistritöös tõestatakse mõned Banachi ruumi ühikera plastilisusega seonduvad tulemused (nimetame meetrilist ruumi M plastiliseks, kui iga kaugusi mittesuurendav bijektsioon $f : M \rightarrow M$ on tegelikult isomeetria). Esi-meses peatükis loetletakse vajalikke eelteadmisi. Teises peatükis tõestatakse ruumi $\ell_1 \oplus_p \mathbb{R}$ ühikera plastilisus $p \in (1, \infty)$ korral. Kolmandas peatükis vaadeldakse lõpliku arvu rangelt kumerate Banachi ruumide ℓ_∞ -summa ühikera plastilisust. Tõestatakse, et kahe rangelt kumera Banachi ruumi ℓ_∞ -summal on plastiline ühikera ning et suvalise lõpliku arvu liidetavate korral on mit-telaiendava bijektsiooni $F : B_X \rightarrow B_X$ isomeetrilisus tagatud lisaeldusega $F(S_X) \subset S_X$ või $F(\text{ext } B_X) \subset \text{ext } B_X$.

CERCS teaduseriala: P140 Jadad, Fourier analüüs, funktsionaalanalüüs.

Märksõnad: Plastilisus, ühikera plastilisus.

PLASTICITY OF THE UNIT BALL OF A BANACH SPACE

Master's thesis

Nikita Leo

Abstract

In this master's thesis we prove some results related to plasticity of the unit ball of a Banach space (we call a metric space M plastic if every nonexpansive bijection $f : M \rightarrow M$ is actually an isometry). In the first chapter we present all the necessary preliminaries. In the second chapter we prove the plasticity of the unit ball of $\ell_1 \oplus_p \mathbb{R}$ for $p \in (1, \infty)$. In the third chapter we consider the plasticity of the unit ball of a ℓ_∞ -sum of a finite number of strictly convex Banach spaces. We prove that the unit ball of a ℓ_∞ -sum of two strictly convex Banach spaces is plastic and that in the case of an arbitrary finite number of summands the nonexpansive bijection $F : B_X \rightarrow B_X$ is an isometry if it satisfies the additional assumption $F(S_X) \subset S_X$ or the additional assumption $F(\text{ext } B_X) \subset \text{ext } B_X$.

CERCS research specialisation: P140 Series, Fourier analysis, functional analysis.

Keywords: Plasticity, plasticity of the unit ball.

Sisukord

Sissejuhatus	4
1 Eelteadmised	8
2 Ruum $\ell_1 \oplus_p \mathbb{R}$	14
3 Rangelt kumerate ruumide summad	20
3.1 Põhilemma	21
3.2 Piisavad tingimused	32
3.3 Tõestus kahe ruumi puhul	36
Viited	41

Sissejuhatus

Kui M ja N on meetrilised ruumid, siis nimetame kujutust $f : M \rightarrow N$ mittelaiendavaks, kui ruumi M iga kahe punkti a ja b korral $d(f(a), f(b)) \leq d(a, b)$. Kui ruumi M iga kahe punkti a ja b korral $d(f(a), f(b)) = d(a, b)$, siis nimetame kujutust f isomeetriaks. Meetrilist ruumi M nimetame plastiliseks, kui iga mittelaiendav bijektsioon $f : M \rightarrow M$ on isomeetria.

Aastal 2016 püstitasid B. Cascales, V. Kadets, J. Orihuela ja E. J. Wingler oma artiklis küsimuse, kas iga Banachi ruumi ühikkera on meetrilise ruumina plastiline [1]. Samas artiklis oli ka tõestatud, et rangelt kumerate Banachi ruumide ühikkeradel see omadus tõepoolest on (nimetame Banachi ruumi rangelt kumeraks, kui selle ühiksfäär ei sisalda mittetriviaalseid ehk erinevate otspunktidega sirglõike). Kuna on teada, et iga täielikult tõkestatud meetriline ruum on plastiline, siis piirdub küsimus tegelikult vaid lõpmatumõõtmeliste ruumidega. Tõestuse täielikult tõkestatud meetrilise ruumi plastilisusest võib leida ka näiteks käesoleva magistritöö autori bakalaureusetööst [2, Theorem 1.3].

Aja jooksul saadi mitmeid uusi positiivseid tulemusi. Aastal 2016 avaldatud artiklis tõestasid V. Kadets ja O. Zavarzina, et plastiline on ka jadaruumi ℓ_1 ühikkera [3]. Aastal 2018 avaldatud artiklis näitasid V. Kadets ja O. Zavarzina, et vaadeldav omadus on ka rangelt kumerate Banachi ruumide ℓ_1 -summadel [4]. See tulemus üldistab nii rangelt kumerate Banachi ruumide kui ka jadaruumi ℓ_1 kohta käivat tulemust. Aastal 2019 avaldatud artiklis tõestasid C. Angosto, V. Kadets ja O. Zavarzina ühikkera plastilisuse ka selliste Banachi ruumide jaoks, mille ühiksfäär on enda lõplikumõõtmeliste polüeedriliste ekstremaalsete alamhulkade ühend [5]. See tulemus üldistab tulemust rangelt kumerate Banachi ruumide ühikkera plastilisusest.

Käesoleva magistritöö autoril õnnestus oma bakalaureusetöö kallal töötamise ajal samuti rea uusi positiivseid tulemusi saada. Neist esimene oli kahe rangelt kumera Banachi ruumi ℓ_∞ -summa ühikkera plastilisus. Teine oli jadaruumi c_0 ühikkera plastilisusest veidi nõrgem omadus, mille kohaselt on isomeetria iga pideva pöördkujutusega mittelaiendav bijektsioon ehk mittelaiendav homöomorfism. Kolmandaks tulemuseks oli jadaruumi c ühikkera plastilisus. Viimased kaks tulemust olid esitatud käesoleva magistritöö autori aastal 2021 kaitstud bakalaureusetöös [2] (juhendajad R. Haller ja O. Zavarzina) ning hiljem ka aastal 2022 avaldatud artiklis [6]. Esimene tulemus oli avaldatud aastal 2022 ilmunud käesoleva magistritöö autori N. Leo ja tema bakalaureuse- ja magistritöö juhendajate R. Halleri ja O. Zavarzina ühises artiklis [7]. Artiklis esitatakse kaks uut tulemust, millest teine on ruumi $\ell_1 \oplus_2 \mathbb{R}$ ühikkera plastilisus, mis oli saadud peamiselt R. Halleri ja O. Zavarzina koostöös.

Aastal 2024 sai avaldatud M. Fakhoury artikkel [8], milles üldistatakse tulemus ruumi c ühikera plastilisusest. Artiklis tõestatakse, et lõpliku arvu kuhjumispunktidega metriseeruva ja kompaktse topoloogilise ruumi K korral on ruumi $C(K)$ ühikera plastiline (kompaktse topoloogilise ruumi K korral mõtleme $C(K)$ all Banachi ruumi, mille elementideks on kõikvõimalikud pidevad funktsioonid $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ ja mille norm on antud seosega $\|f\| = \max_{x \in K} |f(x)|$). Kui aga K on metriseeruv ja kompaktne topoloogiline ruum, mille kuhjumispunktide hulk K' on mittetühi ja lõplik, siis on ruum $C(K)$ isomeetriliselt isomorfne ruumiga $c \oplus_\infty \dots \oplus_\infty c$, kus liidetavate arv on ruumi K kuhjumispunktide arv (tühja K' korral $|K| < \infty$ ja $C(K)$ on samastatav ruumiga $\ell_\infty^{|K|}$, mis on lõplikumõõtmeline ega paku meile seega huvi). Teiselt poolt on iga positiivse täisarvu n korral n kuhjumispunktiga metriseeruv ja kompaktne topoloogiline ruum ka konstrueeritav. Seega sisuliselt tõestatakse ühikera plastilisus ruumi c lõpliku arvu koopiade ℓ_∞ -summade jaoks.

Fakhoury tõestab oma artiklis ka kaks tulemust, mis näitavad mittelaiendava bijektsiooni $F : B_{C(K)} \rightarrow B_{C(K)}$ isomeetrilisust teatud tingimusi rahuldava K ja teatud kujutuse F kohta käiva lisatingimuse korral. Neist esimene ütleb, et kui K on nullmõõtmeline kompaktne Hausdorffi ruum, mille isoleeritud punktide hulk on selles ruumis kõikjal tihe, siis iga mittelaiendav homöomorfism $F : B_{C(K)} \rightarrow B_{C(K)}$ on isomeetria (topoloogilist ruumi nimetatakse nullmõõtmeliseks, kui temal leidub kinnislahtistest hulkadest koosnev baas). Kuna jadaruum ℓ_∞ on samastatav ruumiga $C(\beta\mathbb{N})$, kus β tähistab Stone-Čechi kompaktifikatsiooni, ning ruum $\beta\mathbb{N}$ rahuldab viimases lauses toodud tingimusi, siis võib järeldada, et iga pideva pöördkujutusega mittelaiendav bijektsioon $F : B_{\ell_\infty} \rightarrow B_{\ell_\infty}$ on isomeetria. Teine tulemus ütleb, et kui K on loenduv kompaktne Hausdorffi ruum, siis mittelaiendav bijektsioon $F : B_{C(K)} \rightarrow B_{C(K)}$ on isomeetria, kui ta rahuldab tingimust $F(\text{ext } B_{C(K)}) \subset \text{ext } B_{C(K)}$ või $\inf\{\|F(f)\| : f \in S_{C(K)}\} > \frac{1}{2}$. Kuna ruum $\beta\mathbb{N}$ rahuldab ka selle lause eeldusi, siis võime järeldada, et mittelaiendav bijektsioon $F : B_{\ell_\infty} \rightarrow B_{\ell_\infty}$ on isomeetria, kui ta rahuldab tingimust $F(\text{ext } B_{\ell_\infty}) \subset \text{ext } B_{\ell_\infty}$ või $\inf\{\|F(f)\| : f \in S_{\ell_\infty}\} > \frac{1}{2}$.

Viimaks, oma aastal 2023 kaitstud bakalaureusetöös [9] (juhendajad R. Haller ja N. Leo) üldistas K. A. Kurik ühe olulise osa kahe rangelt kumera Banachi ruumi ℓ_∞ -summa ühikera plastilisuse tõestusest suvalise lõpliku arvu liidetavate juhule. Tänu sellele üldistusele õnnestus originaalse tõestuse ülejäänud osa jäljendades näidata, et suvalise lõpliku arvu liidetavate korral on mittelaiendava bijektsiooni F isomeetrilisus tagatud lisaeeldusega $F(S_X) \subset S_X$ või $F(\text{ext } B_X) \subset \text{ext } B_X$. Kurik tõestab oma bakalaureusetöös ka kaks lisatulemust. Neist esimene ütleb, et kui X ja Y on Banachi ruumid ning $F : B_X \rightarrow B_Y$ on mittelaiendav bijektsioon, mis pole isomeetria, siis leidub

Banachi ruum Z ja mittelaiendav bijektsioon $F : B_Z \rightarrow B_Z$, mis pole isomeetria. Teine tulemus ütleb, et kui X on Banachi ruum ja $F : B_X \rightarrow B_X$ on mittelaiendav homöomorfism, mis pole isomeetria, siis ruumil Y leidub kinnine separaabel alamruum Y nii, et $F(B_Y) = B_Y$ ja $F|_{B_Y} : B_Y \rightarrow B_Y$ on mittelaiendav homöomorfism, mis pole isomeetria. Kurikul on oma bakalaureusetöö põhjal valminud ka artikkel, milles esitatud tõestused erinevad mõnevõrra bakalaureusetöös esitatust [10].

Selle asemel, et vaadelda vaid mittelaiendavaid bijektsioone mõne Banachi ruumi ühikkerast iseendasse, võime vaadelda ka mittelaiendavaid bijektsioone erinevate Banachi ruumide ühikkerade vahel. Näiteks võime küsida, milliste Banachi ruumide X ja Y korral kehtib väide, et iga mittelaiendav bijektsioon $F : B_X \rightarrow B_Y$ on isomeetria. Praeguseks on teada, et väide kehtib, kui Y on lõplikumõõtmeline [11] või rangelt kumerate Banachi ruumide ℓ_1 -summa [4] või selline Banachi ruum, mille ühiksfäär on enda lõplikumõõtmeliste polüeedriliste ekstremaalsete alamhulkade ühend [5]. Kuna lõplikumõõtmelise X korral on mittelaiendava bijektsiooni $F : B_X \rightarrow B_Y$ olemasolul lõplikumõõtmeline ka Y (kompaktse hulga pidev kujutis on kompaktne), siis on piisavaks tingimuseks ka ruumi X lõplikumõõtmelisus. Kuna sama võib öelda ka range kumeruse kohta, siis on piisavaks tingimuseks ka ruumi X range kumerus [5, Theorem 4.2]. Ülal mainitud K. A. Kuriku tõestatud tulemusest ilmneb, et väide, et suvaliste Banachi ruumide X ja Y korral on iga mittelaiendav bijektsioon $F : B_X \rightarrow B_Y$ isomeetria, on samaväärne väitega, et iga Banachi ruumi ühikker on meetrilise ruumina plastiline.

Juhime tähelepanu sellele, et Banachi ruumi ühikker plastilisuse kontekstis vaadeldakse reeglina vaid reaalseid Banachi ruume, sest kompleksse Banachi ruumi reaalse Banachi ruumina käsitlemisel jäävad ühikker ja kaugused samadeks, mistõttu ei sõltu ühikker plastilisus sellest, kas me vaatleme ruumi reaalse või komplekskena. Selles töös vaatleme samuti vaid reaalseid Banachi ruume.

Käesoleva magistritöö eesmärgiks on esitada autori ja tema juhendajate R. Halleri ja O. Zavarzina ühises artiklis „Two new examples of Banach spaces with a plastic unit ball“ [7] esitatud tulemused ja nende põhjal hiljem tehtud üldistused. Magistritöö esimeses peatükis esitatakse vajalikke eelteadmisi. Teises peatükis esitatakse tõestus Banachi ruumi $\ell_1 \oplus_p \mathbb{R}$ ühikker plastilisusest $p \in (1, \infty)$ korral, mis on magistritöö autori enda tehtud küllaltki vahetu üldistus ülal mainitud artiklis esitatud ruumi $\ell_1 \oplus_2 \mathbb{R}$ ühikker plastilisuse tõestusest. Kolmandas peatükis antakse ülevaade rangelt kumerate Banachi ruumide lõplike ℓ_∞ -summade ühikkerade plastilisusega seonduvatest tulemustest. Tõestatakse, et kahe rangelt kumera Banachi ruumi ℓ_∞ -summal on plastiline ühikker ning et suvalise lõpliku arvu liidetavate korral on mitte-

laiendava bijektsiooni isomeetrilisus tagatud lisaeldusega $F(S_X) \subset S_X$ või $F(\text{ext } B_X) \subset \text{ext } B_X$. See peatükk põhineb ülal mainitud artiklis sisalduval kahe liidetava juhtu käsitleval tõestusel, K. A. Kuriku bakalaureusetööl [9] ja vähesel määral ka viimase põhjal valminud artiklil [10].

1 Eelteadmised

Selles peatükis loetleme järgmise kahe peatüki jaoks vaja minevaid eelteadmisi.

Kui M ja N on meetrilised ruumid, siis nimetame kujutust $f : M \rightarrow N$ mittelaiendavaks, kui ruumi M iga kahe punkti a ja b korral $d(f(a), f(b)) \leq d(a, b)$, ja mitteahendavaks, kui ruumi M iga kahe punkti a ja b korral $d(f(a), f(b)) \geq d(a, b)$. Kui ruumi M iga kahe punkti a ja b korral $d(f(a), f(b)) = d(a, b)$, siis nimetame kujutust f isomeetriaks. Meetrilist ruumi M nimetame plastiliseks, kui iga mittelaiendav bijektsioon $f : M \rightarrow M$ on isomeetria.

Banachi ruumi X korral nimetame selle ühikkeraks hulka $\{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ ja selle ühiksfääriks hulka $\{x \in X : \|x\| = 1\}$. Kasutame nende jaoks vastavalt tähiseid B_X ja S_X . Märki \subset kasutame mitterange sisalduvuse tähenduses. Loeme, et $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. Kui X on Banachi ruum ning a ja b on selle elemendid, siis nimetame hulka $\{(1 - \lambda)a + \lambda b : \lambda \in [0, 1]\}$ punkte a ja b ühendavaks lõiguks ehk sirglõiguks ja kasutame selle jaoks tähist $[a, b]$. Lõigu $[a, b]$ otspunktideks nimetame punkte a ja b . Nimetame lõiku triviaalseks, kui tema otspunktid on võrdsed, ning mittetriviaalseks vastasel juhul. Banachi ruumi X osahulka K nimetame kumeraks, kui suvaliste $a, b \in K$ korral $[a, b] \in K$.

Banachi ruumi X ühikkeraks B_X ekstremaalseks punktiks nimetame punkti $x \in B_X$, mille puhul ei leidu elementi $\delta \in X \setminus \{0\}$, mille korral kehtiks $[x - \delta, x + \delta] \subset B_X$ (hulga B_X kumeruse tõttu võib tingimuse $[x - \delta, x + \delta] \subset B_X$ asendada ka tingimusega $x - \delta, x + \delta \in B_X$). Kasutame ühikkeraks ekstremaalsete punktide hulga jaoks tähist $\text{ext } B_X$. Triviaalse ruumi korral $\text{ext } B_X = \{0\}$, mittetriviaalse ruumi puhul $\text{ext } B_X \subset S_X$. Nimetame ühikkeraks ekstremaalseid punkte edaspidi tihti ka lihtsalt ekstremaalseteks punktideks. Ekstremaalsed punktid etendavad ühikkeraks plastilisuse uurimisel väga olulist rolli. Selle põhjuseks on allpool toodud lause 1.3 punkt 4. Ühikkeraks ekstremaalsete punktide hulk $\text{ext } B_X$ on sümmeetriline: kui x on ekstremaalne punkt, siis on ekstremaalne punkt ka $-x$.

Banachi ruumi X nimetame rangelt kumeraks, kui selle ühiksfäär ei sisalda mittetriviaalseid ehk erinevate otspunktidega sirglõike. Samaväärselt, Banachi ruum X on rangelt kumer, kui tema ühiksfääri iga punkt on tema ühikkeraks ekstremaalne punkt. Mittetriviaalse X korral on ruumi X range kumerus seega samaväärne võrdusega $\text{ext } B_X = S_X$.

