E. ETVERK

GEOMEETRIA

ÕPIK

GÜMNAASIUMI II KLASSILE

TARTU EESTI KIRJASTUS

E. ETVERK

GEOMEETRIA

ÕPIK

GÜMNAASIUMI II KLASSILE

TARTU EESTI KIRJASTUS

MATEMAATIKA ÕPIKUD GÜMNAASIUMILE.

PEATOIMETAJA: O. SILDE.

A. Vihman, Algebra õpik gümnaasiumi I klassile.
E. Etverk, Geomeetria õpik gümnaasiumi I klassile.
A. Vihman, Algebra õpik gümnaasiumi II klassile.
E. Etverk, Geomeetria õpik gümnaasiumi II klassile.
K. Maasik, Algebra õpik gümnaasiumi III klassile.
K. Ratassepp, Trigonomeetria õpik gümnaasiumi III klassile.
K. Ratassepp, Algebra ja trigonomeetria õpik gümnaasiumi IV klassile.
E. Etverk, Stereomeetria õpik gümnaasiumi IV klassile.
G. Rägo, Matemaatika õpik gümnaasiumi V klassile.
L. Ruumet, Matemaatika täiendusõpik gümnaasiumi reaalharu III ja IV klassile.
L. Ruumet, Matemaatika täiendusõpik gümnaasiumi reaalharu V klassile.
K. Ratassepp, Matemaatilised tabelid.

Korrektor M. Kindlam.

Trükikoda „J. Mällo & Pojad", Tartu, Rüütli 4. 1942.

SISUKORD.

Peatükk I.

Hulknurga pindala.

Peatükk II.

Seosed täisnurkse kolmnurga joonelementide vahel.

Peatükk III.

Hulknurkade sarnasus.

Peatükk IV.

Ringjoone pikkus ja ringi pindala.

Peatükk I.

Hulknurga pindala.

§ 1. Hulknurkade pindvõrdsus.

Hulknurk eraldab tasapinnast pinnatüki, mis asetseb selle hulknurga sees, ehk, teisiti öeldes, mis on piiratud selle hulknurgaga. Hulknurgaga piiratud tasapinna tükk võib olla suurem või väiksem: hulknurk $ABCDE$ joonisel 1 piirab suuremat pinnatükki kui hulknurk $KLMN$, sest pinnatükk $KLMN$ on osa pinnatükist $ABCDE$.

Hulknurgaga piiratud pinnatüki suurust nimetatakse hulknurga pindalaks.

Pindala tähisena tarvitame tähte S. Kahe hulknurga pindalade S_1 ja S_2 kohta on ikka kehtiv üks järgnevast kolmest võimalusest: kas

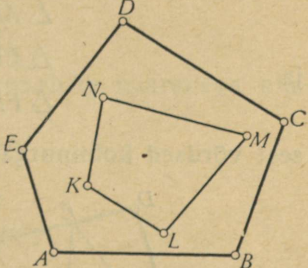
$$S_1 = S_2$$

või

$$S_1 > S_2$$

või

$$S_1 < S_2.$$



Joonis 1.

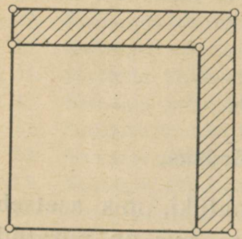
Esimesel juhul öeldakse, et hulknurgad on p i n d - v õ r d s e d.

Hulknurkade pindalade võrdlemist teostame kolme järgneva aksioomi abil.

1. Kaks võrdset hulknurka, see tähendab, kaks hulknurka, mis pealepaigutamisel ühtivad, on pindvõrdsed.

Selle aksioomi järgi

kaks ruutu on pindvõrdsed, kui nende küljed on võrdsed,



Joonis 2.

sest niisuguseid ruute saab teineteise peale paigutada nii, et nad ühtivad. Kui kahe ruudu küljed ei ole võrdsed, siis suurema pindalaga on see ruut, mille külg on suurem, sest ühe ruudu teise peale paigutamisel väiksema küljega ruut katab ainult osa suurema küljega ruudust (joonis 2).

