I. PETERSEN · H. ROOS

Kõrgema matemaatika ülesannete kogu

II

I. PETERSEN, H. ROOS

KÕRGEMA MATEMAATIKA ÜLESANNETE KOGU

II

EESTI RIIKLIK KIRJASTUS
TALLINN 1961

Kaane kujundus
V. Tomassov

§ 15. MITME MUUTUJA FUNKTSIOONID

Kahe muutuja funktsiooni $z = f(x, y)$ m ä ä r a m i s p i i r k o n n a k s nimetatakse kõigi nende punktide $P(x; y)$ hulka, millele on selle funktsiooni definitsiooniga vastavusse seatud muutuja z üks kindel väärtus.

Kui funktsiooni $z = f(x, y)$ määramispiirkonna punktid on xy-tasapinna kõikidest ülejäänud punktidest eraldatud pideva joonega, siis nimetatakse määramispiirkonda kinniseks, kui rajajoone kõik punktid kuuluvad määramispiirkonda, ja lahtiseks, kui rajajoone ükski punkt ei kuulu määramispiirkonda.

Kahe muutuja funktsiooni $z = f(x, y)$ määramispiirkonna need punktid, kus funktsioonil on konstantne väärtus c, moodustavad joone, mida nimetatakse n i v o o j o o n e k s. Nivoojoone võrrand on

$$f(x, y) = c. \tag{1}$$

Kolme muutuja funktsiooni $u = \varphi(x, y, z)$ puhul moodustavad punktid, kus funktsioonil on konstantne väärtus c, n i v o o p i n n a $\varphi(x, y, z) = c$.

Arvu A nimetatakse kahe muutuja funktsiooni $f(x, y)$ p i i r v ä ä r t u s e k s punktis $(x_0; y_0)$ ja tähistatakse

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A,$$

kui iga $\varepsilon > 0$ puhul leidub niisugune arv $\delta(\varepsilon) > 0$, et

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon, \text{ kui}$$
$$0 < (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta(\varepsilon). \tag{2}$$

Viimase võrratuse võib asendada ka võrratustega

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \text{ja} \quad 0 < |y - y_0| < \delta.$$

Kui on olemas $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A$ ja $\varphi(y) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x, y)$, siis on $\lim\limits_{y \to y_0} \varphi(y) = \lim\limits_{y \to y_0} \lim\limits_{x \to x_0} f(x, y) = A$, või kui samal eeldusel on $\psi(x) = \lim\limits_{y \to y_0} f(x, y)$, siis on $\lim\limits_{x \to x_0} \psi(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \lim\limits_{y \to y_0} f(x, y) = A$.

Funktsiooni $z = f(x, y)$ nimetatakse *pidevaks* tema määramispiirkonna punktis $(x_0; y_0)$, kui

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0). \tag{3}$$

Funktsioon on pidev teatavas piirkonnas, kui ta on pidev selle piirkonna igas punktis.

Funktsiooni $z = f(x, y)$ *osatuletisteks* nimetatakse piirväärtusi

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Mitme muutuja funktsiooni osatuletise leidmiseks mingi muutuja järgi tuleb funktsiooni diferentseerida selle muutuja järgi kui ühe muutuja funktsiooni, vaadeldes ülejäänud muutujaid konstantidena.

Funktsiooni $z = f(x, y)$ teist järku osatuletised defineeritakse selle funktsiooni esimest järku osatuletiste osatuletistena:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{x^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{y^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

Kõrgemat järku osatuletised defineeritakse analoogiliselt. Kui kõrgemat järku segaosatuletised on pidevad, siis nad ei sõltu diferentseerimise järjekorrast.

Pinna $z = f(x, y)$ puutuvtasapind punktis $(x_0; y_0; z_0)$ on

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) \tag{4}$$

ja normaal

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}. \tag{5}$$

Pinna $F(x, y, z) = 0$ puutuvtasapind punktis $(x_0; y_0; z_0)$ on

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + \\ + F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0 \tag{6}$$

ja normaal

$$\frac{x-x_0}{F'_x(x_0,\ y_0,\ z_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(x_0,\ y_0,\ z_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(x_0,\ y_0,\ z_0)}. \tag{7}$$

Funktsiooni $z=f(x,\ y)$ t ä i s d i f e r e n t s i a a l i k s dz nimetatakse selle funktsiooni juurdekasvu $\Delta z=f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-f(x,\ y)$ seda osa, mis oleneb sõltumatute muutujate juurdekasvudest Δx ja Δy lineaarselt ning erineb funktsiooni juurdekasvust Δz niisuguse suuruse võrra, mis on Δx ja Δy suhtes kõrgemat järku lõpmatult vähenev:

$$\Delta z=dz+\alpha\,\Delta x+\beta\,\Delta y, \tag{8}$$

kus $\alpha\to 0$ ja $\beta\to 0$, kui $\Delta x\to 0$ ja $\Delta y\to 0$.

Kui mitme muutuja funktsioonil on mingis punktis olemas pidevad esimest järku osatuletised kõigi muutujate järgi, siis on tal selles punktis olemas täisdiferentsiaal ning funktsiooni nimetatakse selles punktis d i f e r e n t s e e r u v a k s.

Diferentseeruva funktsiooni $z=f(x,y)$ täisdiferentsiaal avaldub kujul

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}\,dx+\frac{\partial z}{\partial y}\,dy. \tag{9}$$

Kui x ja y on sõltumatud muutujad, siis on valemis (9) $dx=\Delta x$ ja $dy=\Delta y$. Kui aga x ja y on omakorda mingid diferentseeruvad funktsioonid, siis on dx ja dy nende funktsioonide täisdiferentsiaalid.

Funktsiooni $z=f(x,\ y)$ n-järku täisdiferentsiaal avaldub kujul

$$d^nz=d(d^{n-1}z)=\left(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}\right)^n z. \tag{10}$$

Eriti

$$d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,dx^2+2\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\,dx\,dy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,dy^2. \tag{11}$$

Funktsiooni $z=f(x,\ y)$ muutujate x ja y absoluutsete vigade ülemmääradele $|\Delta x|$ ja $|\Delta y|$ vastav f u n k t s i o o n i a b s o l u u t s e v e a ü l e m m ä ä r on väikeste Δx ja Δy väärtuste puhul praktiliselt hinnatav võrratusega

$$|\Delta z|\leqslant|f'_x(x,\ y)\,\Delta x|+|f'_y(x,\ y)\,\Delta y|. \tag{12}$$

Diferentseeruva funktsiooni $u=f(x,\ y,\ z)$ g r a d i e n d i k s nimetatakse vektorit

$$\operatorname{grad} u=\left\{\frac{\partial u}{\partial x};\ \frac{\partial u}{\partial y};\ \frac{\partial u}{\partial z}\right\}. \tag{13}$$

Gradient on risti nivoopinnaga.

Funktsiooni $u=f(x, y, z)$ tuletiseks ühikvektori $\mathbf{r}=\{\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma\}$ suunas (suunatuletiseks) nimetatakse avaldist

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\mathbf{r}\cdot\operatorname{grad} u=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma. \tag{14}$$

Gradiendi suunas on funktsiooni tuletis maksimaalne ja võrdub gradiendi absoluutväärtusega:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_{max}=\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}. \tag{15}$$

Kui z on liitfunktsioon $z=z(u, v)$, kus $u=u(x, y)$ ja $v=v(x, y)$, siis z osatuletised x ja y järgi avalduvad kujul

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}&=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},\\ \frac{\partial z}{\partial y}&=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.\end{aligned} \tag{16}$$

Kui $z=z(x, y, u, v)$, kus $u=u(x, y)$ ja $v=v(x, y)$, siis funktsiooni z kui ainult x ja y funktsiooni täisosatuletised x ja y järgi on vastavalt

$$\begin{aligned}\frac{Dz}{Dx}&=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},\\ \frac{Dz}{Dy}&=\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.\end{aligned} \tag{17}$$

Kui võrrand $F(x, y, z)=0$ määrab z muutujate x ja y diferentseeruva ilmutamata funktsioonina ja $F'_z(x, y, z)\neq 0$, siis avalduvad selle funktsiooni osatuletised kujul

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}. \tag{18}$$

Kui võrrand $F(x, y)=0$ määrab y muutuja x funktsioonina ja $F'_y(x, y)\neq 0$, siis

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}. \tag{19}$$

Kui võrrandisüsteem

$$\begin{cases} F(x, y, u, v)=0,\\ G(x, y, u, v)=0\end{cases} \tag{20}$$

määrab u ja v muutujate x ja y diferentseeruvate funktsioonidena, siis on nende funktsioonide osatuletised $\frac{\partial u}{\partial x}$ ja $\frac{\partial v}{\partial x}$ avaldatavad süsteemist

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=0,\\ &\frac{\partial G}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=0\end{aligned}\right. \tag{21}$$

eeldusel, et $\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0.$

Süsteem (21) on saadud süsteemi (20) võrrandite diferentseerimisel x järgi, kusjuures u ja v on vaadeldud x ja y funktsioonidena. Analoogiliselt saab süsteemi (20) võrrandeid y järgi diferentseerides tuletada võrrandisüsteemi, millest on avaldatavad $\frac{\partial u}{\partial y}$ ja $\frac{\partial v}{\partial y}$.

Kui funktsioon $z=f(x, y)$ on punkti $(x_0; y_0)$ ümbruses $n+1$ korda diferentseeruv, siis kehtib selles piirkonnas Taylori valem:

$$f(x, y)=f(x_0, y_0)+\frac{1}{1!}\left[(x-x_0)\frac{\partial}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right]f(x_0, y_0)+$$
$$+\frac{1}{2!}\left[(x-x_0)\frac{\partial}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right]^2 f(x_0, y_0)+\ldots+$$
$$+\frac{1}{n!}\left[(x-x_0)\frac{\partial}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right]^n f(x_0, y_0)+R_n, \tag{22}$$

kus jääkliige

$$R_n=\frac{1}{(n+1)!}\left[(x-x_0)\frac{\partial}{\partial x}+\right.$$
$$\left.+(y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{n+1} f[x_0+\Theta(x-x_0), y_0+\Theta(y-y_0)], \tag{23}$$

milles

$$0<\Theta<1.$$

Erijuhul, kus $x_0=0$ ja $y_0=0$, nimetatakse valemit (22) Maclaurini valemiks.

Punkti $(x_0; y_0)$ nimetatakse funktsiooni $z=f(x, y)$ maksimumkohaks, kui punkti $(x_0; y_0)$ küllalt väikeses ümbruses on $f(x_0, y_0) > f(x, y)$, ja miinimumkohaks, kui $f(x_0, y_0) < f(x, y)$.

Funktsiooni $z = f(x, y)$ statsionaarseks punktiks nimetatakse punkti, mille koordinaadid rahuldavad võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 0, \\ f'_y(x, y) = 0. \end{cases} \tag{24}$$

Diferentseeruva funktsiooni ekstreemumkohaks võib olla ainult statsionaarne punkt, s. t. süsteem (24) on ekstreemumkoha olemasolu tarvilikuks tingimuseks.

Piisavaks tingimuseks, et statsionaarne punkt $(x_0; y_0)$ oleks funktsiooni $z = f(x, y)$ ekstreemumkoht, on

$$f''_{x^2}(x_0, y_0) f''_{y^2}(x_0, y_0) - [f''_{xy}(x_0, y_0)]^2 > 0. \tag{25}$$

Kui seejuures $f''_{x^2}(x_0, y_0) > 0$, siis on $(x_0; y_0)$ funktsiooni miinimumkoht, ja kui $f''_{x^2}(x_0, y_0) < 0$, siis maksimumkoht.

Kui võrratuse (25) vasak pool on negatiivne, siis punkt $(x_0; y_0)$ ei ole ekstreemumkoht.

Kui võrratuse (25) vasak pool võrdub nulliga, siis jätab see piisav tingimus ekstreemumi küsimuse lahtiseks.

Funktsiooni $z = f(x, y)$ ekstreemumkohad lisatingimusel $\varphi(x, y) = 0$ on funktsiooni

$$w = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y) \tag{26}$$

statsionaarsed punktid, s. t. rahuldavad süsteemi

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial w}{\partial y} = 0, \\ \varphi(x, y) = 0. \end{cases} \tag{27}$$

Diferentseeruv funktsioon võib kinnises lõplikus piirkonnas omandada kõige suurema ja kõige väiksema väärtuse ainult kas mõnes statsionaarses punktis või piirkonna rajajoone punktis.

Nablaoperaatoriks ehk Hamiltoni operaatoriks nimetatakse sümboolset vektorit

$$\nabla = \left\{\frac{\partial}{\partial x};\ \frac{\partial}{\partial y};\ \frac{\partial}{\partial z}\right\}.$$

Vektori $\mathbf{F} = \{X(x, y, z);\ Y(x, y, z);\ Z(x, y, z)\}$ divergentsiks nimetatakse avaldist

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}. \tag{28}$$

Vektori **F** r o o t o r i k s nimetatakse vektorit

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix} =$$

$$= \left\{ \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}; \quad \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}; \quad \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right\}, \tag{29}$$

kus $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ ja $\mathbf{u}_3$ on koordinaattelgede suunalised ühikvektorid.

Näiteid

I. *Leida funktsiooni*

$$z = \ln xy + \arcsin \frac{y-2}{x^3} \tag{*}$$

määramispiirkond.

L a h e n d u s. Antud funktsioon on kahe liidetava summa ja ta määramispiirkonnaks on liidetavate määramispiirkondade ühiste punktide kogu.

Esimene liidetav ($\ln xy$) on määratud, kui $xy > 0$, millest järeldub, et peavad korraga olema rahuldatud kas võrratused $x > 0$ ja $y > 0$ või võrratused $x < 0$ ja $y < 0$. Seega on selle liidetava määramispiirkonnaks koordinaattasapinna I ja III veerand, kusjuures teljed ei kuulu määramispiirkonda.

Teine liidetav $\left(\arcsin \frac{y-2}{x^3}\right)$ on määratud, kui

$$-1 \leqslant \frac{y-2}{x^3} \leqslant 1. \tag{**}$$

Siin esineb kaks võimalust.

1) Kui $x^3 > 0$ ehk $x > 0$, siis, korrutades võrratust (**) avaldisega x^3, saame

$$-x^3 \leqslant y - 2 \leqslant x^3.$$

Liites nüüd nendele võrratustele arvu 2, saame

$$2 - x^3 \leqslant y \leqslant 2 + x^3.$$

Seega kuuluvad teise liidetava määramispiirkonda kõik punktid, mis rahuldavad korraga kolme võrratust

$$x > 0,$$
$$y \geqslant 2 - x^3,$$
$$y \leqslant 2 + x^3.$$

Vastav piirkond on kujutatud joonisel 94.

2) Kui $x^3 < 0$ ehk $x < 0$, siis, korrutades võrratusi (**) avaldisega x^3, saame

$$-x^3 \geqslant y - 2 \geqslant x^3,$$

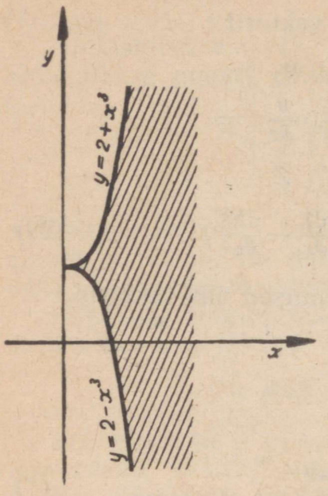
millest

$$2 - x^3 \geqslant y \geqslant 2 + x^3.$$

Seega kuuluvad teise liidetava määramispiirkonda ka kõik punktid, mis rahuldavad korraga võrratusi

$$x < 0,$$
$$y \leqslant 2 - x^3,$$
$$y \geqslant 2 + x^3.$$

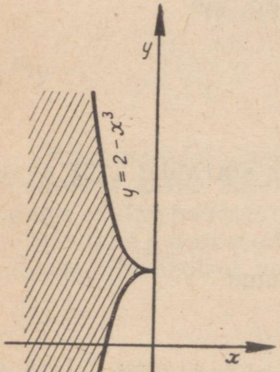
Nendest punktidest koosnev piirkond on esitatud joonisel 95.



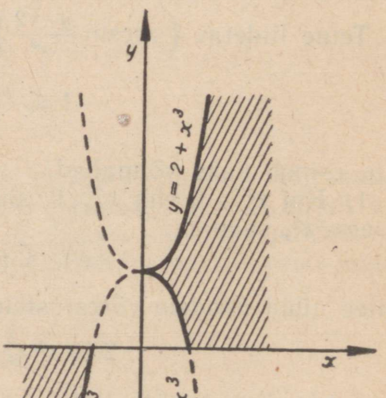
Joon. 94.

Antud funktsioon (*) on seega määratud, kui on rahuldatud korraga kas võrratused

$$x > 0,$$
$$y > 0,$$
$$y \geqslant 2 - x^3,$$
$$y \leqslant 2 + x^3$$



Joon. 95.



Joon. 96.

või võrratused

$$\begin{aligned} x &< 0, \\ y &< 0, \\ y &\leqslant 2 - x^3, \\ y &\geqslant 2 + x^3. \end{aligned}$$

Funktsiooni määramispiirkond on esitatud joonisel 96; x- ja y-telje punktid ei kuulu määramispiirkonda.

II. *Joonestada funktsiooni*

$$z = |2x - y| - x^2$$

nivoojooned, mis vastavad z väärtustele —2, 0 *ja* 4.

Lahendus. Seose (1) kohaselt on nivoojoonte võrrand

$$c = |2x - y| - x^2,$$

millest

$$y = \begin{cases} -x^2 + 2x - c, & \text{kui } y \leqslant 2x, \\ x^2 + 2x + c, & \text{kui } y > 2x, \end{cases}$$

sest

$$|2x - y| = \begin{cases} 2x - y, & \text{kui } 2x - y \geqslant 0 \text{ ehk } y \leqslant 2x, \\ y - 2x, & \text{kui } 2x - y < 0 \text{ ehk } y > 2x. \end{cases}$$

Seega vastab funktsiooni väärtusele $z = -2$ nivoojoone võrrand

$$y = \begin{cases} -x^2 + 2x + 2, & \text{kui } y \leqslant 2x, \\ x^2 + 2x - 2, & \text{kui } y > 2x, \end{cases}$$

funktsiooni väärtusele $z = 0$ nivoojoone võrrand

$$y = \begin{cases} -x^2 + 2x, & \text{kui } y \leqslant 2x, \\ x^2 + 2x, & \text{kui } y > 2x \end{cases}$$

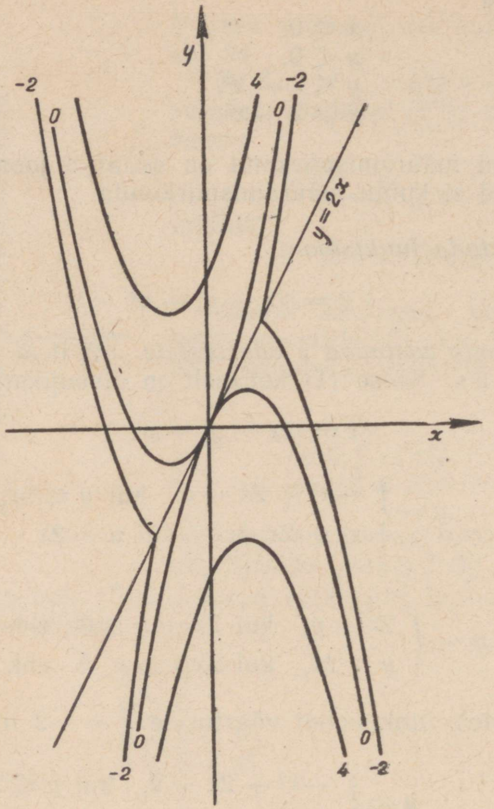
ning funktsiooni väärtusele $z = 4$ nivoojoone võrrand

$$y = \begin{cases} -x^2 + 2x - 4, & \text{kui } y \leqslant 2x, \\ x^2 + 2x + 4, & \text{kui } y > 2x. \end{cases}$$

Vastavad nivoojooned on esitatud joonisel 97.

III. *Piirväärtuse definitsioonist lähtudes näidata, et*

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{3xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} = 0.$$



Joon. 97.

L a h e n d u s. Funktsiooni piirväärtuse definitsiooni (2) kohaselt tuleb leida niisugune funktsioon $\delta(\varepsilon)$, et iga $\varepsilon > 0$ puhul oleks

$$\left| \frac{3xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} - 0 \right| < \varepsilon, \tag{*}$$

niipea kui

$$0 < (x - 0)^2 + (y - 0)^2 = x^2 + y^2 < \delta(\varepsilon).$$

Teisendades avaldist (*), saame

$$\left| \frac{3xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} - 0 \right| = 3|xy| \frac{|x^2 - y^2|}{x^2 + y^2} < 3|xy|,$$

sest

$$|x^2 - y^2| < x^2 + y^2 \quad \text{ehk} \quad \frac{|x^2 - y^2|}{x^2 + y^2} < 1.$$

Et edasi $(|x| - |y|)^2 = x^2 + y^2 - 2|xy|$, siis on $|xy| = \frac{1}{2}[x^2 + y^2 - (|x| - |y|)^2] < \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ ja seega $3|xy| < \frac{3}{2}(x^2 + y^2)$.

Järelikult

$$\left| \frac{3xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} - 0 \right| < \frac{3}{2}(x^2 + y^2).$$

Kui nüüd mistahes $\varepsilon > 0$ puhul $x \neq 0$ ja $y \neq 0$ rahuldavad võrratust $\frac{3}{2}(x^2 + y^2) < \varepsilon$, s. t. $x^2 + y^2 < \frac{2}{3}\varepsilon$, siis nad rahuldavad ka võrratust (*).

Seega on $\delta = \frac{2}{3}\varepsilon$ puhul piirväärtuse definitsiooni tingimus (2) täidetud ja ülesandes püstitatud väide on tõestatud.

IV. *Näidata, et funktsioonil*

$$z = \frac{ax + by}{cx + dy}$$

ei ole piirväärtust punktis (0; 0).

L a h e n d u s. Ülesande lahendamiseks leiame piirväärtused $\lim\limits_{x \to 0} \lim\limits_{y \to 0} z$ ja $\lim\limits_{y \to 0} \lim\limits_{x \to 0} z$. Kui need piirväärtused on olemas, kuid ei ole võrdsed, siis antud funktsioonil ei ole piirväärtust punktis (0; 0).

$$\lim_{x \to 0} \lim_{y \to 0} z = \lim_{x \to 0} \lim_{y \to 0} \frac{ax + by}{cx + dy} = \lim_{x \to 0} \frac{a}{c} = \frac{a}{c}.$$

$$\lim_{y \to 0} \lim_{x \to 0} z = \lim_{y \to 0} \lim_{x \to 0} \frac{ax + by}{cx + dy} = \lim_{y \to 0} \frac{b}{d} = \frac{b}{d}.$$

Et $\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}$ (vastasel korral oleks tegemist triviaalse juhtumiga $z =$ konst.), siis ei ole antud funktsioonil piirväärtust punktis (0; 0).

V. *Leida piirväärtused:*

1) $\lim\limits_{y \to 0} \lim\limits_{x \to 0} x \sin \frac{1}{y}$,

2) $\lim\limits_{x \to 0} \lim\limits_{y \to 0} x \sin \frac{1}{y}$,

3) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} x \sin \frac{1}{y}$.

L a h e n d u s.

1) Et $\lim\limits_{x \to 0} x \sin \frac{1}{y} = 0$, siis ka

$$\lim_{y \to 0} \lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{y} = 0. \tag{*}$$

2) Piirväärtust $\lim\limits_{y \to 0} x \sin \frac{1}{y} = x \lim\limits_{y \to 0} \sin \frac{1}{y}$ ei ole olemas, sest $\sin \frac{1}{y}$ kõigub $y \to 0$ puhul -1 ja $+1$ vahel. Seega ei ole olemas ka piirväärtust $\lim\limits_{x \to 0} \lim\limits_{y \to 0} x \sin \frac{1}{y}$.

3) Eelmise piirväärtuse puudumise tõttu on piirväärtuse $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} x \sin \frac{1}{y}$ olemasolu küsimus seni lahtine. Kui see piirväärtus aga olemas on, siis peab ta võrduma piirväärtusega (*), s. o. arvuga 0. Antud juhtumil ongi nii, sest $\left|x \sin \frac{1}{y} - 0\right| = \left|x \sin \frac{1}{y}\right| \leqslant |x| < \varepsilon$, niipea kui $|x - 0| = |x| < \varepsilon$.
Seega

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} x \sin \frac{1}{y} = 0.$$

VI. *Uurida funktsiooni*

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 y^2}{x^4 + y^4}, & \text{kui } x \neq 0 \text{ ja } y \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x = 0 \text{ ja } y = 0 \end{cases}$$

pidevust.

L a h e n d u s. Igas punktis, välja arvatud (0; 0), on $f(x, y)$ pidev kui murdratsionaalne funktsioon, mille nimetaja on nullist erinev. Et antud funktsioon oleks pidev ka punktis (0; 0), selleks peab olema täidetud tingimus (3):

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^4 y^2}{x^4 + y^4} = f(0, 0) = 0.$$

Selle piirväärtuse leidmiseks kasutame polaarkoordinaate: $x=\varrho\cos\Theta$, $y=\varrho\sin\Theta$. Selleks, et $x\to 0$ ja $y\to 0$, on tarvilik ja piisav, et $\varrho\to 0$ sõltumatult nurgast Θ. Niisiis

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^4y^2}{x^4+y^4}=\lim_{\varrho\to 0}\frac{\varrho^6\cos^4\Theta\sin^2\Theta}{\varrho^4(\cos^4\Theta+\sin^4\Theta)}=$$

$$=\lim_{\varrho\to 0}\frac{\varrho^2\cos^4\Theta\sin^2\Theta}{\cos^4\Theta+\sin^4\Theta}=\frac{\cos^4\Theta\sin^2\Theta}{\cos^4\Theta+\sin^4\Theta}\lim_{\varrho\to 0}\varrho^2=\frac{\sin^2\Theta}{1+\tan^4\Theta}\cdot 0=0,$$

sest $\frac{\sin^2\Theta}{1+\tan^4\Theta}$ on tõkestatud, kuna $0\leqslant\sin^2\Theta\leqslant 1$ ja $1+\tan^2\Theta\geqslant 1$.

Seega $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)=f(0, 0)$ ja funktsioon $f(x, y)$ on pidev ka punktis $(0; 0)$.

VII. *Avaldada funktsiooni*

$$z=\arctan\frac{x}{y-x}$$

esimest järku osatuletis $\frac{\partial z}{\partial x}$ *ja teist järku segaosatuletis* $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

Lahendus. Osatuletise $\frac{\partial z}{\partial x}$ avaldamiseks tuleb antud funktsiooni avaldises muutujat y vaadelda konstandina ja diferentseerida seda avaldist kui ühe muutuja x funktsiooni:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y-x}\right)^2}\cdot\frac{y-x+x}{(y-x)^2}=\frac{y}{(y-x)^2+x^2}.$$

Teist järku segaosatuletise $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ avaldamiseks diferentseerime saadud esimest järku osatuletist y järgi, vaadeldes muutujat x konstandina:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{(y-x)^2+x^2-2(y-x)y}{[(y-x)^2+x^2]^2}=$$

$$=\frac{y^2-2xy+x^2+x^2-2y^2+2xy}{[(y-x)^2+x^2]^2}=\frac{2x^2-y^2}{[(y-x)^2+x^2]^2}.$$

VIII. *Avaldada* $\frac{\partial z}{\partial x}$ ja $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, *kui* $z=\arcsin\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}$.

Lahendus.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}}\cdot\frac{2x^3+2xy^2-2x^3+2xy^2}{(x^2+y^2)^2}=$$

$$\frac{2xy^2}{\sqrt{2y^2}\sqrt{x^2-y^2}(x^2+y^2)}=\frac{2xy^2}{\sqrt{2}|y|\sqrt{x^2-y^2}(x^2+y^2)}=\frac{\sqrt{2}x|y|}{\sqrt{x^2-y^2}(x^2+y^2)}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x^2+y^2}{2\sqrt{2y^2}\sqrt{x^2-y^2}}\cdot\frac{-2x^2y-2y^2-2x^2y+2y^3}{(x^2+y^2)^2}=$$

$$=\frac{-2x^2y}{\sqrt{2y^2}\sqrt{x^2-y^2}(x^2+y^2)}=-\frac{\sqrt{2}x^2}{\sqrt{x^2-y^2}(x^2+y^2)}\operatorname{sg} y,$$

kus $\operatorname{sg} y=\frac{y}{|y|}=\begin{cases}+1, \text{ kui } y>0,\\ -1, \text{ kui } y<0.\end{cases}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left[-\frac{\sqrt{2}x^2}{\sqrt{x^2-y^2}(x^2+y^2)}\operatorname{sg} y\right]=$$

$$=\frac{\partial}{\partial y}\left[-\sqrt{2}\operatorname{sg} y\cdot(x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}\frac{x^2}{x^2+y^2}\right]=$$

$$=-\sqrt{2}\operatorname{sg} y\left[-\frac{1}{2}(x^2-y^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot(-2y)\cdot\frac{x^2}{x^2+y^2}+\right.$$

$$\left.+(x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{-2x^2y}{(x^2+y^2)^2}\right]=$$

$$=-\sqrt{2}\operatorname{sg} y\frac{x^2y}{(x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}}\left[\frac{1}{(x^2-y^2)(x^2+y^2)}-\frac{2}{(x^2+y^2)^2}\right]=$$

$$=-\sqrt{2}\operatorname{sg} y\frac{x^2y}{(x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{x^2+y^2-2x^2+2y^2}{(x^2-y^2)(x^2+y^2)^2}=$$

$$=\sqrt{2}\operatorname{sg} y\,\frac{x^2y(x^2-3y^2)}{(x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}(x^2+y^2)^2}=\frac{\sqrt{2}x^2|y|(x^2-3y^2)}{(x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}(x^2+y^2)^2},$$

sest $\operatorname{sg} y\cdot y=\frac{y}{|y|}\cdot y=\frac{y^2}{|y|}=\frac{|y|^2}{|y|}=|y|.$

IX. *Leida funktsiooni*

$$z=\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$$

juurdekasvu Δz erinevus täisdiferentsiaalist dz, kui x muutub väärtuselt 2 väärtuseni 1,7 ja y väärtuselt —3 väärtuseni —2,6.

L a h e n d u s. Funktsiooni juurdekasv on funktsiooni kahe väärtuse vahe:

$$\Delta z=z\Big|_{\substack{x=\ \ 1{,}7\\ y=-2{,}6}}-z\Big|_{\substack{x=\ \ 2\\ y=-3}}=\frac{1{,}7^2+(-2{,}6)^2}{1{,}7^2-(-2{,}6)^2}-\frac{2^2+(-3)^2}{2^2-(-3)^2}=$$

$$=-2{,}494-(-2{,}6)=0{,}106.$$

Funktsiooni täisdiferentsiaal on valemi (9) järgi

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Antud juhul on

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x(x^2 - y^2) - 2x(x^2 + y^2)}{(x^2 - y^2)^2} = - \frac{4xy^2}{(x^2 - y^2)^2}$$

ja

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y(x^2 - y^2) + 2y(x^2 + y^2)}{(x^2 - y^2)^2} = \frac{4x^2y}{(x^2 - y^2)^2}.$$

Niisiis

$$dz = \frac{4xy(x\,dy - y\,dx)}{(x^2 - y^2)^2},$$

kusjuures

$$dx = \Delta x = 1{,}7 - 2 = -0{,}3,$$
$$dy = \Delta y = -2{,}6 - (-3) = 0{,}4.$$

Seega

$$dz = \frac{4 \cdot 2(-3)[2 \cdot 0{,}4 - (-3)(-0{,}3)]}{(4 - 9)^2} = 0{,}096.$$

Järelikult erineb funktsiooni juurdekasv täisdiferentsiaalist

$$\Delta z - dz = 0{,}106 - 0{,}096 = 0{,}010 \text{ võrra},$$

mis moodustab ligikaudu 9% funktsiooni juurdekasvust.

X. *Mitu protsenti moodustab funktsiooni* $z = \ln(x^2 + y^2)$ *teist järku täisdiferentsiaali väärtus esimest järku täisdiferentsiaali väärtusest punktis* (—2; 1), *kui argumentide juurdekasvud on* $\Delta x = 0{,}01$ *ja* $\Delta y = -0{,}02$.

L a h e n d u s. Arvutame kõigepealt funktsiooni esimest järku täisdiferentsiaali väärtuse. Et

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2},$$

siis

$$dz = \frac{2}{x^2 + y^2}(x\,dx + y\,dy)$$

ja

$$dz\Big|_{\substack{x = -2 \\ y = 1 \\ \Delta x = 0{,}01 \\ \Delta y = -0{,}02}} = \frac{2}{5}(-2 \cdot 0{,}01 - 0{,}02) = -\frac{0{,}08}{5} = -0{,}016.$$

Et

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{4xy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2},$$

siis on valemi (11) järgi

$$d^2z = \frac{2}{(x^2+y^2)^2}\,[(y^2-x^2)\,dx^2 - 4xy\,dx\,dy + (x^2-y^2)\,dy^2]$$

ja

$$d^2z\Big|_{\substack{x=-2\\ y=\ 1\\ \Delta x=\ 0{,}01\\ \Delta y=-0{,}02}} = \frac{2}{25}\,[-3\cdot 0{,}01^2 - 4\cdot 2\cdot 0{,}01\cdot 0{,}02 + 3(-0{,}02)^2] =$$

$$= \frac{2}{25}\,(-0{,}0003 - 0{,}0016 + 0{,}0012) = -0{,}000056.$$

Seega moodustab teist järku täisdiferentsiaal esimest järku täisdiferentsiaalist

$$\frac{0{,}000056}{0{,}016} = 0{,}0035 = 0{,}35\%.$$

XI. *Avaldada dz, kui*

$$z = f(u,\ v),\ u = x^2 - y^2,\ v = e^{xy},$$

kus $f(u, v)$ on diferentseeruv funktsioon.

Lahendus. Valemi (9) kohaselt on

$$dz = \frac{\partial f}{\partial u}\,du + \frac{\partial f}{\partial v}\,dv,$$

kus

$$du = 2x\,dx - 2y\,dy$$

ja

$$dv = ye^{xy}dx + xe^{xy}dy = e^{xy}(y\,dx + x\,dy).$$

Seega

$$dz = \frac{\partial f}{\partial u}\,(2x\,dx - 2y\,dy) + \frac{\partial f}{\partial v}\,e^{xy}(y\,dx + x\,dy)$$

ehk

$$dz = \left[2x\,\frac{\partial f}{\partial u} + ye^{xy}\,\frac{\partial f}{\partial v}\right]dx - \left[2y\,\frac{\partial f}{\partial u} - xe^{xy}\,\frac{\partial f}{\partial v}\right]dy.$$

XII. *Leida avaldise*

$$\operatorname{arctan}\frac{\sqrt[3]{0{,}97}}{\sqrt[4]{1{,}04}}$$

ligikaudne väärtus.

Lahendus. Otsitav suurus on funktsiooni

$$z = \operatorname{arctan}\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{y}}$$

väärtuseks punktis (0,97; 1,04). Et selles punktis on funktsiooni arvutamine tülikas, tema lähedal asetsevas punktis (1; 1) aga lihtne, siis arvutame funktsiooni väärtuse punktis (1; 1) ja liidame tulemusele funktsiooni juurdekasvu ligikaudse suurusena täisdiferentsiaali väärtuse, mis vastab x muutumisele väärtuselt 1 väärtuseni 0,97 ja y muutumisele väärtuselt 1 väärtuseni 1,04.

Seega $\Delta x = 0{,}97 - 1 = -0{,}03$, $\Delta y = 1{,}04 - 1 = 0{,}04$ ja

$$z\Big|_{\substack{x=0,97\\ y=1,04}} \approx z\Big|_{\substack{x=1\\ y=1}} + dz\Big|_{\substack{x=1\\ y=1\\ \Delta x=-0,03\\ \Delta y=\ \ 0,04}}.$$

Et

$$z\Big|_{\substack{x=1\\ y=1}} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}, \quad dz = \frac{1}{1+\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{y}}}\left(\frac{dx}{3\sqrt[3]{x^2}\sqrt[4]{y}} - \frac{\sqrt[3]{x}\,dy}{4y\sqrt[4]{y}}\right)$$

ja

$$dz\Big|_{\substack{x=1\\ y=1\\ \Delta x=-0,03\\ \Delta y=\ \ 0,04}} = \frac{1}{2}\left(-\frac{0{,}03}{3} - \frac{0{,}04}{4}\right) = -0{,}01,$$

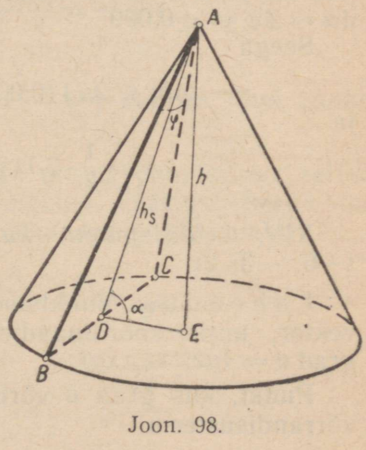
siis

$$\arctan\frac{\sqrt[3]{0{,}97}}{\sqrt[4]{1{,}04}} \approx \frac{\pi}{4} - 0{,}01 \approx 0{,}78.$$

XIII. *Pöördkoonus on lõigatud tasapinnaga, mille kaldenurk põhja suhtes on α ja mis läbib kahte moodustajat, mille vaheline nurk on φ* (joon. 98). *Tekkinud lõike pindala on S. Arvutada koonuse kõrgus koos vea ülemmääraga, kui*

$$\alpha = 30°(\pm 0{,}5°), \quad \varphi = 57°(\pm 0{,}5°), \quad S = 4(\pm 0{,}2).$$

L a h e n d u s. Koonuse lõikumisel ülesandes antud tasapinnaga tekib võrdhaarne kolmnurk ABC. Selle kolmnurga kõrgust h_s ja koonuse kõrgust h läbiva tasapinna lõikumisel koonuse põhjaga tekib täisnurkne kolmnurk ADE, mille hüpotenuusiks on h_s, kaatetiks h ja sama kaateti vastasnurgaks α. Seega on koonuse kõrgus



Joon. 98.

$h = h_s \sin\alpha$, kusjuures kõrguse h_s saame avaldada kolmnurga ABC pindala S ja tipunurga φ kaudu: $S = h_s^2 \tan\frac{\varphi}{2}$, millest

$$h_s = \sqrt{\frac{S}{\tan\frac{\varphi}{2}}} = \sqrt{S\cot\frac{\varphi}{2}}.$$

Niisiis

$$h = \sin\alpha\sqrt{S\cot\frac{\varphi}{2}}.$$

Leiame nüüd selle valemi järgi kõrguse arvutamisel tekkiva vea ülemmäära. h on kolme muutuja α, S ja φ funktsioon, kusjuures

$$\frac{\partial h}{\partial \alpha} = \cos\alpha\sqrt{S\cot\frac{\varphi}{2}},$$

$$\frac{\partial h}{\partial S} = \frac{\sin\alpha}{2}\sqrt{\frac{\cot\frac{\varphi}{2}}{S}} = \frac{\sin\alpha}{2S}\sqrt{S\cot\frac{\varphi}{2}},$$

$$\frac{\partial h}{\partial \varphi} = \sin\alpha\sqrt{S}\,\frac{1}{2\sqrt{\cot\frac{\varphi}{2}}}\left(-\frac{1}{\sin^2\frac{\varphi}{2}}\right)\cdot\frac{1}{2} = -\frac{\sin\alpha}{2\sin\varphi}\sqrt{S\cot\frac{\varphi}{2}}.$$

Järelikult on (12) põhjal

$$|\Delta h| \leqslant \sqrt{S\cot\frac{\varphi}{2}}\left(|\cos\alpha\,\Delta\alpha| + \left|\frac{\sin\alpha}{2S}\Delta S\right| + \left|\frac{\sin\alpha}{2\sin\varphi}\Delta\varphi\right|\right),$$

kus $\Delta\alpha$ ja $\Delta\varphi$ tuleb võtta absoluutmõõdus ehk radiaanides, s. t. $\Delta\alpha = \Delta\varphi = \pm 0{,}009$.

Seega

$$|\Delta h| \leqslant 2{,}71\,(0{,}008 + 0{,}013 + 0{,}005) = 0{,}07$$

ja

$$h = \frac{1}{2}\cdot 2{,}71\,(\pm 0{,}07) = 1{,}36\,(\pm 0{,}07).$$

XIV. *Leida punkt, kus funktsiooni $u = xyz$ gradient on* $\{-6;\ -3;\ 2\}$.

L a h e n d u s. Funktsiooni gradient on valemi (13) kohaselt vektor, mille koordinaadid on funktsiooni osatuletised. Seega $\operatorname{grad} u = \{yz;\ xz;\ xy\}$.

Punkt, kus grad u võrdub antud vektoriga, peab rahuldama võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} yz = -6, \\ xz = -3, \\ xy = 2. \end{cases}$$

Esimesest kahest võrrandist saame $\frac{y}{x} = 2$ ehk $y = 2x$. Paigutades saadud avaldise viimasesse võrrandisse, saame $2x^2 = 2$, millest $x = \pm 1$. Niisiis $y = \pm 2$ ja $z = \mp 3$. Seega rahuldavad ülesande tingimust punktid (1; 2; —3) ja (—1; —2; 3).

XV. *Leida funktsiooni* $z = \arctan \frac{y}{\sqrt{x}}$ *tuletis punktis* (1; 1) *suunas, mis viib sealt punkti* (5; —2).

L a h e n d u s. Otsitav tuletis tuleb võtta vektori

$$\mathbf{r} = \{5 - 1;\ -2 - 1\} = \{4;\ -3\}$$

suunas. Selle vektori suunakoosinused, s. t. temasuunalise ühikvektori koordinaadid on

$$\cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{4}{5} \quad \text{ja} \quad \cos\beta = -\frac{3}{5}.$$

Avaldame antud funktsiooni osatuletised ja arvutame nende väärtused punktis (1; 1):

$$z'_x = -\frac{y}{2\sqrt{x}(x + y^2)}, \qquad z'_x\Big|_{\substack{x=1\\y=1}} = -\frac{1}{4},$$

$$z'_y = \frac{\sqrt{x}}{x + y^2}, \qquad z'_y\Big|_{\substack{x=1\\y=1}} = \frac{1}{2}.$$

Seega on nõutud suunatuletis valemi (14) põhjal

$$\frac{\partial z}{\partial r}\Big|_{\substack{x=1\\y=1}} = -\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{5} - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5} = -\frac{1}{2}.$$

XVI. *Kui suur on pinna* $z = xy(x^2 - y^2)$ *suurim tõus punktis* (1; 2; —6)?

L a h e n d u s. Pinna suurim tõus antud punktis on selles punktis võetud suunatuletise maksimaalne väärtus. Seega on ta valemi (15) järgi võrdne grad z pikkusega antud punktis.

Et

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y - y^3 \quad \text{ja} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^3 - 3xy^2,$$

siis

$$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{\substack{x=1\\y=2}} = -2 \quad \text{ja} \quad \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{\substack{x=1\\y=2}} = -11$$

ning antud pinna suurim tõus punktis (1; 2; —6) on

$$\sqrt{(-2)^2 + (-11)^2} = 5\sqrt{5} \approx 11{,}18.$$

XVII. *Arvutada võrrandiga* $y^x - x^y = 0$ *määratud funktsiooni tuletis punktides* $(a;\ a)$, *kus* $a > 0$, *ja* $(2;\ 4)$.

Lahendus. Antud punktid rahuldavad antud võrrandit. Tähistame $F(x,\ y) = y^x - x^y$. Kui antud võrrand määrab diferentseeruva funktsiooni y argumendist x, siis valemi (19) kohaselt on

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x,\ y)}{F'_y(x,\ y)}, \quad \text{kui } F'_y(x,\ y) \neq 0.$$

Et $F'_x(x,\ y) = y^x \ln y - yx^{y-1}$ ja $F'_y(x,\ y) = xy^{x-1} - x^y \ln x$, siis

$$\frac{dy}{dx} = \frac{yx^{y-1} - y^x \ln y}{xy^{x-1} - x^y \ln x}$$

punktides, kus $xy^{x-1} - x^y \ln x \neq 0$. Seega

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\substack{x=a\\ y=a}} = \frac{aa^{a-1} - a^a \ln a}{aa^{a-1} - a^a \ln a} = 1,$$

kui $a^a(1 - \ln a) \neq 0$, millest $1 \neq \ln a$ ehk $a \neq e$. Punktis $(e;\ e)$ ei ole antud funktsioon diferentseeruv.

Punktis $(2;\ 4)$ on

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\substack{x=2\\ y=4}} = \frac{4 \cdot 2^3 - 4^2 \ln 4}{2 \cdot 4 - 2^4 \ln 2} = \frac{2^5 - 2^5 \ln 2}{2^3 - 2^4 \ln 2} = \frac{4(1 - \ln 2)}{1 - 2 \ln 2}.$$

XVIII. *Arvutada võrrandiga* $z = x + \arctan \dfrac{y}{z-x}$ *määratud funktsiooni esimest järku osatuletised punktis* $\left(1;\ \dfrac{\pi}{4};\ 2\right)$.

Lahendus. Anname võrrandile kuju $x - z + \arctan \dfrac{y}{z-x} = 0$ ja tähistame

$$F(x,\ y,\ z) = x - z + \arctan \frac{y}{z-x}.$$

Kui antud võrrand määrab z diferentseeruva ilmutamata funktsioonina muutujatest x ja y, siis on valemi (18) kohaselt

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x,\ y,\ z)}{F'_z(x,\ y,\ z)} \quad \text{ja} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x,\ y,\ z)}{F'_z(x,\ y,\ z)},$$

kui $F'_z(x,\ y,\ z) \neq 0$.

Et

$$F'_x(x, y, z) = 1 + \frac{1}{1+\left(\frac{y}{z-x}\right)^2} \cdot \frac{y}{(z-x)^2} = 1 + \frac{y}{(z-x)^2 + y^2},$$

$$F'_y(x, y, z) = -\frac{1}{1+\left(\frac{y}{z-x}\right)^2} \cdot \frac{1}{z-x} = \frac{z-x}{(z-x)^2 + y^2}$$

ja

$$F'_z(x, y, z) = -1 - \frac{y}{(z-x)^2 + y^2},$$

kusjuures

$$F'_z\left(1, \frac{\pi}{4}, 2\right) = -1 - \frac{\frac{\pi}{4}}{1 + \frac{\pi^2}{16}} \neq 0,$$

siis

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1 + \frac{y}{(z-x)^2 + y^2}}{-1 - \frac{y}{(z-x)^2 + y^2}} = 1$$

igas punktis $(x; y)$,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{z-x}{[(z-x)^2 + y^2]\left(-1 - \frac{y}{(z-x)^2 + y^2}\right)} = \frac{z-x}{y + y^2 + (z-x)^2}$$

ja

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=1 \\ y=\frac{\pi}{4} \\ z=2}} = \frac{2-1}{\frac{\pi}{4} + \frac{\pi^2}{16} + (2-1)^2} = 0{,}416.$$

XIX. *Leida võrrandisüsteemiga*

$$\begin{cases} x^2 - 3y^2 + 2u^2 - 4v^2 = 5, \\ 4x + 2y^2 - 3u + 4v^2 = -6 \end{cases}$$

määratud funktsioonide $u(x, y)$ ja $v(x, y)$ osatuletised $\frac{\partial u}{\partial x}$ ja $\frac{\partial v}{\partial x}$ kohal $x = -1$ ja $y = 0$, $u > 0$ ja $v < 0$.

Lahendus. Antud süsteem sisaldab kaks võrrandit ja neli muutujat. Seega on muutujate arv kahe võrra suurem võrrandite arvust ja me võime kahele muutujale x ja y anda vabalt väärtusi; ülejäänud kaks muutujat u ja v on siis määratud. Seega esitab antud süsteem tõepoolest kahte kahe muutuja ilmutamata funktsiooni $u(x, y)$ ja $v(x, y)$. Leiame kõigepealt u ja v väärtused antud argumentide väärtustel. Selleks asendame antud süsteemis $x=-1$ ja $y=0$:

$$2u^2-4v^2=4,$$
$$-3u+4v^2=-2,$$

millest

$$2u^2-3u-2=0$$

ehk

$$u=2 \quad (u>0).$$

Paigutades selle u väärtuse esimesse võrrandisse, saame $v=\pm 1$, millest ülesande tingimustele vastab ainult $v=-1$ $(v<0)$. Seega on ülesandes antud võrrandisüsteem rahuldatud punktis $(-1;\ 0;\ 2;\ -1)$.

Nõutud osatuletiste leidmiseks diferentseerime antud võrrandeid x järgi, lugedes u ja v muutujate x ja y funktsioonideks:

$$2x+4u\frac{\partial u}{\partial x}-8v\frac{\partial v}{\partial x}=0,$$

$$4-3\frac{\partial u}{\partial x}+8v\frac{\partial v}{\partial x}=0$$

ehk

$$2u\frac{\partial u}{\partial x}-4v\frac{\partial v}{\partial x}=-x,$$

$$3\frac{\partial u}{\partial x}-8v\frac{\partial v}{\partial x}=4,$$

millest

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\begin{vmatrix}-x & -4v\\ 4 & -8v\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2u & -4v\\ 3 & -8v\end{vmatrix}}=\frac{8v(x+2)}{4v(3-4u)}=\frac{2(x+2)}{3-4u},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\begin{vmatrix}2u & -x\\ 3 & 4\end{vmatrix}}{4v(3-4u)}=\frac{8u+3x}{4v(3-4u)}.$$

Seega

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\substack{x=-1\\ y=0\\ u=2\\ v=-1}}=-\frac{2}{5} \quad \text{ja} \quad \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{\substack{x=-1\\ y=0\\ u=2\\ v=-1}}=\frac{13}{20}.$$

XX. *Võrrandisüsteem*

$$\begin{cases} z=uv,\\ y=u^3-v^3,\\ x=u^2+v^2\end{cases}$$

määrab z argumentide x ja y funktsioonina. Avaldada $\frac{\partial z}{\partial x}$.

L a h e n d u s. Diferentseerime antud kolme võrrandit x järgi, lugedes z, u ja v funktsioonideks sõltumatutest muutujatest x ja y:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = v\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$0 = 3u^2\frac{\partial u}{\partial x} - 3v^2\frac{\partial v}{\partial x}, \qquad (*)$$

$$1 = 2u\frac{\partial u}{\partial x} + 2v\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Viimasest kahest võrrandist avaldame

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -3v^2 \\ 1 & 2v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3u^2 & -3v^2 \\ 2u & 2v \end{vmatrix}} = \frac{3v^2}{6u^2v + 6uv^2} = \frac{v}{2u(u+v)}$$

ja

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\begin{vmatrix} 3u^2 & 0 \\ 2u & 1 \end{vmatrix}}{6uv(u+v)} = \frac{u}{2v(u+v)}.$$

Paigutades need avaldised võrrandisüsteemi (*) esimesse võrrandisse, saame

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{v^2}{2u(u+v)} + \frac{u^2}{2v(u+v)} = \frac{u^2 - uv + v^2}{2uv} = \frac{x-z}{2z}.$$

XXI. *Arendada funktsioon e^{xy} Taylori valemi abil kohal $x = 0$, $y = 1$, lõpetades kolmandat järku liikmetega ja vastava jääkliikmega.*

L a h e n d u s. Funktsiooni $f(x, y)$ kolmanda astme Taylori polünoom punktis (0; 1) avaldub valemi (22) kohaselt kujul

$$f(x, y) = f(0, 1) + [f'_x(0, 1)x + f'_y(0, 1)(y-1)] +$$
$$+ \frac{1}{2!}[f''_{x^2}(0, 1)x^2 + 2f''_{xy}(0, 1)x(y-1) + f''_{y^2}(0, 1)(y-1)^2] +$$
$$+ \frac{1}{3!}[f'''_{x^3}(0, 1)x^3 + 3f'''_{x^2y}(0, 1)x^2(y-1) +$$
$$+ 3f'''_{xy^2}(0, 1)x(y-1)^2 + f'''_{y^3}(0, 1)(y-1)^3] + R_3,$$

kusjuures

$$R_3 = \frac{1}{4!}\{f^{IV}_{x^4}[\Theta x, 1 + \Theta(y-1)]x^4 + 4f^{IV}_{x^3y}[\Theta x, 1 +$$
$$+ \Theta(y-1)]x^3(y-1) + 6f^{IV}_{x^2y^2}[\Theta x, 1 + \Theta(y-1)]x^2(y-1)^2 +$$

$$+4f^{IV}_{xy^3}[\Theta x,\ 1+\Theta(y-1)]x(y-1)^3+$$
$$+f^{IV}_{y^4}[\Theta x,\ 1+\Theta(y-1)](y-1)^4\Big\}.$$

Seega tuleb avaldada antud funktsiooni osatuletised kuni neljanda järguni ja arvutada nende väärtused kohal (0; 1) kuni kolmanda järguni:

$$\begin{array}{ll}
f(x,\ y)=e^{xy}, & f(0,\ 1)=1,\\
f'_x(x,\ y)=ye^{xy}, & f'_x(0,\ 1)=1,\\
f'_y(x,\ y)=xe^{xy}, & f'_y(0,\ 1)=0,\\
f''_{x^2}(x,\ y)=y^2e^{xy}, & f''_{x^2}(0,\ 1)=1,\\
f''_{xy}(x,\ y)=e^{xy}+yxe^{xy}, & f''_{xy}(0,\ 1)=1,\\
f''_{y^2}(x,\ y)=x^2e^{xy}, & f''_{y^2}(0,\ 1)=0,\\
f'''_{x^3}(x,\ y)=y^3e^{xy}, & f'''_{x^3}(0,\ 1)=1,\\
f'''_{x^2y}(x,\ y)=2ye^{xy}+xy^2e^{xy}, & f'''_{x^2y}(0,\ 1)=2,\\
f'''_{xy^2}(x,\ y)=2xe^{xy}+x^2ye^{xy}, & f'''_{xy^2}(0,\ 1)=0,\\
f'''_{y^3}(x,\ y)=x^3e^{xy}, & f'''_{y^3}(0,\ 1)=0,\\
f^{IV}_{x^4}(x,\ y)=y^4e^{xy}, &
\end{array}$$

$$f^{IV}_{x^3y}(x,\ y)=3y^2e^{xy}+xy^3e^{xy}=y^2e^{xy}(3+xy),$$
$$f^{IV}_{x^2y^2}(x,\ y)=2e^{xy}+4xye^{xy}+x^2y^2e^{xy}=e^{xy}(2+4xy+x^2y^2),$$
$$f^{IV}_{xy^3}(x,\ y)=3x^2e^{xy}+x^3ye^{xy}=x^2e^{xy}(3+xy),$$
$$f^{IV}_{y^4}(x,\ y)=x^4e^{xy}.$$

Seega

$$e^{xy}=1+x+\frac{1}{2}x^2+x(y-1)+\frac{1}{6}x^3+x^2(y-1)+R_3,$$

kus

$$R_3=\frac{e^{\Theta x(1+\Theta(y-1))}}{4!}\Big\{(1+\Theta(y-1))^4x^4+$$
$$+4(1+\Theta(y-1))^2[3+\Theta x(1+\Theta(y-1))]x^3(y-1)+$$
$$+6[2+4\Theta x(1+\Theta(y-1))+(\Theta x)^2(1+\Theta(y-1))^2]x^2(y-1)^2$$
$$+4(\Theta x)^2[3+\Theta x(1+\Theta(y-1))]x(y-1)^3+(\Theta x)^4(y-1)^4\Big\},$$
$$0<\Theta<1.$$

XXII. *Leida funktsiooni* $z=xy(1-x-y)$ *statsionaarsed kohad, määrata, missugused neist on ekstreemumkohad, ja arvutada funktsiooni ekstremaalsed väärtused.*

L a h e n d u s. Statsionaarseteks kohtadeks on funktsiooni osatuletiste nullkohad. Seega on statsionaarsed kohad antud juhul määratud võrrandisüsteemiga

$$\begin{cases} y - 2xy - y^2 = 0, \\ x - 2xy - x^2 = 0 \end{cases}$$

ehk

$$\begin{cases} y(1 - 2x - y) = 0, \\ x(1 - x - 2y) = 0, \end{cases}$$

mida rahuldavad punktid

$$(0;\ 0),\quad (0;\ 1),\quad (1;\ 0)\ \text{ja}\ \left(\frac{1}{3};\ \frac{1}{3}\right).$$

Nendest statsionaarsetest kohtadest on ekstreemumkohtadeks need punktid, mille puhul on rahuldatud tingimus (25):

$$z''_{x^2} \cdot z''_{y^2} - (z''_{xy})^2 > 0,$$

kusjuures maksimum on siis, kui $z''_{x^2} < 0$, ja miinimum siis, kui $z''_{x^2} > 0$.

Koostame tabeli

		(0; 0)	(0; 1)	(1; 0)	$\left(\frac{1}{3};\ \frac{1}{3}\right)$
z''_{x^2}	$-2y$	0	-2	0	$-\frac{2}{3}$
z''_{y^2}	$-2x$	0	0	-2	$-\frac{2}{3}$
z''_{xy}	$1-2x-2y$	1	-1	-1	$-\frac{1}{3}$
$z''_{x^2} \cdot z''_{y^2} - (z''_{xy})^2$		<0	<0	<0	>0

Seega on funktsioonil punktis $\left(\frac{1}{3};\ \frac{1}{3}\right)$ maksimum $z = \frac{1}{27}$. Muudes kohtades funktsioonil ekstreemumit ei ole.

XXIII. *Leida pinnal*

$$x^3 + y^3 + z^3 + xyz = a\ (a \neq 0)$$

punkt, mis on koordinaatide alguspunktile kõige lähemal.

L a h e n d u s. Olgu otsitav punkt $(x;\ y;\ z)$. Tema kaugus koordinaatide alguspunktist on $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Niisiis tuleb leida funktsiooni $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ miinimumkoht tingimusel, et see rahuldaks antud pinna võrrandit.

Et $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ väärtus on minimaalne siis, kui $x^2+y^2+z^2$ on minimaalne, taandub antud ülesanne funktsiooni $x^2+y^2+z^2$ miinimumkoha otsimiseks lisatingimusel $x^3+y^3+z^3+xyz-a=0$.

Moodustame funktsiooni (26):

$$w=x^2+y^2+z^2+\lambda(x^3+y^3+z^3+xyz-a).$$

Otsitav punkt peab niisiis rahuldama võrrandisüsteemi (27):

$$\left\{\begin{array}{l} 2x+\lambda(3x^2+yz)=0, \\ 2y+\lambda(3y^2+xz)=0, \\ 2z+\lambda(3z^2+xy)=0, \\ x^3+y^3+z^3+xyz-a=0. \end{array}\right. \qquad (*)$$

Avaldades nüüd esimesest kolmest võrrandist λ, saame

$$-\lambda=\frac{2x}{3x^2+yz},\quad \text{kui } 3x^2+yz\neq 0,$$

$$-\lambda=\frac{2y}{3y^2+xz},\quad \text{kui } 3y^2+xz\neq 0,$$

$$-\lambda=\frac{2z}{3z^2+xy},\quad \text{kui } 3z^2+xy\neq 0.$$

Seega

$$\frac{2x}{3x^2+yz}=\frac{2y}{3y^2+xz}=\frac{2z}{3z^2+xy},$$

millest lihtsate teisenduste abil saame kaks võrrandit

$$(y-x)[3xy-z(x+y)]=0,$$
$$(z-y)[3yz-x(y+z)]=0.$$

Seega kui $3x^2+yz\neq 0$, $3y^2+xz\neq 0$ ja $3z^2+xy\neq 0$, saame otsitava punkti määramiseks võrrandisüsteemi

$$\left\{\begin{array}{l} (y-x)[3xy-z(x+y)]=0, \\ (z-y)[3yz-x(y+z)]=0, \\ x^3+y^3+z^3+xyz-a=0. \end{array}\right. \qquad (**)$$

See süsteem on rahuldatud igas punktis, kus on rahuldatud kas süsteem

$$\text{I}\quad \left\{\begin{array}{l} y-x=0 \\ z-y=0 \\ x^3+y^3+z^3+xyz-a=0 \end{array}\right.$$

$$\text{või II} \quad \begin{cases} y - x = 0 \\ 3yz - x(y + z) = 0 \\ x^3 + y^3 + z^3 + xyz - a = 0 \end{cases}$$

$$\text{või III} \quad \begin{cases} 3xy - z(x + y) = 0 \\ z - y = 0 \\ x^3 + y^3 + z^3 + xyz - a = 0 \end{cases}$$

$$\text{või IV} \quad \begin{cases} 3xy - z(x + y) = 0 \\ 3yz - x(y + z) = 0 \\ x^3 + y^3 + z^3 + xyz - a = 0. \end{cases}$$

Süsteemi I esimesest kahest võrrandist saame $y = x = z$ ja kolmandast $4x^3 - a = 0$ ehk $x = \sqrt[3]{\frac{a}{4}}$, seega on lahend $\left(\sqrt[3]{\frac{a}{4}}; \sqrt[3]{\frac{a}{4}}; \sqrt[3]{\frac{a}{4}}\right)$.

Süsteemi II esimesest võrrandist saame $y = x$ ja vastavalt sellele teisest võrrandist $y(2z - y) = 0$, mis taandub kaheks võrrandiks $y = 0$ ja $2z - y = 0$. Kui $y = 0$, siis ka $x = 0$ ja tingimused $3x^2 + yz \neq 0$ ning $3y^2 + xz \neq 0$, millel oli saadud süsteem (**), ei ole rahuldatud. Kui aga $2z - y = 0$, siis $y = 2z = x$ ja kolmandast võrrandist $8z^3 + 8z^3 + z^3 + 4z^3 - a = 0$ ehk $z = \sqrt[3]{\frac{a}{21}}$. Seega on lahend $\left(2\sqrt[3]{\frac{a}{21}}; 2\sqrt[3]{\frac{a}{21}}; \sqrt[3]{\frac{a}{21}}\right)$.

Analoogiliselt leiame süsteemi III lahendi $\left(\sqrt[3]{\frac{a}{21}}; 2\sqrt[3]{\frac{a}{21}}; 2\sqrt[3]{\frac{a}{21}}\right)$ ning süsteemi IV lahendi $\left(2\sqrt[3]{\frac{a}{21}}; \sqrt[3]{\frac{a}{21}}; 2\sqrt[3]{\frac{a}{21}}\right)$.

Nüüd peame leidma süsteemi (*) lahendid juhul, kui tingimused, mille puhul saime süsteemi (**), ei ole kehtivad.

Kui $3x^2 + yz = 0$, siis teisendub süsteemi (*) esimene võrrand kujule $x = 0$. Seega ka $yz = 0$, millest kas $y = 0$ või $z = 0$. Esimesel juhul on süsteemi (*) teine võrrand rahuldatud, neljas võrrand annab $z = \sqrt[3]{a}$ ja kolmas võrrand tuleb rahuldada sobiva λ väärtusega $\lambda = -\frac{2}{3\sqrt[3]{a}}$. Seega on selle λ väärtuse puhul süsteemi (*) lahendiks punkt $(0; 0; \sqrt[3]{a})$. Väärtuspaar $x = 0$, $z = 0$ annab sama λ puhul süsteemi (*) lahendiks $(0; \sqrt[3]{a}; 0)$.

Tingimusel $3y^2+xz=0$ teisendub süsteemi (*) teine võrrand kujule $y=0$. Seega ka $xz=0$, millest kas $x=0$ või $z=0$. Analoogiliselt eelnevale annab väärtuspaar $y=0$, $z=0$ süsteemile (*) lahendi $(\sqrt[3]{a};\ 0;\ 0)$, väärtuspaar $x=0$, $y=0$ aga juba esinenud lahendi $(0;\ 0;\ \sqrt[3]{a})$.

Edasi saab näidata, et tingimus $3z^2+xy=0$ ega ka $3x^2+yz=0$ ja $3y^2+xz=0$ või $3x^2+yz=0$ ja $3z^2+xy=0$ või $3y^2+xz=0$ ja $3z^2+xy=0$ ei anna süsteemile (*) uusi lahendeid. Tingimus $3x^2+yz=0$, $3y^2+xz=0$ ja $3z^2+xy=0$ ei anna lahendit, sest siis esimese kolme võrrandi põhjal $x=0$, $y=0$, $z=0$, mille puhul neljas võrrand pole rahuldatud.

Seega võib ülesandes nõutud punkt esineda ainult järgmiste punktide hulgas:

$$\left(\sqrt[3]{\frac{a}{4}};\ \sqrt[3]{\frac{a}{4}};\ \sqrt[3]{\frac{a}{4}}\right),\quad \left(2\sqrt[3]{\frac{a}{21}};\ 2\sqrt[3]{\frac{a}{21}};\ \sqrt[3]{\frac{a}{21}}\right),$$

$$\left(2\sqrt[3]{\frac{a}{21}};\ \sqrt[3]{\frac{a}{21}};\ 2\sqrt[3]{\frac{a}{21}}\right),\quad \left(\sqrt[3]{\frac{a}{21}};\ 2\sqrt[3]{\frac{a}{21}};\ 2\sqrt[3]{\frac{a}{21}}\right),$$

$$(0;\ 0;\ \sqrt[3]{a}),\quad (0;\ \sqrt[3]{a};\ 0)\quad \text{ja}\quad (\sqrt[3]{a};\ 0;\ 0).$$

Nagu on kerge veenduda, asetsevad kolm viimast punkti koordinaatide alguspunktist ühel ja samal kaugusel $\sqrt[3]{a}$, kuid seejuures temale lähemal kui ülejäänud punktid (esimene kaugusel $\sqrt[6]{\frac{27}{16}}\sqrt[3]{a}$ ja järgmised kolm kaugusel $\sqrt[3]{\frac{27}{21}}\sqrt[3]{a}$). Niisiis täidavad ülesandes esitatud nõuet kolm punkti: $(0;\ 0;\ \sqrt[3]{a})$, $(0;\ \sqrt[3]{a};\ 0)$ ja $(\sqrt[3]{a};\ 0;\ 0)$.

XXIV. *Leida funktsiooni*

$$z=(x+4)(x+2y^2)$$

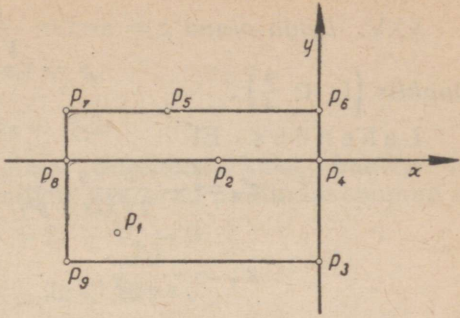
kõige väiksem ja kõige suurem väärtus ristkülikus, mille moodustavad sirged $x=0$, $y=1$, $x=-5$ *ja* $y=-2$.

Lahendus. Funktsioon $z=(x+4)(x+2y^2)$ on antud kinnises piirkonnas pidev ja omandab seetõttu selles piirkonnas nii kõige väiksema kui ka kõige suurema väärtuse. Et see funktsioon on selles piirkonnas ka diferentseeruv, siis võib ta neid väärtusi omandada kas antud piirkonda kuuluvates statsionaarsetes punktides või piirkonna rajajoonel.

Funktsiooni statsionaarseteks punktideks saame süsteemist

$$\begin{cases} x + y^2 + 2 = 0, \\ 4y(x + 4) = 0 \end{cases}$$

$(-4;\ \sqrt{2})$, $(-4;\ -\sqrt{2})$ ja $(-2;\ 0)$, millest punktid $P_1(-4;\ -\sqrt{2})$ ja $P_2(-2;\ 0)$ asetsevad antud ristkülikus (joon. 99).



Joon. 99.

Rajajoone osal $x = 0$, $-2 \leqslant y \leqslant 1$ on $z = 8y^2$. Ilmselt omandab see funktsioon suurima väärtuse punktis $P_3(0;\ -2)$ ja väikseima väärtuse punktis $P_4(0;\ 0)$.

Rajajoone osal $y = 1$, $-5 \leqslant x \leqslant 0$ on $z = (x + 4)(x + 2)$ ehk $z = x^2 + 6x + 8$. Et selle funktsiooni statsionaarne koht on $2x + 6 = 0$ ehk $x = -3$, siis võib funktsioon omandada suurima või väikseima väärtuse kas statsionaarses punktis $P_5(-3;\ 1)$ või vahemiku otspunktides $P_6(0;\ 1)$ ja $P_7(-5;\ 1)$.

Rajajoone osal $x = -5$, $-2 \leqslant y \leqslant 1$ on $z = 5 - 2y^2$. Et selle funktsiooni statsionaarne koht on $-4y = 0$ ehk $y = 0$, siis võib antud funktsioon omandada suurima või väikseima väärtuse kas statsionaarses punktis $P_8(-5;\ 0)$ või vahemiku otspunktides $P_9(-5;\ -2)$ ja P_7.

Rajajoone osal $y = -2$, $-5 \leqslant x \leqslant 0$ on $z = (x + 4)(x + 8)$ ehk $z = x^2 + 12x + 32$. Et selle funktsiooni statsionaarne koht $2x + 12 = 0$ ehk $x = -6$ ei asetse antud vahemikus, siis omandab funktsioon suurima ja väikseima väärtuse vahemiku otspunktides P_3 ja P_9.

Seega võib funktsioon omandada kõige suurema ja kõige väiksema väärtuse ainult punktides $P_1, P_2, \ldots, P_9$.

Arvutame funktsiooni väärtused nendes punktides:

$P_1(-4;\ -\sqrt{2})$ . . . $z_1 = (-4 + 4)(-4 + 2 \cdot 2) = 0$,
$P_2(-2;\ 0)$ . . . . . $z_2 = (-2 + 4)(-2 + 2 \cdot 0) = -4$,
$P_3(0;\ -2)$ . . . . . $z_3 = (0 + 4)(0 + 2 \cdot 4) = 32$,
$P_4(0;\ 0)$ . . . . . . $z_4 = (0 + 4)(0 + 2 \cdot 0) = 0$,
$P_5(-3;\ 1)$ . . . . . $z_5 = (-3 + 4)(-3 + 2 \cdot 1) = -1$,
$P_6(0;\ 1)$ . . . . . . $z_6 = (0 + 4)(0 + 2 \cdot 1) = 8$,
$P_7(-5;\ 1)$ . . . . . $z_7 = (-5 + 4)(-5 + 2 \cdot 1) = 3$,
$P_8(-5;\ 0)$. . . . . . $z_8 = (-5 + 4)(-5 + 2 \cdot 0) = 5$,
$P_9(-5;\ -2)$ . . . . $z_9 = (-5 + 4)(-5 + 2 \cdot 4) = -3$.

Niisiis on antud ristkülikus funktsiooni kõige väiksem väärtus -4 ja kõige suurem väärtus 32.

XXV. *Leida pinna* $z = \arctan \frac{y}{\sqrt{x}}$ *puutuvtasapind ja normaal punktis* $\left(1;\ 1;\ \frac{\pi}{4}\right)$.