Ekstremaalsed punktid annavad vastuse ka järgmisele küsimusele. Olgu X Banachi ruum. Olgu $u \in X$ ja $e \in S_X$ ning olgu δ mingi positiivne reaalarv. Tähistame $v = u + \delta e$. Olgu α ja β mingid positiivsed reaalarvud, mille summa on δ . Vaatleme hulka $D = \{x \in X : \|x - u\| = \alpha, \|x - v\| = \beta\}$

(kolmnurga võrratuse ja võrduse $\alpha + \beta = \delta$ tõttu võib võrdused $\|x - u\| = \alpha$ ja $\|x - v\| = \beta$ hulga D definitsioonis asendada ka võrratustega $\|x - u\| \leq \alpha$ ja $\|x - v\| \leq \beta$). Hulk D on alati mittetühi, sest sellesse kuulub lõigul $[u, v]$ asuv punkt $\frac{\beta}{\alpha+\beta}u + \frac{\alpha}{\alpha+\beta}v$, mis on ka ainus hulka D kuuluv lõigu $[u, v]$ punkt. Küsimus on aga selles, kas see on hulga D ainus punkt. Osutub, et nii on see parajasti siis, kui e on ühikera B_X ekstremaalne punkt. Tegemist on tõenäoliselt üldtuntud teadmiselega. Põhjaliku tõestuse võib leida ka näiteks käesoleva magistritöö autori bakalaureusetööst [2] (Propositionile 2.2 vahetult eelnev sisulõik kuni Corollary 2.4).

Kuna rangelt kumera ruumi puhul on ühiksfääri iga punkt ekstremaalne, siis rangelt kumera X puhul on eelmises sisulõigus defineeritud hulk D alati üheelemendiline. Seega, kui X on rangelt kumer Banachi ruum, u ja v on selle kaks erinevat elementi ning punkt $x \in X$ on selline, et $\|x - u\| + \|x - v\| = \|u - v\|$, siis $x = \frac{\beta}{\alpha+\beta}u + \frac{\alpha}{\alpha+\beta}v$ (kus kasutame tähistusi $\alpha = \|x - u\|$ ja $\beta = \|x - v\|$). Sama tulemuseni võib jõuda ka kasutades üht rangelt kumerate ruumide alternatiivset kirjeldust, mis kõlab nii, et Banachi ruum on rangelt kumer parajasti siis, kui kolmnurga võrratuse $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ võrdusena kehtimisest järeldeb alati elementide x ja y kollineaarsus.

Järeldus 1.1. *Olgu X rangelt kumer Banachi ruum. Olgu $t \in S_X$ ning $\alpha \in [0, 1]$. Kui $x \in X$ on selline, et $\|x - t\| = 1 - \alpha$ ning $\|x + t\| = 1 + \alpha$, siis $x = \alpha t$.*

Tõestus. Võtame viimases sisulõigus toodud väites $u = t$ ning $v = -t$. \square

Kolmnurga võrratusest järeldeb, et kui X on Banachi ruum ning $a, b \in B_X$ on sellised, et $\|a - b\| = 2$, siis $a, b \in S_X$. Kui X on rangelt kumer, saame öelda ka rohkem.

Järeldus 1.2. *Kui X on rangelt kumer Banachi ruum ning $a, b \in B_X$ on sellised, et $\|a - b\| = 2$, siis $a, b \in S_X$ ja $a = -b$.*

Tõestus. Võtame järeldusele 1.1 eelnevas sisulõigus toodud väites $u = a$, $v = b$ ja $x = 0$. \square

Banachi ruumi ühikera plastilisuse uurimisel on suure tähtsusega järgmine mittelaiendava bijektsiooni $F: B_X \rightarrow B_X$ põhiomadusi kirjeldav lause. Esimest korda olid selles loetletud omadused kirjeldatud ja tõestatud B. Cascalese, V. Kadetsi, J. Orihuela ja E. J. Wingleri poolt nende rangelt kumera Banachi ruumi ühikera plastilisust käsitlevas artiklis [1]. (Originaalses sõnastuses puudub järgneva lause punkt 2, mis on aga lihtne järeldus punktist 1. Järgneva lause punkt 4 on kokku pandud originaalses sõnastuses oleva nimekirja

mitmest erinevast punktist.) Järgnevat lauset kasutame teises ja kolmandas peatükis korduvalt.

Lause 1.3 ([1, Theorem 2.3]). *Olgu X Banachi ruum ning $F: B_X \rightarrow B_X$ mittelaiendav bijektsioon. Siis*

1. $F(0) = 0$;
2. iga $x \in B_X$ korral $\|F(x)\| \leq \|x\|$;
3. kui $x \in S_X$, siis $F^{-1}(x) \in S_X$;
4. kui $x \in \text{ext } B_X$, siis $F^{-1}(x) \in \text{ext } B_X$ ja $F^{-1}(\alpha x) = \alpha F^{-1}(x)$ iga $\alpha \in [-1, 1]$ korral.

Nagu oli täheldatud O. Zavarzina poolt artiklis [11], üldistub see tulemus ka mittelaiendavatele bijektsioonidele erinevate Banachi ruumide ühikkerade vahel. Lause 1.3 põhjaliku tõestuse selle kõige üldisemal kujul võib leida ka näiteks käesoleva magistritöö autori bakalaureusetööst [2] (Proposition 2.5 kuni Proposition 2.6).

Oma rangelt kumera Banachi ruumi ühikkerade plastilisust käsitlevas artiklis [1] tõestasid B. Cascales, V. Kadets, J. Orihuela ja E. J. Wingler järgmise tulemuse, mis annab piisava tingimuse mittelaiendava bijektsiooni $F: B_X \rightarrow B_X$ isomeetriaks olemise jaoks (säilitame originaalse sõnastuse).

Lause 1.4 ([1, Lemma 2.5]). *Olgu X Banachi ruum ja olgu $F: B_X \rightarrow B_X$ mittelaiendav bijektsioon, mis rahuldab järgmisi tingimusi:*

1. $F(S_X) = S_X$;
2. iga $x \in S_X$ ja iga $\alpha \in (0, 1)$ korral $F(\alpha x) = \alpha F(x)$;
3. iga $x \in S_X$ korral $F(-x) = -F(x)$.

Siis on F isomeetria.

Viimase lause tingimused 2 ja 3 võib võtta kokku ühe tingimusega, mis kõlaks nii, et iga $x \in S_X$ ja iga $\alpha \in [-1, 1]$ korral $F(\alpha x) = \alpha F(x)$. Nagu ilmneb järgmisest tõestusest, viimases lauses toodud nimekirjast võib esimese tingimuse ka ära jätta.

Järeldus 1.5. *Olgu X Banachi ruum ja olgu $F: B_X \rightarrow B_X$ mittelaiendav bijektsioon. Kui $F(\alpha x) = \alpha F(x)$ iga $x \in S_X$ ja iga $\alpha \in [-1, 1]$ korral, siis F on isomeetria.*

Tõestus. Kui näitame, et $F(S_X) \subset S_X$, võime soovitud väite saamiseks rakendada lause 1.4. Veendume, et $F(S_X) \subset S_X$. Olgu $x \in S_X$ suvaline. Tähistame $y = F(x)$. Lause 1.3 punkti 1 ning F injektiivsuse tõttu $y \neq 0$. Vaatleme punkti $y^* = y/\|y\|$. Tähistame $x^* = F^{-1}(y^*)$. Lause 1.3 punktist 3 saame, et $x^* \in S_X$. Käesoleva lause eeldusest saame $F(\|y\|x^*) = \|y\|F(x^*) = \|y\|y^* = y$. Kuna $F(x) = y$ ja $F(\|y\|x^*) = y$, siis F injektiivsuse tõttu saame võrduse $x = \|y\|x^*$. Võttes selle võrduse mõlemast poolest normi, jõuame võrduseni $\|y\| = 1$. \square

Näitame, et viimases järelduses võib tingimuse $F(\alpha x) = \alpha F(x)$ asendada analoogilise tingimusega F^{-1} jaoks. Tulemuseks saame järgmise järelduse, mis oli esimest korda kirjeldatud ja tõestatud V. Kadetsi ja O. Zavarzina poolt artiklis [4]. Järgmist järeldust kasutame kolmandas peatükis ühe tõestuse lõpetamiseks.

Järeldus 1.6 ([4, Lemma 2.9]). *Olgu X Banachi ruum ja olgu $F : B_X \rightarrow B_X$ mittelaiendav bijektsioon. Kui $F^{-1}(\alpha y) = \alpha F^{-1}(y)$ iga $y \in S_X$ ja iga $\alpha \in [-1, 1]$ korral, siis F on isomeetria.*

Tõestus. Analoogiliselt eelmise tõestusega võime näidata, et $F(S_X) \subset S_X$ (tõestuses muutub ainult see, et seal, kus rakendasime F homogeensust, rakendame nüüd sama tulemuseni jõudmiseks hoopiski F^{-1} homogeensust). Olgu nüüd $x \in X$ ja $\alpha \in [-1, 1]$ suvalised. Tähistame $y = F(x)$. Sisalduvuse $F(S_X) \subset S_X$ tõttu saame $y \in S_X$. Käesoleva lause eelduse kohaselt saame seega $F^{-1}(\alpha y) = \alpha F^{-1}(y) = \alpha x$, millest $F(\alpha x) = \alpha y = \alpha F(x)$. Kuna oleme näidanud, et suvalise $x \in X$ ja $\alpha \in [-1, 1]$ korral $F(\alpha x) = \alpha F(x)$, siis võime nüüd lõpetada tõestuse lause 1.4 või järelduse 1.5 rakendamisega. \square

Topoloogilise ruumi \mathcal{T} korral nimetame pidevaks jooneks pidevat kujutust $\xi : [0, 1] \rightarrow \mathcal{T}$. Pideva joone $\xi : [0, 1] \rightarrow \mathcal{T}$ korral tähistagu $\text{Im } \xi$ selle kujutist $\{\xi(\lambda) : \lambda \in [0, 1]\}$. Kui a ja b on ruumi \mathcal{T} punktid ning $\xi : [0, 1] \rightarrow \mathcal{T}$ on tingimusi $\xi(0) = a$ ja $\xi(1) = b$ rahuldav pidev joon, siis ütleme, et joon ξ ühendab punkte a ja b . Pidevaid jooni saab ka kokku panna: kui n on positiivne täisarv ning a_0, \dots, a_n on ruumi \mathcal{T} punktid, kusjuures iga $i \in \{1, \dots, n\}$ korral on antud punkte a_{i-1} ja a_i ühendav pidev joon ξ_i , siis võime loomulikult viisil defineerida ka punkte a_0 ja a_n ühendava pideva joone ξ . Seejuures ütleme, et joon ξ koosneb joontest ξ_1, \dots, ξ_n . Banachi ruumi X ja selle punktide a ja b korral nimetame lõigule $[a, b]$ vastavaks pidevaks jooneks valemiga $\xi(\lambda) = (1 - \lambda)a + \lambda b$ antud pidevat joont. Kasutame pidevaid jooni nii teises kui ka kolmandas peatükis.

Topoloogilise ruumi \mathcal{T} punktidel saame defineerida binaarse seose \sim , kus $a \sim b$ parajasti siis, kui leidub punkte a ja b ühendav pidev joon. Ei ole raske veenduda, et tegemist on ekvivalentsusseosega. Selle ekvivalentsusseose poolt tekitatud klasse nimetame ruumi \mathcal{T} sidusateks komponentideks. Ruumi \mathcal{T} nimetame sidusaks, kui temal on parajasti üks sidus komponent ehk kui ruumi \mathcal{T} iga kahe punkti a ja b korral leidub neid punkte ühendav pidev joon. Ruumi \mathcal{T} alamhulka A nimetame sidusaks, kui ta on sidus ruumi \mathcal{T} alamruumina. Paneme tähele, et ruumi \mathcal{T} alamhulk A on sidus parajasti siis, kui ta sisaldub mõnes ruumi \mathcal{T} sidusas komponendis. Paneme veel tähele, et kui U ja V on topoloogilised ruumid, $f : U \rightarrow V$ on pidev kujutus ning $S \subset U$ on sidus, siis sidus on ka kujutis $f(S) \subset V$. Sidususe ja sidusa komponendi mõisteid kasutame kolmanda peatüki kolmandas osas. Sealsamas läheb meil vaja ka järgmist tulemust.

Lause 1.7. *Kui X on vähemalt kahemõõtmeline Banachi ruum, siis on tema ühiksfäär S_X sidus hulk.*

Tõestus. Olgu $a, b \in S_X$ suvalised. Kui $a \neq -b$, siis lõik $[a, b]$ ei sisalda nulli, mistõttu saame defineerida punkte a ja b ühendava pideva joone $\xi : [0, 1] \rightarrow S_X$ seosega $\xi(\lambda) = \frac{(1-\lambda)a + \lambda b}{\|(1-\lambda)a + \lambda b\|}$. Kui aga $a = -b$, siis arvestades, et ruum X on vähemalt kahemõõtmeline, leidub ühiksfääril S_X element z , mis erineb punktidest a ja b . Sellisel juhul $0 \notin [a, z]$ ja $0 \notin [z, b]$, mistõttu saame defineerida eelnevaga analoogiliselt punkte a ja z ühendava pideva joone $\xi_1 : [0, 1] \rightarrow S_X$ ning punkte z ja b ühendava pideva joone $\xi_2 : [0, 1] \rightarrow S_X$. Need kaks joont kokku pannes saame punkte a ja b ühendava pideva joone $\xi : [0, 1] \rightarrow S_X$. \square

Lõpetuseks anname kiire ülevaate Banachi ruumide ℓ_p -summadest. Olgu I mingi indeksite hulk ja olgu iga $i \in I$ korral antud Banachi ruum X_i . Kui $p \in [1, \infty)$, võime vaadelda vektorruumi $\prod_{i \in I} X_i$ alamruumi

$$\left\{ (x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i : \sum_{i \in I} \|x_i\|^p < \infty \right\}$$

normiga

$$\|(x_i)_{i \in I}\| = \left(\sum_{i \in I} \|x_i\|^p < \infty \right)^{1/p}.$$

Tulemuseks saame Banachi ruumi, mida nimetame ruumide X_i ℓ_p -summaks. (Mittenegatiivsete reaalarvude süsteemi $(a_i)_{i \in I}$ korral loeme summaks $\sum_{i \in I} a_i$ supreemumit $\sup\{\sum_{i \in \mathcal{F}} a_i : \mathcal{F} \subset I \text{ on lõplik}\}$. Kui $\{i \in I : a_i \neq 0\}$ on mitteloenduvalt lõpmatu, on see summa alati ∞ . Lõpliku I korral on see

lihtsalt tavaline summa.) Ruumide X_i ℓ_∞ -summaks nimetame vektorruumi $\prod_{i \in I} X_i$ alamruumi

$$\left\{ (x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i : \sup\{\|x_i\| : i \in I\} < \infty \right\}$$

normiga

$$\|(x_i)_{i \in I}\| = \sup\{\|x_i\| : i \in I\}$$

(lõpliku I korral on see supreemum ka maksimum). Banachi ruumide ℓ_∞ -summa on ise samuti Banachi ruum. Paneme tähele, et lõpliku I korral võrduvad mõlemad vaadeldud alamruumid otsekorrutisega $\prod_{i \in I} X_i$. Vaikimisi arvame ℓ_p -summast rääkides sisse ka juhtu $p = \infty$. Paneme tähele, et Banachi ruumide ℓ_p -summa ei sõltu liidetavate järjekorrast. Kui iga $i \in I$ korral $X_i = \mathbb{R}$, siis tähistame ruumide X_i ℓ_p -summat tähisega $\ell_p(I)$. Kui $I = \mathbb{N}$, kasutame selle jaoks ka tähist ℓ_p . Kui $I = \{1, \dots, n\}$, kasutame selle jaoks ka tähist ℓ_p^n . Lõpliku arvu Banachi ruumide X_1, \dots, X_n ℓ_p -summa tähistamiseks kirjutame $X_1 \oplus_p \dots \oplus_p X_n$. Ühe liidetava puhul võrdub summa selle ainsa liidetavaga. Tühi summa on triviaalne ruum. Kui ruumide X_i seas on triviaalseid, siis nende summast välja jätmine tulemust ei muuda.

2 Ruum $\ell_1 \oplus_p \mathbb{R}$

Selles peatükis tõestame, et iga $p \in (1, \infty)$ korral on ruumi $\ell_1 \oplus_p \mathbb{R}$ ühikera plastiline. Siin esitatud tõestus on tõlge R. Halleri, N. Leo ja O. Zavarzina artiklis „Two new examples of Banach spaces with a plastic unit ball“ esitatud tõestusest [7]. Artiklis piirduakse juhuga $p = 2$, kuid meie üldistame artiklis esitatud tulemuse, lubades parameetril p olla suvaline ühest suurem reaalarv (üldistus on küll üsnagi vahetu). Originaalne tõestus põhineb omakorda jadaruumi ℓ_1 ühikera plastilisuse tõestusel, mis oli esitatud V. Kadetsi ja O. Zavarzina poolt artiklis „Plasticity of the unit ball of ℓ_1 “ [3].

Võib näidata, et kui Banachi ruumidel X ja Y on ekstremaalseid punkte, siis $p \in (1, \infty)$ korral avaldub ruumi $X \oplus_p Y$ ühikera ekstremaalsete punktide hulk kujul

$$\{(ax, by) : a, b \in \mathbb{R}, |a|^p + |b|^p = 1, x \in \text{ext } B_X, y \in \text{ext } B_Y\}.$$

Teoreem 2.1. *Iga $p \in (1, \infty)$ korral on ruumi $\ell_1 \oplus_p \mathbb{R}$ ühikera plastiline.*

Tõestus. Fikseerime $p \in (1, \infty)$. Tähistame ruumi $\ell_1 \oplus_p \mathbb{R}$ tähega Z . Iga $k \in \mathbb{N}$ korral tähistagu e_k jada $(\delta_{k,i})_{i \in \mathbb{N}}$. Tähistagu h ruumi Z projektsiooni komponendile \mathbb{R} ehk kujutust $h : Z \rightarrow \mathbb{R}$, mis paneb igale paarile vastavusse selle paari teise komponendi. Tähistagu L_0 hulka $\{z \in B_Z : h(z) = 0\}$. Kuna ℓ_1 ekstremaalsed punktid on elemendid $\pm e_k$ ning \mathbb{R} ekstremaalsed punktid on ± 1 , siis eelneva põhjal

$$\text{ext } B_Z = \{(ae_m, b) : a, b \in \mathbb{R}, |a|^p + |b|^p = 1, m \in \mathbb{N}\}.$$

Olgu (ae_i, b) ja (ce_j, d) kaks suvalist ekstremaalset punkti. Kui $i = j$, siis kaugus nende kahe punkti vahel on $(|a - c|^p + |b - d|^p)^{1/p}$, mis võrdub kahega parajasti siis, kui $\|(a, b) - (c, d)\| = 2$ ruumis ℓ_p^2 . Kuna aga paarid (a, b) ja (c, d) kuuluvad ruumi ℓ_p^2 ühiksfäärile ning ruum ℓ_p^2 on rangelt kumer, siis järelduse 1.2 kohaselt kehtib võrdus $\|(a, b) - (c, d)\| = 2$ parajasti siis, kui $a = -c$ ja $b = -d$. Analoogiliselt, kui $i \neq j$, siis kaugus punktide (ae_i, b) ja (ce_j, d) vahel on $((|a| + |c|)^p + |b - d|^p)^{1/p}$, mis võrdub kahega parajasti siis, kui $|a| = |c|$ ja $b = -d$.