2. Kaks hulknurka on pindvõrdsed, kui neid saab tükeldada vastavalt pindvõrdseteks osadeks.

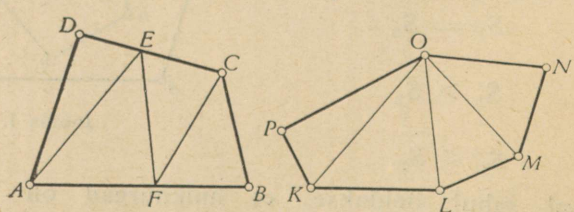
Selle aksioomi järgi nelinurk $ABCD$ ja kuusnurk $KLMNOP$ on pindvõrdsed (joonis 3), kui

$$\triangle ADE = \triangle OPK,$$
$$\triangle AEF = \triangle KOL,$$
$$\triangle EFC = \triangle OLM$$

ja

$$\triangle FBC = \triangle MNO,$$

sest võrdsed kolmnurgad on ka pindvõrdsed.



Joonis 3.

3. Kaks hulknurka on pindvõrdsed, kui nad koos võrdsete hulknurkadega moodustavad võrdsed hulknurgad.

Selle aksioomi järgi rööpkülikud $ABCD$ ja $ABEF$ joonisel 4 on pindvõrdsed, kui

$$\triangle ADF = \triangle BCE,$$

sest rööpkülik $ABCD$ koos kolmnurgaga ADF moodustab sama trapetsi, mis rööpkülik $ABEF$ koos kolmnurgaga BCE.

Viimase aksioomi võime sõnastada ka järgmiselt:

kui võrdsetest hulknurkadest eraldada võrdsed hulknurgad, siis jäävad järele pindvõrdsed hulknurgad.

Pindvõrdsuse aksioome kasutades näitame, et

võrdsete alustega ja võrdsete kõrgustega rööpkülikud on pindvõrdsed.

T õ e s t u s. Kaht võrdsete alustega rööpkülikut saab paigutada asendisse, kus neil on ühine alus AB, nagu näidatud joonisel 4. Et neil rööpkülikuil kõrgused on võrdsed, siis nende küljed FE ja DC asetsevad ühel ja samal sirgel FC, mis on paralleelne sirgega AB. Selles joonises on kolmnurkadel ADF ja BCE järgmised elemendid võrdsed: rööpküliku vastaskülgedena

$$AD = BC$$

ja

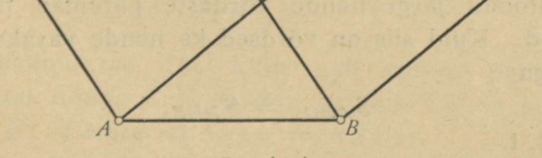
$$AF = BE;$$

vastavalt paralleelsete ja samasuunaliste haaradega nurkadena

$$\widehat{DAF} = \widehat{CBE}.$$

Seega võrdsuse tunnuse knk järgi

$$\triangle ADF = \triangle BCE.$$



Joonis 4.

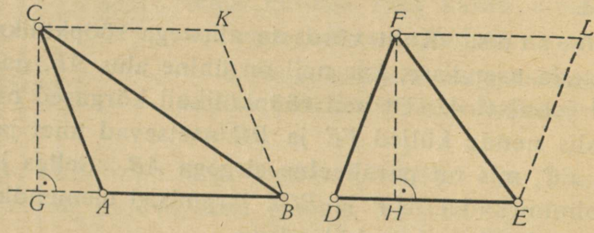
Sellest järeldub pindvõrdsuse kolmanda aksioomi alusel, et rööpkülikud $ABCD$ ja $ABEF$ on pindvõrdsed, sest koos võrdsete kolmnurkadega ADF ja BCE nad moodustavad ühe ja sama trapetsi $ABCF$.

Eelmine teoreem võimaldab tõestada, et

võrdsete alustega ja võrdsete kõrgustega kolmnurgad on pindvõrdsed.

Eeldus: $AB = DE$; $CG = FH$.

Väide: $S_{ABC} = S_{DEF}$ (joonis 5).



Joonis 5.