Lahendus. Et

$$z'_x = -\frac{y}{2\sqrt{x}(x+y^2)}, \quad z'_x\Big|_{\substack{x=1\\y=1}} = -\frac{1}{4},$$

$$z'_y = \frac{\sqrt{x}}{x+y^2}, \quad z'_y\Big|_{\substack{x=1\\y=1}} = \frac{1}{2},$$

siis on puutuvtasapind valemi (4) järgi

$$z - \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{4}(x-1) + \frac{1}{2}(y-1)$$

ehk

$$x - 2y + 4z + 1 - \pi = 0$$

ja normaal kui puutuvtasapinna ristsirge punktis $\left(1;\ 1;\ \frac{\pi}{4}\right)$

$$x - 1 = \frac{1-y}{2} = \frac{4z-\pi}{16}.$$

XXVI. *Leida ellipsoidi*

$$3x^2 + 5y^2 + z^2 = 12$$

puutuvtasapind, mis on paralleelne tasapinnaga

$$3x - 5y + 2z - 7 = 0.$$

Lahendus. Käesolevas ülesandes antud pinna puutuvtasapinna võrrandi punktis $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ saame valemi (6) järgi:

$$6x_0(x-x_0) + 10y_0(y-y_0) + 2z_0(z-z_0) = 0.$$

Puutepunkti koordinaadid leiame tasapindade paralleelsuse tingimusest ja antud pinna võrrandist koosnevast süsteemist

$$\begin{cases} \frac{6x_0}{3} = -\frac{10y_0}{5} = \frac{2z_0}{2}, \\ 3x_0^2 + 5y_0^2 + z_0^2 = 12. \end{cases}$$

Esimestest võrranditest saame

$$2x_0 = -2y_0 = z_0.$$

Asendades x_0 ja y_0 teises võrrandis z_0 kaudu, saame

$$\frac{3z_0^2}{4} + \frac{5z_0^2}{4} + z_0^2 = 12$$

ehk

$$z_0^2 = 4,$$

millest

$$z_0 = \pm 2.$$

Seega rahuldavad ülesande tingimusi kaks puutepunkti (1; —1; 2) ja (—1; 1; —2), millele vastavad puutuvtasapinnad on

$$3x - 5y + 2z - 12 = 0$$

ja

$$3x - 5y + 2z + 12 = 0.$$

XXVII. *Leida* div **F** *ja* rot **F**, *kui*

$$\mathbf{F} = \{x + y + z;\quad x^2 + y^2 + z^2;\quad x^3 + y^3 + z^3\}.$$

Lahendus. Olgu vektori **F** koordinaadid tähistatud vastavalt X, Y ja Z. Valemite (28) ja (29) rakendamiseks arvutame

$$\frac{\partial X}{\partial x} = 1, \qquad \frac{\partial X}{\partial y} = 1, \qquad \frac{\partial X}{\partial z} = 1,$$

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = 2x, \qquad \frac{\partial Y}{\partial y} = 2y, \qquad \frac{\partial Y}{\partial z} = 2z,$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = 3x^2, \qquad \frac{\partial Z}{\partial y} = 3y^2, \qquad \frac{\partial Z}{\partial z} = 3z^2.$$

Seega on nende valemite järgi

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = 1 + 2y + 3z^2$$

ja

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \{3y^2 - 2z;\ 1 - 3x^2;\ 2x - 1\}.$$

Mitme muutuja funktsioon, selle piirväärtus ja pidevus

Ülesandeis **1529—1534** joonestada piirkonnad, mida esitavad antud võrratused xy-tasapinnal:

1529. $1 \leqslant x < 6$.
1530. $-1 \leqslant x \leqslant 3, \quad 2 \leqslant y \leqslant 5$.
1531. $y \geqslant x + 1$.
1532. $-2x + 1 < y < x + 3$.
1533. $x^2 + y^2 > 4$.
1534. $-1 \leqslant x \leqslant 1, \quad \sqrt{1 - x^2} \leqslant y < 4$.

Ülesandeis **1535—1549** esitada antud funktsiooni määramispiirkond võrratuste abil ja kujutada joonisel:

1535. $z = \dfrac{x + y}{x - y}$.

1536. $z = \sqrt{x - \sqrt[3]{y}}$.

1537. $z=\sqrt{2x-3\sqrt{y}}$.

1538. $z=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-y-4}}$.

1539. $z=\sqrt{y\cos x}$.

1540. $z=(y+\sqrt{y})\sqrt{\cos x}$.

1541. $z=\sqrt{\arcsin\dfrac{x}{y}}$.

1542. $z=\arcsin\dfrac{y-2}{x^2}+\sqrt{xy}$.

1543. $z=\arcsin\dfrac{y+2}{x-1}+\ln y$.

1544. $z=\arcsin\sqrt[3]{\dfrac{x+3}{y}}$.

1545. $z=\ln(x^2+y-4)$.

1546. $z=\ln\dfrac{x^2-2x}{y-2}$.

1547. $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2-r^2}$.

1548. $u=\sqrt{r^2-x^2-y^2-z^2}$.

1549. $u=\arcsin\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$.

1550. Kas funktsioonid

$$z=\sqrt{x\sin y} \quad \text{ja} \quad z=\sqrt{x}\sqrt{\sin y}$$

on identsed?

1551. Kas funktsioonid

$$z=\ln xy \quad \text{ja} \quad z=\ln x+\ln y$$

on identsed?

1552. Mille poolest erinevad teineteisest funktsioonid

$$z=\frac{x^2-y^2}{x-y} \quad \text{ja} \quad z=x+y?$$

Ülesandeis **1553—1560** kirjutada antud funktsiooni z nivoojoonte võrrand, joonestada nivoojooni ja määrata, missuguseid väärtusi võib omandada antud funktsioon:

1553. $z=x-y$.
1554. $z=xy$.

1555. $x^2 + y^2 + z^2 = 25.$

1556. $z = \frac{y}{x^2} - 2.$

1557. $z^2 - 2x^2 - 3y^2 = 0.$

1558. $z^3 + xz^2 + y = 0.$

1559. $z^2 + e^z x^2 - y^2 = 0.$

1560. $z^3 + 2zx - x^2 - y^2 = 0.$

Ülesandeis **1561—1563** koostada antud funktsiooni w nivoopinna võrrand ja leida, missuguseid väärtusi võib omandada funktsioon w:

1561. $w^2 + x^2 + y^2 - z^2 - 9 = 0.$

1562. $\ln w + x^2 + y^2 + z^2 = 4.$

1563. $w^3 + 2x^2 - y^2 - 2z = 0.$

1564. Joonestada funktsiooni

$$z = |2x - y| - 3y$$

nivoojooned, mis vastavad funktsiooni täisarvulistele väärtustele —3-st kuni +3-ni.

1565. Piirväärtuse definitsioonist lähtudes näidata, et

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0.$$

1566. Piirväärtuse definitsioonist lähtudes näidata, et

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ y \to -3}} (4x - 5y) = 23.$$

1567. $f(x, y) = \frac{3x^2 - y}{2x + y}$. Arvutada $\lim\limits_{x \to 0} \lim\limits_{y \to 0} f(x, y)$ ja $\lim\limits_{y \to 0} \lim\limits_{x \to 0} f(x, y)$. Kas on olemas $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x, y)$?

1568. $f(x, y) = \frac{2x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$. Leida $\lim\limits_{x \to 0} \lim\limits_{y \to 0} f(x, y)$ ja $\lim\limits_{y \to 0} \lim\limits_{x \to 0} f(x, y)$. Kas on olemas $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x, y)$?

1569. Kas on olemas

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{3x - 4y}{2x + 7y}?$$

1570. Näidata, et lähenedes punktile (0; 0) mööda sirget $y = kx$ võime vastava k valiku puhul funktsiooni $z = \frac{ax + by}{cx + dy}$ piirväärtuseks punktis (0; 0) saada mistahes etteantud arvu.

1571. Missugust sirget mööda tuleks läheneda punktile (0; 0), et funktsiooni $\frac{5x-y}{2x+3y}$ piirväärtus punktis (0; 0) võrduks arvuga 1?

1572. Näidata, et piirväärtust $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x+y\sin\frac{1}{y}}{x+y}$ ei ole.

1573. $f(x, y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$. Leida $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x, y)$ ja $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x, y)$. Kas on olemas $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)$?

Ülesandeis **1574—1582** leida antud funktsiooni katkevuskohad:

1574. $z=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

1575. $z=\frac{\sqrt{\sin y}}{x^2-\sqrt{x}}$.

1576. $z=\frac{x-5y}{3x+4y}$.

1577. $z=\frac{y^2+2x}{y^2-2x}$.

1578. $z=\frac{x}{\operatorname{ch} y}$.

1579. $z=\frac{3x+y}{2x-y}$.

1580. $z=\frac{3}{x^2-y^2}$.

1581. $u=\frac{\sin z}{\sin x\cos y}$.

1582. $u=\frac{1}{\sqrt{9-x^2-y^2-z^2}}$.

Ülesandeis **1583—1587** uurida antud funktsiooni pidevust:

1583. $f(x, y)=\begin{cases}\frac{x^2y^2}{x^4+y^4}, & \text{kui } x\neq 0 \text{ ja } y\neq 0,\\ 0, & \text{kui } x=0 \text{ ja } y=0.\end{cases}$

1584. $f(x, y)=\begin{cases}\frac{x^3y^3}{x^4+y^4}, & \text{kui } x\neq 0 \text{ ja } y\neq 0,\\ 0, & \text{kui } x=0 \text{ ja } y=0.\end{cases}$

1585. $f(x, y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{kui } x\neq 0 \text{ ja } y\neq 0,\\ 0, & \text{kui } x=0 \text{ ja } y=0.\end{cases}$

1586. $f(x, y)=\begin{cases}\frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & \text{kui } x\neq 0 \text{ ja } y\neq 0,\\ 0, & \text{kui } x=0 \text{ ja } y=0.\end{cases}$

1587. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{kui } x \neq 0 \text{ ja } y \neq 0, \\ 0, & \text{kui } x = 0 \text{ ja } y = 0. \end{cases}$

Funktsiooni osatuletised

Ülesandeis **1588—1611** avaldada antud funktsiooni esimest järku osatuletised kõigi muutujate järgi:

1588. $u = 3x^2 - 5xy + 2yz - z^2$.

1589. $z = (3x^3 - 2x^2y + y^3)^4$.

1590. $u = (xyz)^5$.

1591. $z = 2x\sqrt[3]{y} + y\sqrt{x}$.

1592. $z = \dfrac{xy^2}{x^3 + y^3}$.

1593. $z = \sqrt{x^2 - y^2}$.

1594. $z = (x^2 + y^2)\dfrac{1 - \sqrt{x^2 + y^2}}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}}$.

1595. $u = \tan(x^2 + y^3 + z^4)$.

1596. $z = \sin xy - \cos \dfrac{x}{y}$.

1597. $z = \arctan \dfrac{y}{\sqrt{x}}$.

1598. $z = x^2y^2 \ln(x + y)$.

1599. $u = \ln(xy + \ln z)$.

1600. $z = \ln(y + \sqrt{x^3 + y^3})$.

1601. $u = 2 \ln \cos(x + x^2y^2 + x^3y^3z^3) + \tan^2(x + x^2y^2 + x^3y^3z^3)$.

1602. $u = \ln \dfrac{1 + \sqrt[3]{x^2 + y^2 + z^2}}{1 - \sqrt[3]{x^2 + y^2 + z^2}}$.

1603. $z = (x + \log_y x)^4$.

1604. $z = \log_x y$.

1605. $z = e^{-\frac{y^2}{x}}$.

1606. $z = 5^{-\frac{x}{y}}$.

1607. $z = 2^{\sin xy}\, xy$.

1608. $u = x^{y^z}$.

1609. $z = \arcsin \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

1610. $z = \arcsin \sqrt[3]{\frac{x+3}{y}}$.

1611. $u = \arcsin \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}$.

1612. Arvutada $\frac{\partial z}{\partial x}$ ja $\frac{\partial z}{\partial y}$ punktis (1; 1), kui $z = \frac{1}{\arctan \frac{y}{x}}$.

1613. Arvutada $\frac{\partial z}{\partial x}$ ja $\frac{\partial z}{\partial y}$ punktis (π; 4), kui $z = \ln \tan \frac{x}{y}$.

1614. Arvutada $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ ja $\frac{\partial u}{\partial z}$ punktis (1; 4; 2), kui $u = x^{\frac{y}{z}}$.

1615. Arvutada $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ ja $\frac{\partial u}{\partial z}$ punktis (2; 1; 1), kui $u = \arctan (x - y)^z$.

1616. Avaldada $f'_x(x, 2)$, kui

$$f(x, y) = x^2 + (y - 2) \arctan \frac{x}{y}.$$

1617. Avaldada $f'_y(-1, y)$, kui

$$f(x, y) = (x + 1)^2 \arcsin \sqrt{\frac{y}{x}} + x \arctan y.$$

1618. $f(x, y) = \arctan \frac{x + y}{x - y}$. Arvutada

$$\left. \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}{\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial y}} \right|_{\substack{x = 2 \\ y = -3}}.$$

1619. $z = \ln \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{\sqrt{x^2 + y^2} + x}$. Arvutada

$$\left. \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} \right|_{\substack{x = 3 \\ y = -4}}.$$

Märkus. Enne diferentseerimist teisendada

$$\ln \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{\sqrt{x^2 + y^2} + x} = 2 \ln (\sqrt{x^2 + y^2} - x) - 2 \ln y.$$

1620. Pind $z = x^3y - y^3x$ on lõigatud tasapinnaga $y = 1$. Missuguse nurga moodustab tekkinud lõikejoone puutuja x-telje positiivse suunaga punktis $(-1;\ 2;\ 6)$?

1621. Kui suure nurga moodustab pindade

$$z = \ln (x^2 + y^2) \quad \text{ja} \quad x = -\frac{3}{5}$$

lõikejoone puutuja punktis $\left(-\frac{3}{5};\ \frac{4}{5};\ 0\right)$ y-telje positiivse suunaga?

1622. Kui suure nurga moodustab pindade

$$z = \arctan \frac{x}{y} \quad \text{ja} \quad y = 1$$

lõikejoonele punktis abstsissiga -1 tõmmatud puutuja x-teljega?

1623. Kui suure nurga moodustab joonele

$$\begin{cases} z = \ln (x + \ln y), \\ x = 1 \end{cases}$$

punktis $(1;\ 1;\ 0)$ tõmmatud puutuja sirgega $\begin{cases} x = 1 \\ z = 0 \end{cases}$?

1624. Kui suure nurga moodustab joonele

$$\begin{cases} z = (1 + xy)^y, \\ y = 1 \end{cases}$$

punktis $(3;\ 1;\ 4)$ tõmmatud puutuja sirgega $\begin{cases} y = 1 \\ z = 4 \end{cases}$?

1625. Missuguse nurga all lõikuvad jooned

$$\begin{cases} y = 2, \\ z = \dfrac{6x^2 + y^2}{6} \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} y = 2, \\ z = \dfrac{x^2 + y^2}{3} \end{cases}?$$

1626. Leida funktsiooni

$$z = \arctan \frac{x + y}{y}$$

muutumiskiirus punktis $(1;\ 2)$ a) x muutumisel, b) y muutumisel.

1627. Missuguse kiirusega muutub pöördsilindri ruumala, kui tema kõrguse muutumisel põhja raadius jääb konstantseks või kui põhja raadiuse muutumisel kõrgus jääb konstantseks?

Ülesandeis **1628—1630** avaldada antud funktsiooni esimest ja teist järku osatuletised:

1628. $u = \ln(xy + xz + yz)$.

1629. $z = y^x \quad (y > 0)$.

1630. $z = \ln \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$.

1631. Avaldada funktsiooni

$$z = \ln(e^x + e^y)$$

esimest, teist ja kolmandat järku osatuletised.

1632. Avaldada

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y} \quad \text{ja} \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2},$$

kui $u = x^3y^2 - 2x^2y^2 - 4xy^4 - 5y^5$.

1633. Avaldada

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x\, \partial y\, \partial z\, \partial u},$$

kui $w = \ln \frac{1}{\sqrt{(x-y)^2 + (z-u)^2}}$.

1634. Avaldada

$$\frac{\partial^{p+q} z}{\partial x^p\, \partial y^q},$$

kui $z = x^n y^m$, kusjuures $p < n$ ja $q < m$.

1635. Avaldada

$$\frac{\partial^{p+q} z}{\partial x^p\, \partial y^q},$$

kui $z = x^p y^q$.

1636. Avaldada

$$\frac{\partial^n z}{\partial x^n} \quad \text{ja} \quad \frac{\partial^m z}{\partial y^m},$$

kui $z = e^{xy}$.

Ülesandeis **1637—1640** avaldada $\frac{\partial^n z}{\partial x^n}$, $\frac{\partial^m z}{\partial y^m}$ ja $\frac{\partial^{p+q} z}{\partial x^p\, \partial y^q}$.

1637. $z = \sin x + \cos y$.

1638. $z = \sin x \cos y$.

1639. $z = \sin xe^y$.

1640. $z = xye^{x+y}$.

1641. Arvutada funktsiooni

$$z = \frac{x}{y^2}$$

kõik teist järku osatuletised, kui $x = -1$ ja $y = -2$.

1642. Arvutada funktsiooni

$$z = \arctan \frac{x + y}{1 - xy}$$

kõik teist järku osatuletised punktis $(-1; 2)$.

1643. Arvutada funktsiooni

$$z = \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

kõik teist järku osatuletised punktis $(1; -2)$.

1644. Arvutada

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)^2 - 2\,\frac{\partial^2 \cancel{x}\; z}{\partial x\, \partial y}$$

punktis $(1; -2)$, kui $z = \arctan \frac{y}{x}$.

1645. Arvutada

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}\right)^2$$

punktis $(0; -2)$, kui $z = \frac{\cos x^2}{y}$.

Funktsiooni osadiferentsiaalid, täisdiferentsiaal, tuletis antud suunas ja gradient

1646. Avaldada funktsiooni

$$z = 3x - y + \sqrt{x^2 + y^2}$$

osadiferentsiaalid.

1647. Avaldada funktsiooni

$$z = \arctan xy$$

osadiferentsiaal $d_x z$ ja arvutada osadiferentsiaali $d_y z$ väärtus, kui $x = -1$, $y = 3$, $\Delta y = -0{,}02$.

1648. Avaldada funktsiooni

$$z = \arcsin \frac{x}{y}$$

osadiferentsiaalid ja arvutada nende väärtused, kui $x=4$, $y=-5$, $\Delta x=-0{,}3$ ja $\Delta y=0{,}2$.

Ülesandeis **1649—1654** avaldada antud funktsiooni täisdiferentsiaal:

1649. $z=\sin\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x}$.

1650. $z=\arctan\frac{x+y}{x-y}$.

1651. $z=\ln\sin\frac{x}{y}$.

1652. $z=\ln\tan\frac{x}{y}$.

1653. $z=\ln\left(x+\frac{y}{2x}\right)$.

1654. $z=\ln(x+\ln y)$.

1655. Leida funktsiooni

$$z=\frac{x+y}{x-y}$$

juurdekasv Δz ja täisdiferentsiaal dz, kui x muutub väärtuselt -3 väärtuseni $-\frac{10}{3}$ ja y väärtuselt 7 väärtuseni $\frac{29}{4}$.

1656. Kerale

$$x^2+y^2+z^2=25$$

on punktis (0; 3; 4) tõmmatud puutuvtasapind. Kui pikk lõik sirgest $x=1$, $y=3{,}5$ jääb selle puutuvtasapinna ja kera pinna vahele?

Ülesandeis **1657—1661** avaldada antud funktsiooni teist järku täisdiferentsiaal.

1657. $z=\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$.

1658. $z=y^x$.

1659. $z=\frac{x-y}{x+y}$.

1660. $z=\sin^2(x-y)$.

1661. $z=\arcsin(x+y)$.

1662. Avaldada d^2z ja d^3z, kui $z=2x^3+xy^2+y^3$.

1663. $z=\frac{y}{x}$. Avaldada d^3z.

Ülesandeis **1664—1671** arvutada avaldise ligikaudne väärtus, vaadeldes antud avaldist sobivalt valitud funktsiooni väärtusena ja lugedes funktsiooni juurdekasvu ligikaudu võrdseks täisdiferentsiaaliga:

1664. $\sqrt{0{,}98^2 + 3\sqrt{1{,}04}}$.

1665. $\sqrt{0{,}98^2 + 3\sqrt[5]{1{,}03}}$.

1666. $1{,}96^3 \cdot 2{,}03^5$.

1667. $e^{3{,}02 \cdot 0{,}04}$.

1668. $0{,}96^{3{,}02}$.

1669. $\ln(\sqrt[5]{0{,}98} + \sqrt[4]{1{,}04} - 1)$.

1670. $\dfrac{3{,}87}{1{,}96^2 + 1{,}15^2}$.

1671. $5{,}997 \cdot 4{,}002 + 4{,}002 \cdot 14{,}998 + 14{,}998 \cdot 5{,}997$.

1672. Kolmnurga mõõtmisel saadi $a = 27{,}2(\pm 0{,}05)$ m, $h_a = 34{,}0(\pm 0{,}05)$ m. Arvutada kolmnurga pindala koos vea ülemmääraga.

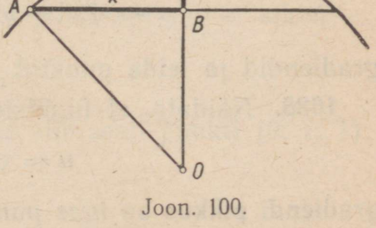
1673. Arvutada risttahuka ruumala koos vea ülemmääraga, kui tema ühest tipust lähtuvate servade pikkused on $7{,}4(\pm 0{,}1)$ cm, $4{,}1(\pm 0{,}05)$ cm ja $2{,}4(\pm 0{,}05)$ cm.

1674. Arvutada kolmnurga pindala, kui $a = 22{,}5(\pm 0{,}3)$ cm, $b = 80{,}0(\pm 0{,}2)$ cm, $\gamma = 36°40'(\pm 5')$.

1675. Ohmi seaduse järgi on alalisvoolu tugevuse I, takistuse R ja pinge E vahel seos $R = \dfrac{E}{I}$. Mõõtmisel saadi $E = 108(\pm 2)$ volti, $I = 21(\pm 0{,}5)$ amprit. Arvutada takistus R ja määrata saadud tulemuse vea ülemmäär.

1676. Täisnurkse kolmnurga kaatetite projektsioonid hüpotenuusile on $2{,}16(\pm 0{,}005)$ m ja $7{,}56(\pm 0{,}005)$ m. Leida kolmnurga kõrgus.

1677. Ringjoone kõõlu pikkus ja kõõlule vastava kaare keskpunkti kaugus kõõlust määravad ringjoone raadiuse. Jooniselt 100 on näha, et täisnurkses kolmnurgas ABO on $r^2 = k^2 + (r - q)^2$ ehk $r^2 = k^2 + r^2 - 2rq + q^2$, millest $r = \dfrac{k^2 + q^2}{2q}$. Mõõtmisel saadi $2k = 19{,}45(\pm 0{,}05)$ cm, $p = 3{,}62(\pm 0{,}03)$ cm. Arvutada ringjoone raadius ja saadud väärtuse absoluutse ning relatiivse vea ülemmäär.



Joon. 100.

1678. Tuletada eeskiri summa absoluutse vea ülemmäära arvutamiseks.

1679. Tuletada eeskiri vahe absoluutse vea ülemmäära arvutamiseks.

1680. Tuletada eeskiri korrutise relatiivse vea ülemmäära arvutamiseks.

1681. Tuletada eeskiri jagatise relatiivse vea ülemmäära arvutamiseks.

1682. Leida funktsiooni

$$u = \arcsin \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

gradient punktis $(\sqrt{2};\ \sqrt{2};\ 1)$.

1683. Leida funktsiooni

$$u = \arcsin \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}$$

gradient punktis $(1;\ 1;\ 2)$.

1684. Leida funktsioonide

$$\ln (x^2 + y^2) \quad \text{ja} \quad \arctan \frac{y}{x}$$

gradiendid ja nurk nende vahel.

1685. Avaldada funktsioonide

$$z = x^y \quad \text{ja} \quad z = y^x$$

gradiendid ja leida gradientidevaheline nurk punktis $(1;\ 1)$.

1686. Leida funktsioonide

$$\sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{ja} \quad \sqrt{2xy}$$

gradiendid ja määrata kohad, kus need gradiendid on paralleelsed.

1687. Avaldada funktsioonide

$$z = \sqrt{x^2 - y^2} \quad \text{ja} \quad z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

gradiendid ja leida punktid, kus gradiendid on risti.

1688. Näidata, et funktsiooni

$$u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

gradiendi pikkus on igas punktis 1.

1689. Leida funktsiooni

$$u = \arctan\frac{y}{x} - \frac{4y}{x}$$

tuletis punktis $(1; \sqrt{3})$ suunas, mis viib sealt punkti $(2; 3\sqrt{3})$.

1690. Leida funktsiooni

$$z = \arctan\frac{\sqrt{y}}{x}$$

tuletis punktis (2; 4) suunas, mis viib sealt punkti (6; 7).

1691. Leida funktsiooni

$$z = \ln(e^x + e^y)$$

tuletis punktis (0; 0) vektori {3; 4} suunas.

1692. Leida funktsiooni

$$z = y^3 - 2x^2y^2 - x^2y$$

tuletis punktis (—2; 1) vektori {1; 2} suunas.

1693. Avaldada funktsiooni

$$z = x^2 + y^2$$

tuletis punktis (1; 1) suunas, mis moodustab x-telje positiivse suunaga nurga α. Kui suure α puhul on tuletis a) maksimaalne, b) minimaalne, c) 0?

1694. Leida funktsiooni

$$z = \arctan xy$$

tuletis punktis (1; 1) sirge $y = x$ sihis.

1695. Avaldada võrrandiga

$$2x^2 + 3xy + yz^2 - z^3 + 3 = 0$$

määratud funktsiooni tuletis punktis (3; —1; 2) suunas, mis moodustab x-telje positiivse suunaga nurga 60°.

1696. Kui suur on funktsiooni

$$z = x^2 + y^2$$

tuletise absoluutväärtus punktis (1; 1) parabooli $y = x^2$ sihis?

1697. Arvutada funktsiooni

$$u = x^2y^2z^2$$

tuletis punktis (1; —1; 3) suunas, mis viib sealt punkti (0; 1; 1).

1698. Arvutada funktsiooni

$$u = xyz$$

tuletis punktis (—2; 1; 3) vektori $4\mathbf{u}_1 + 3\mathbf{u}_2 + 12\mathbf{u}_3$ suunas.

1699. Arvutada funktsiooni

$$u = x^2y^2 - z^2 + 2xyz$$

tuletis punktis (1; 1; 0) suunas, mis moodustab telgedega vastavalt nurgad 60°, 45°, 60°.

1700. Kui suur on funktsiooni

$$z = \ln (x^2 + y^2)$$

suurim kasvamiskiirus punktis (—3; 4)?

1701. Leida pinna

$$\sqrt{x^2 + y^2} - z = 0$$

suurim tõus punktis (3; 4; 5).

1702. Leida pinna

$$z^3 - x^2 - y^3 = 2$$

suurim tõus punktis (3; 4; 3).

Liitfunktsiooni ning ilmutamata funktsiooni tuletis ja täisdiferentsiaal

1703. Avaldada $\frac{dz}{dx}$, kui $z = \arctan (xy + 1)$ ja $y = \ln x$.

1704. Leida $\frac{dz}{dx}$, kui $z = \arcsin \frac{x}{y}$ ja $y = \sqrt{x^2 + 4}$.

1705. Avaldada $\frac{dz}{dt}$, kui $z = \arcsin \frac{x}{y}$, $x = t^2$ ja $y = \sin t$.

1706. Avaldada $\frac{dz}{dt}$, kui $z = \tan (3t + 2x^2 - y)$, $x = \frac{1}{t}$ ja $y = \sqrt{t}$.

1707. Leida $\frac{du}{dx}$, kui $u = \frac{e^{2x}}{5} (y - z)$, kusjuures $y = 2 \sin x$ ja $z = \cos x$.

1708. Avaldada $\frac{\partial z}{\partial u}$ ja $\frac{\partial z}{\partial v}$, kui $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, kusjuures $x = u \cos v$ ja $y = v \cos u$.

1709. Avaldada $\frac{\partial z}{\partial u}$ ja $\frac{\partial z}{\partial v}$, kui $z = \ln (x^2 + y^2)$, $x = u \operatorname{ch} v$ ja $y = u \operatorname{sh} v$.

1710. Avaldada $\frac{\partial z}{\partial u}$ ja $\frac{\partial z}{\partial v}$, kui $z = x^2y - y^2x$, $x = u \cos v$ ja $y = u \sin v$.

1711. Leida funktsiooni

$$z = \arctan uv$$

osatuletised, kui $u = xy$ ja $v = x - y$.

1712. Leida $\frac{Dw}{Dx}$ ja $\frac{Dw}{Dy}$, kui

$$w = \sqrt{x^2 + u^2 + v^2},$$

kusjuures $u = y \sin x$ ja $v = ye^x$.

1713. Leida funktsiooni

$$u = \varrho^2 + x^2 + \arctan y$$

puhul $\frac{Du}{D\varrho}$ ja $\frac{Du}{D\varphi}$, kui $x = \varrho \cos \varphi$ ja $y = \varrho \sin \varphi$.

Ülesandeis **1714** ja **1715** leida $\frac{\partial z}{\partial x}$ ja $\frac{\partial z}{\partial y}$, kui $\varphi(u)$ on diferentseeruv funktsioon:

1714. $z = xy + \varphi(\sqrt{xy})$.

1715. $z = x + \varphi(x^2 y)$.

Ülesandeis **1716—1720** avaldada $\frac{\partial z}{\partial x}$ ja $\frac{\partial z}{\partial y}$, kui $f(u, v)$ on diferentseeruv funktsioon:

1716. $z = f(x^2 - y^2, e^{xy})$.

1717. $z = f[\sin(x - y), x^2 y^2]$.

1718. $z = f(x^2 - y^2, e^{\frac{x}{y}})$.

1719. $z = f[\cos xy, x^3 - y]$.

1720. $z = f(\sqrt{xy}, x^2 + y^3)$.

1721. $z = \varphi(x, y)$, kus $x = u + v$, $y = u - v$. Avaldada $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$ ja $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}$.

1722. $u = f(z)$, kusjuures $z = x^2 - y^2$. Avaldada antud funktsiooni kõik teist järku osatuletised.

1723. $u = f(t)$, kusjuures $t = x^2 + y^2 + z^2$. Avaldada antud funktsiooni kõik teist järku osatuletised.

1724. Näidata, et funktsiooni

$$u = \ln(x^2 + y^2)$$

puhul $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

1725. Näidata, et funktsioon

$$u = x f\left(\frac{y}{x}\right) - x^2 - y^2,$$

kus $f(t)$ on diferentseeruv, täidab tingimust

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+x^2+y^2=u.$$

1726. Näidata, et funktsioon

$$z=y-\varphi\left(\frac{x}{y}\right),$$

kus $\varphi(t)$ on mistahes diferentseeruv funktsioon, täidab tingimust

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=y.$$

1727. Näidata, et

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,$$

kui $u=f[x+\varphi(y)]$.

1728. Näidata, et funktsioon

$$w=\frac{e^{-u}+e^{u}}{u},$$

kus $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, täidab tingimust

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=u.$$

1729. Avaldada $\frac{dy}{dx}$, kui

$$x^3+5x^2y-xy^3+y^4=95.$$

1730. Leida $\frac{dy}{dx}$, kui

$$2y^3+3x^2y+\ln x=0,$$

ja arvutada tema väärtus, kui $x=1$.

1731. Avaldada võrrandiga

$$y=\sqrt{x}\ln\frac{x}{y}$$

määratud funktsiooni y tuletis ja arvutada tema väärtus punktis $(e^2; e)$.

1732. Avaldada võrrandiga

$$y^5e^y-(2x^3+3)\sin y+x^2y^2=x\cos x$$

määratud funktsiooni y tuletis ja arvutada tema väärtus punktis $(0; 0)$.

1733. Leida joonele

$$x^3+y^3-4xy=0$$

punktis $(2; 2)$ tõmmatud puutuja tõus.

1734. Leida joonele

$$y + e^{y-x} = 0$$

punktis $(-1;\ -1)$ tõmmatud puutuja tõus.

1735. Leida joonele

$$\ln \sqrt{x^2 + y^2} - \arctan \frac{y}{x} = 0$$

punktis $(1;\ 0)$ tõmmatud puutuja.

1736. Leida joonele

$$x^2 + xy + y^2 = 3$$

punktis $(-1;\ -1)$ tõmmatud puutuja.

1737. Arvutada võrrandiga

$$z = e^z - x - y$$

määratud funktsiooni z esimest järku osatuletised punktis $(0;\ e;\ 1)$. Kas funktsioonil z on osatuletisi ka punktis $\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2};\ 0\right)$?

Ülesandeis **1738—1741** avaldada antud võrrandiga määratud funktsiooni osatuletised ja leida nende väärtused antud punktis:

1738. $z = \cos xy - \sin xz,\quad \left(\frac{\pi}{2};\ 1;\ 0\right)$.

1739. $x^3 + y^3 + z^3 - 3x^2y^2z^2 = 0,\quad (1;\ 1;\ 1)$.

1740. $xyz = e^z,\quad (e^{-1};\ -1;\ -1)$.

1741. $x^2 - y^2 + z^2 + 2xy - 3xz + yz - 3 = 0,\quad (1;\ 2;\ -1)$.

1742. Avaldada $\frac{dy}{dx}$ ja $\frac{dz}{dx}$, kui funktsioonid y ja z on määratud võrrandisüsteemiga

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 14, \\ 6x^2 - 2y - 5z + 5 = 0. \end{cases}$$

Arvutada leitud tuletiste väärtused argumendi väärtusel 1, kusjuures $y < 0$.

1743. $7x^2 + y^2 - 3z^2 = -1,$

$4x + 2y^2 - 3z^2 = 0.$

Avaldada $\frac{dy}{dx}$ ja $\frac{dz}{dx}$.

1744. $2z^3 - y^3 + x^3 = 2,$

$z^2 + y^2 + x^2 = 9.$

Avaldada $\frac{dy}{dx}$ ja $\frac{dz}{dx}$.

1745. Leida võrrandisüsteemiga

$$\begin{cases} x^2 - 3y^2 + 2u^2 - 4v^2 = 5, \\ 4x + 2y^2 - 3u + 4v^2 = -6. \end{cases}$$

määratud funktsioonide $u(x, y)$ ja $v(x, y)$ osatuletised $\frac{\partial u}{\partial y}$ ja $\frac{\partial v}{\partial y}$ punktis $x = -1$, $y = 0$, $u > 0$ ja $v > 0$.

1746. Avaldada $\frac{\partial z}{\partial x}$ ja $\frac{\partial z}{\partial y}$, kui $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = u^2$.

1747. Avaldada $\frac{\partial z}{\partial x}$ ja $\frac{\partial z}{\partial y}$, kui $x = e^u \cos v$, $y = e^u \sin v$, $z = uv$.

1748. Leida $\frac{\partial z}{\partial x}$ ja $\frac{\partial z}{\partial y}$ punktis $u = 1$, $v = -2$, kui $x = u + v$, $y = u - v$, $z = u^2 v^2$.

1749. Leida $\frac{\partial z}{\partial x}$ ja $\frac{\partial z}{\partial y}$ punktis $u = 0$ ja $v = 3$, kui

$$\begin{aligned} x &= v \cos u - u \cos u + \sin u, \\ y &= v \sin u - u \sin u - \cos u, \\ z &= (u - v)^2. \end{aligned}$$

1750. Avaldada dz, kui

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

1751. Avaldada dz, kui

$$e^z = xyz.$$

1752. Avaldada võrrandiga

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xz = 2$$

määratud funktsiooni z täisdiferentsiaal punktis $(1; -1; 2)$.

1753. $w = \frac{u^2}{v}$, kusjuures $u = \cancel{x} - 2y$, $v = 2x + y$. Avaldada dw.

1754. Avaldada dz, kui

$$\begin{aligned} z &= x^2 y - y^2 x, \\ x &= r \cos \varphi, \\ y &= r \sin \varphi. \end{aligned}$$

1755. $w = \operatorname{sh} uv$, kusjuures $u = x^2 - y^2 - z^2$ ja $v = x^2 + y^2 + z^2$. Avaldada dw.

1756. $u = (x^2 + y^2) e^z$ ja $z = \frac{x^2 + y^2}{xy}$. Avaldada du.

1757. $x = u + v$, $y = u - v$, $z = uv$. Avaldada dz.

1758. $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = v$. Avaldada dz.

1759. $x = u + v$, $y = u^2 + v^2$, $z = u^3 + v^3$. Avaldada dz.

Osatuletiste rakendusi

1760. Arendada polünoom

$$x^3 + y^3 - 3xy$$

Taylori valemi abil $x - 1$ ja $y - 1$ astmete järgi.

1761. Kirjutada funktsiooni

$$z = 3x^3 - 2x^2y - 7xy^2 + 3y^2$$

Taylori polünoom kohal $x = -1$ ja $y = 1$.

1762. Kirjutada funktsiooni

$$z = 2x^3 - 3x^2y + 5xy^2 - y^3$$

Taylori polünoom kohal $(1; -1)$.

1763. Leida funktsiooni

$$z = x^2 + 5xy + 2y^2$$

juurdekasv, kui x muutub väärtuselt 2 väärtuseni $2 + h$ ja y väärtuselt -1 väärtuseni $-1 + k$.

1764. Kirjutada funktsiooni

$$z = e^y \sin x$$

Taylori polünoom kuni kolmandat järku liikmeteni kohal $x = 0$ ja $y = 0$.

1765. Arendada funktsioon

$$z = e^y \ln(1 + x)$$

Maclaurini valemi järgi kuni teist järku liikmeteni ja kirjutada välja vastav jääkliige.

1766. Arendada funktsioon

$$z = \ln(x + y)$$

Taylori valemi abil $x - 1$ ja $y - 1$ astmete järgi, lõpetades kolmandat järku liikmetega ja vastava jääkliikmega.

1767. Kirjutada funktsiooni

$$z = x^2 \operatorname{sh} xy$$

Taylori polünoom kuni kolmandat järku liikmeteni kohal $x=1$ ja $y=0$.

1768. Kirjutada funktsiooni

$$z=e^x \sin xy$$

Taylori polünoom kuni teist järku liikmeteni kohal $x=0$ ja $y=1$ ning arvutada saadud polünoomi abil funktsiooni ligikaudne väärtus kohal $x=0{,}02$ ja $y=0{,}97$.

1769. Arendada funktsioon

$$z=x^y$$

$x-1$ ja $y-3$ astmete järgi kuni teist järku liikmeteni ja arvutada saadud arenduse abil $1{,}1^{3,1}$.

1770. Kas funktsioonil

$$z=x(3x^2y-x^2y^2+1)$$

on statsionaarseid kohti?

1771. Leida funktsiooni

$$z=x^2y^3(6-x-y)$$

statsionaarsed kohad.

Ülesandeis **1772—1778** leida antud funktsiooni ekstreemumkohad ja määrata nende liik:

1772. $z=2x^2-2xy+5y^2-7x+y-1$.

1773. $z=1+2x+3y+xy-4x^2-2y^2$.

1774. $z=4x^2-xy+9y^2+x-y$.

1775. $z=e^x(x^2+y^2)$.

1776. $z=2xy-3x^2-4y^2+x+y+1$.

1777. $z=(x^2+y^2)^2+(x-y)^2+1$.

1778. $z=x^2+2xy+4y^2-x+2y+1$.

1779. Leida võrrandiga

$$\frac{z}{2}(1-z)=x^2+y^2+4(xz+1)$$

määratud funktsiooni z statsionaarsed kohad.

1780. Leida võrrandiga

$$z(z+2)=x(z-x)+y(z-y)+2(1-x-y)$$

määratud funktsiooni z ekstremaalsed väärtused.

1781. Leida funktsiooni

$$z=x^2+y^2$$

statsionaarsed kohad, kui $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$.

1782. Leida funktsiooni

$$z = xy$$

statsionaarsed kohad tingimusel, et $x + y = 1$.

1783. Leida funktsiooni

$$z = x - y$$

statsionaarsed kohad lisatingimusel $x^2 + y^2 = 1$.

1784. Leida funktsiooni

$$z = x^2 + y^2$$

statsionaarsed kohad lisatingimusel $x^4 + y^4 = 1$.

1785. Leida funktsiooni

$$z = \frac{1}{s} + \frac{1}{t}$$

ekstremaalsed väärtused lisatingimusel $s + t = 2$.

1786. Leida funktsiooni

$$z = x^2 + y^2$$

ekstremaalsed väärtused lisatingimusel $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$.

1787. Leida täisnurkse kolmnurga minimaalne ümbermõõt tingimusel, et kolmnurga pindala oleks 25 cm^2.

1788. Ristküliku diagonaalile ehitatud ruudu pindala on 18 cm^2. Leida ristküliku küljed nii, et ristküliku pindala oleks maksimaalne.

1789. Leida täisnurkse kolmnurga maksimaalne pindala, kui hüpotenuusile ehitatud ruudu pindala on 2 cm^2.

1790. Risttahuka ühte tippu läbivate servade summa on 1 m. Leida risttahuka mõõtmed nii, et tema ruumala oleks maksimaalne.

1791. Leida minimaalse pindalaga risttahuka servad nii, et risttahuka ruumala oleks 8 m^3.

1792. Leida maksimaalse ruumalaga risttahuka servad nii, et risttahuka pindala oleks 16 cm^2.

1793. Leida pöördsilindrikujulise, pealt lahtise nõu mõõtmed nii, et konstantse ruumala V puhul nõu pindala oleks minimaalne.

1794. Leida paraboolil

$$y = 3x^2 - 2$$

punkt, mis on lähim punktile (0; 2).

1795. Leida sirgel

$$2x - 3y + 5 = 0$$

punkt, mis on lähim punktile (—1; 2).

1796. Leida joonel

$$x^2 - y^2 - 4 = 0$$

punkt, mis on lähim punktile (0; 2).

1797. Leida funktsiooni

$$z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$$

kõige väiksem ja kõige suurem väärtus ristkülikus külgedega $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$, $y = 2$.

1798. Leida funktsiooni

$$z = -x^3y + 4x^2y - x^2y^2$$

kõige väiksem ja kõige suurem väärtus kolmnurgas, mille külgedeks on sirged $x = 0$, $y = 0$ ja $y = 6 - x$.

1799. Leida pinna

$$z + xy = \sqrt{x^2 + y^2}$$

puutuvtasapind ja normaal punktis (3; 4; —7).

1800. Leida pinna

$$z = \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

puutuvtasapind ja normaal punktis (0; —3; 0).

1801. Leida pinna

$$z^2 = e^x + e^y$$

puutuvtasapind ja normaal punktis (0; 0; $\sqrt{2}$).

1802. Leida pinna

$$x^2y^2 + 2x + z^3 = 16$$

puutuvtasapind ja normaal punktis, kus $x = 2$ ja $y = 1$.

1803. Leida pinna

$$y[xz(z^2 - x^2) - y^4] = 5$$

puutuvtasapind ja normaal punktis (1; 1; 2).

1804. Leida pinna

$$z^2 = x^2 + y^2 + 1$$

puutuvtasapind ja normaal punktis, kus puutuvtasapind on paralleelne tasapinnaga $x + \sqrt{2}\,y - 2z + 5 = 0$.

1805. Leida pinna

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 6$$

puutuvtasapind ja normaal punktis, kus puutuvtasapind on paralleelne tasapinnaga $6x + 2y + 3z = 0$.

1806. Leida pinna

$$\begin{cases} x = u \cos t, \\ y = u \sin t, \\ z = u \end{cases}$$

puutuvtasapind ja normaal punktis $u = 2$ ja $t = \frac{\pi}{6}$.

1807. Leida pinna

$$\begin{cases} x = \cos u \cos v, \\ y = 2 \cos u \sin v, \\ z = 3 \sin u \end{cases}$$

puutuvtasapind ja normaal punktis, kus $u = v = \frac{\pi}{4}$.

Ülesandeis **1808—1810** avaldada antud vektorvälja divergents ja rootor.

1808. $\mathbf{F} = \{yz;\ xz;\ xy\}$.

1809. $\mathbf{F} = \{y^2;\ z^2;\ x^2\}$.

1810. $\mathbf{F} = \{xyz;\ x^2y^2z^2;\ x^3y^3z^3\}$.

1811. Arvutada vektorvälja

$$\mathbf{F} = \{xyz;\ xyz;\ xyz\}$$

divergents ja rootor punktis $(1;\ -1;\ 1)$.

1812. Avaldada funktsiooni

$$u = x^3 + y^3 + z^3$$

gradiendi divergents ja rootor.

1813. Tõestada, et iga teist järku osatuletisi omava funktsiooni

$$u = f(x,\ y,\ z)$$

puhul on rot grad $u = 0$.

§ 16. DIFERENTSIAALGEOMEETRIA ELEMENDID

Kui punktis abstsissiga x_0 on

$$f(x_0) = g(x_0) = f'(x_0) = g'(x_0) = \ldots =$$
$$= f^{(n)}(x_0) = g^{(n)}(x_0), \quad f^{(n+1)}(x_0) \neq g^{(n+1)}(x_0),$$

siis öeldakse, et joonte $y = f(x)$ ja $y = g(x)$ puutejärk selles punktis on n.

Ringjoont

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = R^2,$$

mille puutejärk joonega $y = f(x)$ on mingis punktis vähemalt 2, nimetatakse joone $y = f(x)$ kõverusringjooneks selles punktis. Kõverusringjoone raadiust

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|} \tag{1}$$

nimetatakse joone kõverusraadiuseks ning kõverusringjoone keskpunkti joone kõverustsentriks. Joone $y = f(x)$ kõverustsentri koordinaadid avalduvad kujul

$$\xi = x - \frac{1 + y'^2}{y''} y, \quad \eta = y + \frac{1 + y'^2}{y''}. \tag{2}$$

Kui joon on antud parameetriliste võrranditega $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, siis on tema kõverusraadius ja kõverustsentri koordinaadid

$$R = \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}{|\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}|}, \quad \xi = x - \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}} \dot{y}, \quad \eta = y + \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}} \dot{x}. \tag{3}$$

Joone kõveruseks K nimetatakse joone puutuja pöördenurga φ kui kaarepikkuse funktsiooni tuletist:

$$K = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{4}$$

Absoluutväärtuselt on joone kõverus võrdne kõverusraadiuse pöördväärtusega:

$$|K| = \frac{1}{R}. \tag{5}$$

Joone haripunktideks nimetatakse tema ekstremaalse kõverusega punkte.

Joone kõverustsentrite geomeetrilist kohta nimetatakse selle joone evoluudiks. Joone normaalid on tema evoluudile puutujaiks.

Joone $F(x, y) = 0$ singulaarseteks punktideks nimetatakse punkte, mille koordinaadid rahuldavad võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} F(x, y) = 0, \\ F'_x(x, y) = 0, \\ F'_y(x, y) = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Singulaarset punkti, mille küllalt väikeses ümbruses ei ole joonel teisi punkte, nimetatakse isoleeritud punktiks (joon. 101, *a*). Sõlmpunktiks nimetatakse singulaarset punkti, milles joon lõikub iseendaga (joon. 101, *b*), s. t. milles

a) b) c) d)

Joon. 101.

joonel on kaks erinevat puutujat. Tagasipöördepunktiks nimetatakse singulaarset punkti, milles joone suund muutub vastupidiseks (joon. 101, *c*). Tagasipöördepunktis on joonel üks puutuja. Singulaarset punkti, milles joon puudutab iseennast (joon. 101, *d*), nimetatakse enesepuutepunktiks.

Joonte parve mähisjooneks nimetatakse joont, mis puudutab parve kõiki jooni ja igas oma punktis puudutab parve ühte joont. Kui üheparameetrilisel joonte parvel $F(x, y, C) = 0$ on mähisjoon, siis rahuldab see võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} F(x, y, C) = 0, \\ F'_C(x, y, C) = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Peale mähisjoone võivad süsteemi (7) rahuldada ka parve $F(x, y, C) = 0$ singulaarsete punktide geomeetrilised kohad.

Skalaarse argumendi vektorfunktsiooniks nimetatakse vektorit, mille koordinaadid on ühe skalaarse argumendi funktsioonid:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = \{x(t);\ y(t);\ z(t)\}.$$

Joont, mille jooksva punkti kohavektoriks on $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$, nimetatakse selle vektorfunktsiooni **hodograafiks**.

Vektorfunktsiooni $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$ **tuletis** on defineeritud kujul

$$\dot{\mathbf{r}}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbf{r}(t+\Delta t)-\mathbf{r}(t)}{\Delta t}=\{\dot{x};\ \dot{y};\ \dot{z}\}. \tag{8}$$

Vektor $\dot{\mathbf{r}}$ on funktsiooni $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$ hodograafi puutuja sihiline.

Joone $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$ **puutuja** suuna ühikvektor on $\tau=\frac{\dot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}|}$, **binormaali** suuna ühikvektor $\beta=\frac{\dot{\mathbf{r}}\times\ddot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}\times\ddot{\mathbf{r}}|}$ ja **peanormaali** suuna ühikvektor $\nu=\beta\times\tau$.

Ruumijoone mingit punkti läbivat tasapinda, mis on risti joone puutujaga selles punktis, nimetatakse joone **normaaltasapinnaks**. Joone **kooldumistasapind** on joone punkti läbiv tasapind, mille normaaliks on binormaal.

Ruumijoone $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$ kõverus avaldub kujul

$$\frac{1}{R}=\frac{|\dot{\mathbf{r}}\times\ddot{\mathbf{r}}|}{|\dot{\mathbf{r}}|^3}. \tag{9}$$

Näiteid

I. *Koostada joone* $y=\tan x$ *kõverusringjoone võrrand punktis* $\left(\frac{\pi}{4};\ 1\right)$.

Lahendus. Kui $y=\tan x$, siis $y'=\frac{1}{\cos^2 x}$ ja $y''=$ $=\frac{2\sin x}{\cos^3 x}$. Antud punktis, kus $x=\frac{\pi}{4}$, on $y=1$, $y'=2$ ja $y''=4$. Valemite (1) ja (2) järgi on nõutud ringjoone raadius ja keskpunkti koordinaadid

$$R=\frac{(1+2^2)^{\frac{3}{2}}}{|4|}=\frac{5\sqrt{5}}{4},$$

$$\xi=\frac{\pi}{4}-\frac{1+2^2}{4}2=\frac{\pi-10}{4},$$

$$\eta=1+\frac{1+2^2}{4}=\frac{9}{4}.$$

Kõverusringjoone võrrand on järelikult

$$\left(x-\frac{\pi-10}{4}\right)^2+\left(y-\frac{9}{4}\right)^2=\frac{125}{16}.$$

Antud joon on koos oma kõverusringjoonega kujutatud joonisel 102.

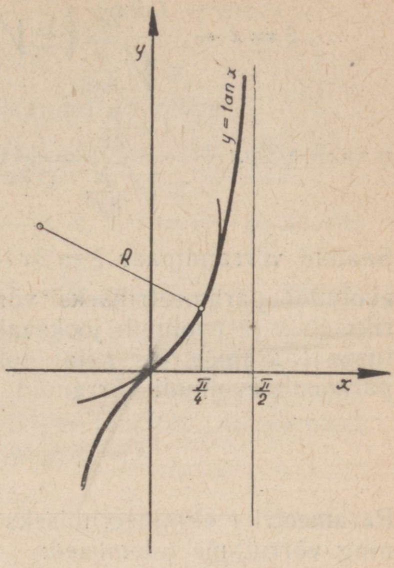
II. *Leida joone $y = e^x$ haripunkt.*

L a h e n d u s. Antud joone puhul on $y' = e^x$ ja $y'' = e^x$, nii et joone kõverus on valemi (4) järgi

$$K = \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{e^x}{(1+e^{2x})^{\frac{3}{2}}}.$$

Joone haripunktide kui ekstremaalse kõverusega punktide abstsissid leiame võrrandist

$$\frac{dK}{dx} = \frac{e^x(1+e^{2x})^{\frac{3}{2}} - e^x \frac{3}{2}(1+e^{2x})^{\frac{1}{2}} e^{2x} \cdot 2}{(1+e^{2x})^3} = 0.$$



Joon. 102.

Võrrutades lugeja nulliga ja taandades nullist erineva teguriga $e^x(1+e^{2x})^{\frac{1}{2}}$, saame siit $1 + e^{2x} - 3e^{2x} = 0$ ehk $e^{2x} = \frac{1}{2}$, $x = -\frac{1}{2}\ln 2$. Joone $y = e^x$ kuju järgi on ilmne, et tal on üksainus ekstremaalse (maksimaalse) kõverusega punkt. Järelikult on selle punkti abstsissiks $\frac{dK}{dx}$ leitud ainuke nullkoht. Haripunkti ordinaadiks on $y = e^{-\frac{1}{2}\ln 2} = (e^{\ln 2})^{-\frac{1}{2}} = 2^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Nõutud haripunkt on seega $\left(-\frac{1}{2}\ln 2;\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

III. *Koostada parabooli $y^2 = 2px$ evoluudi võrrand.*

L a h e n d u s. Parabooli võrrandist saame $y = \pm\sqrt{2px}$, kus ülemine märk vastab parabooli ülalpool x-telge ja alumine allpool x-telge asetsevale harule. Arvutame

$$y' = \pm\sqrt{2p} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \pm\sqrt{\frac{p}{2x}}, \quad y'' = \pm\sqrt{\frac{p}{2}}\left(-\frac{1}{2\sqrt{x^3}}\right) = \mp\sqrt{\frac{p}{8x^3}}.$$

Valemite (2) järgi on parabooli punktile $(x;\ \pm\sqrt{2px})$ vastava kõverustsentri (evoluudi punkti) koordinaadid

$$\xi = x - \frac{1+\frac{p}{2x}}{\mp\sqrt{\frac{p}{8x^3}}}\left(\pm\sqrt{\frac{p}{2x}}\right) = x + 2x + p = 3x + p,$$

$$\eta = \pm\sqrt{2px} + \frac{1+\frac{p}{2x}}{\mp\sqrt{\frac{p}{8x^3}}} = \pm\sqrt{2px} \mp \sqrt{\frac{8x^3}{p}} \mp \sqrt{2px} = \mp 2x\sqrt{\frac{2x}{p}}.$$

Saadud võrrandipaar $\xi = 3x + p$, $\eta = \mp 2x\sqrt{\frac{2x}{p}}$ ongi parabooli evoluudi parameetriliseks võrrandipaariks, kusjuures parameetriks on x ja evoluudi jooksvaks punktiks $(\xi;\ \eta)$. Tavalises tähistuses [parameetriks t ja jooksvaks punktiks $(x;\ y)$] on seega parabooli evoluudi võrrandid

$$x = 3t + p,\quad y = \mp 2t\sqrt{\frac{2t}{p}}.$$

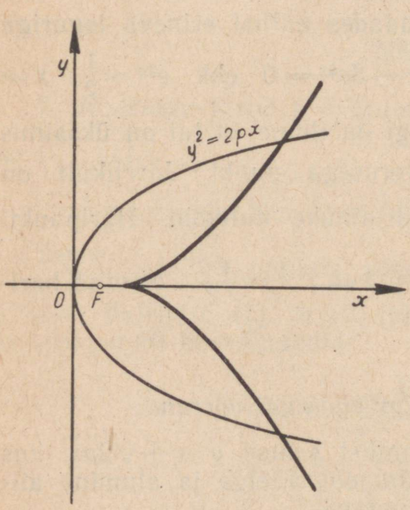
Parameetri t elimineerimiseks avaldame kummastki võrrandist t^3 ning võrrutame tulemused:

$$t^3 = \frac{(x-p)^3}{27},\quad t^3 = \frac{p}{8}y^2,\quad \frac{(x-p)^3}{27} = \frac{p}{8}y^2,$$

millest

$$y^2 = \frac{8}{27p}(x-p)^3.$$

Antud parabool ja tema evoluut — nn. semikuupparabool — on kujutatud joonisel 103.



Joon. 103.

IV. *Leida tsükloidi*

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

evoluut.

Lahendus. Antud joone puhul

$$\dot{x} = a(1-\cos t),\quad \dot{y} = a\sin t,$$
$$\ddot{x} = a\sin t,\quad \ddot{y} = a\cos t.$$

Paigutades need avaldised valemeisse (3), saame

$$\xi = a(t - \sin t) - \frac{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}{a^2(1-\cos t)\cos t - a^2\sin^2 t}\, a\sin t = a(t + \sin t),$$

$$\eta = a(1-\cos t) + \frac{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}{a^2(1-\cos t)\cos t - a^2\sin^2 t}\, a(1-\cos t) =$$
$$= -a(1-\cos t).$$

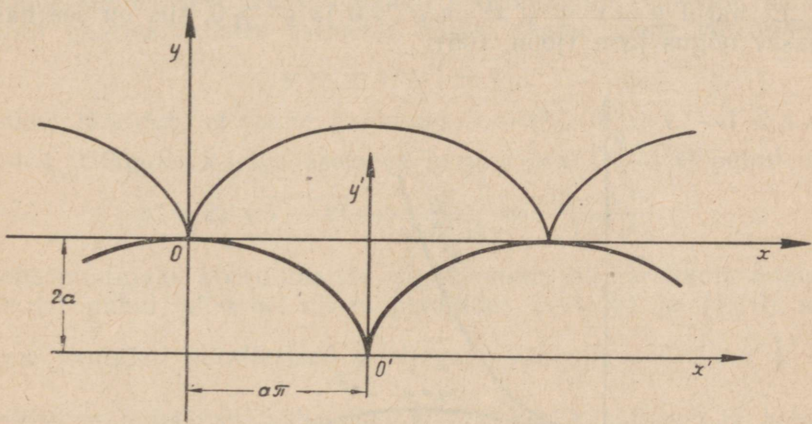
Tsükloidi evoluudi parameetrilised võrrandid on seega

$$x = a(t + \sin t),$$
$$y = -a(1-\cos t).$$

Võttes siin uueks parameetriks $\tau = t - \pi$, s. t. $t = \tau + \pi$, saame

$$x = a(\tau - \sin\tau) + a\pi,$$
$$y = a(1-\cos\tau) - 2a,$$

nii et pärast paralleellüket $x = x' + a\pi$, $y = y' - 2a$, s. t. alguspunkti viimist punkti $O'(a\pi;\ -2a)$ on leitud evoluudi võrrandeiks $x' = a(\tau - \sin\tau)$, $y = a(1-\cos\tau)$. Järelikult on tsükloidi evoluudiks tsükloid, mis on saadud esialgse tsükloidi nihutamisel $2a$ võrra alla ja $a\pi$ võrra paremale (joon. 104).



Joon. 104.

V. *Leida joone*

$$(y - x^2)^2 - x^5 = 0$$

singulaarsed punktid ja skitseerida see joon.

Lahendus. Süsteem (6) singulaarsete punktide leidmiseks on antud joone puhul järgmine:

$$\begin{cases} (y-x^2)^2 - x^5 = 0, \\ -4x(y-x^2) - 5x^4 = 0, \\ 2(y-x^2) = 0. \end{cases}$$

Sellel süsteemil on üksainus lahend: $x=0$, $y=0$. Järelikult on koordinaatide alguspunkt vaadeldava joone ainuke singulaarne punkt.

Joone skitseerimiseks kirjutame antud võrrandi ümber kujul

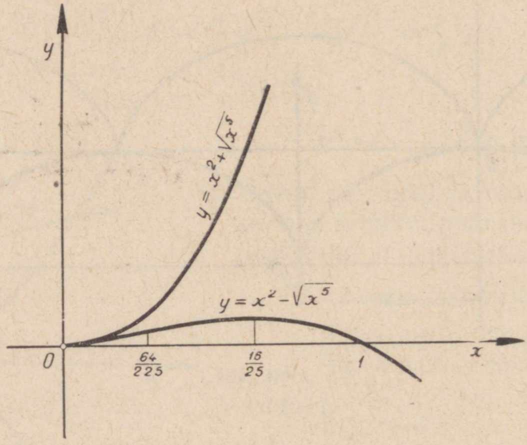
$$y=x^2 \pm \sqrt{x^5}$$

ja arvutame tuletised

$$y'=2x \pm \frac{5}{2}\sqrt{x^3}, \quad y''=2 \pm \frac{15}{4}\sqrt{x}.$$

Kohal $x=0$ on joone mõlemal harul ($y=x^2+\sqrt{x^5}$ ja $y=x^2-\sqrt{x^5}$) $y=0$ ja $y'=0$. Seega on singulaarses punktis mõlema haru ühiseks puutujaks x-telg. Et seejuures joone harudel pole negatiivsete abstsissidega punkte ($\sqrt{x^5}$ pole $x<0$ puhul määratud), siis on koordinaatide alguspunkt antud joone tagasipöördepunktiks.

Et harul $y=x^2+\sqrt{x^5}$ on $y'>0$ ja $y''>0$, siis on see haru tõusev nõgus joon (joon. 105).



Joon. 105.

Teine haru $y=x^2-\sqrt{x^5}$ lõikub x-teljega punktis (1; 0). Tuletis $y'=2x-\frac{5}{2}\sqrt{x^3}$ on vahemikus $0<x<\frac{16}{25}$ positiivne, kohal $x=\frac{16}{25}$ null ja $x>\frac{16}{25}$ puhul negatiivne. Järelikult on see haru $0<x<\frac{16}{25}$ puhul tõusev, $x>\frac{16}{25}$ puhul langev ning omandab kohal $x = \frac{16}{25}$ maksimaalse väärtuse. y'' märgi uurimine näitab, et vahemikus $0 < x < \frac{64}{225}$ on see haru nõgus, $x > \frac{64}{225}$ puhul kumer ja $\frac{64}{225}$ on käänupunkti abstsiss (joon. 105).

VI. *Leida joone*

$$y^2 - x^4 + x^6 = 0$$

singulaarne punkt ja määrata tema liik.

Lahendus. Singulaarseks punktiks saame antud joone võrrandist ja võrrandeist $-4x^3 + 6x^5 = 0$, $2y = 0$ koosnevast süsteemist (0; 0).

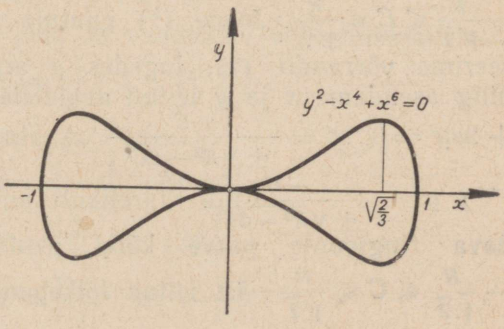
Joone skitseerimiseks ja singulaarse punkti liigi määramiseks paneme kõigepealt tähele, et joon on sümmeetriline koordinaattelgede suhtes, sest jooksva punkti koordinaadid esinevad temas ainult paarisarvulistes astmetes. Edasi saame joone võrrandist

$$y = \pm x^2 \sqrt{1 - x^2},$$

millest järeldub, et joone punktides $1 - x^2 \geqslant 0$, s. t. $-1 \leqslant x \leqslant +1$. Ülalpool x-telge asetseva haru $y = x^2 \sqrt{1 - x^2}$ puhul on

$$y' = 2x\sqrt{1 - x^2} - \frac{x^3}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{x(2 - 3x^2)}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Joone puutujaks koordinaatide alguspunktis on järelikult x-telg. $x \to \pm 1$ puhul $|y'| \to \infty$, nii et punktides $(-1; 0)$ ja $(1; 0)$ on joone puutujad paralleelsed y-teljega. Vahemikus $0 < x < \sqrt{\frac{2}{3}}$ funktsioon y kasvab, vahemikus $\sqrt{\frac{2}{3}} < x < 1$ kahaneb ja kohal $x = \sqrt{\frac{2}{3}}$ omandab maksimaalse väärtuse $\frac{2}{3\sqrt{3}}$.



Joon. 106.

Skitseerides joone saadud andmete järgi (joon. 106), näeme, et koordinaatide alguspunkt — joone singulaarne punkt — on enesepuutepunkt.

VII. *Leida antud ringjoone paralleelsetele kõõludele kui diameetritele joonestatud ringjoonte parve mähisjoon.*

L a h e n d u s. Olgu antud ringjoone võrrand $x^2 + y^2 = R^2$ ja tema kõõlud — parve ringjoonte diameetrid — paralleelsed y-teljega. Kõõlule $x = C$ vastava ringjoone keskpunkt on siis $(C; 0)$, raadius $\sqrt{R^2 - C^2}$ ja võrrand seega

$$(x - C)^2 + y^2 = R^2 - C^2. \qquad (*)$$

Et saadud võrrand esitab parameetri C muutumisel väärtuselt $C = -R$ väärtuseni $C = R$ kõiki vaadeldava parve ringjooni, siis on ta selle parve võrrand.

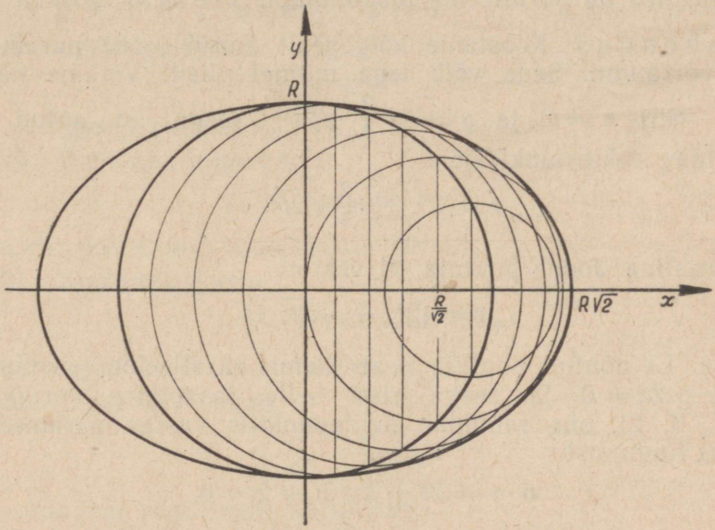
Parve mähisjoone leidmiseks moodustame võrrandisüsteemi (7):

$$\begin{cases} (x - C)^2 + y^2 = R^2 - C^2, \\ -2(x - C) = -2C. \end{cases}$$

Teisest võrrandist saame $C = \frac{x}{2}$, mille paigutamine esimesse võrrandisse annab $\frac{x^2}{4} + y^2 = R^2 - \frac{x^2}{4}$ ehk

$$\frac{x^2}{2R^2} + \frac{y^2}{R^2} = 1. \qquad (**)$$

Et selgitada, kas saadud võrrand tõepoolest esitab vaadeldava ringjoonte parve mähisjoont, leiame joonte (*) ja (**) ühise punkti ning kummagi joone puutuja tõusu selles punktis. Paigutades võrrandist (**) $y^2 = R^2 - \frac{x^2}{2}$ võrrandisse (*), saame $(x - C)^2 + R^2 - \frac{x^2}{2} = R^2 - C^2$ ehk $x^2 - 4Cx + 4C^2 = 0$, millest $x = 2C$ ja seega $y = \pm\sqrt{R^2 - 2C^2}$. Järelikult on joontel (*) ja (**) ühine punkt olemas, kui $R^2 - 2C^2 \geqslant 0$, s. t. kui $-\frac{R}{\sqrt{2}} \leqslant C \leqslant \frac{R}{\sqrt{2}}$. Joone (*) puutuja tõusu leidmiseks diferentseerime võrrandit (*), lugedes y argumendi x funktsiooniks, ning asendame x ja y leitud avaldistega C kaudu: $2(x - C) + 2yy' = 0$, $y' = \frac{-C}{\pm\sqrt{R^2 - 2C^2}}$. Analoogiliselt saame võrrandist (**) $y' = \frac{-C}{\pm\sqrt{R^2 - 2C^2}}$. Järelikult puudutab joon (**) vaadeldava ringjoonte parve kõiki neid ringjooni, mille puhul $-\frac{R}{\sqrt{2}} \leqslant C \leqslant \frac{R}{\sqrt{2}}$. Et leitud lõikepunkti koordinaatide avaldistest C elimineerimisel saame parajasti võrrandi (**), siis puudutab joon (**) oma igas punktis ühte parve (*) ringjoont. Joon (**) on seega vaadeldava ringjoonte parve selle osa mähisjoon, mille keskpunktid asetsevad punktide $\left(-\frac{R}{\sqrt{2}};\ 0\right)$ ja $\left(\frac{R}{\sqrt{2}};\ 0\right)$ vahelisel lõigul. Antud ringjoonte parv koos leitud mähisjoonega (ellips, mille poolteljed on R ja $R\sqrt{2}$) on kujutatud joonisel 107.



Joon. 107.

VIII. *Leida joone*

$$x=\frac{1}{t},\ y=1+t^2,\ z=t^4$$

kooldumistasapind punktis $P(-1;\ 2;\ 1)$.

Lahendus. Antud joon on vaadeldav vektorfunktsiooni

$$\mathbf{r}=\left\{\frac{1}{t};\ 1+t^2;\ t^4\right\}$$

hodograafina. Arvutame $\dot{\mathbf{r}}$, $\ddot{\mathbf{r}}$ ja $\dot{\mathbf{r}}\times\ddot{\mathbf{r}}$:

$$\dot{\mathbf{r}}=\left\{-\frac{1}{t^2};\ 2t;\ 4t^3\right\},$$

$$\ddot{\mathbf{r}}=\left\{\frac{2}{t^3};\ 2;\ 12t^2\right\},$$

$$\dot{\mathbf{r}}\times\ddot{\mathbf{r}}=\left\{16t^3;\ 20;\ -\frac{6}{t^2}\right\}.$$

Antud punktis P on $t=-1$ ja järelikult $\dot{\mathbf{r}}\times\ddot{\mathbf{r}}=\{-16;\ 20;\ -6\}=$ $=-2\{8;\ -10;\ 3\}$. Nõutud kooldumistasapind kui tasapind, mis läbib punkti P ja on risti vektoriga $\{8;\ -10;\ 3\}$, on järelikult $8(x+1)-10(y-2)+3(z-1)=0$ ehk $8x-10y+3z+25=0$.

IX. *Leida joone*

$$\begin{cases} x=z^2, \\ 8xz=9y^2 \end{cases}$$

puutuja, mis on paralleelne tasapinnaga $x+3y+2z=0$.

Lahendus. Koostame kõigepealt antud joone parameetrilised võrrandid. Seda võib teha mitmel viisil. Võtame näiteks $z=t$. Siis $x=t^2$ ja $y=\pm\frac{2}{3}\sqrt{2t^3}$. Seega on antud joon vaadeldav vektorfunktsiooni

$$\mathbf{r}=\{t^2;\ \pm\frac{2}{3}\sqrt{2t^3};\ t\}$$

hodograafina. Joone puutuja on vektori

$$\dot{\mathbf{r}}=\{2t;\ \pm\sqrt{2t};\ 1\}$$

sihiline. Et nõutud puutuja peab olema paralleelne tasapinnaga $x+3y+2z=0$ ja seega risti selle tasapinna normaaliga $\mathbf{n}=\{1;\ 3;\ 2\}$, siis rahuldab puutepunktile vastav parameetri t väärtus tingimust

$$\mathbf{n}\cdot\dot{\mathbf{r}}=2t\pm3\sqrt{2t}+2=0,$$

millest $2t^2-5t+2=0$ ja $t=\frac{5\pm3}{4}$, kusjuures mõlemad t väärtused $t_1=2$ ja $t_2=\frac{1}{2}$ rahuldavad ristseisu tingimust vektoriga $\dot{\mathbf{r}}$ ainult sel juhul, kui tema keskmises koordinaadis on võetud miinusmärk. Ülesande tingimusi rahuldavad seega kaks puutujat. Ühel neist on puutepunkti kohavektoriks $\mathbf{r}(2)=\{4;\ -\frac{8}{3};\ 2\}$ ning teisel $\mathbf{r}\left(\frac{1}{2}\right)=\left\{\frac{1}{4};\ -\frac{1}{3};\ \frac{1}{2}\right\}$. Esimene puutuja on paralleelne vektoriga $\dot{\mathbf{r}}(2)=\{4;\ -2;\ 1\}$ ja teine vektoriga $\dot{\mathbf{r}}\left(\frac{1}{2}\right)=\{1;\ -1;\ 1\}$. Järelikult on nõutud puutujate võrrandid

$$\frac{x-4}{4}=\frac{y+\frac{8}{3}}{-2}=\frac{z-2}{1} \quad \text{ja} \quad \frac{x-\frac{1}{4}}{1}=\frac{y+\frac{1}{3}}{-1}=\frac{z-\frac{1}{2}}{1}$$

ehk

$$\frac{x-4}{4}=\frac{3y+8}{-6}=z-2 \quad \text{ja} \quad \frac{4x-1}{4}=\frac{3y+1}{-3}=\frac{2z-1}{2}.$$

Tasapinnalise joone kõverusringjoon ja kõverus

Ülesandeis **1814—1818** leida antud joonte puutejärk nende ühises punktis:

1814. $y = x^3 - 3x^2 + 2, \quad y = 3(1 - x)$.

1815. $y = e^x, \quad y = 1 + \ln (x + 1)$.

1816. $y = \tan x, \quad y = \arctan x$.

1817. $y = x^2 + 3x, \quad y = x^2 - 6$.

1818. $y = \sin x - x\sqrt[3]{\cos x}, \quad y = 0$.

1819. Leida parabooli

$$y = x^2$$

kõverusringjoon punktis (1; 1).

1820. Koostada hüperbooli

$$xy = 4$$

kõverusringjoone võrrand punktis (2; 2).

1821. Koostada joone

$$(x^2 + y^2)x - 2ay^2 = 0$$

kõverusringjoone võrrand punktis $(a;\ a)$.

1822. Leida hüperbooli

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

kõverusraadius hüperbooli haripunktis.

1823. Avaldada tsükloidi

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$$

kõverusraadius puutepunkti ordinaadi funktsioonina.

Ülesandeis **1824—1829** arvutada antud joone kõverus näidatud punktis:

1824. $y = \sin x$ punktis $\left(\frac{\pi}{2};\ 1\right)$.

1825. $y = \ln x$ punktis (1; 0).

1826. $x^2 = 4ay$ punktis (0; 0).

1827. $x = 3t^2, \quad y = 3t - t^3$ punktis (3; 2).

1828. $x^2 + xy + y^2 = 3$ punktis (1; 1).

1829. $e^{xy} + y + 2x - 3 = 0$ punktis (0; 2).