Niisiis, kaugus punktide (ae_i, b) ja (ce_j, d) vahel võrdub kahega parajasti siis, kui $i = j$, $a = -c$ ja $b = -d$ või $i \neq j$, $|a| = |c|$ ja $b = -d$. Seega, kui u ja v on üksteisest kaugusel kaks olevad ekstremaalsed punktid, siis $h(u) = -h(v)$. Kasutame seda teadmist tõestuse esimeses sammus.

Samm 1. Olgu F mittelaiendav bijektsioon ühikkerast B_Z iseendasse. Peame näitama, et F on isomeetria. Kõigepealt näitame, et iga $m \in \mathbb{N}$ korral $F^{-1}((e_m, 0)) = (\theta e_n, 0)$, kus $\theta \in \{-1, 1\}$ ja $n \in \mathbb{N}$.

Olgu $m \in \mathbb{N}$ suvaline. Valime indeksid i ja j nii, et m, i ja j on paarikaupa erinevad. Paneme tähele, et $x = (e_m, 0)$, $y = (e_i, 0)$ ja $z = (e_j, 0)$ on ekstremaalsed punktid. Lause 1.3 punktist 4 järeldeb, et $x' = F^{-1}(x)$, $y' = F^{-1}(y)$ ja $z' = F^{-1}(z)$ on samuti ekstremaalsed punktid. Paneme tähele, et punktid x, y ja z on kõik üksteisest kaugusel kaks. Kuna F on mittelaiendav, siis sama võib öelda ka x', y' ja z' kohta. Kuna x', y' ja z' on üksteisest kaugusel kaks olevad ekstremaalsed punktid, siis $h(x') = -h(y')$, $h(y') = -h(z')$ ja $h(z') = -h(x')$, millest aga järeldeb, et $h(x') = 0$. Kuna x' on ekstremaalne punkt, siis sellel on kuju (ae_n, b) , kus $a, b \in \mathbb{R}$, $|a|^p + |b|^p = 1$ ja $n \in \mathbb{N}$. Kuna aga $h(x') = 0$, siis $b = 0$ ja $a \in \{-1, 1\}$, mis lõpetab tõestuse.

Toome sisse tähistused $\sigma(m) = n$ ja $\theta(m) = a$. Kordame selle kõigi võimalike m väärtuste jaoks. Tulemuseks saame funktsioonid $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ja $\theta : \mathbb{N} \rightarrow \{-1, 1\}$. Toome sisse ka tähistuse $g_m = \theta(m)e_{\sigma(m)}$. Võime nüüd öelda, et iga $m \in \mathbb{N}$ korral $F^{-1}((e_m, 0)) = (g_m, 0)$. Lause 1.3 punktist 4 järeldeb, et iga $m \in \mathbb{N}$ ja $a \in [-1, 1]$ korral $F^{-1}((ae_m, 0)) = (ag_m, 0)$. Viimast võib väljendada ka kujul $F((ag_m, 0)) = (ae_m, 0)$.

Oleme jõudnud funktsioonini $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Veendume, et funktsioon σ on injektiivne. Olgu i ja j kaks indeksit, mille puhul $\sigma(i) = \sigma(j)$. Olgu n indeksite $\sigma(i)$ ja $\sigma(j)$ ühine väärtus. Siis $F^{-1}((e_i, 0)) = (\theta_i e_n, 0)$ ja $F^{-1}((e_j, 0)) = (\theta_j e_n, 0)$, kus $\theta_i, \theta_j \in \{-1, 1\}$. Oletame, et $\theta_j = -\theta_i$. Siis lause 1.3 punktist 4 järeldeb, et $F^{-1}((-e_i, 0)) = (\theta_j e_n, 0)$, kuid viimasest järeldeb omakorda $(-e_i, 0) = (e_j, 0)$, mis on aga võimatu. Seega $\theta_i = \theta_j$ ja $F^{-1}((e_i, 0)) = F^{-1}((e_j, 0))$, millest $(e_i, 0) = (e_j, 0)$. Viimasest võrdusest järeldeb aga võrdus $i = j$. Niisiis, σ on tõepoolest injektiivne. Seda teadmist kasutame järgnevas arutelus, küll aga varjatud kujul. Pangem aga tähele, et me ei tea veel, kas σ on ka surjektsioon.

Samm 2. Kasutades teadmist, et iga $m \in \mathbb{N}$ ja iga $a \in [-1, 1]$ korral $F((ag_m, 0)) = (ae_m, 0)$, võime nüüd korrata ruumi ℓ_1 ühikkera plastilisuse tõestuses [3] sisalduva induktsioonil põhineva mõttekäigu, näitamaks et iga $N \in \mathbb{N}$ ja tingimust $\sum_{n=1}^N |a_n| \leq 1$ rahuldavate reaalarvude a_1, \dots, a_N korral kehtib

$$F \left(\left(\sum_{n=1}^N a_n g_n, 0 \right) \right) = \left(\sum_{n=1}^N a_n e_n, 0 \right).$$

Tõestus põhineb induktsioonil N järgi. Me jätame selle arutluskäigu vahele, kuna see kordab artiklis [3] esitatut peaaegu sõna-sõnalt.

Samm 3. Eelmise sammu väitest järeldub kujutuse F pidevuse tõttu, et iga tingimust $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \leq 1$ rahuldava reaalarvude jada $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ korral kehtib

$$F \left(\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n g_n, 0 \right) \right) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n, 0 \right).$$

Viimast võib väljendada ka kujul

$$F^{-1} \left(\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n, 0 \right) \right) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n g_n, 0 \right),$$

millest järeldub aga sisalduvus $F^{-1}(L_0) \subset L_0$, kus vastavalt juba varasemalt sisse toodud tähistusele $L_0 = \{z \in B_Z : h(z) = 0\}$.

Samm 4. Oleme veendunud, et $F^{-1}(L_0) \subset L_0$. Näitame nüüd, et kehtib ka võrdus $F^{-1}(L_0) = L_0$. Kasutame vastuväitelist tõestust. Oletame vastuväiteliselt, et $F^{-1}(L_0) \neq L_0$. Siis peab leiduma $z \in L_0 \setminus F^{-1}(L_0)$. Tähistagu s punkti $F^{-1}((0, 1))$. Lause 1.3 punktist 4 saame järeldada, et $F^{-1}((0, -1)) = -F^{-1}((0, 1)) = -s$. Seega $F(s) = (0, 1)$ ja $F(-s) = (0, -1)$. Vaatleme kahte juhtumit.

Juht 1. Oletame, et $s \notin L_0$. Koosnegu pidev joon $\xi : [0, 1] \rightarrow B_Z$ lõikudele $[s, z]$ ja $[z, -s]$ vastavatest pidevatest joontest. Paneme tähele, et $\text{Im } \xi \cap L_0 = \{z\}$. Sisalduvuse $F^{-1}(L_0) \subset L_0$ tõttu saame seega $\text{Im } \xi \cap F^{-1}(L_0) \subset \{z\}$. Kuna aga eelduse kohaselt $z \notin F^{-1}(L_0)$, siis $\text{Im } \xi \cap F^{-1}(L_0) = \emptyset$. Kuna F on pidev, siis on $\xi' = F \circ \xi$ pidev joon keras B_Z . Kuna $\text{Im } \xi \cap F^{-1}(L_0) = \emptyset$, siis peab tühi olema ka $\text{Im } \xi' \cap L_0$. Kuivõrd h on pidev funktsionaal, siis $f = h \circ \xi'$ on pidev kujutus lõigust $[0, 1]$ reaalarvude hulka \mathbb{R} . Pangem aga tähele, et $f(0) = 1$ ja $f(1) = -1$. Funktsiooni f pidevuse tõttu peab seega leiduma selline $t \in (0, 1)$, et $f(t) = 0$. Niisiis $h(\xi'(t)) = 0$ ehk $\xi'(t) \in L_0$. Siit aga järeldub, et $\text{Im } \xi' \cap L_0 \neq \emptyset$, mis on aga vastuolu.

Juht 2. Oletame nüüd, et $s \in L_0$. Arutluskäik jääb peaaegu samaks, ainult et me vaatleme nüüd joont, mis koosneb hoopiski lõikudele $[s, (0, 1)]$ ja $[(0, 1), -s]$ vastavatest joontest. Näeme, et $\text{Im } \xi \cap L_0 = \{s, -s\}$. Sisalduvuse $F^{-1}(L_0) \subset L_0$ tõttu saame seega $\text{Im } \xi \cap F^{-1}(L_0) \subset \{s, -s\}$. Kuna aga $F(s) = (0, 1)$ ja $F(-s) = (0, -1)$, siis $s, -s \notin F^{-1}(L_0)$ ja seega $\text{Im } \xi \cap F^{-1}(L_0) = \emptyset$. Kuna $\text{Im } \xi$ ühisosa hulgaga $F^{-1}(L_0)$ on tühi, siis on tühi ka $\text{Im } \xi' \cap L_0$. Teiselt poolt $f(0) = 1$ ja $f(1) = -1$, seega f pidevuse tõttu saame, et leidub $t \in (0, 1)$ nii, et $f(t) = 0$. Siit aga järeldub, et $\text{Im } \xi' \cap L_0 \neq \emptyset$, mis on aga vastuolu.

Niisiis $F^{-1}(L_0) = L_0$. Pangem tähele, et sammus 3 saadud seose tõttu järeldub võrdusest $F^{-1}(L_0) = L_0$, et varasemalt saadud kujutus σ peab olema

sürjektiivne. Järelikult on σ bijektsioon. Ekstremaalsete punktide hulga võime nüüd seega anda ka kirjelduse

$$\text{ext } B_Z = \{(ag_n, b) : a, b \in \mathbb{R}, |a|^p + |b|^p = 1, n \in \mathbb{N}\}.$$

Samm 5. Näitame, et $F((0, 1)) = (0, 1)$ või $F((0, 1)) = (0, -1)$. Lause 1.3 punktist 4 saame järeldada, et $F^{-1}((0, 1)) \in \text{ext } B_Z$. Niisiis $F^{-1}((0, 1)) = (ag_n, b)$, kus $a, b \in \mathbb{R}$, $|a|^p + |b|^p = 1$ ja $n \in \mathbb{N}$. Võtame vaatluse alla punktid (ag_n, b) ja $(ag_n, 0)$. Nende punktide vahel on kaugus $|b|$. Me teame, et $F((ag_n, b)) = (0, 1)$ ja $F((ag_n, 0)) = (ae_n, 0)$. Kaugus nende punktide vahel on $(1 + |a|^p)^{1/p}$. Kuna F on mittelaiendav, siis peab kehtima $(1 + |a|^p)^{1/p} \leq |b|$, millest saame $1 + |a|^p \leq |b|^p$. Arvestades seost $|a|^p + |b|^p = 1$, jõuame võrdusteni $a = 0$ ja $b \in \{-1, 1\}$. Seega, $F((0, 1)) = (0, \gamma)$, kus $\gamma \in \{-1, 1\}$, mida me aga tahtsimegi näidata. Lause 1.3 punktist 4 järeldub, et iga $b \in [-1, 1]$ korral $F((0, b)) = (0, \gamma b)$.

Samm 6. Seosega

$$\mathcal{L}_0 \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n g_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$$

defineeritud operaator $\mathcal{L}_0: \ell_1 \rightarrow \ell_1$ on ruumi ℓ_1 isomeetiline isomorfism. Seosega $\mathcal{L}((x, y)) = (\mathcal{L}_0(x), \gamma y)$ defineeritud operaator $\mathcal{L}: Z \rightarrow Z$ on aga seega ruumi Z isomeetiline isomorfism. Selle pöördoperaator on defineeritud võrdusega $\mathcal{L}^{-1}((x, y)) = (\mathcal{L}_0^{-1}(x), \gamma y)$. Paneme tähele, et eelnevatest sammudest järeldub, et F ja \mathcal{L} ühtivad hulgal L_0 . Seame oma eesmärgiks näidata, et F on operaatori \mathcal{L} ahend kerale B_Z . See tõestaks ilmselgelt ka selle, et F on isomeetria. Alustuseks näitame, et $F|_{S_Z} = \mathcal{L}|_{S_Z}$.

Võrdus $F|_{S_Z} = \mathcal{L}|_{S_Z}$ on ilmselt samaväärne võrdusega $F^{-1}|_{S_Z} = \mathcal{L}^{-1}|_{S_Z}$. Olgu $z \in S_Z$ suvaline. Näitame, et $F^{-1}(z) = \mathcal{L}^{-1}(z)$. Kuna $z \in S_Z$, siis $z = (ay, b)$, kus $a, b \in \mathbb{R}$, $|a|^p + |b|^p = 1$ ja $y \in S_{\ell_1}$. (Määrame $b = h(z)$ ja $a = (1 - |b|^p)^{1/p}$. Kui $a = 0$, siis olgu $y \in S_{\ell_1}$ suvaline. Vastasel juhul olgu $y = z_1/a$, kus z_1 on z esimene komponent.) Kuna $\mathcal{L}^{-1}((ay, b)) = (\mathcal{L}_0^{-1}(ay), \gamma b)$, siis meie eesmärgiks on näidata, et $F^{-1}((ay, b)) = (\mathcal{L}_0^{-1}(ay), \gamma b)$. Kuna $(ay, b) \in S_Z$, siis lause 1.3 punkti 3 tõttu $F^{-1}((ay, b)) \in S_Z$, mistõttu viimane on kujul (cx, d) , kus $c, d \in \mathbb{R}$, $|c|^p + |d|^p = 1$ ja $x \in S_{\ell_1}$.

Vaatleme punkte (cx, d) ja $(0, 1)$ ning nende kujutisi $F((cx, d)) = (ax, b)$ ja $F((0, 1)) = (0, \gamma)$. Kuna F on mittelaiendav, peab kehtima

$$(|a|^p + |\gamma - b|^p)^{1/p} \leq (|c|^p + |1 - d|^p)^{1/p},$$

mis on seoseid $|a|^p + |b|^p = 1$ ja $|c|^p + |d|^p = 1$ arvestades teisendatav kujule

$$|\gamma - b|^p - |b|^p \leq |1 - d|^p - |d|^p.$$

Seosega $f(t) = |1 - t|^p - |t|^p$ defineeritud funktsioon $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on $p \in (1, \infty)$ korral rangelt kahanev (võib veenduda, et tuletis eksisteerib ja on kõikjal negatiivne). Kuna viimasele võrratusele võib anda kuju $f(\gamma b) \leq f(d)$, siis f range kahanevuse tõttu võime järeldada, et $d \leq \gamma b$.

Vaatleme nüüd punkte (cx, d) ja $(0, -1)$ ning nende kujutisi $F((cx, d)) = (ax, b)$ ja $F((0, -1)) = (0, -\gamma)$. Kuna F on mittelaiendav, peab kehtima

$$(|a|^p + |\gamma + b|^p)^{1/p} \leq (|c|^p + |1 + d|^p)^{1/p},$$

mis on seoseid $|a|^p + |b|^p = 1$ ja $|c|^p + |d|^p = 1$ arvestades teisendatav kujule

$$|\gamma + b|^p - |b|^p \leq |1 + d|^p - |d|^p.$$

Seosega $f(t) = |1 + t|^p - |t|^p$ defineeritud funktsioon $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on $p \in (1, \infty)$ korral rangelt kasvav (võib veenduda, et tuletis eksisteerib ja on kõikjal positiivne). Kuna viimasele võrratusele võib anda kuju $f(\gamma b) \leq f(d)$, siis f range kasvavuse tõttu võime järeldada, et $\gamma b \leq d$.

Kokkuvõttes seega $d = \gamma b$.

Vaatleme nüüd aga punkte $(cx, \gamma b)$ ja $(cx, 0)$ ning nende kujutisi $F((cx, \gamma b)) = (ay, b)$ ning $F((cx, 0)) = (\mathcal{L}_0(cx), 0)$. Kuna F on mittelaiendav, peab kehtima

$$(\|ay - \mathcal{L}_0(cx)\|^p + |b|^p)^{1/p} \leq |b|,$$

millest aga järeldub, et $\mathcal{L}_0(cx) = ay$ ehk $\mathcal{L}_0^{-1}(ay) = cx$. Kuna $F^{-1}((ay, b)) = (cx, d)$ ning $cx = \mathcal{L}_0^{-1}(ay)$ ja $d = \gamma b$, siis $F^{-1}((ay, b)) = (\mathcal{L}_0^{-1}(ay), \gamma b)$, mida oligi aga vaja näidata.

Samm 7. Oleme näidanud, et F^{-1} ja \mathcal{L}^{-1} ühtivad hulgal S_Z , millest järeldub, et hulgal S_Z ühtivad ka F ja \mathcal{L} . Näitame nüüd, et $F(z)$ ja $\mathcal{L}(z)$ langevad kokku ka suvalise $z \in B_Z$ korral.

Olgu $z \in B_Z$ suvaline. Siis esitub z kujul (ax, b) , kus $a, b \in \mathbb{R}$, $|a|^p + |b|^p = 1$ ja $x \in B_{\ell_1}$ (Määrame $b = h(z)$ ja $a = (1 - |b|^p)^{1/p}$. Kui $a = 0$, siis olgu $x \in B_{\ell_1}$ suvaline. Vastasel juhul olgu $x = z_1/a$, kus z_1 on z esimene komponent.)

Tahame näidata, et $F(z) = \mathcal{L}(z)$. Kuna $x = 0$ korral on see võrdus ilmne sammust 5, siis eeldame edaspidi, et $x \neq 0$. Vaatleme alustuseks punkte $(a \frac{x}{\|x\|}, b)$, (ax, b) ja $(0, b)$. Esimese ja teise vahel on kaugus $|a|(1 - \|x\|)$, teise ja kolmanda vahel on kaugus $|a|\|x\|$. Sammu 5 kohaselt saame $F((0, b)) = (0, \gamma b)$ ja samm 6 kohaselt saame $F((a \frac{x}{\|x\|}, b)) = (\mathcal{L}_0(a \frac{x}{\|x\|}), \gamma b)$. Kuna F on mittelaiendav, siis

$$\left\| \left(\mathcal{L}_0 \left(a \frac{x}{\|x\|} \right), \gamma b \right) - F((ax, b)) \right\| \leq |a|(1 - \|x\|)$$

ja

$$\|F((ax, b)) - (0, \gamma b)\| \leq |a|\|x\|.$$

Kuna aga punktide $(\mathcal{L}_0(a \frac{x}{\|x\|}), \gamma b)$ ja $(0, \gamma b)$ vaheline kaugus on $|a|$, siis viimased kaks võrratust peavad kehtima võrdustena, sest vastasel juhul saame vastuolu kolmnurga võrratusega. Olgu $(\sum_{n=1}^{\infty} y_n e_n, d)$ elemendi $F((ax, b))$ arendus ja olgu $(\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{y}_n e_n, \gamma b)$ elemendi $(\mathcal{L}_0(a \frac{x}{\|x\|}), \gamma b)$ arendus. Nüüd

$$\begin{aligned} |a| &= \left\| \mathcal{L}_0 \left(a \frac{x}{\|x\|} \right) \right\| = \sum_{n=1}^{\infty} |\tilde{y}_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\tilde{y}_n - y_n| + \sum_{n=1}^{\infty} |y_n| \leq \\ &\left(\left(\sum_{n=1}^{\infty} |\tilde{y}_n - y_n| \right)^p + |\gamma b - d|^p \right)^{1/p} + \left(\left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n| \right)^p + |\gamma b - d|^p \right)^{1/p} = \\ &\left\| \left(\mathcal{L}_0 \left(a \frac{x}{\|x\|} \right), \gamma b \right) - F((ax, b)) \right\| + \|F((ax, b)) - (0, \gamma b)\| = \\ &|a|(1 - \|x\|) + |a|\|x\| = |a|, \end{aligned}$$

seega kõik viimases ahelas sisalduvad võrratused kehtivad tegelikult võrdustena, millest aga saame võrduse $\gamma b = d$.