Tõestus. Joonestame rööpkülikud $ABKC$ ja $DELF$, võttes nende kolmeks tipuks antud kolmnurkade tipud. Nende rööpkülikute alused on võrdsed ja kõrgused on võrdsed, seega ka pindalad on võrdsed. Et diagonaal tükeldab rööpküliku kaheks võrdseks kolmnurgaks, siis

$$S_{ABC} = \tfrac{1}{2} S_{ABKC}$$

ja

$$S_{DEF} = \tfrac{1}{2} S_{DELF}.$$

Eeltoodu järgi nende võrduste paremad pooled on võrdsed. Kuid siis on võrdsed ka nende vasakud pooled ja seega

$$S_{ABC} = S_{DEF},$$

m. o. t. t.

Kahest viimasest teoreemist selgub, et kujundid võivad olla pindvõrdsed, ilma et nad oleksid võrdsed, s. t. ilma et nad pealepaigutamisel ühtiksid.

Ülesanded.

1. Ehita ristkülik, mis on pindvõrdne antud rööpkülikuga ja millel on antud rööpkülikuga ühine alus.

2. Ehita rööpkülik, mis on pindvõrdne antud rööpkülikuga ja mille üks nurk on pool antud rööpküliku nurgast.

3. Tõesta, et kolmnurga küljepoolitaja tükeldab kolmnurga kaheks pindvõrdseks kolmnurgaks.

4. Antud on nürinurkne kolmnurk. Ehita täisnurkne kolmnurk, mis on pindvõrdne antud kolmnurgaga ja millel on sellega üks ühine külg.

5. Tõesta, et rööpküliku diagonaalid tükeldavad rööpküliku neljaks pindvõrdseks kolmnurgaks.

6. Antud on kolmnurk külgedega 4,2 cm, 3,1 cm ja 3,4 cm. Ehita antud kolmnurgaga pindvõrdne kolmnurk, mille üks külg on endiselt 4,2 cm ja teine külg 6,5 cm.

7. Nelinurga $ABCD$ diagonaali AC keskpunkt on E. Tõesta, et nelinurgad $ABED$ ja $CBED$ on pindvõrdsed.

8. Kolmnurga ABC küljepoolitajal AD on võetud punkt E. Tõesta, et kolmnurgad ABE ja ACE on pindvõrdsed.

9. Kolmnurga ABC küljel AB asetsev punkt D on ühendatud tipuga C ja saadud sirglõik CD on poolitatud punktis E. Tõesta, et $S_{ABE} = \frac{1}{2} S_{ABC}$.

§ 2. Hulknurga teisendamine kolmnurgaks.

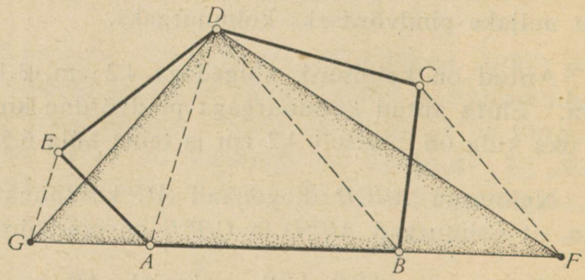
Kahe mistahes hulknurga pindala võrdlemiseks ei ole nii lihtsat tunnust nagu on võrdsete aluste ja kõrgustega rööpkülikute või kolmnurkade pindalade võrdlemiseks. Et eriti lihtne on võrrelda ruutude pindalasid, siis hulknurkade pindalade võrdlemiseks teisendame need niisama suure pindalaga ruutudeks ja võrdleme saadud ruute.

Hulknurga teisendamist sellega pindvõrdseks ruuduks teostame järgmiselt:

teisendame hulknurga kolmnurgaks;
teisendame saadud kolmnurga ristkülikuks;
teisendame ristküliku ruuduks.

Seejuures tuleb kasutada ainult niisugust teisendusviisi, mille puhul pindala ei muutu.

Vaatleme kõigepealt hulknurga teisendamist kolmnurgaks. Olgu vaja viisnurk *ABCDE* teisendada sellega pindvõrdseks kolmnurgaks (joonis 6).



Joonis 6.