Ülesandeis **1830—1832** leida antud joone haripunktid:

1830. $y = \ln x$. **1831.** $y = \ln (1 - x^2)$.

1832. $x = a(3 \cos t + \cos 3t), \quad y = a(3 \sin t + \sin 3t)$.

Ülesandeis **1833—1838** leida antud joone evoluut:

1833. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$

1834. $x^2-4y^2-4=0.$

1835. $y=x^3.$

1836. $x=3t, \quad y=t^2-6.$

1837. $x=a\cos^3 t, \quad y=a\sin^3 t.$

1838. $x=a(\cos t+t\sin t),$
$y=a(\sin t-t\cos t).$

Joone singulaarsed punktid ja joonte parve mähisjoon

Ülesandeis **1839—1844** leida antud joone singulaarsed punktid ja määrata nende liik:

1839. $x^2+y^2=x^4.$

1840. $y^2(a-x)=x^3.$

1841. $x^3+y^3-3axy=0.$

1842. $x^3-2x^2y-y^2=0.$

1843. $x^2y^2+y^4=4x^2.$

1844. $y^2=x(x-a)^2.$

Ülesandeis **1845—1850** leida antud joonte parve mähisjoon:

1845. $y=Cx+C(1+C).$

1846. $y=x+\frac{1}{4}(x-C)^2.$

1847. $C^2-2C(xy-2)+y^2=0.$

1848. $y=C(x-C)^2.$

1849. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{(8-a)^2}=1.$

1850. $C^2-Cy+e^x=0.$

1851. Leida sirgete parve

$$y=Cx+\psi(C)$$

mähisjoon, kui $\psi(t)$ on mistahes diferentseeruv funktsioon.

1852. Leida sirgete parve

$$y=Cx+\frac{1}{2+C}$$

mähisjoon ja skitseerida see sirgete parv koos oma mähisjoonega.

1853. Leida sirgete parve mähisjoon, kui parve iga sirge telglõikude summa on konstantne.

1854. Leida sirgete parve mähisjoon, kui parve moodustavad kõik sirged, mille telglõikude korrutis on konstantne.

1855. Sirge liigub nii, et koordinaattelgede vahelise lõigu pikkus jääb konstantseks. Leida tekkiva sirgete parve mähisjoon.

1856. Leida ringjoonte parve mähisjoon, kui parve ringjoonte keskpunktid asetsevad paraboolil $y=4x^2$ ja ringjooned läbivad koordinaatide alguspunkti.

1857. Täisnurga tipp liigub mööda y-telge ja üks haar läbib punkti $(a;\ 0)$. Leida täisnurga teise haara liikumisel moodustuva sirgete parve mähisjoon.

Ruumijooned

1858. Leida joone

$$x = 1 + \sin t, \quad y = 2t - \cos t, \quad z = 3 + t^2$$

puutuja punktis, kus $t = 0$.

1859. Leida kruvijoone

$$x = 2\cos t, \quad y = 2\sin t, \quad z = 4t$$

puutuja ja normaaltasapind punktis, kus $t = \frac{\pi}{4}$.

1860. Leida joone

$$x = t^2 - 2, \quad y = 2t + 1, \quad z = 3t^3 - 2t$$

puutuja ja normaaltasapind punktis $(2;\ -3;\ -20)$.

1861. Leida joone

$$x^2 - 2y = 0, \quad x^3 - 3z = 0$$

puutuja ja normaaltasapind punktis $(6;\ 18;\ 72)$.

1862. Leida joonel

$$y = x^2, \quad z = x^3$$

punkt, milles puutuja on paralleelne tasapinnaga $x + 2y + z + 1 = 0$.

1863. Leida joone

$$x = t, \quad y = t^2, \quad z = t^3$$

puutuja, binormaali ja peanormaali ühikvektorid punktis, kus $t = 1$.

1864. Leida pindade

$$y = x^2 \quad \text{ja} \quad z = 2x$$

lõikejoone binormaali ühikvektor punktis $(2;\ 4;\ 4)$.

1865. Koostada joone

$$x = t, \quad y = -t, \quad z = \frac{t^2}{2}$$

kooldumistasapinna võrrand punktis, kus $t = 2$.

1866. Leida joone

$$x = t^2, \quad y = t^3, \quad z = t$$

kooldumistasapind punktis $(4;\ 8;\ 2)$.

1867. Leida joone

$$y^2 = x, \quad x^2 = z$$

kooldumistasapind punktis (1; 1; 1).

1868. Leida joone

$$x = t^2 + 1, \quad y = t^3, \quad z = t$$

kooldumistasapind, mis on risti tasapinnaga $3x + 2y + 3z = 0$.

1869. Arvutada joone

$$x = 2t, \quad y = \ln t, \quad z = t^2$$

kõverus punktis $t = 1$.

Ülesandeis **1870—1873** arvutada antud joone kõverus:

1870. $x = e^t \cos t, \quad y = e^t \sin t, \quad z = e^t$.

1871. $x = 3t - t^3, \quad y = 3t^2, \quad z = 3t + t^3$.

1872. $x = a \cos^3 t, \quad y = a \sin^3 t, \quad z = a \cos 2t$.

1873. $y = x^2, \quad z = \frac{2}{3} x^3$.

1874. Arvutada joone

$$x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t, \quad z = 4 \sin \frac{t}{2}$$

minimaalne ja maksimaalne kõverus.

§ 17. ESIMEST JÄRKU DIFERENTSIAALVÕRRANDID

Võrrandit

$$F[x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}] = 0, \tag{1}$$

mis sisaldab sõltumatut muutujat x ja otsitavat funktsiooni y ning selle tuletisi kuni n-nda järguni, nimetatakse n-järku harilikuks diferentsiaalvõrrandiks. Iga funktsiooni $y = y(x)$, mis, paigutatuna koos oma tuletistega võrrandisse (1), rahuldab seda samaselt x suhtes, nimetatakse võrrandi (1) lahendiks. Võrrandi (1) lahendi graafikut nimetatakse selle võrrandi integraaljooneks. Diferentsiaalvõrrandi (1) üldlahend on n meelevaldsest konstandist $C_1, C_2, \ldots, C_n$ ja argumendist x sõltuv funktsioon

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n), \tag{2}$$

mis rahuldab võrrandit (1) igal konstantide $C_1, C_2, \ldots, C_n$ valikul. Iga lahend, mis saadakse üldlahendist konstantide arvuliste väärtuste puhul, on diferentsiaalvõrrandi erilahend. Võrrandi (1) lahendit, mida ei saa tuletada üldlahendist (2) konstantidele $C_1, C_2, \ldots, C_n$ eriväärtuste andmise teel, nimetatakse võrrandi (1) singulaarseks lahendiks. Sageli saadakse diferentsiaalvõrrandi lahend ilmutamata kujul või parameetrilisel kujul.

n-parameetrilise joonte parve $\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0$ diferentsiaalvõrrandiks nimetatakse võrrandit, mis saadakse parve võrrandist ja parve võrrandit n korda x järgi diferentseerides tuletatud võrrandeist koosnevast süsteemist parameetrite $C_1, C_2, \ldots, C_n$ elimineerimisel.

Esimest järku diferentsiaalvõrrandi lahendi olemasolu teoreem: Kui võrrandis

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{3}$$

esinev kahe muutuja funktsioon $f(x, y)$ on mingis piirkonnas D pidev ning tal on selles piirkonnas tõkestatud osatuletis $f'_y(x, y)$ ja kui $(x_0; y_0)$ on mingi punkt piirkonnas D, siis on võrrandil (3) üks ja ainult üks lahend $y = y(x)$, mis rahuldab nn. Cauchy algtingimust $y(x_0) = y_0$ ja mille integraaljoon läbib seda piirkonda.

Esimest järku diferentsiaalvõrrandit nimetatakse e r a l d u v a t e m u u t u j a t e g a diferentsiaalvõrrandiks, kui ta on teisendatav kujule

$$\varphi(x)\,dx = \psi(y)\,dy. \tag{4}$$

Võrrandi (4) üldlahend on

$$\int \varphi(x)\,dx = \int \psi(y)\,dy + C. \tag{5}$$

Võrrandit, mis on teisendatav kujule

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right), \tag{6}$$

nimetatakse h o m o g e e n s e k s diferentsiaalvõrrandiks. Asendusega

$$u = \frac{y}{x}, \tag{7}$$

mille puhul $\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$, taandub võrrand (6) eralduvate muutujatega võrrandiks.

Kui võrrandis

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right), \tag{8}$$

kus

$$d = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

teha asendus

$$x = X + \alpha, \quad y = Y + \beta, \tag{9}$$

siis on α ja β nii määratavad, et võrrand (8) taandub homogeenseks võrrandiks. Kui võrrandis (8) $d = 0$, siis teisendub ta asendusega

$$z = a_1x + b_1x \tag{10}$$

eralduvate muutujatega võrrandiks.

Esimest järku l i n e a a r s e diferentsiaalvõrrandi

$$y' + p(x)\,y = q(x) \tag{11}$$

lahendamine taandub kahe eralduvate muutujatega võrrandi lahendamisele, kui lahendit otsida kujul

$$y = u(x)\,v(x) \tag{12}$$

ning tegur $u(x)$ määrata nii, et $u' + p(x)\,u = 0$.

Bernoulli diferentsiaalvõrrand

$$y' + p(x)\, y = q(x)\, y^m, \quad m \neq 0, \quad m \neq 1 \tag{13}$$

teisendub lineaarseks võrrandiks asendusega

$$z = y^{1-m}. \tag{14}$$

Kui diferentsiaalvõrrandis

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0 \tag{15}$$

on

$$M'_y(x, y) = N'_x(x, y), \tag{16}$$

siis nimetatakse seda võrrandit eksaktseks diferentsiaalvõrrandiks. Võrrandi (15) vasak pool on sel juhul mingi kahe muutuja funktsiooni $U(x, y)$ täisdiferentsiaal ning võrrandi üldlahend on

$$U(x, y) = C. \tag{17}$$

Kui võrrandis (15) ei ole tingimus (16) täidetud, siis leidub nn. integreerimistegur $\mu(x, y)$, millega võrrandit korrutades saadakse eksaktne võrrand. Eriti kui avaldis

$$\frac{M'_y(x, y) - N'_x(x, y)}{N(x, y)} = \varphi(x) \tag{18}$$

ei sõltu muutujast y, siis

$$\mu(x) = e^{\int \varphi(x)\, dx}, \tag{19}$$

või kui avaldis

$$\frac{N'_x(x, y) - M'_y(x, y)}{M(x, y)} = \psi(y) \tag{20}$$

ei sõltu muutujast x, siis

$$\mu(y) = e^{\int \psi(y)\, dy}. \tag{21}$$

Diferentsiaalvõrrandi

$$x = F(y, y') \tag{22}$$

või

$$x = F(y') \tag{23}$$

lahendamiseks asendatakse $y' = p$ ja diferentseeritakse siis võrrandit muutuja y järgi, lugedes x ja p muutuja y funktsioonideks $\left(\text{nii, et } \frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'} = \frac{1}{p}\right)$.

Kui nii saadud diferentsiaalvõrrandi üldlahend juhul (22) on $p = \varphi(y, C)$ või juhul (23) on $y = \psi(p, C)$, siis võrrandi (22) üldlahend on

$$x = F[y, \varphi(y, C)] \tag{24}$$

ja võrrandi (23) üldlahend parameetrilisel kujul on

$$x = F(p), \quad y = \psi(p, C), \tag{25}$$

kus p on parameetriks.

Diferentsiaalvõrrandis

$$y = F(x, y') \tag{26}$$

või

$$y = F(y') \tag{27}$$

asendatakse $y' = p$ ja diferentseeritakse saadud võrrandit muutuja x järgi. Kui selle diferentsiaalvõrrandi üldlahend juhul (26) on $p = \varphi(x, C)$ või juhul (27) on $x = \psi(p, C)$, siis võrrandi (26) üldlahend on

$$y = F[x, \varphi(x, C)] \tag{28}$$

ja võrrandi (27) üldlahend parameetrilisel kujul on

$$x = \psi(p, C), \quad y = F(p). \tag{29}$$

C l a i r a u t' d i f e r e n t s i a a l v õ r r a n d

$$y = xy' + \varphi(y') \tag{30}$$

teisendub pärast asendust $y' = p$ ja x järgi diferentseerimist võrrandiks

$$[x + \varphi'(p)] \frac{dp}{dx} = 0,$$

millest võrrand $\frac{dp}{dx} = 0$ annab Clairaut' diferentsiaalvõrrandi üldlahendi

$$y = Cx + \varphi(C) \tag{31}$$

ja võrrand $x + \varphi'(p) = 0$ singulaarse lahendi

$$\begin{cases} x = -\varphi'(p), \\ y = -p\varphi'(p) + \varphi(p), \end{cases} \tag{32}$$

mis geomeetriliselt esitab üldlahendiga määratud sirgete parve mähisjoont.

Joonte parve $f(x, y, C) = 0$ o r t o g o n a a l s e t e k s t r a j e k t o o r i d e k s nimetatakse jooni, mis lõikuvad antud parve joontega risti.

Ortogonaalsete trajektooride diferentsiaalvõrrand saadakse võrrandisüsteemist

$$\begin{cases} f(x, y, C) = 0, \\ f'_x(x, y, C) - \frac{1}{y'} f'_y(x, y, C) = 0 \end{cases} \tag{33}$$

parameetri C elimineerimisel.

Näiteid

I. *Näidata, et funktsioon*

$$y=\left(C_1+C_2x+\frac{x^2}{2}\right)e^x+C_3$$

on diferentsiaalvõrrandi

$$y'''-2y''+y'=e^x$$

lahend.

L a h e n d u s. Avaldame antud funktsiooni esimese, teise ja kolmanda tuletise ning asendame antud võrrandis y', y'' ja y''' saadud avaldistega:

$$y'=(C_2+x)e^x+\left(C_1+C_2x+\frac{x^2}{2}\right)e^x=$$

$$=\left[C_1+C_2+x(C_2+1)+\frac{x^2}{2}\right]e^x,$$

$$y''=\left[C_1+2C_2+1+(C_2+2)x+\frac{x^2}{2}\right]e^x,$$

$$y'''=\left[C_1+3C_2+3+(C_2+3)x+\frac{x^2}{2}\right]e^x,$$

$$y'''-2y''+y'=e^x\left[C_1+3C_2+3+(C_2+3)x+\frac{x^2}{2}-2C_1-\right.$$

$$\left.-4C_2-2-2(C_2+2)x-x^2+C_1+C_2+x(C_2+1)+\frac{x^2}{2}\right]\equiv e^x.$$

Seega rahuldab antud funktsioon antud võrrandit samaselt x suhtes ja on järelikult tõepoolest selle võrrandi lahendiks (iga C_1, C_2 ja C_3 puhul).

II. *Koostada joonte parve*

$$y=C_1e^x+C_2e^{-2x}$$

diferentsiaalvõrrand.

L a h e n d u s. Et antud parve võrrand sisaldab kahte parameetrit C_1 ja C_2, siis tuleb tema diferentsiaalvõrrandi koostamiseks diferentseerida parve võrrandit kaks korda:

$$\begin{cases} y=C_1e^x+C_2e^{-2x}, \\ y'=C_1e^x-2C_2e^{-2x}, \\ y''=C_1e^x+4C_2e^{-2x} \end{cases}$$

ning saadud süsteemist elimineerida parameetrid C_1 ja C_2.

Lahutades esimesest võrrandist üks kord teise võrrandi ja teine kord kolmanda võrrandi, saame

$$y - y' = 3C_2e^{-2x},$$
$$y - y'' = -3C_2e^{-2x},$$

millest $y - y' = -(y - y'')$ ehk $y'' + y' - 2y = 0$, mis ongi nõutud diferentsiaalvõrrand.

III. *Leida diferentsiaalvõrrandi*

$$y = 2xy'$$

üldlahend ja joonestada mõned integraaljooned.

Lahendus. Antud võrrand $y = 2x\frac{dy}{dx}$ on eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrand, sest ta on teisendatav kujule

$$2\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}.$$

Võrrandi üldlahend on seega

$$2\int\frac{dy}{y} = \int\frac{dx}{x} + C,$$

ehk

$$2\ln|y| = \ln|x| + \ln|C|,$$

kus meelevaldne konstant C on asendatud meelevaldse konstandiga $\ln|C|$.

Järelikult $\ln y^2 = \ln|Cx|$, millest $y^2 = |Cx|$ ehk C ja x vastaval valikul

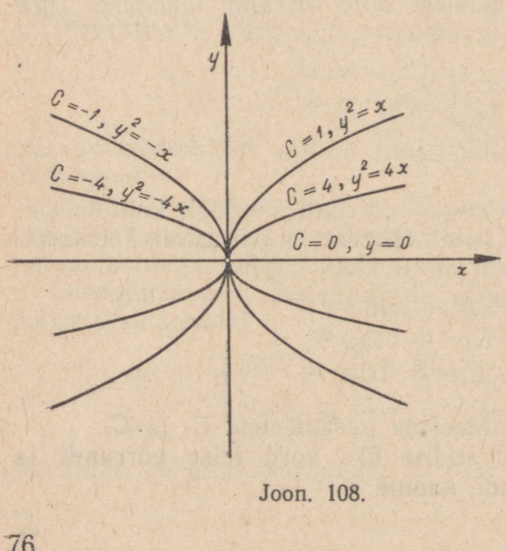
$$y^2 = Cx,$$

mis ongi antud diferentsiaalvõrrandi üldlahend.

Integraaljooned on paraboolid, mille teljeks on x-telg.

Kui $C > 0$, siis on paraboolid avatud x-telje positiivses suunas, kui $C < 0$, siis vastassuunas. Kui $C = 0$, on integraaljooneks x-telg (joon. 108).

Tasapinna iga punkti, kus $x \neq 0$, läbib üks ja ainult üks integraaljoon, sest iga niisugune punkt määrab üldlahendiga antud võrrandist konstandi C üheselt.



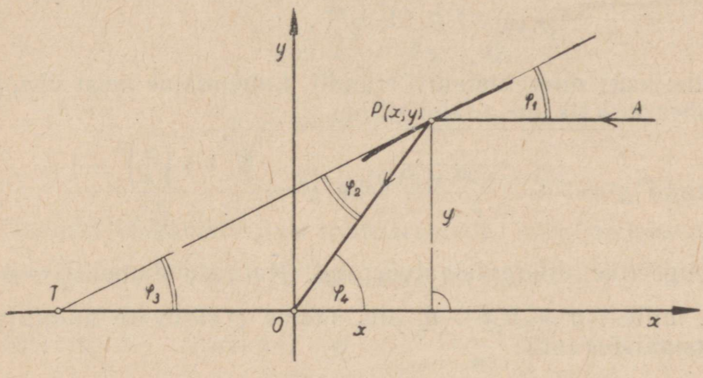
Joon. 108.

Punkte, kus $x = 0$ ja

$y \neq 0$, ei läbi ükski integraaljoon, punkti (0; 0) läbivad kõik integraaljooned. Niisugune asjaolu on seletatav sellega, et punktides, kus $x=0$, ei ole diferentsiaalvõrrandi lahendi olemasolu teoreemi tingimused täidetud, sest seal ei ole $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{2x}$ pidev.

IV. *Leida tasapinnaline joon, millele langevad paralleelsed kiired koonduvad pärast joonelt peegeldumist ühte punkti.*

L a h e n d u s. Valime koordinaatteljestiku nii, et x-telg oleks paralleelne peeglile langevate kiirtega ja koordinaatide alguspunkt oleks punktiks, kuhu koonduvad peegeldunud kiired (joon. 109).



Joon. 109.

Olgu otsitava joone võrrand $y=y(x)$ ja joone jooksev punkt $P(x;\ y)$. Sellesse punkti langev kiir AP ja peegeldunud kiir PO moodustavad samas punktis tõmmatud puutujaga PT peegeldumisseaduse põhjal võrdsed nurgad φ_1 ja φ_2. Ühtlasi aga moodustavad ka langev kiir AP ja x-telg kui paralleelsed sirged puutujaga PT võrdsed nurgad φ_1 ja φ_3. Seega on

$$\varphi_1=\varphi_2=\varphi_3.$$

Järelikult on võrdhaarses kolmnurgas TPO tipunurga välisnurk $\varphi_4=2\varphi_3$ ja seega

$$\tan \varphi_4=\tan 2\varphi_3.$$

Et φ_4 on koordinaatide alguspunkti joone jooksva punktiga ühendava lõigu suunanurk, siis $\tan \varphi_4=\frac{y}{x}$. Edasi on $\tan \varphi_3=y'$ kui otsitava joone $y=y(x)$ puutuja tõus ning järelikult

$$\tan 2\varphi_3 = \frac{2\tan\varphi_3}{1-\tan^2\varphi_3} = \frac{2y'}{1-y'^2}.$$

Seega on otsitava joone jooksva punkti koordinaatide vahel seos

$$\frac{y}{x} = \frac{2y'}{1-y'^2},$$

mis on selle joone diferentsiaalvõrrandiks.

Avaldame saadud võrrandist y':

$$y - yy'^2 = 2xy'$$

ehk

$$yy'^2 + 2xy' - y = 0$$

ehk

$$y' = \frac{-x \pm \sqrt{x^2+y^2}}{y}.$$

Saame kaks diferentsiaalvõrrandit. Lahendame neist ühe, kuna teise lahenduskäik on analoogiline.

Võrrand $y' = \frac{-x+\sqrt{x^2+y^2}}{y}$ ehk $y' = \frac{\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}-1}{\frac{y}{x}}$

on homogeenne diferentsiaalvõrrand. Kui asendame $\frac{y}{x} = u$ ehk $y = ux$, millest $y' = u'x + u$, siis saame eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandi

$$u'x + u = \frac{\sqrt{1+u^2}-1}{u}.$$

Lihtsad teisendused annavad

$$\frac{dx}{x} = \frac{u\,du}{\sqrt{1+u^2}-(1+u^2)},$$

millest

$$\ln|x| = \int \frac{u\,du}{\sqrt{1+u^2}-(1+u^2)} + C.$$

Üldintegraali avaldamiseks võtame $\sqrt{1+u^2} = t$ ehk $1+u^2 = t^2$, millest $2u\,du = 2t\,dt$ ja

$$\int \frac{u\,du}{\sqrt{1+u^2}-(1+u^2)} = \int \frac{t\,dt}{t-t^2} = \int \frac{dt}{1-t} = -\ln|1-t| =$$

$$= -\ln|1-\sqrt{1+u^2}| = -\ln(\sqrt{1+u^2}-1).$$

Seega

$$\ln|x| + \ln(\sqrt{1+u^2}-1) = C,$$

millest

$$|x|(\sqrt{1+u^2}-1)=e^C.$$

Siin võime e^C kui meelevaldse positiivse konstandi asendada avaldisega $|C|$, kus $C\neq 0$. Niisiis

$$|x|(\sqrt{1+u^2}-1)=|C|$$

ehk

$$x(\sqrt{1+u^2}-1)=C.$$

Asendades nüüd tagasi $u=\frac{y}{x}$, saame

$$x\left[\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}-1\right]=C$$

ehk

$$\sqrt{x^2+y^2}=x+C,$$

millest

$$x^2+y^2=x^2+2Cx+C^2$$

ehk

$$y^2=2Cx+C^2.$$

Saadud võrrand esitab ruutparaboole, mille teljeks on x-telg, haripunktiks $(-\frac{C}{2};\ 0)$ ja fookuseks $(0;\ 0)$.

Märkus. Võrrandi $y'=\frac{-x-\sqrt{x^2+y^2}}{y}$ üldlahend esitab ruutparaboolide parve, milles paraboolid on avatud vastassuunas.

V. *Leida diferentsiaalvõrrandi*

$$y'=\frac{2x-y}{x+y-3}+2$$

üldlahend.

Lahendus. Antud diferentsiaalvõrrand esineb kujul (8), kusjuures $d=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}\neq 0$. Seega teisendub ta asendusega (9) $x=X+\alpha$, $y=Y+\beta$ sobivalt valitud konstantide α ja β puhul homogeenseks diferentsiaalvõrrandiks. α ja β määramiseks avaldame antud võrrandi uute muutujate kaudu.

Et $dx=dX$ ja $dy=dY$, siis $y'=\frac{dY}{dX}$ ja antud võrrand teisendub võrrandiks

$$\frac{dY}{dX}=\frac{2X-Y+2\alpha-\beta}{X+Y+\alpha+\beta-3}+2.$$

Määrame nüüd α ja β nii, et

$$
\begin{aligned}
2\alpha - \beta &= 0, \\
\alpha + \beta - 3 &= 0,
\end{aligned}
$$

millest $\alpha = 1$ ja $\beta = 2$. Antud diferentsiaalvõrrand teisendubki homogeenseks võrrandiks

$$\frac{dY}{dX} = \frac{2X - Y}{X + Y} + 2$$

ehk

$$\frac{dY}{dX} = \frac{2 - \frac{Y}{X}}{1 + \frac{Y}{X}} + 2,$$

mis teisendub omakorda asendusega $\frac{Y}{X} = u$ võrrandiks

$$u + Xu' = \frac{2 - u}{1 + u} + 2$$

ehk

$$Xu' = \frac{4 - u^2}{1 + u}.$$

Kui viimases võrrandis $4 - u^2 \neq 0$, siis saab temas muutujad eraldada:

$$\frac{1 + u}{4 - u^2} du = \frac{dX}{X}.$$

Osamurdudeks lahutades ja integreerides saame viimase võrrandi lahendiks

$$\frac{3}{4} \int \frac{du}{2 - u} - \frac{1}{4} \int \frac{du}{2 + u} = \int \frac{dX}{X}$$

ehk

$$-\frac{3}{4} \ln |2 - u| - \frac{1}{4} \ln |2 + u| = \ln |X| + \ln C$$

ehk

$$(2 - u)^3 (2 + u) = \frac{C}{X^4}.$$

Asendades nüüd tagasi $X = x - 1$, $Y = y - 2$ ja $u = \frac{Y}{X} = \frac{y - 2}{x - 1}$, saame lõpuks antud diferentsiaalvõrrandi üldlahendiks

$$(2x - y)^3 (2x + y - 4) = C.$$

Märkus. Kui $4 - u^2 = 0$ ehk $2 - u = 0$ ja $2 + u = 0$.

siis $2-\frac{y-2}{x-1}=0$ ja $2+\frac{y-2}{x-1}=0$ ehk $2x-y=0$ ja $2x+y-4=0$. Samad erilahendid tuletuvad aga ka leitud üldlahendist $C=0$ puhul.

VI. *Lahendada diferentsiaalvõrrand*

$$y'=\frac{x-2y+1}{3x-6y-1}.$$

Lahendus. Antud diferentsiaalvõrrandi puhul ei ole rakendatav eelmises näites kasutatud lahendusviis, sest siin $d=\begin{vmatrix}1 & -2\\ 3 & -6\end{vmatrix}=0.$

Kasutades aga asendust (10) $z=x-2y$, saame $z'=1-2y'$ ehk $y'=\frac{1-z'}{2}$ ning antud võrrand teisendub kujule

$$\frac{1-z'}{2}=\frac{z+1}{3z-1}.$$

Siit

$$\frac{dz}{dx}=\frac{z-3}{3z-1}$$

ehk, kui $z-3\neq 0$,

$$\frac{3z-1}{z-3}dz=dx,$$

millest

$$\int\left(3+\frac{8}{z-3}\right)dz=\int dx+C.$$

Seega

$$3z+8\ln|z-3|=x+C.$$

Asendades nüüd tagasi $z=x-2y$, saame antud diferentsiaalvõrrandi üldlahendiks

$$x-3y+4\ln|x-2y-3|=C.$$

Selle üldlahendi leidsime eeldusel, et $z-3\neq 0$. Kui aga $z-3=0$, s. t. $x-2y-3=0$, siis $y=\frac{x-3}{2}$, mis on ka antud diferentsiaalvõrrandi lahend, sest siis on $y'=\frac{1}{2}$ ja

$$\frac{x-2y+1}{3x-6y-1}=\frac{x-x+3+1}{3x-3x+9-1}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}.$$

Seda lahendit ei saa tuletada üldlahendist. Niisiis on antud diferentsiaalvõrrandil peale üldlahendi veel singulaarne lahend $y = \frac{x-3}{2}$.

VII. *Leida diferentsiaalvõrrandi*

$$y' - y \cot x = \frac{\sin x}{x^2+1}$$

üldlahend.

Lahendus. Antud võrrand on lineaarne diferentsiaalvõrrand (11). Otsime selle võrrandi lahendit kujul (12): $y = uv$, kus u ja v on muutuja x funktsioonid. Seega $y' = u'v + uv'$ ning asendamisel taandub antud võrrand kujule

$$u'v + uv' - uv \cot x = \frac{\sin x}{x^2+1}$$

ehk

$$u'v + u(v' - v \cot x) = \frac{\sin x}{x^2+1}. \qquad (*)$$

Et kahe funktsiooni u ja v määramiseks on olemas üksainus võrrand (*), siis võime neile funktsioonidele või ainult ühele neist funktsioonidest esitada veel ühe tingimuse. Antud juhul on otstarbekohane nõuda, et

$$v' - v \cot x = 0, \qquad (**)$$

sest siis saame võrrandis (*) muutujad eraldada. Järelikult sobib funktsiooniks v diferentsiaalvõrrandi (**) mingi lahend.

Eraldades muutujad võrrandis (**), saame

$$\frac{dv}{v} = \frac{\cos x}{\sin x} dx,$$

mis on rahuldatud, kui

$$\ln v = \ln \sin x$$

ehk

$$v = \sin x.$$

Asendades nüüd võrrandis (*) funktsiooni v saadud avaldisega, saame

$$u' \sin x = \frac{\sin x}{x^2+1} \text{ ehk } \sin x \left(u' - \frac{1}{x^2+1}\right) = 0.$$

Nagu näha, rahuldab saadud võrrandit niisugune funktsioon u, mis rahuldab tingimust

$$u' - \frac{1}{x^2+1} = 0$$

ehk

$$du = \frac{dx}{x^2+1},$$

millest

$$u = \arctan x + C.$$

Järelikult on antud diferentsiaalvõrrandi üldlahend

$$y = \sin x\,(\arctan x + C).$$

VIII. *Leida diferentsiaalvõrrandi*

$$y^2 - xyy' = (y-1)y'$$

erilahend, mis rahuldab algtingimust kui $x = -\frac{1}{2}$, *siis* $y = 1$.

Lahendus. Diferentsiaalvõrrandi erilahendi saamiseks tuleb algul leida üldlahend. Antud kujul ei kuulu võrrand ühtegi tuntud tüüpi. Kui aga vaatleme muutujat x funktsioonina ja muutujat y argumendina ning vastavalt sellele asendame

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{x'},$$

siis teisendub antud võrrand lineaarseks diferentsiaalvõrrandiks (11):

$$y^2 - xy\frac{1}{x'} = (y-1)\frac{1}{x'}$$

ehk

$$x' - \frac{1}{y}x = \frac{y-1}{y^2}.$$

Otsides selle võrrandi lahendit kujul (12): $x = uv$, millest $x' = \frac{dx}{dy} = u\frac{dv}{dy} + v\frac{du}{dy}$, saame asendamisel võrrandi

$$u\frac{dv}{dy} + v\frac{du}{dy} - \frac{1}{y}uv = \frac{y-1}{y^2}$$

ehk

$$u\frac{dv}{dy} + v\left(\frac{du}{dy} - \frac{u}{y}\right) = \frac{y-1}{y^2}. \qquad (*)$$

Funktsioonile u esitame nüüd tingimuse $\frac{du}{dy} - \frac{u}{y} = 0$ ehk $\frac{du}{u} = \frac{dy}{y}$. See tingimus on rahuldatud, kui $u = y$.

Võrrand (*) omandab sellise u valiku puhul kuju

$$y\frac{dv}{dy} = \frac{y-1}{y^2}$$

ehk

$$dv = \left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{y^3}\right) dy,$$

millest

$$v = -\frac{1}{y} + \frac{1}{2y^2} + C.$$

Seega on antud diferentsiaalvõrrandi üldlahend

$$x = y\left(\frac{1}{2y^2} - \frac{1}{y} + C\right).$$

Erilahendi saame niisuguse konstandi C puhul, mis rahuldab algtingimuses antud x ja y väärtuste korral üldlahendist saadud võrrandit.

Niisiis

$$-\frac{1}{2} = 1 \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot 1^2} - \frac{1}{1} + C\right),$$

millest

$$C = 0.$$

Järelikult on nõutud erilahend

$$x = \frac{1}{2y} - 1 \quad \text{ehk} \quad y = \frac{1}{2(x+1)}.$$

IX. *Leida diferentsiaalvõrrandi*

$$2yy'(x^2 - 1) - x(x^2 + y^2 - 1) = 0$$

erilahend, mis rahuldab algtingimust $y(0) = 1$.

Lahendus. Teisendades antud diferentsiaalvõrrandit, saame

$$2yy'(x^2 - 1) - xy^2 - x(x^2 - 1) = 0$$

ehk

$$y' - \frac{xy}{2(x^2 - 1)} - \frac{x}{2y} = 0$$

ehk

$$y' - \frac{x}{2(x^2 - 1)} y = \frac{x}{2} y^{-1}, \qquad (*)$$

millest nähtub, et antud võrrand on Bernoulli diferentsiaalvõrrand (13), kusjuures $m = -1$.

Kasutades teisendust (14): $z = y^{1-(-1)}$ ehk $z = y^2$, saame $z' = 2yy'$, millest $y' = \frac{z'}{2y}$. Kui asendame võrrandis (*) y' saadud avaldisega, omandab võrrand kuju

$$\frac{z'}{2y} - \frac{x}{2(x^2-1)} y = \frac{x}{2y}.$$

Korrutades nüüd saadud võrrandit avaldisega $2y$, saame

$$z' - \frac{x}{x^2-1} y^2 = x,$$

mis y^2 asendamisel z-ga teisendub lineaarseks diferentsiaalvõrrandiks

$$z' - \frac{x}{x^2-1} z = x.$$

Selle võrrandi lahendamiseks asendame $z = uv$, mille tulemusel võrrand teisendub kujule

$$u'v + u\left(v' - \frac{x}{x^2-1} v\right) = x, \qquad (**)$$

kusjuures v valime nii, et $v' - \frac{x}{x^2-1} v = 0$. Seda tingimust rahuldab $\ln|v| = \frac{1}{2} \ln|x^2-1|$ ehk $v = \pm\sqrt{|x^2-1|}$.

Seega võime võtta $v = \sqrt{|x^2-1|}$, mille puhul võrrand (**) omandab kuju

$$u'\sqrt{|x^2-1|} = x \quad \text{ehk} \quad du = \frac{x}{\sqrt{|x^2-1|}} dx,$$

järelikult

$$u = \int \frac{x}{\sqrt{|x^2-1|}} dx = \begin{cases} \displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} dx = \sqrt{x^2-1} + C, \text{ kui } |x| > 1 \\ \displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\sqrt{1-x^2} + C, \text{ kui } |x| < 1. \end{cases}$$

Niisiis

$$z = uv = \begin{cases} \sqrt{x^2-1}\,(\sqrt{x^2-1} + C), \text{ kui } |x| > 1 \\ \sqrt{1-x^2}\,(C - \sqrt{1-x^2}), \text{ kui } |x| < 1 \end{cases}$$

ehk

$$z = \begin{cases} x^2 - 1 + C\sqrt{x^2-1}, \text{ kui } |x| > 1 \\ x^2 - 1 + C\sqrt{1-x^2}, \text{ kui } |x| < 1. \end{cases}$$

Nagu näha, võime mõlemaid võrrandeid esitada üheainsa võrrandiga:

$$z = x^2 - 1 + C\sqrt{|x^2-1|}.$$

Seega on antud diferentsiaalvõrrandi üldlahend

$$y = \pm\sqrt{x^2 - 1 + C\sqrt{|x^2 - 1|}}.$$

Erilahendi leidmiseks arvutame C võrrandist

$$1 = \sqrt{-1 + C\sqrt{|-1|}},$$

millest

$$C = 2.$$

Nõutud erilahend on järelikult

$$y = \pm\sqrt{x^2 - 1 + 2\sqrt{|x^2 - 1|}}.$$

X. *Leida diferentsiaalvõrrandi*

$$\left(\frac{y}{x^2 + y^2} - 1\right) dx + \left(2y - \frac{x}{x^2 + y^2}\right) dy = 0$$

üldlahend.

Lahendus. Et

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2 + y^2} - 1\right) = \frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

ja

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(2y - \frac{x}{x^2 + y^2}\right) = -\frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

siis on antud diferentsiaalvõrrand eksaktne, s. t. leidub niisugune funktsioon $U(x, y)$, et

$$dU(x, y) = \frac{\partial U(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} dy =$$

$$= \left(\frac{y}{x^2 + y^2} - 1\right) dx + \left(2y - \frac{x}{x^2 + y^2}\right) dy.$$

Seega

$$\frac{\partial U(x, y)}{\partial x} = \frac{y}{x^2 + y^2} - 1 \qquad (*)$$

ja

$$\frac{\partial U(x, y)}{\partial y} = 2y - \frac{x}{x^2 + y^2}. \qquad (**)$$

Leiame $U(x, y)$ kahel viisil.

a) Avaldised $U(x, y)$ ja $\int \frac{\partial U}{\partial x} dx$ võivad teineteisest erineda ainult liidetava võrra, mis ei sõltu muutujast x. Seega

$$U(x, y) = \int \left(\frac{y}{x^2+y^2} - 1\right) dx + C(y)$$

ehk

$$U(x, y) = \arctan\frac{x}{y} - x + C(y),$$

millest järeldub, et

$$\frac{\partial U(x, y)}{\partial y} = -\frac{x}{x^2+y^2} + C'(y).$$

Asendades siin $\frac{\partial U(x, y)}{\partial y}$ avaldisega (**), saame

$$-\frac{x}{x^2+y^2} + C'(y) = 2y - \frac{x}{x^2+y^2}$$

ehk

$$C'(y) = 2y,$$

seega

$$C(y) = y^2 + C.$$

Antud diferentsiaalvõrrandi üldlahend on niisiis

$$\arctan\frac{x}{y} - x + y^2 = C.$$

b) Avaldised $U(x, y)$ ja $\int \frac{\partial U}{\partial y} dy$ võivad teineteisest erineda ainult liidetava võrra, mis ei sõltu muutujast y. Seega

$$U(x, y) = \int \left(2y - \frac{x}{x^2+y^2}\right) dy + C(x)$$

ehk

$$U(x, y) = y^2 - \arctan\frac{y}{x} + C(x),$$

millest

$$\frac{\partial U(x, y)}{\partial x} = \frac{y}{x^2+y^2} + C'(x).$$

Asendades siin $\frac{\partial U(x, y)}{\partial x}$ avaldisega (*), saame

$$\frac{y}{x^2+y^2} + C'(x) = \frac{y}{x^2+y^2} - 1$$

ehk

$$C'(x) = -1,$$

niisiis

$$C(x) = -x + C.$$

Seega antud diferentsiaalvõrrandi üldlahend on

$$y^2 - x - \arctan \frac{y}{x} = C.$$

Märkus. Nagu näha, saime kummalgi juhul erikujulise vastuse. Sisuliselt aga vastustes erinevust ei ole, sest kehtib seos

$$-\arctan t = \arctan \frac{1}{t} \pm k,$$

kus k on konstant.

Tõepoolest, avaldades selle võrduse mõlema poole tuletised, saame paremal pool $-\frac{1}{1+t^2}$ ja vasakul $\frac{1}{1+\frac{1}{t^2}} \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right) = -\frac{1}{t^2+1}$. Seega on mõlema poole tuletised võrdsed ja funktsioonid võivad teineteisest erineda ainult konstantse liidetava (k) võrra.

XI. *Leida diferentsiaalvõrrandi*

$$(x + 2xy - x^3)\,dx - dy = 0$$

üldlahend.

Lahendus. Antud võrrand omab kuju (15), kusjuures $M(x, y) = x + 2xy - x^3$ ja $N(x, y) = -1$. Et $M'_y(x, y) = 2x$ ja $N'_x(x, y) = 0$, siis ei ole antud diferentsiaalvõrrand eksaktne [tingimus (16) pole täidetud].

Otsime niisugust integreerimistegurit $\mu(x, y)$, et võrrand

$$\mu(x, y)\,(x + 2xy - x^3)\,dx - \mu(x, y)\,dy = 0$$

oleks eksaktne, s. o. et

$$\frac{\partial}{\partial y}[\mu(x, y)\,(x + 2xy - x^3)] = \frac{\partial}{\partial x}[-\mu(x, y)]$$

ehk

$$\frac{\partial\mu(x, y)}{\partial y}(x + 2xy - x^3) + \mu(x, y) \cdot 2x = -\frac{\partial\mu(x, y)}{\partial x}.$$

Jagades saadud võrrandit integreerimisteguriga ja viies integreerimisteguri osatuletisi sisaldavad liikmed ühele poole ning kõik ülejäänud liikmed teisele poole võrdusmärki, saame

$$\frac{1}{\mu(x, y)}\,\frac{\partial\mu(x, y)}{\partial y}(x + 2xy - x^3) + \frac{1}{\mu(x, y)}\,\frac{\partial\mu(x, y)}{\partial x} = -2x$$

ehk

$$(x+2xy-x^3)\frac{\partial}{\partial y}\ln\mu(x, y)+\frac{\partial}{\partial x}\ln\mu(x, y)=-2x.$$

Siit on näha, et saadud osatuletistega diferentsiaalvõrrandit rahuldab niisugune funktsioon μ, mis ei sõltu muutujast y, sest siis on $\frac{\partial}{\partial y}\ln\mu(x)=0$ ja võrrand omandab kuju

$$\frac{\partial}{\partial x}\ln\mu(x)=-2x,$$

millest

$$\ln\mu(x)=-x^2 \text{ ehk } \mu(x)=e^{-x^2}.$$

Sama avaldise $\mu(x)$ jaoks saaksime ka vahetult valemi (19) järgi.

Niisiis on diferentsiaalvõrrand

$$e^{-x^2}(x+2xy-x^3)\,dx-e^{-x^2}dy=0$$

eksaktne. Selle võrrandi üldlahendis $u(x, y)=C$ esineva funktsiooni $u(x, y)$ leiame tingimusest

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}=-e^{-x^2} \text{ ehk } u(x, y)=-e^{-x^2}y+\varphi(x),$$

kusjuures

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x}=2xye^{-x^2}+\varphi'(x)$$

ehk

$$e^{-x^2}(x+2xy-x^3)=2xye^{-x^2}+\varphi'(x),$$

millest

$$\varphi'(x)=(x-x^3)\,e^{-x^2}$$

ja seega

$$\varphi(x)=\int(x-x^3)\,e^{-x^2}dx.$$

Et

$$\int xe^{-x^2}dx=\frac{1}{2}\int(-2x)\cdot e^{-x^2}dx=-\frac{1}{2}e^{-x^2}$$

ja et ositi integreerimisel (võttes $u=x^2$ ja $dv=xe^{-x^2}dx$) saame

$$-\int x^3e^{-x^2}dx=\frac{x^2}{2}e^{-x^2}-\int xe^{-x^2}dx=\frac{x^2}{2}e^{-x^2}+\frac{1}{2}e^{-x^2},$$

siis

$$\varphi(x)=\frac{x^2}{2}e^{-x^2}$$

ja antud diferentsiaalvõrrandi üldlahend on

$$-e^{-x^2}y+\frac{x^2}{2}e^{-x^2}=C$$

ehk

$$e^{-x^2}(x^2-2y)=C.$$

XII. *Leida diferentsiaalvõrrandi*

$$y'^2+yy'-x(x+y)=0$$

üldlahend.

Lahendus. Avaldame antud võrrandist y':

$$y'=-\frac{y}{2}\pm\sqrt{\frac{y^2}{4}+x^2+xy}=-\frac{y}{2}\pm\frac{\sqrt{y^2+4xy+4x^2}}{2}=$$

$$=\frac{-y\pm(y+2x)}{2}.$$

Seega saame antud diferentsiaalvõrrandi asemel kaks võrrandit:

$$y'=x,\quad y'=-x-y.$$

Esimese kui eralduvate muutujatega võrrandi $dy=x\,dx$ üldlahendiks on $y=\frac{x^2}{2}+C_1$ ja teise kui lineaarse võrrandi $y'+y=-x$ üldlahendiks saame VII näites kasutatud võtte abil

$$y=C_2e^{-x}-x+1.$$

Antud võrrandi üldlahend on järelikult

$$\left(\frac{x^2}{2}-y+C_1\right)(C_2e^{-x}-x-y+1)=0.$$

XIII. *Lahendada võrrand* $x=\frac{2yy'}{4+y'^2}$.

Lahendus. Antud võrrand omab kuju (22). Tähistame $y'=p$; siis $x=\frac{2yp}{4+p^2}$. Diferentseerides seda võrrandit y suhtes, saame

$$\frac{dx}{dy}=\frac{2p}{4+p^2}+\frac{2y(4+p^2)-4yp^2}{(4+p^2)^2}\,\frac{dp}{dy}$$

ehk

$$\frac{1}{p}=\frac{2p}{4+p^2}+\frac{8y-2yp^2}{(4+p^2)^2}\,\frac{dp}{dy},$$

millest

$$\frac{4+p^2}{p(4+p^2)}=\frac{2y(4-p^2)}{(4+p^2)^2}\,\frac{dp}{dy}$$

ehk

$$\frac{dy}{y}=\frac{2p}{4+p^2}\,dp.$$

Järelikult

$$\ln|y| + \ln|C| = \ln(4 + p^2),$$

millest

$$Cy = 4 + p^2.$$

Seega $p = \pm\sqrt{Cy - 4}$ ja asendades antud võrrandis $y' = \pm\sqrt{Cy - 4}$, saame

$$x = \frac{\pm 2y\sqrt{Cy - 4}}{Cy}$$

ehk

$$C^2x^2 = 4(Cy - 4),$$

millest

$$y = Cx^2 + \frac{1}{C},$$

mis ongi antud diferentsiaalvõrrandi üldlahend.

XIV. *Leida diferentsiaalvõrrandi*

$$x = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{y'}$$

üldlahend.

L a h e n d u s. Antud võrrand omab kuju (23). Tähistame $y' = p$; siis $x = \frac{\sqrt{1+p^2}}{p}$. Diferentseerides seda võrrandit y suhtes, saame

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\frac{p^2}{\sqrt{1+p^2}} - \sqrt{1+p^2}}{p^2} \frac{dp}{dy}$$

ehk

$$\frac{1}{p} = \frac{p^2 - 1 - p^2}{p^2\sqrt{1+p^2}} \frac{dp}{dy}.$$

Seega

$$dy = -\frac{dp}{p\sqrt{1+p^2}},$$

millest

$$y = \ln\frac{1 + \sqrt{1+p^2}}{p} + C.$$

Järelikult on antud diferentsiaalvõrrandi üldlahend

$$x = \frac{\sqrt{1+p^2}}{p},$$

$$y = \ln\frac{1+\sqrt{1+p^2}}{p} + C.$$

Sellest võrrandipaarist on võimalik parameetrit p elimineerida, sest esimesest võrrandist saame

$$x^2p^2 = 1 + p^2,$$

millest

$$p = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

ehk

$$\frac{1}{p} = \sqrt{x^2 - 1},$$

mis paigutatuna teise võrrandisse annab

$$y = \ln (x + \sqrt{x^2 - 1}) + C.$$

XV. *Leida diferentsiaalvõrrandi*

$$e^{y'}(y' - 1) - y = 0$$

üldlahend.

L a h e n d u s. Antud võrrandile saame anda kuju $y = e^{y'}(y' - 1)$, nii et on tegemist juhuga (27).

Asendades $p = y'$, saame $y = e^p(p - 1)$. Diferentseerides seda võrrandit x järgi, saame

$$p = [e^p(p - 1) + e^p] \frac{dp}{dx}$$

ehk

$$dx = e^p \, dp,$$

millest

$$x = e^p + C.$$

Seega on antud diferentsiaalvõrrandi üldlahend parameetrilisel kujul

$$x = e^p + C, \quad y = e^p(p - 1).$$

XVI. *Leida joon, mille puutuja telglõikude summa on* $2a > 0$.

L a h e n d u s. Joone $y = y(x)$ puutuja punktis $(x; y)$ on $Y - y = y'(X - x)$, kus $(X; Y)$ on puutuja jooksev punkt. Puutuja lõikepunkt abstsissteljega on $\left(x - \frac{y}{y'}; 0\right)$ ja ordinaatteljega $(0; y - xy')$, seega rahuldab otsitava joone võrrand diferentsiaalvõrrandit

$$x - \frac{y}{y'} + y - xy' = 2a,$$

millest

$$xy' - y + yy' - xy'^2 = 2ay'$$

ehk

$$xy'(1-y')-y(1-y')=2ay'.$$

Et $1-y'\neq 0$ ($y'=1$ ei rahulda meie diferentsiaalvõrrandit), siis võime võrrandi mõlemaid pooli jagada avaldisega $1-y'$. Saame

$$xy'-y=\frac{2ay'}{1-y'}$$

ehk

$$y=xy'+\frac{2ay'}{y'-1}.$$

Seega on otsitava joone diferentsiaalvõrrand Clairaut' võrrand (30). Tema lahendamiseks tähistame $y'=p$:

$$y=xp+\frac{2ap}{p-1} \qquad (*)$$

ja diferentseerime x järgi:

$$y'=p+\left[x+\frac{2ap-2a-2ap}{(p-1)^2}\right]\frac{dp}{dx}$$

ehk

$$\left[x-\frac{2a}{(p-1)^2}\right]\frac{dp}{dx}=0.$$

Niisiis teisendub saadud võrrand kaheks võrrandiks

$$\frac{dp}{dx}=0 \text{ ja } x-\frac{2a}{(p-1)^2}=0.$$

Esimese üldlahend on $p=C$, mis paigutatuna võrrandisse (*) annab vaadeldava Clairaut' võrrandi üldlahendi

$$y=Cx+\frac{2aC}{C-1}.$$

Teine võrrand koos võrrandiga (*) annab sama Clairaut' võrrandi singulaarse lahendi (üldlahendile vastava sirgete parve mähisjoone võrrandi) parameetrilisel kujul:

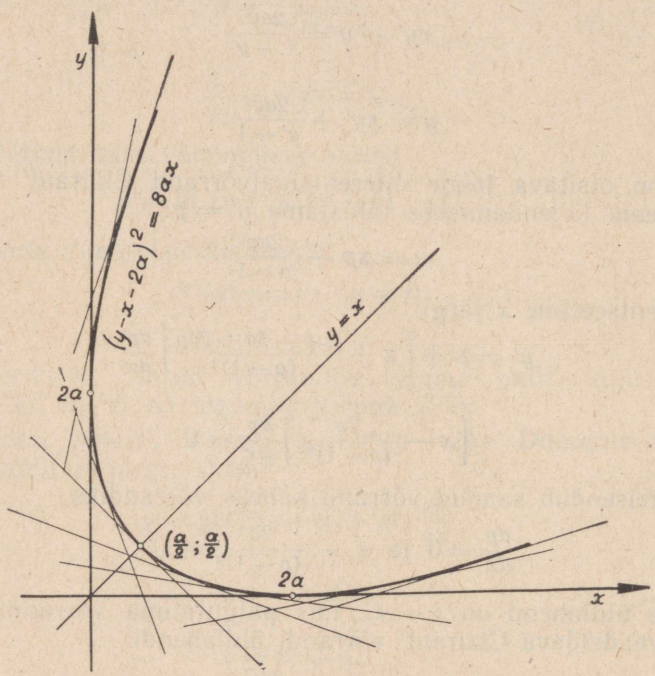
$$x=\frac{2a}{(p-1)^2}, \quad y=\frac{2ap}{(p-1)^2}+\frac{2ap}{p-1}.$$

Elimineerides viimasest võrrandipaarist p, saame singulaarse lahendi kujul

$$(y-x-2a)^2=8ax.$$

Üldlahendiga määratud sirgete parve iga sirge rahuldab ülesande geomeetrilist tingimust kui iseenda puutuja igas punktis.

Et aga singulaarne lahend on selle parve mähisjoon, siis on tema puutujateks parve sirged, mistõttu ka singulaarne lahend rahuldab ülesande geomeetrilist tingimust. Analüütilise geomeetria võtetega on kerge veenduda, et singulaarne lahend esitab parabooli, mille telg on $y=x$, haripunkt $\left(\frac{a}{2};\ \frac{a}{2}\right)$ ja fokaallaius $2\sqrt{2a}$ (joon. 110).



Joon. 110.

XVII. *Leida paraboolide parve*

$$y=ax^2$$

ortogonaalsed trajektoorid.

L a h e n d u s. Ortogonaalsete trajektooride leidmiseks koostame süsteemi (33):

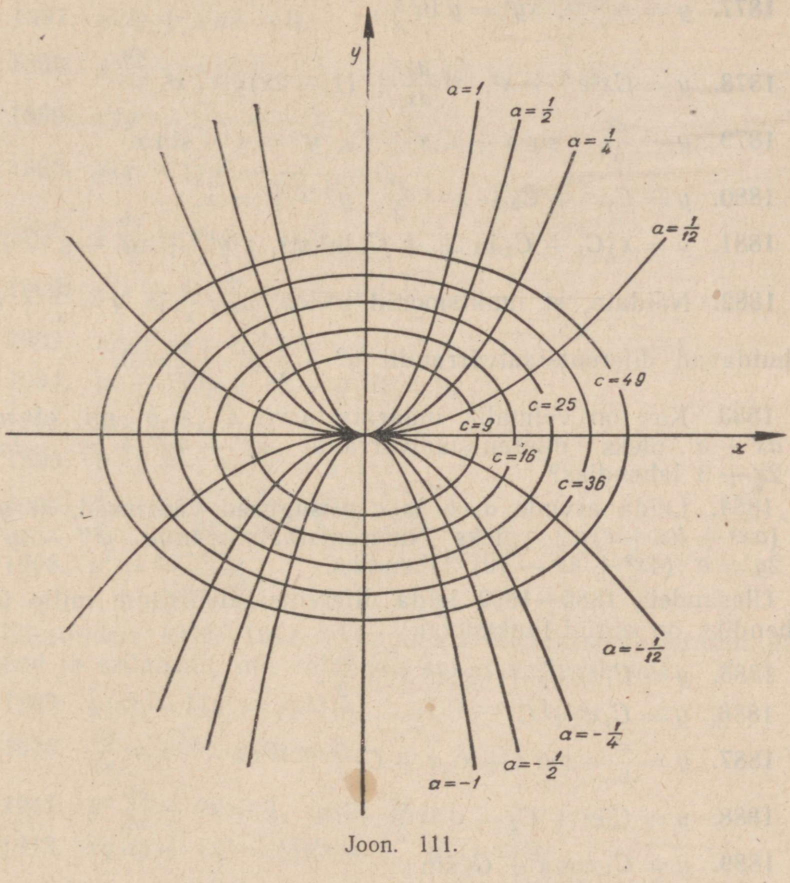
$$\begin{cases} ax^2-y=0, \\ 2ax+\dfrac{1}{y'}=0. \end{cases}$$

Sellest süsteemist parameetrit a elimineerides saame ortogonaalsete trajektooride diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{2y}{x}+\frac{1}{y'}=0.$$

Ortogonaalsete trajektooride parve võrrandiks on saadud diferentsiaalvõrrandi üldlahend

$$x^2+2y^2=C.$$



Joon. 111.

Järelikult on antud paraboolide parve ortogonaalsed trajektoorid ellipsid (joon. 111).

Diferentsiaalvõrrandi ja tema lahendi mõiste

Ülesandeis **1875—1881** näidata, et antud funktsioon on antud diferentsiaalvõrrandi lahend:

1875. $y = -x, \quad (y^2 + 2xy - x^2)\frac{dy}{dx} = y^2 - 2xy - x^2.$

1876. $y = C \sin x - 1, \quad y' \tan x - y = 1.$

1877. $y = xe^{Cx+1}, \quad xy' = y \ln \frac{y}{x}.$

1878. $y = Cx^2 e^{\frac{1}{x}} + x^2, \quad x^2 \frac{dy}{dx} + (1-2x)y = x^2.$

1879. $y = \frac{x^3}{6} - \sin x + C_1 x + C_2, \quad y'' = x + \sin x.$

1880. $y = C_1 e^x + C_2 - x - \frac{x^2}{2}, \quad y'' - y' = x.$

1881. $y = x(C_1 + C_2 \ln|x| + C_3 \ln^2|x|), \quad x^3 y''' + xy' - y = 0.$

1882. Näidata, et funktsioonid $y = x$, $y = \frac{1}{x}$ ja $y = \frac{C_1}{x} + C_2 x$ rahuldavad diferentsiaalvõrrandit $y'' + \frac{1}{x} y' - \frac{y}{x^2} = 0.$

1883. Kas on võimalik määrata arve a ja b nii, et $y = ax + b$ oleks diferentsiaalvõrrandi $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 2x + 3$ lahendiks?

1884. Leida arvude a, b ja c niisugused väärtused, et $y = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$ oleks diferentsiaalvõrrandi $y''' - 3y' + 2y = e^{-x}(4x^2 + 4x - 10)$ lahendiks.

Ülesandeis **1885—1890** leida diferentsiaalvõrrand, mille üldlahendiks on antud funktsioon:

1885. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{e^x}{2}.$

1886. $y = C_1 x^2 + C_2.$

1887. $y = \frac{x^3}{6} - \sin x + C_1 x + C_2.$

1888. $y = C_1 e^x + C_2 - x - \frac{x^2}{2}.$

1889. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$

1890. $x^2 y = C_1 + C_2 x^3 + C_3 \ln x.$

1891. Leida joonte parve $y = A \cos x + B \sin x$ diferentsiaalvõrrand.

1892. Leida paraboolide parve $y = cx^n$ diferentsiaalvõrrand.

1893. Leida ringjoonte parve $x^2 + y^2 = c$ diferentsiaalvõrrand.

1894. Leida sirgete parve $x \cos \alpha + y \sin \alpha - a = 0$ diferentsiaalvõrrand.

Eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandid

Ülesandeis **1895—1908** leida antud diferentsiaalvõrrandi üldlahend ja joonestada mõned integraaljooned:

1895. $dy - x\,dx = 0.$

1896. $\frac{dy}{dx} = 1.$

1897. $y\,dy + x\,dx = 0.$

1898. $y\frac{dy}{dx} - x = 0.$

1899. $xyy' + 1 = x^2 - x.$

1900. $y(x-1)y' - \frac{1}{y+1} = 0.$

1901. $x\frac{dy}{dx} = y(y-1).$

1902. $x(x+1)\frac{dy}{dx} + y = y^2.$

1903. $x(yy' - x + 1) = -1.$

1904. $(x+1)\,dy + (2-y)\,dx = 0.$

1905. $2yy'\cos x = 1.$

1906. $(\sqrt{y} + \sqrt{xy})\,y' = y + 1.$

1907. $\frac{x}{y}\,dx - \frac{2x^2-3x-2}{2y^2+3y+1}\,dy = 0.$

1908. $y' = \frac{1-\cos y}{\sqrt{4-x^2}}.$

Ülesandeis **1909—1912** leida antud diferentsiaalvõrrandi üldlahend ja erilahend, mis rahuldab antud algtingimust:

1909. $y(x^2-1)y' = xy^2 + x, \quad y(2) = -1.$

1910. $\frac{dy}{dx} = e^{x+y}, \quad y(0) = 0.$

1911. $y^2\frac{dy}{dx} + 2x = 1, \quad y(2) = -1.$

1912. $xy\,dy + (x^2-1)\,dx = 0, \quad y(1) = 0.$

Homogeensed diferentsiaalvõrrandid

Ülesandeis **1913—1920** leida antud diferentsiaalvõrrandi üldlahend:

1913. $(y^2 + 2xy - x^2)\,y' = y^2 - 2xy - x^2.$

1914. $y' - \frac{y}{x} = \frac{xy}{x^2+y^2}.$

1915. $xyy' = x^2 + y^2$.

1916. $(3x^2 - y^2)\frac{dy}{dx} = 2xy$.

1917. $x\frac{dy}{dx} = y - 2\sqrt{xy}$.

1918. $\frac{dy}{dx} = -\frac{2(5x+4y)}{7x+5y}$.

1919. $x^2y' = y(x-y)$.

1920. $x(y-x)\frac{dy}{dx} = y^2$.

Ülesandeis **1921—1924** teisendada antud diferentsiaalvõrrand homogeenseks ja leida tema üldlahend:

1921. $(2x - y + 4)\,dy + (x - 2y + 5)\,dx = 0$.

1922. $(x - 2y - 1)\frac{dy}{dx} = 2x - y - 1$.

1923. $\frac{dy}{dx} = -\frac{2x+3y+2}{4x+6y+3}$.

1924. $y' = \frac{1+x+y}{1-2x-2y}$.

Ülesandeis **1925—1932** leida diferentsiaalvõrrandi erilahend, mis rahuldab antud algtingimust:

1925. $xyy' = y^2 + (x+y)^2 e^{-\frac{y}{x}}$, $y(1) = 0$.

1926. $y' = \frac{y}{x} + \tan\frac{y}{x}$, $y(2) = \pi$.

1927. $xy\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$, $y(1) = \sqrt{2}$.

1928. $\frac{dy}{dx} = 2 - \frac{x}{y}$, $y(0) = 1$.

1929. $(3x + 3y - 1)\,dx + (x + y + 1)\,dy = 0$, $y(1) = 1$.

1930. $\frac{dy}{dx} = \frac{2x-y+1}{x-2y+1}$, $y(0) = 1$.

1931. $y' = \frac{1+x+y}{1-2x-2y}$, $y(1) = 0$.

1932. $y' = \frac{x+y-1}{3-2y-2x}$, $y(2) = 1$.

Lineaarsed diferentsiaalvõrrandid

Ülesandeis **1933—1945** leida antud diferentsiaalvõrrandi üldlahend:

1933. $\frac{dy}{dx} - y = x^2$.

1934. $\frac{dy}{dx} + 4x^3y = 3x^2e^{-x^4}$.

1935. $2x\frac{dy}{dx} = 6y - x^2$.

1936. $\frac{dy}{dx} + 3x^2y = e^{-x^3}$.

1937. $\frac{dy}{dx} - 2xy = \frac{e^{x^2}}{x}$.

1938. $\frac{dy}{dx} = 4x - 3y + 5$.

1939. $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} - \cos x = 0$.

1940. $y' - y\cos x = x^2e^{\sin x}$.

1941. $\frac{dy}{dx} - y\cot x = 2x\sin x$.

1942. $x^2\,dy + 2xy\,dx = x^5\,dx$.

1943. $\sqrt{1 + x^2}\,y' - y = x + \sqrt{1 + x^2}$.

1944. $y^2\,dx = (y^2 + 2xy - x)\,dy$.

1945. $(1 + y^2)\,dx - (xy + y + y^3)\,dy = 0$.

Ülesandeis **1946—1949** leida diferentsiaalvõrrandi erilahend, mis rahuldab antud algtingimust:

1946. $\frac{dy}{dx} = 2(2x - y)$, $y(0) = -1$.

1947. $\frac{dy}{dx} + x(2y - e^{-x^2}) = 0$, $y(0) = 1$.

1948. $x^2\frac{dy}{dx} + (1 - 2x)y - x^2 = 0$, $y(-1) = 1$.

1949. $\frac{dy}{dx} - \frac{2x}{1 + x^2}y - x^2 - 1 = 0$, $y(-1) = 2$.

Ülesandeis **1950—1955** leida antud Bernoulli diferentsiaalvõrrandi üldlahend:

1950. $\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = \frac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}$.

1951. $\frac{dy}{dx} + y^3e^{-x^2} = xy$.

1952. $x^2(xy' + 2y) = y^3$.

1953. $y' + 4xy = x^2\sqrt{y}\,e^{-x^2}$.

1954. $x\frac{dy}{dx} + (1 - y\ln x)y = 0$.

1955. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{xy + x^2y^3}$.

Ülesandeis **1956—1959** leida antud Bernoulli diferentsiaalvõrrandi erilahend:

1956. $(x - y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0, \quad y(1) = 1.$

1957. $\frac{dy}{dx} = \frac{x + y^3 + 1}{3y^2}, \quad y(0) = -1.$

1958. $(y + xy^2)\,dx - dy = 0, \quad y(0) = 1.$

1959. $xy^2(xy' + y) = 1, \quad y(2) = 1.$

Eksaktne diferentsiaalvõrrand

Ülesandeis **1960—1969** leida antud diferentsiaalvõrrandi üldlahend:

1960. $\frac{y}{x}\,dx + \ln x\,dy = 0.$

1961. $3x(x + 2y^2)\,dx + 2y(3x^2 + 2y^2)\,dy = 0.$

1962. $\frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2} = 0.$

1963. $\frac{y\,dx - x\,dy}{x^2 + y^2} = x\,dx + y\,dy.$

1964. $\frac{(x - y)\,dx + (x + y)\,dy}{x^2 + y^2} = 0.$

1965. $\frac{2x(1 - e^y)}{(1 + x^2)^2}\,dx + \frac{e^y}{1 + x^2}\,dy = 0.$

1966. $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + y\right)dx + \left(x + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)dy = 0.$

1967. $\left(\frac{y}{\cos^2 x} - \arctan y\right)dx + \left(\tan x - \frac{x}{1 + y^2}\right)dy = 0.$

1968. $y\left(\cos x - x\sin x - \frac{y}{x}\right)dx + (x\cos x - 2y\ln x)\,dy = 0.$

1969. $\left(y\ln y - \frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}\right)dx + x\left(\ln y + 1 + \frac{1}{y^2}\cos\frac{x}{y}\right)dy = 0.$

Ülesandeis **1970—1974** leida diferentsiaalvõrrandi erilahend vastavalt antud algtingimusele:

1970. $(2x - y)\,dx = x\,dy, \quad y(1) = 0.$

1971. $(6x^2 + 2y - 1)\,dx + (2x + 4y - 3)\,dy = 0, \quad y(1) = -1.$

1972. $(x + y)\,dx + (2y + x)\,dy = 0, \quad y(-1) = 1.$

1973. $e^y\,dx + (xe^y - 2y)\,dy = 0, \quad y(1) = 0.$

1974. $x\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - x\right)dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 1\right)dy = 0, \quad y(3) = 4.$

Ülesandeis **1975—1981** leida antud diferentsiaalvõrrandi integreerimistegur ja üldlahend:

1975. $y^2(x-3y)\,dx+(1-3xy^2)\,dy=0$.
1976. $(x^2+y^2+1)\,dx+xy\,dy=0$.
1977. $y(1+xy)\,dx-x\,dy=0$.
1978. $(y-e^{2x})\,dx+dy=0$.
1979. $2x\tan y\,dx+(x^2-2\sin y)\,dy=0$.
1980. $(e^{2x}-y^2)\,dx+y\,dy=0$.
1981. $y\cot x\,dx-(1+3y^2\sin x)\,dy=0$.

1982. Leida lineaarse diferentsiaalvõrrandi $\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)$ integreerimistegur, vaadeldes seda võrrandit kujul $[p(x)y-q(x)]dx+dy=0$.

Ülesandeis **1983—1986** teisendada antud lineaarne diferentsiaalvõrrand eksaktseks ja leida tema üldlahend:

1983. $\frac{dy}{dx}-\frac{3}{x}y=-\frac{x}{2}$.

1984. $y'+2xy=xe^{-x^2}$.

1985. $y'+\frac{2y}{x}=\frac{e^{-x^2}}{x}$.

1986. $\frac{dy}{dx}+y=\cos x$.

Diferentsiaalvõrrandid
$f(x,\ y,\ y')=0,\quad x=f(y,\ y')$ ja $y=f(x,\ y')$

Ülesandeis **1987—1992** avaldada y' ja leida siis antud diferentsiaalvõrrandi üldlahend:

1987. $x^2y'^2-y=0$.
1988. $x^2y'^2+3xyy'+2y^2=0$.
1989. $y'^2+yy'=x(x+y)$.
1990. $y'^2+y'(x+y)+xy=0$.
1991. $(yy')^2-1=0$.
1992. $y'^3-7y'+6=0$.

Ülesandeis **1993—2004** leida antud diferentsiaalvõrrandi üldlahend:

1993. $x=y'+y'^2$.

1994. $x=2y'-\frac{1}{y'^2}$.

1995. $x=\left(\frac{dy}{dx}\right)^3+1$.

1996. $x=\frac{1+y'}{y'^3}$.

1997. $y=y'^5+y'^3-2$.

1998. $y=1+y'^2-y'^3$

1999. $y = y' - y'^2$.

2000. $3y'^5 - yy' + 1 = 0$.

2001. $y = y' + \ln y'$.

2002. $y = e^{y'}y'^2$.

2003. $y - \frac{x^2}{2} = y'(2x + y')$.

2004. $y = xy'(y' + 2)$.

Ülesandeis **2005—2012** leida antud Clairaut' diferentsiaalvõrrandi üldlahend ja singulaarne lahend:

2005. $y = xy' + y'^2$.

2006. $y = \frac{dy}{dx}\left(x - \frac{dy}{dx} + 1\right)$.

2007. $y = xy' - \sqrt{1 + y'^2}$.

2008. $y = xy' - \arctan y'$.

2009. $y - xy' - \frac{1}{2y'} = 0$.

2010. $y - xy' = \sin y'$.

2011. $y = xy' + \frac{1}{2 + y'}$.

2012. $y = x\frac{dy}{dx} - 3\left(\frac{dy}{dx}\right)^3$.

Mitmesuguseid diferentsiaalvõrrandeid

Ülesandeis **2013—2030** leida antud diferentsiaalvõrrandi üldlahend:

2013. $(x + y + 1)\,dx + (x - y^3 + 3)\,dy = 0$.

2014. $\frac{dy}{dx} + 2xy = 2e^{-x^2}$.

2015. $(x^2 - y)\,dx + x\,dy = 0$.

2016. $\sqrt{4 - 9x^2}\,dy = (1 + 9y^2)\,dx$.

2017. $y' - \frac{2x}{1 + x^2}y = 1 + x^2$.

2018. $[\cos(x + y^2) + 3y]dx + [2y\cos(x + y^2) + 3x]dy = 0$.

2019. $x\frac{dy}{dx} - 4y = x^2\sqrt{y}$.

2020. $(x + \sqrt{x^2 - y^2})\,y' = y$.

2021. $x\,dy - y\,dx + x^2y^2\,dy = 0$.

2022. $xy' + 2y - x^4 = 0$.

2023. $x(y^2 \ln x - y') = y$.

2024. $xy' = y\left(1 + \ln\frac{y}{x}\right)$.

2025. $xy' - 2y + x^2 = 0$.

2026. $y\sin x + y'\cos x = 1$.

2027. $\frac{1+y}{x}dx - dy = 0.$

2028. $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x.$

2029. $y = (x-y)y'.$

2030. $x\frac{dy}{dx} = y - \frac{x^2}{(x-1)^2}.$

2031. Leida diferentsiaalvõrrandi $(x+y-2)dy = (1-2x-2y)dx$ integraaljoon, mis läbib punkti (1; —2).

2032. Leida diferentsiaalvõrrandi $x^2\,dy + y^2\,dx = 0$ integraaljoon, mis läbib punkti (1; 1).

2033. Leida diferentsiaalvõrrandi $x^2\,dy + (2x^2 - y^2)\,dx = 0$ erilahend, mis rahuldab algtingimust $x = 1$, $y = 2$.

2034. Leida diferentsiaalvõrrandi $x\,dy + y(1-y)\,dx = 0$ erilahend, mille puhul argumendi väärtusele 3 vastav funktsiooni väärtus on 2.

Ülesandeis **2035—2042** leida diferentsiaalvõrrandi erilahend, mis rahuldab antud algtingimust:

2035. $\left(\frac{1}{y}e^{\frac{x}{y}} - 2x\right)dx + \left(3y^2 - \frac{x}{y^2}e^{\frac{x}{y}}\right)dy = 0, \quad y(0) = 1.$

2036. $(x+y-2)\,dx + (x-y+4)\,dy = 0, \quad y(2) = 1.$

2037. $\sqrt{\frac{1-x^2}{1-y^2}}\,y' + \frac{1}{y} = 0, \quad y(0) = \frac{3}{5}.$

2038. $x(1+y'^2) = 1, \quad y(0) = -2.$

2039. $x^2\,dy - y(y+x)\,dx = 0, \quad y(1) = \frac{1}{2}.$

2040. $y' = \sin\frac{x-y}{2} - \sin\frac{x+y}{2}, \quad y(0) = \pi.$

2041. $2\frac{dy}{dx} = \frac{5y-x-7}{2x-y+5}, \quad y(-1) = 2.$

2042. $x(2x-y)y' = x^2 - xy + y^2, \quad y(1) = 0.$

Geomeetrilisi rakendusi

ᵛ 2043. Leida joon, mis läbib punkti (—1; 3) ning mille puutuja tõus on kaks korda suurem koordinaatide alguspunktist puutepunkti suunduva lõigu suunanurga tangensist.