Lõpuks, võtame vaatluse alla punktid (ax, b) ja $(ax, 0)$ ning nende kujutised $F((ax, b)) = (\sum_{n=1}^{\infty} y_n e_n, \gamma b)$ ja $F((ax, 0)) = (\mathcal{L}_0(ax), 0)$. Kuna F on mittelaiendav, siis saame võrratuse

$$\left(\left\| \sum_{n=1}^{\infty} y_n e_n - \mathcal{L}_0(ax) \right\|^p + |b|^p \right)^{1/p} \leq |b|,$$

millest $\sum_{n=1}^{\infty} y_n e_n = \mathcal{L}_0(ax)$. Niisiis $F((ax, b)) = (\mathcal{L}_0(ax), \gamma b)$, mida vaja oligi. \square

3 Rangelt kumerate ruumide summad

Selles peatükis anname ülevaate rangelt kumerate Banachi ruumide lõplike ℓ_∞ -summade ühikkerade plastilisusega seonduvatest tulemustest. Esimese sammu selles suunas tegi käesoleva magistritöö autor ise, tõestades kahe rangelt kumera Banachi ruumi ℓ_∞ -summa ühikera plastilisuse. Tõestus sai avaldatud aastal 2022 ilmunud artiklis „Two new examples of Banach spaces with a plastic unit ball“ [7]. Oma aastal 2023 kaitstud balaureusetöös üldistas aga K. A. Kurik ühe olulise osa sellest tõestusest suvalise lõpliku arvu liidetavate juhule [9]. See üldistus võimaldas originaalse tõestuse ülejäänud osa jäljendades näidata, et suvalise lõpliku arvu rangelt kumerate Banachi ruumide ℓ_∞ -summal X on omadus, et mittelaiendav bijektsioon $F : B_X \rightarrow B_X$ on isomeetria, kui F rahuldab kas tingimust $F(S_X) \subset S_X$ või tingimust $F(\text{ext } B_X) \subset \text{ext } B_X$.

Alustuseks esitame K. A. Kuriku tõestatud üldistuse käesoleva magistritöö autori originaalse tõestuse ühest osast. Selle järel näitame, kuidas see üldistus võimaldab tõestada, et suvalise lõpliku arvu liidetavate korral on mittelaiendava bijektsiooni F isomeetrisus tagatud lisaeldusega $F(S_X) \subset S_X$ või lisaeldusega $F(\text{ext } B_X) \subset \text{ext } B_X$. Lõpetuseks esitame kahe liidetavaga summat käsitleva tõestuse algusosa, kus näidatakse lisaelduse $F(\text{ext } B_X) \subset \text{ext } B_X$ täidetust kahe liidetava juhu korral. Sellega tõestame ühikera plastilisuse kahe rangelt kumera Banachi ruumi ℓ_∞ -summa jaoks.

Juhime tähelepanu sellele, et rangelt kumerate Banachi ruumide ja nende ℓ_1 -summade ühikkerade plastilisus on töödes [1] ja [4] kindlaks tehtud, kusjuures $p \in (1, \infty)$ korral on rangelt kumerate Banachi ruumide ℓ_p -summa ka ise rangelt kumer. See jätab aga lahtiseks vaid juhu $p = \infty$, mis õigustab ka selles peatükis käsitletava ruumide klassi valikut.

3.1 Põhilemma

Seame enda eesmärgiks tõestada järgmine teoreem, mis on K. A. Kuriku bakalaureusetöö põhitulemuseks [9].

Teoreem 3.1 ([9, Theorem 1]). *Olgu n positiivne täisarv ning tähistagu $[n]$ hulka $\{1, \dots, n\}$. Olgu X_1, \dots, X_n mittetriviaalsed rangelt kumerad Banacchi ruumid ning tähistagu X nende ruumide ℓ_∞ -summat, π_1, \dots, π_n vastavaid projektsioone ja S_1, \dots, S_n ruumide X_1, \dots, X_n ühiksfääre. Olgu kujutus $G : B_X \rightarrow B_X$ mitteahendav. Siis leidub bijektsioon $\sigma : [n] \rightarrow [n]$ ja mitteahendavad kujutused g_1, \dots, g_n , kus iga $i \in [n]$ korral $g_i : S_i \rightarrow S_{\sigma(i)}$ ning iga $x \in B_X$ ja iga $i \in [n]$ korral $\pi_{\sigma(i)}G(x) = g_i(\pi_i x)$, kui $\pi_i x \in S_i$.*

Teoreem 3.1 järeldub järgmisest üldisemast teoreemist.

Teoreem 3.2. *Olgu n positiivne täisarv ning tähistagu $[n]$ hulka $\{1, \dots, n\}$. Olgu B_1, \dots, B_n mingid hulgad. Tähistagu B nende otsekorrutist ja π_1, \dots, π_n vastavaid projektsioone. Iga $i \in [n]$ korral olgu hulgal B_i antud binaarne seos \sim_i , mis rahuldab järgmisi tingimusi:*

- iga $x \in B_i$ jaoks $x \not\sim_i x$;
- kui $x, y \in B_i$ ning $x \sim_i y$, siis ka $y \sim_i x$;
- kui $x, y, z \in B_i$ ning $x \sim_i y$ ja $y \sim_i z$, siis $x = z$.

Vaatleme hulgal B binaarset seost \sim , mis on ette antud samaväärsusega $x \sim y \iff \exists i \in [n] \pi_i x \sim_i \pi_i y$. Tähistagu iga $i \in [n]$ korral S_i hulka $\{x \in B_i : \exists y \in B_i x \sim_i y\}$. Eeldame, et iga $i \in [n]$ korral $|B_i| \geq 3$ ja $S_i \neq \emptyset$. Olgu kujutus $G : B \rightarrow B$ injektiivne ja seost \sim säilitav (teise all mõtleme seda, et kui $x, y \in B$ ja $x \sim y$, siis ka $G(x) \sim G(y)$). Siis leidub bijektsioon $\sigma : [n] \rightarrow [n]$ ja kujutused g_1, \dots, g_n , kus iga $i \in [n]$ korral $g_i : S_i \rightarrow S_{\sigma(i)}$ ning iga $x \in B$ ja iga $i \in [n]$ korral $\pi_{\sigma(i)}G(x) = g_i(\pi_i x)$, kui $\pi_i x \in S_i$.

Näitame, et teoreem 3.1 järeldub tõepoolest teoreemist 3.2.

Teoreemi 3.1 tõestus. Tähistagu B_1, \dots, B_n ruumide X_1, \dots, X_n ühikkerasid. Paneme tähele, et ruumi X ühikkerade B_X on ühikkerade B_1, \dots, B_n otsekorrutis. Iga $i \in [n]$ korral vaatleme hulgal B_i seost \sim_i , mis on ette antud samaväärsusega $x \sim_i y \iff \|x - y\| = 2$. Ilmselt rahuldab see seos kahte esimest teoreemi 3.2 sõnastuses toodud tingimust. Kui $x, y, z \in B_i$ ning $x \sim_i y$ ja $y \sim_i z$, siis ruumi X_i range kumeruse tõttu järeldub järeldusest 1.2, et

$x = -y$ ja $y = -z$, millest saame võrduse $x = z$. Seega rahuldab see seos ka kolmandat tingimust. Paneme tähele, et iga $i \in [n]$ korral ühtib hulk $\{x \in B_i : \exists y \in B_i x \sim_i y\}$ ruumi X_i ühiksfääriga S_i . Kuna eelduse kohaselt on ruum X_i mittetriviaalne, siis tingimused $|B_i| \geq 3$ ja $S_i \neq \emptyset$ on täidetud. Tähistagu \sim hulgal B_X antud seost, mis on defineeritud nagu teoreemi 3.2 sõnastuses. Paneme tähele, et $x, y \in B_X$ korral $x \sim y$ parajasti siis, kui $\|x - y\| = 2$. Kuna funktsioon G on mitteahendav, siis ta on ilmselt ka injektiivne ja seost \sim säilitav. Teoreemist 3.2 jäeldub nüüd, et leidub bijektsioon $\sigma : [n] \rightarrow [n]$ ja kujutused g_1, \dots, g_n , kus iga $i \in [n]$ korral $g_i : S_i \rightarrow S_{\sigma(i)}$ ning iga $x \in B_X$ ja iga $i \in [n]$ korral $\pi_{\sigma(i)}G(x) = g_i(\pi_i x)$, kui $\pi_i x \in S_i$. On jäänud näidata, et kujutused g_1, \dots, g_n on mitteahendavad. Olgu $i \in [n]$ suvaline ning olgu $x_i, y_i \in S_i$. Iga $j \in [n] \setminus \{i\}$ korral valime $s_j \in S_j$ (võimalik, sest X_j on mittetriviaalne). Vaatleme nüüd punkte $x, y \in B_X$, kus $\pi_i x = x_i$, $\pi_i y = y_i$ ning iga $j \in [n] \setminus \{i\}$ korral $\pi_j x = \pi_j y = s_j$. Näeme, et $\|x - y\| = \|x_i - y_i\|$ ning $\|G(x) - G(y)\| = \|g_i(x_i) - g_i(y_i)\|$. Kuna G on eelduse kohaselt mitteahendav, siis $\|G(x) - G(y)\| \geq \|x - y\|$, millest $\|g_i(x_i) - g_i(y_i)\| \geq \|x_i - y_i\|$. Seega on funktsioon g_i mitteahendav. \square

Seame nüüd enda eesmärgiks seega tõestada teoreem 3.2. Tõestame esmalt mõned abilemmad. Kasutame teoreemi sõnastuses sisse toodud tähistusi. Iga $k \in [n]$ korral tähistagu \widehat{B}_k korrutist $\prod_{i \in [n] \setminus \{k\}} B_i$. Tähistagu $\widehat{\pi}_k$ loomulikku projektsiooni hulgal B hulga \widehat{B}_k peale. Defineerime hulgal \widehat{B}_k seose \sim analoogiliselt sellega, kuidas defineerisime seose \sim hulgal B . Paneme tähele, et seoste \sim_i irrefleksiivsuse ja sümmeetrilisuse tõttu on irrefleksiivne ja sümmeetriiline ka hulka B ja \widehat{B}_k defineeritud seos \sim . Seoste \sim ja \sim_i sümmeetrilisust kasutame järgnevas sellele viitamata. Tuletame meelde, et seosel \sim_i on omadus, et kui $x, y, z \in B_i$ ning $x \sim_i y$ ja $y \sim_i z$, siis $x = z$. Viitame sellele edaspidi kui seose \sim_i kolmandale omadusele. Mugavuse huvides tähistame seost \sim_i edaspidi märgiga \sim .

Lemma 3.3. *Olgu hulk $H \subset B$ selline, et $|H| = 2^n - 1$ ja $a \sim b$ erinevate $a, b \in H$ korral. Kui $p, q \in B$ on sellised, et iga $x \in H$ korral $p \sim x$ ja $q \sim x$, siis $p = q$.*

Tõestus. Juhime tähelepanu, et lemmast jäeldub, et kui $H \subset B$ on selline, et $a \sim b$ erinevate $a, b \in H$ korral, siis $|H| \leq 2^n$. Lemma enda väide on aga ilmselt sellest tugevam.

Tõestame väite induktsiooniga n järgi. Kui $n = 1$, siis koosneb H ühest elemendist x . Tingimustest $p \sim x$ ja $q \sim x$ jäelduvad $\pi_1 p \sim \pi_1 x$ ja $\pi_1 q \sim \pi_1 x$. Tänu seose \sim kolmandale omadusele jäeldub tingimustest $\pi_1 p \sim \pi_1 x$ ja $\pi_1 q \sim \pi_1 x$ võrdus $\pi_1 p = \pi_1 q$ ehk $p = q$.

Olgu nüüd n ühest suurem. Eeldame, et väide kehtib $n - 1$ korral. Tähistagu P hulka $H \cup \{p\}$. Kuna iga $x \in H$ korral $p \sim x$, siis irrefleksiivsuse tõttu $p \notin H$. Seega $|P| = 2^n$. Paneme tähele, et $a \sim b$ erinevate $a, b \in P$ korral.

Olgu $i \in [n]$ suvaline. Vaatleme kogumit

$$K = \{E \subset P : \pi_i e \not\sim \pi_i e', \text{ kui } e, e' \in E\}.$$

Veendume, et kogumi K iga elemendi E korral $|E| \leq 2^{n-1}$. Kui $e, e' \in E$ on erinevad, siis $e \sim e'$ ja $\pi_i e \not\sim \pi_i e'$, millest aga järeldub, et vähemalt ühe $j \in [n] \setminus \{i\}$ korral peab kehtima $\pi_j e \sim \pi_j e'$. See aga tähendab, et erinevate $e, e' \in E$ korral $\hat{\pi}_i e \sim \hat{\pi}_i e'$. Seega erinevate $e, e' \in \hat{\pi}_i E$ korral $e \sim e'$, kusjuures irrefleksiivsuse tõttu $|\hat{\pi}_i E| = |E|$. Induktsiooni eelduse tõttu saame $|\hat{\pi}_i E| \leq 2^{n-1}$ ehk $|E| \leq 2^{n-1}$.

Näitame, et kui \mathcal{A} on kogumi K sisalduvusseose suhtes maksimaalne element, siis $P \setminus \mathcal{A}$ on seda samuti ning $|\mathcal{A}| = |P \setminus \mathcal{A}| = 2^{n-1}$. Olgu \mathcal{A} kogumi K suvaline sisalduvusseose suhtes maksimaalne element. Tähistagu \mathcal{B} hulka $P \setminus \mathcal{A}$. Kui mõne $b \in \mathcal{B}$ korral oleks nii, et $\pi_i b \not\sim \pi_i a$ iga $a \in \mathcal{A}$ korral, siis saaksime $\mathcal{A} \cup \{b\} \in K$, mis oleks aga vastuolus \mathcal{A} maksimaalsusega. Seega peab iga $b \in \mathcal{B}$ korral leiduma selline $a \in \mathcal{A}$, et $\pi_i b \sim \pi_i a$. Olgu nüüd b ja b' kaks suvalist hulga \mathcal{B} elementi ning olgu a ja a' sellised hulga \mathcal{A} elemendid, et $\pi_i b \sim \pi_i a$ ja $\pi_i b' \sim \pi_i a'$. Oletame, et $\pi_i b \sim \pi_i b'$. Tänu seose \sim kolmandale omadusele saame siis, et $\pi_i a \sim \pi_i b'$ ja $\pi_i a' \sim \pi_i b$. Nendest kahest võrdusest ja seosest $\pi_i b \sim \pi_i b'$ järeldub aga seos $\pi_i a \sim \pi_i a'$, mis satub vastuollu tingimusega $\mathcal{A} \in K$. Niisiis suvaliste $b, b' \in \mathcal{B}$ korral $\pi_i b \not\sim \pi_i b'$. Seega $\mathcal{B} \in K$. Kuna $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in K$, siis eelneva põhjal $|\mathcal{A}|, |\mathcal{B}| \leq 2^{n-1}$. Kuna $|\mathcal{A}| + |\mathcal{B}| = 2^n$ ning $|\mathcal{A}|, |\mathcal{B}| \leq 2^{n-1}$, siis peab kehtima $|\mathcal{A}| = |\mathcal{B}| = 2^{n-1}$. Kuna kogumi K iga elemendi E korral $|E| \leq 2^{n-1}$ ning $|\mathcal{B}| = 2^{n-1}$, siis \mathcal{B} on ilmselt ka kogumi K maksimaalne element.

Kuna $\{p\} \in K$ ning K on lõplik, siis leidub $\mathcal{A} \in K$ nii, et $\{p\} \subset \mathcal{A}$ ning \mathcal{A} on kogumi K maksimaalne element. Tähistagu \mathcal{B} hulka $P \setminus \mathcal{A}$. Siis eelneva põhjal on \mathcal{B} samuti kogumi K maksimaalne element ning $|\mathcal{A}| = |\mathcal{B}| = 2^{n-1}$.

Võtame nüüd lõpuks vaatluse alla ka elemendi q . Oletame, et iga $b \in \mathcal{B}$ korral $\pi_i q \not\sim \pi_i b$. Vaatleme hulka $\mathcal{B}^* = \mathcal{B} \cup \{q\}$. Paneme tähele, et kuna $q \sim b$ iga $b \in \mathcal{B}$ korral, siis seose \sim irrefleksiivsuse tõttu $q \notin \mathcal{B}$ ja järelikult $|\mathcal{B}^*| = 2^{n-1} + 1$. Kui $b, b' \in \mathcal{B}^*$ on erinevad, siis $b \sim b'$ ja $\pi_i b \not\sim \pi_i b'$. Sellest aga järeldub, et erinevate $b, b' \in \mathcal{B}^*$ korral $\hat{\pi}_i b \sim \hat{\pi}_i b'$. Seega erinevate $b, b' \in \hat{\pi}_i \mathcal{B}^*$ korral $b \sim b'$, kusjuures irrefleksiivsuse tõttu $|\hat{\pi}_i \mathcal{B}^*| = |\mathcal{B}^*|$ ehk $|\hat{\pi}_i \mathcal{B}^*| = 2^{n-1} + 1$. Induktsiooni eelduse kohaselt aga $|\hat{\pi}_i \mathcal{B}^*| \leq 2^{n-1}$, mis läheb eelnevaga vastuolu. Seega oli meie oletus väär ja peab leiduma $b_0 \in \mathcal{B}$ nii, et $\pi_i q \sim \pi_i b_0$.

Kui oleks nii, et $\pi_i b_0 \not\sim \pi_i a$ iga $a \in \mathcal{A}$ korral, siis saaksime $\mathcal{A} \cup \{b_0\} \in K$, mis oleks aga vastuolus \mathcal{A} maksimaalsusega. Seega peab leiduma selline $a_0 \in \mathcal{A}$, et $\pi_i b_0 \sim \pi_i a_0$. Tänu seose \sim kolmandale omadusele saame tingimustest $\pi_i q \sim \pi_i b_0$ ja $\pi_i b_0 \sim \pi_i a_0$ võrduse $\pi_i q = \pi_i a_0$. Kuna aga $\pi_i q = \pi_i a_0$ ja $\pi_i a_0 \not\sim \pi_i a$ iga $a \in \mathcal{A}$ korral, siis iga $a \in \mathcal{A}$ korral $\pi_i q \not\sim \pi_i a$. Vaatleme nüüd hulka $\mathcal{A}^* = \mathcal{A} \setminus \{p\}$ ja selle projektsiooni $\hat{\pi}_i \mathcal{A}^*$. Eelnevaga analoogiliselt näeme, et $|\hat{\pi}_i \mathcal{A}^*| = 2^{n-1} - 1$ ning $a \sim a'$, kui $a, a' \in \hat{\pi}_i \mathcal{A}^*$ on erinevad. Näeme samuti, et iga $x \in \mathcal{A}^*$ korral $\hat{\pi}_i p \sim \hat{\pi}_i x$ ja $\hat{\pi}_i q \sim \hat{\pi}_i x$. Induktsiooni eelduse kohaselt saame, et $\hat{\pi}_i p = \hat{\pi}_i q$.