L a h e n d u s. Eraldame antud viisnurgast diagonaaliga *DB* kolmnurga *BCD*, joonestame läbi tipu *C* paralleeli diagonaalile *DB* ja leiame selle paralleeli ja külje *AB* pikenduse lõikepunkti *F*. Selle punkti ühendamisel punktiga *D* saame nelinurga *AFDE*, mis on pindvõrdne antud viisnurgaga *ABCDE*. Kui saadud nelinurgast endisel viisil eraldame kolmnurga *ADE* ja asendame selle kolmnurgaga *ADG*, siis saame kolmnurga *FDG*, mis on pindvõrdne viisnurgaga *ABCDE*.

Põhjendus. Viisnurk *ABCDE* on tükeldatud kolmnurkadeks *BCD*, *BDA* ja *ADE*, ja kolmnurk *FDG* on tükeldatud kolmnurkadeks *BFD*, *BDA* ja *ADG*. Neist $\triangle BDA$ on ühine mõlemal kujundil. Ülejäänud osade pindaladest

$$S_{BCD} = S_{BFD}$$

ja

$$S_{ADE} = S_{ADG},$$

sest kummalgi kolmnurkade paaril on ühine alus (*BD* ja *AD*) ja võrdsed kõrgused. Et viisnurk *ABCDE* ja kolmnurk *FDG* on tükeldatud vastavalt pindvõrdseteks osadeks, siis nad on pindvõrdsed.

Vähendades eespool-kirjeldatud viisil hulknurga tippude arvu järjest ühe võrra, saame iga hulknurga teisendada temaga pindvõrdseks kolmnurgaks.

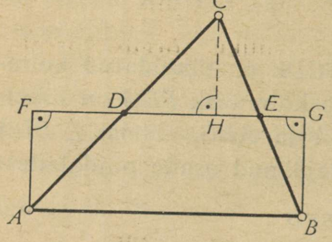
Ülesanded.

10. Teisenda rööpkülik temaga pindvõrdseks kolmnurgaks, millel on rööpkülikuga ühine kõrgus. Tõesta, et selle kolmnurga alus on kaks korda suurem rööpküliku alusest.

11. Teisenda vabalt võetud kuusnurk temaga pindvõrdseks kolmnurgaks.

§ 3. Kolmnurga teisendamine ristkülikuks.

Olgu antud teisendada ristkülikuks $\triangle ABC$ (joonis 7). Ülesande lahendamiseks joonestame sirge läbi antud kolmnurga kahe külje keskpunktide, näiteks läbi punktide *D* ja *E*, ning ehitame sellele sirgele aluse otspunktidest ristsirged AF ja BG. Nii tekkiv nelinurk $ABGF$ on antud kolmnurgaga pindvõrdne ristkülik.



Joonis 7.

P õ h j e n d u s. Sirge DE kui kolmnurga kahe külje keskpunkte läbiv sirge on paralleelne kolmanda küljega AB. Et paralleelidel ristsirged on ühised, siis nelinurk $ABGF$ on ristkülik. See ristkülik koosneb kolmest osast, nimelt kolmnurkadest AFD ja BGE ning trapetsist $ABED$.

Joonestades $\triangle$-s DEC kõrguse CH, tükeldub ka antud kolmnurk ABC kolmeks osaks, mis on võrdsed ristküliku $ABGF$ vastavate osadega; tõepoolest:

$$\triangle DHC = \triangle DFA,$$

sest

$$DC = DA, \quad C\hat{D}H = A\hat{D}F \quad \text{ja} \quad \hat{F} = \hat{H} = 90^{\circ};$$

samuti

$$\triangle EHC = \triangle EGB,$$

sest

$$EC = EB, \quad C\hat{E}H = B\hat{E}G \quad \text{ja} \quad \hat{G} = \hat{H} = 90^{\circ};$$

lõpuks

$$ABED = ABED$$

kui nende ühine osa.

Sellest järeldub, et ristkülik $ABGF$ on pindvõrdne antud kolmnurgaga ABC.

M ä r k u s. Kui $\triangle ABC$ on nürinurkne, siis tuleb tähega C tähistada nürinurga tipp, et antud põhjendus jääks muutumatuks.

Ülesanded.

12. Teisenda täisnurkne kolmnurk temaga pindvõrdseks ristkülikuks, mille üheks küljeks on kolmnurga üks kaatet. Kui pikk on ristküliku teine külg?