ᵛ 2044. Leida joon, mille puutuja lõik puutepunktist abstsissteljeni on kaks korda pikem sama puutuja abstsiss- ja ordinaattelje vahelisest lõigust.

2045. Leida joon, mis läbib punkti (2; —6) ning mille puutuja lõik puutepunktist abstsissteljeni poolitub ordinaatteljel.

2046. Leida joon, mille puutuja tõus on pöördvõrdeline puutepunkti koordinaatide korrutisega.

2047. Leida joon, mille puutujaist koordinaatteljed lõikavad konstantse pikkusega lõigud.

2048. Punkti liikumise kiirus on võrdeline tee pikkusega s, kui pikkust s mõõta nii, et algmomendile $t=0$ vastab $s=1$. Avaldada tee pikkuse sõltuvust ajast, võttes võrdeteguriks $\frac{1}{2}$.

2049. Keha liikumise kiirus on võrdeline ajaga t. Avaldada käidud tee pikkus s aja funktsioonina, kui võrdetegur on $\frac{1}{4}$ ja algmomendile $t=0$ vastab $s=0$.

2050. Leida joon, mille puutuja algordinaadi ruut on võrdne puutepunkti koordinaatide korrutisega.

2051. Leida joon, mille puutuja algordinaat võrdub puutepunkti kaugusega koordinaatide alguspunktist.

2052. Leida joon, mille puutuja tõus on võrdeline puutepunkti ordinaadi ja abstsissi jagatise ruuduga.

2053. Leida joon, mille puutuja tõus on ühe võrra väiksem puutepunkti ordinaadi ja abstsissi jagatisest.

2054. Leida joon, mille puutuja algordinaat võrdub puutepunkti abstsissi ja ordinaadi vahega.

2055. Leida joon, mille puutuja läbib punkti $(y^2; 0)$, kus y on puutepunkti ordinaat.

2056. Leida joon, mille puhul puutuja, abstsisstelg ja koordinaatide alguspunkti puutepunktiga ühendav sirge moodustavad konstantse pindalaga kolmnurga.

2057. Leida joon, mille puutuja algordinaadi ja puutepunkti abstsissi korrutis on konstantne (a^2).

2058. Leida joon, mille puutuja algordinaat võrdub puutepunkti koordinaatide korrutisega.

2059. Leida joon, mille puutuja algordinaat on võrdne puutepunkti abstsissiga.

2060. Leida joon, mille mistahes punktist tõmmatud puutuja algordinaat võrdub puutepunkti ordinaadi ruuduga.

2061. Füüsikast on teada, et voolutugevus i, elektromotoorne jõud E, ahela takistus R ja eneseinduktsioon L on seotud võrrandiga

$$E = Ri + L\frac{di}{dt},$$

kus R ja L on antud ahela puhul konstantsed, E aga on aja t funktsioon. Lahendada see diferentsiaalvõrrand juhul, kui E on konstantne ja $i(0)=0$.

2062. Leida paraboolide parve $y=Cx^4$ ortogonaalsed trajektoorid.

2063. Leida võrdsete raadiustega ringjoonte ortogonaalsed trajektoorid, kui ringjoonte keskpunktid asetsevad abstsissteljel.

2064. Leida ellipsite parve $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ortogonaalsed trajektoorid, kui a on konstant ja b on parve parameeter.

2065. Näidata, et võrdhaarsete hüperboolide $xy=G$ ortogonaalsed trajektoorid on võrdhaarsed hüperboolid.

§ 18. KÕRGEMAT JÄRKU DIFERENTSIAALVÕRRANDID

Kui teist järku mittetäielikes diferentsiaalvõrrandeis

$$f(y'', x) = 0, \quad f(y'', y', x) = 0, \quad f(y'', y') = 0 \tag{1}$$

asendada

$$y' = p, \quad y'' = \frac{dp}{dx}, \tag{2}$$

siis teisenduvad need võrrandid p suhtes esimest järku diferentsiaalvõrrandeiks.

Kui diferentsiaalvõrrandeis

$$\varphi(y'', y', y) = 0, \quad \varphi(y'', y) = 0 \tag{3}$$

asendada $y' = p$ ja muutujat p vaadelda y funktsioonina, nii et

$$y'' = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}, \tag{4}$$

siis teisenduvad antud võrrandid p suhtes esimest järku diferentsiaalvõrrandeiks.

Konstantsete kordajatega homogeense lineaarse diferentsiaalvõrrandi

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y^{(1)} + a_ny = 0 \tag{5}$$

üldlahend on

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n, \tag{6}$$

kus $y_1, y_2, \ldots, y_n$ on antud diferentsiaalvõrrandi lineaarselt sõltumatud erilahendid, mis koostatakse antud diferentsiaalvõrrandi karakteristliku võrrandi

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \tag{7}$$

abil.

Selle karakteristliku võrrandi igale k-kordsele reaalsele lahendile λ_i vastab antud diferentsiaalvõrrandi k sõltumatut erilahendit:

$$e^{\lambda_i x}, \quad xe^{\lambda_i x}, \ldots, x^{k-1}e^{\lambda_i x}. \tag{8}$$

Igale k-kordsele kaaskomplekslahendite paarile $\alpha \pm i\beta$ vastab $2k$ erilahendit:

$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\ e^{\alpha x}\sin\beta x,\ xe^{\alpha x}\cos\beta x,\ xe^{\alpha x}\sin\beta x,$$
$$x^2e^{\alpha x}\cos\beta x,\ x^2e^{\alpha x}\sin\beta x,\ \ldots,\ x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,\ x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x. \tag{9}$$

Konstantsete kordajatega lineaarse mittehomogeense diferentsiaalvõrrandi

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y^{(1)} + a_ny = f(x) \tag{10}$$

üldlahendiks on vastava homogeense diferentsiaalvõrrandi

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y^{(1)} + a_ny = 0$$

üldlahendi $\bar{y}$ ja antud diferentsiaalvõrrandi (10) ühe erilahendi Y summa:

$$y = \bar{y} + Y. \tag{11}$$

Kui $f(x) \equiv q(x) + r(x)$, siis on võrrandi (10) erilahendiks diferentsiaalvõrrandite

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y^{(1)} + a_ny = q(x) \tag{12}$$

ja

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y^{(1)} + a_ny = r(x) \tag{13}$$

erilahendite summa.

Kui

$$f(x) \equiv e^{\alpha x}[u(x)\cos\beta x + v(x)\sin\beta x], \tag{14}$$

kus α ja β konstandid ning $u(x)$ ja $v(x)$ polünoomid, milledest kõrgemaastmelise aste on m, siis on võrrandi (10) erilahend

1) kui $\alpha + i\beta$ ei ole karakteristliku võrrandi lahend,

$$Y = e^{\alpha x}[U(x)\cos\beta x + V(x)\sin\beta x], \tag{15}$$

2) kui $\alpha + i\beta$ on karakteristliku võrrandi k-kordne lahend,

$$Y = x^ke^{\alpha x}[U(x)\cos\beta x + V(x)\sin\beta x], \tag{16}$$

kus $U(x)$ ja $V(x)$ on polünoomid, mille aste ei ole kõrgem kui m.

Polünoomide $U(x)$ ja $V(x)$ kordajad leitakse määramata kordajate võtte abil.

Kui teist järku diferentsiaalvõrrandis

$$a_0y'' + a_1y' + a_0y = f(x) \tag{17}$$

$f(x)$ ei ole avaldise (14) kujuline, siis leitakse selle diferentsiaalvõrrandi erilahend nn. konstantide variatsiooni võtte abil. Selleks vaadeldakse võrrandile (17) vastava homogeense võrrandi üldlahendis $\bar{y} = C_1y_1 + C_2y_2$ esinevaid konstante niisuguste x funktsioonidena, et avaldis

$$y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 \tag{18}$$

oleks võrrandi (17) erilahendiks. Funktsioonide $C_1(x)$ ja $C_2(x)$ tuletised on määratavad süsteemist

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0, \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x). \end{cases} \tag{19}$$

Euleri diferentsiaalvõrrand

$$x^2y'' + a_1xy' + a_2y = f(x), \tag{20}$$

kus a_1 ja a_2 on konstandid, teisendub konstantsete kordajatega diferentsiaalvõrrandiks asendusega

$$x = e^t, \tag{21}$$

mille puhul

$$\frac{dy}{dx} = e^{-t}\frac{dy}{dt}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right). \tag{22}$$

Näiteid

I. *Leida diferentsiaalvõrrandi*

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

erilahend, mis vastab algtingimustele $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$.

Lahendus. On ilmne, et $\frac{dy}{dx} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + C$ ehk $\frac{dy}{dx} = \arcsin x + C$. Konstandi C leiame algtingimuste kohaselt võrrandist $1 = \arcsin 0 + C$, millest $C = 1$.

Seega

$$\frac{dy}{dx} = \arcsin x + 1,$$

järelikult

$$y = \int (\arcsin x + 1)\,dx + C$$

ehk

$$y = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + x + C.$$

Vastavalt antud algtingimustele saame C määrata võrrandist

$$-1 = 1 + C,$$

millest

$$C = -2.$$

Niisiis on antud diferentsiaalvõrrandi erilahend

$$y = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + x - 2.$$

II. *Leida tasapinnalised konstantse kõverusega jooned.*

Lahendus. Nagu teada, avaldub joone kõverus kujul $\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$. Seega on otsitava joone diferentsiaalvõrrandiks $\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = k$ ehk $k(1+y'^2)^{\frac{3}{2}} = y''$. Saadud võrrand kuulub tüüpi (1) ja teisendub asendusega $y' = p$, $y'' = \frac{dp}{dx}$ esimest järku diferentsiaalvõrrandiks

$$k(1+p^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{dp}{dx}$$

ehk

$$k\,dx = \frac{dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}. \qquad (*)$$

Kui $k \neq 0$, teisendub võrrand (*) kujule

$$x = \frac{1}{k}\int \frac{dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} + C_1.$$

Siin esineva integraali kui diferentsiaalbinoomi integreerimisel kasutame asendust $\frac{1}{p^2} + 1 = t^2$, mille kaudu saame

$$x - C_1 = \frac{p}{k(1+p^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Seega

$$p^2 = k^2(x - C_1)^2(1+p^2)$$

ehk

$$p = \pm \frac{k(x-C_1)}{\sqrt{1-k^2(x-C_1)^2}},$$

millest

$$y = \pm k \int \frac{x - C_1}{\sqrt{1-k^2(x-C_1)^2}}\,dx.$$

Kasutades integreerimisel muutujat $t = 1 - k^2(x-C_1)^2$, saame

$$y - C_2 = -\frac{1}{k}\sqrt{1-k^2(x-C_1)^2}$$

ehk

$$(x - C_1)^2 + (y - C_2)^2 = \frac{1}{k^2}.$$

Nagu teada, esitab see võrrand ringjoont.

Kui $k = 0$, siis teisendub võrrand (*) kujule $\frac{dp}{dx} = 0$. Seega $p = C$ ehk $\frac{dy}{dx} = C$, millest $y = C_1 x + C_2$. Saadud võrrand esitab sirgjoont.

Seega on tasapinnalisteks konstantse kõverusega joonteks ringjooned ja sirged.

III. *Leida diferentsiaalvõrrandi $y''y^3 = 1$ üldlahend.*

Lahendus. Antud võrrand kuulub tüüpi (3), mille tõttu asenduse $y' = p$ puhul tuleb muutujat p vaadelda y funktsioonina, nii et $y'' = p\frac{dp}{dy}$. Antud võrrand teisendub siis võrrandiks

$$py^3 \frac{dp}{dy} = 1 \quad \text{ehk} \quad p\,dp = \frac{dy}{y^3},$$

millest

$$p^2 = -\frac{1}{y^2} + C_1.$$

Seega

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{\sqrt{C_1 y^2 - 1}}{y} \quad \text{ehk} \quad \frac{y\,dy}{\sqrt{C_1 y^2 - 1}} = \pm dx,$$

millest

$$\pm (x + C_2) = \frac{1}{2C_1} \int \frac{2C_1 y\,dy}{\sqrt{C_1 y^2 - 1}}.$$

Kasutades integreerimisel asendust $C_1 y^2 - 1 = u$, saame

$$\pm (x + C_2) = \frac{1}{C_1} \sqrt{C_1 y^2 - 1}$$

ehk

$$\pm (C_1 x + C_2) = \sqrt{C_1 y^2 - 1},$$

millest

$$(C_1 x + C_2)^2 = C_1 y^2 - 1.$$

Niisiis on antud diferentsiaalvõrrandi üldlahendiks

$$C_1 y^2 - (C_1 x + C_2)^2 = 1.$$

IV. *Leida diferentsiaalvõrrandi $y'' = 2yy'$ erilahendid vastavalt algtingimustele*

$$y(1) = 3, \quad y'(1) = 9, \tag{a}$$
$$y(1) = 3, \quad y'(1) = 12, \tag{b}$$
$$y(1) = 3, \quad y'(1) = 5. \tag{c}$$

L a h e n d u s. Asendusega $y' = p$, $y'' = p\dfrac{dp}{dy}$ teisendub antud võrrand kujule

$$p\frac{dp}{dy} = 2py \quad \text{ehk} \quad \frac{dp}{dy} = 2y.$$

Seega $p = y^2 + C_1$ ehk

$$\frac{dy}{dx} = y^2 + C_1. \tag{*}$$

Niisiis

$$dx = \frac{dy}{y^2 + C_1},$$

millest

$$x = \int \frac{dy}{y^2 + C_1} + C_2. \tag{**}$$

Saadud võrrandis esinev üldintegraal esitab sisuliselt erinevaid funktsioone sõltuvalt konstandi C_1 arvulistest väärtustest.

Leiame nõutud erilahendid:

Vastavalt algtingimustele (a) saame võrrandist (*) $9 = 9 + C_1$ ehk $C_1 = 0$. Seega võrrandist (**)

$$x = \int \frac{dy}{y^2} + C_2 \quad \text{ehk} \quad x = -\frac{1}{y} + C_2,$$

millest vastavalt algtingimustele $1 = -\dfrac{1}{3} + C_2$ ehk $C_2 = \dfrac{4}{3}$.

Seega on erilahend juhul (a) $x = \dfrac{4}{3} - \dfrac{1}{y}$ ehk

$$y = \frac{3}{4 - 3x}.$$

Vastavalt algtingimustele (b) saame võrrandist (*) $12 = 9 + C_1$ ehk $C_1 = 3$. Seega võrrandist (**)

$$x = \int \frac{dy}{y^2 + 3} + C_2 \quad \text{ehk} \quad x = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctan} \frac{y}{\sqrt{3}} + C_2,$$

millest vastavalt algtingimustele $1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctan} \dfrac{3}{\sqrt{3}} + C_2$ ehk $C_2 = 1 - \dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}$. Seega on erilahend juhul (b)

$$x = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{y}{\sqrt{3}} + 1 - \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Vastavalt algtingimustele (c) saame võrrandist (*) $5 = 9 + C_1$ ehk $C_1 = -4$. Seega võrrandist (**)

$$x = \int \frac{dy}{y^2 - 4} + C_2 \quad \text{ehk} \quad x = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{y+2}{y-2} \right| + C_2,$$

millest vastavalt algtingimustele $1 = \frac{1}{2} \ln 5 + C_2$ ehk $C_2 = 1 - \ln \sqrt{5}$. Seega on erilahend juhul (c)

$$x = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{y+2}{y-2} \right| + 1 - \ln \sqrt{5}.$$

V. *Leida diferentsiaalvõrrandi*

$$2y'' + 5y' - 12y = 0$$

erilahend, mis vastab algtingimustele $y(0) = 7, \quad y'(0) = -6.$

Lahendus. Antud võrrand on konstantsete kordajatega homogeenne lineaarne teist järku diferentsiaalvõrrand (5).

Selle võrrandi karakteristlik võrrand (7) on

$$2\lambda^2 + 5\lambda - 12 = 0,$$

mille lahendid on $\lambda_1 = \frac{3}{2}$ ja $\lambda_2 = -4$.

Seega on antud diferentsiaalvõrrandi kaks lineaarselt sõltumatut erilahendit juhise (8) kohaselt $y_1 = e^{\frac{3}{2}x}$ ja $y_2 = e^{-4x}$.

Niisiis üldlahend (6) on $y = C_1 e^{\frac{3}{2}x} + C_2 e^{-4x}$.

Erilahendi saamiseks leiame kõigepealt üldlahendist tuletise

$$y' = \frac{3}{2} C_1 e^{\frac{3}{2}x} - 4C_2 e^{-4x}.$$

Algtingimuste kohaselt määrame konstandid C_1 ja C_2 võrrandisüsteemist

$$\begin{cases} C_1 e^{\frac{3}{2}\cdot 0} + C_2 e^{-4\cdot 0} = 7, \\ \frac{3}{2} C_1 e^{\frac{3}{2}\cdot 0} - 4C_2 e^{-4\cdot 0} = -6 \end{cases}$$

ehk

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 7 \\ 3C_1 - 8C_2 = -12, \end{cases}$$

millest $C_1 = 4$ ja $C_2 = 3$. Järelikult on nõutud erilahend

$$y = 4e^{\frac{3}{2}x} + 3e^{-4x}.$$

VI. *Leida diferentsiaalvõrrandi*

$$3(y'' + 3y) = 7y'$$

üldlahend.

Lahendus. Vaadeldavale diferentsiaalvõrrandile võib anda kuju

$$3y'' - 7y' + 9y = 0.$$

Selle võrrandi karakteristlik võrrand on $3\lambda^2 - 7\lambda + 9 = 0$, mille lahendid on $\lambda = \frac{7 \pm i\sqrt{59}}{6}$. Seega on antud diferentsiaalvõrrandi kaks lineaarselt sõltumatut erilahendit juhise (9) kohaselt

$$y_1 = e^{\frac{7}{6}x} \cos\frac{\sqrt{59}}{6}x \quad \text{ja} \quad y_2 = e^{\frac{7}{6}x} \sin\frac{\sqrt{59}}{6}x$$

ning üldlahend on

$$y = e^{\frac{7}{6}x}\left(C_1 \cos\frac{\sqrt{59}}{6}x + C_2 \sin\frac{\sqrt{59}}{6}x\right).$$

VII. *Leida diferentsiaalvõrrandi*

$$y^{(6)} - 9y^{(5)} + 27y^{(4)} - 27y^{(3)} = 0$$

üldlahend.

Lahendus. Antud diferentsiaalvõrrandi karakteristlik võrrand on

$$\lambda^6 - 9\lambda^5 + 27\lambda^4 - 27\lambda^3 = 0$$

ehk

$$\lambda^3(\lambda - 3)^3 = 0,$$

millest

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0, \quad \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = 3.$$

Seega on antud diferentsiaalvõrrandi lineaarselt sõltumatud erilahendid juhise (8) kohaselt

$$y_1 = 1, \quad y_2 = x, \quad y_3 = x^2, \quad y_4 = e^{3x}, \quad y_5 = xe^{3x} \quad \text{ja} \quad y_6 = x^2e^{3x}.$$

Üldlahend on niisiis

$$y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + e^{3x}(C_4 + C_5x + C_6x^2).$$

VIII. *Leida diferentsiaalvõrrandi*

$$y'' - 6y' + 5y = x^3 - 2x + 1 \qquad (*)$$

erilahend, mis vastab algtingimustele $y(0) = \frac{136}{625}$, $y'(0) = \frac{11}{125}$.

L a h e n d u s. Antud võrrand on konstantsete kordajatega teist järku lineaarne mittehomogeenne diferentsiaalvõrrand (10). Leiame kõigepealt tema üldlahendi. Selleks on juhise (11) kohaselt võrrandile (*) vastava homogeense diferentsiaalvõrrandi üldlahendi ja võrrandi (*) ühe erilahendi summa.

Võrrandile (*) vastav homogeenne võrrand on $y'' - 6y' + 5y = 0$, mille karakteristliku võrrandi lahendid on 1 ja 5 ning üldlahend $\bar{y} = C_1 e^x + C_2 e^{5x}$.

Võrrandi (*) parem pool on avaldise (14) kujuline, kusjuures $\alpha = 0$, $\beta = 0$ ja $m = 3$. Et $\alpha + i\beta = 0$ ei ole karakteristliku võrrandi lahend, siis otsime võrrandi (*) erilahendit kujul (15), mis antud juhul osutub avaldiseks

$$Y = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

kus a, b, c ja d on esialgu määramata konstandid.

Diferentseerides seda erilahendit, saame

$$Y' = 3ax^2 + 2bx + c,$$
$$Y'' = 6ax + 2b.$$

Määrame nüüd kordajad a, b, c ja d nii, et asendades võrrandis (*) muutujad y, y' ja y'' muutujate Y, Y' ja Y'' avaldistega, saaksime samasuse:

$$6ax + 2b - 6(3ax^2 + 2bx + c) + 5(ax^3 + bx^2 + cx + d) \equiv$$
$$\equiv x^3 - 2x + 1$$

ehk

$$5ax^3 + (5b - 18a)x^2 + (6a - 12b + 5c)x + (2b - 6c + 5d) \equiv$$
$$\equiv x^3 - 2x + 1.$$

Seega saame kordajate a, b, c ja d määramiseks võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} 5a = 1, \\ 5b - 18a = 0, \\ 6a - 12b + 5c = -2, \\ 2b - 6c + 5d = 1, \end{cases}$$

millest

$$a = \frac{1}{5}, \quad b = \frac{18}{25}, \quad c = \frac{136}{125} \quad \text{ja} \quad d = \frac{761}{625}.$$

Niisiis on antud diferentsiaalvõrrandi üks erilahend

$$Y = \frac{1}{5}x^3 + \frac{18}{25}x^2 + \frac{136}{125}x + \frac{761}{625}$$

ja üldlahend

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{5x} + \frac{1}{5} x^3 + \frac{18}{25} x^2 + \frac{136}{125} x + \frac{761}{625}.$$

Nüüd leiame selle erilahendi, mis vastab antud algtingimustele. Selleks diferentseerime üldlahendit:

$$y' = C_1 e^x + 5C_2 e^{5x} + \frac{3}{5} x^2 + \frac{36}{25} x + \frac{136}{125}.$$

Antud algtingimuste kohaselt saame seega konstantide C_1 ja C_2 määramiseks võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + \frac{761}{625} = \frac{136}{625}, \\ C_1 + 5C_2 + \frac{136}{125} = \frac{11}{125} \end{cases}$$

ehk

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = -1, \\ C_1 + 5C_2 = -1, \end{cases}$$

millest

$$C_1 = -1 \quad \text{ja} \quad C_2 = 0.$$

Seega on ülesandes nõutud erilahend

$$y = -e^x + \frac{1}{5} x^3 + \frac{18}{25} x^2 + \frac{136}{125} x + \frac{761}{625}.$$

IX. *Leida diferentsiaalvõrrandi*

$$y'' + y' = 3x^2$$

üldlahend.

L a h e n d u s. Antud võrrandile vastava homogeense diferentsiaalvõrrandi $y'' + y' = 0$ karakteristliku võrrandi lahendid on $\lambda_1 = 0$ ja $\lambda_2 = -1$ ja üldlahend järelikult $\bar{y} = C_1 + C_2 e^{-x}$.

Antud võrrandi parem pool on avaldise (14) kujuline, kusjuures $\alpha = 0$, $\beta = 0$ ja $m = 2$. Et $\alpha + i\beta = 0$ on karakteristliku võrrandi ühekordne lahend, siis otsime antud võrrandi erilahendit kujul (16), mis antud juhul osutub avaldiseks

$$Y = x(ax^2 + bx + c)$$

ehk

$$Y = ax^3 + bx^2 + cx.$$

Sellest

$$Y' = 3ax^2 + 2bx + c,$$
$$Y'' = 6ax + 2b.$$

Paigutades saadud avaldised antud võrrandisse, saame

$$6ax + 2b + 3ax^2 + 2bx + c \equiv 3x^2$$

ehk

$$3ax^2 + (6a + 2b)x + (2b + c) \equiv 3x^2.$$

Kordajate a, b ja c määramiseks saame niisiis võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} 3a = 3, \\ 6a + 2b = 0, \\ 2b + c = 0, \end{cases}$$

millest $a = 1$, $b = -3$ ja $c = 6$.

Seega on antud diferentsiaalvõrrandi üks erilahenditest

$$Y = x^3 - 3x^2 + 6x$$

ning üldlahend järelikult

$$y = C_1 + C_2e^{-x} + x^3 - 3x^2 + 6x.$$

X. *Leida diferentsiaalvõrrandi*

$$y'' - 6y' + 9y = 3e^{3x}$$

üldlahend.

L a h e n d u s. Antud diferentsiaalvõrrandile vastava homogeense võrrandi

$$y'' - 6y' + 9y = 0$$

karakteristliku võrrandi lahendid on $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$. Seega homogeense võrrandi üldlahend on

$$\bar{y} = e^{3x}(C_1 + C_2x).$$

Antud diferentsiaalvõrrandi parem pool on avaldise (14) kujuline, kusjuures $\alpha = 3$, $\beta = 0$ ja $m = 0$. Et $\alpha + i\beta = 3$ on karakteristliku võrrandi kahekordne lahend, siis otsime antud võrrandi erilahendit kujul (16), mis käesoleval juhul osutub avaldiseks

$$Y = ax^2e^{3x}.$$

Seega

$$Y' = ae^{3x}(2x + 3x^2),$$
$$Y'' = ae^{3x}(9x^2 + 12x + 2).$$

Konstandi a leidmiseks paigutame saadud avaldised antud võrrandisse; saame

$$ae^{3x}[9x^2 + 12x + 2 - 6(2x + 3x^2) + 9x^2] \equiv 3e^{3x}$$

ehk

$$2ae^{3x} \equiv 3e^{3x}, \quad \text{millest } a = \frac{3}{2}.$$

Seega on antud diferentsiaalvõrrandi üldlahend

$$y = e^{3x}(C_1 + C_2 x + \frac{3}{2} x^2).$$

XI. *Leida diferentsiaalvõrrandi*

$$y'' - 4y' + 4y = x \cos 2x$$

üldlahend.

Lahendus. Vastava homogeense diferentsiaalvõrrandi $y'' - 4y' + 4y = 0$ karakteristliku võrrandi lahendid on $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$. Seega on homogeense diferentsiaalvõrrandi üldlahend

$$\bar{y} = e^{2x}(C_1 + C_2 x).$$

Antud võrrandi parem pool on avaldise (14) kujuline, kusjuures $\alpha = 0$, $\beta = 2$ ja $m = 1$. Et $\alpha + i\beta = 2i$ ei ole karakteristliku võrrandi lahend, siis otsime antud võrrandi erilahendit kujul (15), mis käesoleval juhul osutub avaldiseks

$$Y = (ax + b) \cos 2x + (cx + d) \sin 2x.$$

Seega

$$Y' = (a + 2d + 2cx) \cos 2x + (c - 2b - 2ax) \sin 2x$$

ja

$$Y'' = (4c - 4b - 4ax) \cos 2x + (-4a - 4d - 2cx) \sin 2x.$$

Paigutades saadud avaldised antud diferentsiaalvõrrandisse, saame

$$[4(c - a - 2d) - 8cx] \cos 2x + [4(2b - a - c) + 8ax] \sin 2x \equiv \\ \equiv x \cos 2x.$$

Konstantide a, b, c ja d määramiseks saame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} 4(c - a - 2d) = 0, \\ -8c = 1, \\ 4(2b - a - c) = 0, \\ 8a = 0, \end{cases}$$

millest

$$a = 0, \quad b = -\frac{1}{16}, \quad c = -\frac{1}{8} \quad \text{ja} \quad d = -\frac{1}{16}.$$

Seega on antud diferentsiaalvõrrandi üks erilahend

$$Y = -\frac{1}{16} \cos 2x - \frac{2x + 1}{16} \sin 2x$$

ja järelikult üldlahend

$$y = e^{2x}(C_1 + C_2 x) - \frac{1}{16}[\cos 2x + (2x + 1) \sin 2x].$$

XII. *Leida diferentsiaalvõrrandi*

$$y'' - y' = \frac{e^{2x}}{\sqrt[3]{1+e^x}}$$

üldlahend.

L a h e n d u s. Antud võrrandile vastava homogeense diferentsiaalvõrrandi $y'' - y' = 0$ lineaarselt sõltumatud erilahendid on $y_1 = 1$, $y_2 = e^x$ ja üldlahend on $y = C_1 + C_2 e^x$.

Et antud võrrandi parem pool ei ole avaldise (14) kujuline, siis otsime erilahendit konstantide variatsiooni võtte (18) kohaselt kujul $y = C_1(x) + C_2(x) e^x$. Funktsioonid $C_1(x)$ ja $C_2(x)$ määrame süsteemist (19):

$$\begin{cases} C_1'(x) + C_2'(x) e^x = 0, \\ C_2'(x) e^x = \dfrac{e^{2x}}{\sqrt[3]{1+e^x}}. \end{cases}$$

Seega

$$C_2(x) = \int \frac{e^x}{\sqrt[3]{1+e^x}} dx = \frac{3}{2} (1 + e^x)^{\frac{2}{3}}$$

ja

$$C_1(x) = -\int \frac{e^{2x}}{\sqrt[3]{1+e^x}} dx.$$

Funktsiooni $C_1(x)$ avaldamiseks asendame $1 + e^x = u$, mille kaudu saame

$$C_1(x) = \frac{3}{2} (1 + e^x)^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{5} (1 + e^x)^{\frac{5}{3}} = \frac{3}{10} (1 + e^x)^{\frac{2}{3}} (3 - 2e^x).$$

Seega on antud võrrandi üks erilahenditest

$$Y = \frac{3}{10} (1 + e^x)^{\frac{2}{3}} (3 - 2e^x) + \frac{3}{2} e^x (1 + e^x)^{\frac{2}{3}}$$

ehk

$$Y = \frac{9}{10} (1 + e^x)^{\frac{5}{3}}$$

ja üldlahend

$$y = \frac{9}{10} (1 + e^x)^{\frac{5}{3}} + C_1 + C_2 e^x.$$

XIII. *Leida diferentsiaalvõrrandi*

$$x^2y'' + 7xy' + 13y = x$$

üldlahend.

L a h e n d u s. Antud võrrand on Euleri diferentsiaalvõrrand (20). Asendusega (21) $x = e^t$, mille puhul (22) järgi $y' = e^{-t}\frac{dy}{dt}$ ja $y'' = e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)$, teisendub antud diferentsiaalvõrrand kujule

$$e^{2t} \cdot e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) + 7e^t \cdot e^{-t}\frac{dy}{dt} + 13y = e^t$$

ehk

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 6\frac{dy}{dt} + 13y = e^t.$$

On kerge veenduda, et saadud konstantsete kordajatega mittehomogeense diferentsiaalvõrrandi üldlahend

$$y = e^{-3t}(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t) + \frac{e^t}{20}.$$

Asendades siin tagasi $e^t = x$ ehk $t = \ln x$, saame antud võrrandi üldlahendi

$$y = \frac{1}{x^3}(C_1 \cos 2\ln x + C_2 \sin 2\ln x) + \frac{x}{20}.$$

XIV. *Leida diferentsiaalvõrrandi*

$$yy'' - y'^2 = 12x^2y^2$$

üldlahend.

L a h e n d u s. Et antud diferentsiaalvõrrand ei kuulu ühtegi meile tuntud tüüpi, siis puuduvad meil üldised võtted tema lahendamiseks.

Ilmselt aga on $y = 0$ antud võrrandi erilahend, järelikult võime kõikide ülejäänud lahendite, $y \neq 0$, leidmiseks antud diferentsiaalvõrrandit jagada y^2-ga; saame

$$\frac{yy'' - y'^2}{y^2} = 12x^2. \qquad (*)$$

Saadud võrrandi üldlahendi leidmiseks võtame kasutusele uue muutuja

$$u = \frac{y'}{y}, \qquad (**)$$

millest

$$\frac{du}{dx}=\frac{y''y-y'^2}{y^2}.$$

Seega teisendub diferentsiaalvõrrand (*) võrrandiks

$$\frac{du}{dx}=12x^2 \quad \text{ehk} \quad du=12x^2\,dx,$$

mille üldlahend on $u=4x^3+C_1$, kus C_1 on meelevaldne konstant.

Asendades nüüd saadud üldlahendis muutuja u tema avaldisega (**), saame

$$4x^3+C_1=\frac{y'}{y}$$

ehk

$$\frac{dy}{y}=(4x^3+C_1)\,dx,$$

millest

$$\ln|y|=x^4+C_1x+C_2$$

ehk

$$|y|=e^{x^4+C_1x+C_2}$$

ehk

$$|y|=e^{C_2}e^{x^4+C_1x},$$

kus C_2 on meelevaldne konstant.

Et $e^{C_2}>0$, siis võime teda tähistada avaldisega $|C_2|$, kus $C_2\neq 0$.

Järelikult on võrrandi (*) üldlahend avaldatav kujul

$$|y|=|C_2|e^{x^4+C_1x}$$

ehk

$$y=C_2e^{x^4+C_1x},$$

kus $C_2\neq 0$.

Et saadud üldlahendiga on esitatud ka kõik antud diferentsiaalvõrrandi lahendid peale erilahendi $y=0$, mida aga saaks nimetatud üldlahendist $C_2=0$ puhul, siis on antud võrrandi üldlahend

$$y=C_2e^{x^4+C_1x},$$

kus C_1 ja C_2 on meelevaldsed konstandid.

XV. *Leida diferentsiaalvõrrandite süsteemi*

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} - 3y = \frac{dx}{dt} + x, \\ \frac{dy}{dt} + x = 0 \end{cases}$$

erilahend, mis vastab algtingimustele $x(0) = 4$ *ja* $y(0) = 0$.

L a h e n d u s. Käesoleva ülesande puhul tuleb leida kaks argumendi t funktsiooni $x(t)$ ja $y(t)$, mis rahuldavad antud diferentsiaalvõrrandeid ja algtingimusi.

Selleks peame tuletama antud võrrandeist ühe niisuguse diferentsiaalvõrrandi, mis sisaldab ainult ühte funktsiooni ja selle funktsiooni tuletisi.

Teisest võrrandist saame

$$x = -\frac{dy}{dt} \tag{*}$$

ning seda diferentseerides

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{d^2y}{dt^2}.$$

Asendades nüüd esimeses võrrandis x ja $\frac{dx}{dt}$ saadud avaldistega, saamegi soovitud võrrandi

$$\frac{dy}{dt} - 3y = -\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}$$

ehk

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} - 3y = 0.$$

On kerge veenduda, et selle võrrandi üldlahend on

$$y = C_1e^t + C_2e^{-3t}.$$

Funktsiooni $x(t)$ leiame, nagu näitab võrrand (*), diferentseerimise teel:

$$x = -(C_1e^t - 3C_2e^{-3t}).$$

Seega on antud diferentsiaalvõrrandite süsteemi üldlahend

$$\begin{aligned} x &= -C_1e^t + 3C_2e^{-3t}, \\ y &= C_1e^t + C_2e^{-3t}. \end{aligned}$$

Vastavalt antud algtingimustele saame nüüd üldlahendist tuletada võrrandisüsteemi konstantide C_1 ja C_2 määramiseks:

$$-C_1 + 3C_2 = 4, \quad C_1 + C_2 = 0,$$

millest

$$C_1 = -1 \quad \text{ja} \quad C_2 = 1.$$

Niisiis on nõutud erilahend

$$x = e^t + 3e^{-3t},$$
$$y = -e^t + e^{-3t}.$$

XVI. *Lahendada diferentsiaalvõrrandite süsteem*

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = y - t, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = x + 1. \end{cases}$$

L a h e n d u s. Diferentseerides antud süsteemi esimest võrrandit, saame $\frac{d^3x}{dt^3} = \frac{dy}{dt} - 1$ ning seda omakorda diferentseerides $\frac{d^4x}{dt^4} = \frac{d^2y}{dt^2}$. Asendades siin avaldise $\frac{d^2y}{dt^2}$ süsteemi teisest võrrandist saadud avaldisega $x + 1$, saame ühtainsat funktsiooni ja tema tuletist sisaldava võrrandi

$$\frac{d^4x}{dt^4} = x + 1 \quad \text{ehk} \quad \frac{d^4x}{dt^4} - x = 1.$$

Selle diferentsiaalvõrrandi üldlahend on

$$x = C_1e^t + C_2e^{-t} + C_3 \cos t + C_4 \sin \mathrm{t} - 1.$$

Seega on üks otsitavatest funktsioonidest leitud. Teise funktsiooni $y(t)$ leiame esimest funktsiooni diferentseerides, sest antud süsteemi esimese võrrandi järgi on $y = \frac{d^2x}{dt^2} + t$. Niisiis

$$\frac{dx}{dt} = C_1e^t - C_2e^{-t} - C_3 \sin t + C_4 \cos t,$$
$$\frac{d^2x}{dt^2} = C_1e^t + C_2e^{-t} - C_3 \cos t - C_4 \sin t$$

ja järelikult

$$y = C_1e^t + C_2e^{-t} - C_3 \cos t - C_4 \sin t + t.$$

Seega on antud võrrandisüsteemi üldlahend

$$x = C_1e^t + C_2e^{-t} + C_3 \cos t + C_4 \sin t - 1,$$
$$y = C_1e^t + C_2e^{-t} - C_3 \cos t - C_4 \sin t + t.$$

Teist järku mittetäielikud diferentsiaalvõrrandid

Ülesandeis **2066—2085** leida antud diferentsiaalvõrrandi üldlahend:

2066. $y'' = x^2 + \ln x.$

2067. $x \dfrac{d^2y}{dx^2} = 1 + x^2.$

2068. $y'' = x + \arctan x.$

2069. $xy'' = y'.$

2070. $x^2y'' = y'^2.$

2071. $(1 + x) \dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} = 0.$

2072. $xy'' + y' - 4x = 0.$

2073. $x^2y'' + xy' = 1.$

2074. $(1 + x^2) \dfrac{d^2y}{dx^2} + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = 0.$

2075. $\dfrac{d^2y}{dx^2} \dfrac{dy}{dx} = 1.$

2076. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = 0.$

2077. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -y.$

2078. $4\sqrt{y}y'' = 1.$

2079. $y \dfrac{d^2y}{dx^2} = \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2.$

2080. $y'' = 2\sqrt{y'}.$

2081. $y \dfrac{d^2y}{dx^2} = y^2 \dfrac{dy}{dx} + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2.$

2082. $y'' \tan y - 2y'^2 = 0.$

2083. $yy'' + y'^2 = y'.$

2084. $y \dfrac{d^2y}{dx^2} = 1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2.$

2085. $(1 - y)y'' + 2y'^2 = 0.$

Ülesandeis **2086—2093** leida diferentsiaalvõrrandi erilahend, mis rahuldab antud algtingimusi:

2086. $x \dfrac{d^2y}{dx^2} = 1, \; y(1) = 1, \; y'(1) = 1.$

2087. $y''(x - 1) = y', \; y(3) = 3, \; y'(3) = 2.$

2088. $y'' \cos^2 x = 1,\ y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \ln\sqrt{2},\ y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$

2089. $y'' - \frac{y'}{x} - \frac{x^2}{y'} = 0,\ y(2) = 0,\ y'(2) = 4.$

2090. $y'' = y' + 1,\ y(0) = -1,\ y'(0) = 2.$

2091. $y'' = e^{2y},\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$

2092. $y^3 y'' + 1 = 0,\ y(1) = 1,\ y'(1) = 0.$

2093. $y^3(y - y'') = 1,\ y(0) = \sqrt{2},\ y'(0) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

Teist järku lineaarsed konstantsete kordajatega diferentsiaalvõrrandid

Ülesandeis **2094—2105** leida antud homogeense diferentsiaalvõrrandi üldlahend:

2094. $y'' - 7y' + 12y = 0.$

2095. $2y'' + 3y' = 2y.$

2096. $y'' - 7y' = 0.$

2097. $3y'' - 4y' = 0.$

2098. $y'' = 4y' + y.$

2099. $2y'' - 3y' - 7y = 0.$

2100. $y'' + \frac{1}{2}y' + \frac{1}{16}y = 0.$

2101. $9y'' - 6y' + y = 0.$

2102. $y'' + 9y = 0.$

2103. $y'' + 7y' + 17y = 0.$

2104. $2y'' + 5y = 0.$

2105. $2y'' + 4y' + 5y = 0.$

Ülesandeis **2106—2111** leida diferentsiaalvõrrandi erilahend, mis rahuldab antud algtingimusi:

2106. $3y'' = 5y',\ y(0) = 2,\ y'(0) = \frac{5}{3}.$

2107. $3y'' - y' = 0,\ y(3) = 1,\ y'(3) = \frac{1}{3}.$

2108. $y'' - 6y' + 9y = 0,\ y(1) = 0,\ y'(1) = e^3.$

2109. $y'' = 2(3y' - 5y),\ y(0) = 1,\ y'(0) = 4.$

2110. $y'' = 5y - 4y',\ y(-1) = 0,\ y'(-1) = 1.$

2111. $y'' = 8y' - 25y,\ y\left(\frac{\pi}{6}\right) = e^{\frac{2\pi}{3}},\ y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0.$

Ülesandeis **2112—2135** leida antud mittehomogeense diferentsiaalvõrrandi üldlahend:

2112. $y'' - 7y' + 12y = x.$

2113. $y'' + y' = 8x^3 + 24x^2 - 10x.$

2114. $y'' - 3y' + 9x^2 + 6x - 13 = 0.$

2115. $y'' - 4y' - 5y = x^3 + 1.$

2116. $\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 2x + 3.$

2117. $y'' - 2y' - 3y = e^{-x}$.

2118. $y'' - 6y' + 13y = e^{-2x}$.

2119. $y'' + 3y' + 2y = 6e^{-5x}$.

2120. $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 4y = 2xe^{3x}$.

2121. $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 2y = 4e^{2x}$.

2122. $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = 3e^{-x}$.

2123. $7\frac{d^2y}{dx^2} + 6\frac{dy}{dx} + 5y = x \sin x$.

2124. $y'' - 7y' + 6y = \sin x$.

2125. $\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} - y = \sin x$.

2126. $y'' + 2y' + 5y = 2x \sin 2x$.

2127. $\frac{d^2y}{dx^2} + 9y = \sin 3x$.

2128. $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 4x \sin x$.

2129. $y'' + 2y' + y = x^2e^{-x} \cos x$.

2130. $y'' + 3y' + 2y = 2 + e^x$.

2131. $\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 3y = x + e^{2x}$.

2132. $\frac{d^2y}{dx^2} + 3y = \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x$.

2133. $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 2y = x^2e^{4x} + 2e^x$.

2134. $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 2x^3 - x + 2 + \cos x$.

2135. $y'' - 2y' + y = 1 + x + 2(3x^2 - 2)e^x$.

Ülesandeis **2136—2141** leida antud diferentsiaalvõrrandi üldlahend konstantide variatsiooni võtte abil:

2136. $y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{x^3}$.

2137. $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$.

2138. $y'' - y' = \frac{e^x}{3 - e^x}$.

2139. $y'' - y = \text{th}\, x$.

2140. $y'' + y = \tan x.$

2141. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x^2+1}.$

Ülesandeis **2142—2147** leida diferentsiaalvõrrandi erilahend, mis rahuldab antud algtingimusi:

2142. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^{-x}}{2}, \; y(0) = 0, \; y'(0) = 1.$

2143. $y'' - 3y' + 2y = e^{2x} \sin x, \; y(0) = 1, \; y'(0) = 0.$

2144. $y'' + y = 4x \cos 2x, \; y(0) = 1, \; y'(0) = 2.$

2145. $y'' + y' = \cos x + e^x, \; y(0) = 1, \; y'(0) = 0.$

2146. $y'' + 4y = \dfrac{1}{\sin 2x}, \; y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{4}, \; y'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\pi}{4}.$

2147. $y'' - 4y' + 5y = \dfrac{e^{2x}}{\cos x}, \; y(0) = 1, \; y'(0) = 2.$

Kõrgemat järku lineaarsed konstantsete kordajatega diferentsiaalvõrrandid

Ülesandeis **2148—2161** leida antud diferentsiaalvõrrandi üldlahend:

2148. $y''' - 3y' + 2y = 0.$

2149. $y''' - 5y'' + 17y' - 13y = 0.$

2150. $\dfrac{d^3y}{dx^3} + \dfrac{d^2y}{dx^2} - 5\dfrac{dy}{dx} + 3y = 0.$

2151. $\dfrac{d^4y}{dx^4} - 16y = 0.$

2152. $y^{\mathrm{IV}} - y'' - 2y = 0.$

2153. $y''' - y'' = x + 1.$

2154. $y^{\mathrm{IV}} - 4y = e^x.$

2155. $y''' + y'' = x^2.$

2156. $y''' - 3y' - 2y = \sin x + 2\cos x.$

2157. $y''' + 6y'' + 11y' + 6y = 6x^3 + 2x^2 + 1.$

2158. $y^{(4)} + 3y^{(3)} + 3y^{(2)} + y^{(1)} = e^x.$

2159. $y''' + y'' + y' + y = x^3 + 3x^2 + 6x + 6.$

2160. $y''' - 7y'' + 6y' = \sin x.$

2161. $y''' - 3y' + 2y = (18x + 12)e^x + 9e^{-x}.$

2162. Leida diferentsiaalvõrrandi

$$y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 2x + 3$$

erilahend, mis rahuldab algtingimusi

$$y(0) = -4, \; y'(0) = -1, \; y''(0) = 0.$$

Euleri diferentsiaalvõrrandid

Ülesandeis **2163—2170** leida antud diferentsiaalvõrrandi üldlahend:

2163. $x^2y'' + xy' + 4y = 0.$

2164. $x^2y'' + xy' - y = 0.$

2165. $x^2y'' - 5xy' + 3y = 0.$

2166. $x^2y'' + 5xy' + 8y = x.$

2167. $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 3x \frac{dy}{dx} + 4y = 1.$

2168. $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 3x \frac{dy}{dx} - 3y = x^2.$

2169. $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 4x \frac{dy}{dx} + 6y = x^5.$

2170. $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 3x \frac{dy}{dx} + y = \frac{6 \ln x}{x}.$

2171. Leida diferentsiaalvõrrandi

$$(1+x)^2y'' + (1+x)y' + y = 0$$

üldlahend asendusega $1 + x = e^t$.

Ülesandeis **2172—2176** leida diferentsiaalvõrrandi erilahend, mis rahuldab antud algtingimusi:

2172. $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0,\ y(1) = 0,\ y'(1) = 1.$

2173. $x^2y'' + 2xy' - 20y = 0,\ y(-1) = 1,\ y'(-1) = 5.$

2174. $x^2y'' - xy' - 3y = 0,\ y(2) = 8,\ y'(2) = 12.$

2175. $x^2y'' + 2xy' - 2y = x^2,\ y(-2) = 1,\ y'(-2) = 2.$

2176. $x^2y'' - 3xy' + 4y = \ln x,\ y(1) = \frac{1}{2},\ y'(1) = \frac{3}{4}.$

Mitmesuguseid diferentsiaalvõrrandeid

Ülesandeis **2177—2200** leida antud diferentsiaalvõrrandi üldlahend:

2177. $2y \frac{d^2y}{dx^2} = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2.$

2178. $y''' - 3y' + 2y = (18x + 12)e^x.$

2179. $6(y - y') = y''.$

2180. $y'' + y' - 2y = e^{2x}(x^2 - 1) + e^{5x}(x - 2) +$
$+ e^{-x}(x^3 - 2x + 3).$

2181. $\frac{d^2y}{dx^2} + y = e^{3x} - 2e^{2x} + e^x.$

2182. $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = x^2.$

2183. $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 7y = 0.$

2184. $\frac{d^2y}{dx^2} + k^2y = 0.$

2185. $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = \frac{e^x}{x^2}.$

2186. $y'' = \left(\frac{y'}{x}\right)^2.$

2187. $\frac{d^3y}{dx^3} - 8y = x^2.$

2188. $\frac{d^2y}{dx^2} - y = \frac{e^x}{2 - e^{2x}}.$

2189. $yy'' + y'^2 + 1 = 0.$

2190. $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = \frac{1}{e^{2x} - 1}.$

2191. $\frac{d^5y}{dx^5} - 4\frac{d^3y}{dx^3} = x.$

2192. $y'' - 4y' + 4y = x^3 - x + 2.$

2193. $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 2y = x^2e^{4x}.$

2194. $\frac{d^2y}{dx^2} = xe^x.$

2195. $\frac{d^3y}{dx^3} = x.$

2196. $3y'' = 2(2y' - y).$

2197. $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx}.$

2198. $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 7y = 0.$

2199. $\frac{d^2y}{dx^2} - y = \frac{2e^x}{e^x - 1}.$

2200. $y'' - 5y' + 6y = (12x - 7)e^{-x}.$

Ülesandeis **2201—2204** leida diferentsiaalvõrrandi erilahend, mis rahuldab antud algtingimusi:

2201. $y'' + y = -\cot^2 x,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3,\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$

2202. $y'' - y = 0,\ y(1) = 1,\ y'(1) = 0.$

2203. $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$.

2204. $y'' = \sec^2 y \tan y$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Diferentsiaalvõrrandite süsteemid

Ülesandeis **2205—2213** leida antud diferentsiaalvõrrandite süsteemi üldlahend:

2205. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - 2y, \\ \frac{dy}{dt} = 2x - y. \end{cases}$

2206. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = e^t + e^{-t} + x. \end{cases}$

2207. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = e^t - x + y, \\ \frac{dy}{dt} = e^t + x - y. \end{cases}$

2208. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = 2y, \\ \frac{dy}{dt} - \frac{dx}{dt} = 2x. \end{cases}$

2209. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{x^2}{y}, \\ \frac{dy}{dt} = x. \end{cases}$

2210. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = 2x - y, \\ \frac{dy}{dt} - x = 0. \end{cases}$

2211. $\begin{cases} 2\frac{dy}{dt} - 5\frac{dx}{dt} = 4x - y - e^{-t}, \\ \frac{dx}{dt} = 5e^{-t} - 8x + 3y. \end{cases}$

2212. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} + \frac{dz}{dt} = y, \\ \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} = z, \\ \frac{dy}{dt} - x = 2z. \end{cases}$

2213. $\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = y, \\ \frac{d^2y}{dt^2} = x. \end{cases}$

2214. Leida diferentsiaalvõrrandite süsteemi

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -x \end{cases}$$

erilahend, mis rahuldab algtingimusi $x(0) = 1$ ja $y(0) = 2$.

2215. Leida diferentsiaalvõrrandite süsteemi

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + y + z, \\ \frac{dy}{dt} = x + y + z, \\ \frac{dz}{dt} = x + y - z \end{cases}$$

lahend, mis rahuldab algtingimusi $x(0) = 1$, $y(0) = 0$, $z(0) = -1$.

2216. Leida joon, mille kõverus on võrdeline normaali tõusuga, kusjuures võrdetegur on k.

2217. Keha kaaluga P kg on riputatud vedru otsa, mille tõmme on võrdeline vedru pikenemisega pingevabast olekust alates, kusjuures pikenemisel 1 cm võrra on vedru tõmme C kg. Keha tõmmatakse a cm võrra tasakaalukohast allapoole ja lastakse siis vabaks. 1. Leida keha võnkumise seadus kahel juhul: a) kui õhutakistus ei tule arvesse, b) kui õhutakistus on võrdeline kiirusega (võrdetegur μ). 2. Kui suur on kummalgi juhul võnkumise periood?

2218. Laev, mille kaal on P tonni, sõidab merel kiirusega v km/h. Mingi rikke tõttu lakkavad masinad ühel hetkel töötamast ja laev liigub edasi hoo arvel. Leida, kui kaua liigub ja kui pika tee kulgeb laev seismajäämiseni, kui veetakistus on võrdeline laeva kiirusega (võrdetegur μ).

2219. Maa külgetõmbejõud on pöördvõrdeline keha kauguse ruuduga Maa keskpunktist ja on suunatud Maa keskpunkti poole. Leida kiirus, millega tuleks keha visata Maa pinnalt vertikaalselt üles nii, et ta jõuaks 1) Maa raadiuse kõrgusele; 2) Kuu orbiidini, kui Kuu orbiidiks lugeda ringjoon, mille keskpunktiks on Maa keskpunkt ja raadiuseks 60 Maa raadiust.

2220. Maa sees (kuni maapinnani) on Maa külgetõmbejõud võrdeline kaugusega Maa keskpunktist ja suunatud selle keskpunkti poole. Läbigu Maad diameetri sihis toru, millesse ühe otsa kaudu lastakse paigalseisust langeda mingi keha. Leida 1) keha liikumise seadus; 2) aeg, mis kulub tema tagasijõudmiseks lähtekohta; 3) keha kiirus Maa keskpunkti läbimisel.

2221. Rakett, mille algmass koos kütusega on m_0, hakkab paigalseisust liikuma väljavoolavate gaaside rõhumise tagajärjel. Olgu gaaside rõhumine x avaldatav valemiga $x = -c\frac{dm}{dt}$, kus c on põlemisel tekkinud gaaside väljavoolu kiirus ja m raketi ning järelejäänud kütuse mass ajahetkel t. Leida esiteks raketi kiirus v massi m funktsioonina ja teiseks raketi kiirus v_1 hetkel, mil pool tema algmassist on põlemisgaaside näol eemaldunud, kahel juhul: a) kui rakett liigub horisontaalselt (s. o. raketi raskus ei tule arvesse), b) kui rakett tõuseb vertikaalselt üles (s. o. raketi raskus mõjub liikumisele), kusjuures raketi massi muutumise kiirus olgu $\frac{dm}{dt} = -a = \text{const}$.

§ 19. MITMEKORDSED INTEGRAALID

Olgu funktsioon $f(x, y)$ määratud kinnises lõplikus piirkonnas D, olgu D jaotatud n osapiirkonnaks D_i ning olgu igas osapiirkonnas D_i valitud punkt $(x_i; y_i)$. Kui sõltumatult osapiirkondadeks jaotamise viisist ja punkti $(x_i; y_i)$ valikust eksisteerib piirväärtus

$$\lim_{\max d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \Delta S_i = \iint_D f(x, y)\, dx\, dy,$$

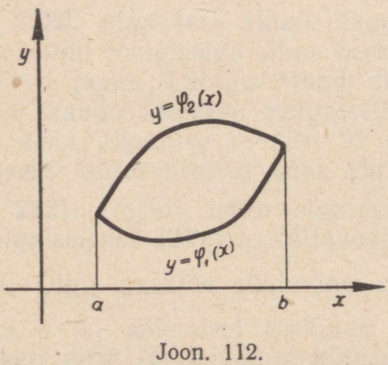
kus ΔS_i on osapiirkonna D_i pindala ja d_i selle osapiirkonna diameeter (suurim kaugus osapiirkonna kahe punkti vahel), siis nimetatakse seda piirväärtust funktsiooni $f(x, y)$ kahekordseks integraaliks üle piirkonna D ja tähistatakse paremal pool võrdusmärki seisva sümboliga.

Piirkonda D nimetatakse selle kahekordse integraali integreerimispiirkonnaks.

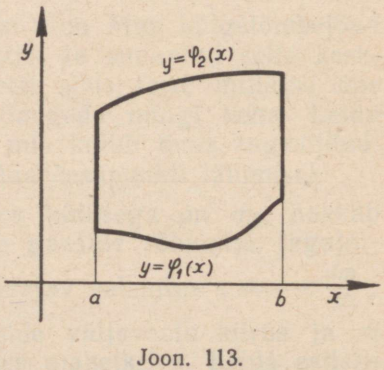
Kui integreerimispiirkond D on määratud võrratustega

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x), \tag{1}$$

kus $\varphi_1(x)$ ja $\varphi_2(x)$ on vahemikus $a \leqslant x \leqslant b$ pidevad ühesed funktsioonid (joon. 112 ja 113), siis on



Joon. 112.



Joon. 113.

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy. \tag{2}$$

Kahekordse integraali arvutamine toimub kahe ühekordse (tavalise) integraali arvutamise teel. Kahekordse integraali (2) puhul käsitatakse muutujat x algul konstandina ja avaldatakse sisemine integraal

$$\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy = F(x).$$

Edasi vaadeldakse x muutujana ja arvutatakse

$$\int_a^b F(x)\,dx.$$

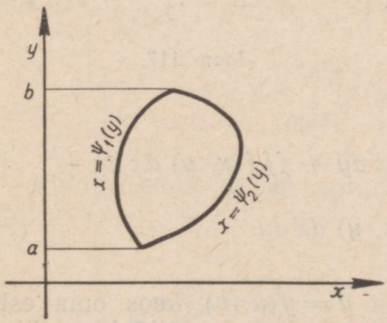
Saadud arv ongi kahekordse integraali (2) väärtuseks:

$$\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy = \int_a^b \Big[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy\Big]\,dx. \tag{3}$$

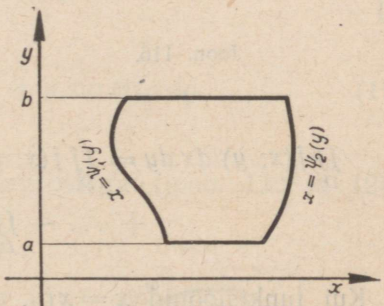
Kui integreerimispiirkond D on määratud võrratustega

$$a \leqslant y \leqslant b, \quad \psi_1(y) \leqslant x \leqslant \psi_2(y), \tag{4}$$

kus $\psi_1(y)$ ja $\psi_2(y)$ on vahemikus $a \leqslant y \leqslant b$ pidevad ühesed funktsioonid (joon. 114 ja 115), siis on



Joon. 114.



Joon. 115.

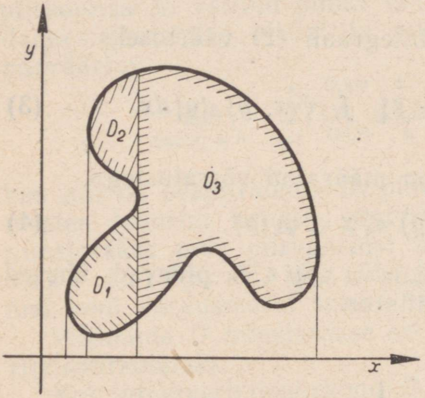
$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \int_a^b dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\,dx. \tag{5}$$

Integreerimine toimub jälle kahe ühekordse integraali kaudu:

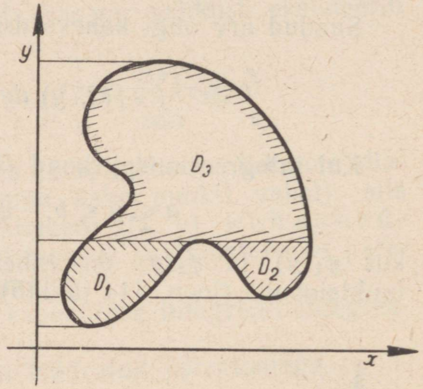
$$\int_a^b dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\, dx = \int_a^b \Big[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\, dx \Big] dy, \tag{6}$$

kusjuures sisemise integraali puhul käsitatakse muutujat y konstandina.

Kui integreerimispiirkond D ei rahulda ei tingimusi (1) ega ka tingimusi (4), siis jaotatakse ta ühe koordinaatteljega paralleelsete sirgete abil niisugusteks osapiirkondadeks $D_1, D_2, \ldots, D_n$, milledes on täidetud kas tingimused (1) või tingimused (4). Kahekordne integraal üle piirkonna D võrdub siis üle osapiirkondade võetud kahekordsete integraalide summaga (joon. 116 ja 117):



Joon. 116.



Joon. 117.

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \iint_{D_1} f(x, y)\, dx\, dy + \iint_{D_2} f(x, y)\, dx\, dy + \\ + \ldots + \iint_{D_n} f(x, y)\, dx\, dy. \tag{7}$$

Kui funktsioonid $x = x(u, v)$ ja $y = y(u, v)$ koos oma esimest järku osatuletistega on mingis uv-tasapinna lõplikus kinnises piirkonnas D' pidevad ja määravad üksühese vastavuse piirkonna D' ja xy-tasapinna piirkonna D punktide vahel ning kui jakobiaan

$$J = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0, \text{ kui } (u; v) \in D', \tag{8}$$

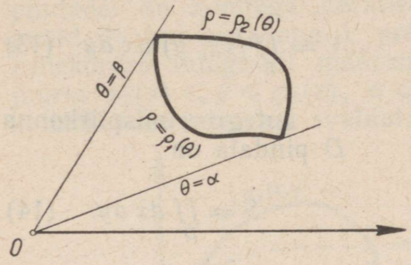
siis

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \iint_{D'} f[x(u, v), y(u, v)]\, |J|\, du\, dv. \qquad (9)$$

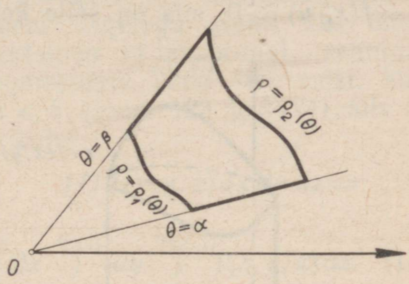
Üleminekul polaarkoordinaatidele $x = \varrho \cos \Theta$, $y = \varrho \sin \Theta$ saab see seos kuju

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \iint_{D'} f(\varrho \cos \Theta, \varrho \sin \Theta)\, \varrho\, d\varrho\, d\Theta. \qquad (10)$$

Kui piirkond D' on antud võrratustega (joon. 118 ja 119)



Joon. 118.



Joon. 119.

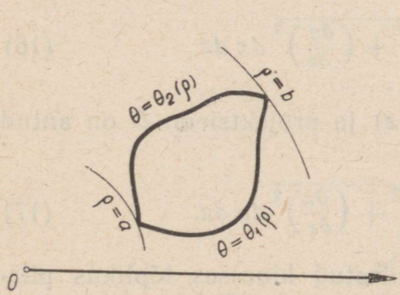
$$\alpha \leqslant \Theta \leqslant \beta \text{ ja } \varrho_1(\Theta) \leqslant \varrho \leqslant \varrho_2(\Theta),$$

siis

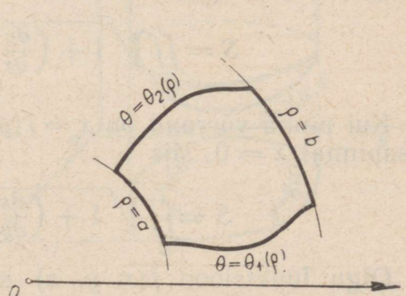
$$\iint_{D'} f(\varrho \cos \Theta, \varrho \sin \Theta)\, \varrho\, d\varrho\, d\Theta =$$

$$= \int_\alpha^\beta d\Theta \int_{\varrho_1(\Theta)}^{\varrho_2(\Theta)} f(\varrho \cos \Theta, \varrho \sin \Theta)\, \varrho\, d\varrho. \qquad (11)$$

Kui piirkond D' on antud võrratustega (joon. 120 ja 121)



Joon. 120.



Joon. 121.

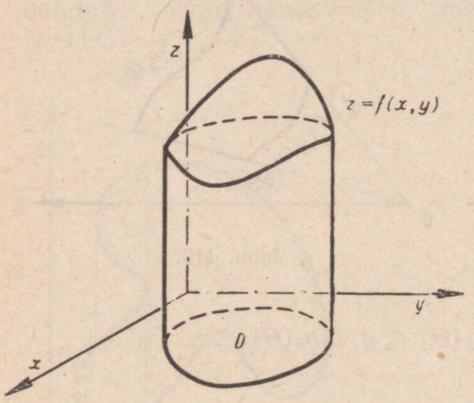
$$a \leqslant \varrho \leqslant b \text{ ja } \Theta_1(\varrho) \leqslant \Theta \leqslant \Theta_2(\varrho),$$

siis

$$\iint_{D'} f(\varrho\cos\Theta,\ \varrho\sin\Theta)\,\varrho\,d\varrho\,d\Theta =$$

$$= \int_a^b d\varrho \int_{\Theta_1(\varrho)}^{\Theta_2(\varrho)} f(\varrho\cos\Theta,\ \varrho\sin\Theta)\,\varrho\,d\Theta. \qquad (12)$$

Kui keha põhjaks on piirkond D, külgpinnaks põhjaga perpendikulaarse moodustajaga silinderpind ja ülemiseks pinnaks $z = f(x, y) > 0$, siis on selle keha ruumala (joon. 122)



Joon. 122.

$$V = \iint_D f(x, y)\,dx\,dy. \qquad (13)$$

Integreerimispiirkonna D pindala on

$$S = \iint_D dx\,dy. \qquad (14)$$

Kui pinna $z = f(x, y)$ mingi lõpliku tüki projektsioon tasapinnal $z = 0$ on D, kusjuures funktsioon $f(x, y)$ koos oma esimest järku osatuletistega on pidev selles kinnises piirkonnas D, siis selle pinnatüki pindala S avaldub kujul

$$S = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy. \qquad (15)$$

Kui pinna võrrand on $y = f(x, z)$ ja projektsioon D on antud tasapinnal $y = 0$, siis

$$S = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\,dx\,dz. \qquad (16)$$

Kui pinna võrrand on $x = f(y, z)$ ja projektsioon D on antud tasapinnal $x = 0$, siis

$$S = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\,dy\,dz. \qquad (17)$$

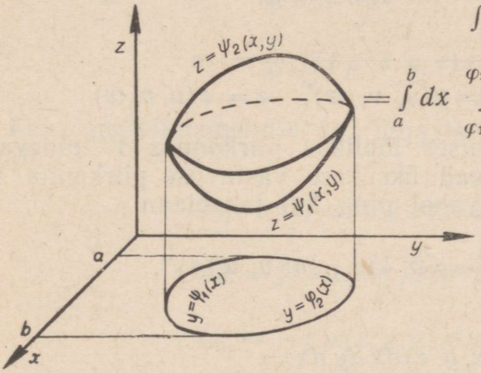
Olgu funktsioon $f(x, y, z)$ määratud kinnises lõplikus piirkonnas V, olgu V jaotatud n osapiirkonnaks V_i ning olgu igas osapiirkonnas V_i võetud punkt $(x_i;\ y_i;\ z_i)$.

Kui eksisteerib piirväärtus

$$\lim_{\max d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i,\ y_i,\ z_i)\Delta V_i = \iiint_V f(x,\ y,\ z)\,dx\,dy\,dz,$$

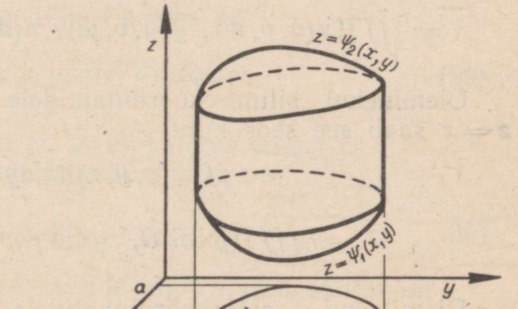
kus ΔV_i on osapiirkonna V_i ruumala ja d_i selle osapiirkonna diameeter, siis nimetatakse seda piirväärtust funktsiooni $f(x,\ y,\ z)$ kolmekordseks integraaliks üle piirkonna V ja tähistatakse paremal pool võrdusmärki seisva sümboliga.

Kui integreerimispiirkond V on alt piiratud pinnaga $z = \psi_1(x, y)$ ja ülalt pinnaga $z = \psi_2(x, y)$, kusjuures nendel pindadel on z-teljega paralleelsete sirgetega ainult üks ühine punkt, ja kui piirkonna V projektsioon xy-tasapinnal rahuldab kahekordse integraali määramispiirkonna kõiki tingimusi, kusjuures $\varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$ (joon. 123 ja 124), siis on kolmekordne integraal avaldatav kujul



$$\iiint_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x, y, z)\,dz. \quad (18)$$

Joon. 123.



Joon. 124.

Kolmekordse integraali (18) arvutamiseks vaadeldakse algul muutujaid x ja y konstantidena ja avaldatakse ühekordne integraal

$$\int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x, y, z)\,dz = F(x, y)$$

ning siis kahekordne integraal

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} F(x, y)\,dy,$$

mis ongi kolmekordse integraali (18) väärtuseks:

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x, y, z)\,dz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left[\int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x, y, z)\,dz\right] dy. \quad (19)$$

Kui funktsioonid

$$x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w)$$

on mingis uvw-ruumi kinnises lõplikus piirkonnas V' pidevalt diferentseeruvad ja määravad üksühese vastavuse piirkonna V' ja xyz-ruumi piirkonna V vahel ning kui jakobiaan

$$J = \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} \neq 0, \text{ kui } (u; v; w) \in V',$$

siis

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \iiint\limits_{V'} f[x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)] \cdot |J|\,du\,dv\,dw. \quad (20)$$

Üleminekul silinderkoordinaatidele $x = \varrho \cos\Theta$, $y = \varrho \sin\Theta$, $z = z$ saab see seos kuju

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \iiint\limits_{V'} f(\varrho\cos\Theta, \varrho\sin\Theta, z)\,\varrho\,d\varrho\,d\Theta\,dz. \quad (21)$$

Üleminekul sfäärkoordinaatidele $x = r\cos\varphi\sin\psi$, $y = r\sin\varphi\sin\psi$, $z = r\cos\psi$ kehtib seos

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \iiint\limits_{V'} f(r\cos\varphi\sin\psi, r\sin\varphi\sin\psi, r\cos\psi)\,r^2\sin\psi\,d\psi\,d\varphi\,dr. \quad (22)$$

Integreerimispiirkonna ruumala on

$$V = \iiint_V dx\,dy\,dz. \tag{23}$$

Kui keha tihedus punktis $(x; y; z)$ on $\mu = \mu(x, y, z)$, siis keha mass

$$M = \iiint_V \mu(x, y, z)\,dx\,dy\,dz, \tag{24}$$

kus V on antud keha.

Keha raskuskeskme koordinaadid $(x_0; y_0; z_0)$ on antud valemitega

$$x_0 = \frac{1}{M} \iiint_V \mu(x, y, z)\,x\,dx\,dy\,dz, \tag{25}$$

$$y_0 = \frac{1}{M} \iiint_V \mu(x, y, z)\,y\,dx\,dy\,dz, \tag{26}$$

$$z_0 = \frac{1}{M} \iiint_V \mu(x, y, z)\,z\,dx\,dy\,dz. \tag{27}$$

Keha inertsimomendid koordinaattasapindade suhtes on vastavalt

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \iiint_V \mu(x, y, z)\,z^2\,dx\,dy\,dz, \\ I_{xz} &= \iiint_V \mu(x, y, z)\,y^2\,dx\,dy\,dz, \\ I_{yz} &= \iiint_V \mu(x, y, z)\,x^2\,dx\,dy\,dz. \end{aligned} \tag{28}$$

Keha inertsimoment mingi telje l suhtes on

$$I_l = \iiint_V \mu(x, y, z)\,r^2\,dx\,dy\,dz, \tag{29}$$

kus r on keha jooksva punkti $(x; y; z)$ kaugus teljest l.

Inertsimomendid koordinaattelgede suhtes on

$$I_x = I_{xy} + I_{xz}, \quad I_y = I_{yx} + I_{yz}, \quad I_z = I_{zx} + I_{zy}. \tag{30}$$

Keha inertsimoment koordinaatide alguspunkti suhtes on

$$I_0 = \iiint_V \mu(x, y, z)\,(x^2 + y^2 + z^2)\,dx\,dy\,dz. \tag{31}$$

Näiteid

I. *Arvutada kahekordne integraal*

$$I=\int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_{1-\sqrt{2x-x^2}}^{1+\sqrt{2x-x^2}} \frac{xy}{\sqrt{2-x}}\,dy.$$

Lahendus. Valemi (3) kohaselt tuleb kõigepealt avaldada ühekordne integraal

$$\int_{1-\sqrt{2x-x^2}}^{1+\sqrt{2x-x^2}} \frac{xy}{\sqrt{2-x}}\,dy.$$

Selles integraalis on integreerimismuutujaks y ning muutujat x vaadeldakse konstandina. Seega

$$\int_{1-\sqrt{2x-x^2}}^{1+\sqrt{2x-x^2}} \frac{xy}{\sqrt{2-x}}\,dy=\frac{x}{\sqrt{2-x}}\int_{1-\sqrt{2x-x^2}}^{1+\sqrt{2x-x^2}} y\,dy=\frac{x}{2\sqrt{2-x}}\left[y^2\right]_{1-\sqrt{2x-x^2}}^{1+\sqrt{2x-x^2}}=$$

$$=\frac{x}{2\sqrt{2-x}}\left[1+2\sqrt{2x-x^2}+2x-x^2-1+2\sqrt{2x-x^2}-2x+x^2\right]=$$

$$=\frac{2x}{\sqrt{2-x}}\sqrt{x(2-x)}=2x^{\frac{3}{2}}.$$

Järelikult on antud kahekordne integraal

$$I=\int_0^{\frac{1}{2}} 2x^{\frac{3}{2}}\,dx=\left[2\cdot\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{10}\approx 0{,}1414.$$

II. *Joonestada integreerimispiirkond ja määrata rajad kahekordses integraalis* $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$, *kui* D *on antud võrratustega*

$$-2\leqslant y\leqslant 2,\quad \frac{y^2-4}{2}\leqslant x\leqslant 0.$$

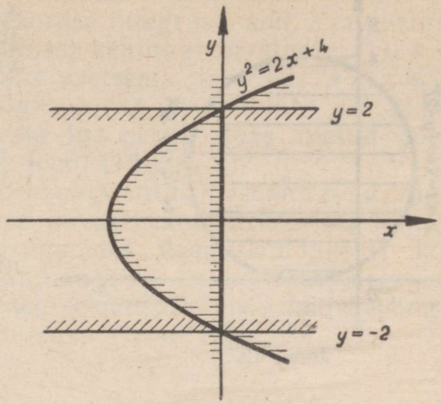
Lahendus. Esimesest võrratusest järeldub, et integreerimispiirkond asetseb kahe paralleelse sirge $y=-2$ ja $y=2$ vahelises ribas. Teine võrratus näitab, et integreerimispiirkond asetseb paraboolist $y^2=2x+4$ paremal ja y-teljest vasakul (joon. 125).