Meie eesmärgiks oli aga näidata, et $p = q$. Seega on jäänud näidata, et $\pi_i p = \pi_i q$. Tõestuse lõpetamiseks valime $j \in [n] \setminus \{i\}$, mis on $n \geq 2$ tõttu alati võimalik, ja kordame kõik tehtud sammud uuesti indeksi j jaoks. Saame $\hat{\pi}_i p = \hat{\pi}_i q$, millest $j \neq i$ tõttu järeldub ka meile vajalik võrdus $\pi_i p = \pi_i q$. \square

Järeldus 3.4. *Kui $H \subset B$ on selline, et $a \sim b$ erinevate $a, b \in H$ korral, siis $|H| \leq 2^n$.*

Järeldus 3.5. *Olgu $P \subset B$ selline, et $|P| = 2^n$ ja $a \sim b$ erinevate $a, b \in P$ korral. Olgu $i \in [n]$. Kui \mathcal{A} on kogumi*

$$K = \{E \subset P : \pi_i e \not\sim \pi_i e', \text{ kui } e, e' \in E\}$$

maksimaalne element sisaldavusseose suhtes, siis $P \setminus \mathcal{A}$ on seda samuti ning $|\mathcal{A}| = 2^{n-1}$.

Tõestus. Tõestus sisaldub viimase lemma tõestuses (vaata kahte valemireale järgnevat sisulõiku). \square

Järeldus 3.6. *Olgu $P \subset B$ selline, et $|P| = 2^n$ ja $a \sim b$ erinevate $a, b \in P$ korral. Olgu $x \in P$ ja $i \in [n]$ suvalised. Siis leidub $y \in P$ nii, et $\pi_i x \sim \pi_i y$.*

Tõestus. Olgu K selline nagu eelmises järelduses. Kuna $\{x\} \in K$ ning K on lõplik, siis leidub $\mathcal{A} \in K$ nii, et $\{x\} \subset \mathcal{A}$ ning \mathcal{A} on kogumi K maksimaalne element. Tähistagu \mathcal{B} hulka $P \setminus \mathcal{A}$. Järeldusest 3.5 saame, et ka \mathcal{B} on kogumi K maksimaalne element. Kui oleks nii, et iga $b \in \mathcal{B}$ korral $\pi_i x \not\sim \pi_i b$, siis kehtiks $\mathcal{B} \cup \{x\} \in K$, mis oleks aga vastuolus \mathcal{B} maksimaalsusega. Seega peab leiduma $y \in \mathcal{B}$ nii, et $\pi_i x \sim \pi_i y$. \square

Tuletame meelde, et iga $i \in [n]$ korral tähistab S_i hulga B_i alamhulka, mis koosneb parajasti sellistest hulga B_i elementidest x , mille puhul leidub $y \in B_i$ nii, et $x \sim y$. Tähistagu \mathcal{E} edaspidi hulka $\prod_{i \in [n]} S_i$.

Järeldus 3.7. Olgu $P \subset B$ selline, et $|P| = 2^n$ ja $a \sim b$ erinevate $a, b \in P$ korral. Siis $P \subset \mathcal{E}$.

Tõestus. Järeldub otse viimasest tulemusest. \square

Lemma 3.8. Olgu $P \subset B$ selline, et $|P| = 2^n$ ja $a \sim b$ erinevate $a, b \in P$ korral. Olgu α ja β hulga P kaks erinevat elementi. Järgmised väited on samaväärsed.

1. Leidub selline $z \in B$, et $z \neq \alpha$ ja $z \neq \beta$ ning $z \sim p$ iga $p \in P \setminus \{\alpha, \beta\}$ korral.
2. Leidub selline $i \in [n]$, et $\pi_i \alpha \sim \pi_i \beta$ ning $\pi_j \alpha = \pi_j \beta$ iga $j \in [n] \setminus \{i\}$ korral.

Tõestus. Oletame, et kehtib väide 2. Eelduse $|B_i| \geq 3$ tõttu leidub $z_i \in B_i$ nii, et $z_i \neq \pi_i \alpha$ ja $z_i \neq \pi_i \beta$ (see on ainus koht, kus kasutame eeldust $|B_i| \geq 3$). Olgu $z \in B$ selline, et $\pi_i z = z_i$ ning iga $j \neq i$ korral on $\pi_j z$ sama mis $\pi_j \alpha$ ja $\pi_j \beta$. Näeme, et $z \neq \alpha$ ja $z \neq \beta$. Näitame, et $z \sim p$ iga $p \in P \setminus \{\alpha, \beta\}$ korral. Olgu $p \in P \setminus \{\alpha, \beta\}$ suvaline. Kui oleks nii, et $\pi_j p \not\sim \pi_j z$ iga $j \in [n] \setminus \{i\}$ korral, siis seoste $p \sim \alpha$ ja $p \sim \beta$ tõttu peaks olema $\pi_i p \sim \pi_i \alpha$ ja $\pi_i p \sim \pi_i \beta$, millest seose \sim kolmanda omaduse tõttu järelduks võrdus $\pi_i \alpha = \pi_i \beta$. Viimane võrdus läheb aga \sim irrefleksiivsuse tõttu vastuollu eeldusega $\pi_i \alpha \sim \pi_i \beta$. Seega peab leiduma $j \in [n] \setminus \{i\}$ nii, et $\pi_j p \sim \pi_j z$. Järelikult $p \sim z$.

Näitame nüüd, et väitest 1 järeldub väide 2. Eeldame, et kehtib väide 1. Oletame vastuväiteliselt, et on olemas indeksid $i, j \in [n]$ nii, et $i \neq j$ ning $\pi_i \alpha \neq \pi_i \beta$ ja $\pi_j \alpha \neq \pi_j \beta$.

Vaatleme kogumit

$$K_i = \{E \subset P : \pi_i e \not\sim \pi_i e', \text{ kui } e, e' \in E\}.$$

Tahame veenduda, et leidub kogumi K maksimaalne element \mathcal{A}_i nii, et $\alpha \in \mathcal{A}_i$ ning $\beta \notin \mathcal{A}_i$. Järelduse 3.6 kohaselt peab leiduma $\beta' \in P$ nii, et $\pi_i \alpha \sim \pi_i \beta'$. Kui kehtiks $\pi_i \beta \sim \pi_i \beta'$, siis seostest $\pi_i \alpha \sim \pi_i \beta'$ ja $\pi_i \beta \sim \pi_i \beta'$ järelduks seose \sim kolmanda omaduse tõttu võrdus $\pi_i \alpha = \pi_i \beta$, mis läheks aga vastuollu meie eeldusega. Seega $\pi_i \beta \not\sim \pi_i \beta'$ ning $\{\beta, \beta'\} \in K_i$. Kuna $\{\beta, \beta'\} \in K_i$ ning K_i on lõplik, siis leidub $\mathcal{B}_i \in K_i$ nii, et $\{\beta, \beta'\} \subset \mathcal{B}_i$ ning \mathcal{B}_i on kogumi K_i maksimaalne element. Tähistagu \mathcal{A}_i hulka $P \setminus \mathcal{B}_i$. Järeldusest 3.5 saame, et ka \mathcal{A}_i on kogumi K_i maksimaalne element. Paneme tähele, et $\beta \in \mathcal{B}_i$, mistõttu $\beta \notin \mathcal{A}_i$. Kuna $\beta' \in \mathcal{B}_i$ ja $\pi_i \alpha \sim \pi_i \beta'$, siis ei saa α hulka \mathcal{B}_i kuuluda (see läheks vastuollu tingimusega $\mathcal{B}_i \in K_i$). Järelikult $\alpha \in \mathcal{A}_i$.

Oleme näidanud, et kogumil K_i leidub maksimaalne element \mathcal{A}_i nii, et $\alpha \in \mathcal{A}_i$ ning $\beta \notin \mathcal{A}_i$. Võtmetähtsusega oli siin seejuures eeldus $\pi_i\alpha \neq \pi_i\beta$. Kuna ka $\pi_j\alpha \neq \pi_j\beta$, siis samamoodi saame ka näidata, et kogumil

$$K_j = \{E \subset P : \pi_j e \not\sim \pi_j e', \text{ kui } e, e' \in E\}$$

leidub maksimaalne element \mathcal{A}_j nii, et $\alpha \in \mathcal{A}_j$ ning $\beta \notin \mathcal{A}_j$. Tähistagu \mathcal{B}_i ja \mathcal{B}_j vastavalt hulkasid $P \setminus \mathcal{A}_i$ ja $P \setminus \mathcal{A}_j$. Järeldusest 3.5 saame, et \mathcal{B}_i on kogumi K_i maksimaalne element ja \mathcal{B}_j on kogumi K_j maksimaalne element, kusjuures $|\mathcal{A}_i| = |\mathcal{A}_j| = 2^{n-1}$.

Võtame nüüd lõpuks vaatluse alla ka elemendi $z \in B$, mille kohta teame, et $z \neq \alpha$ ja $z \neq \beta$ ning $z \sim p$ iga $p \in P \setminus \{\alpha, \beta\}$ korral.

Oletame, et $\pi_i z \not\sim \pi_i u$ iga $u \in \mathcal{A}_i$ korral. Võtame vaatluse alla hulga $\mathcal{A}_i^* = \mathcal{A}_i \setminus \{\alpha\}$. Näeme, et $|\widehat{\pi}_i \mathcal{A}_i^*| = 2^{n-1}$ ning $u \sim u'$, kui $u, u' \in \widehat{\pi}_i \mathcal{A}_i^*$ on erinevad. Näeme samuti, et iga $x \in \mathcal{A}_i^*$ korral $\widehat{\pi}_i z \sim \widehat{\pi}_i x$ ja $\widehat{\pi}_i \alpha \sim \widehat{\pi}_i x$. Lemma 3.3 kohaselt saame, et $\widehat{\pi}_i z = \widehat{\pi}_i \alpha$. Muuhulgas siis $\pi_j z = \pi_j \alpha$. Kuna $\pi_j z = \pi_j \alpha$ ning $\pi_j \alpha \not\sim \pi_j u$ iga $u \in \mathcal{A}_j$ korral, siis iga $u \in \mathcal{A}_j$ korral $\pi_j z \not\sim \pi_j u$. Analoogiliselt eelnevaga saame siit $\widehat{\pi}_j z = \widehat{\pi}_j \alpha$. Koos võrdusega $\pi_j z = \pi_j \alpha$ annab see aga $z = \alpha$, mis läheb vastuollu eeldusega $z \neq \alpha$.

Vastuoluni viis meid oletus, et $\pi_i z \not\sim \pi_i u$ iga $u \in \mathcal{A}_i$ korral. Püüame nüüd vastupidist oletada. Oletame seega, et leidub $u_0 \in \mathcal{A}_i$ nii, et $\pi_i z \sim \pi_i u_0$. Kui oleks nii, et $\pi_i u_0 \not\sim \pi_i v$ iga $v \in \mathcal{B}_i$ korral, siis saaksime $\mathcal{B}_i \cup \{u_0\} \in K_i$, mis satuks aga vastuollu \mathcal{B}_i maksimaalsusega. Seega peab leiduma selline $v_0 \in \mathcal{B}_i$, et $\pi_i u_0 \sim \pi_i v_0$. Tingimustest $\pi_i z \sim \pi_i u_0$ ja $\pi_i u_0 \sim \pi_i v_0$ saame seose \sim kolmanda omaduse kohaselt võrduse $\pi_i z = \pi_i v_0$. Kuna $\pi_i z = \pi_i v_0$ ning $\pi_i v_0 \not\sim \pi_i v$ iga $v \in \mathcal{B}_i$ korral, siis iga $v \in \mathcal{B}_i$ korral $\pi_i z \not\sim \pi_i v$. Jõuame siit võrduseni $z = \beta$ analoogiliselt sellega, kuidas jõudsime eelmises sisulõigus võrduseni $z = \alpha$. Võrdus $z = \beta$ läheb aga vastuollu eeldusega $z \neq \beta$.

Kuna mõlemad juhud viisid vastuoluni, siis peab väär olema meie vastuväiteline oletus, et α ja β erinevad vähemalt kahes komponendis. Teiselt poolt, kuna eelduse kohaselt $\alpha \neq \beta$, siis erinevad α ja β vähemalt ühes komponendis. Kokkuvõttes võib seega öelda, et nad erinevad täpselt ühes komponendis. Seega leidub selline $i \in [n]$, et $\pi_i \alpha \neq \pi_i \beta$ ning iga $j \neq i$ korral $\pi_j \alpha = \pi_j \beta$. Kuna aga $\alpha \sim \beta$ ning irrefleksiivsuse tõttu $\pi_j \alpha \not\sim \pi_j \beta$, kui $j \neq i$, siis peab kehtima $\pi_i \alpha \sim \pi_i \beta$. \square

Paneme tähele, et seose \sim kolmanda omaduse kohaselt leidub iga $i \in [n]$ ja $x \in S_i$ korral tegelikult parajasti üks tingimust $x \sim y$ rahuldav $y \in B_i$. See üheselt määratud y on seejuures ka ise S_i element. Tähistame $y = -x$. Lepime kokku, et kui $\theta \in \{-1, 1\}$ ja $x \in S_i$, siis $\theta x = x$, kui $\theta = 1$, ning

$\theta x = -x$, kui $\theta = -1$. Kui $x \in \mathcal{E}$ ja $f : [n] \rightarrow \{-1, 1\}$, siis tähistagu fx hulga \mathcal{E} elementi, mis rahuldab iga $i \in [n]$ korral seost $\pi_i(fx) = f(i)\pi_i x$.

Kujutuse G injektiivsust läheb meil vaja vaid kahel korral, lemma 3.10 ja lemma 3.13 tõestustes. On ka teisi kohti, kus me võiksime kujutuse G injektiivsust rakendada, aga kõigis neis kohtades saab sama tulemuseni jõudmiseks rakendada injektiivsuse asemel hoopis teadmist, et kujutus G säilitab seost \sim ning seos \sim on irrefleksiivne (mida me ka teeme, rõhutamaks kahte kohta, kus G injektiivsuse kasutamisest ei pääse).

Lemma 3.9. *Kui $x \in \mathcal{E}$, siis ka $G(x) \in \mathcal{E}$.*

Tõestus. Vaatleme hulka

$$P = \{p \in B : \exists f : [n] \rightarrow \{-1, 1\} p = fx\}.$$

Kuna $f_1 \neq f_2$ korral $f_1 x \sim f_2 x$, siis $u \sim v$ erinevate $u, v \in P$ korral. Kuna $f_1 \neq f_2$ korral $f_1 x \sim f_2 x$ ning seos \sim on irrefleksiivne, siis $f_1 \neq f_2$ korral $f_1 x \neq f_2 x$. Saame järeldada, et hulgas P on täpselt 2^n elementi (nii mitu on meil funktsioone $f : [n] \rightarrow \{-1, 1\}$).

Kuna kujutus G säilitab seost \sim ning seos \sim on irrefleksiivne, siis $u \sim v$ erinevate $u, v \in G(P)$ korral, kusjuures $|G(P)| = 2^n$. Järeldusest 3.7 saame, et $G(P) \subset \mathcal{E}$. Kuna $x \in P$, siis $G(x) \in G(P)$, millest $G(P) \subset \mathcal{E}$ tõttu saame $G(x) \in \mathcal{E}$. \square

Lemmast 3.8 saame teha järgmise järelduse.

Lemma 3.10. *Olgu $x \in \mathcal{E}$. Olgu $x' \in B$ selline, et mõne $\alpha \in [n]$ korral $\pi_\alpha x \sim \pi_\alpha x'$ ning iga $i \in [n] \setminus \{\alpha\}$ korral $\pi_i x = \pi_i x'$. Siis on $G(x)$ ja $G(x')$ sellised, et mõne $\beta \in [n]$ korral $\pi_\beta G(x) \sim \pi_\beta G(x')$ ning iga $i \in [n] \setminus \{\beta\}$ korral $\pi_i G(x) = \pi_i G(x')$.*

Tõestus. Defineerime hulga P samamoodi nagu eelmise lemma tõestuses. Nagu enne nägime, $|P| = 2^n$ ning $u \sim v$ erinevate $u, v \in P$ korral. Kuna leidub indeks $\alpha \in [n]$ nii, et $\pi_\alpha x \sim \pi_\alpha x'$ ning iga $i \neq \alpha$ korral $\pi_i x = \pi_i x'$, siis lemma 3.8 implikatsioonist $2 \Rightarrow 1$ järeldub, et leidub $z \in B$ nii, et $z \neq x$ ja $z \neq x'$ ning $z \sim p$ iga $p \in P \setminus \{x, x'\}$ korral.

Nagu enne juba samuti nägime, $|G(P)| = 2^n$ ning $u \sim v$ erinevate $u, v \in G(P)$ korral. Kuna $z \sim p$ iga $p \in P \setminus \{x, x'\}$ korral ning kujutus G säilitab seost \sim , siis $G(z) \sim q$ iga $q \in G(P \setminus \{x, x'\})$ korral. Kuna kujutus G säilitab seost \sim ning seos \sim on irrefleksiivne, siis ahend $G|_P$ on injektiivne. Kuivõrd ahend $G|_P$ on injektiivne, siis $G(P \setminus \{x, x'\}) = G(P) \setminus \{G(x), G(x')\}$. Lõpuks, kuna

$z \neq x$ ja $z \neq x'$, siis G injektiivsuse tõttu $G(z) \neq G(x)$ ja $G(z) \neq G(x')$ (see on üks kahest kohast, kus kujutuse G injektiivsust läheb ka päriselt vaja). Lemma 3.8 implikatsioonist $1 \Rightarrow 2$ järeldeb nüüd, et leidub indeks $\beta \in [n]$ nii, et $\pi_\beta G(x) \sim \pi_\beta G(x')$ ning iga $i \neq \beta$ korral $\pi_i G(x) = \pi_i G(x')$. \square

Tõestame veel mõned lemmad. Iga $i \in [n]$ korral tähistagu N_i funktsiooni $N_i : [n] \rightarrow \{-1, 1\}$, kus $N_i(i) = -1$ ja iga $j \neq i$ korral $N_i(j) = 1$. Iga $x \in \mathcal{E}$ korral on $N_i x$ seega selline \mathcal{E} element, et $\pi_i N_i x = -\pi_i x$ ning iga $j \neq i$ korral $\pi_j N_i x = \pi_j x$.