Integreerimispiirkonna ulatuses on y minimaalne väärtus -2 ja maksimaalne väärtus 2, kusjuures sirglõikudel $y=\text{const}$

muutub x selles piirkonnas väärtuselt $\frac{y^2-4}{2}$ väärtuseni 0. Seega on valemi (5) kohaselt

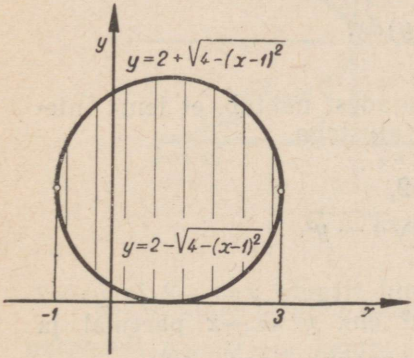
$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_{-2}^{2} dy \int_{\frac{y^2-4}{2}}^{0} f(x, y)\,dx.$$



Joon. 125.

III. *Joonestada integreerimispiirkond ja määrata rajad kahekordses integraalis* $\iint_D f(x, y)\,dx\,dy$, *kui D on antud võrratustega* $(x-1)^2 + (y-2)^2 \leqslant 4$.



Joon. 126.

L a h e n d u s. Nagu teada, esitab võrrand $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$ ringjoont, mille keskpunkt on (1; 2) ja raadius 2, antud võrratus aga selle ringjoonega piiratud pinnatükki.

Integraali rajad võib määrata kahel viisil.

a) Nagu nähtub jooniselt 126, on integreerimispiirkond alt piiratud joonega $y = 2 - \sqrt{4-(x-1)^2}$ ja ülalt joonega $y = 2 + \sqrt{4-(x-1)^2}$, kusjuures muutuja x omandab väärtusi -1 kuni 3.

Seega on integreerimispiirkonnas

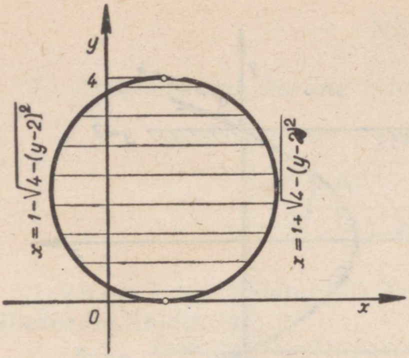
$$-1 \leqslant x \leqslant 3,$$

$$2 - \sqrt{4-(x-1)^2} \leqslant y \leqslant 2 + \sqrt{4-(x-1)^2}$$

ja valemi (2) kohaselt

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \int_{-1}^{3} dx \int_{2-\sqrt{4-(x-1)^2}}^{2+\sqrt{4-(x-1)^2}} f(x, y)\,dy.$$

b) Joonise 127 järgi on integreerimispiirkond vasakult piiratud kaarega $x = 1 - \sqrt{4-(y-2)^2}$ ja paremalt kaarega



Joon. 127.

$x = 1 + \sqrt{4 - (y-2)^2}$, kusjuures y muutub väärtuselt 0 väärtuseni 4.

Seega on

$$0 \leqslant y \leqslant 4,$$
$$1 - \sqrt{4-(y-2)^2} \leqslant x \leqslant 1 + \sqrt{4-(y-2)^2}$$

ning valemi (5) kohaselt

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy = \int_0^4 dy \int_{1-\sqrt{4-(y-2)^2}}^{1+\sqrt{4-(y-2)^2}} f(x, y)\,dx.$$

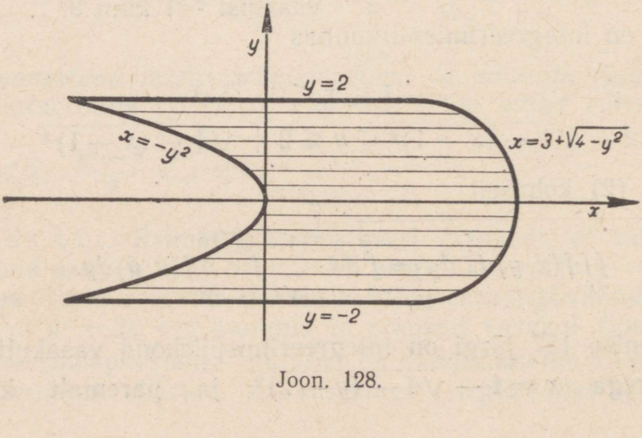
IV. *Muuta integreerimise järjekord kahekordses integraalis*

$$\int_{-2}^{2} dy \int_{-y^2}^{3+\sqrt{4-y^2}} f(x, y)\,dx.$$

L a h e n d u s. Antud integraali rajadest nähtub, et tema integreerimispiirkond on määratud võrratustega

$$-2 \leqslant y \leqslant 2,$$
$$-y^2 \leqslant x \leqslant 3 + \sqrt{4 - y^2}.$$

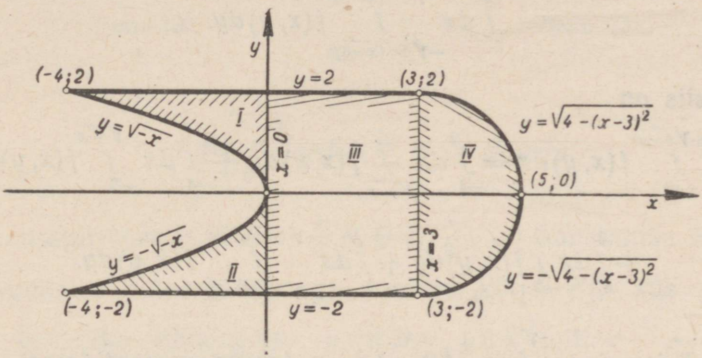
Seega asetseb integreerimispiirkond sirgete $y = -2$ ja $y = 2$ vahelises ribas paraboolist $x = -y^2$ ehk $y^2 = -x$ paremal ja ringjoone kaarest $x = 3 + \sqrt{4 - y^2}$ vasakul (joon. 128).



Joon. 128.

Kui antud integraali oleks võimalik vastupidises integreerimisjärjekorras esitada ühe kahekordse integraali abil, siis peaksid kogu integreerimispiirkonna ulatuses kehtima võrratused (1), s. o. kogu integreerimispiirkond peaks asetsema püstribas $a \leqslant x \leqslant b$, kusjuures alt piiraks teda joon $y=\varphi_1(x)$ ja ülalt joon $y=\varphi_2(x)$ ning nendel joontel peaks olema iga selles ribas võetud püstsirgega üksainus lõikepunkt (vt. joon. 112 ja 113).

Nagu jooniselt 128 näha, ei rahulda antud piirkond neid tingimusi. Sellepärast peame jaotama integreerimispiirkonna y-teljega paralleelsete sirgete abil niisugusteks osapiirkondadeks, kus tingimused (1) on täidetud. Antud juhul on nendeks sirgeteks $x=0$ ja $x=3$, mis jaotavad integreerimispiirkonna neljaks tingimusi (1) rahuldavaks osapiirkonnaks (joon. 129).



Joon. 129.

I osapiirkond asetseb püstribas $-4 \leqslant x \leqslant 0$ ja on alt piiratud parabooli $y=\sqrt{-x}$ kaarega ning ülalt sirgega $y=2$. Seega on I osapiirkond määratud võrratustega $\sqrt{-x} \leqslant y \leqslant 2$, $-4 \leqslant x \leqslant 0$ ja kahekordne integraal üle selle osapiirkonna on

$$\int_{-4}^{0} dx \int_{\sqrt{-x}}^{2} f(x, y)\, dy.$$

II osapiirkond asetseb samas püstribas, kuid on alt piiratud sirgega $y=-2$ ja ülalt kaarega $y=-\sqrt{-x}$. Niisiis on see osapiirkond määratud võrratustega $-2 \leqslant y \leqslant -\sqrt{-x}$, $-4 \leqslant x \leqslant 0$ ja kahekordne integraal üle selle osapiirkonna on

$$\int_{-4}^{0} dx \int_{-2}^{-\sqrt{-x}} f(x, y)\, dy.$$

III osapiirkond on määratud võrratustega $-2 \leqslant y \leqslant 2$, $0 \leqslant x \leqslant 3$ ja kahekordne integraal üle selle osapiirkonna on

$$\int_0^3 dx \int_{-2}^2 f(x, y)\, dy.$$

IV osapiirkond on poolring, mis asub püstribas $3 \leqslant x \leqslant 5$ ja on alt piiratud ringjoone kaarega $y = -\sqrt{4-(x-3)^2}$ ning ülalt sama ringjoone kaarega $y = \sqrt{4-(x-3)^2}$. Järelikult on IV osapiirkond määratud võrratustega $-\sqrt{4-(x-3)^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{4-(x-3)^2}$, $3 \leqslant x \leqslant 5$ ja kahekordne integraal üle selle osapiirkonna on

$$\int_3^5 dx \int_{-\sqrt{4-(x-3)^2}}^{\sqrt{4-(x-3)^2}} f(x, y)\, dy.$$

Niisiis on

$$\int_{-2}^2 dy \int_{-y^2}^{3+\sqrt{4-y^2}} f(x, y)\, dx = \int_{-4}^0 dx \int_{\sqrt{-x}}^2 f(x, y)\, dy + \int_{-4}^0 dx \int_{-2}^{-\sqrt{-x}} f(x, y)\, dy +$$

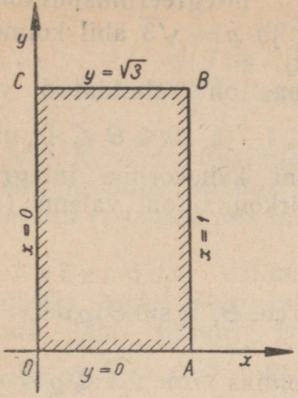
$$+ \int_0^3 dx \int_{-2}^2 f(x, y)\, dy + \int_3^5 dx \int_{-\sqrt{4-(x-3)^2}}^{\sqrt{4-(x-3)^2}} f(x, y)\, dy.$$

V. *Teisendada* $\int_0^{\sqrt{3}} dy \int_0^1 f(x, y)\, dx$ *polaarkoordinaatidesse.*

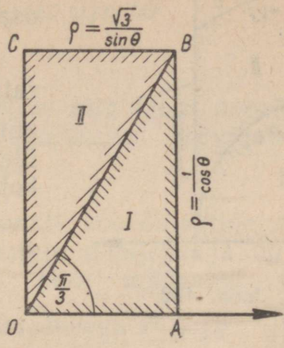
L a h e n d u s. Integreerimispiirkond rahuldab võrratusi $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant \sqrt{3}$. Niisiis on integreerimispiirkond ristkülik (joon. 130). Üleminekul polaarkoordinaatidele teisendub antud integraal valemi (10) kohaselt, kusjuures sõltuvalt integreerimise järjekorrast võib integraalide rajad määrata kahel viisil.

a) Jaotame integreerimispiirkonna koordinaatide alguspunktist lähtuva diagonaali abil kaheks osapiirkonnaks (joon. 131).

On kerge veenduda, et I osapiirkonnas $0 \leqslant \Theta \leqslant \frac{\pi}{3}$. Konstantse Θ puhul osutuvad poolusest kõige kaugemal asetsevateks punktideks külje AB punktid, millede puhul $x = 1$ ehk polaarkoordinaatides $\varrho \cos \Theta = 1$, millest $\varrho = \frac{1}{\cos \Theta}$. Seega on I osapiirkonnas rahuldatud võrratused $0 \leqslant \Theta \leqslant \frac{\pi}{3}$ ja $0 \leqslant \varrho \leqslant \frac{1}{\cos \Theta}$ ja funktsiooni $f(x, y)$ kahekordne integraal üle selle osapiirkonna on valemi (11) kohaselt



Joon. 130.



Joon. 131.

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} d\Theta \int_{0}^{\frac{1}{\cos\Theta}} f(\varrho\cos\Theta,\ \varrho\sin\Theta)\varrho\, d\varrho.$$

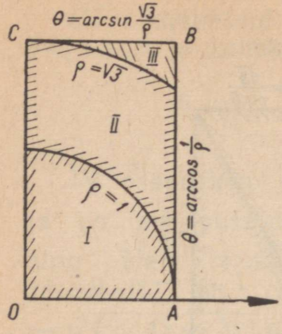
II osapiirkonnas, kus $\frac{\pi}{3}\leqslant\Theta\leqslant\frac{\pi}{2}$, on konstantse Θ puhul maksimaalse polaarkaugusega punktid küljel BC, kus $y=\sqrt{3}$ ehk polaarkoordinaatides $\varrho\sin\Theta=\sqrt{3}$, millest $\varrho=\frac{\sqrt{3}}{\sin\Theta}$. Niisiis on II osapiirkonnas rahuldatud võrratused $\frac{\pi}{3}\leqslant\Theta\leqslant\frac{\pi}{2}$ ja $0\leqslant\varrho\leqslant\frac{\sqrt{3}}{\sin\Theta}$. Seega on funktsiooni $f(x, y)$ kahekordne integraal üle selle osapiirkonna

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} d\Theta \int_{0}^{\frac{\sqrt{3}}{\sin\Theta}} f(\varrho\cos\Theta,\ \varrho\sin\Theta)\varrho\, d\varrho.$$

Niisiis on

$$\int_{0}^{\sqrt{3}} dy \int_{0}^{1} f(x, y)\,dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} d\Theta \int_{0}^{\frac{1}{\cos\Theta}} f(\varrho\cos\Theta,\ \varrho\sin\Theta)\varrho\, d\varrho +$$

$$+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} d\Theta \int_{0}^{\frac{\sqrt{3}}{\sin\Theta}} f(\varrho\cos\Theta,\ \varrho\sin\Theta)\varrho\, d\varrho.$$



Joon. 132.

b) Jaotame integreerimispiirkonna ringjoonte $\varrho = 1$ ja $\varrho = \sqrt{3}$ abil kolmeks osaks (joon. 132).

I osapiirkonnas on rahuldatud võrratused $0 \leqslant \varrho \leqslant 1$ ja $0 \leqslant \Theta \leqslant \frac{\pi}{2}$ ning antud funktsiooni kahekordne integraal üle selle osapiirkonna on valemi (12) kohaselt

$$\int_0^1 d\varrho \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\varrho \cos \Theta, \ \varrho \sin \Theta) \varrho \, d\Theta .$$

II osapiirkonnas on $1 \leqslant \varrho \leqslant \sqrt{3}$, polaarnurk Θ aga muutub joonel $\varrho = \text{const}$ väärtuselt, mis tal on ristküliku küljel AB, kus $\varrho \cos \Theta = 1$ ehk $\Theta = \arccos \frac{1}{\varrho}$, väärtuseni $\frac{\pi}{2}$; seega on kahekordne integraal selles piirkonna osas

$$\int_1^{\sqrt{3}} d\varrho \int_{\arccos \frac{1}{\varrho}}^{\frac{\pi}{2}} f(\varrho \cos \Theta, \ \varrho \sin \Theta) \varrho \, d\Theta .$$

III osapiirkonna punktidest on ristküliku tipul B kõige suurem polaarkaugus, kusjuures $\varrho_B = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$. Niisiis on $\sqrt{3} \leqslant \varrho \leqslant 2$. Polaarnurk aga muutub väärtuselt $\arccos \frac{1}{\varrho}$ väärtuseni, mis tal on ristküliku küljel BC, s. o. väärtuseni $\Theta = \arcsin \frac{\sqrt{3}}{\varrho}$. Järelikult on kahekordne integraal III osapiirkonnas

$$\int_{\sqrt{3}}^{2} d\varrho \int_{\arccos \frac{1}{\varrho}}^{\arcsin \frac{\sqrt{3}}{\varrho}} f(\varrho \cos \Theta, \ \varrho \sin \Theta) \varrho \, d\Theta .$$

Seega on

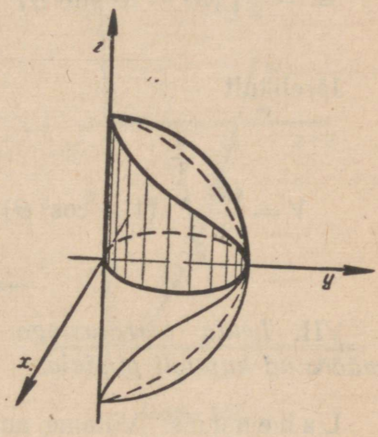
$$\int_0^{\sqrt{3}} dy \int_0^1 f(x, y) \, dx = \int_0^1 d\varrho \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\varrho \cos \Theta, \ \varrho \sin \Theta) \varrho \, d\Theta +$$

$$+ \int_1^{\sqrt{3}} d\varrho \int_{\arccos \frac{1}{\varrho}}^{\frac{\pi}{2}} f(\varrho \cos \Theta, \ \varrho \sin \Theta) \varrho \, d\Theta +$$

$$+\int_{\sqrt{3}}^{2} d\varrho \int_{\arccos\frac{1}{\varrho}}^{\arcsin\frac{\sqrt{3}}{\varrho}} f(\varrho\cos\Theta,\ \varrho\sin\Theta)\varrho\, d\Theta.$$

VI. *Kera on lõigatud pöördsilindriga, mis läbib kera keskpunkti ja mille raadius on pool kera raadiusest. Arvutada kera selle osa ruumala, mis jääb silindri sisse.*

Lahendus. Valime kera keskpunkti koordinaatide alguspunktiks, seda läbiva silindri moodustaja z-teljeks ja zy-tasapinna läbi silindri telje. Siis on kera määratud võrratusega $x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2$ ja silinder võrratusega $x^2+\left(y-\frac{R}{2}\right)^2 \leqslant \frac{R^2}{4}$ ehk $x^2+y^2-Ry \leqslant 0$. Et silinder ja kera on sümmeetrilised tasapindade $z=0$ ja $x=0$ suhtes, siis on otstarbekohane esialgu arvutada keha selle veerandi ruumala, mis asetseb koordinaatide esimeses oktandis ning on piiratud xy-tasapinnal asetseva poolringiga $0 \leqslant x \leqslant \sqrt{Ry-y^2}$, z-teljega paralleelsete moodustajatega silinderpinnaga ja kerapinnaga $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ (joon. 133).



Joon. 133.

Seega on selle keha ruumala valemi (13) kohaselt

$$V_1 = \iint_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\, dx\, dy,$$

kus integreerimispiirkond D on poolring $0 \leqslant x \leqslant \sqrt{Ry-y^2}$. Ülesandes nõutud keha ruumala on niisiis

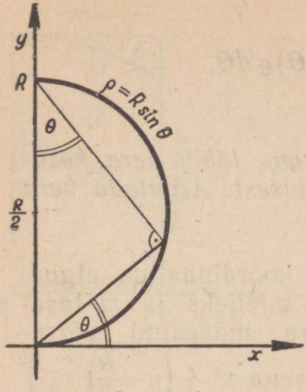
$$V = 4V_1 = 4\int_0^R dy \int_0^{\sqrt{Ry-y^2}} \sqrt{R^2-x^2-y^2}\, dx.$$

Et selle integraali arvutamine ristkoordinaatides osutub tülikaks, siis võtame kasutusele polaarkoordinaadid.

Integreeritav funktsioon teisendub siis kujule

$$\sqrt{R^2-x^2-y^2} = \sqrt{R^2-\varrho^2\cos^2\Theta-\varrho^2\sin^2\Theta} = \sqrt{R^2-\varrho^2},$$

kusjuures integreerimispiirkonna määravad võrratused $0 \leqslant \Theta \leqslant \frac{\pi}{2}$ ja $0 \leqslant \varrho \leqslant R\sin\Theta$ (joon. 134).



Joon. 134.

Seega on

$$V=4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\Theta \int_0^{R\sin\Theta} \sqrt{R^2-\varrho^2}\,\varrho\, d\varrho.$$

Avaldame kõigepealt sisemise integraali:

$$\int_0^{R\sin\Theta} \sqrt{R^2-\varrho^2}\,\varrho\, d\varrho=$$

$$=\left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(R^2-\varrho^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{R\sin\Theta}=$$

$$=-\frac{1}{3}\left[(R^2-R^2\sin^2\Theta)^{\frac{3}{2}}-(R^2)^{\frac{3}{2}}\right]=-\frac{R^3}{3}(\cos^3\Theta-1).$$

Järelikult

$$V=\frac{4R^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^3\Theta)\,d\Theta=\frac{4R^3}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)\approx 1{,}205R^3.$$

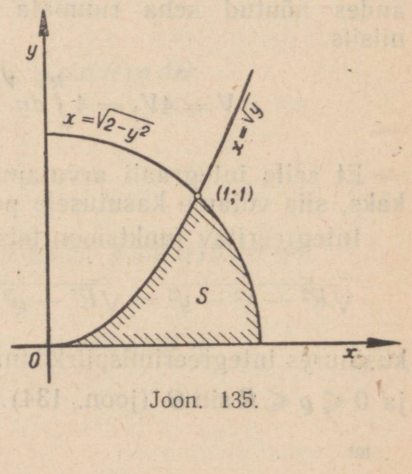
VII. *Leida võrratustega* $x\geqslant\sqrt{y}$, $x\leqslant\sqrt{2-y^2}$ *ja* $y\geqslant 0$ *määratud kujundi pindala.*

Lahendus. Võtame antud pinnatüki kahekordse integraali integreerimispiirkonnaks D. Valemi (14) kohaselt on siis otsitav pindala (joon. 135)

$$S=\iint_D dx\,dy=\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2-y^2}} dx=$$

$$=\int_0^1(\sqrt{2-y^2}-\sqrt{y})\,dy=$$

$$=\int_0^1\sqrt{2-y^2}\,dy-\frac{2}{3}.$$



Joon. 135.

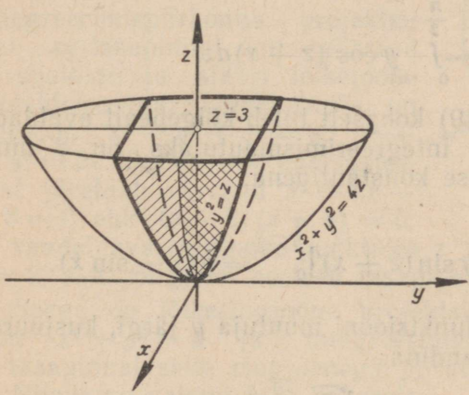
Teisendusega $y=\sqrt{2}\sin t$ saame

$$\int_0^1 \sqrt{2-y^2}\,dy = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t\,dt = \left[t + \frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}.$$

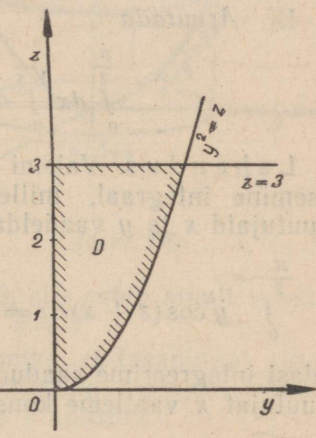
Nõutud pindala on seega $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{6} \approx 0{,}619$.

VIII. *Leida paraboloidist $x^2 + y^2 = 4z$ silindriga $y^2 = z$ ja tasapinnaga $z = 3$ eraldatud tüki pindala, kus $y^2 \leqslant z$.*

L a h e n d u s. Et antud pinnatükk koosneb õieti kahest osast, mis on sümmeetrilised tasapinna $x = 0$ suhtes, ja kumbki osa omakorda on sümmeetriline tasapinna $y = 0$ suhtes (joon. 136), siis on otstarbekohane kahekordse integraali abil arvutada vee-



Joon. 136.



Joon. 137.

rand otsitavast pindalast, nimelt see veerand, kus $x \geqslant 0$ ja $y \geqslant 0$. Selle pinnatüki projektsiooni on kõige lihtsam leida yz-tasapinnal, sest teda projekteerivad yz-tasapinnale just sama silinder ja sama tasapind, mis teda paraboloidist välja lõikavad. See projektsioon D on määratud võrratustega $0 \leqslant z \leqslant 3$ ja $0 \leqslant y \leqslant \sqrt{z}$ (joon. 137).

Valemi (17) rakendamiseks teisendame paraboloidi võrrandi kujule $x = \sqrt{4z - y^2}$ ning avaldame

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{4z-y^2}} \quad \text{ja} \quad \frac{\partial x}{\partial z} = \frac{2}{\sqrt{4z-y^2}}.$$

Integraalialuseks funktsiooniks tuleb siis

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}=2\sqrt{\frac{z+1}{4z-y^2}}$$

ja otsitav pindala on järelikult

$$S=4\iint\limits_D 2\sqrt{\frac{z+1}{4z-y^2}}\,dy\,dz=4\int\limits_0^3 dz\int\limits_0^{\sqrt{z}} 2\sqrt{\frac{z+1}{4z-y^2}}\,dy=$$

$$=8\int\limits_0^3\sqrt{z+1}\,dz\int\limits_0^{\sqrt{z}}\frac{dy}{\sqrt{4z-y^2}}=8\int\limits_0^3\left[\arcsin\frac{y}{2\sqrt{z}}\right]_0^{\sqrt{z}}\cdot\sqrt{z+1}\,dz=$$

$$=8\cdot\frac{\pi}{6}\int\limits_0^3\sqrt{z+1}\,dz=\left[\frac{4\pi}{3}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{(z+1)^3}\right]_0^3=\frac{8\pi}{9}(8-1)\approx 1{,}955.$$

IX. *Arvutada*

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dx\int\limits_0^{\sqrt{x}} dy\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-x} y\cos(z+x)\,dz.$$

Lahendus. Valemi (19) kohaselt tuleb kõigepealt avaldada sisemine integraal, milles integreerimismuutujaks on z ning muutujaid x ja y vaadeldakse konstantidena:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-x} y\cos(z+x)\,dz=\left[y\sin(z+x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}-x}=y(1-\sin x).$$

Edasi integreerime saadud funktsiooni muutuja y järgi, kusjuures muutujat x vaatleme konstandina:

$$\int\limits_0^{\sqrt{x}} y(1-\sin x)\,dy=(1-\sin x)\int\limits_0^{\sqrt{x}} y\,dy=(1-\sin x)\,\frac{x}{2}.$$

Lõpuks arvutame

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin x)\,\frac{x}{2}\,dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(x-x\sin x)\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}-\sin x+x\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2-8}{16}.$$

Seega

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dx\int\limits_0^{\sqrt{x}} dy\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-x} y\cos(z+x)\,dz=\frac{\pi^2-8}{16}\approx 0{,}1169.$$

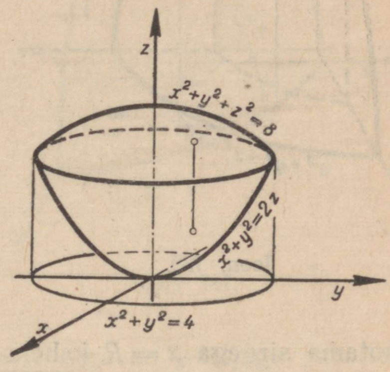
X. *Määrata rajad kolmekordses integraalis*

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz,$$

kui integreerimispiirkond V on määratud võrratustega $x^2+y^2+z^2 \leqslant 8$ ja $x^2+y^2 \leqslant 2z$.

L a h e n d u s. Nagu integreerimispiirkonda määravatest võrratustest nähtub, on integreerimispiirkond alt piiratud paraboloidiga $x^2+y^2=2z$ ja pealt sfääriga $x^2+y^2+z^2=8$ (joon. 138). Sirgetel $x=\text{const}$, $y=\text{const}$ muutub z integreerimispiirkonna ulatuses:

$$\frac{x^2+y^2}{2} \leqslant z \leqslant \sqrt{8-x^2-y^2}.$$



Joon. 138.

Integreerimispiirkonna projektsioon xy-tasapinnal on piiratud paraboloidi ja sfääri lõikejoone projektsiooniga. Lõikejooneks on ringjoon $x^2+y^2+z^2=8$, $x^2+y^2=2z$. Sellest võrrandisüsteemist järeldub võrrand $z^2+2z-8=0$ ehk $(z-2)(z+4)=0$. Et vaadeldava ringjoone punktides $z>0$, siis sobib ainult lahend $z=2$, s. t. ringjoon asetseb tasapinnal $z=2$.

Seega on lõikeringjoone projektsiooniks xy-tasapinnal ringjoon $x^2+y^2=4$ ja integreerimispiirkonna projektsiooniks xy-tasapinnal selle ringjoonega piiratud pinnatükk.

Niisiis on valemi (18) kohaselt

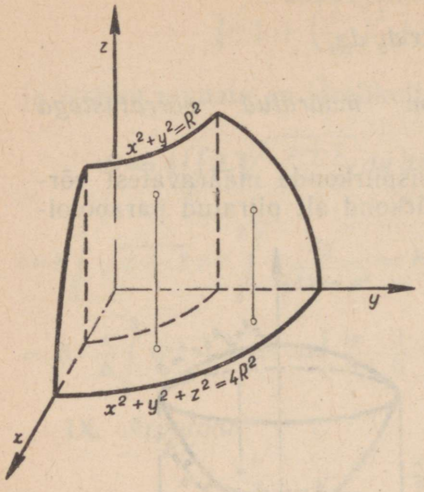
$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy \int\limits_{\frac{x^2+y^2}{2}}^{\sqrt{8-x^2-y^2}} f(x, y, z)\,dz.$$

XI. *Määrata rajad kolmekordses integraalis*

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$$

kõigi võimalike integreerimisjärjekordade jaoks, kui integreerimispiirkond V on määratud võrratustega $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$ *ja* $R^2 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 4R^2-z^2$.

L a h e n d u s. Integreerimispiirkonda määravatest võrratustest selgub, et piirkond on koordinaadistiku esimeses oktandis väljaspool silindrit $x^2+y^2=R^2$ ja seespool sfääri $x^2+y^2+z^2=4R^2$ (joon. 139).



Joon. 139.

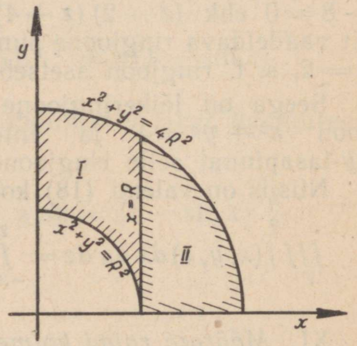
1) Valime integreerimisjärjekorraks $\int dx \int dy \int f(x, y, z)\,dz$. Rajade määramiseks vaatleme, kuidas muutub integreerimispiirkonnas z sirglõikudel $x = \text{const}$ ja $y = \text{const}$. Nagu nähtub jooniselt 139, algavad need sirglõigud tasapinnalt $z = 0$ ja lõpevad sfääril $x^2 + y^2 + z^2 = 4R^2$; seega $0 \leqslant z \leqslant \sqrt{4R^2 - x^2 - y^2}$. Järelikult on sisemise integraali rajadeks 0 ja $\sqrt{4R^2 - x^2 - y^2}$. Kahe viimase integraali rajad määrame integreerimispiirkonna projektsioonilt xy-tasapinnal, milleks on kahe kontsentrilise veerandringjoone vaheline riba (joon. 140). Nagu näha, peame rajade määramiseks selle projektsiooni jaotama sirgega $x = R$ kaheks osaks. I osa on määratud võrratustega $0 \leqslant x \leqslant R$ ja $\sqrt{R^2 - x^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{4R^2 - x^2}$, II osa võrratustega $R \leqslant x \leqslant 2R$ ja $0 \leqslant y \leqslant \sqrt{4R^2 - x^2}$.

Niisiis avaldub antud kolmekordne integraal kahe kolmekordse integraali summana:

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \int\limits_0^R dx \int\limits_{\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{4R^2-x^2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{4R^2-x^2-y^2}} f(x, y, z)\,dz +$$

$$+ \int\limits_R^{2R} dx \int\limits_0^{\sqrt{4R^2-x^2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{4R^2-x^2-y^2}} f(x, y, z)\,dz.$$

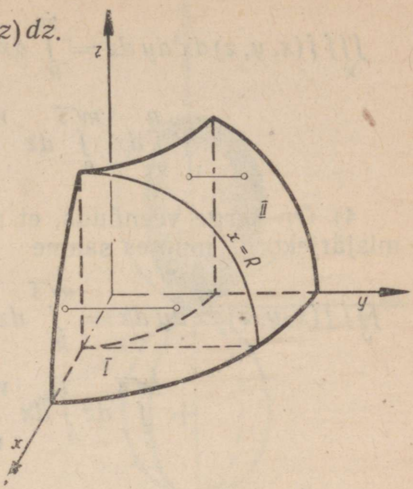


Joon. 140.

2) Kui integreerime järjekorras $\int dy \int dx \int f(x, y, z)\,dz$, siis jäävad sisemise integraali rajad samaks mis eelmisel juhul, kuid integreerimispiirkonna projektsioon (joon. 140) tuleb jaotada kaheks osaks sirgega $y = R$. Sel juhul saame

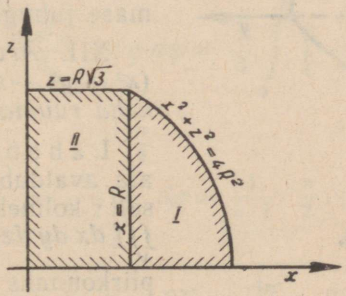
$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_0^R dy \int\limits_{\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{4R^2-y^2}} dx \int\limits_0^{\sqrt{4R^2-x^2-y^2}} f(x, y, z)\,dz +$$

$$+\int_{R}^{2R} dy \int_{0}^{\sqrt{4R^2-y^2}} dx \int_{0}^{\sqrt{4R^2-x^2-y^2}} f(x,y,z)\,dz.$$



Joon. 141.

3) Võtame integreerimisjärjekorraks $\int dx \int dz \int f(x,y,z)\,dy$. Selle integreerimisjärjekorra puhul tuleb kindlaks määrata, kuidas integreerimispiirkonnas muutub y lõikudel $x=$ $=\mathrm{const}$ ja $z=\mathrm{const}$, s. o. y-teljega paralleelsetel lõikudel. Jooniselt 141 nähtub, et selleks peame integreerimispiirkonna jaotama tasapinnaga $x=R$ kaheks osapiirkonnaks. Osapiirkonnas I algavad y-teljega paralleelsed lõigud tasapinnalt $y=0$ ja lõpevad sfääril $x^2+y^2+z^2=4R^2$, seega on selles osapiirkonnas $0 \leqslant y \leqslant$ $\leqslant \sqrt{4R^2-x^2-z^2}$. Osapiirkonnas II algavad y-teljega paralleelsed lõigud silindri $x^2+y^2=R^2$ pinnalt ja lõpevad sfääril $x^2+y^2+z^2=4R^2$, seega on selles osapiirkonnas $\sqrt{R^2-x^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{4R^2-x^2-z^2}$. Et kahes järgmises integraalis muutujate x ja z rajasid määrata, selleks peame integreerimis-



Joon. 142.

piirkonna projekteerima xz-tasapinnale (joon. 142). Osapiirkonna I projektsioon on määratud võrratustega $R \leqslant x \leqslant 2R$ ja $0 \leqslant z \leqslant \sqrt{4R^2-x^2}$, osapiirkonna II projektsioon võrratustega $0 \leqslant x \leqslant R$ ja $0 \leqslant z \leqslant R\sqrt{3}$.

Seega käesoleval juhul

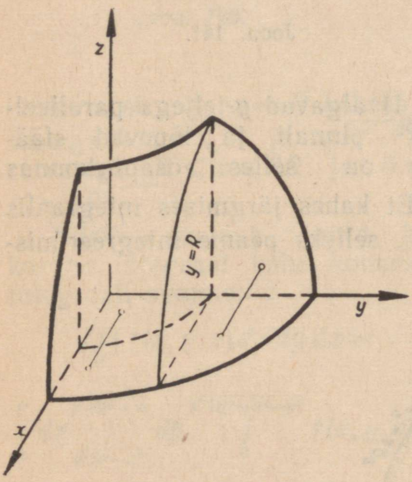
$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_R^{2R} dx \int\limits_0^{\sqrt{4R^2-x^2}} dz \int\limits_0^{\sqrt{4R^2-x^2-z^2}} f(x,y,z)\,dy +$$

$$+ \int\limits_0^R dx \int\limits_0^{R\sqrt{3}} dz \int\limits_{\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{4R^2-x^2-z^2}} f(x,y,z)\,dy.$$

4) On kerge veenduda, et muutujate x ja z suhtes integreerimisjärjekorda muutes saame

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_0^{R\sqrt{3}} dz \int\limits_R^{\sqrt{4R^2-z^2}} dx \int\limits_0^{\sqrt{4R^2-x^2-z^2}} f(x,y,z)\,dy +$$

$$+ \int\limits_0^{R\sqrt{3}} dz \int\limits_0^R dx \int\limits_{\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{4R^2-x^2-z^2}} f(x,y,z)\,dy.$$

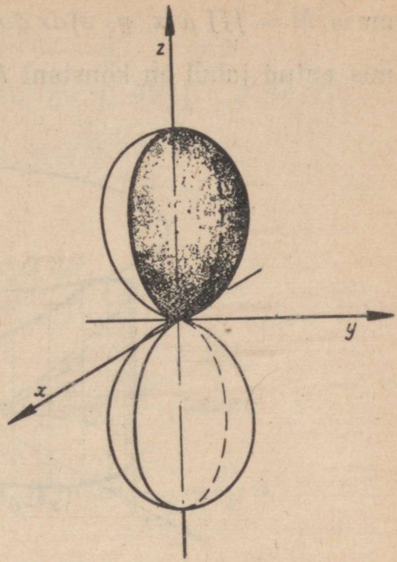


Joon. 143.

5 ja 6) Valides lõpuks integreerimisjärjekorraks $\int dy \int dz \int f(x,y,z)\,dx$ ja $\int dz \int dy \int f(x,y,z)\,dx$, peaksime analoogiliselt eelmise juhuga jaotama integreerimispiirkonna tasapinnaga $y=R$ kaheks osapiirkonnaks. Nagu nähtub jooniselt 143, tulevad integreerimisrajad analoogilised kahe viimase juhuga.

XII. *Arvutada pinnaga* $(x^2+y^2+z^2)^3 = z^4$ *piiratud keha ruumala.*

L a h e n d u s. Keha ruumala avaldub valemi (23) kohaselt kolmekordse integraalina $\iiint\limits_V dx\,dy\,dz$, kus integreerimispiirkonnaks on sama keha. Et käesolevas ülesandes on keha piirava pinna võrrand antud ilmutamata kujul, siis tekib integraali rajade määramisel raskusi. Nende ületamiseks võtame kasutusele sfäärkoordinaadid $x = r\cos\varphi\sin\psi$, $y = r\sin\varphi\sin\psi$, $z = r\cos\psi$. Siis on $x^2+y^2+z^2 = r^2$ ja antud pinna võrrand omandab kuju $r^6 = r^4\cos^4\psi$ ehk $r^4(r^2-\cos^4\psi) = 0$. Sellest tuletatav võrrand $r^4 = 0$ esitab ainult pinna ühte punkti, poolust, võrrand $r^2 - \cos^4\psi = 0$ ehk $r = \pm\cos^2\psi$ aga pinna kõiki ülejäänud punkte. Et r ei sõltu φ-st, siis on tegemist pöördpinnaga, mille pöördeteljeks on z-telg. Et $\cos^2\psi = \cos^2(\pi-\psi)$, siis on pind sümmeetriline xy-tasapinna suhtes. Seega on antud pind sümmeetriline kõigi koordinaattasapindade suhtes ja samuti koordinaatide alguspunkti suhtes. Seetõttu esitab võrrand $r = \cos^2\psi$ samu punkte mis $r = -\cos^2\psi$ ja me võime piirduda esimese võrrandiga. Samuti võib sümmeetria tõttu arvutada antud keha selle kaheksandiku ruumala (joon. 144), mis on määratud võrratustega $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$, $0 \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2}$ ja $0 \leqslant r \leqslant \cos^2\psi$.



Joon. 144.

Valemi (22) kohaselt saame

$$V_1 = \iiint\limits_{V_1} dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{V_1} r^2 \sin\psi\,d\varphi\,d\psi\,dr =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int\limits_0^{\cos^2\psi} r^2 \sin\psi\,dr =$$

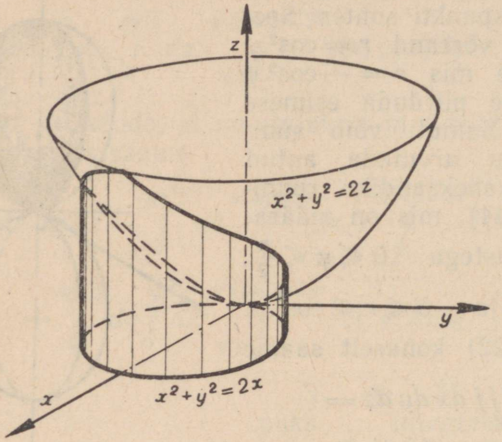
$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^6\psi}{3} \sin\psi\,d\psi = \frac{1}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-\frac{\cos^7\psi}{7}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi =$$

$$= \frac{1}{3\cdot 7}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{1}{3\cdot 7}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Seega on nõutud ruumala $V = 8V_1 = \frac{4\pi}{21} \approx 0{,}598$.

XIII. *Kui kõrgel xy-tasapinnast asetseb ühtlase tihedusega keha masskese, kui keha on piiratud silindriga $x^2 + y^2 = 2x$, paraboloidiga $x^2 + y^2 = 2z$ ja tasapinnaga $z = 0$?*

Lahendus. Masskeskme kõrgus xy-tasapinnast on tema koordinaat z_0. Valemi (27) järgi on $z_0 = \frac{1}{M}\iiint\limits_V \mu(x, y, z)\,z\,dx\,dy\,dz$, kus integreerimispiirkonnaks V on antud keha, valemi (24) järgi mass $M = \iiint\limits_V \mu(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$ ja $\mu(x, y, z)$ on keha tihedus, mis antud juhul on konstant k.



Joon. 145.

Joniselt 145 nähtub, et integreerimispiirkond on määratud võrratustega $0 \leqslant z \leqslant \frac{x^2+y^2}{2}$, $-\sqrt{2x-x^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{2x-x^2}$ ja $0 \leqslant x \leqslant 2$.

Keha mass avaldub seega kujul

$$M = k \int\limits_0^2 dx \int\limits_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} dy \int\limits_0^{\frac{x^2+y^2}{2}} dz.$$

Et selle integraali arvutamine ristkoordinaatides on tülikas, siis võtame kasutusele silinderkoordinaadid $x = \varrho \cos \Theta$, $y = \varrho \sin \Theta$, $z = z$. Paraboloidi võrrand on siis $z = \frac{\varrho^2}{2}$ ja silindri võrrand $\varrho^2 = 2\varrho \cos \Theta$ ehk $\varrho(\varrho - 2\cos \Theta) = 0$, millest võrrand $\varrho = 0$ esitab ainult pinna ühte punkti ja võrrand $\varrho - 2\cos \Theta = 0$ kõiki ülejäänud punkte.

Seega on integreerimispiirkond silinderkoordinaatides määratud võrratustega $0 \leqslant z \leqslant \frac{\varrho^2}{2}$, $0 \leqslant \varrho \leqslant 2\cos \Theta$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant \Theta \leqslant \frac{\pi}{2}$. Valemi (21) järgi on niisiis

$$M = k\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\Theta \int_0^{2\cos\Theta} d\varrho \int_0^{\frac{\varrho^2}{2}} \varrho\, dz = \frac{k}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\Theta \int_0^{2\cos\Theta} \varrho^3\, d\varrho =$$

$$= 2k\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\Theta\, d\Theta.$$

Asendades selles integraalis $\cos^2\Theta = \frac{1+\cos 2\Theta}{2}$, saame

$$M = \frac{k}{4}\left[\frac{1}{4}\sin 4\Theta + 2\sin 2\Theta + 3\Theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3k}{4}\pi.$$

Et masskeskme kõrguse z_0 avaldises jääb integreerimispiirkond samaks, siis kasutame ka tema arvutamisel silinderkoordinaate.

Seega

$$z_0 = \frac{4}{3k\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\Theta \int_0^{2\cos\Theta} d\varrho \int_0^{\frac{\varrho^2}{2}} k\varrho z\, dz = \frac{4}{3\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\Theta \int_0^{2\cos\Theta} \frac{\varrho^5}{8}\, d\varrho =$$

$$= \frac{16}{9\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^6\Theta\, d\Theta.$$

Kasutades jälle teisendust $\cos^2\Theta = \frac{1+\cos 2\Theta}{2}$, saame

$$z_0 = \frac{16}{9\pi}\cdot\frac{1}{8}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{5}{2} + 4\cos 2\Theta + \frac{3}{2}\cos 4\Theta - \sin^2 2\Theta\cos 2\Theta\right) d\Theta =$$

$$= \frac{16}{9\pi}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{5}{2}\pi = \frac{5}{9}.$$

Kahekordse integraali arvutamine, rajade määramine ja muutujate teisendamine

Ülesandeis **2222—2229** arvutada antud kahekordsed integraalid:

2222. $\int\limits_{-3}^{1} dy \int\limits_{x^2-1}^{2(1-x)} dx.$ $10\frac{2}{3}$

2223. $\int\limits_{0}^{1} \int\limits_{-x}^{x+1} (xy + y)\, dy\, dx.$ $2\frac{1}{12}$

2224. $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{x+1} xy\, dy.$ $\frac{2}{3}$

2225. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2 + y^2)\, dy.$ $\frac{6}{35}$

2226. $\int\limits_{0}^{1} \int\limits_{0}^{\sqrt{y}} (x^2 + y^2)\, dx\, dy.$ $\frac{44}{105}$

2227. $\int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{\ln x}^{3x} \frac{dy}{x}.$ $\frac{1}{2}[6-(\ln 2)^2]$

2228. $\int\limits_{0}^{1} \int\limits_{\frac{1-x^2}{2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dy\, dx.$ $\frac{1}{3}$

2229. $\int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (3 - x - y)\, dy\, dx.$ 3π

2230. Avaldada $\int\limits_{a}^{A} dx \int\limits_{b}^{B} X'(x)\, Y'(y)\, dy$, kui konstandid a ja A kuuluvad ühe muutuja funktsiooni $X(x)$ määramispiirkonda ning b ja B funktsiooni $Y(y)$ määramispiirkonda.

Ülesandeis **2231—2239** avaldada antud kahekordse integraali integreerimispiirkond võrratuste abil ja teha vastav joonis:

2231. $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sin x} f(x, y)\, dy.$

2232. $\int\limits_{-1}^{1} dy \int\limits_{2y-2}^{1-\sqrt{1-y^2}} f(x, y)\, dx.$

2233. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{1-\sqrt{1-y}}^{\sqrt[4]{y}} f(x, y)\, dx.$

2234. $\int\limits_{-1}^{2} dy \int\limits_{-y^2}^{y^2} f(x, y)\, dx.$

2235. $\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{x-4}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y)\, dy.$

2236. $\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{x^2-4}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y)\, dy.$

2237. $\int\limits_{-1}^{1} dy \int\limits_{-y}^{\operatorname{ch} y} f(x, y)\, dx.$

2238. $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y)\, dy.$

2239. $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y)\, dy.$

2240. Kas avaldis $\int\limits_2^3 dx \int\limits_{x^2-1}^{2-2x} f(x,y)\,dy$ esitab mingi pinnatüki pindala?

2241. Kas avaldise $\int\limits_1^2 dx \int\limits_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y)\,dy$ abil saab arvutada mingit kahekordset integraali?

Ülesandeis **2242—2249** teha integreerimispiirkonna joonis ja määrata rajad kahekordses integraalis $\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy$, kui piirkond D on antud vastavate võrratustega:

2242. $2 \leqslant x \leqslant 7,\ \ 1 \leqslant y \leqslant 3.$

2243. $-10 \leqslant x \leqslant -3,\ \ -3 \leqslant y \leqslant 2.$

2244. $0 \leqslant x \leqslant \frac{4}{3} y + 4,\ \ -3 \leqslant y \leqslant 4.$

2245. $1 \leqslant x \leqslant 4,\ \ 1 \leqslant y \leqslant x.$

2246. $-2 \leqslant x \leqslant 2,\ \ -1 \leqslant y \leqslant x + 2.$

2247. $y^2 \leqslant x \leqslant 4,\ \ 0 \leqslant y \leqslant 2.$

2248. $-1 \leqslant x \leqslant 2,\ \ 0 \leqslant y \leqslant x^2 + 1.$

2249. $-\sqrt{1-y^2} \leqslant x \leqslant \sqrt{1-y^2},\ \ 0 \leqslant y \leqslant 1.$

Ülesandeis **2250—2260** teha integreerimispiirkonna joonis ja muuta integreerimise järjekorda:

2250. $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{x+1} f(x, y)\,dy.$

2251. $\int\limits_0^5 dx \int\limits_{(x-3)^2-5}^{4-x} f(x, y)\,dy.$

2252. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{3} f(x, y)\,dx.$

2253. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{0,5x}^{2x} f(x, y)\,dy.$

2254. $\int\limits_0^1 \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y)\,dx\,dy.$

2255. $\int\limits_0^a \int\limits_{\frac{a^2-x^2}{2a}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x, y)\,dy\,dx\ \ (a > 0).$

2256. $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_0^{x^2} f(x, y)\,dy.$

2257. $\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{-1}^{x^2+1} f(x, y)\,dy.$

2258. $\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{x^2-4}^{\operatorname{ch} x} f(x, y)\,dy.$

2259. $\int\limits_{-2}^{2} dy \int\limits_{y^2-2}^{\frac{y^2}{2}} f(x, y)\,dx.$

2260. $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{x^3}^{x^2+2} f(x, y)\,dy.$

Ülesandeis **2261—2269** joonestada antud kahekordsete integraalide määramispiirkonnad ja esitada antud integraalide summa üheainsa kahekordse integraali abil:

2261. $\int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{0}^{1} f(x, y)\,dx + \int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y)\,dx.$

2262. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y)\,dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x, y)\,dx.$

2263. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{1} f(x, y)\,dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{0}^{y+1} f(x, y)\,dx.$

2264. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y)\,dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{0}^{y+1} f(x, y)\,dx.$

2265. $\int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{x^2}^{1} f(x, y)\,dy + \int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{1} f(x, y)\,dy.$

2266. $\int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{0}^{1+y} f(x, y)\,dx + \int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{1-y} f(x, y)\,dx.$

2267. $\int\limits_{-5}^{-1} dy \int\limits_{-\frac{\pi}{4}(y+3)}^{\frac{\pi}{2}} f(x, y)\,dx + \int\limits_{-1}^{1} dy \int\limits_{\arcsin y}^{\frac{\pi}{2}} f(x, y)\,dx.$

2268. $\int\limits_{-4}^{-2} dx \int\limits_{-1}^{x+3} f(x, y)\,dy + \int\limits_{-2}^{0} dx \int\limits_{-1}^{1} f(x, y)\,dy + \int\limits_{0}^{\pi} dx \int\limits_{-1}^{\cos x} f(x, y)\,dy.$

2269. $\int\limits_{-11}^{-2} dy \int\limits_{-y-1}^{10} f(x, y)\,dx + \int\limits_{-2}^{0} dy \int\limits_{1}^{10} f(x, y)\,dx + \int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{10^y}^{10} f(x, y)\,dx.$

Ülesannetes **2270—2274** teisendada kahekordne integraal $\iint\limits_{D} f(x, y)\,dx\,dy$ polaarkoordinaatidesse $x = \varrho\cos\Theta$, $y = \varrho\sin\Theta$:

2270. Integreerimispiirkonnaks on veerand ringi $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

2271. Integreerimispiirkond on antud võrratustega $1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4$, $y \geqslant 0$.

2272. Integreerimispiirkonnaks on ring $(x-1)^2 + y^2 \leqslant 1$.

2273. Integreerimispiirkonnaks on ruut $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant a$.

2274. Integreerimispiirkonnaks on kolmnurk $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 2 - x$.

2275. Teisendada $\int\limits_{1}^{4} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{4y-y^2}} f(x, y)\,dx$ polaarkoordinaatidesse.

2276. Arvutada $\iint\limits_D (x^2 - y^2)\,dx\,dy$, kasutades polaarkoordinaate, kui integreerimispiirkond D on määratud võrratustega $x \geqslant 0$, $y \leqslant 0$, $x^2 + y^2 \leqslant R^2$.

Ülesandeis **2277—2279** arvutada antud teisendusele vastav jakobiaan $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$:

2277. $x = au \cos v$, $y = bu \sin v$, kusjuures a ja b on konstandid.

2278. $x = u \cos^3 v$, $y = u \sin^3 v$.

2279. $u = xy$, $v = \frac{x^2}{y}$.

2280. Teisendada kahekordne integraal $\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy$ polaarkoordinaatidesse $x = a\varrho \cos \Theta$, $y = b\varrho \sin \Theta$, kui integreerimispiirkonnaks D on ellips $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1$ (vt. **2277**).

2281. Teisendada $\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy$ polaarkoordinaatidesse $x = \varrho \cos^3 \Theta$, $y = \varrho \sin^3 \Theta$, kui integreerimispiirkonnaks D on astroid $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ (vt. **2278**).

2282. Integreerimispiirkond D on antud võrratustega $1 \leqslant xy \leqslant 2$, $x \leqslant y^2 \leqslant 2x$. Teisendada $\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy$ ristkoordinaatidesse u ja v nii, et $u = xy$ ja $v = \frac{x^2}{y}$ (vt. **2279**).

Kolmekordse integraali arvutamine, rajade määramine ja muutujate teisendamine

Ülesandeis **2283—2286** arvutada kolmekordsed integraalid:

2283. $\int\limits_0^2 dz \int\limits_0^3 dy \int\limits_0^4 dx$.

2284. $\int\limits_0^1 dz \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^3 (x + y + z)\,dy$.

2285. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^x dy \int\limits_0^{xy} x^3 y^2 z\,dz$.

2286. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{1-x-y} \frac{dz}{(x + y + z + 1)^3}$.

Ülesandeis **2287—2294** teha integreerimispiirkonna joonis ja määrata rajad kolmekordses integraalis $\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$:

2287. Integreerimispiirkonnaks on risttahukas tahkudega $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=2$, $z=0$ ja $z=3$.

2288. Integreerimispiirkond on piiratud tasapindadega $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=4$.

2289. Integreerimispiirkonnaks on ellipsoid $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

2290. Integreerimispiirkond on määratud hüperboolse paraboloidiga $z=xy$ ja tasapindadega $z=0$, $x=1$, $y=x$.

2291. Integreerimispiirkond on piiratud tasapindadega $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y=1$ ja $x+y=z$.

2292. Integreerimispiirkond on määratud silindriga $x=y^2$ ja tasapindadega $x=1$, $z=1$, $z=-1$.

2293. Integreerimispiirkond on piiratud tasapindadega $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x=2$, $y=4$ ja kerapinnaga $z=\sqrt{25-x^2-y^2}$.

2294. Integreerimispiirkond on antud võrratustega $0 \leqslant z \leqslant x^2+y^2$, $x^2+y^2 \leqslant 1$.

Ülesandeis **2295—2298** määrata rajad kolmekordses integraalis $\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$ kõigi võimalike integreerimisjärjekordade puhul:

2295. Integreerimispiirkond on antud võrratustega $0 \leqslant z \leqslant \sqrt{25-x^2-y^2}$ ja $x^2+y^2 \leqslant 9$.

2296. Integreerimispiirkond on määratud tasapindadega $x=0$, $y=0$, $z=0$, $2x+y=4$ ja silindriga $z=4-x^2$.

2297. Integreerimispiirkond on piiratud koonusega $z^2=\frac{h^2}{R^2}(x^2+y^2)$ ja tasapinnaga $z=h$.

2298. Integreerimispiirkond on antud võrratustega $0 \leqslant z \leqslant \frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}$, $x^2+y^2 \leqslant R^2$.

Ülesandeis **2299—2302** määrata rajad kolmekordses integraalis $\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$ ja teisendada saadud integraal silinderkoordinaatidesse:

2299. Integreerimispiirkond on piiratud pindadega $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x^2+y^2=4$ ja $x+y+z-7=0$.

2300. Integreerimispiirkond on määratud pindadega $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x^2+y^2=4$ ja $z=x^2+y^2$.

2301. Integreerimispiirkond on määratud võrratustega $x^2+y^2 \leqslant 1$, $x^2+y^2+z^2 \leqslant 4$, $y \geqslant 0$ ja $z \geqslant 0$.

2302. Integreerimispiirkond on piiratud pindadega $z=0$, $x+y+z-4=0$ ja $x^2+y^2=1$.

Ülesandeis **2303** ja **2304** määrata rajad kolmekordses integraalis $\iiint\limits_V f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$, kasutades sfäärkoordinaate:

2303. Integreerimispiirkond on antud võrratustega $1 \leqslant x^2+ y^2+z^2 \leqslant 9$.

2304. Integreerimispiirkonnaks on poolkera, millest on välja lõigatud pöördkoonus, mille tipp asub poolkera keskpunktis, telg on risti poolkera põhjaga ja telje ning moodustaja vaheline nurk on $\frac{\pi}{6}$.

2305. Teisendada kolmekordne integraal

$$\int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} f(x, y, z)\, dz$$

sfäärkoordinaatidesse.

2306. Määrata rajad kolmekordses integraalis $\iiint\limits_V f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$, kui integreerimispiirkonnaks on ellipsoid $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \leqslant 1$, kasutades teisendust

$$\begin{aligned} x &= ar \cos \varphi \sin \psi, \\ y &= br \sin \varphi \sin \psi, \\ z &= cr \cos \psi. \end{aligned}$$

Ülesandeis **2307—2309** arvutada antud kolmekordne integraal, kasutades silinder- või sfäärkoordinaate:

2307. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{2x-x^2}} dy \int\limits_0^3 z\sqrt{x^2+y^2}\, dz.$

2308. $\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} (x^2+y^2)\, dz.$

2309. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\sqrt{1-y^2}} dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dz.$

2310. Arvutada $\iiint\limits_{D} (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$, kui piirkond D on määratud võrratustega $1 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 4$, $z>0$.

Kahe- ja kolmekordse integraali rakendusi

2311. Arvutada keha ruumala, kui keha on piiratud tasapindadega $z=0$, $y=0$, $y=x$, $x=2$ ja paraboloidiga $z=x^2+y^2$.

2312. Silinder $x^2+y^2=4$ on lõigatud tasapindadega $z=0$, $z=1$, $y=x$ ja $y=\sqrt{3}x$. Arvutada selle tüki ruumala, kus $x \geqslant 0$ ja $y \geqslant 0$.

2313. Arvutada silindrite $x^2+y^2=a^2$ ja $y^2+z^2=a^2$ lõikumisel tekkiva keha ruumala.

2314. Leida keha ruumala, kui keha on piiratud tasapindadega $x=2$, $y=x$, $z=0$, silindriga $y=2-x^2$ ja hüperboolse paraboloidiga $z=x^2-y^2$.

2315. Leida keha ruumala, kui keha on piiratud hüperboolse paraboloidiga $z=x^2-y^2$ ja tasapindadega $z=0$ ja $x=3$.

Ülesandeis **2316—2327** arvutada antud keha ruumala, kasutades polaar-, silinder- või sfäärkoordinaate:

2316. Tasapindadega $z=0$ ja $x+y+z-4=0$ ning silindriga $x^2+y^2=1$ piiratud keha.

2317. Tasapinnaga $z=0$, silindriga $x^2+y^2=2x$ ja paraboloidiga $z=x^2+y^2$ piiratud keha.

2318. Pindadega $z=x^2+y^2$, $z=3(x^2+y^2)$, $y=x$ ja $y=x^2$ piiratud keha.

2319. Kera $x^2+y^2+z^2=R^2$ see osa, mille temast välja lõikab koonus $z^2=x^2+y^2 (z \geqslant 0)$.

2320. Paraboloidiga $2z=x^2+y^2$ ja sfääriga $x^2+y^2+z^2=3$ piiratud keha.

2321. Pinnaga $(x^2+y^2+z^2)^3=z(x^2+y^2)$ määratud keha.

Keha on antud võrratustega:

2322. $y \geqslant 0$, $y \leqslant x$, $1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 4$, $0 \leqslant z \leqslant x^2+y^2+1$.

2323. $x^2+y^2 \leqslant Rx$, $0 \leqslant z \leqslant \sqrt{R^2-x^2-y^2}$.

2324. $1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 9$, $\frac{x}{\sqrt{3}} \leqslant y \leqslant \sqrt{3}x$, $0 \leqslant z \leqslant \arctan\frac{y}{x}$.

2325. $x^2+y^2+z^2 \leqslant 4$, $x^2+y^2 \leqslant 1$ ja $z \geqslant 0$.

2326. $x^2+y^2+z^2 \leqslant R$, $x^2+y^2+z^2 \leqslant 2Rz$.

2327. $x^2+y^2+z^2 \leqslant 4$, $x^2+y^2 \geqslant 1$, $z \geqslant 0$.

2328. Arvutada keha ruumala sobivalt valitud muutujate teisenduse abil, kui keha on määratud võrratustega $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1$ ja $0 \leqslant z \leqslant xy$ (vt. **2277**).

2329. Leida parabooliga $y^2 = x$ ja ringjoonega $x^2 - 2x + y^2 = 0$ piiratud kujundi pindala.

2330. Arvutada võrratustega $\frac{y^2 - 4}{4} \leqslant x \leqslant \frac{64 - y^2}{16}$, $0 \leqslant y \leqslant 4$ määratud tasapinnalise kujundi pindala.

2331. Arvutada ellipsi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ pindala polaarkoordinaatides, võttes $x = a\varrho \cos \Theta$, $y = b\varrho \sin \Theta$ (vt. **2277**).

2332. Arvutada astroidi $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ pindala, kasutades muutujate teisendust, mis on näidatud ülesandes **2281**.

2333. Arvutada hüperboolidega $xy = 1$ ja $xy = 2$ ning paraboolidega $y^2 = x$ ja $y^2 = 2x$ piiratud kujundi pindala, kasutades teisendust, mis on antud ülesandes **2282**.

2334. Arvutada paraboloidi $x^2 + y^2 = 2z$ selle tüki pindala, mille temast lõikab välja kera $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$.

2335. Arvutada koonuse $z^2 = x^2 + y^2$ selle tüki pindala, mis jääb silindri $z^2 + y^2 = 4$ sisse.

2336. Arvutada koonuse $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ selle tüki pindala, mille temast lõikab välja silinder $2x - z^2 = 0$.

2337. Arvutada hüperboolse paraboloidi $z = xy$ selle tüki pindala, mis jääb silindri $x^2 + y^2 = 1$ sisse.

2338. Arvutada paraboloidi $x^2 + z^2 = 2y$ selle tüki pindala, mis jääb silindri $x^2 + z^2 = 3$ sisse.

2339. Arvutada pinna $x^2 - y^2 = 2z$ selle tüki pindala, mille temast lõikab välja silinder $x^2 + y^2 = 1$.

2340. Arvutada silindri $z^2 - 4x = 0$ selle tüki pindala, mille temast lõikavad välja silinder $y^2 - 4x = 0$ ja tasapind $x = 1$.

2341. Silinder $x^2 - 2z = 0$ on lõigatud tasapindadega $x - 2y = 0$, $2x - y = 0$ ja $x - 2\sqrt{2} = 0$. Arvutada silindrist välja lõigatud tüki pindala.

2342. Kera on lõigatud pöördsilindriga, mille telg läbib kera keskpunkti. Avaldada kera selle osa pindala, mis jääb silindri sisse juhul, kui kera raadius on R, silindri raadius r $(R > r)$.

2343. Kera raadiusega R on lõigatud pöördsilindriga, mille raadius on $\frac{R}{2}$. Arvutada kera pinna selle osa pindala, mis jääb silindri sisse juhul, kui silindri üks moodustajaist läbib kera keskpunkti.

2344. Arvutada sirgetega $y = \frac{x}{2}$, $x = 2$ ja $y = 2$ piiratud ühtlase tihedusega kolmnurga inertsimoment x-telje suhtes.

2345. Arvutada ühtlase tihedusega rööpküliku inertsimoment ordinaattelje suhtes, kui rööpküliku tipud on (1; 1), (3; 1), (6; 4) ja (4; 4).

2346. Leida parabooli $y = \frac{x^2}{2}$ ja sirge $y = x$ lõikumisel tekkiva ühtlase tihedusega kujundi raskuskese.

2347. Kui suur on ühtlase tihedusega poolringi raskuskeskme kaugus ringi keskpunktist, kui raadius on r?

2348. Leida astroidi $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ ja ordinaattelje lõikumisel tekkiva pinnatüki raskuskese ühtlase tiheduse puhul (vt. **2332**).

2349. Leida tasapindadega $z = 0$, $z = y$, $y = x$ ja $x = 2$ piiratud keha mass, kui keha tihedus punktis $(x; y; z)$ on $\mu = xyz$.

2350. Keha on piiratud tasapindadega $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$, $z = 0$ ja $z = c$ ning ta tihedus on $\mu = x + y + z$. Kui suur on selle keha mass?

Ülesandeis **2351—2354** leida antud ühtlase tihedusega keha raskuskese:

2351. Keha on piiratud pöördparaboloidiga $z = x^2 + y^2$, koordinaattasapindadega ja tasapinnaga $x + y - 1 = 0$.

2352. Keha on piiratud tasapindadega $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = 1$, $y = 1$, $x + y + z = 4$.

2353. Keha on piiratud silindritega $y = \sqrt{x}$ ja $y = 2\sqrt{x}$ ning tasapindadega $z = 0$ ja $x + z = 6$.

2354. Keha on määratud võrratustega $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4$ ja $x^2 + y^2 \geqslant 4(1 - z)$.

2355. Leida ühtlase tihedusega keha inertsimoment x-telje suhtes, kui keha on piiratud tasapindadega $x = 0$, $x = 4$, $y = 0$, $y = 3$, $z = 0$ ja $z = 2$.

2356. Leida ühtlase tihedusega keha inertsimoment z-telje suhtes, kui keha on piiratud silindriga $x^2 + y^2 = 1$ ning tasapindadega $z = 0$ ja $x + y + z = \sqrt{2}$.

2357. Keha on piiratud silindritega $y^2 = 2x$ ja $z^2 = x - x^2$ ning tasapinnaga $y = 0$. Leida selle keha inertsimoment y-telje suhtes, kui tihedus on konstantne.

§ 20. JOONINTEGRAAL

Olgu funktsioon $F(x, y, z)$ pidev joonel L, mida esitavad parameetrilised võrrandid $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ vahemikus $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, kusjuures funktsioonid $x(t)$, $y(t)$ ja $z(t)$ on selles vahemikus pidevalt diferentseeruvad.

Jaotame joone L n osaks L_i pikkusega Δs_i, võtame igal osal mingi punkti $(x_i; y_i; z_i)$ ning moodustame summa

$$\sum_{i=1}^{n} F(x_i, y_i, z_i)\Delta s_i.$$

Kui sellel summal on olemas piirväärtus $\max \Delta s_i \to 0$ puhul, siis nimetatakse teda funktsiooni $F(x, y, z)$ j o o n i n t e g r a a l i k s k a a r e p i k k u s e j ä r g i üle joone L ja tähistatakse

$$\lim_{\max \Delta s_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} F(x_i, y_i, z_i)\Delta s_i = \int_L F(x, y, z)\, ds.$$

Arvutamiseks teisendatakse joonintegraal ühekordseks (tavaliseks) integraaliks:

$$\int_L F(x, y, z)\, ds =$$

$$= \int_\alpha^\beta F[x(t), y(t), z(t)] \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\, dt, \quad (\alpha < \beta). \quad (1)$$

Joonintegraal

$$\int_L ds = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\, dt \quad (2)$$

esitab joone L punktide $t = \alpha$ ja $t = \beta$ vahelise kaare pikkust.

Kui joon L asetseb xy-tasapinnal, on $z = 0$ ja valem (1) omandab kuju

$$\int_L F(x, y)\, ds = \int_\alpha^\beta F[x(t), y(t)] \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt. \quad (3)$$

Kui joon L on antud võrrandiga $y=f(x)$, siis $ds=$ $=\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$ ja

$$\int_L F(x, y)\,ds=\int_{x_1}^{x_2} F[x, f(x)]\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx, \quad (x_1<x_2). \tag{4}$$

Et joonintegraali arvutamisel kaare pikkuse järgi valitakse integraali alumiseks rajaks väiksem ja ülemiseks rajaks suurem arv, siis ei sõltu see joonintegraal integreerimissuunast, s. o. sellest, kumb kaare otspunktidest loetakse alguspunktiks.

Kui joonel L on määratud suund nii, et alguspunkt on A ja lõpp-punkt on B, ja osakaare L_i projektsioon x-teljel on Δx_i, siis nimetatakse piirväärtust

$$\lim_{\max|\Delta x_i|\to 0} \sum_{i=1}^{n} F(x_i, y_i, z_i)\Delta x_i$$

funktsiooni $F(x, y, z)$ j o o n i n t e g r a a l i k s k o o r d i n a a d i x j ä r g i üle joone L ja tähistatakse

$$\int_L F(x, y, z)\,dx \quad \text{ehk} \quad \int_{AB} F(x, y, z)\,dx.$$

Arvutamiseks teisendatakse see integraal tavaliseks integraaliks:

$$\int_{AB} F(x, y, z)\,dx=\int_{\alpha}^{\beta} F[x(t), y(t), z(t)]x'(t)\,dt, \tag{5}$$

kus α on alguspunktile ja β lõpp-punktile vastav parameetri väärtus.

Kui osakaare L_i projektsiooni võtame y- või z-teljel, siis saame vastavalt

$$\int_{AB} F(x, y, z)\,dy=\int_{\alpha}^{\beta} F[x(t), y(t), z(t)]y'(t)\,dt \tag{6}$$

ja

$$\int_{AB} F(x, y, z)\,dz=\int_{\alpha}^{\beta} F[x(t), y(t), z(t)]z'(t)\,dt. \tag{7}$$

Üldiselt, kui funktsioonid $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ ja $R(x, y, z)$ on pidevad joonel AB, siis nimetatakse integraali

$$\int_{AB} P(x, y, z)\,dx+Q(x, y, z)\,dy+R(x, y, z)\,dz=$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta}\Big\{P[x(t), y(t), z(t)]x'(t)+Q[x(t), y(t), z(t)]y'(t)+$$
$$+R[x(t), y(t), z(t)]z'(t)\Big\}\,dt \tag{8}$$

avaldise $P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$ **joonintegraaliks koordinaatide järgi** üle joone AB.

Joonintegraal koordinaatide järgi muudab märki, kui integreerimistee algus- ja lõpp-punkt ümber vahetada:

$$\int_{AB} P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz =$$

$$= -\int_{BA} P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz. \tag{9}$$

Kui L on kinnine tasapinnaline joon, siis on selle joonega piiratud pinnatüki pindala

$$S = \frac{1}{2}\int_{L} x\,dy - y\,dx. \tag{10}$$

Kui kahe muutuja funktsioonid $P(x, y)$ ja $Q(x, y)$ ning nende osatuletised $\frac{\partial P}{\partial y}$ ja $\frac{\partial Q}{\partial x}$ on pidevad mingis ühelisidusas piirkonnas D ja

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \tag{11}$$

siis

1) on olemas niisugune funktsioon $u(x, y)$, et

$$du = P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy; \tag{12}$$

2) $$\int_{(x_1;\,y_1)}^{(x_2;\,y_2)} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = u(x_2, y_2) - u(x_1, y_1), \tag{13}$$

s. o. joonintegraali väärtus ei sõltu integreerimistee kujust, vaid ainult algus- ja lõpp-punktist;

3) $$\int_{L} P\,dx + Q\,dy = 0, \tag{14}$$

kui L on kinnine joon, mis tervikuna asetseb piirkonnas D.

Funktsiooni $u(x, y)$ leidmiseks võib piirkonna D mingi kindla punkti $(x_0; y_0)$ ja jooksva punkti $(x; y)$ ühendada murdjoonega, mille osad on paralleelsed koordinaattelgedega, ja saadud joont mööda integreerida avaldist $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$:

$$u(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(x, y)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)\,dy + C \tag{15}$$

või

$$u(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(x, y_0)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x, y)\,dy + C, \tag{16}$$

kus C on meelevaldne konstant.

Olgu xy-tasapinnal antud ühelisidus kinnine piirkond D, mille rajajooneks on kinnine kõver L. Kui selles piirkonnas D on määratud kaks pidevat kahe muutuja funktsiooni $P(x, y)$ ja $Q(x, y)$, millel on seal pidevad osatuletised $\frac{\partial P}{\partial y}$ ja $\frac{\partial Q}{\partial x}$, siis kehtib nn. Greeni valem:

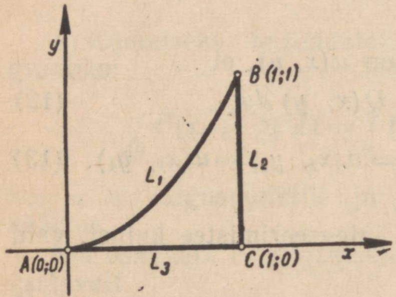
$$\int\limits_L P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy, \tag{17}$$

kus joonintegraal tuleb võtta positiivses suunas, s. o. vastu kellaosuti liikumise suunda.

Näiteid

I. *Arvutada* $\int\limits_L (x + \sqrt{y})\,ds$ *üle kinnise joone* L, *mis koosneb punktide* $A(0;\ 0)$ *ja* $B(1;\ 1)$ *vahelisest parabooli* $y = x^2$ *kaarest ning punkte* B, $C(1;\ 0)$ *ja* A *ühendavast murdjoonest.*

Lahendus. Integreerimistee koosneb kolmest joonetükist: parabooli kaarest L_1, kus $y = x^2$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, sirglõigust L_2, kus $x = 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, ja sirglõigust L_3, kus $y = 0$, $0 \leqslant x \leqslant 1$ (joon. 146).



Joon. 146.

Seega võrdub antud joonintegraal kolme joonintegraali summaga:

$$\int\limits_L (x + \sqrt{y})\,ds = \int\limits_{L_1} (x + \sqrt{y})\,ds + \int\limits_{L_2} (x + \sqrt{y})\,ds + \int\limits_{L_3} (x + \sqrt{y})\,ds.$$

Kasutades nüüd valemit (4), teisendame iga liidetava tavaliseks integraaliks.

Joone L_1 puhul on $y' = 2x$, seega $ds = \sqrt{1 + (2x)^2}\,dx$ ja

$$\int\limits_{L_1} (x + \sqrt{y})\,ds = \int\limits_0^1 (x + x)\sqrt{1 + 4x^2}\,dx = \frac{1}{4}\int\limits_0^1 8x\sqrt{1 + 4x^2}\,dx =$$

$$= \left[\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3}\sqrt{(1 + 4x^2)^3}\right]_0^1 = \frac{1}{6}(5\sqrt{5} - 1).$$

Joone L_2 puhul on $ds = dy$, sest sirglõik L_2 on paralleelne y-teljega. Seega

$$\int_{L_2} (x+\sqrt{y})\, ds = \int_0^1 (1+\sqrt{y})\, dy = \left[y + \frac{2}{3}\sqrt{y^3} \right]_0^1 = \frac{5}{3}.$$

Joone L_3 puhul on $ds = dx$ ja

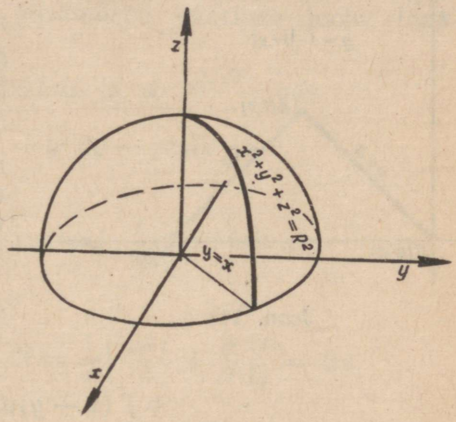
$$\int_{L_3} (x+\sqrt{y})\, ds = \int_0^1 x\, dx = \frac{1}{2}.$$

Niisiis on

$$\int_L (x+\sqrt{y})\, ds = \frac{1}{6}(5\sqrt{5}-1) + \frac{5}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5\sqrt{5}}{6} + 2 \approx 3{,}86.$$

II. *Arvutada* $\int_L (x+y)\,ds$, kus L on joone $x^2+y^2+z^2 = R^2$, $y = x$ *tükk, mis asetseb esimeses oktandis.*

Lahendus. Nagu joone L võrrandeist nähtub, on integreerimisteeks sfääri ja tema keskpunkti läbiva tasapinna lõikejoone tükk, seega ringjoone kaar (joon. 147).



Joon. 147.

Avaldame selle joone võrrandi parameetrilisel kujul, valides parameetriks koordinaadi x. Saame $x = t$, $y = t$, $z = \sqrt{R^2 - 2t^2}$, kusjuures kaare ühes otspunktis on $z = 0$ ehk $\sqrt{R^2 - 2t^2} = 0$, millest $t = \frac{R}{\sqrt{2}}$ ($t > 0$, sest esimeses oktandis on $x > 0$), teises otspunktis on aga $z = R$ ehk $\sqrt{R^2 - 2t^2} = R$, millest $t = 0$.

Avaldame nüüd kaare diferentsiaali ds parameetri kaudu. Et $\frac{dx}{dt} = 1$, $\frac{dy}{dt} = 1$ ja $\frac{dz}{dt} = \frac{-2t}{\sqrt{R^2-2t^2}}$, siis

$$ds = \sqrt{1^2 + 1^2 + \frac{4t^2}{R^2 - 2t^2}}\, dt = \frac{R\sqrt{2}}{\sqrt{R^2 - 2t^2}}\, dt.$$

Seega on antud joonintegraal

$$\int_L (x+y)\, ds = 2\sqrt{2}\, R \int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}} \frac{t}{\sqrt{R^2 - 2t^2}}\, dt =$$

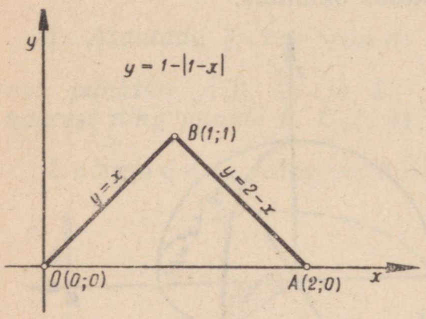
$$=\left[-\sqrt{2}\,R\,\sqrt{R^2-2t^2}\right]_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}}=\sqrt{2}R^2.$$

III. *Arvutada* $\int\limits_L (x+y)\,dx+x^2\,dy$, *kus* L *on joon* $y=1-|1-x|$ *punktist* $(2;\ 0)$ *punktini* $(0;\ 0)$.

Lahendus. Et $|1-x|=\begin{cases}1-x, \text{ kui } 1-x\geqslant 0 \text{ ehk } x\leqslant 1,\\ x-1, \text{ kui } 1-x<0 \text{ ehk } x>1,\end{cases}$

siis joone võrrand on

$$y=\begin{cases}x, & \text{kui } x\leqslant 1,\\ 2-x, & \text{kui } x>1.\end{cases}$$



Joon. 148.

Seega koosneb integreerimistee sirglõigust AB, kus $y=2-x$, $2\geqslant x>1$, ja sirglõigust BO, kus $y=x$, $1\geqslant x\geqslant 0$ (joon. 148).

Antud joonintegraal võrdub niisiis kahe joonintegraali summaga, milles üks liidetav on võetud üle lõigu AB ja teine üle lõigu BO:

$$\int\limits_L (x+y)\,dx+x^2\,dy=$$
$$=\int\limits_{AB}(x+y)\,dx+x^2\,dy+$$
$$+\int\limits_{BO}(x+y)\,dx+x^2\,dy.$$

Teisendame nüüd saadud integraalid tavalisteks integraalideks ühest muutujast, näiteks muutujast x. Selleks asendame kummaski liidetavas y ja dy selle avaldisega x-st, mille määrab integreerimistee võrrand, kusjuures integraali alumiseks rajaks võtame lõigu alguspunkti ja ülemiseks rajaks lõpp-punkti abstsissi väärtuse. Et lõigul AB on $dy=-dx$ ja lõigul BO on $dy=dx$, siis

$$\int\limits_{AB}(x+y)\,dx+x^2\,dy=\int\limits_2^1[(x+2-x)+x^2(-1)]\,dx=$$
$$=\left[2x-\frac{x^3}{3}\right]_2^1=\frac{1}{3}$$

ja

$$\int\limits_{BO}(x+y)\,dx+x^2\,dy=\int\limits_1^0(2x+x^2)\,dx=\left[x^2+\frac{x^3}{3}\right]_1^0=-\frac{4}{3}.$$

Järelikult

$$\int_L (x+y)\,dx + x^2\,dy = \frac{1}{3} - \frac{4}{3} = -1.$$

IV. *Arvutada* $\int_L xy\,dz + z\sqrt{1-y^2}\,dy - yz\,dx$, *kus* L *on kruvijoone* $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = \frac{t}{\pi}$ *kaar punktist, kus* $t = 0$, *punktini, kus* $t = 2\pi$.

Lahendus. Teisendame antud joonintegraali tavaliseks integraaliks parameetrist t. Selleks asendame integreeritavas avaldises muutujad x, y, z ja nende diferentsiaalid vastavate parameetriliste avaldistega joone võrrandeist. Nii saadud integraali alumiseks rajaks võtame parameetri väärtuse joone alguspunktis ja ülemiseks rajaks parameetri väärtuse joone lõpppunktis.

Et $dx = -\sin t\,dt$, $dy = \cos t\,dt$ ja $dz = \frac{dt}{\pi}$, siis

$$\int_L xy\,dz + z\sqrt{1-y^2}\,dy - yz\,dx =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\cos t \sin t}{\pi} + \frac{t}{\pi}\cos^2 t + \frac{t}{\pi}\sin^2 t\right) dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (\cos t \sin t + t)\,dt = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin^2 t}{2} + \frac{t^2}{2}\right]_0^{2\pi} = 2\pi.$$

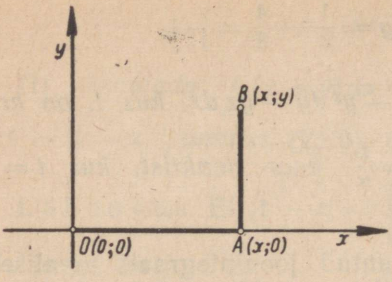
V. *Leida funktsioon* $u(x, y)$, *kui*

$$du(x, y) = \left(\frac{\cos x}{1+y^2} - 1\right) dx + \frac{2y(1-\sin x)}{(1+y^2)^2}\,dy.$$

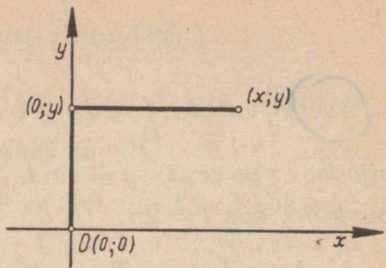
Lahendus. Nagu antud täisdiferentsiaali avaldisest näha, on otsitava funktsiooni osatuletised

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\cos x}{1+y^2} - 1 \quad \text{ja} \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = \frac{2y(1-\sin x)}{(1+y^2)^2}$$

kõikjal pidevad. Nõutud funktsiooni saamiseks võime antud täisdiferentsiaali integreerida mistahes joont mööda, kusjuures tulemus ei sõltu integreerimistee kujust. Seetõttu valime integreerimisteeks niisuguse joone, mida mööda integreerimine toimub kõige lihtsamalt. Selleks osutub punktist (0; 0) punktini (x; y) kulgev murdjoon, mille üksikud lõigud on paralleelsed koordinaattelgedega. Nagu nähtub joonistelt 149 ja 150, on nii-



Joon. 149.



Joon. 150.

suguseid jooni kaks. Mõlemat joont mööda avaldub otsitav funktsioon kujul

$$u(x, y) = \int\limits_{(0;0)}^{(x;y)} \left(\frac{\cos x}{1+y^2} - 1\right) dx + \frac{2y(1-\sin x)}{(1+y^2)^2}\, dy + C.$$

Kui integreerime joonisel 149 kujutatud murdjoont mööda [vastavalt valemile (16)], siis saame

$$u(x, y) = \int\limits_{OA} \left(\frac{\cos x}{1+y^2} - 1\right) dx + \frac{2y(1-\sin x)}{(1+y^2)^2}\, dy +$$

$$+ \int\limits_{AB} \left(\frac{\cos x}{1+y^2} - 1\right) dx + \frac{2y(1-\sin x)}{(1+y^2)^2}\, dy + C.$$

Et lõigu OA võrrand on $y=0$, millest $dy=0$, ja alguspunkti abstsiss on 0 ning lõpp-punkti abstsiss x, siis

$$\int\limits_{OA} \left(\frac{\cos x}{1+y^2} - 1\right) dx + \frac{2y(1-\sin x)}{(1+y^2)^2}\, dy = \int\limits_0^x (\cos x - 1)\, dx = \sin x - x.$$

Lõigu AB alguspunkti ordinaat on 0, lõpp-punkti ordinaat y ja joone võrrand $x = \text{const}$, millest $dx = 0$, seega

$$\int\limits_{AB} \left(\frac{\cos x}{1+y^2} - 1\right) dx + \frac{2y(1-\sin x)}{(1+y^2)^2}\, dy = \int\limits_0^y \frac{2y(1-\sin x)}{(1+y^2)^2}\, dy =$$

$$= (1-\sin x) \int\limits_0^y \frac{2y}{(1+y^2)^2}\, dy = \left[(1-\sin x)\left(-\frac{1}{1+y^2}\right)\right]_0^y =$$

$$=\frac{\sin x-1}{1+y^2}+1-\sin x.$$

Niisiis

$$u(x,\ y)=\sin x-x+\frac{\sin x-1}{1+y^2}+1-\sin x+C$$

ehk

$$u(x,\ y)=\frac{\sin x-1}{1+y^2}-x+C.$$

On kerge veenduda, et joonisel 150 kujutatud murdjoont mööda integreerides [vastavalt valemile (15)] saame

$$u(x,\ y)=\int\limits_0^y\frac{2y}{(1+y^2)^2}\,dy+\int\limits_0^x\left(\frac{\cos x}{1+y^2}-1\right)dx+C,$$

kusjuures viimases integraalis vaatleme muutujat y konstandina. Seega

$$u(x,\ y)=\left[-\frac{1}{1+y^2}\right]_0^y+\left[\frac{\sin x}{1+y^2}-x\right]_0^x+C$$

ehk

$$u(x,\ y)=\frac{\sin x-1}{1+y^2}-x+C.$$

VI. 1) *Kas joonintegraali* $\int\limits_L\frac{y\,dx-x\,dy}{x^2+y^2}$ *puhul on integreeritav avaldis mingi kahe muutuja funktsiooni täisdiferentsiaal?*

2) *Arvutada selle joonintegraali väärtus, kui L on ruudu ABCD kontuur, kus* $A(-1;\ -1)$, $B(1;\ -1)$, $C(1;\ 1)$ *ja* $D(-1;\ 1)$.

3) *Arvutada selle joonintegraali väärtus, kui L on ruudu* $A_1B_1C_1D_1$ *kontuur* L_1, *kus* $A_1(0;1)$, $B_1(2;\ 1)$, $C_1(2;\ 3)$ *ja* $D_1(0;\ 3)$.

4) *Selgitada eelmistele küsimustele saadud vastuste sobivust teooriaga.*

L a h e n d u s. 1) Integreeritavale avaldisele võime anda kuju

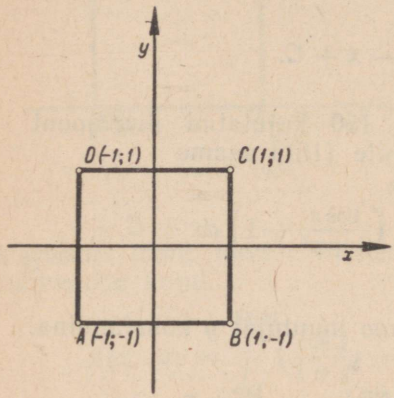
$$\frac{y}{x^2+y^2}\,dx+\frac{-x}{x^2+y^2}\,dy.$$

Et

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)=\frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{x^2+y^2}\right)=-\frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

siis on integreeritava avaldise puhul tingimus (11) täidetud. Seega leidub niisugune kahe muutuja funktsioon $u(x, y)$, mille täisdiferentsiaaliks on antud integraalialune funktsioon.



Joon. 151.

2) Antud joonintegraal üle ristküliku $ABCD$ kontuuri L (joon. 151) avaldub kujul

$$\int\limits_L \frac{y\,dx-x\,dy}{x^2+y^2}=\int\limits_{AB}\frac{y\,dx-x\,dy}{x^2+y^2}+$$

$$+\int\limits_{BC}\frac{y\,dx-x\,dy}{x^2+y^2}+\int\limits_{CD}\frac{y\,dx-x\,dy}{x^2+y^2}+$$

$$+\int\limits_{DA}\frac{y\,dx-x\,dy}{x^2+y^2}.$$

Sirglõik AB on määratud avaldistega $y=-1$ ja $-1\leqslant$ $\leqslant x\leqslant 1$. Seega $dy=0$ ja

$$\int\limits_{AB}\frac{y\,dx-x\,dy}{x^2+y^2}=-\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2+1}=\Big[-\arctan x\Big]_{-1}^{1}=-\frac{\pi}{2}.$$

Sirglõik BC on määratud avaldistega $x=1$ ja $-1\leqslant y\leqslant 1$. Seega $dx=0$ ja

$$\int\limits_{BC}\frac{y\,dx-x\,dy}{x^2+y^2}=-\int\limits_{-1}^{1}\frac{dy}{1+y^2}=-\frac{\pi}{2}.$$

Lõigu CD puhul on $y=1$ ja $1\geqslant x\geqslant -1$, seega $dy=0$ ja

$$\int\limits_{CD}\frac{y\,dx-x\,dy}{x^2+y^2}=\int\limits_{1}^{-1}\frac{dx}{x^2+1}=-\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2+1}=-\frac{\pi}{2}.$$

Lõigu DA puhul on $x=-1$, $1\geqslant y\geqslant -1$, $dx=0$. Seega

$$\int\limits_{DA}\frac{y\,dx-x\,dy}{x^2+y^2}=\int\limits_{1}^{-1}\frac{dy}{1+y^2}=-\frac{\pi}{2}.$$

Niisiis

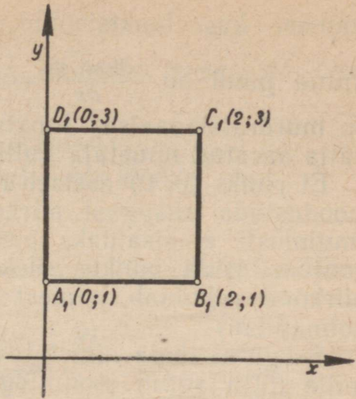
$$\int\limits_L \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2+y^2} = -2\pi.$$

3) Antud joonintegraal üle ristküliku $A_1B_1C_1D_1$ kontuuri L_1 (joon. 152) avaldub kujul

$$\int\limits_{L_1} \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2+y^2} = \int\limits_{A_1B_1} \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2+y^2} +$$

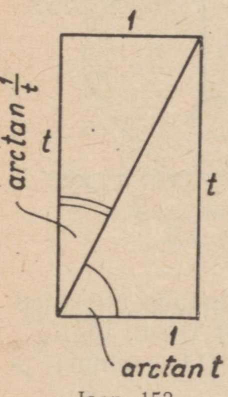
$$+ \int\limits_{B_1C_1} \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2+y^2} + \int\limits_{C_1D_1} \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2+y^2} +$$

$$+ \int\limits_{D_1A_1} \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2+y^2}.$$



Joon. 152.

Nagu nähtub joniselt 152, on lõigul A_1B_1 $y=1$, $dy=0$ ja $0 \leqslant x \leqslant 2$, lõigul B_1C_1 $x=2$, $dx=0$ ja $1 \leqslant y \leqslant 3$, lõigul C_1D_1 $y=3$, $dy=0$ ja $2 \geqslant x \geqslant 0$ ning lõigul D_1A_1 $x=0$, $dx=0$ ja $3 \geqslant y \geqslant 1$. Seega



Joon. 153.

$$\int\limits_{L_1} \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2+y^2} = \int\limits_0^2 \frac{dx}{x^2+1} - \int\limits_1^3 \frac{2\,dy}{4+y^2} +$$

$$+ \int\limits_2^0 \frac{3\,dx}{x^2+9} + 0 = \Big[\operatorname{arctan} x\Big]_0^2 - \Big[\operatorname{arctan}\frac{y}{2}\Big]_1^3 +$$

$$+ \Big[\operatorname{arctan}\frac{x}{3}\Big]_2^0 = \operatorname{arctan} 2 - \operatorname{arctan}\frac{3}{2} +$$

$$+ \operatorname{arctan}\frac{1}{2} - \operatorname{arctan}\frac{2}{3} = \operatorname{arctan} 2 + \operatorname{arctan}\frac{1}{2} -$$

$$-\left(\operatorname{arctan}\frac{3}{2} + \operatorname{arctan}\frac{2}{3}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0,$$

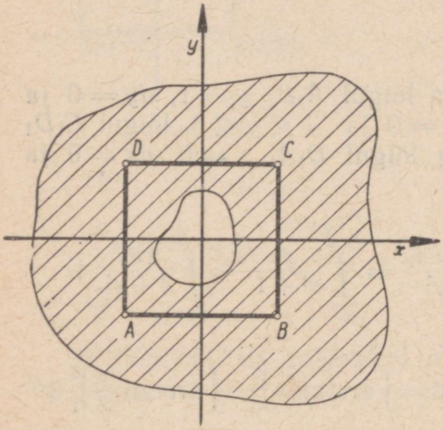
sest $\operatorname{arctan} t + \operatorname{arctan}\frac{1}{t} = \frac{\pi}{2}$, nagu nähtub joniselt 153.

4) Nagu selgus punktis 1, on joonintegraali alune avaldis mingi kahe muutuja funktsiooni $u(x, y)$ täisdiferentsiaal. Valemi (14) põhjal peab seega antud joonintegraal võrduma nulliga üle iga kinnise joone, mis asetseb tervikuna ühelisidusas piir-

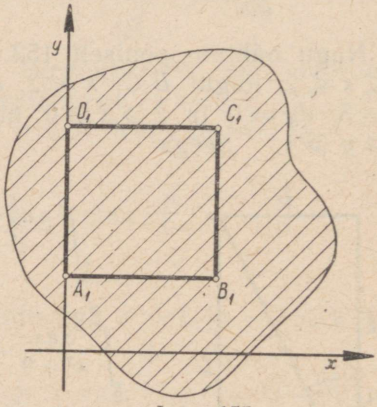
konnas, kus funktsioonid $\frac{\partial u(x, y)}{\partial x}$ ja $\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}$ on pidevad. Antud juhul on $\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{y}{x^2 + y^2}$ ja $\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = -\frac{x}{x^2 + y^2}$, mis on murdratsionaalsed funktsioonid ja on seega pidevad kõikjal, välja arvatud nimetaja nullkoht (0; 0).

Et punkt (0; 0) asetseb ruudu $ABCD$ sees, siis ei ole võimalik moodustada niisugust piirkonda, mis rahuldaks korraga kolme tingimust: ei sisaldaks punkti (0; 0), sisaldaks ruudu $ABCD$ kontuuri kõiki punkte, oleks ühelisidus. (Joonisel 154 esitatud piirkond rahuldab esimest ja teist tingimust, kuid ei rahulda kolmandat.)

Seega ei täida nimetatud ruudu kontuur valemi (14) eeldusi, mille tõttu antud joonintegraal üle selle joone ei tarvitse võrduda nulliga. Niisiis on punktis 2 saadud vastus -2π teooriaga kooskõlas.



Joon. 154.



Joon. 155.

Ruudu $A_1B_1C_1D_1$ puhul on aga võimalik moodustada niisugust piirkonda, mis rahuldab mainitud kolme tingimust (joon. 155).

Seega täidab selle ruudu kontuur valemi (14) eeldusi ja punktis 3 saadud vastus 0 sobib teooriaga.

VII. *Näidata, et* $\int\limits_L (x^3 - 3xy^2)\, dx + (y^3 - 3x^2y)\, dy = 0$ *mistahes kinnise joone* L *puhul.*

L a h e n d u s. Et funktsioonid $P(x, y) = x^3 - 3xy^2$ ja $Q(x, y) = y^3 - 3x^2y$ on kõikjal pidevad, siis on tingimus (11) $\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$ piisav selleks, et antud joonintegraal oleks 0 üle iga kinnise joone L.

Antud juhul on $\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = -6xy$ ja $\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = -6xy$, millest nähtub, et tingimus (11) on täidetud. Seega on ülesandes püstitatud väide tõestatud.

VIII. *Kasutades Greeni valemit, arvutada*

$$\int_L x^2(\sin x - y)\, dx + (xy^2 - \cos y)\, dy,$$

kui L on ringjoon $x^2 + y^2 = R^2$.

Lahendus. Vastavalt Greeni valemis (17) kasutatud tähistele on antud juhul

$$P(x, y) = x^2(\sin x - y),$$
$$Q(x, y) = xy^2 - \cos y,$$
$$\frac{\partial P}{\partial y} = -x^2, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = y^2.$$

Et kõik need neli funktsiooni on ringjoonega L määratud piirkonnas pidevad, siis täidab antud joonintegraal Greeni valemi eeldusi. Seega on

$$\int_L x^2(\sin x - y)\, dx + (xy^2 - \cos y)\, dy = \iint_D (y^2 + x^2)\, dx\, dy,$$

kus integreerimispiirkonnaks on ring $x^2 + y^2 \leqslant R^2$.

Saadud kahekordse integraali arvutamiseks kasutame polaarkoordinaate:

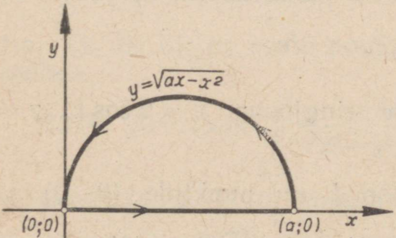
$$\iint_D (y^2 + x^2)\, dx\, dy = \int_0^{2\pi} d\Theta \int_0^R \varrho^3\, d\varrho =$$

$$= \frac{R^4}{4} \int_0^{2\pi} d\Theta = \frac{\pi}{2} R^4.$$

IX. *Arvutada*

$$\int_L (e^x \sin y - y)\, dx + (y^2 + e^x \cos y)\, dy,$$

kus L on ringjoone $y = \sqrt{ax - x^2}$ *kaar punktist* $(a; 0)$ *punktini* $(0; 0)$.



Joon. 156.

Lahendus. Antud ülesandes on integreerimisteeks L ringjoone $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$ ülemine poolkaar vastu kellaosuti liikumise suunda (joon. 156).

Kui joonele L veel juurde võtta x-telje lõik punktist $(0; 0)$ punktini $(a; 0)$, siis tekib kinnine kõver L_1. Juurdevõetud lõigul on aga $y = 0$, mistõttu ka $dy = 0$. Seega osutub sellel lõigul integreeritav avaldis identselt võrdseks nulliga, mille tõttu

$$\int_L (e^x \sin y - y)\, dx + (y^2 + e^x \cos y)\, dy =$$
$$= \int_{L_1} (e^x \sin y - y)\, dx + (y^2 + e^x \cos y)\, dy.$$

Viimase integraali arvutamiseks võib aga kasutada Greeni valemit (17), sest funktsioonid $P(x, y) = e^x \sin y - y$, $Q(x, y) = y^2 + e^x \cos y$, $\frac{\partial P}{\partial y} = e^x \cos y - 1$ ja $\frac{\partial Q}{\partial x} = e^x \cos y$ on joonega L_1 piiratud ühelisidusas piirkonnas pidevad. Et $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$, siis teisendub antud joonintegraal Greeni valemi kohaselt kahekordseks integraaliks $\iint_D dx\, dy$, kus piirkond D on poolring raadiusega $\frac{a}{2}$.

Nagu teada, esitab saadud kahekordne integraal integreerimispiirkonna pindala. Järelikult on antud integraali väärtus $\frac{1}{2}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2$ ehk $\frac{\pi a^2}{8}$.

Joonintegraal kaare pikkuse järgi

2358. Arvutada joonintegraal $\int_L y\, ds$ punktide $(0; 0)$ ja $(1; 2)$ vahelist parabooli $y^2 = 4x$ kaart mööda.

2359. Leida $\int_L (x + y)\, ds$ kolmnurga ABC kontuuri mööda, kui $A(0; 0)$, $B(1; 0)$ ja $C(0; 1)$.

2360. Arvutada $\int_L (x^2 + y^2)\, ds$ punkte $(1; 1)$ ja $(4; 4)$ ühendavat sirglõiku mööda.

2361. Leida $\int_L xy\, ds$, kui joon L on punktide $(a; 0)$ ja $(0; b)$ vaheline ellipsi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ kaar.

2362. Leida $\int_L (x^2 + y^2)^2\, ds$ üle ringjoone $x = 2 \cos t$, $y = 2 \sin t$.

2363. Arvutada $\int_L y^2\, ds$, kui joon L on punktide $(0; 0)$ ja $(2a\pi; 0)$ vaheline tsükloidi $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ kaar.

2364. Arvutada $\int_L (x^2 + y^2 + z)\, ds$ mööda kruvijoont $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$ punktide vahel, kus $t = 0$ ja $t = 2\pi$.

2365. Arvutada $\int_L xyz\, ds$ üle joone $x = t$, $y = \frac{1}{3}(2t)^{\frac{3}{2}}$, $z = \frac{1}{2}t^2$ punktide vahel, kus $t = 0$ ja $t = 1$.

Joonintegraal koordinaatide järgi

2366. Arvutada $\int_L (x^2 - y^2)\, dx$ üle parabooli $y = x^3$ kaare punktist (0; 0) punktini (2; 8).

2367. Arvutada $\int_L 2xy\, dx + x^2\, dy$, kui joon L on parabooli $y = x^4$ kaar punktist (0; 0) punktini (1; 1).

2368. Leida $\int_L (x^2 + y)\, dx$ üle punkte A, B ja C ühendava murdjoone, kui $A(0;\ 0)$, $B(1;\ 0)$ ja $C(0;\ 1)$.

2369. Arvutada $\int_L \arctan\frac{y}{x}\, dy - dx$, kui joon L on kinnine kõver, mis algab punktist (0; 0) ja kulgeb parabooli $y = x^2$ kaart mööda punktini (1; 1) ning sealt sirget $y = x$ mööda tagasi punkti (0; 0).

2370. Arvutada $\int_L (x + y)\, dx + (x - y)\, dy$ üle ellipsi $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ kaare punktist $(a;\ 0)$ punktini $(0;\ b)$.

2371. Leida $\int_L \frac{x}{y}\, dx + \frac{dy}{y-1}$, kui L on tsükloidi $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$ kaar punktist $t = \frac{\pi}{6}$ punktini $t = \frac{\pi}{3}$.

2372. Arvutada $\int_L (x^2 + 2xy)\, dy$, kus L on ellipsi $x = 3\cos t$, $y = 2\sin t$ kaar punktist $t = \pi$ punktini $t = 0$.

2373. Arvutada $\int_L (2x - 5y + 3z)\, dx$ punktist (0; 0; 0) punktini (1; 0; 0) ja sealt punktini (1; 1; 1) kulgevat murdjoont mööda.

2374. Arvutada $\int_L \frac{x\, dx + y\, dy + z\, dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - x - y + 2z}}$ punktist (1; 1; 1) punktini (4; 4; 4) tõmmatud sirglõiku mööda.

Ülesandeis **2375—2379** arvutada antud kujundi pindala joonintegraali abil:

2375. Ring $x = R\cos\varphi$, $y = R\sin\varphi$.

2376. Trapets, mille tipud on (0; 0), (4; 0), (2; 2) ja (0; 2).

2377. Ellips $x = a\cos t$, $y = b\sin t$.

2378. Astroid $x = a\cos^3 t$, $y = b\sin^3 t$.

2379. Kardioid $x = a(2\cos t - \cos 2t)$, $y = a(2\sin t - \sin 2t)$.

Täisdiferentsiaalide integreerimine

2380. Arvutada joonintegraal $\int\limits_{(0;\,0)}^{(1;\,1)} xy\,dx + (y - x)\,dy$ üle joone a) $y = x$, b) $y = x^2$, c) $x = y^2$, d) $y = x^3$.

2381. Arvutada $\int\limits_{(0;\,0)}^{(1;\,1)} 2xy\,dx + x^2\,dy$ üle joone a) $y = x$, b) $y = x^2$, c) $x = y^2$, d) $y = x^3$. Võrrelda saadud tulemusi eelmise ülesande tulemustega ning selgitada nende erinevuse põhjus.

2382. Leida $\int\limits_L (x + y)\,dx + (x - y)\,dy$ üle ellipsi $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ (vt. 2370).

2383. Arvutada $\int\limits_{(2;\,1)}^{(1;\,2)} \frac{dy}{x} - \frac{y\,dx}{x^2}$.

2384. Arvutada $\int\limits_{(0;\,0)}^{(3;\,\frac{\pi}{3})} e^x(\cos y\,dx - \sin y\,dy)$.

Ülesandeis **2385—2390** leida funktsioon u:

2385. $du = (9x^2 + 2xy^2)\,dx + (2yx^2 - 2y)\,dy$.

2386. $du = (\cos y - 2xe^y)\,dx - (x^2e^y + x\sin y)\,dy$.

2387. $du = e^y\,dx + (xe^y - 2y)\,dy$.

2388. $du = \frac{dx}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{y\,dy}{x^2 + y^2 + x\sqrt{x^2 + y^2}}$.

2389. $du = (2xy^2z^2 - y)\,dx + (2x^2yz^2 - x - z)\,dy + (2x^2y^2z - y)\,dz$.

2390. $du = \left(\frac{y}{z} - e^{yz}\right)dx + \left(\frac{x}{z} - xze^{yz}\right)dy - \left(\frac{xy}{z^2} + xye^{yz}\right)dz$.

Greeni valemi rakendusi

Ülesandeis **2391—2393** on joonintegraali integreerimistee L positiivses suunas võetud kinnine joon, mis piirab ühelisidusat lõplikku piirkonda D. Teisendada joonintegraal Greeni valemi abil kahekordseks integraaliks:

2391. $\int\limits_L xy(x^2+y)\,dx + x^2(x^2+y)\,dy.$

2392. $\int\limits_L (x+\sqrt{x^2+y^2})\,dx + y[y(x+1) +$
$+\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})]\,dy.$

2393. $\int\limits_L [2x(x+\cos y)+e^{xy}]\,dx + (y^2 - x^2\sin y + e^{xy})\,dy.$

Ülesandeis **2394—2397** teisendada antud joonintegraal kahekordseks integraaliks ja arvutada tema väärtus:

2394. $\int\limits_L (x+y^2)\,dx + (x+y)^2 dy$, kui joon L on kolmnurga ABC kontuur, kusjuures $A(1;\,0)$, $B(1;\,1)$ ja $C(0;\,1)$.

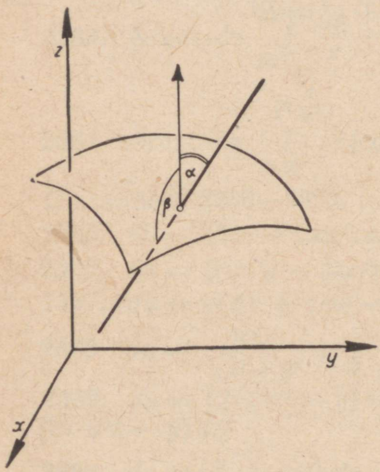
2395. $\int\limits_L (5x-3y)\,dx + (x-4y)\,dy$, kui L on positiivses suunas võetud ringjoon $x^2+y^2=1$.

2396. $\int\limits_L (x^2+y)\,dx - (x+y^3)\,dy$, kui L on positiivses suunas võetud ellips $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

2397. $\int\limits_L e^{y^2-x^2}[(x+\cos 2xy)\,dx + (\sin 2xy - y)\,dy]$, kui L on positiivses suunas võetud ringjoon $x^2+y^2=R^2$.

§ 21. PINDINTEGRAAL

Pinda, mis on antud võrrandiga $z = z(x, y)$, kus funktsioon $z(x, y)$ on ühene ja omab üheselt määratud pidevaid osatuletisi $\frac{\partial z}{\partial x}$ ja $\frac{\partial z}{\partial y}$, nimetatakse *kahepoolseks pinnaks*. Geomeetriliselt on kahepoolsel pinnal pidevalt muutuv puutuvtasapind ja z-teljega paralleelse sirgega ei ole tal rohkem kui üks ühine punkt.



Joon. 157.

Kahepoolse pinna mingist punktist tõmmatud normaal moodustab z-telje positiivse suunaga kaks nurka, millest üks on teravnurk (kui normaal ei ole z-teljega risti) ja teine nürinurk (joon. 157).

Seda pinnapoolt, millest väljuv normaal moodustab z-telje sihilise vektoriga teravnurga, nimetatakse ülemiseks pinnapooleks, vastaspoolt aga alumiseks.

Olgu funktsioon $F(x, y, z)$ määratud ja pidev kahepoolse pinna $z = z(x, y)$ mingi tüki S punktides. Jaotame pinnatüki S mingil viisil n osapiirkonnaks S_i pindalaga ΔS_i, valime igas osapiirkonnas mingi punkti $(x_i; y_i; z_i)$ ning moodustame summa $\sum_{i=1}^{n} F(x_i, y_i, z_i)\Delta S_i$. Kui sellel summal on olemas piirväärtus $\max d_i \to 0$ puhul, kus d_i on osapiirkonna S_i diameeter, siis nimetatakse seda piirväärtust funktsiooni $F(x, y, z)$ *pindintegraaliks pindala järgi* üle pinnatüki S ja tähistatakse

$$\lim_{\max d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} F(x_i, y_i, z_i) \Delta S_i = \iint_S F(x, y, z) dS.$$

Pindintegraali arvutamine taandub kahekordse integraali arvutamisele:

$$\iint_S F(x, y, z) dS =$$

$$= \iint_D F[x, y, z(x, y)] \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx\, dy, \qquad (1)$$

kus integreerimispiirkond D on pinnatüki S projektsioon xy-tasapinnal.

Kui $F(x, y, z) \equiv 1$, siis esitab

$$\iint_S dS = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx\, dy \qquad (2)$$

pinnatüki S pindala.

Pindintegraal pindala järgi ei sõltu pinnapoole valikust.

Olgu pinnatükk S valitud pinna $z = z(x, y)$ kindlaksmääratud poolel ja jaotatud n osaks S_i, mille projektsioonid xy-tasapinnal olgu pindalaga D_i. Valime igas osapiirkonnas S_i mingi punkti $(x_i; y_i; z_i)$ ja moodustame summa $\sum_{i=1}^{n} F(x_i, y_i, z_i) D_i$. Kui sellel summal on olemas piirväärtus $\max d_i \to 0$ puhul, kus d_i on osapiirkonna projektsiooni D_i diameeter, siis nimetatakse seda piirväärtust funktsiooni $F(x, y, z)$ **pindintegraaliks koordinaatide järgi** üle pinnatüki S kindlaksmääratud poole ja tähistatakse

$$\lim_{\max d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} F(x_i, y_i, z_i) D_i = \iint_S F(x, y, z) dx\, dy.$$

Pindintegraali sümbol ei näita, kumb pinnapool on valitud, mistõttu seda tuleb eraldi mainida.

Arvutamiseks teisendatakse see pindintegraal kahekordseks integraaliks üle integreeritava pinnatüki projektsiooni xy-tasapinnal, kusjuures ülemise pinnapoole projektsioon loetakse positiivseks ja alumise pinnapoole projektsioon negatiivseks:

$$\iint_S F(x, y, z) dx\, dy = \iint_D F[x, y, z(x, y)] dx\, dy, \qquad (3)$$

kui S on valitud pinna ülemisel poolel, ja

$$\iint_S F(x, y, z) dx\, dy = -\iint_D F[x, y, z(x, y)] dx\, dy, \qquad (4)$$

kui S on valitud pinna alumisel poolel.

Kui pinnatükk S on võetud silinderpinnal, mille moodustajad on paralleelsed z-teljega, siis on S projektsioon xy-tasapinnal joon, aga mitte pinnatükk, mille tõttu

$$\iint_S F(x, y, z)\,dx\,dy = 0. \tag{5}$$

Analoogiliselt võib moodustada integraalid

$$\iint_S F(x, y, z)\,dz\,dx \quad \text{ja} \quad \iint_S F(x, y, z)\,dy\,dz,$$

mille puhul pinna poolsus määratakse selle järgi, missuguse nurga moodustab valitud normaali suund vastavalt y-telje või x-telje positiivse suunaga.

Pindintegraali üldkuju koordinaatide järgi on

$$\iint_S P\,dx\,dy + Q\,dy\,dz + R\,dz\,dx,$$

kus P, Q ja R on kolme muutuja x, y ja z pidevad funktsioonid kahepoolse pinna S punktides.

Kui pind S koosneb üksikutest pinnatükkidest: $S = S_1 + S_2 + \ldots + S_n$, siis

$$\iint_S P\,dx\,dy + Q\,dy\,dz + R\,dz\,dx = \iint_{S_1} P\,dx\,dy + Q\,dy\,dz + R\,dz\,dx + \\ + \iint_{S_2} P\,dx\,dy + Q\,dy\,dz + R\,dz\,dx + \ldots + \\ + \iint_{S_n} P\,dx\,dy + Q\,dy\,dz + R\,dz\,dx. \tag{6}$$

Samuti

$$\iint_S F(x, y, z)\,dS = \iint_{S_1} F(x, y, z)\,dS + \iint_{S_2} F(x, y, z)\,dS + \ldots + \\ + \iint_{S_n} F(x, y, z)\,dS. \tag{7}$$

Kui V on kinnise sileda pinnaga S piiratud ruumiosa, milles funktsioonid $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ ja $R(x, y, z)$ ning nende esimest järku osatuletised on pidevad, siis seob pindintegraali üle pinna S väliskülje kolmekordse integraaliga üle ruumiosa V nn. O s t r o g r a d s k i v a l e m:

$$\iint_S P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy = \\ = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz \tag{8}$$

ehk

$$\iint_S (P\cos\lambda + Q\cos\mu + R\cos\nu)\,dS =$$

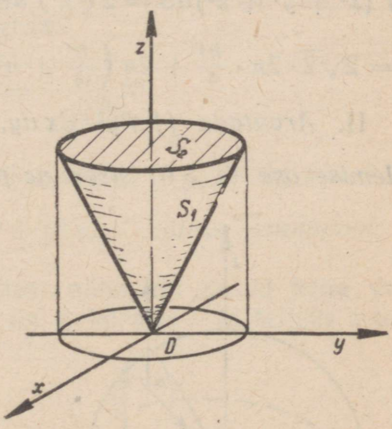
$$= \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz, \tag{9}$$

kus λ, μ ja ν on nurgad, mida pinna S väline normaal moodustab koordinaattelgede positiivsete suundadega.

Näiteid

I. *Arvutada* $\iint_S (x^2 + y^2 + z^2)\,dS$, *kui integreerimispiirkonnaks* S *on koonuse* $\sqrt{x^2 + y^2} \leqslant z \leqslant h$ *pind.*

Lahendus. Antud juhul koosneb integreerimispiirkond S kahest pinnatükist (joon. 158): koonilise pinna $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ tükist S_1 ja tasapinna $z = h$ tükist S_2.



Joon. 158.

Seega võrdub antud pindintegraal üle pinna S pindintegraalide summaga üle pinna S_1 ja pinna S_2:

$$\iint_S (x^2 + y^2 + z^2)\,dS =$$

$$= \iint_{S_1} (x^2 + y^2 + z^2)\,dS +$$

$$+ \iint_{S_2} (x^2 + y^2 + z^2)\,dS.$$

Arvutamiseks teisendame saadud integraalid valemi (1) järgi kahekordseteks integraalideks, kusjuures integreerimispiirkondadeks tuleb võtta vastavalt pinnatükkide S_1 ja S_2 projektsioonid ühel koordinaattasapinnal. Antud juhul sobib selleks xy-tasapind, kus niihästi S_1 kui ka S_2 projektsiooniks osutub üks ja sama ring $x^2 + y^2 \leqslant h^2$ (joon. 158).

Avaldame nüüd pinna diferentsiaali. Koonilise pinna puhul on $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, seega $z'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $z'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ ja

$$dS = \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}}\,dx\,dy = \sqrt{2}\,dx\,dy.$$

Tasapinnalise pinnatüki puhul on $z = h$, seega $z'_x = z'_y = 0$ ja $dS = dx\,dy$.

Niisiis

$$\iint\limits_S (x^2 + y^2 + z^2)\,dS = \iint\limits_D (x^2 + y^2 + x^2 + y^2)\sqrt{2}\,dx\,dy +$$

$$+ \iint\limits_D (x^2 + y^2 + h^2)\,dx\,dy = 2\sqrt{2}\int\limits_{-h}^{h} dx \int\limits_{-\sqrt{h^2-x^2}}^{\sqrt{h^2-x^2}} (x^2 + y^2)\,dy +$$

$$+ \int\limits_{-h}^{h} dx \int\limits_{-\sqrt{h^2-x^2}}^{\sqrt{h^2-x^2}} (x^2 + y^2 + h^2)\,dy.$$

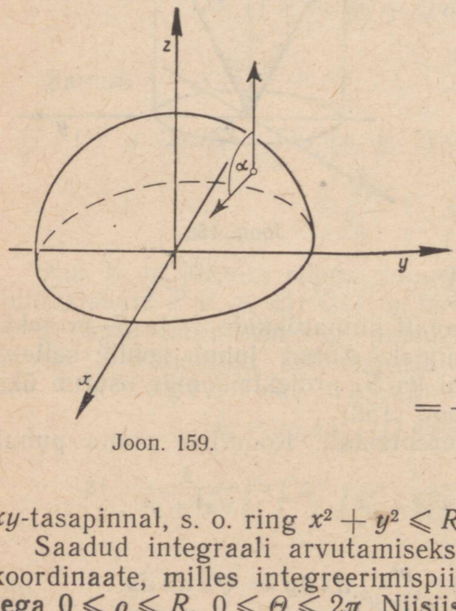
Nagu näha, osutub integreerimine tülikaks, mille tõttu võtame kasutusele polaarkoordinaadid $x = \varrho\cos\Theta$, $y = \varrho\sin\Theta$. Siis on $x^2 + y^2 = \varrho^2$ ja integreerimispiirkond on määratud võrratustega $0 \leqslant \varrho \leqslant h$ ja $0 \leqslant \Theta \leqslant 2\pi$.

Seega on

$$\iint\limits_S (x^2 + y^2 + z^2)\,dS = 2\sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi} d\Theta \int\limits_0^{h} \varrho^3\,d\varrho + \int\limits_0^{2\pi} d\Theta \int\limits_0^{h} (\varrho^2 + h^2)\,\varrho\,d\varrho =$$

$$= 2\sqrt{2}\cdot 2\pi\cdot\frac{h^4}{4} + 2\pi\left(\frac{h^4}{4} + h^2\cdot\frac{h^2}{2}\right) = \frac{\pi}{2}(\sqrt{8} + 3)\,h^4 \approx 9{,}16h^4.$$

II. *Arvutada* $\iint\limits_S x^2y^2z\,dx\,dy$, *kus* S *on sfääri* $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ *ülemise osa* $(z \geqslant 0)$ *sisemine pinnapool.*



Joon. 159.

Lahendus. Ülemise poolsfääri puhul on $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$. Et ülemise poolsfääri sisemisest pinnapoolest väljuv normaal moodustab z-telje positiivse suunaga nürinurga (joon. 159), siis tuleb antud integraali teisendamisel kahekordseks integraaliks kasutada valemit (4), mille järgi

$$\iint\limits_S x^2y^2z\,dx\,dy =$$

$$= -\iint\limits_D x^2y^2\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\,dx\,dy,$$

kus integreerimispiirkond D on pinnatüki S projektsioon xy-tasapinnal, s. o. ring $x^2 + y^2 \leqslant R^2$ (joon. 159).

Saadud integraali arvutamiseks on sobiv kasutada polaarkoordinaate, milles integreerimispiirkond on määratud võrratustega $0 \leqslant \varrho \leqslant R$, $0 \leqslant \Theta \leqslant 2\pi$. Niisiis on

$$-\iint_D x^2y^2\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dx\,dy=$$

$$=-\int_0^{2\pi}\sin^2\Theta\cos^2\Theta\,d\Theta\int_0^R \varrho^5\sqrt{R^2-\varrho^2}\,d\varrho.$$

Avaldame sisemise integraali asendusega $u=\sqrt{R^2-\varrho^2}$, millest $\varrho^2=R^2-u^2$ ja $\varrho\,d\varrho=-u\,du$. Seega

$$\int_0^R \varrho^5\sqrt{R^2-\varrho^2}\,d\varrho=-\int_R^0 (R^2-u^2)^2u^2\,du=\frac{8R^7}{105}$$

ning

$$-\iint_D x^2y^2\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dx\,dy=-\frac{2R^7}{105}\int_0^{2\pi}\sin^2 2\Theta\,d\Theta=$$

$$=-\frac{2R^7}{105}\cdot\frac{1}{2}\left[\Theta-\frac{\sin 4\Theta}{4}\right]_0^{2\pi}=-\frac{2R^7}{105}\pi.$$

Järelikult on nõutud pindintegraal

$$\iint_S x^2y^2z\,dx\,dy=-\frac{2\pi}{105}R^7.$$

III. *Arvutada* $I=\iint_S xz\,dx\,dy+xy\,dy\,dz+yz\,dx\,dz$, *kus* S *on keha* $0\leqslant z\leqslant 1$, $0\leqslant x$, $0\leqslant y$, $x^2+y^2\leqslant 1$ *väline pinnapool.*

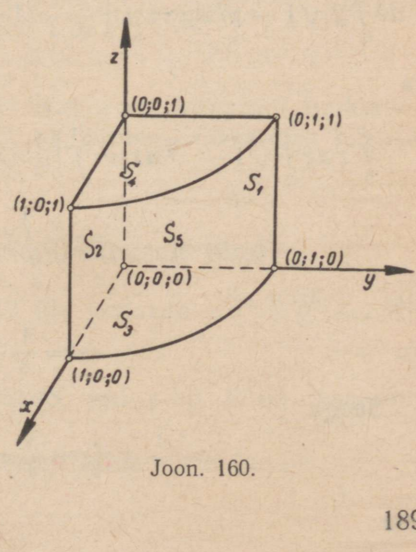
Lahendus. Nagu võrratustest näha, on antud keha veerand püstsilindrist, mille raadius on 1, kõrgus 1 ja teljeks z-telg (joon. 160).

Seega koosneb integreerimispind S viiest pinnatükist $S_1, S_2, \ldots, S_5$. Tähistame pindintegraali üle pinnatüki S_i sümboliga I_i. Valemi (6) kohaselt on siis antud pindintegraal

$$I=I_1+I_2+I_3+I_4+I_5.$$

Olgu pinnatükiks S_1 tahk $x=0$, kus ka $dx=0$; pinnatükiks S_2 tahk $y=0$, kus $dy=0$; pinnatükiks S_3 tahk $z=0$, kus $dz=0$; pinnatükiks S_4 tahk $z=1$, kus $dz=0$ ja pinnatükiks S_5 silinderpind $x^2+y^2=1$.

On kerge veenduda, et pin-



Joon. 160.

dadel S_1, S_2 ja S_3 on pindintegraali alune avaldis $xz\,dx\,dy + xy\,dy\,dz + yz\,dx\,dz = 0$, mille tõttu $I_1 = I_2 = I_3 = 0$.

Pinnatükil S_4 teisendub integreeritav avaldis kujule $x\,dx\,dy$. Selle pinna välise poole normaali suund ühtib z-telje positiivse suunaga, seega tuleb välist pinnapoolt lugeda ülemiseks pinnapooleks. Tema projektsioon xy-tasapinnal ühtib tahuga S_3 (joon. 160) ja on järelikult veerandring, mis on määratud võrratustega $0 \leqslant x \leqslant \sqrt{1-y^2}$, $0 \leqslant y \leqslant 1$. Seega on valemi (3) kohaselt

$$I_4 = \iint\limits_{D_4} x\,dx\,dy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\sqrt{1-y^2}} x\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 (1-y^2)\,dy = \frac{1}{3}.$$

Nagu nähtub jooniselt 160, on pinnatüki S_5 projektsioon xy-tasapinnal ringjoone kaar, mille tõttu kahekordne integraal üle selle projektsiooni on 0. Sama pinnatüki projektsioon yz-tasapinnal ühtib tahuga S_1 ja on seega ruut $0 \leqslant y \leqslant 1$, $0 \leqslant z \leqslant 1$; projektsioon xz-tasapinnal ühtib tahuga S_2 ja on järelikult ruut $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant z \leqslant 1$. Et silinderpinna S_5 välise pinnapoole normaal moodustab niihästi x-telje kui ka y-telje positiivse suunaga teravnurga, siis tuleb mõlemad projektsioonid lugeda positiivseks. Seega

$$I_5 = \iint\limits_{S_5} xz\,dx\,dy + xy\,dy\,dz + yz\,dx\,dz = \iint\limits_{S_1} y\sqrt{1-y^2}\,dy\,dz +$$

$$+ \iint\limits_{S_2} z\sqrt{1-x^2}\,dx\,dz = \int\limits_0^1 dz \int\limits_0^1 y\sqrt{1-y^2}\,dy + \int\limits_0^1 z\,dz \int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx.$$

Et

$$\int\limits_0^1 dz \int\limits_0^1 y\sqrt{1-y^2}\,dy = \int\limits_0^1 \left[-\frac{1}{3}(1-y^2)\sqrt{1-y^2}\right]_0^1 dz = \frac{1}{3}\int\limits_0^1 dz = \frac{1}{3}$$

ja

$$\int\limits_0^1 z\,dz \int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int\limits_0^1 \left[\frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x\right)\right]_0^1 z\,dz =$$

$$= \frac{\pi}{4}\int\limits_0^1 z\,dz = \frac{\pi}{8},$$

siis

$$I_5 = \frac{1}{3} + \frac{\pi}{8}.$$

Seega

$$I = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{\pi}{8} = \frac{2}{3} + \frac{\pi}{8} \approx 1{,}059.$$

IV. *Näidata, et pindintegraali*

$$\iint\limits_S [f_1(x, y, z) + f_2(y, z)]dy\,dz + [\varphi_1(x, y, z) + \varphi_2(x, z)]dx\,dz +$$
$$+ [\psi_1(x, y, z) + \psi_2(x, y)]dx\,dy$$

väärtus ei sõltu funktsioonidest $f_2(y, z)$, $\varphi_2(x, z)$ ja $\psi_2(x, y)$, kui integreerimine toimub kinnise sileda pinna S väliskülge mööda ning funktsioonid $f_1(x, y, z)$, $f_2(y, z)$, $\varphi_1(x, y, z)$, $\varphi_2(x, z)$, $\psi_1(x, y, z)$, $\psi_2(x, y)$ on koos oma esimest järku osatuletistega pidevad selle pinna ja temaga piiratud ruumiosa punktides.

Lahendus. Nii antud pindintegraali alune avaldis kui ka pind S, üle mille integraal on võetud, täidab Ostrogradski valemi (8) eeldusi. Seega võime antud pindintegraali nimetatud valemi abil teisendada kolmekordseks integraaliks üle pinnaga S piiratud ruumiosa V.

Vastavalt Ostrogradski valemis kasutatud tähistele on antud ülesande puhul

$$P = f_1(x, y, z) + f_2(y, z),$$
$$Q = \varphi_1(x, y, z) + \varphi_2(x, z),$$
$$R = \psi_1(x, y, z) + \psi_2(x, y).$$

Järelikult $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}$ ja $\frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial \psi_1}{\partial z}$. Niisiis

$$\iint\limits_S [f_1(x, y, z) + f_2(y, z)]dy\,dz + [\varphi_1(x, y, z) +$$
$$+ \varphi_2(x, z)]dx\,dz + [\psi_1(x, y, z) + \psi_2(x, y)]dx\,dy =$$
$$= \iiint\limits_V \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \frac{\partial \psi_1}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz.$$

Nagu näha, ei sõltu saadud kolmekordne integraal funktsioonidest $f_2(y, z)$, $\varphi_2(x, z)$ ja $\psi_2(x, y)$, millega ülesandes püstitatud väide on tõestatud.

Pindintegraal pinna diferentsiaali järgi

2398. Arvutada $\iint\limits_S (x^2 + y^2)dS$ üle koonuse $\sqrt{x^2 + y^2} \leqslant z \leqslant 1$ pinna.

2399. Arvutada $\iint\limits_S (x + y + z)dS$, kui pind S on tasapinna $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} + z = 1$ see tükk, mis asetseb esimeses oktandis.

2400. Arvutada $\iint\limits_S [z^2 + 2(x^2 + y^2)]dS$, kui S on koonuse pinna $x^2 + y^2 = z^2$ see tükk, mille temast lõikab välja silinder $x^2 + y^2 = 1$.

2401. Arvutada $\iint\limits_S x^2y^2\,dS$, kui S on poolsfääri $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ pind.

2402. Arvutada $\iint\limits_S \frac{dS}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, kui S on hüperboolse paraboloidi $z = xy$ see tükk, mille temast lõikab välja silinder $x^2 + y^2 = 1$.

Pindintegraal koordinaatide järgi

2403. Arvutada $\iint\limits_S (x^2 + y^2)\,dx\,dy$, kui S on tasapinna $z = 0$ alumise poole see tükk, mis on piiratud ringjoonega $x^2 + y^2 = R^2$.

2404. Arvutada $\iint\limits_S dx\,dy$, kui S on ellipsoidi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ülalpool xy-tasapinda asetseva tüki väline pinnapool.

2405. Arvutada $\iint\limits_S x^2\,dy\,dz + y^2\,dx\,dz + z^2\,dx\,dy$, kui S on kuubi $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, $0 \leqslant z \leqslant 1$ väline pinnapool.

2406. Arvutada $\iint\limits_S xz\,dx\,dy + xy\,dy\,dz + yz\,dx\,dz$, kus S on tasapindadega $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ ja $x + y + z = 1$ määratud püramiidi väline pinnapool.

2407. Arvutada $\iint\limits_S y^2z\,dx\,dy + xz\,dy\,dz + x^2y\,dx\,dz$, kui pind S on keha $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$, $z \leqslant x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 \leqslant 1$ väline pinnapool.

Ostrogradski valemi rakendusi

Ülesandeis **2408—2410** teisendada antud pindintegraal üle kinnise pinna S välise külje kolmekordseks integraaliks üle selle pinnaga piiratud ruumiosa V:

2408. $\iint\limits_S (x^2 + y^2)\,dy\,dz + (y^2 + z^2)\,dz\,dx + (x^2 + z^2)\,dx\,dy$.

2409. $\iint\limits_S \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}[\cos(N, x) + \cos(N, y) + \cos(N, z)]\,dS$.

2410. $\iint\limits_S \frac{x\cos(N, x) + y\cos(N, y) + z\cos(N, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dS$, kui koordinaatide alguspunkt ei asetse pinnal S ega temaga piiratud ruumiosas.

2411. Leida pindintegraali

$$\iint\limits_S [x + f(y, z)]dy\,dz + [y + \varphi(x, z)]dx\,dz + [z + \psi(x, y)]dx\,dy$$

väärtus, kui S on kinnine pind, mis piirab keha ruumalaga V, ja funktsioonid $f(y, z)$, $\varphi(x, z)$ ning $\psi(x, y)$ on pidevad niihästi selle pinna kui ka pinnaga piiratud ruumiosa punktides.

2412. Arvutada

$$\iint\limits_S (x^3 + y^3)\,dy\,dz + (x^4 z + y^3)\,dx\,dz + (x^3 y^3 + z^3)\,dx\,dy,$$

kui S on sfääri $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ väline pinnapool.

§ 22. READ

Arvujadast $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ moodustatud avaldist

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \quad (1)$$

nimetatakse r e a k s, arve $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ r e a l i i k m e t e k s.

Rea (1) n esimese liikme summat

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$$

nimetatakse rea (1) o s a s u m m a k s.

Kui on olemas piirväärtus $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, siis nimetatakse rida (1) k o o n d u v a k s ja arvu S selle r e a s u m m a k s. Kui mainitud piirväärtust ei eksisteeri, siis nimetatakse rida (1) h a j u v a k s.

Rea (1) koonduvuseks t a r v i l i k t i n g i m u s on

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0. \quad (2)$$

G e o m e e t r i l i n e r i d a

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^n + \ldots$$

on hajuv siis, kui $|q| \geqslant 1$, ja koonduv siis, kui $|q| < 1$, kusjuures rea summa on $S = \frac{a}{1-q}$.

V õ r d l u s t u n n u s. Kui rea (1) ja rea

$$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n + \ldots \quad (3)$$

kõik liikmed on positiivsed ning alates mingist n väärtusest on $u_n \leqslant v_n$, siis järeldub rea (3) koonduvusest rea (1) koonduvus ning rea (1) hajuvusest rea (3) hajuvus.

D'A l e m b e r t'i t u n n u s. Kui rea (1) kõik liikmed on positiivsed ja

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = r, \quad (4)$$

siis $r < 1$ puhul rida (1) koondub ja $r > 1$ puhul hajub. Kui $r = 1$, siis jätab D'Alembert'i tunnus koonduvuse küsimuse lahtiseks.

C a u c h y t u n n u s. Kui positiivsete liikmetega rea (1) puhul

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{u_n} = r, \tag{5}$$

siis $r < 1$ puhul rida (1) koondub ja $r > 1$ puhul hajub. $r = 1$ puhul võib rida (1) osutuda nii koonduvaks kui ka hajuvaks.

I n t e g r a a l t u n n u s. Kui $u_n = f(n)$, kus $f(x)$ on positiivne, monotoonselt kahanev, pidev funktsioon piirkonnas $a \leqslant x$, siis on rida (1) ja päratu integraal $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ kas üheaegselt koonduvad või üheaegselt hajuvad.

Kui rea (1) liikmed on mistahes märkidega, kusjuures selle rea liikmete absoluutväärtustest moodustatud rida

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \ldots + |u_n| + \ldots \tag{6}$$

on koonduv, siis nimetatakse rida (1) a b s o l u u t s e l t k o o n d u v a k s.

Kui rida (1) on koonduv, aga rida (6) ei ole koonduv, siis nimetatakse rida (1) t i n g i m i s i k o o n d u v a k s.

L e i b n i z'i t u n n u s. Kui vahelduvate märkidega reas

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + u_{2k-1} - u_{2k} + \ldots,$$

kus iga $u_n > 0$, on

$$u_1 > u_2 > \ldots > u_n > \ldots \tag{7}$$

ja

$$\lim_{n \to \infty} u_n = 0, \tag{8}$$

siis on see rida koonduv.

Kui vahelduvate märkidega rida on koonduv, siis on

$$|S - S_n| < u_{n+1}. \tag{9}$$

F u n k t s i o n a a l r e a

$$f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots \tag{10}$$

puhul nimetatakse argumendi x nende väärtuste hulka, mille puhul rida (10) koondub, selle rea k o o n d u v u s p i i r k o n n a k s.

Funktsiooni $S(x) = \lim\limits_{n \to \infty} S_n(x) = \lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{i=1}^{n} f_i(x)$ nimetatakse rea (10) summaks ja funktsiooni $R_n(x) = S(x) - S_n(x)$ rea j ä ä g i k s.

Rida (10) nimetatakse ü h t l a s e l t k o o n d u v a k s vahemikus $a \leqslant x \leqslant b$, kui iga $\varepsilon > 0$ puhul leidub niisugune naturaalarv N, et $|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$, niipea kui $n > N$, sõltumatult argumendi x väärtusest nimetatud vahemikus.

W e i e r s t r a s s i t u n n u s. Kui on olemas niisugune koonduv positiivsete liikmetega arvurida

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots,$$

et $|f_n(x)| \leqslant u_n$ iga x väärtuse puhul vahemikust $a \leqslant x \leqslant b$, siis on rida (10) selles vahemikus ühtlaselt ja absoluutselt koonduv.

Rida

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots, \tag{11}$$

kus $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ on konstandid, nimetatakse a s t m e r e a k s.

Iga astmerea (11) puhul leidub niisugune positiivne arv R, et rida on absoluutselt koonduv, kui $|x| < R$, s. t. piirkonnas $-R < x < R$, ja hajuv, kui $|x| > R$. Arvu R nimetatakse a s t m e r e a k o o n d u v u s r a a d i u s e k s. Kui rida on koonduv ainult punktis $x = 0$, siis $R = 0$; kui rida on absoluutselt koonduv iga x väärtuse puhul, siis $R \to \infty$.

Koonduvusvahemiku otstes $x = R$ ja $x = -R$ tuleb rea koonduvust eraldi uurida.

Kui $a_i \neq 0$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, ja eksisteerib piirväärtus $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$, siis on rea (11) koonduvusraadius

$$R = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|. \tag{12}$$

Astmerida on ühtlaselt koonduv igas kinnises vahemikus, mis asetseb tervenisti rea koonduvuspiirkonnas.

Kui funktsionaalrea (10) liikmed $f_n(x)$ on pidevad vahemikus $a \leqslant x \leqslant b$ ja rida (10) on samas vahemikus ühtlaselt koonduv, siis võib teda liikmeti integreerida:

$$\int_a^x S(x)\,dx = \int_a^x f_1(x)\,dx + \int_a^x f_2(x)\,dx + \ldots + \int_a^x f_n(x)\,dx + \ldots \tag{13}$$

Kui rida (10) on koonduv vahemikus $a \leqslant x \leqslant b$, kusjuures selles vahemikus on olemas pidevad tuletised $f_1'(x)$, $f_2'(x)$, ... ning rida $f_1'(x) + f_2'(x) + \ldots + f_n'(x) + \ldots$ on seal ühtlaselt koonduv, siis võib rida (10) vahemikus $a \leqslant x \leqslant b$ liikmeti diferentseerida:

$$S'(x) = f_1'(x) + f_2'(x) + \ldots + f_n'(x) + \ldots \tag{14}$$

Astmerida (11) võib tema koonduvuspiirkonnas liikmeti integreerida ja diferentseerida, kusjuures saadud ridade koonduvusraadiused on samad mis lähtereal.

Kui funktsioonil $F(x)$ on olemas mistahes järku tuletised ja kui on olemas niisugune vahemik $|x-a| < R$, milles selle funktsiooni T a y l o r i v a l e m i

$$F(x) = F(a) + F'(a)(x-a) + \frac{F''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \\ + \frac{F^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x) \tag{15}$$

j ä ä k l i i k m e piirväärtus

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0, \tag{16}$$

siis on $F(x)$ selles vahemikus arendatav T a y l o r i r e a k s:

$$F(x) = F(a) + F'(a)(x-a) + \frac{F''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \\ + \frac{F^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots \tag{17}$$

Kui $a = 0$, siis omandab rida (17) kuju

$$F(x) = F(0) + F'(0)\,x + \frac{F''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \\ + \frac{F^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots \tag{18}$$

Rida (18) nimetatakse M a c l a u r i n i r e a k s.

Jääkliikme hindamisel võib kasutada L a g r a n g e'i v a l e m i t

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}F^{(n+1)}[a + \Theta(x-a)], \quad \text{kus} \quad 0 < \Theta < 1. \tag{19}$$

Funktsiooni $F(x)$ mistahes viisil saadud astmerida on selle funktsiooni Taylori rida, s. o. kui mingis vahemikus

$$F(x) = a_0 + a_1(x-a) + \ldots + a_n(x-a)^n + \ldots,$$

siis

$$a_0 = F(a), \; a_1 = F'(a), \; \ldots, \; a_n = \frac{F^{(n)}(a)}{n!} \ldots \tag{20}$$

Funktsioone e^x, $\sin x$ ja $\cos x$ saab arendada reaks iga x puhul, kusjuures

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, \tag{21}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots, \tag{22}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots \qquad (23)$$

Binoomrida

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!} x + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!} x^n + \ldots \qquad (24)$$

koondub vahemikus $-1 < x < 1$.

Rida

$$1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \ldots + \frac{1}{n^k} + \ldots \qquad (25)$$

koondub, kui $k > 1$, ja hajub, kui $k \leqslant 1$.

Kui $k = 1$, siis nimetatakse rida (25) harmooniliseks reaks.

Näiteid

I. *Leida rea* $\frac{1}{2\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 8} + \frac{1}{8\cdot 11} + \ldots + \frac{1}{(3n-1)(3n+2)} + \ldots$ *summa.*

Lahendus. Antud rea üldliige on teisendatav kujule

$$\frac{1}{(3n-1)(3n+2)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n+2}\right)$$

ja rida seega kujule

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{8}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{11}\right) +$$

$$+ \ldots + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n+2}\right) + \ldots$$

Selle rea n esimese liikme summa S_n on niisiis

$$S_n = \frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{11}\right) +\right.$$

$$\left. + \ldots + \left(\frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n+2}\right)\right] = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} -\right.$$

$$\left. - \ldots - \frac{1}{3n-1} + \frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n+2}\right] = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3n+2}\right]$$

ja antud rea summa

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3n+2}\right) = \frac{1}{6}.$$

Viimase piirväärtuse olemasolu näitab muuseas, et antud rida on koonduv.

II. *Kas rida* $\frac{2}{1}+\frac{3}{5}+\frac{4}{9}+\frac{5}{13}+\ldots$ *on koonduv või hajuv?*

L a h e n d u s. On kerge veenduda, et antud rea üldliige on $u_n=\frac{n+1}{4n-3}$.

Vaatame, kas rea koonduvuseks tarvilik tingimus (2) on täidetud. Selleks arvutame

$$\lim_{n\to\infty} u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{4n-3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{4-\frac{3}{n}}=\frac{1}{4}.$$

Seega ei ole koonduvuseks tarvilik tingimus täidetud ja antud rida on hajuv.

III. *Kas rida* $\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{8}+\ldots+\sin\frac{\pi}{2^n}+\ldots$ *on koonduv või hajuv?*

L a h e n d u s. Antud rea koonduvust on sobiv uurida ridade võrdlemise teel. Moodustame rea

$$\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{8}+\ldots+\frac{\pi}{2^n}+\ldots$$

See rida kui geomeetriline rida, mille tegur $q=\frac{1}{2}$, on koonduv. Et $0<\sin\frac{\pi}{2^n}<\frac{\pi}{2^n}$, siis on antud rea iga liige väiksem koonduva rea vastavast liikmest ja seega on antud rida samuti koonduv.

IV. *Uurida rea* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}}{2^{n-1}(2n-1)}$ *koonduvust.*

L a h e n d u s. Antud rea koonduvuse uurimiseks on sobiv kasutada D'Alembert'i tunnust. Selleks leiame piirväärtuse (4):

$$r=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{(n+1)-1}}{2^{(n+1)-1}[2(n+1)-1]}:\frac{3^{n-1}}{2^{n-1}(2n-1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n2^{n-1}(2n-1)}{2^n(2n+1)3^{n-1}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3(2n-1)}{2(2n+1)}=\frac{3}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n+1}=\frac{3}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}}=\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{2}=\frac{3}{2}>1.$$

Seega on rida hajuv.

V. *Näidata, et* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{2n}}{(n!)^3} = 0.$

L a h e n d u s. Moodustame rea $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{(n!)^3}$. See rida koondub D'Alembert'i tunnuse põhjal, sest

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{2(n+1)}}{[(n+1)!]^3} : \frac{n^{2n}}{(n!)^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{2(n+1)}(n!)^3}{[(n+1)!]^3 n^{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{2n}(n+1)^2}{(n+1)^3 n^{2n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^2}{n+1} = \frac{e^2}{\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)} = 0.$$

Järelikult on moodustatud rea koonduvuseks tarvilik tingimus (2) rahuldatud, s. o.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{2n}}{(n!)^3} = 0.$$

VI. *Uurida rea* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{k^n}$ $(k > 0)$ *koonduvust.*

L a h e n d u s. Et antud rea üldliikme avaldises esinevad astmed astendajaga n ja n^2, siis on rea koonduvuse uurimiseks sobiv kasutada Cauchy tunnust. Selleks leiame piirväärtuse (5):

$$r = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{k^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{k} =$$

$$= \frac{1}{k} \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{k} e = \frac{e}{k}.$$

Rida on koonduv siis, kui $\frac{e}{k} < 1$ ehk $k > e$. Rida on hajuv siis, kui $\frac{e}{k} > 1$ ehk $k < e$. Kui $\frac{e}{k} = 1$ ehk $k = e$, siis jääb koonduvuse küsimus lahtiseks.