Lemma 3.11. *Olgu $x \in \mathcal{E}$. Siis leidub bijektsioon $\sigma_x : [n] \rightarrow [n]$ nii, et kui $f : [n] \rightarrow \{-1, 1\}$ ja $q \in B$ on selline, et iga $i \in [n]$ korral $\pi_i q = f(i)\pi_i x$, siis on $G(q)$ selline, et iga $i \in [n]$ korral $\pi_{\sigma_x(i)} G(q) = f(i)\pi_{\sigma_x(i)} G(x)$.*

Tõestus. Alustame permutatsiooni σ defineerimisest. Olgu $\alpha \in [n]$ suvaline. Võtame vaatluse alla elemendi $N_\alpha x$. Lemma 3.10 kohaselt leidub üheselt määratud indeks $\beta \in [n]$ nii, et $G(N_\alpha x) = N_\beta G(x)$ (ühene määratlus tuleneb irrefleksiivsusest). Defineerime $\sigma_x(\alpha) = \beta$.

Veendume, et σ_x on injektiivne. Olgu $i, j \in [n]$ erinevad. Siis $N_i x \sim N_j x$. Kuna kujutus G säilitab seost \sim ning seos \sim on irrefleksiivne, siis $G(N_i x) \neq G(N_j x)$. Kuna aga $G(N_i x) \neq G(N_j x)$, siis võrdus $\sigma_x(i) = \sigma_x(j)$ kehtida ei saa. Seega $i \neq j$ korral $\sigma_x(i) \neq \sigma_x(j)$ ehk σ_x on injektiivne. Kuna σ_x on injektiivne kujutus lõplikust hulgast iseendasse, siis on see kujutus ka surjektiivne. Järelikult on σ_x tõepoolest bijektsioon.

Tähistagu k hulga $\{i \in [n] : f(i) = -1\}$ suurust ehk seda, kui mitmes komponendis erinevad üksteisest elemendid q ja x . Tõestame meid huvitava väite induktsiooniga k järgi. Väite kehtivus $k = 0$ korral on ilmne. Väite kehtivus $k = 1$ korral järeldeb otse σ_x definitsioonist. Olgu nüüd m mingi tingimust $2 \leq m \leq n$ rahuldav täisarv. Oletame, et väide kehtib, kui $k < m$. Näitame, et väide kehtib ka juhul $k = m$.

Kuna $m \geq 2$, siis leiduvad indeksid α ja β nii, et $f(\alpha) = f(\beta) = -1$ ning $\alpha \neq \beta$. Vaatleme elemente $N_\alpha q$, $N_\beta q$ ja $N_\alpha N_\beta q$. Induktsiooni eelduse kohaselt on nende kujutised funktsiooniga G just sellised nagu nad olema peaksid. Kuna $N_\alpha q$ ja $N_\alpha N_\beta q$ erinevad vaid komponendis β , siis $G(N_\alpha q)$ ja $G(N_\alpha N_\beta q)$ erinevad vaid komponendis $\sigma(\beta)$ ehk $G(N_\alpha N_\beta q) = N_{\sigma(\beta)} G(N_\alpha q)$. Analoogiliselt, kuna $N_\beta q$ ja $N_\alpha N_\beta q$ erinevad vaid komponendis α , siis $G(N_\beta q)$ ja $G(N_\alpha N_\beta q)$ erinevad vaid komponendis $\sigma(\alpha)$ ehk $G(N_\alpha N_\beta q) = N_{\sigma(\alpha)} G(N_\beta q)$. Kuna q erineb elementidest $N_\alpha q$ ja $N_\beta q$ vaid ühes komponendis, siis Lemma 3.10 kohaselt leiduvad sellised indeksid u ja v , et $G(N_\alpha q) = N_u G(q)$ ja $G(N_\beta q) = N_v G(q)$.

Neli viimast võrdust kokku pannes saame võrdused $G(N_\alpha N_\beta q) = N_{\sigma(\beta)} N_u G(q)$ (esimene ja kolmas võrdus) ning $G(N_\alpha N_\beta q) = N_{\sigma(\alpha)} N_v G(q)$ (teine ja neljas võrdus), millest saame võrduse $N_{\sigma(\beta)} N_u G(q) = N_{\sigma(\alpha)} N_v G(q)$. Kuna kujutus G säilitab seost \sim , seos \sim on irrefleksiivne ja $N_\alpha N_\beta q \sim q$, siis $G(N_\alpha N_\beta q) \neq G(q)$. Teiselt poolt, kui kehtiks võrdus $\sigma(\beta) = u$ või võrdus $\sigma(\alpha) = v$, siis käesoleva sisulõigu kahte esimest võrdust kasutades võiksime järeldada, et $G(N_\alpha N_\beta q) = G(q)$. Viimane pole aga võimalik, seega $\sigma(\beta) \neq u$ ja $\sigma(\alpha) \neq v$. Kuna $\sigma(\beta) \neq u$ ja $\sigma(\alpha) \neq v$ ning seos \sim on irrefleksiivne, siis varasemalt saadud võrdus $N_{\sigma(\beta)} N_u G(q) = N_{\sigma(\alpha)} N_v G(q)$ saab kehtida vaid juhul, kui $\{\sigma(\beta), u\} = \{\sigma(\alpha), v\}$. On kaks võimalust, kuidas saab viimane võrdus tõene olla: kas $\sigma(\alpha) = \sigma(\beta)$ ja $u = v$ või siis $v = \sigma(\beta)$ ja $u = \sigma(\alpha)$. Kuna aga $\alpha \neq \beta$, siis σ injektiivsuse tõttu võrdus $\sigma(\alpha) = \sigma(\beta)$ kehtida ei saa. Järelikult $v = \sigma(\beta)$ ja $u = \sigma(\alpha)$. Käesoleva sisulõigu esimesest või teisest võrdusest nüüd saame, et $G(N_\alpha N_\beta q) = N_{\sigma(\alpha)} N_{\sigma(\beta)} G(q)$ ehk $G(q) = N_{\sigma(\alpha)} N_{\sigma(\beta)} G(N_\alpha N_\beta q)$. Kuna induktsiooni eelduse kohaselt on $G(N_\alpha N_\beta q)$ just selline nagu olema peakski, siis järeldub viimasest võrdusest, et ka $G(q)$ on just selline nagu olema peakski. \square

Pangem tähele, et me veel ei tea, kas bijektsioon σ_x sõltub elemendi $x \in \mathcal{E}$ valikust. Hiljem selgub, et tegelikult ei sõltu. Selleni jõudmiseks on meil aga kõigepealt veel üht abitulemust vaja.

Lemma 3.12. *Olgu $z \in \mathcal{E}$. Kui $q \in B$ on selline, et $\pi_i q = \pi_i z$ mõne $i \in [n]$ korral, siis $\pi_{\sigma_x(i)} G(q) = \pi_{\sigma_x(i)} G(z)$.*

Tõestus. Väite kehtivus on $n = 1$ korral ilmne. Eeldame seega, et $n \geq 2$. Vaatleme hulka

$$P_i = \{p \in B : \exists f : [n] \rightarrow \{-1, 1\} \text{ } p = fz, f(i) = -1\}.$$

Kuna $f_1 \neq f_2$ korral $f_1 z \sim f_2 z$, siis $u \sim v$ erinevate $u, v \in P_i$ korral. Kuna $f_1 \neq f_2$ korral $f_1 z \sim f_2 z$ ning seos \sim on irrefleksiivne, siis $f_1 \neq f_2$ korral $f_1 z \not\sim f_2 z$. Saame järeldada, et hulgas P_i on täpselt 2^{n-1} elementi (nii mitu on meil funktsioone $f : [n] \rightarrow \{-1, 1\}$, mille puhul $f(i) = -1$).

Kuna G säilitab seost \sim ning seos \sim on irrefleksiivne, siis $|G(P_i)| = 2^{n-1}$ ning $u \sim v$ erinevate $u, v \in G(P_i)$ korral. Lemmast 3.11 aga saame, et iga $p \in P_i$ korral $\pi_{\sigma_z(i)} G(p) = -\pi_{\sigma_z(i)} G(z)$. Kui $u, v \in G(P_i)$ on erinevad, siis $u \sim v$ ja $\pi_{\sigma_z(i)} u = \pi_{\sigma_z(i)} v$, millest irrefleksiivsuse tõttu $\pi_{\sigma_z(i)} u \not\sim \pi_{\sigma_z(i)} v$, mistõttu peab leiduma selline $j \neq \sigma_z(i)$, et $\pi_j u \sim \pi_j v$. Seega $\widehat{\pi}_{\sigma_z(i)} u \sim \widehat{\pi}_{\sigma_z(i)} v$ erinevate $u, v \in G(P_i)$ korral. Niisiis $u \sim v$ erinevate $u, v \in \widehat{\pi}_{\sigma_z} G(P_i)$ korral, kusjuures irrefleksiivsuse tõttu $|\widehat{\pi}_{\sigma_z(i)} G(P_i)| = 2^{n-1}$.

Iga $p \in P_i$ korral $\pi_i q \sim \pi_i p$ ja seega ka $q \sim p$. Kuna G säilitab seost \sim , siis $G(q) \sim G(p)$ iga $p \in P_i$ korral. Oletame vastuväiteliselt, et $\pi_{\sigma_z(i)} G(q) \neq \pi_{\sigma_z(i)} G(z)$. Kuna $\pi_{\sigma_z(i)} G(q) \neq \pi_{\sigma_z(i)} G(z)$ ja $p \in P_i$ korral $\pi_{\sigma_z(i)} G(p) = -\pi_{\sigma_z(i)} G(z)$, siis $\pi_{\sigma_z(i)} G(q) \not\sim \pi_{\sigma_z(i)} G(p)$. Kuna $p \in P_i$ korral $G(q) \sim G(p)$, kuid $\pi_{\sigma_z(i)} G(q) \not\sim \pi_{\sigma_z(i)} G(p)$, siis peab leiduma selline $j \neq \sigma_z(i)$, et $\pi_j G(q) \sim \pi_j G(p)$. Niisiis iga $p \in P_i$ korral $\widehat{\pi}_{\sigma_z(i)} G(q) \sim \widehat{\pi}_{\sigma_z(i)} G(p)$. Irrefleksiivsusest saame seega $\widehat{\pi}_{\sigma_z(i)} G(q) \notin \widehat{\pi}_{\sigma_z(i)} G(P)$. Vaatleme hulka

$$H = \widehat{\pi}_{\sigma_z(i)} G(P) \cup \{\widehat{\pi}_{\sigma_z(i)} G(q)\}.$$

Näeme, et $|H| = 2^{n-1} + 1$. Kuna aga $u \sim v$, kui $u, v \in H$ on erinevad, siis järelduse 3.4 kohaselt peab kehtima võrratus $|H| \leq 2^{n-1}$, mis läheb aga viimasena saadud võrdusega vastuollu. Vastuoluni viis meid oletus, et $\pi_{\sigma_z(i)} G(q) \neq \pi_{\sigma_z(i)} G(z)$. Niisiis $\pi_{\sigma_z(i)} G(q) = \pi_{\sigma_z(i)} G(z)$, mida tahtsimegi aga näidata. \square

Oleme nüüd valmis näitama, et erinevate $x, y \in \mathcal{E}$ korral on bijektsioonid σ_x ja σ_y siiski alati võrdsed.

Lemma 3.13. *Olgu $x, y \in \mathcal{E}$ suvalised. Siis $\sigma_x = \sigma_y$.*

Tõestus. Väide kehtivus on $x = y$ korral ilmne. Eeldame seega, et x ja y on erinevad. Oletame alustuseks, et x ja y erinevad vaid ühes komponendis. Olgu see komponent indeksiga i .

Rakendame lemmat 3.12 üks kord nii, et z rollis on x ja q rollis on y , ning teine kord nii, et z rollis on y ja q rollis on x . Tulemuseks saame, et $\pi_j G(x) = \pi_j G(y)$ iga $j \neq \sigma_x(i)$ ja iga $j \neq \sigma_y(i)$ korral. Kui oleks nii, et $\sigma_x(i) \neq \sigma_y(i)$, siis kehtiks võrdus $G(x) = G(y)$. Kuna aga eelduse kohaselt $x \neq y$, siis G injektiivsuse tõttu $G(x) \neq G(y)$ (see on teine koht, kus läheb vaja G injektiivsust). Järelikult $\sigma_x(i) = \sigma_y(i)$. Tähistagu nüüd $\sigma(i)$ indeksite $\sigma_x(i)$ ja $\sigma_y(i)$ ühist väärtust.

Veendume nüüd, et $\sigma_x(j) = \sigma_y(j)$ ka suvalise $j \in [n] \setminus \{i\}$ korral. Vaatleme elementi $N_j x$. Rakendame lemmat 3.12 uuesti, võttes z rolli y ning q rolli $N_j x$. Tulemuseks saame, et iga $\alpha \in [n] \setminus \{\sigma(i), \sigma_y(j)\}$ korral $\pi_\alpha G(N_j x) = \pi_\alpha G(y)$. Kuna aga varasemalt oleme juba saanud, et $\pi_\alpha G(y) = \pi_\alpha G(x)$ iga $\alpha \neq \sigma(i)$ korral, siis saame jõuda järelduseni, et iga $\alpha \in [n] \setminus \{\sigma(i), \sigma_y(j)\}$ korral $\pi_\alpha G(N_j x) = \pi_\alpha G(x)$. Oletame vastuväiteliselt, et $\sigma_x(j) \neq \sigma_y(j)$. Siis $\sigma_x(j) \neq \sigma(i)$ ja $\sigma_x(j) \neq \sigma_y(j)$, mistõttu $\sigma_x(j) \in [n] \setminus \{\sigma(i), \sigma_y(j)\}$. Viimasest võrdusest saame seega sel korral $\pi_{\sigma_x(j)} G(N_j x) = \pi_{\sigma_x(j)} G(x)$. Lemma 3.11 kohaselt peab aga kehtima võrdus $\pi_{\sigma_x(j)} G(N_j x) = -\pi_{\sigma_x(j)} G(x)$. Seose \sim

irrefleksiivsuse tõttu need kaks võrdust aga korraga kehtida ei saa, vastuolu. Vastuoluni viis meid oletus, et $\sigma_x(j) \neq \sigma_y(j)$. Järelikult kehtib $\sigma_x(j) = \sigma_y(j)$.

Oleme näidanud, et väide kehtib, kui x ja y erinevad vaid ühes komponendis. Oletame nüüd, et x ja y erinevad vähemalt kahes komponendis. Siis leiduvad $e_0, \dots, e_k \in \mathcal{E}$, kus $k = \{i \in [n] : \pi_i x \neq \pi_i y\}$ ning $e_0 = x$ ja $e_k = y$, kusjuures iga $i \in \{0, \dots, k-1\}$ korral erinevad e_i ja e_{i+1} vaid ühes komponendis. Siis eelneva põhjal saame, et iga $i \in \{0, \dots, k-1\}$ korral $\sigma_{e_i} = \sigma_{e_{i+1}}$, millest $\sigma_{e_0} = \sigma_{e_k}$ ehk $\sigma_x = \sigma_y$ (tegelikult läheb meil järgnevas vaja vaid seda juhtu, kus x ja y erinevad vaid ühes komponendis). \square

Oleme nüüd lõpuks jõudnud seisuni, kus oleme võimelised teoreemi 3.2 tõestuse lõpuni viima.

Teoreemi 3.2 tõestus. Kuna eelduse kohaselt $S_i \neq \emptyset$ iga $i \in [n]$ korral, siis on mittetühi ka \mathcal{E} (ainus koht, kus kasutame eeldust $S_i \neq \emptyset$). Olgu nüüd $e \in \mathcal{E}$ suvaline. Defineerime $\sigma = \sigma_e$. Olgu $i \in [n]$. Funktsiooni $g : S_i \rightarrow S_{\sigma(i)}$ defineerimiseks võtame vaatluse alla hulga S_i suvalise elemendi s_i . Tähistagu $e(i, s_i)$ hulga \mathcal{E} sellist elementi, et $\pi_i e(i, s_i) = s_i$ ning $j \neq i$ korral $\pi_j e(i, s_i) = \pi_j e$. Defineerime $g_i(s_i) = \pi_{\sigma(i)} G(e(i, s_i))$. Kuna $e(i, s_i) \in \mathcal{E}$, siis lemma 3.9 kohaselt $G(e(i, s_i)) \in \mathcal{E}$, mistõttu $\pi_{\sigma(i)} G(e(i, s_i)) \in S_{\sigma(i)}$.

Tõestuse lõpetamiseks näitame, et kui $x \in B$ ja $i \in [n]$ on sellised, et $\pi_i x \in S_i$, siis kehtib $\pi_{\sigma(i)} G(x) = g_i(\pi_i x)$. Olgu $x \in B$ ja $i \in [n]$ sellised, et $\pi_i x \in S_i$. Võtame vaatluse alla elemendi $e^* = e(i, \pi_i x)$ (kasutame eelmises sisulõigus sisse toodud tähistust). Rakendame lemmat 3.12, võttes z rolli e^* ja q rolli x . Arvestades, et lemma 3.13 kohaselt $\sigma_{e^*} = \sigma_e$, saame tulemuseks

$$\pi_{\sigma(i)} G(x) = \pi_{\sigma(i)} G(e^*) = \pi_{\sigma(i)} G(e(i, \pi_i x)) = g_i(\pi_i x),$$

millest $\pi_{\sigma(i)} G(x) = g_i(\pi_i x)$, mida oligi vaja näidata. Paneme tähele, et lemmat 3.13 rakendame elementidele e ja e^* , mis erinevad maksimaalselt ühe komponendi võrra. \square

3.2 Piisavad tingimused

Eelmises jaotises tõestatud teoreemi 3.1 kasutades tõestame nüüd, et lõpliku arvu rangelt kumerate Banachi ruumide ℓ_∞ -summa X korral on mittelaiendav bijektsioon $F : B_X \rightarrow B_X$ isomeetria, kui see rahuldab tingimust $F(S_X) \subset S_X$ või $F(\text{ext } B_X) \subset \text{ext } B_X$. Järgnev tõestus on käesoleva magistritöö autori originaalse kahe liidetavaga juhtu käsitleva tõestuse [7, Theorem 4] lõpposa üldistus. Ühtlasi on see K. A. Kuriku bakalaureusetöös [9] ja selle põhjal valminud artiklis [10] esitatud arutluskäigu veidi muudetud variant.

Banachi ruumide X_1, \dots, X_n ℓ_∞ -summa X ühikkerale, ühiksfäärile ja ekstremaalsete punktide hulga võib anda kirjeldused

$$\begin{aligned} B_X &= \prod_{i=1}^n B_{X_i}, \\ S_X &= \{(x_i)_{i=1}^n \in B_X : x_i \in S_{X_i} \text{ vähemalt ühe } i \text{ korral}\}, \\ \text{ext } B_X &= \prod_{i=1}^n \text{ext } B_{X_i}. \end{aligned}$$

Kui ruumid X_1, \dots, X_n on mittetriviaalsed ja rangelt kumerad, siis $\text{ext } B_{X_i} = S_{X_i}$, mistõttu $\text{ext } B_X = \prod_{i=1}^n S_{X_i}$

Teoreem 3.14. *Olgu X_1, \dots, X_n rangelt kumerad Banachi ruumid ning olgu X nende ruumide ℓ_∞ -summa. Olgu kujutus $F : B_X \rightarrow B_X$ mittelaiendav bijektsioon. Kui F rahuldab tingimust $F(S_X) \subset S_X$ või $F(\text{ext } B_X) \subset \text{ext } B_X$, siis F on isomeetria.*

Tõestus. Kui ruumide X_1, \dots, X_n seas on triviaalseid, siis võime neid summast välja jätta ilma et X seejuures muutuks. Tulemuseks saame kas tühja summa või siis mittetriviaalsete liidetavate mittetühja summa. Kuna tühi summa on triviaalne ruum, mille puhul teoreemi väide ilmselt kehtib, siis võime edaspidi eeldada, et ruumid X_1, \dots, X_n on mittetriviaalsed.