VII. *Uurida rea*

$$\frac{1}{2\cdot 1} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(n+1)(3n-2)} + \ldots$$

koonduvust.

L a h e n d u s. On kerge veenduda, et D'Alembert'i ja Cauchy tunnused ei ole selle ülesande puhul rakendatavad; seetõttu kasutame rea koonduvuse uurimisel integraaltunnust.

Antud juhul on $f(x)=\frac{1}{(x+1)(3x-2)}$, mis on positiivne, pidev ja monotoonselt kahanev vahemikus $x \geqslant 1$. Seega on antud rida koonduv (hajuv) siis, kui $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{(x+1)(3x-2)}$ on koonduv (hajuv).

Avaldame selle integraali:

$$\int\limits_1^\infty \frac{dx}{(x+1)(3x-2)}=\frac{1}{5}\int\limits_1^\infty\left(\frac{3}{3x-2}-\frac{1}{x+1}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{5}\left[\ln\frac{3x-2}{x+1}\right]_1^\infty=\frac{1}{5}\left(\lim_{x\to\infty}\ln\frac{3x-2}{x+1}-\ln\frac{1}{2}\right).$$

Et $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x-2}{x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3-\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x}}=3$ ja funktsioon $\ln x$ on punkti $x=3$ ümbruses pidev, siis on $\lim\limits_{x\to\infty}\ln\frac{3x-2}{x+1}=\ln\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x-2}{x+1}=$ $=\ln 3$.

Seega $\int\limits_1^\infty\frac{dx}{(x+1)(3x-2)}=\frac{1}{5}\left(\ln 3+\ln 2\right)$ on koonduv. Järelikult koondub ka antud rida.

VIII. *Uurida rea* $\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\ldots$ ***koonduvust.***

Lahendus. Antud rida on vahelduvate märkidega rida. Tema koonduvuse määramiseks kasutame Leibniz'i tunnust. Antud rea puhul on $u_n=\frac{1}{n}$ ja $u_{n+1}=\frac{1}{n+1}$, seega $u_n>u_{n+1}$ ja $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$. Niisiis on rida koonduv. Et antud rea liikmete absoluutväärtustest moodustatud rida $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$ kui harmooniline rida on hajuv, siis on antud rida tingimisi koonduv.

IX. *Kui suure n korral ei erine rea*

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\ldots$$

esimese n liikme summa rea summast rohkem kui 0,05 võrra?

L a h e n d u s. Antud rida on koonduv (näide VIII) ja vahelduvate märkidega. Seega on rea summa asendamisel tema n esimese liikme summaga tehtava vea ülemmäär valemi (9) järgi väiksem kui esimese ärajäetava liikme absoluutväärtus. Niisiis peab esimene ärajäetav liige u_{n+1} täitma tingimust $u_{n+1} \leqslant 0{,}05$. Järelikult peab otsitav arv n rahuldama võrratust $\frac{1}{n+1} \leqslant 0{,}05$ ehk $\frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{20}$, millest $n+1 \geqslant 20$ ehk $n \geqslant 19$.

X. *Leida rea*

$$\frac{\sin x}{2^x} + \frac{\sin 2x}{2^{2x}} + \ldots + \frac{\sin nx}{2^{nx}} + \ldots \qquad (*)$$

koonduvuspiirkond.

L a h e n d u s. Antud rida on funktsionaalrida, mille liikmete väärtused sõltuvad peale järjekorranumbri n veel muutujast x. Meil on vaja leida need argumendi x väärtused, mille puhul rida (*) koondub. Antud rida on ilmselt koonduv siis, kui $x = k\pi$, kus $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, sest siis on rea iga liige 0. Muude x väärtuste puhul omavad rea liikmed niihästi positiivseid kui ka negatiivseid väärtusi. Seega on antud rida absoluutselt koonduv nende x väärtuste puhul, mille puhul on koonduv rida

$$\frac{|\sin x|}{2^x} + \frac{|\sin 2x|}{2^{2x}} + \ldots + \frac{|\sin nx|}{2^{nx}} + \ldots \qquad (**)$$

Et $\frac{|\sin nx|}{2^{nx}} \leqslant \frac{1}{2^{nx}}$ argumendi x mistahes väärtusel, siis kuulub rea

$$\frac{1}{2^x} + \frac{1}{2^{2x}} + \ldots + \frac{1}{2^{nx}} + \ldots \qquad (***)$$

koonduvuspiirkond ka rea (**) koonduvuspiirkonda.

Cauchy tunnuse järgi on rida (***) koonduv siis, kui

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^{nx}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^x} = \frac{1}{2^x} < 1 \text{ ehk } 1 < 2^x, \text{ millest } x > 0.$$

Seega on antud rida (*) absoluutselt koonduv iga positiivse x väärtuse puhul.

Uurime nüüd antud rea koonduvust veel juhul $x < 0$, kuid $x \neq k\pi$, kus k on negatiivne täisarv.

Kui $x < 0$, siis $y = -x > 0$ ja $\frac{\sin nx}{2^{nx}} = \frac{\sin(-ny)}{2^{-ny}} = 2^{ny} \sin(-ny)$. Et $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{ny} \to \infty$, $\sin(-ny) \neq 0$ ja

$\lim\limits_{n\to\infty} \sin(-ny)$ ei eksisteeri, siis $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin nx}{2^{nx}} = \lim\limits_{n\to\infty} 2^{ny} \sin(-ny) \neq$ $\neq 0$. Seega ei ole sel puhul rea koonduvuseks tarvilik tingimus (2) täidetud ja rida on hajuv.

Niisiis koosneb antud rea koonduvuspiirkond kõikidest positiivsetest arvudest ja arvudest $k\pi$, kus $k = 0, -1, -2, \ldots$

XI. *Leida rea* $\frac{2^x}{1} + \frac{2^{2x}}{8} + \frac{2^{3x}}{27} + \ldots + \frac{2^{nx}}{n^3} + \ldots$ *ühtlase koonduvuse vahemik.*

Lahendus. Antud ülesande lahendamisel kasutame Weierstrassi tunnust. Selleks tuleb leida niisugune positiivsete liikmetega koonduv arvurida, mille ükski liige mingist järjekorranumbrist alates ei ole väiksem antud rea vastava liikme absoluutväärtusest argumendi x mistahes väärtuse puhul teatavast vahemikust. Selles argumendi väärtuste vahemikus ongi rida ühtlaselt koonduv.

Antud rea lähemal uurimisel torkab silma, et teda on sobiv võrrelda positiivsete liikmetega koonduva arvureaga (25):

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \ldots + \frac{1}{n^3} + \ldots$$

Antud rida on siis ühtlaselt koonduv niisuguses argumendi x väärtuste vahemikus, kus on rahuldatud võrratus

$$\left|\frac{2^{nx}}{n^3}\right| = \frac{2^{nx}}{n^3} \leqslant \frac{1}{n^3}. \qquad (*)$$

Korrutades moodustatud võrratuse mõlemaid pooli avaldisega $n^3 > 0$, saame $2^{nx} \leqslant 1$ ehk $2^{nx} \leqslant 2^0$, millest eksponentfunktsiooni monotoonsuse tõttu järeldub võrratus $nx \leqslant 0$ ehk, et $n > 0$, võrratus $x \leqslant 0$.

Niisiis on võrratus (*) kehtiv iga $x \leqslant 0$ puhul ja seega on antud rida ühtlaselt koonduv piirkonnas $x \leqslant 0$.

Kui $x > 0$, on antud rida hajuv, sest siis on

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{2^{(n+1)x}}{(n+1)^3} : \frac{2^{nx}}{n^3}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{(n+1)x}\, n^3}{(n+1)^3\, 2^{nx}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^x n^3}{(n+1)^3} =$$

$$= 2^x \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^3 = 2^x \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^3 = 2^x > 1.$$

Seega on antud rida ühtlaselt koonduv ainult piirkonnas $x \leqslant 0$.

XII. *Leida rea* $1 - \frac{x}{7\sqrt{2}} + \frac{x^2}{7^2\sqrt{3}} - \frac{x^3}{7^3\sqrt{4}} + \ldots +$ $+ (-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{7^{n-1}\sqrt{n}} + \ldots$ *koonduvusraadius ja koonduvusvahemik.*

L a h e n d u s. Antud rida on astmerida. Et ükski rea kordajaist ei ole null, siis võime koonduvusraadiuse määramiseks kasutada valemit (12), mille järgi

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{7^n\sqrt{n+1}}{7^{n-1}\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} 7\sqrt{1+\frac{1}{n}} = 7.$$

Seega on antud rida absoluutselt koonduv vahemikus $-7 < x < 7$ ja hajuv $|x| > 7$ puhul. Kui $x = -7$ ehk $x = (-1)\cdot 7$, siis omandab antud rida kuju

$$1 - \frac{(-1)\cdot 7}{7\sqrt{2}} + \frac{(-1)^2\cdot 7^2}{7^2\sqrt{3}} - \frac{(-1)^3\cdot 7^3}{7^3\sqrt{4}} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{(-1)^{n-1}\cdot 7^{n-1}}{7^{n-1}\sqrt{n}} + \ldots$$

ehk

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots$$

Saadud rida esitab rida (25) juhul, kus $k = \frac{1}{2}$, ning on seega hajuv.

Kui $x = 7$, omandab antud rida kuju

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots$$

See on vahelduvate märkidega rida. Et rea liikmed monotoonselt kahanevad $\left(\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$ ja $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, siis on saadud rida Leibniz'i tunnuse järgi koonduv. Et aga selle rea liikmete absoluutväärtustest moodustatud rida on hajuv, siis on antud rida punktis $x = 7$ tingimisi koonduv.

Seega on antud rida koonduv vahemikus $-7 < x \leqslant 7$.

XIII. *Leida rea* $x + 3x^3 + 3^2x^5 + \ldots + 3^{n-1}x^{2n-1} + \ldots$ *koonduvusvahemik.*

L a h e n d u s. Et antud rida on astmerida, milles esinevad ainult argumendi paarituarvulised astmed, siis pole koonduvusraadius valemi (12) kaudu määratav.

Kasutades D'Alembert'i tunnust, saame

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n x^{2n+1}}{3^{n-1}x^{2n-1}} = \lim_{n\to\infty} 3x^2 = 3x^2.$$

Seega on rida koonduv nende x väärtuste puhul, mis rahuldavad võrratust

$$3x^2 < 1 \quad \text{ehk} \quad |x| < \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Niisiis on rida koonduv vahemikus $-\frac{1}{\sqrt{3}} < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Kui $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, siis omandab antud rida kuju

$$-\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{3}{-3\sqrt{3}} + \frac{3^2}{-3^2\sqrt{3}} + \ldots + \frac{3^{n-1}}{-3^{n-1}\sqrt{3}} + \ldots$$

ehk

$$-\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} - \ldots - \frac{1}{\sqrt{3}} - \ldots$$

Et kõik selle rea liikmed on nullist erinevad võrdsed konstandid, siis pole koonduvuseks tarvilik tingimus (2) täidetud ja rida on hajuv. Kui $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, siis saame samasuguse, ainult positiivsete liikmetega rea, mis on samuti hajuv.

Seega on antud rida oma koonduvusvahemiku otstes hajuv.

XIV. *Arendada funktsioon* $\frac{5x}{3x^2 - 7x + 2}$ *Taylori reaks kohal* $x = 0$.

L a h e n d u s. Et antud funktsiooni tuletisi on tülikas avaldada, siis ei ole Taylori rea valemi kasutamine otstarbekohane. Lihtsam on toimida järgmiselt.

Lahutame esmalt antud murru osamurdude summaks (nagu ratsionaalsete funktsioonide integreerimisel):

$$\frac{5x}{3x^2 - 7x + 2} = \frac{1}{1 - 3x} + \frac{2}{x - 2}.$$

Kumbagi saadud murdudest võib vaadelda koonduva geomeetrilise rea summana.

Esimene liidetav $\frac{1}{1 - 3x} = 1 + 3x + (3x)^2 + \ldots + (3x)^n + \ldots$ on koonduv siis, kui $|3x| < 1$ ehk $|x| < \frac{1}{3}$.

Teine liidetav $\frac{2}{x - 2} = \frac{-2}{2 - x} = \frac{-1}{1 - \frac{x}{2}} = -1 + (-1) \cdot \frac{x}{2} + {}$ $+ (-1) \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \ldots + (-1) \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^n + \ldots$ on koonduv siis, kui $\left|\frac{x}{2}\right| < 1$ ehk $|x| < 2$.

Et mõlemad read on koonduvad vahemikus $-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$, siis on antud funktsioon selles vahemikus esitatav saadud ridade summana:

$$\frac{5x}{3x^2-7x+2} = [1+3x+3^2x^2+\ldots+3^nx^n+\ldots]+$$

$$+\left[-1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{2^2}-\ldots-\frac{x^n}{2^n}-\ldots\right]$$

ehk

$$\frac{5x}{3x^2-7x+2} = \left(3-\frac{1}{2}\right)x+\left(3^2-\frac{1}{2^2}\right)x^2+\ldots+\left(3^n-\frac{1}{2^n}\right)x^n+\ldots$$

Saadud rida kui astmerida ongi antud funktsiooni Taylori rida kohal $x=0$ vahemikus $-\frac{1}{3}<x<\frac{1}{3}$.

XV. *Leida viga, mis tekib avaldise* $\sqrt[4]{e^3}$ *arvutamisel valemi* $e^x \approx 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}$ *abil.*

Lahendus. Avaldis $\sqrt[4]{e^3}$ ehk $e^{\frac{3}{4}}$ võrdub funktsiooni e^x Maclaurini rea (21)

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$$

väärtusega kohal $x=\frac{3}{4}$, ülesandes antud valemi parem pool aga on selle rea nelja esimese liikme summa. Järelikult tuleb leida, kui palju erineb lõpmatu rea väärtus selle rea nelja esimese liikme summast ehk kui suur on nelja liikme puhul rea jääkliige.

Jääkliikme hindamisel kasutame Lagrange'i valemit (19), mille järgi antud juhul

$$R_3(x) = \frac{x^4}{4!}e^{\Theta x}, \quad \text{kus} \quad 0<\Theta<1.$$

Et $x=\frac{3}{4}$, siis $\Theta x<1\cdot\frac{3}{4}<1$ ja $e^{\Theta x}<e<3$.

Järelikult

$$R_3\left(\frac{3}{4}\right) < \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^4}{4!}\cdot 3 = \left(\frac{3}{4}\right)^4\cdot\frac{1}{8} < 0{,}04.$$

Seega saame antud valemit kasutades avaldisele $\sqrt[4]{e^3}$ väärtuse, mida täpne väärtus ületab vähem kui 0,04 võrra.

XVI. *Avaldise* $\frac{1}{\sqrt[4]{e^3}}$ *ligikaudseks arvutamiseks kasutatakse eelmises ülesandes antud valemit. Leida nii saadud väärtuse absoluutse vea ülemmäär.*

L a h e n d u s. Funktsiooni e^x reaksarendus (21) kohal $x = -\frac{3}{4}$ on vahelduvate märkidega rida:

$$e^{-\frac{3}{4}} = 1 - \frac{3}{1! \cdot 4} + \frac{3^2}{2! \cdot 4^2} - \ldots + (-1)^n \frac{3^n}{n! \cdot 4^n} + \ldots$$

Et $\frac{1}{\sqrt[4]{e^3}} = e^{-\frac{3}{4}}$, siis nõutakse ülesandes selle vahelduvate märkidega rea nelja esimese liikme summa erinevust rea väärtusest, mis valemi (9) kohaselt on absoluutväärtuselt väiksem rea viiendast liikmest.

Seega on nõutud absoluutse vea ülemmäär $\frac{3^4}{4! \cdot 4^4} < 0{,}014$.

XVII. *Leida rea* $1 - x^2 + x^4 - \ldots + (-1)^{n-1} x^{2(n-1)} + \ldots$ *summa ja selle integreerimise teel funktsiooni* arctan x *Taylori rida kohal* $x = 0$.

L a h e n d u s. Antud rida on geomeetriline rida teguriga $-x^2$. Järelikult on rida koonduv, kui $x^2 < 1$ ehk $|x| < 1$, kusjuures tema summa selles vahemikus on $\frac{1}{1 + x^2}$. Seega vahemikus $|x| < 1$ on

$$\frac{1}{1 + x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \ldots + (-1)^{n-1} x^{2(n-1)} + \ldots$$

Saadud rida kui astmerida võib tema koonduvusvahemiku sees liikmeti integreerida. Niisiis

$$\int_0^x \frac{dx}{1 + x^2} = \int_0^x dx - \int_0^x x^2\, dx +$$

$$+ \int_0^x x^4\, dx - \ldots + (-1)^{n-1} \int_0^x x^{2(n-1)}\, dx + \ldots,$$

kui $|x| < 1$, ehk

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n - 1} + \ldots$$

vahemikus $-1 < x < 1$.

XVIII. *Avaldada* $\int_0^x e^{-x^2}\, dx$.

L a h e n d u s. Antud integraal ei ole avaldatav elementaarfunktsioonides. Arendades aga integraalialuse funktsiooni astmereaks ja integreerides seda rida tema koonduvusvahemikus liikmeti, saame antud integraali avaldada astmereana.

Et rida (21) on koonduv iga x väärtuse puhul, siis võime selles reas argumendi x asendada avaldisega $-x^2$. Saame

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \ldots$$

Saadud rida on jällegi koonduv iga x *v*äärtuse puhul. Seega saame valemi (13) kasutamisel

$$\int_0^x e^{-x^2}\,dx = \int_0^x dx - \int_0^x x^2\,dx + \frac{1}{2!}\int_0^x x^4\,dx - \frac{1}{3!}\int_0^x x^6\,dx + \ldots +$$
$$+ \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^x x^{2n}\,dx + \ldots$$

ehk

$$\int_0^x e^{-x^2}\,dx = \frac{x}{0!1} - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)} + \ldots$$

mistahes x puhul.

XIX. *Leida diferentsiaalvõrrandi* $y'' - x^2 y = 0$ *erilahend, mis rahuldab algtingimusi* $y(0) = 1$ *ja* $y'(0) = 0$.

L a h e n d u s. Otsime antud diferentsiaalvõrrandi lahendit astmerea kujul. Olgu otsitav lahend

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + \ldots + c_n x^n + c_{n+1} x^{n+1} +$$
$$+ c_{n+2} x^{n+2} + \ldots; \qquad (*)$$

siis

$$y' = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + 4c_4 x^3 + \ldots + nc_n x^{n-1} +$$
$$+ (n+1)c_{n+1}x^n + (n+2)c_{n+2}x^{n+1} + \ldots \qquad (**)$$

ja

$$y'' = 2c_2 + 3\cdot 2c_3 x + 4\cdot 3c_4 x^2 + \ldots + n(n-1)c_n x^{n-2} +$$
$$+ n(n+1)c_{n+1}x^{n-1} + (n+2)(n+1)c_{n+2}x^n + \ldots$$

Asendades antud diferentsiaalvõrrandis y ja y'' vastavate ridadega, saame

$$[2c_2 + 3\cdot 2c_3 x + 4\cdot 3c_4 x^2 + \ldots + (n+2)(n+1)c_{n+2}x^n + \ldots] -$$
$$- [c_0 x^2 + c_1 x^3 + \ldots + c_{n-2}x^n + \ldots] = 0$$

ehk

$$2c_2 + 2\cdot 3c_3 x + (3\cdot 4c_4 - c_0)x^2 + (4\cdot 5c_5 - c_1)x^3 + \ldots +$$
$$+ [(n+1)(n+2)c_{n+2} - c_{n-2}]x^n + \ldots = 0.$$

Kordajad peavad niisiis rahuldama tingimusi:

$$2c_2 = 0 \quad \text{ehk} \quad c_2 = 0,$$
$$2\cdot 3c_3 = 0 \quad \text{ehk} \quad c_3 = 0,$$
$$(n+1)(n+2)c_{n+2} - c_{n-2} = 0, \ (n = 2, 3, 4, \ldots)$$

ehk

$$c_{n+2} = \frac{c_{n-2}}{(n+1)(n+2)}, \ (n = 2, 3, 4, \ldots). \qquad (***)$$

Antud algtingimuste kohaselt saame võrdustest (*) ja (**), et $c_0 = 1$ ja $c_1 = 0$.

Ülejäänud kordajad leiame valemi (***) abil:

$$c_4 = \frac{c_0}{3 \cdot 4} = \frac{1}{3 \cdot 4}, \quad c_5 = \frac{c_1}{4 \cdot 5} = 0, \quad c_6 = \frac{c_2}{5 \cdot 6} = 0,$$

$$c_7 = \frac{c_3}{6 \cdot 7} = 0, \quad c_8 = \frac{c_4}{7 \cdot 8} = \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8}, \quad c_9 = \frac{c_5}{8 \cdot 9} = 0,$$

$$c_{10} = \frac{c_6}{9 \cdot 10} = 0, \quad c_{11} = \frac{c_7}{10 \cdot 11} = 0,$$

$$c_{12} = \frac{c_8}{11 \cdot 12} = \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 12}, \ldots$$

Nagu näha, on kordaja

$$c_{4n} = \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 15 \cdot 16 \ldots (4n-1) \cdot 4n},$$

kus $n = 1, 2 \ldots$, ja kõik muud kordajad on nullid.

Seega on

$$y = 1 + \frac{x^4}{3 \cdot 4} + \frac{x^8}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8} + \frac{x^{12}}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 12} + \ldots +$$

$$+ \frac{x^{4n}}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 12 \ldots (4n-1)4n} + \ldots$$

Rakendades D'Alembert'i tunnust selle rea koonduvusvahemiku leidmiseks, saame

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x^{4n}}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 12 \ldots (4n-1)4n} : \frac{x^{4(n-1)}}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 12 \ldots (4n-5)4(n-1)} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{x^4}{(4n-1)4n} = 0.$$

Niisiis on saadud rida koonduv iga x puhul ning esitab antud diferentsiaalvõrrandi nõutud erilahendit.

Arvuread

Ülesandeis **2413** ja **2414** kirjutada antud rea neli esimest liiget:

2413. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}$. **2414.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n+1)^2(n+2)^2}$.

Ülesandeis **2415** ja **2416** kirjutada antud rea üldliikme avaldis võimalikult lihtsal kujul:

2415. $\frac{1}{2} + \left(\frac{2}{5}\right)^3 + \left(\frac{3}{8}\right)^5 + \ldots$

2416. $1 - \frac{2}{7} + \frac{3}{13} - \frac{4}{19} + \ldots$

2417. Teades, et $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$, leida rea $\frac{1}{1\cdot 2}+$ $+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{k(k+1)}+\ldots$ summa.

2418. Teades, et $\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)$, leida rea $\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 9}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}+\ldots$ summa.

2419. Teades, et $\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}$, leida rea $\frac{3}{4}+$ $+\frac{5}{36}+\ldots+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}+\ldots$ summa.

Ülesandeis **2420—2425** otsustada rea summa või osasumma arvutamise teel, kas antud rida on koonduv või hajuv:

2420. $1+1+1+\ldots+1+\ldots$

2421. $-1+1-1+1-\ldots+(-1)^n+\ldots$

2422. $3+\frac{3}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\ldots$

2423. $1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{8}{27}+\ldots$

2424. $\frac{1}{3\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 12}+\ldots+\frac{1}{3n(3n+3)}+\ldots$

2425. $\frac{1}{3\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 11}+\frac{1}{11\cdot 15}+\ldots+\frac{1}{(4n-1)(4n+3)}+\ldots$

Ülesandeis **2426—2429** leida, missugused antud ridadest on hajuvad selle tõttu, et koonduvuseks tarvilik tingimus pole täidetud:

2426. $\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{3n-2}+\ldots$

2427. $\frac{1}{4}+\frac{3}{7}+\frac{5}{10}+\ldots+\frac{2n-1}{3n+1}+\ldots$

2428. $\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{3}{10}+\ldots+\frac{n}{n^2+1}+\ldots$

2429. $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+\ldots+\frac{2n-1}{2n}+\ldots$

Ülesandeis **2430** ja **2431** võrrelda antud rida harmoonilise reaga ja otsustada, kas rida on hajuv:

2430. $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots$

2431. $\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+\ldots+\frac{1}{\ln(n+1)}+\ldots$

2432. Võrrelda rida $\sum_{n=1}^{\infty} (2^n + 1)^{-1}$ reaga $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}$ ja otsustada, kas ta on koonduv.

2433. Võrrelda rida $\frac{1}{3+a} + \frac{1}{9+a} + \frac{1}{27+a} + \ldots$ sobivalt valitud geomeetrilise reaga ja leida, missuguste a väärtuste puhul on rida kindlasti koonduv ning missuguste puhul koonduvuse küsimus jääb lahtiseks.

2434. Võrrelda rida $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \ldots + \frac{1}{n \cdot 2^n} + \ldots$ sobivalt valitud geomeetrilise reaga ja otsustada, kas rida on koonduv.

Ülesandeis **2435—2441** otsustada D'Alembert'i tunnuse põhjal, kas antud rida on koonduv või hajuv:

2435. $1 + \frac{3}{2!} + \frac{6}{3!} + \frac{12}{4!} + \ldots + \frac{3 \cdot 2^{n-2}}{n!} + \ldots$

2436. $\frac{3}{1!} + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \frac{3^4}{4!} + \ldots$

2437. $\frac{1}{5} + \frac{1 \cdot 2}{5^2} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{5^3} + \ldots + \frac{n!}{5^n} + \ldots$

2438. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!}{(2n)!!}$.

2439. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$.

2440. $\frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{10} + \ldots + \frac{1}{3n+1} + \ldots$

2441. $\frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \ldots + \frac{1}{(n+1)(2n-1)} + \ldots$

2442. Kas $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n^2}{n!} = 0$?

2443. Näidata, et $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n^n}{(n!)^2} = 0$.

2444. Tõestada, et $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{(n+1)!}{2^n \cdot n!} = 0$.

Ülesandeis **2445—2448** uurida antud rea koonduvust Cauchy tunnuse abil:

2445. $\frac{3}{1} + \frac{9}{4} + \frac{27}{27} + \frac{81}{256} + \ldots$

2446. $\arctan \frac{1}{1} + \arctan^2 \frac{1}{2} + \arctan^3 \frac{1}{3} + \ldots$

2447. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{an+p}{bn+q}\right)^n$.

2448. $\frac{2}{3} + \frac{4}{9 \cdot 2^{\ln 2}} + \frac{8}{27 \cdot 2^{\ln 3}} + \frac{16}{81 \cdot 2^{\ln 4}} + \ldots$

Ülesandeis **2449—2453** uurida antud rea koonduvust integraaltunnuse abil:

2449. $\frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{10} + \ldots + \frac{1}{3n+1} + \ldots$

2450. $\frac{1}{2 \ln 2} + \frac{1}{3 \ln 3} + \frac{1}{4 \ln 4} + \ldots$

2451. $\frac{1}{2(\ln 2)^2} + \frac{1}{3(\ln 3)^2} + \frac{1}{4(\ln 4)^2} + \ldots$

2452. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(2n-1)}$.

2453. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$.

2454. Kas rea $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{8} + \frac{1}{3^4} - \ldots$ puhul on Leibniz'i tingimus täidetud?

Ülesandeis **2455—2458** uurida antud rea koonduvust Leibniz'i tunnuse abil:

2455. $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \ldots$

2456. $\frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} - \frac{1}{8^2} + \ldots$

2457. $-1 + \frac{2}{3} - \ldots + (-1)^n \frac{n}{2n-1} + \ldots$

2458. $\frac{\cos \varphi}{1} + \frac{\cos 2\varphi}{8} + \frac{\cos 3\varphi}{27} + \frac{\cos 4\varphi}{64} + \ldots$

2459. Kui suur on maksimaalselt viga, mis tehakse rea $1 - \frac{1}{3^3} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n-1)^3} + \ldots$ summa asendamisel kolme esimese liikme summaga?

2460. Mitu rea $\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} \ldots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n!} + \ldots$ liiget tuleks võtta, et saadav osasumma erineks rea summast absoluutväärtuselt vähem kui 0,005 võrra?

2461. Kui suur on maksimaalselt viga, mis tehakse rea $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \ldots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n^n} + \ldots$ summa asendamisel tema nelja esimese liikme summaga?

Ülesandeis **2462—2478** uurida antud arvurea koonduvust:

2462. $\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{26}+\ldots+\frac{1}{3^n-1}+\ldots$

2463. $\frac{1}{(\ln 2)^2}+\frac{1}{(\ln 3)^3}+\frac{1}{(\ln 4)^4}+\ldots$

2464. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(an+b)^k}.$

2465. $\frac{1}{3!}-\frac{1}{5!}+\frac{1}{7!}-\frac{1}{9!}+\ldots$

2466. $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{2^n+1}+\ldots$

2467. $\frac{1}{3}-\frac{4}{9}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{n^2}{3^n}+\ldots$

2468. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}.$

2469. $\frac{1}{2\cdot 1}+\frac{1}{2^2\cdot 2}+\frac{1}{2^3\cdot 3}+\frac{1}{2^4\cdot 4}+\ldots$

2470. $\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln 3}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{\ln(n+1)}+\ldots$

2471. $\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{3}{27}+\ldots+\frac{n}{3^n}+\ldots$

2472. $3-2\frac{1}{3}+2\frac{1}{9}-2\frac{1}{27}+2\frac{1}{81}-2\frac{1}{243}+\ldots$

2473. $\frac{1}{1}+\frac{1\cdot 2}{2}+\frac{1\cdot 2\cdot 3}{2^2}+\ldots+\frac{n!}{2^{n-1}}+\ldots$

2474. $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\frac{4}{5!}+\ldots$

2475. $\frac{\sin\varphi}{3}+\frac{\sin 2\varphi}{9}+\ldots+\frac{\sin n\varphi}{3^n}+\ldots$

2476. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\left(3+\frac{1}{n}\right)^n}.$

2477. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{n+10}\right)^n.$

2478. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}.$

Funktsionaalread

Ülesandeis **2479—2483** leida antud rea koonduvuspiirkond:

2479. $\frac{x}{(1+x)^2}+\frac{x^2}{(1+x)^4}+\ldots+\frac{x^n}{(1+x)^{2n}}+\ldots$

2480. $e^{-x}+e^{-2x}+\ldots+e^{-nx}+\ldots$

2481. $\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\ldots+\frac{n}{x^n}+\ldots$

2482. $\frac{e^x}{x} + \frac{e^{2x}}{2x} + \ldots + \frac{e^{nx}}{nx} + \ldots$

2483. $(\ln x)^2 + (\ln x)^4 + \ldots + (\ln x)^{2n} + \ldots$

Ülesandeis **2484—2488** leida antud rea ühtlase koonduvuse vahemik:

2484. $\frac{e^{-x}}{1} + \frac{e^{-4x}}{1 \cdot 2} + \frac{e^{-9x}}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots + \frac{e^{-n^2 x}}{n!} + \ldots$

2485. $\frac{\sin x}{1^2} + \frac{\sin 2x}{2^2} + \frac{\sin 3x}{3^2} + \frac{\sin 4x}{4^2} + \ldots$

2486. $\frac{2^{-x^2}}{1} + \frac{2^{-2x^2}}{8} + \frac{2^{-3x^2}}{27} + \ldots + \frac{2^{-nx^2}}{n^3} + \ldots$

2487. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3(1 + nx^2)}$.

2488. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n} + (\arcsin x)^2}$.

Astmeread

Ülesandeis **2489—2498** leida antud rea koonduvusvahemik ja uurida rea koonduvust vahemiku otstes:

2489. $x + x^2 + x^3 + \ldots$

2490. $x + 2!x^2 + 3!x^3 + \ldots$

2491. $x - \frac{x^3}{2!3^2} + \frac{x^5}{4!5^2} - \frac{x^7}{6!7^2} + \frac{x^9}{8!9^2} - \ldots$

2492. $\frac{x}{1} + \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{27} + \ldots + \frac{x^n}{n^3} + \ldots$

2493. $\frac{x}{1 \cdot 2} + \frac{x^2}{2 \cdot 2^2} + \frac{x^3}{3 \cdot 2^3} + \ldots + \frac{x^n}{n \cdot 2^n} + \ldots$

2494. $\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \ldots$

2495. $\frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots$

2496. $\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$

4 2497. $1 - \frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{x^2}{2^2\sqrt{3}} - \frac{x^3}{2^3\sqrt{4}} + \ldots$

2498. $\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$

Ülesandeis **2499—2504** arendada antud funktsioon Taylori reaks ja määrata saadud rea koonduvusvahemik:

2499. $x^3 - 5x^2 + 2x - 1$, kohal -2.

2500. $\ln x$, $x - 1$ astmete järgi.

2501. $\frac{10 - 4x}{(3 - x)(7 - 3x)}$, $x - 2$ astmete järgi.

2502. e^x, $x - 3$ astmete järgi.

2503. $\frac{2 - 3x}{2x^2 - 3x + 1}$, kohal 0.

2504. $\frac{1}{\sqrt{1 + x}}$, kohal 0.

2505. Asendades ülesandes **2504** saadud reas argumendi x avaldisega $-x^2$, leida funktsiooni $\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ rida kohal 0.

2506. Ülesandes **2505** saadud rea integreerimise teel leida funktsiooni $\arcsin x$ rida.

2507. Leida geomeetrilise rea $1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^{n-1}x^{n-1} + \ldots$ summa ja selle integreerimise teel funktsiooni $\ln(1 + x)$ Taylori rida kohal $x = 0$.

2508. Leida rea $1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2n} + \ldots$ summa ja selle integreerimise teel funktsiooni $\ln\sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}$ Taylori rida kohal $x = 0$.

Astmeridade rakendusi

2509. Määrata viga α, mis tekib arvu $\frac{\pi}{4}$ leidmisel valemist $\arctan x \approx x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7}$ (vt. näide XVII).

2510. Määrata viga α, mis tekib, kui $\sqrt[3]{e}$ arvutamiseks kasutada valemit $e^x \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!}$.

2511. Mitu liiget tuleb võtta reast $\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots$, et saadav summa erineks arvust $\ln\frac{3}{2}$ vähem kui 0,01 võrra?

2512. Mitu liiget tuleb võtta reast $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots$, et $\sin 60°$ arvutamisel tehtav viga ei ületaks arvu 0,001?

2513. Leida geomeetrilise rea $1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$ summa ja selle diferentseerimise teel rea $1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1} + \ldots$ summa vahemikus $|x| < 1$.

2514. Kasutades eelmise ülesande tulemust, leida diferentseerimise teel rea $2 + 2 \cdot 3x + \ldots + (n-1)nx^{n-2} + \ldots$ summa vahemikus $|x| < 1$.

Ülesandeis **2515—2519** arendada integraalialune funktsioon astmereaks ja saadud rida tema koonduvusvahemikus liikmeti integreerides avaldada antud integraal:

2515. $\int \frac{\cos x}{x} dx.$

2516. $\int \frac{\sin x}{x} dx.$

2517. $\int_0^x \sin x^2 \, dx.$

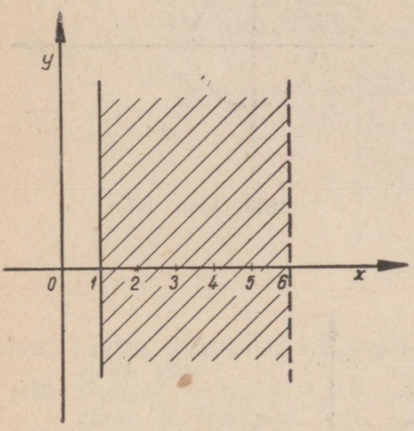
2518. $\int \frac{e^x}{x^2} dx.$

2519. $\int_0^x \frac{\operatorname{arctan} x}{x} dx.$

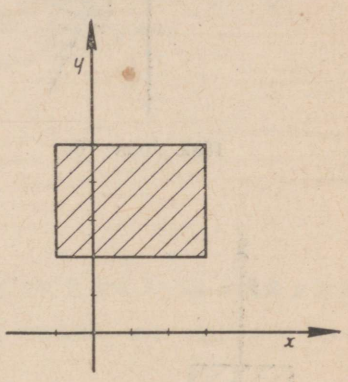
2520. Leida diferentsiaalvõrrandi $y'' + xy = 0$ erilahend vastavalt algtingimustele $y(0) = 0$ ja $y'(0) = 1$ astmerea kujul.

2521. Leida diferentsiaalvõrrandi $xy'' - y = 0$ astmereakujuline erilahend, mis rahuldab algtingimusi $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

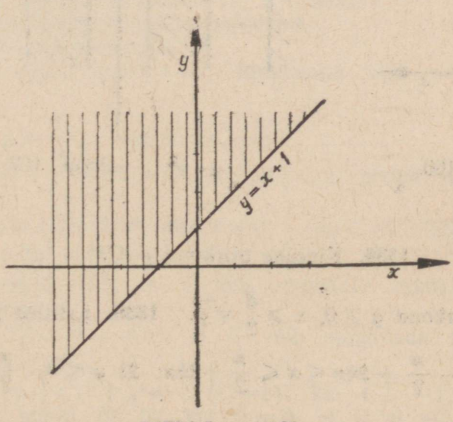
2522. Kirjutada välja kuus esimest nullist erinevat liiget diferentsiaalvõrrandi $y'' + y' - x^2y = 0$ astmereakujulisest erilahendist, mis rahuldab algtingimusi $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.



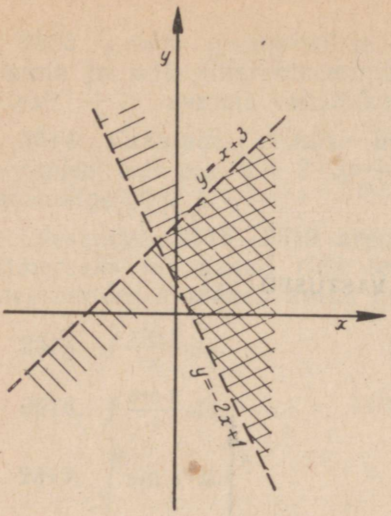
1529. Joon. 161.



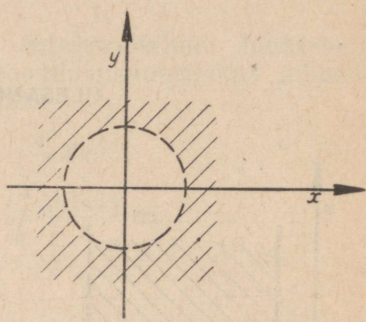
1530. Joon. 162.



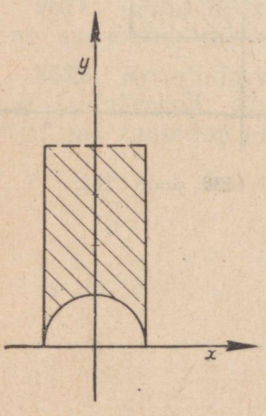
1531. Joon. 163.



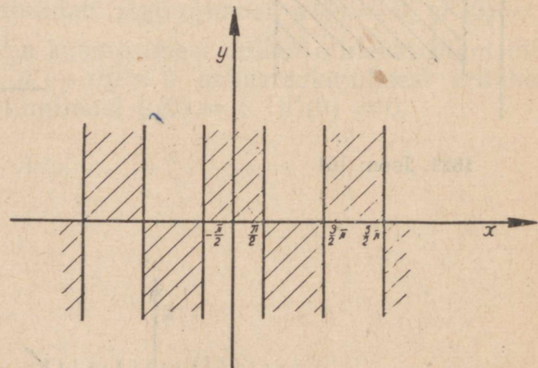
1532. Joon. 164.



1533. Joon. 165.



1534. Joon. 166.



Joon. 167.

1535. $x - y \neq 0$. **1536.** Kinnine piirkond $y \leqslant x^3$.

1537. Kinnine piirkond $y \geqslant 0$, $x \geqslant \frac{3}{2}\sqrt{y}$. **1538.** Lahtine piirkond $y < x^2 - 4$.

1539. 1) $y \geqslant 0$, $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} + 2k\pi$; 2) $y \leqslant 0$, $\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leqslant x \leqslant$ $\leqslant \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ (joon. 167).

1540. $y \geqslant 0, \; -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \; k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

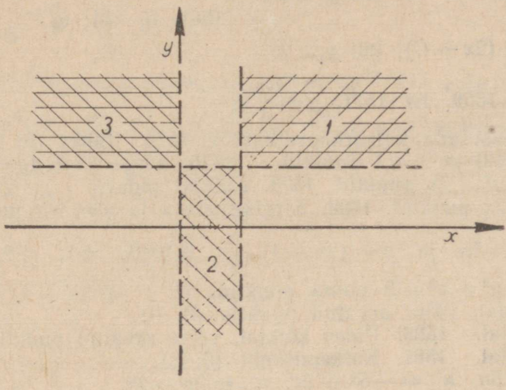
1541. 1) $y > 0, \; 0 \leqslant x \leqslant y$; 2) $y < 0, \; 0 \geqslant x \geqslant y$.

1542. $xy > 0, \; y \geqslant 2 - x^2, \; y \leqslant x^2 + 2$.

1543. 1) $y > 0, \; x > 1, \; y \leqslant x - 3$; 2) $x < 1, \; y \leqslant -x - 1, \; y > 0$.

1544. 1) $y > 0, \; y \geqslant -x - 3, \; y \geqslant x + 3$; 2) $y < 0, \; y \leqslant -x - 3, \; y \leqslant x + 3$.

1545. Lahtine piirkond $y > 4 - x^2$.



Joon. 168.

1546. Lahtine piirkond 1) $x > 2, \; y > 2$; 2) $0 < x < 2, \; y < 2$; 3) $x < 0, \; y > 2$ (joon. 168).

1547. Piirkond $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant r^2$, kõik ruumi punktid, mis asetsevad kera pinnal ja väljaspool kera.

1548. Kinnine piirkond $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant r^2$.

1549. $z \neq 0, \; z^2 \geqslant x^2 + y^2$, koonuse sisemised punktid ja pinna punktid, välja arvatud koonuse tipp.

1550. Ei ole, määramispiirkonnad on erinevad: esimesel juhul 1) $x \geqslant 0$, $2k\pi \leqslant y \leqslant \pi(2k + 1)$, 2) $x \leqslant 0, \; \pi(2k + 1) \leqslant y \leqslant \pi(2k + 2)$, teisel juhul ainult $x \geqslant 0, \; 2k\pi \leqslant y \leqslant \pi(2k + 1)$, k — täisarv.

1551. Ei ole, määramispiirkonnad on erinevad.

1552. Määramispiirkonna poolest.

1553. Paralleelsed sirged $y = x - C$; funktsioon võib omandada mistahes väärtuse.

1554. Hüperboolid $y = \frac{C}{x}, \; -\infty < z < +\infty$.

1555. Ringjooned $x^2 + y^2 = 25 - C^2$, kui $|C| < 5$; punkt (0; 0), kui $C = 5$; $-5 \leqslant z \leqslant 5$.

1556. Paraboolid $y = (C + 2)x^2$, kus $x \neq 0, \; -\infty < z < +\infty$.

1557. Ellipsid $2x^2 + 3y^2 = C^2, \; -\infty < z < +\infty$.

1558. Sirged $y = -C^2x - C^3$; et C võib omandada mistahes väärtuse, siis $-\infty < z < +\infty$.

1559. Hüperboolid $C^2 = y^2 - e^C x^2$; et C võib omandada mistahes väärtuse, siis $-\infty < z < +\infty$.

1560. Ringjooned $(x - C)^2 + y^2 = C^2(C + 1)$, kui $C > -1$; punkt $(-1; 0)$, kui $C = -1$; punkt (0; 0), kui $C = 0$; et C ei või omandada -1-st väiksemaid väärtusi, siis $z \geqslant -1$.

1561. $x^2+y^2-z^2=9-C^2$. Kui $-3<C<3$, siis on nivoopind ühekattene pöördhüperboloid, kui $C=3$ või $C=-3$, siis pöördkoonus, ja kui $C>3$ või $C<-3$, siis kahekattene pöördhüperboloid; $-\infty<w<+\infty$.
1562. $x^2+y^2+z^2=4-\ln C$. Kui $0<C<e^4$, siis on nivoopinnad kerad raadiusega $\sqrt{4-\ln C}$ ja keskpunktiga (0; 0; 0), kui $C=e^4$, siis punkt (0; 0); $0<w\leqslant e^4$.
1563. Hüperboolne paraboloid $2x^2-y^2=2z-C^3$; $-\infty<w<+\infty$.

1564. $y=\begin{cases}\frac{1}{4}(2x-C), \text{ kui } y\leqslant 2x,\\ -\frac{1}{2}(2x+C), \text{ kui } y>2x.\end{cases}$ 1567. 0; —1; ei.

1568. 2; —1; ei. 1569. Ei. 1571. $y=\frac{3}{4}x$.

1573. 0; 0; ei (kasutada polaarkoordinaate). 1574. Punkt (0; 0).
1575. Sirgete $x=0$ ja $x=1$ punktid. 1576. Sirge $3x+4y=0$ punktid.
1577. Parabooli $y^2=2x$ punktid. 1578. Kõikjal pidev.
1579. Sirge $y=2x$ punktid. 1580. Sirgete $y=x$ ja $y=-x$ punktid.

1581. Sirgete $x=k\pi$ ja $y=(2k+1)\frac{\pi}{2}$ $(k=0;\ \pm1;\ \pm2,\ \ldots)$ punktid.
1582. Kera $x^2+y^2+z^2=9$ pinna punktid.
1583. Pidev kõikjal, välja arvatud punktis (0; 0).
1584. Pidev kõikjal. 1585. Pidev kõikjal, välja arvatud punktis (0; 0).
1586. Pidev kõikjal. 1587. Katkemiskoht (0; 0).
1588. $u'_x=6x-5y$, $u'_y=-5x+2z$, $u'_z=2y-2z$.

1589. $\frac{\partial z}{\partial x}=4x(3x^3-2x^2y+y^3)^3(9x-4y)$, $\frac{\partial z}{\partial y}=4(3x^3-2x^2y+y^3)^3(3y^2-2x^2)$.

1590. $\frac{\partial u}{\partial x}=5x^4y^5z^5$. 1591. $\frac{\partial z}{\partial x}=2\sqrt[3]{y}+\frac{y}{2\sqrt{x}}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2x}{3\sqrt[3]{y^2}}+\sqrt{x}$.

1592. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y^2(y^3-2x^3)}{(x^3+y^3)^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xy(2x^3-y^3)}{(x^3+y^3)^2}$.

1593. $z'_x=\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}$, $z'_y=-\frac{y}{\sqrt{x^2-y^2}}$.

1594. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x(1-x^2-y^2-\sqrt{x^2+y^2})}{(1+\sqrt{x^2+y^2})^2}$. 1595. $u'_x=\frac{2x}{\cos^2(x^2+y^3+z^4)}$.

1596. $z'_x=y\cos xy+\frac{1}{y}\sin\frac{x}{y}$, $z'_y=x\cos xy-\frac{x}{y^2}\sin\frac{x}{y}$.

1597. $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{2\sqrt{x}(x+y^2)}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\sqrt{x}}{x+y^2}$.

1598. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{xy^2}{x+y}[2(x+y)\ln(x+y)+x]$.

1599. $u'_x=\frac{y}{xy+\ln z}$, $u'_z=\frac{1}{z(xy+\ln z)}$.

1600. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{3x^2}{2(x^3+y^3+y\sqrt{x^3+y^3})}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2\sqrt{x^3+y^3}+3y^2}{2(x^3+y^3+y\sqrt{x^3+y^3})}$.

1601. $\frac{\partial u}{\partial x}=2(1+2xy^2+3x^2y^3z^3)\tan^3(x+x^2y^2+x^3y^3z^3)$,

$\frac{\partial u}{\partial z}=6x^3y^3z^2\tan^3(x+x^2y^2+x^3y^3z^3)$.

1602. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{4x}{3\sqrt[3]{(x^2+y^2+z^2)^2}\,(1-\sqrt[3]{(x^2+y^2+z^2)^2})}$.

1603. $\frac{\partial z}{\partial x} = 4(x+\log_y x)^3\left(1+\frac{1}{x\ln y}\right)$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{4\ln x}{y\ln^2 y}(x+\log_y x)^3$.

1604. $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\ln y}{x\ln x}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{y\ln x}$. **1605.** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y^2}{x^2}e^{-\frac{y^2}{x}}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2y}{x}e^{-\frac{y^2}{x}}$.

1606. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\ln 5}{y}5^{-\frac{x}{y}}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{y^2}5^{-\frac{x}{y}}\ln 5$.

1607. $z'_x = y2^{\sin xy}(1+xy\ln 2\cos xy)$, $z'_y = x2^{\sin xy}(1+xy\ln 2\cos xy)$.

1608. $\frac{\partial u}{\partial x} = y^z x^{y^z-1}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = zy^{z-1}x^{y^z}\ln x$, $\frac{\partial u}{\partial z} = y^z x^{y^z}\ln x\ln y$.

1609. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{|y|}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x\operatorname{sg} y}{x^2+y^2}$.

1610. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\operatorname{sg} y}{3\sqrt[3]{(x+3)^2}\sqrt{\sqrt[3]{y^2}-\sqrt[3]{(x+3)^2}}}$,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\sqrt[3]{x+3}}{3y\sqrt{\sqrt[3]{y^2}-\sqrt[3]{(x-3)^2}}}\operatorname{sg}(-y).$$

1611. $u'_x = \frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2)(z^2-x^2-y^2)}}\operatorname{sg} z$, $u'_z = -\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z\sqrt{z^2-x^2-y^2}}\operatorname{sg} z$.

1612. $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=1}} = \frac{8}{\pi^2}$, $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}} = -\frac{8}{\pi^2}$. **1613.** $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=\pi\\y=4}} = \frac{1}{2}$, $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=\pi\\y=4}} = \frac{\pi}{8}$.

1614. $\frac{\partial u}{\partial x} = 2$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial z} = 0$ punktis $(1;\ 4;\ 2)$.

1615. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{2}$, $\frac{\partial u}{\partial z} = 0$ punktis $(2;\ 1;\ 1)$.

1616. $2x$. **1617.** $-\frac{1}{1+y^2}$. **1618.** $\frac{5}{6}$. **1619.** $\frac{1}{3}$. **1620.** $-63°26'$.

1621. $\arctan\frac{8}{5}$ ehk $58°$. **1622.** $\arctan\frac{1}{2}$ ehk $26°34'$. **1623.** $\frac{\pi}{4}$. **1624.** $\frac{\pi}{4}$.

1625. $\arctan\frac{4}{7}$ ehk $29°44'$. **1626.** $\frac{1}{13}$, $\frac{2}{13}$. **1627.** πr^2, $2\pi rh$.

1628. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\left(\frac{y+z}{xy+xz+yz}\right)^2$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z} = -\frac{y^2}{(xy+xz+yz)^2}$.

1629. $\frac{\partial z}{\partial x} = y^x\ln y$, $\frac{\partial z}{\partial y} = xy^{x-1}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^x\ln^2 y$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = y^{x-1}(1+x\ln y)$,

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x(x-1)y^{x-2}$.

1630. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}(y-x)}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\sqrt{y}(3x-y)}{2\sqrt{x^3}(y-x)^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = -\frac{x+y}{2\sqrt{xy}(y-x)^2}$.

1631. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{e^x}{e^x+e^y}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{e^y}{e^x+e^y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{e^{x+y}}{(e^x+e^y)^2}$,

$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}=\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}=\frac{e^{x+2y}-e^{2x+y}}{(e^x+e^y)^3}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}=\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y}=\frac{e^{2x+y}-e^{x+2y}}{(e^x+e^y)^3}$.

1632. $\frac{\partial^4 u}{\partial x^3\,\partial y}=12y$, $\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\,\partial y^2}=12x-8$.

1633. $-\frac{6}{[(x-y)^2+(z-u)^2]^2}+\frac{48(x-y)^2(z-u)^2}{[(x-y)^2+(z-u)^2]^4}$.

1634. $[n(n-1)\ldots(n-p+1][m(m-1)\ldots(m-q+1)]x^{n-p}y^{m-q}$.

1635. $p!q!$ 1636. $\frac{\partial^n z}{\partial x^n}=y^n e^{xy}$, $\frac{\partial^m z}{\partial y^m}=x^m e^{xy}$.

1637. $\frac{\partial^n z}{\partial x^n}=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}n\right)$, $\frac{\partial^m z}{\partial y^m}=\cos\left(y+\frac{\pi}{2}n\right)$, $\frac{\partial^{p+q} z}{\partial x^p\,\partial y^q}=0$.

1638. $\frac{\partial^n z}{\partial x^n}=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}n\right)\cos y$, $\frac{\partial^m z}{\partial y^m}=\sin x\cos\left(y+\frac{\pi}{2}m\right)$; $\frac{\partial^{p+q} z}{\partial x^p\,\partial y^q}=$

$=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}p\right)\cos\left(y+\frac{\pi}{2}q\right)$.

1639. $\frac{\partial^n z}{\partial x^n}=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}n\right)e^y$, $\frac{\partial^m z}{\partial y^m}=\sin x e^y$, $\frac{\partial^{p+q} z}{\partial x^p\,\partial y^q}=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}p\right)e^y$.

1640. $\frac{\partial^n z}{\partial x^n}=y(n+x)e^{x+y}$, $\frac{\partial^m z}{\partial y^m}=x(m+y)e^{x+y}$, $\frac{\partial^{p+q} z}{\partial x^p\,\partial y^q}=(p+x)(q+y)e^{x+y}$.

1641. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x\,\partial y}=\frac{1}{4}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{3}{8}$, kui $x=-1$ ja $y=-2$.

1642. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{1}{2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=0$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{4}{25}$ punktis $(-1;\ 2)$.

1643. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{4}{25}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{3}{25}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{4}{25}$ punktis $(1;\ -2)$.

1644. $-\frac{86}{625}$. 1645. $-\frac{1}{16}$.

1646. $d_x z=\left(3+\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dx$, $d_y z=\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}-1\right)dy$.

1647. $d_x z=\frac{y}{1+x^2y^2}\,dx$, $d_y z\Big|_{\substack{x=-1\\ y=3\\ \Delta y=-0{,}02}}=0{,}002$.

1648. $d_x z=\frac{\operatorname{sg} y}{\sqrt{y^2-x^2}}\,dx$, $d_y z=-\frac{x}{|y|\sqrt{y^2-x^2}}\,dy$, $d_x z\Big|_{\substack{x=4\\ y=-5\\ \Delta x=-0{,}3}}=0{,}1$,

$d_y z\Big|_{\substack{x=4\\ y=-5\\ \Delta y=0{,}2}}=-\frac{4}{75}$.

1649. $\left(x^2\cos\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x}+y^2\sin\frac{x}{y}\sin\frac{y}{x}\right)\frac{y\,dx+x\,dy}{x^2y^2}$. 1650. $\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}$.

1651. $\dfrac{y\,dx - x\,dy}{y^2 \tan \dfrac{x}{y}}$. 1652. $\dfrac{2}{y^2 \sin \dfrac{2x}{y}} (y\,dx - x\,dy)$. 1653. $\dfrac{(2x^2 - y)\,dx + x\,dy}{x(2x^2 + y)}$.

1654. $\dfrac{y\,dx + dy}{y(x + \ln y)}$. 1655. $\Delta z = \dfrac{19}{635}$, $dz = \dfrac{19}{600}$. 1656. 0,20.

1657. $-\dfrac{1}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} \left(x\,dx^2 + 2y\,dx\,dy + \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}(y^2 - x^2) - x^3}{(x + \sqrt{x^2+y^2})^2}\, dy^2 \right)$.

1658. $y^{x-2}\,[y^2 (\ln y)^2\, dx^2 + 2y(x \ln y + 1)\,dx\,dy + x(x-1)\,dy^2]$.

1659. $\dfrac{4}{(x+y)^3}\,[x\,dy^2 + (x - y)\,dx\,dy - y\,dx^2]$.

1660. $2 \cos [2(x-y)]\,(dx^2 - 2\,dx\,dy + dy^2)$.

1661. $\dfrac{x+y}{[1 - (x+y)^2]^{\frac{3}{2}}}\,(dx^2 + 2\,dx\,dy + dy^2)$.

1662. $d^2z = 2[6x\,dx^2 + 2y\,dx\,dy + (x + 3y)\,dy^2]$, $d^3z = 6(2\,dx^3 + dx\,dy^2 + dy^3)$.

1663. $\dfrac{2\,dx^2}{x^4}\,(x\,dy - 3y\,dx)$. 1664. 2,005. 1665. 1,995. 1666. 259,8.

1667. 1,12. 1668. 0,88. 1669. 0,006. 1670. 0,66. 1671. 173,965.

1672. 9,3($\pm$1,6) m². 1673. 73($\pm$3,4) cm². 1674. 538($\pm$10) cm².

1675. 5,15($\pm$0,22) oomi. 1676. 4,04($\pm$0,006) m.

1677. $r = 14{,}87(\pm 0{,}16)$ cm, $\dfrac{\Delta r}{r} \approx 1\%$.

1678. Summa absoluutse vea ülemmäär võrdub liidetavate absoluutsete vigade ülemmäärade summaga.

1679. Vahe absoluutse vea ülemmäär võrdub vähendatava ja lahutatava absoluutsete vigade ülemmäärade summaga.

1680. Korrutise relatiivse vea ülemmäär võrdub tegurite relatiivsete vigade ülemmäärade summaga.

1681. Jagatise relatiivse vea ülemmäär võrdub jagatava ja jagaja relatiivsete vigade ülemmäärade summaga.

1682. $\left\{-\dfrac{1}{2\sqrt{6}};\ -\dfrac{1}{2\sqrt{6}};\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right\}$. 1683. $\left\{\dfrac{1}{2};\ \dfrac{1}{2};\ -\dfrac{1}{2}\right\}$.

1684. $\left\{\dfrac{2x}{x^2+y^2};\ \dfrac{2y}{x^2+y^2}\right\}$, $\left\{\dfrac{1}{xy^2};\ -\dfrac{1}{x^2y}\right\}$, $\dfrac{\pi}{2}$.

1685. $\{yx^{y-1};\ x^y \ln x\}$, $\{y^x \ln y;\ xy^{x-1}\}$, $\dfrac{\pi}{2}$.

1686. $\left\{\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}};\ \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right\}$, $\left\{\sqrt{\dfrac{y}{2x}};\ \sqrt{\dfrac{x}{2y}}\right\}$, gradiendid on paralleelsed sirge $y = x$ punktides.

1687. $\left\{\dfrac{x}{\sqrt{x^2-y^2}};\ -\dfrac{y}{\sqrt{x^2-y^2}}\right\}$, $\left\{\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}};\ \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right\}$, gradiendid ei ole risti.

1689. $-\dfrac{15}{4}\sqrt{\dfrac{3}{13}}$. 1690. $-\dfrac{13}{80}$. 1691. $\dfrac{7}{10}$. 1692. $-\dfrac{22}{\sqrt{5}}$.

1693. $2\cos\alpha+2\sin\alpha$; a) $\frac{\pi}{4}$; b) $\frac{5\pi}{4}$; c) $\frac{3\pi}{4}$ ja $\frac{7\pi}{4}$. **1694.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ja $-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

1695. 0,293. **1696.** $\frac{6}{\sqrt{5}}$ ja $-\frac{6}{\sqrt{5}}$. **1697.** —22. **1698.** $-\frac{30}{13}$. **1699.** $2+\sqrt{2}$.

1700. $\frac{2}{5}$. **1701.** 1. **1702.** $\frac{10}{27}$. **1703.** $\frac{\ln x}{x^2(\ln x)^2+2x\ln x+2}$.

1704. $\frac{2}{x^2+4}$. **1705.** $\frac{t}{\sqrt{\sin^2 t-t^4}}(2-t\cot t)\operatorname{sg}\sin t$.

1706. $\frac{1}{\cos^2\left(3t+\frac{2}{t^2}-\sqrt{t}\right)}\left(3-\frac{4}{t^3}-\frac{1}{2\sqrt{t}}\right)$. **1707.** $e^{2x}\sin x$.

1708. $\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{u\cos^2 v-v^2\sin u\cos u}{\sqrt{u^2\cos^2 v+v^2\cos^2 u}}$, $\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{v\cos^2 u-u^2\sin v\cos v}{\sqrt{u^2\cos^2 v+v^2\cos^2 u}}$.

1709. $\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{2}{u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{4\operatorname{sh} v\operatorname{ch} v}{\operatorname{sh}^2 v+\operatorname{ch}^2 v}$.

1710. $\frac{\partial z}{\partial u}=3u^2\sin v\cos v(\cos v-\sin v)$, $\frac{\partial z}{\partial v}=$
$=u^3(\sin v+\cos v)(1-3\sin v\cos v)$.

1711. $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y(2x-y)}{1+x^2y^2(x-y)^2}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{x(x-2y)}{1+x^2y^2(x-y)^2}$.

1712. $\frac{Dw}{Dx}=\frac{x+y^2(\sin x\cos x+e^x)}{\sqrt{x^2+y^2(\sin^2 x+e^{2x})}}$, $\frac{Dw}{Dy}=\frac{y(\sin^2 x+e^{2x})}{\sqrt{x^2+y^2(\sin^2 x+e^{2x})}}$.

1713. $\frac{Du}{D\varrho}=2\varrho(1+\cos^2\varphi)+\frac{\sin\varphi}{1+\varrho^2\sin^2\varphi}$, $\frac{Du}{D\varphi}=\frac{\varrho\cos\varphi}{1+\varrho^2\sin^2\varphi}-\varrho^2\sin 2\varphi$.

1714. $\frac{\partial z}{\partial x}=y\left[1+\frac{\varphi'_u(u)}{2u}\right]$, $\frac{\partial z}{\partial y}=x\left[1+\frac{\varphi'_u(u)}{2u}\right]$, kus $u=\sqrt{xy}$.

1715. $\frac{\partial z}{\partial x}=1+2xy\,\varphi'_u(u)$, $\frac{\partial z}{\partial y}=x^2\varphi'_u(u)$, kus $u=x^2y$.

1716. $\frac{\partial z}{\partial x}=2x\,f'_u(u,v)+ye^{xy}f'_v(u,v)$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-2y\,f'_u(u,v)+xe^{xy}f'_v(u,v)$,
kus $u=x^2-y^2$, $v=e^{xy}$.

1717. $\frac{\partial z}{\partial x}=f'_u(u,v)\cos(x-y)+2xy^2f'_v(u,v)$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-f'_u(u,v)\cos(x-y)+$
$+2x^2y\,f'_v(u,v)$, kus $u=\sin(x-y)$, $v=x^2y^2$.

1718. $\frac{\partial z}{\partial x}=2x\,f'_u(u,v)+ye^{xy}f'_v(u,v)$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-2y\,f'_u(u,v)+xe^{xy}f'_v(u,v)$,
kus $u=x^2-y^2$, $v=e^{xy}$.

1719. $\frac{\partial z}{\partial x}=-y\,f'_u(u,v)\sin xy+3x^2f'_v(u,v)$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-x\,f'_u(u,v)\sin xy-$
$-f'_v(u,v)$, kus $u=\cos xy$ ja $v=x^3-y$.

1720. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y}{2\sqrt{xy}}f'_u(u,v)+2x\,f'_v(u,v)$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{2\sqrt{xy}}f'_u(u,v)+3y^2f'_v(u,v)$,
kus $u=\sqrt{xy}$ ja $v=x^2+y^3$.

1721. $\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial \varphi}{\partial x}-\frac{\partial \varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}=\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$,

$\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}=\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$.

1722. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2f'(z)+4x^2f''(z)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=-4xyf''(z)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-2f'(z)+4y^2f''(z)$.

1723. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2f'(t)+4x^2f''(t)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}=4xzf''(t)$, ülejäänud osatuletised on analoogilised.

1729. $-\frac{3x^2+10xy-y^3}{5x^2-3xy^2+4y^3}$. 1730. $-\frac{6x^2y+1}{3x(2y^2+x^2)}$, $-\frac{1}{3}$.

1731. $\frac{y(2+\ln x-\ln y)}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+y)}$, $\frac{3}{4e}$.

1732. $\frac{6x^2\sin y-2xy^2+\cos x-x\sin x}{5y^4e^y+y^5e^y-(2x^3+3)\cos y+2xy^2}$, $-\frac{1}{3}$. 1733. -1.

1734. $\frac{1}{2}$. 1735. $y=x-1$. 1736. $x+y+2=0$.

1737. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{e-1}$, ei ole.

1738. $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y\sin xy+z\cos xz}{1+x\cos xz}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x\sin xy}{1+x\cos xz}$,

$-\frac{2}{2+\pi}$, $-\frac{\pi}{2+\pi}$.

1739. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x(2y^2z^2-x)}{z(z-2x^2y^2)}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y(2x^2z^2-y)}{z(z-2x^2y^2)}$. Punktis (1; 1; 1) on $\frac{\partial z}{\partial x}=$ $=\frac{\partial z}{\partial y}=-1$.

1740. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{yz}{e^z-xy}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xz}{e^z-xy}$, $\frac{e}{2}$, $-\frac{1}{2}$.

1741. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x+2y-3z}{3x-y-2z}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2x-2y+z}{3x-y-2z}$, 3, -1.

1742. $\frac{dy}{dx}=\frac{x(5+12z)}{2z-5y}$, $\frac{dz}{dx}=\frac{2x(6y+1)}{5y-2z}$, $\frac{41}{16}$, $\frac{9}{8}$.

1743. $\frac{dy}{dx}=\frac{7x-2}{y}$, $\frac{dz}{dx}=\frac{14x-2}{3z}$.

1744. $\frac{dy}{dx}=\frac{x(x-2z)}{y(y+2z)}$, $\frac{dz}{dx}=-\frac{x(x+y)}{z(2z+y)}$.

1745. $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2y}{4u-3}$, $\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{y(8u-9)}{4v(3-4u)}$. Kui $x=-1$, $y=0$, $u=2$, $v=1$, siis $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}=0$.

1746. $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y.$ 1747. $\frac{\partial z}{\partial x} = e^{-u}\,(v\cos v - u\sin v),$

$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{-u}\,(u\cos v + v\sin v).$

1748. $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{u=1\\ v=-2}} = 2, \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{u=1\\ v=-2}} = -6.$

1749. $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{u=0\\ v=3}} = 6, \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{u=0\\ v=3}} = -1.$

1750. $-\frac{c^2}{z}\left(\frac{x}{a^2}\,dx + \frac{y}{b^2}\,dy\right).$ 1751. $\frac{z}{z-1}\left(\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y}\right).$

1752. $dx + dy.$ 1753. $\frac{x-2y}{(2x+y)^2}\,[2(x+3y)\,dx - (9x+2y)\,dy].$

1754. $r^2\left[\frac{3}{2}\sin 2\varphi\,(\cos\varphi - \sin\varphi)\,dr + r(\sin\varphi + \cos\varphi)\,(1 - \frac{3}{2}\sin 2\varphi)\,d\varphi\right].$

1755. $4[x^3\,dx - (y^2+z^2)\,(y\,dy + z\,dz)]\,\mathrm{ch}\,uv.$

1756. $\frac{e^z}{x^2y^2}\,[(x^4 - y^4 + 2x^3y)\,y\,dx + (y^4 - x^4 + 2xy^3)\,x\,dy].$

1757. $\frac{1}{2}\,(x\,dx - y\,dy).$ 1758. $\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}.$

1759. $\frac{3}{2}\,[(y-x^2)\,dx + x\,dy].$

1760. $-1 + 3(x-1)^2 - 3(x-1)(y-1) + 3(y-1)^2 + (x-1)^3 + (y-1)^3.$

1761. $5 + 6(x+1) + 18(y-1) - 11(x+1)^2 - 10(x+1)(y-1) +$
$+ 10(y-1)^2 + 3(x+1)^3 - 2(x+1)^2(y-1) - 7(x+1)(y-1)^3.$

1762. $11 + 17(x-1) - 16(y+1) + 9(x-1)^2 - 16(x-1)(y+1) +$

$+ 8(y+1)^2 + 2(x-1)^3 - 3(x-1)^2(y+1) + \frac{5}{3}(x-1)(y+1)^2 -$

$-(y+1)^3.$

1763. $\Delta z = -h + k + h^2 + 5hk + 4k^2.$ 1764. $x + \frac{1}{2}xy - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}xy^2.$

1765. $x + xy - \frac{1}{2}x^2 + R_2, \quad R_2 = \frac{e^{\Theta y}}{3!}\left[y^3\ln(1+\Theta x) + \frac{3xy^2}{1+\Theta x} -\right.$

$\left.- \frac{3x^2y}{(1+\Theta x)^2} + \frac{2x^3}{(1+\Theta x)^3}\right], \quad 0 < \Theta < 1.$

1766. $\ln 2 + \frac{1}{2}[(x-1) + (y-1)] - \frac{1}{8}[(x-1)^2 + 2(x-1)(y-1) +$

$+ (y-1)^2] + \frac{1}{24}[(x-1)^3 + 3(x-1)^2(y-1) + 3(x-1)(y-1)^2 +$

$+ (y-1)^3] + R_3, \quad R_3 = -\frac{1}{4}\left[\frac{x+y-2}{2+\Theta(x+y-2)}\right]^4.$

1767. $y + 3(x-1)y + 3(x-1)^2y + \frac{1}{6}y^3.$ **1768.** $x + x^2 + x(y-1),$ 0,0198.

1769. $1 + 3(x-1) + 3(x-1)^2 + (x-1)(y-3),$ 1,34. **1770.** Ei ole.

1771. Statsionaarseteks kohtadeks on sirgete $x=0$ ja $y=0$ punktid ja punkt (2; 3).

1772. $\left(\frac{17}{9};\ \frac{5}{18}\right)$, miinimum. **1773.** $\left(\frac{11}{31};\ \frac{26}{31}\right)$, maksimum.

1774. $\left(-\frac{17}{143};\ \frac{7}{143}\right)$, miinimum. **1775.** (0; 0), miinimum.

1776. $\left(\frac{5}{22};\ \frac{2}{11}\right)$, maksimum. **1777.** (0; 0), miinimum.

1778. $\left(1;\ -\frac{1}{2}\right)$, miinimum. **1779.** $(-2;\ 0)$, $\left(\frac{16}{7};\ 0\right)$.

1780. $z_{min}=-(4+2\sqrt{6})$ punktis $x=y=-(3+\sqrt{6})$,

$z_{max}=2\sqrt{6}-4$ punktis $x=y=-(3-\sqrt{6})$.

1781. $\left(\frac{18}{13};\ \frac{12}{13}\right)$. **1782.** $\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right)$. **1783.** $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

1784. $\left(\sqrt[4]{\frac{1}{2}};\ \sqrt[4]{\frac{1}{2}}\right)$, $\left(-\sqrt[4]{\frac{1}{2}};\ -\sqrt[4]{\frac{1}{2}}\right)$, $\left(-\sqrt[4]{\frac{1}{2}};\ \sqrt[4]{\frac{1}{2}}\right)$,

$\left(\sqrt[4]{\frac{1}{2}};\ -\sqrt[4]{\frac{1}{2}}\right)$.

1785. $u_{min}=2$ punktis (1; 1). **1786.** (2; 2; 8), miinimum.

1787. $10(1+\sqrt{2})$ cm. **1788.** Ruut küljega 3 cm. **1789.** $\frac{1}{2}$ cm².

1790. Kuup servaga $\frac{1}{3}$ m. **1791.** Kuup servaga 2 m. **1792.** $\frac{4}{3}$ cm, $\frac{4}{3}$ cm ja $\frac{7}{3}$ cm.

1793. $r=h=\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$. **1794.** $\left(\sqrt{\frac{23}{18}};\ \frac{11}{6}\right)$, $\left(-\sqrt{\frac{23}{18}};\ \frac{11}{6}\right)$.

1795. $\left(-\frac{7}{13};\ \frac{17}{13}\right)$. **1796.** $(\sqrt{5};\ 1)$, $(-\sqrt{5};\ 1)$.

1797. $z(1,\ 2)=17$, $z(1,\ 0)=-3$. **1798.** $z(2,\ 1)=4$, $z(4,\ 2)=-64$.

1799. $17x+11y+5z-60=0$, $\frac{x-3}{17}=\frac{y-4}{11}=\frac{z+7}{5}$.

1800. $x-3z=0$, $x=\frac{y+3}{0}=\frac{z}{-3}$.

1801. $x+y-2\sqrt{2}z+4=0$, $x=y=\frac{z-\sqrt{2}}{-2\sqrt{2}}$.

1802. $3x+4y+6z-22=0$, $\frac{x-2}{3}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-2}{6}$.

1803. $2x+y+11z-25=0$, $\frac{x-1}{2}=y-1=\frac{z-2}{11}$.

1804. $x+\sqrt{2}y-2z-1=0$, $x+\sqrt{2}y-2z+1=0$, $x-1=\frac{y-\sqrt{2}}{2}=$

$=\frac{2-z}{2}$, $x+1=\frac{y+\sqrt{2}}{2}=\frac{z+2}{-2}$.

1805. $6x+2y+3z-36=0,\ \dfrac{x-1}{6}=\dfrac{y-9}{2}=\dfrac{z-4}{3}.$

1806. $\sqrt{3}x+y-2z=0,\ \dfrac{x-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{-2}.$

1807. $6x+3y+2\sqrt{2}z-12=0,\ \dfrac{2x-1}{12}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{2z-3\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}.$

1808. $\operatorname{div}\mathbf{F}=0,\ \operatorname{rot}\mathbf{F}=0.$ **1809.** $\operatorname{div}\mathbf{F}=0,\ \operatorname{rot}\mathbf{F}=-2\{z;\ x;\ y\}.$

1810. $\operatorname{div}\mathbf{F}=yz(1+2x^2z+3x^3y^2z),$
$\operatorname{rot}\mathbf{F}=\{x^2y^2z(3xz^2-2);\ xy(1-3xy^2z^3);\ xz(2y^2z-1)\}.$

1811. $\operatorname{div}\mathbf{F}=-1,\ \operatorname{rot}\mathbf{F}=2\{1;\ 0;\ -1\}.$

1812. $\operatorname{div}\operatorname{grad}u=6(x+y+z),\ \operatorname{rot}\ \operatorname{grad}u=0.$

1814. 2. **1815.** 1. **1816.** 2. **1817.** 0. **1818.** 5.

1819. $(x+4)^2+\left(y-\dfrac{7}{2}\right)^2=\dfrac{125}{4}.$ **1820.** $(x-4)^2+(y-4)^2=8.$

1821. $(x+\dfrac{7}{3}a)^2+(y-\dfrac{8}{3}a)^2=\dfrac{125}{9}a^2.$ **1822.** $\dfrac{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}{ab^4}.$

1823. $2\sqrt{2ay}.$ **1824.** 1. **1825.** $\dfrac{\sqrt{2}}{4}.$ **1826.** $\dfrac{1}{2a}.$

1827. $\dfrac{1}{6}.$ **1828.** $\dfrac{1}{3\sqrt{2}}.$ **1829.** $\dfrac{4}{17\sqrt{17}}.$

1830. $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2};\ -\dfrac{1}{2}\ln 2\right).$ **1831.** $(0;\ 0).$ **1832.** $(4a;\ 0)$ ja $(-4a;\ 0).$

1833. $(ax)^{\frac{2}{3}}+(by)^{\frac{2}{3}}=C^{\frac{4}{3}}.$ **1834.** $(2x)^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{2}{3}}=5^{\frac{2}{3}}.$

1835. $x=\dfrac{t-9t^5}{2},\ y=\dfrac{1+15t^4}{6t}.$ **1836.** $x=-\dfrac{4}{3}t^3,\ y=3t^2-\dfrac{3}{2}.$

1837. $x=a\cos^3 t+3a\cos t\sin^2 t,\ \ y=a\sin^3 t+3a\cos^2 t\sin t.$

1838. $x^2+y^2=a^2.$ **1839.** $(0;\ 0)$ — isoleeritud punkt.

1840. $(0;\ 0)$ — tagasipöördepunkt. **1841.** $(0;\ 0)$ — sõlmpunkt.

1842. $(0;\ 0)$ — tagasipöördepunkt. **1843.** $(0;\ 0)$ — enesepuutepunkt.

1844. $(a;\ 0)$ — sõlmpunkt. **1845.** $4y+(x+1)^2=0.$

1846. $y=x.$ **1847.** $xy=1.$ **1848.** $y=\dfrac{4}{27}x^3.$ **1849.** $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=4.$

1850. $y=\pm 2e^{\frac{x}{2}}.$ **1851.** $x=-\psi'(t),\ \ y=-t\psi'(t)+\psi(t).$

1852. $y=2(\pm\sqrt{x}-x).$ **1853.** $(x+y-k)^2-4xy=0.$ **1854.** $xy=\dfrac{k}{4}.$

1855. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=e^{\frac{2}{3}}.$ **1856.** $8y(x^2+y^2)+x^2=0.$ **1857.** $y^2=4ax.$

1858. $x-1=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-3}{3},\ x+2y+3z-8=0.$

1859. $\dfrac{x-\sqrt{2}}{-\sqrt{2}}=\dfrac{y-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\dfrac{z-\pi}{4},\ \ x-y-2\sqrt{2}z+2\pi\sqrt{2}=0.$

1860. $\dfrac{2-x}{2}=y-3=\dfrac{z+20}{17},\ \ 2x-y-17z-341=0.$

1861. $x-6=\frac{y-18}{6}=\frac{z-72}{36}$, $x+6y+36z-2706=0$.

1862. $(-1;\ 1;\ -1)$ ja $\left(-\frac{1}{3};\ \frac{1}{9};\ -\frac{1}{27}\right)$.

1863. $\tau=\left\{\frac{1}{\sqrt{14}};\ \frac{2}{\sqrt{14}};\ \frac{3}{\sqrt{14}}\right\}$, $\beta=\left\{\frac{3}{\sqrt{19}};\ -\frac{3}{\sqrt{19}};\ \frac{1}{\sqrt{19}}\right\}$,

$\gamma=\left\{-\frac{11}{\sqrt{266}};\ -\frac{8}{\sqrt{266}};\ \frac{9}{\sqrt{266}}\right\}$.

1864. $\left\{0;\ -\frac{2}{\sqrt{5}};\ \frac{1}{\sqrt{5}}\right\}$. 1865. $x+y=0$.

1866. $6x-y-12z+8=0$. 1867. $6x-8y-z+3=0$.

1868. $27x-27y-9z-28=0$, $54x-27y-36z-46=0$.

1869. $\frac{2}{9}$. 1870. $\frac{\sqrt{2}}{3}e^{-t}$. 1871. $\frac{1}{3(1+t^2)^2}$. 1872. $\frac{6}{25a\sin 2t}$.

1873. $\frac{2}{(1+2y)^2}$. 1874. $\frac{1}{4}$, $\frac{\sqrt{2}}{4}$. 1883. $a=-1$, $b=-4$.

1884. $a=1$, $b=1$, $c=-1$. 1885. $y''+y=e^x$. 1886. $xy''=y'$.

1887. $y''=x+\sin x$. 1888. $y''=y'+x$. 1889. $y''+y=0$.

1890. $x^3\frac{d^3y}{dx^3}+6x^2\frac{d^2y}{dx^2}+4x\frac{dy}{dx}-4y=0$. 1891. $\frac{d^2y}{dx^2}=-x$.

1892. $\frac{dy}{dx}=\frac{ny}{x}$. 1893. $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$.

1894. $\left(y-x\frac{dy}{dx}\right)^2=a^2\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]$. 1895. $y=\frac{x^2}{2}+C$.

1896. $y=x+C$. 1897. $y^2+x^2=C$. 1898. $y^2-x^2=C$.

1899. $y^2=x^2-2x-2\ln|x|+C$. 1900. $\frac{y^3}{3}+\frac{y^2}{2}=\ln|x-1|+C$.

1901. $y=\frac{1}{1+Cx}$. 1902. $(y-1)(x+1)=Cxy$, singulaarne lahend $y=0$.

1903. $y^2=x^2-2x-2\ln|x|+C$. 1904. $y-2=C(x+1)$.

1905. $y^2=\ln\left|\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right|+C$.

1906. $\sqrt{y}-\arctan\sqrt{y}=\sqrt{x}-\ln(1+\sqrt{x})+C$.

1907. $y+1=C\sqrt{2y+1}\sqrt[5]{(x-2)^2\sqrt{2x+1}}$.

1908. $\arcsin\frac{x}{2}+\cot\frac{y}{2}=C$, singulaarne lahend $y=0$.

1909. $1+y^2=C(1-x^2)$, $1+y^2=\frac{2}{3}(x^2-1)$.

1910. $e^x+e^{-y}=C$, $C=2$. 1911. $y=\sqrt[3]{C+3x(1-x)}$, $C=5$.

1912. $x^2+y^2=\ln Cx^2$, $x^2+y^2=2\ln x+1$. 1913. $y+x=C(x^2+y^2)$.

1914. $y^2=2x^2\ln\frac{Cx^2}{|y|}$. 1915. $y^2=2x^2(\ln|x|+C)$. 1916. $y^2-x^2=Cy^3$.

1917. $\ln|x|+\sqrt{\frac{y}{x}}=C$. 1918. $(x+y)^2(2x+y)^3=C$. 1919. $y=\frac{x}{\ln|Cx|}$.

1920. $Cy = e^{\frac{y}{x}}$. 1921. $\sqrt{\frac{(x+y-1)^3}{x-y+3}} = C$.

1922. $x^2 - xy + y^2 - x + y = C$. 1923. $x + 2y + \ln|2x + 3y| = C$.

1924. $x - 2(x+y) - 3\ln|x+y-2| = C$, singulaarne lahend $y = 2 - x$.

1925. $\ln x = \frac{x}{x+y} e^{\frac{y}{x}} - 1$. 1926. $y = x \arcsin \frac{x}{2}$.

1927. $y^2 = 2x^2(1 + \ln|x|)$. 1928. $y - x = e^{\frac{x}{y-x}}$.

1929. $2\ln|x + y - 1| = 4 - 3x - y$.

1930. $x^2 - xy + y^2 + x - y = 0$. 1931. $3\ln|2 - x - y| = 1 - x - 2y$.

1932. $\ln|x + y - 2| = 4 - x - 2y$. 1933. $y = Ce^x - 2 - 2x - x^2$.

1934. $y = e^{-x^4}(x^3 + C)$. 1935. $y = \frac{x^2}{2} + Cx^3$.

1936. $y = C^{-x^3}(x + C)$. 1937. $y = e^{x^2}(\ln|x| + C)$.

1938. $y = Ce^{-3x} + \frac{12x + 11}{9}$. 1939. $y = \sin x + \frac{\cos x}{x} + C$.

1940. $y = e^{\sin x}\left(\frac{x^3}{3} + C_1\right)$. 1941. $y = (x^2 + C_1)\sin x$.

1942. $y = \frac{x^4}{6} + \frac{C}{x^2}$. 1943. $y = (x + \sqrt{1 + x^2})(\arcsin x + C)$.

1944. $x = y^2 + C_1 y^2 e^{\frac{1}{y}}$. 1945. $x = 1 + y^2 + C\sqrt{1 + y^2}$.

1946. $y = 2x - 1$. 1947. $y = e^{-x^2}\left(1 + \frac{x^2}{2}\right)$. 1948. $y = x^2$.

1949. $y = (x + 2)(x^2 + 1)$. 1950. $y = \left(\tan x + \frac{\ln|\cos x| + C}{x}\right)^2$.

1951. $y^2 = \frac{e^{x^2}}{2x + C}$. 1952. $y^2 = \frac{3x^2}{1 + Cx^6}$. 1953. $y = e^{-2x^2}\left(\frac{x^2}{4} + C\right)^2$.

1954. $y = \frac{1}{\ln x + Cx + 1}$. 1955. $\frac{1}{x} = 2 - y^2 - Ce^{-0,5y^2}$.

1956. $y^2 = x(1 - \ln|x|)$. 1957. $y^3 = e^x - x - 2$.

1958. $y = \frac{1}{1 - x}$. 1959. $y^3 = \frac{3}{2x} + \frac{2}{x^3}$. 1960. $y \ln x = C$.

1961. $3x^2y^2 + y^4 + x^3 = C$. 1962. $\sqrt{x^2 + y^2} + \frac{y}{x} = C$.

1963. $\frac{x^2}{2} - \arctan\frac{x}{y} + \frac{y^2}{2} + C$. 1964. $\ln\sqrt{x^2 + y^2} - \arctan\frac{x}{y} = C$.

1965. $\frac{e^y - 1}{1 + x^2} = C$. 1966. $xy + \sqrt{x^2 + y^2} = C$.

1967. $y \tan x - x \arctan y = C$. 1968. $xy \cos x - y^2 \ln x = C$.

1969. $xy \ln y - \sin\frac{x}{y} = C$. 1970. $y = x - \frac{1}{x}$.

1971. $2x^3 + 2xy + 2y^2 - x - 3y = 4$. 1972. $(x + y)^2 + y^2 = 1$.

1973. $xe^y - y^2 = 1$. **1974.** $3\sqrt{x^2+y^2} - x^3 + 3y = 0$.

1975. $\mu(y) = \frac{1}{y^2}$, $\frac{x^2}{2} - \frac{1}{y} - 3xy = C$. **1976.** $\mu(x) = x$, $x^4 + 2x^2y^2 + 2x^2 = C$.

1977. $\mu(y) = \frac{1}{y^2}$, $\frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} = C$. **1978.** $\mu(x) = e^x$, $y = Ce^{-x} + \frac{1}{3}e^{2x}$.

1979. $\mu(y) = \cos y$, $2x^2 \sin y + \cos 2y = C$.

1980. $\mu(x) = e^{-2x}$, $y^2 = (C - 2x)\,e^{2x}$.

1981. $\mu(x) = \frac{1}{\sin x}$, $y\left(y^2 + \frac{1}{\sin x}\right) = C$. **1982.** $\mu(x) = e^{\int P(x)\,dx}$.

1983. $\mu(x) = \frac{1}{x^3}$, $x^2 - 2y = Cx^3$. **1984.** $\mu(x) = e^{x^2}$, $y = e^{-x^2}\left(\frac{x^2}{2} + C\right)$.

1985. $\mu(x) = x^2$, $y = \frac{C - e^{-x^2}}{2x^2}$.

1986. $\mu(x) = e^x$, $y = Ce^{-x} + \frac{1}{2}(\cos x + \sin x)$. **1987.** $4y = (\ln|x| + C)^2$.

1988. $\left(y - \frac{C}{x}\right)\left(y - \frac{C}{x^2}\right) = 0$.

1989. $(y - \frac{x^2}{2} + C)(x + y - 1 + Ce^{-x}) = 0$.

1990. $(2y + x^2 - C)(x + \ln|y| + C) = 0$.

1991. $(y^2 + 2x + C)(y^2 - 2x + C) = 0$.

1992. Lahutame kõigepealt võrrandi vasaku poole tegureiks: $y'^3 - 7y' + 6 = $
$= y'(y'-1)(y'+1) - 6(y'-1) = (y'-1)(y'-2)(y'+3)$;
$(y - x + C)(y + 3x + C)(y - 2x + C) = 0$.

1993. $x = p + p^2$, $y = C + \frac{p^2}{2} + \frac{2}{3}p^3$. **1994.** $x = 2p - \frac{1}{p^2}$, $y = p^2 - \frac{2}{p} + C$.

1995. $64(y + C)^3 = 27(x - 1)^4$. **1996.** $x = \frac{1+p}{p^3}$, $y = \frac{4p+3}{2p^2} + C$.

1997. $x = \frac{3}{2}p^2 + \frac{5}{4}p^4 + C$, $y = p^3 + p^5 - 2$.

1998. $x = 2p - \frac{3}{2}p^2 + C$, $y = 1 + p^2 - p^3$.

1999. $x = \ln|p| - 2p + C$, $y = p - p^2$.

2000. $x = 4p^3 + \frac{1}{2p^2} + C$, $y = 3p^4 + \frac{1}{p}$.

2001. $x = \ln p - \frac{1}{p} + C$, $y = p + \ln p$. **2002.** $x = (p + 1)e^p + C$, $y = p^2e^p$.

2003. $y = C^2 + Cx - \frac{x^2}{4}$.

2004. Üldlahend $(y - C)^2 = 4Cx$, singulaarne lahend $y = -x$.

2005. Üldlahend $y = Cx + C^2$, singulaarne lahend $y = -\frac{x^2}{4}$.

2006. Üldlahend $y = Cx + C - C^2$, singulaarne lahend $4y = (x + 1)^2$.

2007. Üldlahend $y = Cx - \sqrt{1 + C^2}$, singulaarne lahend $x^2 + y^2 = 1$.

2008. Üldlahend $y = Cx - \arctan C$, singulaarsed lahendid $y = \sqrt{x - x^2} - \arctan\sqrt{\frac{1-x}{x}}$ ja $y = -\sqrt{x - x^2} + \arctan\sqrt{\frac{1-x}{x}}$.

2009. Üldlahend $y = Cx + \frac{1}{2C}$, singulaarne lahend $y^2 - 2x = 0$.

2010. Üldlahend $y = Cx + \sin C$, singulaarne lahend $y = x(\pi - \arccos x) + \sqrt{1 - x^2}$.

2011. Üldlahend $y = Cx + \frac{1}{2 + C}$, singulaarsed lahendid $y = 2(\sqrt{x} - x)$ ja $y = -2(\sqrt{x} + x)$.

2012. Üldlahend $y = Cx - 3C^3$, singulaarne lahend $81y^2 - 4x^3 = 0$.

2013. $3x^2 + 6xy + 6x - 2y^3 + 18y = C$. **2014.** $y = (2x + C)e^{-x^2}$.

2015. $\mu(x) = \frac{1}{x^2}$, $x + \frac{y}{x} = C$. **2016.** $\arctan 3y = \arcsin\frac{3x}{2} + C$.

2017. $y = (1 + x^2)(x + C)$. **2018.** $\sin(x + y^2) + 3xy = C$.

2019. $y = x^4\left(C_1 + \frac{1}{2}\ln x\right)^2$. **2020.** $y^2 = 2Cx - C^2$.

2021. $\mu(x) = \frac{1}{x^2}$, $4y + xy^4 = Cx$. **2022.** $y = \frac{x^4}{6} + \frac{C}{x^2}$.

2023. $\frac{1}{y} = x\left(C - \frac{1}{2}\ln^2 x\right)$. **2024.** $Cx = \ln y - \ln x$.

2025. $y = x^2(C - \ln|x|)$. **2026.** $y = \sin x + C\cos x$.

2027. $\mu(x) = \frac{1}{x}$, $y = Cx - 1$. **2028.** $y = Cx + x^2$.

2029. $y(\ln|y| - 2) + x = 0$. **2030.** $y = \frac{x}{x - 1} + Cx$.

2031. $x + y + 1 = 0$. **2032.** $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2$. **2033.** $y = 2x$.

2034. $y = \frac{6}{6 - x}$. **2035.** $e^{\frac{x}{y}} - x^2 + y^3 = 2$.

2036. $x^2 - y^2 + 2xy - 4x + 8y - 7 = 0$. **2037.** $\sqrt{1 - y^2} = \arcsin x + \frac{4}{5}$.

2038. $y + 2 = \sqrt{x - x^2} + \arcsin\sqrt{x}$. **2039.** $y = \frac{x}{2 - \ln|x|}$.

2040. $\ln\left|\tan\frac{y}{4}\right| = -2\sin\frac{x}{2}$. **2041.** $(x + y + 1)^2 + 4(x - 2y + 4) = 0$.

2042. $(x - y)^2 = x(x - 2y)^3$. **2043.** $y = 3x^2$. **2044.** $y^2 = Cx^3$.

2045. $y^2 = 18x$. **2046.** $y^2 = \ln Cx^{2k}$, kus k on võrdetegur.

2047. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, kus a on puutuja lõigu pikkus.

2048. $s = e^{\frac{t}{2}}$. **2049.** $s = \frac{t^2}{8}$. **2050.** $\ln|Cx| + 2\sqrt{\frac{y}{x}} = 0$.

2051. $x^2 = C^2 + 2Cy$. **2052.** $y = \frac{x}{1 - Cx}$, singulaarne lahend $y = 0$.

2053. $y = -x \ln|x| + Cx$. 2054. $y = Cx^2 + x$.

2055. $x + y^2 + Cy = 0$. 2056. $x = Cy \pm \frac{a^2}{y}$. 2057. $y = Cx + \frac{a^2}{2x}$.

2058. $y = Cxe^{-x}$. 2059. $y = x(C - \ln|x|)$. 2060. Hüperboolid $y = \frac{x}{x + C}$.

2061. $i = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$. 2062. $x^2 + 4y^2 = C$.

2063. Ringjoonte parv $(x - C)^2 + y^2 = R^2$, ortogonaalsed trajektoorid

$$x + C = \pm\left(\sqrt{R^2 - y^2} - R \ln \frac{R + \sqrt{R^2 - y^2}}{y}\right).$$

2064. $x^2 + y^2 = 2a^2 \ln Cx$. 2065. $y^2 - x^2 = C$.

2066. $y = \frac{x^2}{2} \ln x + \frac{x^4}{12} - \frac{3x^2}{4} + C_1x + C_2$.

2067. $y = x \ln x + \frac{1}{6} x^3 + C_1x + C_2$.

2068. $y = \frac{\arctan x}{2}(x^2 - 1) - \frac{x}{2} \ln(1 + x^2) + \frac{x^3}{6} + C_1x + C_2$.

2069. $y = C_1x^2 + C_2$. 2070. $y = C_1x + C_1^2 \ln|x + C_1| + C_2$.

2071. $y = C_1 \ln|1 + x| + C_2$. 2072. $y = x^2 + C_1 \ln|x| + C_2$.

2073. $y = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + C_1 \ln x + C_2$.

2074. $y = (1 + C_1^2) \ln(C_1 + x) - C_1x + C_2$.

2075. $y - C_2 = \frac{2\sqrt{2}}{3}(x - C_1)^{\frac{3}{2}}$. 2076. $y + C_2 = \ln(x + C_1)$.

2077. $y = C_1 \sin(x + C_2)$. 2078. $x + C_2 = \frac{4}{3}\sqrt{\sqrt{y} + C_1}(\sqrt{y} - 2C_1)$.

2079. $y = C_2e^{C_1x}$. 2080. $3y = (x + C_1)^3 + C_2$.

2081. $y = \frac{C_1C_2e^{C_1x}}{1 - C_2e^{C_1x}}$. 2082. $\cot y = C_2 - C_1x$.

2083. $x = C_1 \ln(y - C_1) + y + C_2$. 2084. $y = \frac{C_1}{2}\left(e^{\frac{x - C_2}{C_1}} + e^{-\frac{x - C_2}{C_1}}\right)$.

2085. $y = 1 - \frac{1}{C_1x + C_2}$. 2086. $y = x(\ln x + 1)$.

2087. $y = x^2 - 2x$. 2088. $y = -\ln|\cos x|$. 2089. $y = \frac{2}{5} x^2\sqrt{2x} - \frac{16}{5}$.

2090. $y = e^x + x - 2$. 2091. $y = -\ln(1 - x)$. 2092. $y = \sqrt{2x - x^2}$.

2093. $y = \sqrt{1 + e^{2x}}$. 2094. $y = C_1e^{3x} + C_2e^{4x}$. 2095. $y = C_1e^{\frac{x}{2}} + C_2e^{-2x}$.

2096. $y = C_1 + C_2e^{7x}$. 2097. $y = C_1 + C_2e^{\frac{4x}{3}}$.

2098. $y = e^{2x}\left(C_1e^{\sqrt{5}x} + C_2e^{-\sqrt{5}x}\right)$. 2099. $y = C_1e^{\frac{3+\sqrt{65}}{4}x} + C_2e^{\frac{3-\sqrt{65}}{4}x}$.

2100. $y = (C_1 + C_2 x) e^{-\frac{x}{4}}$. **2101.** $y = (C_1 + C_2 x) e^{\frac{x}{3}}$.

2102. $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$.

2103. $y = e^{-\frac{7}{2}x} \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{19}}{2} x + C_2 \sin \frac{\sqrt{19}}{2} x \right)$.

2104. $y = C_1 \cos \sqrt{\frac{5}{2}}\, x + C_2 \sin \sqrt{\frac{5}{2}}\, x$.

2105. $y = e^{-x} \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{6}}{2} x + C_2 \sin \frac{\sqrt{6}}{2} x \right)$.

2106. $y = e^{\frac{5}{3}x} + 1$. **2107.** $y = e^{\frac{x}{3} - 1}$. **2108.** $y = (x - 1) e^{3x}$.

2109. $y = e^{3x} (\cos x + \sin x)$. **2110.** $y = \frac{1}{6} [e^{x+1} - e^{-5(x+1)}]$.

2111. $y = e^{4x} (\cos 3x + \frac{4}{3} \sin 3x)$. **2112.** $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{4x} + \frac{1}{144} (12x + 7)$.

2113. $y = 2x^4 - 5x^2 + 10x + C_1 + C_2 e^{-x}$.

2114. $y = C_1 + C_2 e^{3x} + x^3 + 2x^2 - 3x$.

2115. $y = C_1 e^{5x} + C_2 e^{-x} - \frac{x^3}{5} + \frac{12x^2}{25} - \frac{126x}{125} - \frac{499}{625}$.

2116. $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{4} (2x + 3)$.

2117. $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x} - \frac{x}{4} e^{-x}$.

2118. $y = e^{3x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + \frac{1}{29} e^{-2x}$.

2119. $y = (C_1 + C_2 x) e^{-x} + \frac{3}{8} e^{-5x}$.

2120. $y = e^x (C_1 \cos \sqrt{3} x + C_2 \sin \sqrt{3} x) + \left(\frac{2}{7} x - \frac{8}{49} \right) e^{3x}$.

2121. $y = C_1 e^{-x} + e^{2x} \left(C_2 + \frac{4}{3} x \right)$. **2122.** $y = e^{-x} \left(C_1 + C_2 x + \frac{3}{2} x^2 \right)$.

2123. $y = e^{-\frac{3}{7}x} \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{26}}{7} x + C_2 \sin \frac{\sqrt{26}}{7} x \right) + \left(\frac{19}{100} - \frac{3}{20} x \right) \cos x +$

$+ \left(\frac{33}{100} - \frac{1}{20} x \right) \sin x$.

2124. $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{6x} + \frac{5 \sin x + 7 \cos x}{74}$.

2125. $y = C_1 e^{(-2+\sqrt{5})x} + C_2 e^{(-2-\sqrt{5})x} + \frac{1}{10} \sin x - \frac{1}{5} \cos x$.

2126. $y = e^{-x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + \left(\frac{2}{17} x - \frac{1220}{17^2} \right) \sin 2x -$

$- \left(\frac{8}{17} x + \frac{152}{17^2} \right) \cos 2x$.

2127. $y = C_1 \sin 3x + \left(C_2 - \frac{x}{6}\right) \cos 3x.$

2128. $y = (C_1 - x^2) \cos x + (C_2 + x) \sin x.$

2129. $y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + e^{-x}[(6 - x^2) \cos x + 4x \sin x].$

2130. $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + \frac{1}{6} e^x + 1.$

2131. $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x} + \frac{1}{15} e^{2x} + \frac{1}{3} x - \frac{4}{9}.$

2132. $y = C_1 \cos \sqrt{3}x + C_2 \sin \sqrt{3}x + \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{18} \sin 3x.$

2133. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + \frac{1}{18} e^{4x} \left(x^2 - x + \frac{7}{18}\right) + \frac{2}{3} x e^x.$

2134. $y = C_1 \cos x + \left(C_2 + \frac{x}{2}\right) \sin x + 2x^3 - 13x + 2.$

2135. $y = x + 3 + x^2 e^x \left(\frac{x^2}{2} - 2\right) + e^x (C_1 + C_2 x).$

2136. $y = e^{-2x} \left(C_1 + C_2 x + \frac{1}{2x}\right).$

2137. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \cos x \ln \cos x + x \sin x.$

2138. $y = \ln |e^x - 3| + C_1 + \frac{e^x}{3} (x - \ln |3 - e^x| + C_2).$

2139. $y = (e^x + e^{-x}) \arctan e^x + C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$

2140. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \cos \ln \sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}}.$

2141. $y = e^x (x \arctan x - \ln \sqrt{x^2 + 1} + C_1 x + C_2).$

2142. $y = \frac{1}{8} (e^{-x} - e^x + 10 x e^x).$ 2143. $y = \frac{3}{2} e^x - \frac{e^{2x}}{2} (\sin x + \cos x).$

2144. $y = \frac{16}{9} \sin 2x - \frac{4}{3} x \cos 2x + \cos x - \frac{2}{9} \sin x.$

2145. $y = \frac{1}{2} (\sin x - \cos x + e^x) + e^{-x}.$

2146. $y = \frac{\sin 2x}{4} (1 + \ln \sin 2x) - \frac{x}{2} \cos 2x.$

2147. $y = [x \sin x + (1 + \ln \cos x) \cos x] e^{2x}.$ 2148. $y = C_1 e^{-2x} + (C_2 + C_3 x) e^x.$

2149. $y = C_1 e^x + e^{2x} (C_2 \cos 3x + C_3 \sin 3x).$ 2150. $y = (C_1 + C_2 x) e^x + C_3 e^{-3x}.$

2151. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x.$

2152. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 e^{\sqrt{2}x} + C_4 e^{-\sqrt{2}x}.$

2153. $y = C_1 + C_2 x + C_3 e^x - \frac{1}{6} x^3 - x^2.$

2154. $y = C_1 e^{\sqrt{2}x} + C_2 e^{-\sqrt{2}x} + C_3 \cos \sqrt{2}x + C_4 \sin \sqrt{2}x - \frac{e^x}{3}.$

2155. $y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x} + \frac{1}{12} x^4 - \frac{1}{3} x^3 + x^2.$

2156. $y = C_1e^{2x} + e^{-x}(C_2 + C_3x) - \frac{\sin x}{2}$.

2157. $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} + C_3e^{-3x} + x^3 - \frac{31}{6}x^2 + \frac{233}{18}x - \frac{1538}{108}$.

2158. $y = \frac{e^x}{8} + e^{-x}(C_1 + C_2x + C_3x^2) + C_4$.

2159. $y = C_1e^{-x} + C_2\cos x + C_3\sin x + x^3$.

2160. $y = C_1 + C_2e^x + C_3e^{6x} + \frac{7}{74}\sin x - \frac{5}{74}\cos x$.

2161. $y = C_1e^x + C_2xe^x + C_3e^{-2x} + x^2(x+1)e^x + \frac{9}{4}e^{-x}$.

2162. $y = -(4 + x)$. 2163. $y = C_1\cos\ln x^2 + C_2\sin\ln x^2$.

2164. $y = C_1x + \frac{C_2}{x}$. 2165. $y = \frac{1}{x^3}(C_1x^{\sqrt{6}} + C_2x^{-\sqrt{6}})$.

2166. $y = e^{-2x}(C_1\cos\ln x^2 + C_2\sin\ln x^2)$.

2167. $y = C_1x^2 + C_2x^2\ln|x| + \frac{1}{4}$. 2168. $y = C_1x + C_2x^{-3} + \frac{1}{5}x^2$.

2169. $y = \left(\frac{x^3}{6} + C_1x + C_2\right)x^2$. 2170. $y = \frac{\ln^3 x + C_1\ln x + C_2}{x}$.

2171. $y = C_1\cos\ln(x+1) + C_2\sin\ln(x+1)$. 2172. $y = x^2 - x$.

2173. $y = -x^{-5}$. 2174. $y = x^3$. 2175. $y = \frac{x^2}{4} + x + \frac{8}{x^2}$.

2176. $y = \frac{1}{4}(\ln x + x^2 + 1)$. 2177. $(x - C_2)^2 = 4C_1(y - C_1)$.

2178. $y = e^x(x^3 + x^2 + C_1x + C_2) + C_3e^{-2x}$.

2179. $y = e^{3x}(C_1e^{\sqrt{3}x} + C_2e^{-\sqrt{3}x})$.

2180. $y = C_1e^x + C_2e^{-2x} + e^{-x}\left(-\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{9}{4}x + \frac{3}{8}\right) +$
$+ e^{2x}\left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{8}x - \frac{13}{32}\right) + e^{5x}\left(\frac{1}{28}x - \frac{67}{784}\right)$.

2181. $y = \frac{1}{10}e^{3x} - \frac{2}{5}e^{2x} + \frac{1}{2}e^x + C_1\cos x + C_2\sin x$.

2182. $y = (C_1 + C_2x)e^{2x} + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}$.

2183. $y = e^{2x}(C_1\cos\sqrt{3}x + C_2\sin\sqrt{3}x)$. 2184. $y = C_1\cos kx + C_2\sin kx$.

2185. $y = (C_1 + C_2x - \ln x)e^x$. 2186. $y = C_1x - C_1^2\ln|x + C_1| + C_2$.

2187. $y = C_1e^{2x} + e^{-x}(C_2\cos\sqrt{3}x + C_3\sin\sqrt{3}x) - \frac{x^2}{8}$.

2188. $y = \frac{e^x}{8}[C_1 + 2x - \ln(2 - e^{2x})] + \frac{e^{-x}}{4}[C_2 + \ln(2 - e^{2x})]$.

2189. $(x - C_2)^2 + y^2 = C_1^2$.

2190. $y = C_1e^{-x} + C_2e^{3x} + \frac{\arctan e^x}{4}(e^{3x} - e^{-x}) + \frac{e^{2x}}{4} - \frac{1}{12}$.

2191. $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} + C_3 + C_4x + C_5x^2 - \frac{x^4}{96}$.

2192. $y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + \frac{1}{4} x^3 + \frac{3}{4} x^2 + \frac{7}{8} x + 1.$

2193. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + \frac{1}{18} e^{4x} \left(x^2 - x + \frac{7}{18} \right).$

2194. $y = (x - 2) e^x + C_1 x + C_2.$ 2195. $y = \frac{x^4}{24} + C_1 x^2 + C_2 x + C_3.$

2196. $y = e^x \left(C_1 \cos \frac{x}{\sqrt{2}} + C_2 \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \right).$

2197. $y = C_1 e^x + C_2.$ 2198. $y = e^{2x} (C_1 \cos \sqrt{3} x + C_2 \sin \sqrt{3} x).$

2199. $y = (e^x - e^{-x}) \ln (e^x - 1) + e^x (C_1 - x) + C_2 e^{-x} - 1.$

2200. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + x e^{-x}.$

2201. $y = 2 - \cos x - \sin x + \cos x \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right|.$

2202. $y = \frac{1}{2} (e^{x-1} + e^{1-x}).$ 2203. $y = \sin x \ln \sin x - x \cos x.$

2204. $y = \arcsin x.$ 2205. $y = e^t (C_1 + C_2 t), \quad x = \frac{1}{2} e^t (2C_1 + C_2 + 2C_2 t).$

2206. $x = C_1 e^t - C_2 e^{-t} - \frac{1}{2} (e^t + e^{-t}) + \frac{t}{2} (e^t - e^{-t}), \quad y = C_1 e^t + C_2 e^{-t} +$
$+ \frac{t}{2} (e^t + e^{-t}).$

2207. $x = C_1 + C_2 e^{-2t} + e^t, \quad y = C_1 - C_2 e^{-2t} + e^t.$

2208. $x = C_1 e^{\sqrt{2} t} + C_2 e^{-\sqrt{2} t}, \quad y = C_1 (1 + \sqrt{2}) e^{\sqrt{2} t} + C_2 (1 - \sqrt{2}) e^{-\sqrt{2} t}.$

2209. $x = C_1 C_2 e^{C_1 t}, \quad y = C_2 e^{C_1 t}.$

2210. $x = \frac{1}{2} e^{\frac{t}{2}} \left[(C_1 + \sqrt{3} C_2) \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t + (C_2 - \sqrt{3} C_1) \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t \right],$
$y = e^{\frac{t}{2}} (C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t).$

2211. $x = 2e^{-t} + C_1 e^t + C_2 e^{-2t}, \quad y = 3e^{-t} + 3C_1 e^t + 2C_2 e^{-2t}.$

2212. $x = C_1 e^t + C_2 e^{mt} + C_2 e^{nt}, \quad y = C_1 e^t + \frac{1}{6} [(1 - \sqrt{5}) C_2 e^{mt} +$
$+ (1 + \sqrt{5}) C_3 e^{nt}], \quad z = \frac{1}{6} [(\sqrt{5} - 5) C_2 e^{mt} - (\sqrt{5} + 5) C_3 e^{nt}],$ kus $m =$
$= \frac{\sqrt{5} - 3}{2}$ ja $n = - \frac{\sqrt{5} + 3}{2}.$

2213. $x = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 \cos t + C_4 \sin t,$
$y = C_1 e^t + C_2 e^{-t} - C_3 \cos t - C_4 \sin t.$

2214. $x = \cos t + 2 \sin t, \quad y = -\sin t + 2 \cos t.$

2215. $x = e^{-2t}, \quad y = 0, \quad z = -e^{-2t}.$

2216. $y = \pm \frac{1}{k} \left[\sqrt{1 - (kx + C_1)^2} - \ln \frac{1 + \sqrt{1 - (kx + C_1)^2}}{kx + C_1} \right] + C_2.$

2217. 1. a) $x = a\cos\sqrt{\frac{Cg}{P}}\,t$, b) $x = ae^{-nt}\cos kt$, kus $g = 981\,\frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}$,

$n = \frac{50\mu P}{g}$, $k^2 = \frac{Cg}{P} - n^2$ ja kiiruse ühikuks on m/sec;

2. a) $2\pi\sqrt{\frac{P}{Cg}}$, b) $\frac{2\pi}{k}$.

2218. Aeg $t \to \infty$, kaugus $x \to \frac{vP}{3{,}6\ \mu g}$ (km). **2219.** 1) $\sqrt{gR}$; 2) $\sqrt{\frac{59gR}{30}}$.

2220. 1) $R\cos\sqrt{\frac{g}{R}}\,t$; 2) $2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$; 3) $\sqrt{gR}$.

2221. 1. a) $v = c\ln\frac{m_0}{m}$, b) $v = c\ln\frac{m_0}{m} - \frac{g}{a}$;

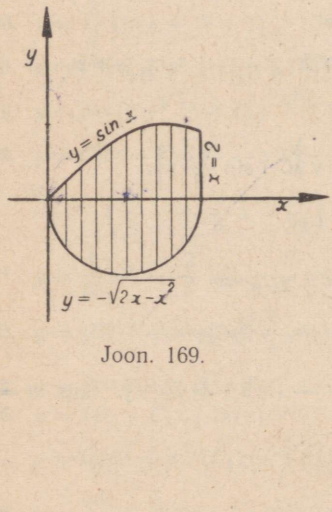
2. a) $v_1 = c\ln 2$, b) $v_1 = c\ln 2 - \frac{gm_0}{2a}$.

2222. $10\frac{2}{3}$. **2223.** $2\frac{1}{12}$. **2224.** $\frac{2}{3}$. **2225.** $\frac{6}{35}$. **2226.** $\frac{44}{105}$.

2227. $\frac{1}{2}[6 - (\ln 2)^2]$. **2228.** $\frac{1}{3}$. **2229.** 3π.

2230. $[X(A) - X(a)][Y(B) - Y(b)]$.

2231. $0 \leqslant x \leqslant 2$, $-\sqrt{2x - x^2} \leqslant y \leqslant \sin x$; joon. 169.

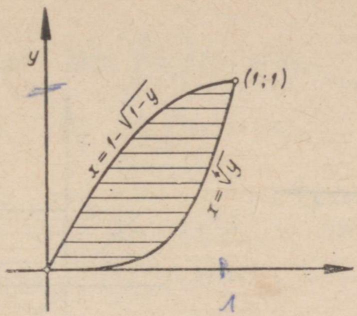


Joon. 169.

2232. $-1 \leqslant y \leqslant 1$,
$2y - 2 \leqslant x \leqslant 1 - \sqrt{1 - y^2}$; joon. 170.

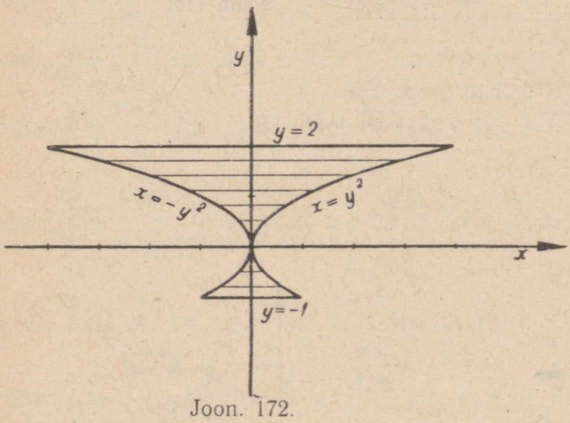
Joon. 170.

2233. $0 \leqslant y \leqslant 1, \quad 1-\sqrt{1-y} \leqslant x \leqslant \sqrt[4]{y}$; joon. 171.



Joon. 171.

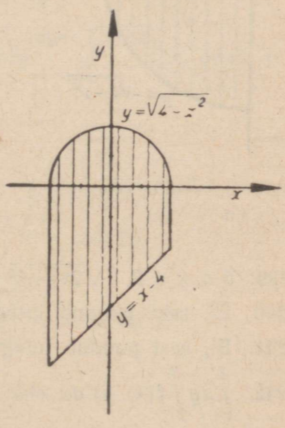
2234. $-1 \leqslant y \leqslant 2, \quad -y^2 \leqslant x \leqslant y^2$; joon. 172.



Joon. 172.

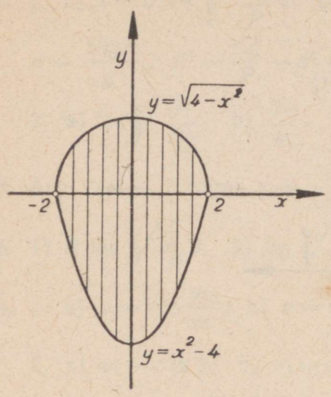
2235. $-2 \leqslant x \leqslant 2$,

$x-4 \leqslant y \leqslant \sqrt{4-x^2}$; joon. 173.

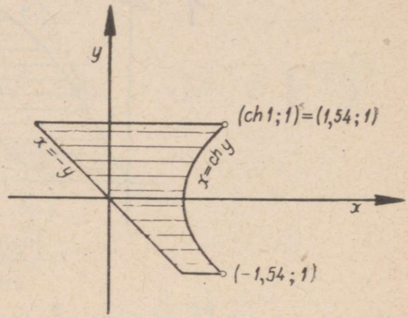


Joon. 173.

2236. $-2 \leqslant x \leqslant 2, \quad x^2 - 4 \leqslant y \leqslant \sqrt{4-x^2}$; joon. 174.



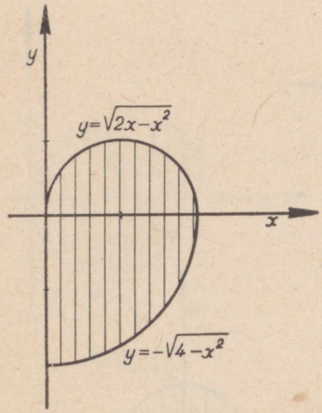
Joon. 174.



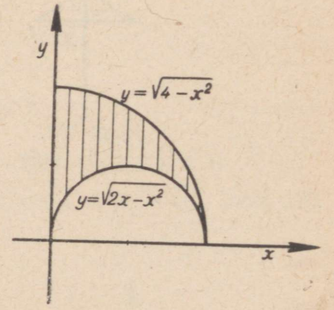
Joon. 175.

2237. $-1 \leqslant y \leqslant 1, \quad -y \leqslant x \leqslant \operatorname{ch} y$; joon. 175.

2238. $0 \leqslant x \leqslant 2, \quad -\sqrt{4-x^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{2x-x^2}$; joon. 176.



Joon. 176.



Joon. 177.

2239. $0 \leqslant x \leqslant 2, \quad \sqrt{2x-x^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{4-x^2}$; joon. 177.

2240. Ei, sest puudub integreerimispiirkond.

2241. Ei, sest puudub integreerimispiirkond.

2242. $\int\limits_1^3 dy \int\limits_2^7 f(x, y)\,dx$ ehk $\int\limits_2^7 dx \int\limits_1^3 f(x, y)\,dy$.

2243. $\int_{-3}^{2} dy \int_{-10}^{-3} f(x, y)\, dx$ ehk $\int_{-10}^{-3} dx \int_{-3}^{2} f(x, y)\, dy$.

2244. $\int_{-3}^{4} dy \int_{0}^{\frac{4}{3}y+4} f(x, y)\, dx$. **2245.** $\int_{1}^{4} dx \int_{1}^{x} f(x, y)\, dy$.

2246. $\int_{-2}^{2} dx \int_{-1}^{x+2} f(x, y)\, dy$. **2247.** $\int_{0}^{2} dy \int_{y^2}^{4} f(x, y)\, dx$.

2248. $\int_{-1}^{2} dx \int_{0}^{x^2+1} f(x, y)\, dy$. **2249.** $\int_{0}^{1} dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{+\sqrt{1-y^2}} f(x, y)\, dx$.

2250. $\int_{-1}^{0} dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y)\, dx + \int_{0}^{2} dy \int_{y-1}^{1} f(x, y)\, dx$.

2251. $\int_{-1}^{4} dy \int_{3-\sqrt{y+5}}^{4-y} f(x, y)\, dx + \int_{-5}^{-1} dy \int_{3-\sqrt{y+5}}^{3+\sqrt{y+5}} f(x, y)\, dx$.

2252. $\int_{-1}^{0} dx \int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y)\, dy + \int_{0}^{3} dx \int_{0}^{1} f(x, y)\, dy$.

2253. $\int_{0}^{1} dy \int_{0,5y}^{2y} f(x, y)\, dx + \int_{1}^{4} dy \int_{0,5y}^{2} f(x, y)\, dx$.

2254. $\int_{-1}^{0} dx \int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y)\, dy + \int_{0}^{1} dx \int_{0}^{1-x} f(x, y)\, dy$.

2255. $\int_{0}^{\frac{a}{2}} dy \int_{\sqrt{a^2-2ay}}^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y)\, dx + \int_{\frac{a}{2}}^{a} dy \int_{0}^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y)\, dx$.

2256. $\int_{0}^{1} dy \int_{-1}^{-\sqrt{y}} f(x, y)\, dx + \int_{0}^{1} dy \int_{\sqrt{y}}^{1} f(x, y)\, dx$.

2257. $\int_{-1}^{1} dy \int_{-2}^{2} f(x, y)\, dx + \int_{1}^{5} dy \int_{-2}^{-\sqrt{y-1}} f(x, y)\, dx + \int_{1}^{5} dy \int_{\sqrt{y-1}}^{2} f(x, y)\, dx$.

2258. $\int_{-4}^{0} dy \int_{-\sqrt{y+4}}^{\sqrt{y+4}} f(x, y)\, dx + \int_{0}^{1} dy \int_{-2}^{2} f(x, y)\, dx + \int_{1}^{\mathrm{ch}\,2} dy \int_{-2}^{\ln(y-\sqrt{y^2-1})} f(x, y)\, dx +$

$+ \int_{1}^{\mathrm{ch}\,2} dy \int_{\ln(y+\sqrt{y^2-1})}^{2} f(x, y)\, dx$.

2259. $\int_{-2}^{0} dx \int_{-\sqrt{x+2}}^{\sqrt{x+2}} f(x, y)\, dy + \int_{0}^{2} dx \int_{\sqrt{2x}}^{\sqrt{x+2}} f(x, y)\, dy + \int_{0}^{2} dx \int_{-\sqrt{x+2}}^{-\sqrt{2x}} f(x, y)\, dy$.

2260. $\int_{-1}^{1} dy \int_{-1}^{\sqrt[3]{y}} f(x, y)\, dx + \int_{1}^{2} dy \int_{-1}^{1} f(x, y)\, dx + \int_{2}^{3} dy \int_{-1}^{-\sqrt{y-2}} f(x, y)\, dx +$

$+ \int_{2}^{3} dy \int_{\sqrt{y-2}}^{1} f(x, y)\, dx$.

2261. $\int_0^1 dx \int_{-1}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y)\, dy.$

2262. $\int_{-1}^1 dx \int_{x^2-1}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y)\, dy.$ **2263.** $\int_0^1 dx \int_{x-1}^{x^2} f(x, y)\, dy.$

2264. $\int_0^1 dx \int_{x-1}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y)\, dy.$ **2265.** $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{1} f(x, y)\, dx.$

2266. $\int_0^1 dx \int_{x-1}^{1-x} f(x, y)\, dy.$ **2267.** $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dx \int_{-\frac{4}{\pi}x-3}^{\sin x} f(x, y)\, dy.$

2268. $\int_{-1}^1 dy \int_{y-3}^{\arccos y} f(x, y)\, dx.$ **2269.** $\int_1^{10} dx \int_{-x-1}^{\log x} f(x, y)\, dy.$

2270. $\int_0^1 d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\varrho \cos \Theta, \varrho \sin \Theta) \varrho\, d\Theta$ ehk $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\Theta \int_0^1 f(\varrho \cos \Theta, \varrho \sin \Theta) \varrho\, d\varrho.$

2271. $\int_1^2 d\varrho \int_0^{\pi} f(\varrho \cos \Theta, \varrho \sin \Theta) \varrho\, d\Theta.$ **2272.** $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\Theta \int_0^{2\cos\Theta} f(\varrho \cos \Theta, \varrho \sin \Theta)\, \varrho\, d\varrho.$

2273. $\int_0^a d\varrho \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\varrho \cos \Theta, \varrho \sin \Theta) \varrho\, d\Theta + \int_a^{a\sqrt{2}} d\varrho \int_{\arccos\frac{a}{\varrho}}^{\arcsin\frac{a}{\varrho}} f(\varrho \cos \Theta, \varrho \sin \Theta) \varrho\, d\Theta =$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\Theta \int_0^{\frac{a}{\cos\Theta}} f(\varrho \cos \Theta, \varrho \sin \Theta) \varrho\, d\varrho + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\Theta \int_0^{\frac{a}{\sin\Theta}} f(\varrho \cos \Theta, \varrho \sin \Theta) \varrho\, d\varrho.$$

2274. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\Theta \int_0^{\sqrt{2}\operatorname{cosec}\left(\Theta+\frac{\pi}{4}\right)} f(\varrho \cos \Theta, \varrho \sin \Theta) \varrho\, d\varrho.$

2275. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} d\Theta \int_{\frac{1}{\sin\Theta}}^{4\sin\Theta} f(\varrho \cos \Theta, \varrho \sin \Theta) \varrho\, d\varrho.$ **2276.** 0. **2277.** *abu.*

2278. $u \sin^2 2v.$ **2279.** $\frac{1}{3v}.$ **2280.** $\int_0^{2\pi} d\Theta \int_0^1 ab\varrho\, f(a\varrho \cos \Theta, b\varrho \sin \Theta)\, d\varrho.$

2281. $\frac{3}{4} \int_0^{2\pi} d\Theta \int_0^a f(\varrho \cos^3 \Theta, \varrho \sin^3 \Theta) \varrho \sin^2 2\Theta\, d\varrho.$

2282. $\frac{1}{3} \int_1^2 du \int_1^2 f\left(u^{\frac{2}{3}} v^{-\frac{1}{3}}, u^{\frac{1}{3}} v^{\frac{1}{3}}\right) \frac{dv}{v}.$ **2283.** 24. **2284.** 18.

2285. $\frac{1024}{55}$. **2286.** $\frac{1}{2}\left(\ln 2-\frac{5}{8}\right)$. **2287.** $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^2 dy\int\limits_0^3 f(x,\ y,\ z)\,dz.$

2288. $\int\limits_0^4 dx\int\limits_0^{4-x} dy\int\limits_0^{4-x-y} f(x,\ y,\ z)\,dz.$

2289. $\int\limits_{-a}^{a} dx\int\limits_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dy\int\limits_{-\frac{c}{ab}\sqrt{a^2b^2-b^2x^2-a^2y^2}}^{\frac{c}{ab}\sqrt{a^2b^2-b^2x^2-a^2y^2}} f(x,\ y,\ z)\,dz.$

2290. $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^x dy\int\limits_0^{xy} f(x,\ y,\ z)\,dz.$ **2291.** $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x} dy\int\limits_0^{x+y} f(x,\ y,\ z)\,dz.$

2292. $\int\limits_0^1 dx\int\limits_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} dy\int\limits_{-1}^{1} f(x,\ y,\ z)\,dz.$ **2293.** $\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^4 dy\int\limits_0^{\sqrt{25-x-y^2}} f(x,\ y,\ z)\,dz.$

2294. $\int\limits_{-1}^1 dx\int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy\int\limits_0^{x^2+y^2} f(x,\ y,\ z)\,dz.$

2295. $\int\limits_{-3}^3 dx\int\limits_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} dy\int\limits_0^{\sqrt{25-x^2-y^2}} f(x,\ y,\ z)\,dz=\int\limits_{-3}^3 dy\int\limits_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} dx\int\limits_0^{\sqrt{25-x^2-y^2}} f(x,\ y,\ z)\,dz=$

$$=\int\limits_{-3}^3 dx\int\limits_0^4 dz\int\limits_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} f(x,\ y,\ z)\,dy+\int\limits_{-3}^3 dx\int\limits_4^{\sqrt{25-x^2}} dz\int\limits_{-\sqrt{25-x^2-z^2}}^{\sqrt{25-x^2-z^2}} f(x,\ y,\ z)\,dy=$$

$$=\int\limits_0^4 dz\int\limits_{-3}^3 dx\int\limits_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} f(x,\ y,\ z)\,dy+\int\limits_4^5 dz\int\limits_{-\sqrt{25-z^2}}^{\sqrt{25-z^2}} dx\int\limits_{-\sqrt{25-x^2-z^2}}^{\sqrt{25-x^2-z^2}} f(x,\ y,\ z)\,dy.$$

Sümmeetria tõttu on ülejäänud integraalid analoogilised.

2296. $\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^{4-2x} dy\int\limits_0^{4-x^2} f(x,\ y,\ z)\,dz=\int\limits_0^4 dy\int\limits_0^{\frac{4-y}{2}} dx\int\limits_0^{4-x^2} f(x,\ y,\ z)\,dz=$

$$=\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^{4-x^2} dz\int\limits_0^{4-2x} f(x,\ y,\ z)\,dy=\int\limits_0^4 dz\int\limits_0^{\sqrt{4-z}} dx\int\limits_0^{4-2x} f(x,\ y)\,dy=$$

$$=\int\limits_0^4 dy\int\limits_{2y-\frac{y^2}{4}}^4 dz\int\limits_0^{\sqrt{4-z}} f(x,\ y,\ z)\,dx+\int\limits_0^4 dy\int\limits_0^{2y-\frac{y^2}{4}} dz\int\limits_0^{\frac{4-y}{2}} f(x,\ y,\ z)\,dx=$$

$$=\int\limits_0^4 dz\int\limits_0^{2(2-\sqrt{4-z})} dy\int\limits_0^{\sqrt{4-z^2}} f(x,\ y,\ z)\,dz+\int\limits_0^4 dz\int\limits_{2(2-\sqrt{4-z})}^4 dy\int\limits_0^{\frac{4-y}{2}} f(x,\ y,\ z)\,dx.$$

2297. $\int\limits_{-R}^{+R} dx\int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy\int\limits_{\frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}}^{h} f(x,\ y,\ z)\,dz=\int\limits_{-R}^{+R} dy\int\limits_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} dx\int\limits_{\frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}}^{h} f(x,\ y,\ z)\,dz=$

$$
=\int_0^h dz\int_{-\frac{R}{h}z}^{\frac{R}{h}z} dy\int_{-\sqrt{\frac{R^2}{h^2}z^2-y^2}}^{\sqrt{\frac{R^2}{h^2}z^2-y^2}} f(x,\ y,\ z)\,dx=\int_{-R}^{0} dy\int_{-\frac{h}{R}y}^{h} dz\int_{-\sqrt{\frac{R^2}{h^2}z^2-y^2}}^{\sqrt{\frac{R^2}{h^2}z^2-y^2}} f(x,\ y,\ z)\,dx+
$$

$$
+\int_0^R dy\int_{\frac{h}{R}y}^{h} dz\int_{-\sqrt{\frac{R^2}{h^2}z^2-y^2}}^{\sqrt{\frac{R^2}{h^2}z^2-y^2}} f(x,\ y,\ z)\,dx=\int_0^h dz\int_{-\frac{R}{h}z}^{\frac{R}{h}z} dx\int_{-\sqrt{\frac{R^2}{h^2}z^2-x^2}}^{\sqrt{\frac{R^2}{h^2}z^2-y^2}} f(x,\ y,\ z)\,dy=
$$

$$
=\int_{-R}^{0} dx\int_{-\frac{h}{R}x}^{h} dz\int_{-\sqrt{\frac{R^2}{h^2}z^2-x^2}}^{\sqrt{\frac{R^2}{h^2}z^2-y^2}} f(x,\ y,\ z)\,dy+\int_0^R dx\int_{\frac{h}{R}x}^{h} dz\int_{-\sqrt{\frac{R^2}{h^2}z^2-x^2}}^{\sqrt{\frac{R^2}{h^2}z^2-x^2}} f(x,\ y,\ z)\,dy.
$$

2298.
$$
\int_{-R}^{R} dy\int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} dx\int_0^{\frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}} f(x,\ y,\ z)\,dz=\int_{-R}^{R} dx\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy\int_0^{\frac{h}{R}\sqrt{R^2+y^2}} f(x,\ y,\ z)\,dz=
$$

$$
=\int_{-R}^{0} dx\int_0^{-\frac{R}{h}x} dz\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x,\ y,\ z)\,dy+\int_0^R dx\int_0^{\frac{R}{h}z} dz\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x,\ y,\ z)\,dy+
$$

$$
+\int_{-R}^{0} dx\int_{-\frac{h}{R}x}^{h} dz\int_{\sqrt{\frac{R^2}{h^2}z^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x,\ y,\ z)\,dy+\int_0^R dx\int_{\frac{h}{R}x}^{h} dz\int_{\sqrt{\frac{R^2}{h^2}z^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x,\ y,\ z)\,dy+
$$

$$
+\int_{-R}^{0} dx\int_{-\frac{h}{R}x}^{h} dz\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{-\sqrt{\frac{R^2}{h^2}z^2-x^2}} f(x,\ y,\ z)\,dy+\int_0^R dx\int_{\frac{h}{R}x}^{h} dz\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{-\sqrt{\frac{R^2}{h^2}z^2-x^2}} f(x,\ y,\ z)\,dy=
$$

$$
=\int_0^h dz\int_{-R}^{-\frac{R}{h}z} dx\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x,\ y,\ z)\,dy+\int_0^h dz\int_{\frac{R}{h}z}^{R} dx\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x,\ y,\ z)\,dy+
$$

$$
+\int_0^h dz\int_{-\frac{R}{h}z}^{\frac{R}{h}z} dx\int_{\sqrt{\frac{R^2}{h^2}z^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x,\ y,\ z)\,dy+\int_0^h dz\int_{-\frac{R}{h}z}^{\frac{R}{h}z} dx\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{-\sqrt{\frac{R^2}{h^2}z^2-x^2}} f(x,\ y,\ z)\,dy.
$$

Sümmeetria tõttu on ülejäänud integraalid analoogilised.

2299. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\Theta\int_0^2 \varrho\,d\varrho\int_0^{7-\varrho(\sin\Theta+\cos\Theta)} f(\varrho\cos\Theta,\ \varrho\sin\Theta,\ z)\,dz.$

2300. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\Theta\int_0^2 d\varrho\int_0^{\varrho^2} f(\varrho\cos\Theta,\ \varrho\sin\Theta,\ z)\,\varrho\,dz.$

2301. $\int_0^{\pi} d\Theta\int_0^1 d\varrho\int_0^{\sqrt{4-\varrho^2}} f(\varrho\cos\Theta,\ \varrho\sin\Theta,\ z)\,\varrho\,dz.$

2302. $\int\limits_0^{2\pi} d\Theta \int\limits_0^1 d\varrho \int\limits_0^{4-\varrho(\sin\Theta+\cos\Theta)} f(\varrho\cos\Theta,\ \varrho\sin\Theta,\ z)\varrho\, dz.$

2303. $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} d\psi \int\limits_1^{3} f(r\cos\varphi\sin\psi,\ r\sin\varphi\sin\psi,\ r\cos\psi) r^2 \sin\psi\, dr.$

2304. $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{R} f(r\cos\varphi\sin\psi,\ r\sin\varphi\sin\psi,\ r\cos\psi) r^2 \sin\psi\, dr.$

2305. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{R} f(r\cos\varphi\sin\psi,\ r\sin\varphi\sin\psi,\ r\cos\psi) r^2 \sin\psi\, dr.$

2306. $abc \int\limits_0^{\pi} d\psi \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{1} f(ar\cos\varphi\sin\psi,\ br\sin\varphi\sin\psi,\ cr\cos\psi) r^2 \sin\psi\, dr.$

2307. 8. 2308. $\frac{128}{15}\pi$. 2309. $\frac{\pi}{8}$. 2310. $\frac{124}{15}\pi$. 2311. $\frac{16}{3}$. 2312. $\frac{\pi}{6}$.

2313. $\frac{16}{3}a^3$. 2314. $3\frac{151}{210}$. 2315. 3. 2316. 4π. 2317. $\frac{3\pi}{2}$. 2318. $\frac{6}{35}$.

2319. $\frac{\pi R^3}{3}(2-\sqrt{2})$. 2320. $\frac{\pi}{3}(6\sqrt{3}-5)$. 2321. $\frac{\pi}{6}$. 2322. $\frac{21}{16}\pi$.

2323. $\frac{R^3}{3}\left(\pi-\frac{4}{3}\right)$. 2324. $\frac{\pi^2}{6}$. 2325. $\frac{2\pi}{3}(8-3\sqrt{3})$. 2326. $\frac{5\pi}{12}R^3$.

2327. $2\sqrt{3}\pi$. 2328. $\frac{a^2b^2}{8}$. 2329. $\frac{\pi}{2}-\frac{4}{3}$. 2330. $\frac{40}{3}$. 2331. $ab\pi$.

2332. $\frac{3}{8}\pi a^2$. 2333. $\frac{1}{3}\ln 2$. 2334. $\frac{2\pi}{3}(5\sqrt{5}-1)$. 2335. 8π.

2336. $2\sqrt{2}\pi$. 2337. $\frac{2\pi}{3}(2\sqrt{2}-1)$. 2338. $\frac{14\pi}{3}$. 2339. $\frac{\pi}{3}(2\sqrt{2}-1)$.

2340. $\frac{16}{3}(\sqrt{8}-1)$. 2341. 13. 2342. $4\pi R(R-\sqrt{R^2-r^2})$. 2343. $4R^2(\pi-2)$.

2344. $\frac{17}{6}$. 2345. 80. 2346. $\left(1;\ \frac{4}{5}\right)$. 2347. $\frac{4r}{3\pi}$. 2348. $\left(\frac{256}{315\pi};\ 0\right)$.

2349. $\frac{4}{3}$. 2350. $\frac{abc}{2}(a+b+c)$. 2351. $\left(\frac{2}{5};\ \frac{2}{5};\ \frac{7}{30}\right)$.

2352. $\left(\frac{17}{36};\ \frac{17}{36};\ \frac{55}{36}\right)$. 2353. $\left(\frac{18}{7};\ \frac{15}{16}\sqrt{6};\ \frac{12}{7}\right)$. 2354. $\left(0;\ 0;\ \frac{1}{5}\right)$.

2355. 104. 2356. $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$. 2357. $\frac{32\sqrt{2}}{135}$. 2358. $\frac{4}{3}(2\sqrt{2}-1)$. 2359. $1+\sqrt{2}$.

2360. $42\sqrt{2}$. 2361. $\frac{ab}{3}\cdot\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}$. 2362. 64π. 2363. $\frac{256}{15}a^3$.

2364. $2\pi\sqrt{a^2+b^2}(a^2+b\pi)$. 2365. $\frac{16\sqrt{2}}{143}$. 2366. $-\frac{328}{21}$. 2367. 1.

2368. $-\frac{1}{2}$. 2369. $\frac{\pi}{4}-1$. 2370. $-\frac{a^2+b^2}{2}$. 2371. $\frac{1-\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi^2}{24}-\frac{\ln 3}{2}$.

2372. -16. **2373.** 1. **2374.** $3\sqrt{3}$. **2376.** 6. **2377.** πab. **2378.** $\frac{3}{8}\pi ab$.

2379. $6\pi a^2$. **2380.** a) $\frac{1}{3}$, b) $\frac{1}{12}$, c) $\frac{17}{30}$, d) $-\frac{1}{20}$. **2381.** 1, sõltumatult integreerimisteest. Integraalialune avaldis on täisdiferentsiaal. **2382.** 0.

2383. $-\frac{3}{2}$. **2384.** $\frac{e^3}{2}-1$. **2385.** $u = 3x^3 + x^2y^2 - y^2 + C$.

2386. $u = x\cos y - x^2e^y + C$. **2387.** $u = xe^y - y^2 + C$.

2388. $u = \ln(x + x^2 + y^2) + C$. **2389.** $u = x^2y^2z^2 - xy - yz + C$.

2390. $u = \frac{xy}{z} - xe^{yz} + C$. **2391.** $3\iint\limits_D x^3\,dx\,dy$. **2392.** $\iint\limits_D y^2\,dx\,dy$.

2393. $\iint\limits_D (y-x)e^{xy}\,dx\,dy$. **2394.** $\frac{2}{3}$. **2395.** 4π. **2396.** $-2\pi ab$. **2397.** 0.

2398. $\frac{\pi}{2}(1+\sqrt{2})$. **2399.** $\frac{7}{3}\sqrt{21}$. **2400.** $\frac{3\pi}{\sqrt{2}}$. **2401.** $\frac{2\pi R^6}{15}$.

2402. $\pi[2 + \ln(1+\sqrt{2})]$. **2403.** $-\frac{\pi R^4}{2}$. **2404.** πab. **2405.** 3.

2406. $\frac{1}{8}$. **2407.** $\frac{\pi}{8}$. **2408.** $2\iiint\limits_V (x+y+z)\,dx\,dy\,dz$.

2409. $\iiint\limits_V \frac{x+y+z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dx\,dy\,dz$. **2410.** $2\iiint\limits_V \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

2411. V. **2412.** $\frac{12\pi R^5}{5}$. **2413.** $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{2} + \frac{5}{2\sqrt{2}} + \frac{7}{4} + \dots$

2414. $\frac{3}{36} + \frac{5}{144} + \frac{7}{400} + \frac{9}{900} + \dots$ **2415.** $u_n = \left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$.

2416. $u_n = (-1)^{n-1}\frac{n}{6n-5}$. **2417.** 1. **2418.** $\frac{1}{6}$. **2419.** 1. **2420.** $S_n = n$, hajuv.

2421. $S_{2k} = 0$, $S_{2k-1} = -1$, hajuv. **2422.** $S = 6$, koonduv. **2423.** $S = 3$, koonduv.

2424. $S = \frac{1}{9}$, koonduv. **2425.** $S = \frac{1}{12}$, koonduv. **2426.** Tingimus on täidetud, koonduvuse küsimus jääb lahtiseks (vrd. **2449**). **2427.** Hajuv.
2428. Tingimus on täidetud, koonduvuse küsimus jääb lahtiseks (vt. **2453**).
2429. Hajuv. **2430.** Hajuv. **2431.** Hajuv. **2432.** Koonduv. **2433.** Koonduv, kui $a \geqslant 0$; küsimus jääb lahtiseks, kui $a < 0$ (vt. **2462**). **2434.** Koonduv.
2435. Koonduv. **2436.** Koonduv. **2437.** Hajuv. **2438.** Hajuv. **2439.** D'Alembert'i tunnus jätab küsimuse lahtiseks (vt. **2431**). **2440.** Koonduvuse küsimus jääb lahtiseks (vt. **2449**). **2441.** Koonduvuse küsimus jääb lahtiseks (vt. **2452**). **2442.** On. **2445.** Koonduv. **2446.** Koonduv.
2447. Koonduv, kui $a < b$; hajuv, kui $a > b$. **2448.** Koonduv. **2449.** Hajuv.
2450. Hajuv. **2451.** Koonduv. **2452.** Koonduv. **2453.** Hajuv. **2454.** Ei ole.
2455. Tingimisi koonduv. **2456.** Absoluutselt koonduv. **2457.** Hajuv.

2458. Absoluutselt koonduv. **2459.** $\frac{1}{7^3}$. **2460.** 5 liiget. **2461.** $\frac{1}{5^5}$. **2462.** Koonduv.

2463. Koonduv. **2464.** Hajuv, kui $k \leqslant 1$; koonduv, kui $k > 1$. **2465.** Absoluutselt koonduv. **2466.** Koonduv. **2467.** Absoluutselt koonduv. **2468.** Hajuv.
2469. Koonduv. **2470.** Tingimisi koonduv (vt. **2431**). **2471.** Koonduv.
2472. Hajuv. **2473.** Hajuv. **2474.** Koonduv. **2475.** Absoluutselt koonduv.
2476. Koonduv. **2477.** Hajuv. **2478.** Koonduv. **2479.** Koonduv iga x puhul.

2480. $x > 0$. **2481.** $x > 1$ ja $x < -1$. **2482.** $x < 0$. **2483.** $e^{-1} < x < e$.
2484. Iga lõplik vahemik, kus $x \geqslant 0$. **2485.** Iga lõplik vahemik. **2486.** Iga lõplik vahemik. **2487.** Iga lõplik vahemik. **2488.** $-1 \leqslant x \leqslant 1$.
2489. $-1 < x < 1$. **2490.** $x = 0$. **2491.** Koonduv iga x puhul. **2492.** $-1 \leqslant x \leqslant 1$.
2493. $-2 \leqslant x \leqslant 2$. **2494.** $-1 \leqslant x < 1$. **2495.** $-1 \leqslant x \leqslant 1$, vahemiku otstes tingimisi koonduv. **2496.** Koonduv iga x puhul. **2497.** $-2 < x \leqslant 2$.

2498. Koonduv iga x puhul. **2499.** $-33 + 24(x+2) - \frac{17}{2}(x+2)^2 + (x+2)^3$, koonduv iga x puhul.

2500. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n}$, $0 < x \leqslant 2$.

2501. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (1+3^n)(x-2)^n$, $\frac{5}{3} < x < \frac{7}{3}$.

2502. $e^3[1 + (x-3) + \frac{1}{2!}(x-3)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}(x-3)^n + \ldots]$, koonduv iga x puhul.

2503. $1 + (1+2)x + \ldots + (1+2^n)x^n + \ldots$, $|x| < \frac{1}{2}$.

2504. $1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n$, $-1 < x < 1$.

2505. $1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n}$, $-1 < x < 1$.

2506. $\arcsin x = \frac{x}{1} + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$, $-1 < x < 1$.

2507. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots$, $-1 < x < 1$.

2508. $\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = x + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots$, $-1 < x < 1$.

2509. $|\alpha| < \frac{1}{9}$. **2510.** $|\alpha| < \frac{e}{3!\,3^3} < 0{,}017$. **2511.** Viis liiget.

2512. Neli liiget. **2513.** $\frac{1}{(1-x)^2}$. **2514.** $\frac{2}{(1-x)^3}$.

2515. $C + \ln x - \frac{x^2}{2 \cdot 2!} + \frac{x^4}{4 \cdot 4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n(2n)!} + \ldots$, iga $x \neq 0$ puhul.

2516. $C + x - \frac{x^3}{3!\,3} + \frac{x^5}{5!\,5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)} + \ldots$, iga $x \neq 0$ puhul.

2517. $C + \frac{x^3}{1!\,3} - \frac{x^7}{3!\,7} + \frac{x^{11}}{5!\,11} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{4n-1}}{(2n-1)!(4n-1)} + \ldots$, iga x puhul.

2518. $C - \frac{1}{x} + \ln|x| + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!\,2} + \ldots + \frac{x^{n+1}}{(n+2)!(n+1)} + \ldots$, iga $x \neq 0$ puhul.

2519. $x-\frac{x^3}{3^2}+\frac{x^5}{5^2}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)^2}+\ldots,\ -1<x<1.$

2520. $y=x-\frac{x^4}{3\cdot 4}+\frac{x^7}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7}-\frac{x^{10}}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 9\cdot 10}+\ldots+$

$+(-1)^n\frac{x^{3n+1}}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 9\cdot 10\ldots 3n(3n+1)}+\ldots$

2521. $y=x+\frac{1}{1\cdot 2}x^2+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 2\cdot 3}x^3+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 4}x^4+\ldots+$

$+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 4\ldots(n-1)n}x^n+\ldots$

2522. $y=1+\frac{2x^4}{4!}-\frac{2x^5}{5!}+\frac{2x^6}{6!}-\frac{2x^7}{7!}-\frac{62x^8}{8!}-\ldots$

AINEREGISTER

K

L

M

N

O

P

R

S

T

V

W

Ü

SISUKORD

Петерсен Ивар Фердинандович,
Роос Хильда Оттовна

СБОРНИК ЗАДАЧ
ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ II

На эстонском языке

Оформление В. Томассов

Эстонское Государственное Издательство
Таллин, Пярнуское шоссе, 10

*

Toimetaja R. Toming
Kunstiline toimetaja I. Torn
Tehniline toimetaja H. Seletus
Korrektorid M. Pedajas ja L. Kukk

Ladumisele antud 1. IV 1961. Trükkimisele antud 2. X 1961. Paber 60 × 90, 1/16. Trükipoognaid 15,75. Arvutuspoognaid 12,59. Trükiarv 5000. MB-06360. Tellimise nr. 3351. Hans Heidemanni nim. trükikoda, Tartu, Ülikooli 17/19. II

Hind 58 kop.

2—2

58 kop.