Tähistagu B_1, \dots, B_n ruumide X_1, \dots, X_n ühikkerasid ja S_1, \dots, S_n nende ühiksfääre. Tähistagu π_1, \dots, π_n summa X projektsioone oma komponentidele. Tähistagu G kujutuse F pöördkujutust. Paneme tähele, et G on mitteahendav bijektsioon. Tähistagu $[n]$ hulka $\{1, \dots, n\}$. Eelmises jaotises tõestatud teoreemist 3.1 järeldub, et leidub bijektsioon $\sigma : [n] \rightarrow [n]$ ja mitteahendavad kujutused g_1, \dots, g_n , kus iga $i \in [n]$ korral $g_i : S_i \rightarrow S_{\sigma(i)}$ ning iga $x \in B_X$ ja iga $i \in [n]$ korral $\pi_{\sigma(i)} G(x) = g_i(\pi_i x)$, kui $\pi_i x \in S_i$.

Kuna funktsioonid g_1, \dots, g_n on mitteahendavad, siis nad on ilmselt ka injektiivsed. Näitame, et lisatingimuse $F(S_X) \subset S_X$ või $F(\text{ext } B_X) \subset \text{ext } B_X$

korral on funktsioonid g_1, \dots, g_n ka sürjektiivsed (see on ainus asi, mille jaoks me neid lisatingimusi vajame).

Vaatleme kõigepealt tingimust $F(S_X) \subset S_X$. Olgu $i \in [n]$ ning $s \in S_{\sigma(i)}$ suvalised. Vaatleme elementi $x \in S_X$, kus $\pi_{\sigma(i)}x = s$ ja $\pi_k x = 0$ iga $k \neq \sigma(i)$ korral. Kuna $x \in S_X$, siis eelduse $F(S_X) \subset S_X$ kohaselt ka $F(x) \in S_X$. Seega $\pi_j F(x) \in S_j$ vähemalt ühe $j \in [n]$ korral. Kui $\pi_j F(x) \in S_j$ mõne $j \in [n]$ korral, siis $\pi_{\sigma(j)} G(F(x)) = g_j(\pi_j F(x))$ ehk $\pi_{\sigma(j)} x = g_j(\pi_j F(x))$, millest $\pi_{\sigma(j)} x \in S_{\sigma(j)}$. Kui aga $j \neq i$, siis $\sigma(j) \neq \sigma(i)$ ning x definitsiooni kohaselt $\pi_{\sigma(j)} x = 0$, mistõttu $\pi_{\sigma(j)} x \notin S_{\sigma(j)}$. Niisiis $j \neq i$ korral $\pi_j F(x) \in S_j$ kehtida ei saa. Kuna $\pi_j F(x) \in S_j$ peab vähemalt ühe $j \in [n]$ korral siiski kehtima, siis saame $\pi_i F(x) \in S_i$. Järelikult aga $\pi_{\sigma(i)} G(F(x)) = g_i(\pi_i F(x))$ ehk $\pi_{\sigma(i)} x = g_i(\pi_i F(x))$, millest $s = g_i(\pi_i F(x))$. Niisiis leidub elemendil $s \in S_{\sigma(i)}$ eelkujutis funktsiooni g_i suhtes. Kuna $s \in S_{\sigma(i)}$ oli valitud suvaliselt, siis funktsioon g_i on sürjektiivne.

Vaatleme nüüd tingimust $\text{ext } B_X \subset \text{ext } B_X$. Olgu $i \in [n]$ ning $s \in S_{\sigma(i)}$ suvalised. Iga $k \neq \sigma(i)$ korral olgu s_k mingi S_k element (see valik on võimalik, sest kõik ruumid on mittetriviaalsed). Vaatleme elementi $x \in \text{ext } B_X$, kus $\pi_{\sigma(i)} x = s$ ja iga $k \neq \sigma(i)$ korral $\pi_k x = s_k$. Kuna $x \in \text{ext } B_X$, siis eelduse $\text{ext } B_X \subset \text{ext } B_X$ kohaselt ka $F(x) \in \text{ext } B_X$. Seega muuhulgas $\pi_i F(x) \in S_i$. Edasine arutluskäik on sama mis juhu $F(S_X) \subset S_X$ korral.

Oleme näidanud, et funktsioonid g_1, \dots, g_n on sürjektiivsed. Varasemast teame, et need on ka injektiivsed. Seega on g_1, \dots, g_n bijektsioonid. Paneme veel tähele, et iga $i \in [n]$ ja iga $s \in S_i$ korral $g_i(-s) = -g_i(s)$ (kuna s ja $-s$ on üksteisest kaugusel kaks ning g_i on mitteahendav, siis ka $g_i(s)$ ja $g_i(-s)$ on üksteisest kaugusel kaks, millest $X_{\sigma(i)}$ range kumeruse ning järelduse 1.2 abil järeldub $g_i(-s) = -g_i(s)$).

Olgu $i \in [n]$ suvaline. Defineerime funktsiooni $G_i : B_i \rightarrow B_{\sigma(i)}$, määrates $G_i(0) = 0$ ja $y \neq 0$ korral $G_i(y) = \|y\| g_i(y/\|y\|)$. Näitame, et iga $y \in B_i$ ning iga $\alpha \in [-1, 1]$ korral $G_i(\alpha y) = \alpha G_i(y)$. Paneme tähele, et $\alpha = 0$ korral on tõestatava võrduse mõlemad pooled võrdsed nulliga. Kuna sama võib öelda ka juhu $y = 0$ kohta, siis võime eeldada, et α ja y on nullist erinevad. Kui $\alpha > 0$, siis saame

$$G_i(\alpha y) = \|\alpha y\| g_i\left(\frac{\alpha y}{\|\alpha y\|}\right) = \alpha \|y\| g_i\left(\frac{y}{\|y\|}\right) = \alpha G_i(y).$$

Kui aga $\alpha < 0$, siis saame

$$G_i(\alpha y) = \|\alpha y\| g_i\left(\frac{\alpha y}{\|\alpha y\|}\right) = -\alpha \|y\| g_i\left(-\frac{y}{\|y\|}\right),$$

kuid eelneva põhjal $g_i(-y/\|y\|) = -g_i(y/\|y\|)$, mistõttu saame ka $\alpha < 0$ korral võrduse $G_i(\alpha y) = \alpha G_i(y)$.

Olgu funktsioon $G^* : B_X \rightarrow B_X$ selline, et iga $y \in B_X$ ja iga $i \in [n]$ korral $\pi_{\sigma(i)}G^*(y) = G_i(\pi_i y)$. Ei ole raske veenduda, et kui $y \in B_X$ ning $\alpha \in [-1, 1]$, siis iga $i \in [n]$ korral $\pi_{\sigma(i)}G^*(\alpha y) = \pi_{\sigma(i)}\alpha G^*(y)$ (kasutame G^* definitsiooni ja G_i homogeensust), mistõttu $G^*(\alpha y) = \alpha G^*(y)$. Kuna $G^*(\alpha y) = \alpha G^*(y)$ iga $y \in B_X$ ning iga $\alpha \in [-1, 1]$ korral, siis rahuldab G^* järelduse 1.6 sõnastuses toodud tingimust. Tõestuse lõpetamiseks piisab meil seega näidata, et kehtib võrdus $G = G^*$. Veendume võrduse $G = G^*$ kehtivuses. Olgu $y \in B_X$. Tähistagu K hulka $\{i \in [n] : \pi_i y \notin S_i\}$. Tähistagu k selle hulga suurus. Tõestame väite $G(y) = G^*(y)$ induktsiooniga k järgi.

Näeme, et $k = 0$ korral on väide kehtivus ilmne. Olgu nüüd m tingimust $1 \leq m \leq n$ rahuldav täisarv. Oletame, et väide kehtib juhul $k < m$. Näitame nüüd, et väide kehtib ka juhul $k = m$. Tähistame $x = G(y)$. Iga $u \in B_X$ korral tähistagu u_1, \dots, u_n järgnevas elemendi u komponente $\pi_1 u, \dots, \pi_n u$. Iga $j \in \sigma(K)$ korral olgu $s_j = x_j / \|x_j\|$, kui $x_j \neq 0$, ning olgu s_j suvaline S_j element, kui $x_j = 0$ (ruumi X_j mittetriviaalsuse tõttu on viimane valik võimalik). Iga $i \in K$ korral olgu $t_i = g_i^{-1}(s_{\sigma(i)})$ (see on see koht, kus kasutame g_i surjektiivsust).

Peame näitama, et iga $i \in [n]$ korral $x_{\sigma(i)} = G_i(y_i)$. Varasemast teame, et see võrdus kehtib, kui kehtib $y_i \in S_i$. Jääb seega näidata, et see kehtib ka $y_i \notin S_i$ ehk $i \in K$ korral. Olgu seega $\alpha \in K$ suvaline. Tähistame $\beta = \sigma(\alpha)$. Veendume, et $x_\beta = G_\alpha(y_\alpha)$. Paneme tähele, et $G_\alpha(\|x_\beta\|t_\alpha) = \|x_\beta\|g_\alpha(t_\alpha) = \|x_\beta\|s_\beta = x_\beta$. Seega piisab meil näidata, et $y_\alpha = \|x_\beta\|t_\alpha$.

Olgu $y', y'' \in B_X$ sellised, et $y''_\alpha = -t_\alpha$ ja $y'_\alpha = t_\alpha$, iga $i \in K \setminus \{\alpha\}$ korral $y''_i = y'_i = \|x_{\sigma(i)}\|t_i$ ning iga $i \notin K$ korral $y''_i = y'_i = y_i$. Paneme tähele, et punktidel y' ja y'' on mõlemal kõigest $m - 1$ ühest väiksema normiga komponenti. Saame seega rakendada nendele punktidele induktsiooni eeldust. Tähistame $x' = G(y')$ ning $x'' = G(y'')$. Siis $x''_\beta = g_\alpha(-t_\alpha) = -g_\alpha(t_\alpha) = -s_\beta$ ja $x'_\beta = g_\alpha(t_\alpha) = s_\beta$, iga $i \in K \setminus \{\alpha\}$ korral

$$x''_{\sigma(i)} = x'_{\sigma(i)} = \|x_{\sigma(i)}\|g_i(t_i) = \|x_{\sigma(i)}\|s_{\sigma(i)} = x_{\sigma(i)}$$

ning iga $i \notin K$ korral

$$x''_{\sigma(i)} = x'_{\sigma(i)} = x_{\sigma(i)} = g_i(y_i).$$

Paneme tähele, et iga $j \neq \beta$ korral $x''_j = x'_j = x_j$, mistõttu

$$\|x - x'\| = \|x_\beta - x'_\beta\| = \|x_\beta - s_\beta\| = 1 - \|x_\beta\|$$

ning

$$\|x - x''\| = \|x_\beta - x''_\beta\| = \|x_\beta + s_\beta\| = 1 + \|x_\beta\|.$$

Paneme tähele, et kuna iga $i \neq \alpha$ korral $y_i'' = y_i' = y_i$, siis

$$\|y - y'\| = \|y_\alpha - y'_\alpha\| = \|y_\alpha - t_\alpha\|$$

ning

$$\|y - y''\| = \|y_\alpha - y''_\alpha\| = \|y_\alpha + t_\alpha\|.$$

Kuna F on mittelaendav, siis

$$\|y - y'\| \leq \|x - x'\| \text{ ehk } \|y_\alpha - t_\alpha\| \leq 1 - \|x_\beta\|$$

ning

$$\|y - y''\| \leq \|x - x''\| \text{ ehk } \|y_\alpha + t_\alpha\| \leq 1 + \|x_\beta\|.$$

Kui mõni võrratustest $\|y_\alpha - t_\alpha\| \leq 1 - \|x_\beta\|$ ja $\|y_\alpha + t_\alpha\| \leq 1 + \|x_\beta\|$ oleks range, siis kolmnurga võrratusest saaksime

$$\|t_\alpha - (-t_\alpha)\| \leq \|t_\alpha - y_\alpha\| + \|y_\alpha - (-t_\alpha)\| < 2,$$

mis pole aga võimalik, sest $t_\alpha \in S_\alpha$ tõttu $\|t_\alpha - (-t_\alpha)\| = 2$. Järelikult kehtivad need võrratused võrdustena. Kuna ruum X_α on rangelt kumer, $t_\alpha \in S_\alpha$ ja $\|x_\beta\| \in [0, 1]$, siis järelduse 1.1 kohaselt annavad need kaks võrdust seose $y_\alpha = \|x_\beta\|t_\alpha$, mis aga oligi see, mida tahtsime näidata. Sellega oleme induktsiooni lõpetanud.

Oleme näidanud, et $G = G^*$. Tõestuse lõpetamiseks rakendame järeldust 1.6. □

3.3 Tõestus kahe ruumi puhul

Selles jaotises tõestame, et kahe rangelt kumera Banachi ruumi ℓ_∞ -summa ühikera on meetrilise ruumina plastiline. Selle tarbeks näitame, et kahe rangelt kumera Banachi ruumi ℓ_∞ -summa X ja mittelaiendava bijektsiooni $F : B_X \rightarrow B_X$ korral rahuldab kujutus F tingimust $F(\text{ext } B_X) \subset \text{ext } B_X$, mis on eelmises jaotises tõestatud teoreemi 3.14 kohaselt üks piisavaid tingimusi F isomeetriaks olemise jaoks. Siin esitatud tõestus on algusosa artiklis [7] esitatud kahe rangelt kumera Banachi ruumi ℓ_∞ -summa ühikera plastilisuse tõestusest.

Teoreem 3.15. *Kui X_1 ja X_2 on rangelt kumerad Banachi ruumid, siis ruumil $X_1 \oplus_\infty X_2$ on plastiline ühikera.*

Tõestus. Tähistame $X = X_1 \oplus_\infty X_2$. Kui mõni ruumidest X_1 ja X_2 on triviaalne, siis on X rangelt kumer, kuid rangelt kumera Banachi ruumi ühikera plastilisus on meile varasemast juba teada. Seega võime edaspidi eeldada, et ruumid X_1 ja X_2 on mitte triviaalsed. Kui ruumid X_1 ja X_2 on mõlemad ühemõõtmelised, on ruum X ise lõplikumõõtmeline. Varasemast aga teame, et plastiline on ka iga lõplikumõõtmelise Banachi ruumi ühikera. Seega jääb meil kaks juhtu. Üks on see, et mõlemad ruumid on vähemalt kahemõõtmelised. Teine on see, et üks kahest ruumist on ühemõõtmeline ja teine vähemalt kahemõõtmeline. Nende kahe juhu puhul on tõestus veidi erinev.

Olgu $F : B_X \rightarrow B_X$ mingi mittelaiendav bijektsioon. Tahame näidata, et F on isomeetria. Teoreemi 3.14 kohaselt piisab selleks veenduda, et kehtib $F(\text{ext } B_X) \subset \text{ext } B_X$. Tähistame $G = F^{-1}$. Iga $x \in X$ korral tähistagu x_1 ja x_2 vastavalt selle esimest ja teist komponenti. Tähistagu B_1 ja B_2 vastavalt ruumide X_1 ja X_2 ühikerasid ning S_1 ja S_2 nende ühiksfääre. Tuletame meelde, et $B_X = B_1 \times B_2$ ning $\text{ext } B_X = S_1 \times S_2$. Toome sisse tähistused

$$\begin{aligned} H_1 &= \{x \in B_X : \|x_1\| \geq \|x_2\|\}, \\ H_2 &= \{x \in B_X : \|x_2\| \geq \|x_1\|\}, \\ E &= \{x \in B_X : \|x_1\| = \|x_2\|\}. \end{aligned}$$

Paneme tähele, et $E = \{\alpha x : \alpha \in [0, 1], x \in \text{ext } B_X\}$. Lause 1.3 punkti 4 kohaselt seega $G(E) \subset E$, millest omakorda $F(H_1 \cup H_2) \subset H_1 \cup H_2$. Järgnev sõltub ruumide X_1 ja X_2 mõõtmete arvust.

Juht 1. Vaatleme kõigepealt juhtu, kus mõlemad ruumid on vähemalt kahemõõtmelised. Näitame, et sel juhul on hulga $H_1 \cup H_2$ sidusad komponendid

hulgad H_1 ja H_2 . Esiteks, kuna seosega $f(x) = \|x_1\| - \|x_2\|$ defineeritud funktsioon $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ on pidev, siis pideva joone $\xi : [0, 1] \rightarrow B_X$ korral on pidev ka kujutus $g = f \circ \xi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Kui aga $\xi(0) \in H_1$ ja $\xi(1) \in H_2$, siis $g(0) > 0$ ning $g(1) < 0$, mistõttu leidub g pidevuse kohaselt selline $t \in (0, 1)$, et $g(t) = 0$ ehk $\xi(t) \in E$. Seega ei leidu sellist pidevat joont $\xi : [0, 1] \rightarrow H_1 \cup H_2$, mille puhul $\xi(0) \in H_1$ ja $\xi(1) \in H_2$. On jäänud näidata, et hulgad H_1 ja H_2 on sidusad. Näitame seda H_1 varal, H_2 jaoks on arutluskäik samasugune. Olgu $a \in H_1$ ja $b \in H_1$ suvalised. Kuna $a, b \in H_1$, siis $\|a_1\| > \|a_2\|$ ning $\|b_1\| > \|b_2\|$, mistõttu a_1 ja b_1 on nullist erinevad. Vaatleme punkte $a' = (a_1/\|a_1\|, a_2)$ ja $b' = (b_1/\|b_1\|, b_2)$. Kuna $a, b, a', b' \in B_X$ ning B_X on kumer, siis lõigud $[a, a']$ ja $[b, b']$ sisalduvad hulgas B_X . Kuna iga $\lambda \in [0, 1]$ korral

$$\|(1 - \lambda)a_1 + \lambda a_1/\|a_1\|\| = (1 - \lambda)\|a_1\| + \lambda \geq \|a_1\| > \|a_2\|,$$

siis $[a, a'] \subset H_1$. Analoogiliselt saame, et $[b, b'] \subset H_1$. On jäänud näidata, et leidub pidev joon $\xi : [0, 1] \rightarrow H_1$, mis ühendab punkte a' ja b' . Kuna $a_1/\|a_1\|$ ja $b_1/\|b_1\|$ on sfääri S_1 elemendid ning ruum X_1 on vähemalt kahemõõtmeline, siis lause 1.7 kohaselt leidub pidev joon $\xi_1 : [0, 1] \rightarrow S_1$, kus $\xi_1(0) = a_1/\|a_1\|$ ja $\xi_1(1) = b_1/\|b_1\|$. Defineerime joone ξ seosega $\xi(\lambda) = (\xi_1(\lambda), \xi_2(\lambda))$, kus $\xi_2(\lambda) = (1 - \lambda)a_2 + \lambda b_2$. Kuna $a_2, b_2 \in B_2$, siis B_2 kumeruse tõttu $\xi_2(\lambda) \in B_2$ iga $\lambda \in [0, 1]$ korral. Kuna $\xi_1(\lambda) \in S_1$ ja $\xi_2(\lambda) \in B_2$, siis $\xi(\lambda) \in B_X$. Lisaks, kuna $\|a_1\| > \|a_2\|$ ja $\|b_1\| > \|b_2\|$, siis $\|a_2\|$ ja $\|b_2\|$ on ühest väiksemad, mistõttu iga $\lambda \in [0, 1]$ korral

$$\|\xi_2(\lambda)\| = \|(1 - \lambda)a_2 + \lambda b_2\| \leq (1 - \lambda)\|a_2\| + \lambda\|b_2\| < 1.$$

Kuna iga $\lambda \in [0, 1]$ korral $\|\xi_1(\lambda)\| = 1$ ja $\|\xi_2(\lambda)\| < 1$, siis $\text{Im } \xi \subset H_1$. Ilmselt on ξ ka pidev.

Nüüd, kuna hulga $H_1 \cup H_2$ sidusad komponendid on H_1 ja H_2 , kusjuures F on pidev ja $F(H_1 \cup H_2) \subset H_1 \cup H_2$, siis on meil neli võimalust:

1. $F(H_1) \subset H_1$ ja $F(H_2) \subset H_1$,
2. $F(H_1) \subset H_1$ ja $F(H_2) \subset H_2$,
3. $F(H_1) \subset H_2$ ja $F(H_2) \subset H_1$,
4. $F(H_1) \subset H_2$ ja $F(H_2) \subset H_2$.

Veendume, et variandid 1 ja 4 on välistatud. Näitame seda juhu 1 varal, juhu 4 puhul on arutluskäik analoogiline. Järgnevas tähistab \bar{A} hulga A sulundit. Paneme tähele, et kuna B_X on X kinnine alamhulk, siis $A \subset B_X$ korral

on A sulund B_X suhtes sama, mis A sulund X suhtes. Viimase tõttu ei pea me täpsustama, mille suhtes sulundit võtame. Kuna $F(H_1) \subset H_1$ ja $F(H_2) \subset H_1$, siis F pidevusest järeldub, et $F(\overline{H_1}) \subset \overline{H_1}$ ja $F(\overline{H_2}) \subset \overline{H_1}$. Paneme tähele, et $\overline{H_1} = H_1 \cup E$ ja $\overline{H_2} = H_2 \cup E$. Kuna $\overline{H_1} \cup \overline{H_2} = B_X$ ning $F(\overline{H_1}) \subset \overline{H_1}$ ja $F(\overline{H_2}) \subset \overline{H_1}$, siis $F(B_X) \subset \overline{H_1}$ ehk $F(B_X) \subset H_1 \cup E$. Kuna aga $B_X \setminus (H_1 \cup E) = H_2$ ning H_2 on mittetühi, siis $F(B_X) \subset H_1 \cup E$ läheb vastuollu F sürjektiivsusega. Juhtu 4 saab käsitleda analoogilisel viisil.

Seega jäävad meil juhud 2 ja 3. Juhu 2 korral järelduvad funktsiooni F pidevusest ning seostest $F(H_1) \subset H_1$ ja $F(H_2) \subset H_2$ tingimused $F(\overline{H_1}) \subset \overline{H_1}$ ja $F(\overline{H_2}) \subset \overline{H_2}$. Kuna aga $E \subset \overline{H_1}$ ning $E \subset \overline{H_2}$, siis saame $F(E) \subset \overline{H_1}$ ja $F(E) \subset \overline{H_2}$, millest $F(E) \subset \overline{H_1} \cap \overline{H_2}$ ehk $F(E) \subset E$. Sama tulemuseni võime analoogiliselt ka juhu 3 korral jõuda.

Oleme nüüd valmis näitama, et $F(\text{ext } B_X) \subset \text{ext } B_X$. Olgu $x \in \text{ext } B_X$ suvaline. Kuna $x \in E$ ning $F(E) \subset E$, siis $F(x) \in E$ ehk $F(x) = \alpha y$, kus $\alpha \in [0, 1]$ ja $y \in \text{ext } B_X$. Lause 1.3 punkti 4 kohaselt aga $G(\alpha y) = \alpha G(y)$. Viimasest kahest võrdusest saame $x = \alpha G(y)$. Kuna $y \in S_X$, siis lause 1.3 punkti 3 kohaselt ka $G(y) \in S_X$. Võrduse $x = \alpha G(y)$ mõlemast poolest normi võttes saame seega $\alpha = 1$. Kuna $F(x) = \alpha y$ ja $\alpha = 1$, siis $F(x) = y$, millest $F(x) \in \text{ext } B_X$. Oleme näidanud, et kehtib sisalduvus $F(\text{ext } B_X) \subset \text{ext } B_X$. Tõestuse lõpetamiseks piisab rakendada eelmises jaotises tõestatud teoreemi 3.14.

Juht 2. Vaatleme nüüd juhtu, kus üks kahest ruumist on \mathbb{R} ja teine vähemalt kahemõõtmeline. Üldisust kitsendamata eeldame, et X_1 on vähemalt kahemõõtmeline ja $X_2 = \mathbb{R}$. Määrame hulga $H_1 \cup H_2$ sidusad komponendid. Jätkuvalt kehtib see, et ei leidu sellist pidevat joont $\xi : [0, 1] \rightarrow H_1 \cup H_2$, mille puhul $\xi(0) \in H_1$ ja $\xi(1) \in H_2$. Jätkuvalt kehtib see, et hulk H_1 on sidus. Võtame nüüd aga vaatluse alla hulga H_2 . Kui $x \in H_2$, siis $|x_2| > \|x_1\|$, mistõttu $x_2 \neq 0$. Seega iga $x \in H_2$ korral kas $x_2 > 0$ või $x_2 < 0$. Hulgad $H_2^+ = \{x \in H_2 : x_2 > 0\}$ ja $H_2^- = \{x \in H_2 : x_2 < 0\}$ moodustavad seega hulga H_2 tükelduse. Näitame, et hulga H_2 sidusad komponendid on H_2^+ ja H_2^- . Tähistagu $\pi_2 : X \rightarrow \mathbb{R}$ ruumi X projektsiooni oma teisele komponendile. Paneme tähele, et π_2 on pidev funktsioon. Pideva joone $\xi : [0, 1] \rightarrow H_2$ korral on seega pidev ka kujutus $g = \pi_2 \circ \xi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Kui aga $\xi(0) \in H_2^+$ ja $\xi(1) \in H_2^-$, siis $g(0) > 0$ ja $g(1) < 0$, mistõttu peab g pidevuse tõttu leiduma selline $t \in (0, 1)$, et $g(t) = 0$. Kuna aga iga $x \in H_2$ korral $x_2 \neq 0$, siis viimane läheb vastuollu tingimusega $\xi(t) \in H_2$. Niisiis ei leidu sellist pidevat joont $\xi : [0, 1] \rightarrow H_2$, mille puhul $\xi(0) \in H_2^+$ ja $\xi(1) \in H_2^-$. Seega on jäänud näidata, et hulgad H_2^+ ja H_2^- on sidusad. Olgu $a, b \in H_2$ ja $\lambda \in [0, 1]$. Siis $|a_2| > \|a_1\|$

ja $|b_2| > \|b_1\|$ ning

$$\|(1 - \lambda)a_1 + \lambda b_1\| \leq (1 - \lambda)\|a_1\| + \lambda\|b_1\| < (1 - \lambda)|a_2| + \lambda|b_2|.$$

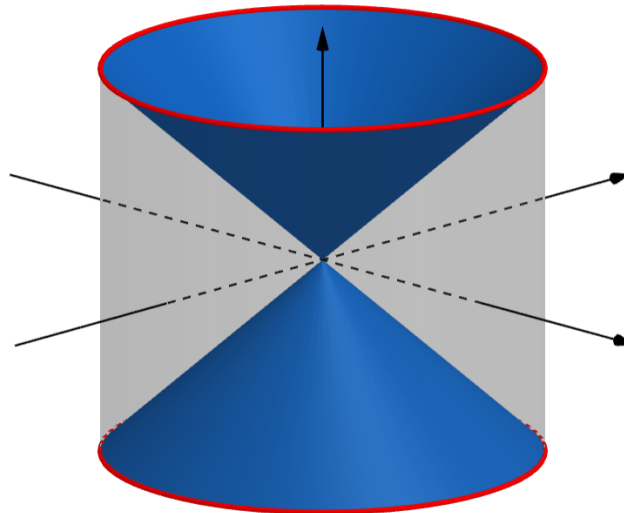
Kui $a, b \in H_2^+$, siis $(1 - \lambda)a_2 \geq 0$ ja $\lambda b_2 \geq 0$. Kui $a, b \in H_2^-$, siis $(1 - \lambda)a_2 \leq 0$ ja $\lambda b_2 \leq 0$. Kummalgi juhul

$$|(1 - \lambda)a_2 + \lambda b_2| = |(1 - \lambda)a_2| + |\lambda b_2| = (1 - \lambda)|a_2| + \lambda|b_2|.$$

Kahte viimast valemirida kokku võttes saame, et iga $\lambda \in [0, 1]$ korral

$$\|(1 - \lambda)a_1 + \lambda b_1\| < |(1 - \lambda)a_2 + \lambda b_2|,$$

millest $(1 - \lambda)a + \lambda b \in H_2$. Kui $a, b \in H_2^+$, siis $a_2 > 0$ ja $b_2 > 0$, millest $(1 - \lambda)a_2 + \lambda b_2 > 0$. Analoogiliselt, kui $a, b \in H_2^-$, siis $a_2 < 0$ ja $b_2 < 0$, millest $(1 - \lambda)a_2 + \lambda b_2 < 0$. Niisiis $a, b \in H_2^+$ korral $[a, b] \subset H_2^+$ ning $a, b \in H_2^-$ korral $[a, b] \subset H_2^-$. Järelikult on hulgad H_2^+ ja H_2^- kumerad ja seega ka sidusad. Kokkuvõttes saame, et hulga $H_1 \cup H_2$ sidusad komponendid on H_1 ning H_2^+ ja H_2^- . Paremat ettekujutust vaadeldava olukorra kohta võib pakkuda järgmine joonis.



Joonis 1: Joonisel on kujutatud kolmemõõtmelise ruumi $X = \ell_2^2 \oplus_\infty \mathbb{R}$ ühikkeera. Hulk $\text{ext } B_X$ on tähistatud punasega, hulk E sinisega. Allesjäänu jaotub kolmeks üksteisega ühendamata osaks. Koonused on hulgad H_2^+ ja H_2^- . Neid ümbritsev võõnd on hulk H_1 . Kui teine komponent oleks vähemalt kahemõõtmeline, oleksid koonused üksteisega nii-öelda „neljandas mõõtmes“ ühendatud.

Nüüd, kuna hulga $H_1 \cup H_2$ sidusad komponendid on H_1 , H_2^+ ja H_2^- , kusjuures F on pidev ja $F(H_1 \cup H_2) \subset H_1 \cup H_2$, siis analoogiliselt eelmise juhuga on meil seekord $3^3 = 27$ võimalust (nii mitu on funktsioone kolmeelemendilisest hulgast iseendasse). Kuna F on pidev, siis $F(\overline{H_1}) \subset \overline{F(H_1)}$, $F(\overline{H_2^+}) \subset \overline{F(H_2^+)}$ ja $F(\overline{H_2^-}) \subset \overline{F(H_2^-)}$. Paneme tähele, et $\overline{H_2^+} = H_2^+ \cup E^+$ ja $\overline{H_2^-} = H_2^- \cup E^-$, kus $E^+ = \{x \in E : x \geq 0\}$ ja $E^- = \{x \in E : x \leq 0\}$. Näeme, et hulgad $\overline{H_1}$, $\overline{H_2^+}$ ja $\overline{H_2^-}$ katavad kera B_X . Funktsiooni F sürjektiivsuse tõttu peavad seega sama tegema ka nende kujutised funktsiooniga F ning viimase kolme sisalduvuse tõttu seega ka hulgad $\overline{F(H_1)}$, $\overline{F(H_2^+)}$ ja $\overline{F(H_2^-)}$. Kui aga F kujutab mõned kaks erinevat komponenti samasse komponenti, jääb mõni hulkadest H_1 , H_2^+ ja H_2^- hulkade $\overline{F(H_1)}$, $\overline{F(H_2^+)}$ ja $\overline{F(H_2^-)}$ poolt katmata. Analoogiliselt eelmise juhuga jääb meil seega alles vaid $3! = 6$ juhtu (nii mitu on permutatsioone kolmest elemendist).

Näitame nüüd aga, et peab kehtima $F(H_1) \subset H_1$. Oletame vastuväiteliselt, et kehtib $F(H_1) \subset H_2^+$ või $F(H_1) \subset H_2^-$. Vaatleme näiteks esimest juhtu. Kujutuse F pidevuse tõttu saame $F(\overline{H_1}) \subset \overline{H_2^+}$ ehk $F(H_1 \cup E) \subset H_2^+ \cup E^+$. Kuna $E \subset H_1 \cup E$ ja $F(H_1 \cup E) \subset H_2^+ \cup E^+$, siis saame $F(E) \subset H_2^+ \cup E^+$. Viimane läheb aga vastuollu sisalduvusega $E \subset F(E)$, mis järeldub varasemalt saadud seosest $G(E) \subset E$. Analoogilisel viisil jõuame vastuoluni ka juhu $F(H_1) \subset H_2^-$ puhul.

Nüüd on meil ainult kaks võimalust alles jäänud. Üks on see, et $F(H_1) \subset H_1$, $F(H_2^+) \subset H_2^+$ ja $F(H_2^-) \subset H_2^-$. Teine on see, et $F(H_1) \subset H_1$, $F(H_2^+) \subset H_2^-$ ja $F(H_2^-) \subset H_2^+$. Esimese juhu korral järelduvad sisalduvustest $F(H_2^+) \subset H_2^+$ ja $F(H_2^-) \subset H_2^-$ sisalduvused $F(\overline{H_2^+}) \subset \overline{H_2^+}$ ja $F(\overline{H_2^-}) \subset \overline{H_2^-}$. Kuna hulkade $\overline{H_2^+}$ ja $\overline{H_2^-}$ ühend on $\overline{H_2}$, siis saame siit $F(\overline{H_2}) \subset \overline{H_2}$. Sisalduvusest $F(H_1) \subset H_1$ järeldub veel lisaks seos $F(\overline{H_1}) \subset \overline{H_1}$. Oleme näidanud, et $F(\overline{H_1}) \subset \overline{H_1}$ ja $F(\overline{H_2}) \subset \overline{H_2}$. Samade tulemusteni võib analoogiliselt ka teise juhu puhul jõuda. Kuna $E \subset \overline{H_1}$ ja $E \subset \overline{H_2}$, siis saame siit $F(E) \subset \overline{H_1}$ ja $F(E) \subset \overline{H_2}$, millest $F(E) \subset \overline{H_1} \cap \overline{H_2}$ ehk $F(E) \subset E$. Nagu tegime seda kahe vähemalt kahemõõtmelise ruumi juhul, saame sisalduvusest $F(E) \subset E$ nüüd ka sisalduvuse $F(\text{ext } B_X) \subset \text{ext } B_X$ järeldada. Tõestuse lõpetamiseks piisab rakendada eelmises jaotises tõestatud teoreemi 3.14. \square

Viited

- [1] B. Cascales, V. Kadets, J. Orihuela ja E. J. Wingler. „Plasticity of the unit ball of a strictly convex Banach space“. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas* 110 (2016), lk. 723–727. DOI: <https://doi.org/10.1007/s13398-015-0261-3>.
- [2] N. Leo. „Plasticity of the unit ball of a Banach space“. Bakalaureusetöö. Tartu Ülikool, 2021. URL: <http://hdl.handle.net/10062/73101>.
- [3] V. Kadets ja O. Zavarzina. „Plasticity of the unit ball of ℓ_1 “. *Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics* 83 (2016), lk. 4–9. DOI: <https://doi.org/10.26565/2221-5646-2016-83-01>.
- [4] V. Kadets ja O. Zavarzina. „Nonexpansive bijections to the unit ball of the ℓ_1 -sum of strictly convex Banach spaces“. *Bulletin of the Australian Mathematical Society* 97.2 (2018), lk. 285–292. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0004972717001150>.
- [5] C. Angosto, V. Kadets ja O. Zavarzina. „Non-expansive bijections, uniformities and polyhedral faces“. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 471.1-2 (2019), lk. 38–52. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2018.10.058>.
- [6] N. Leo. „Plasticity of the unit ball of c and c_0 “. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 507.1 (2022). DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2021.125718>.
- [7] R. Haller, N. Leo ja O. Zavarzina. „Two new examples of Banach spaces with a plastic unit ball“. *Acta et Commentationes Universitatis Tartuensis de Mathematica* 26.1 (2022). DOI: <https://doi.org/10.12697/ACUTM.2022.26.07>.
- [8] M. Fakhoury. „Plasticity of the unit ball of some $C(K)$ spaces“. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 530.2 (2024). DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2023.127688>.
- [9] K. A. Kurik. „Partial result on the plasticity of the unit ball of the ℓ_∞ -sum of finitely many strictly convex Banach spaces“. Bakalaureusetöö. Tartu Ülikool, 2023. URL: <https://hdl.handle.net/10062/91231>.
- [10] K. A. Kurik. *Conditional plasticity of the unit ball of the ℓ_∞ -sum of finitely many strictly convex Banach spaces*. 2024. arXiv: 2403.09245 [math.FA].

- [11] O. Zavarzina. „Nonexpansive bijections between unit balls of Banach spaces“. *Ann. Funct. Anal* 9.2 (2018), lk. 271–281. DOI: <https://doi.org/10.1215/20088752-2017-0050>.

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Nikita Leo,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) minu loodud teose

„Banachi ruumi ühikera plastilisus“,

mille juhendajad on Rainis Haller ja Olesia Zavarzina, reprodutseerimiseks eesmärgiga seda säilitada, sealhulgas lisada digitaalarhiivi DSpace kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.

2. Annan Tartu Ülikoolile loa teha punktis 1 nimetatud teos üldsusele kättesaadavaks Tartu Ülikooli veebikeskkonna, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace kaudu Creative Commons'i litsentsiga CC BY NC ND 4.0, mis lubab autorile viidates teost reprodutseerida, levitada ja üldsusele suunata ning keelab luua tuletatud teost ja kasutada teost ärieesmärgil, kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.
3. Olen teadlik, et punktides 1 ja 2 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.
4. Kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei riku ma teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse õigusaktidest tulenevaid õigusi.

Nikita Leo
22.05.2024