13. Teisenda nürinurkne kolmnurk temaga pindvõrdseks ristkülikuks, mille üheks küljeks on kolmnurga nürinurga üks lähiskülg. Näita noolte abil, kuidas kolmnurga osi ümber paigutada nii, et neist saaks ristkülik.

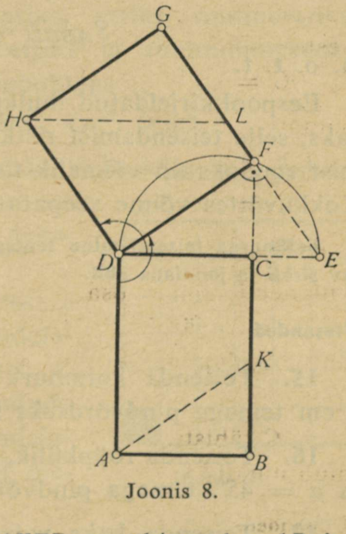
14. Kui suur on joonisel 7 ristküliku kõrgus võrreldes kolmnurga kõrgusega?

§ 4. Ristküliku teisendamine ruuduks.

Olgu antud teisendada ruuduks ristkülik $ABCD$ (joonis 8). Pikendame selle lühemat külge DC punktini E nii, et

$$DE = DA,$$

ja ehitame täisnurkse kolmnurga DFE, millele DE on hüpotenuusiks ja mille täisnurga tipp asetseb ristküliku külje BC pikendusel. Selle kolmnurga joonestamiseks kasutame Thales'e teoreemi, joonestades diameetrile DE toetuva piirdenurga DFE. Täisnurkse kolmnurga DFE kaatetile DF ehitatud ruut ongi antud ristkülikuga pindvõrdne.



Joonis 8.

P õ h j e n d u s. Joonestame läbi punkti A sirglõigu AK nii, et

$$AK \parallel DF,$$

ja läbi punkti H sirglõigu HL nii, et

$$HL \parallel DE.$$

Et rööpkülikutel $ABCD$ ja $AKFD$ on ühine alus AD ja ühine kõrgus DC, siis

$$S_{ABCD} = S_{AKFD}.$$

Samuti on rööpkülikutel $DFGH$ ja $DELH$ ühine alus DH ja ühine kõrgus DF, mistõttu

$$S_{DFGH} = S_{DELH}.$$

Pöörates rööpkülikut $AKFD$ 90^0 võrra ümber punkti D, ühtivad rööpkülikud $AKFD$ ja $DELH$, sest konstruktsiooni järgi

$$DA = DE \quad \text{ja} \quad DF = DH$$

ning

$$\hat{ADF} = \hat{EDH}$$

kui vastavalt ristuvate haaradega nürinurgad. Seega rööpkülikud $AKFD$ ja $DELH$ on võrdsed, mistõttu

$$S_{AKFD} = S_{DELH}.$$

Et seega eespool-leitud võrduste paremad pooled on võrdsed, siis on võrdsed ka nende vasakud pooled:

$$S_{ABCD} = S_{DFGH},$$

m. o. t. t.

Eespool-kirjeldatud hulknurga teisendamist kolmnurgaks, selle teisendamist ristkülikuks ja ristküliku teisendamist ruuduks on võimalik teostada sirkli ja joonlaua abil. Kokkuvõttes võime seepärast öelda, et

hulknurga teisendamine temaga pindvõrdseks ruuduks on teostatav sirkli ja joonlaua abil.

Ülesanded.

15. Teisenda kolmnurk külgedega 5 cm, 5,5 cm ja 4 cm temaga pindvõrdseks ruuduks.

16. Teisenda rööpkülik, millel $a = 2,5$ cm, $b = 4,5$ cm ja $\alpha = 45^0$, temaga pindvõrdseks ruuduks.

17. Teisenda kaks vabalt võetud nelinurka nendega pindvõrdseteks ruutudeks ja otsusta nende ruutude järgi, kumb nelinurk on suurema pindalaga.

§ 5. Pindalaühikud.

Hulknurga teisendamine temaga pindvõrdseks ruuduks annab võimaluse hulknurkade pindalade võrdlemiseks. Sagedamini toimetatakse seda võrdlemist nende pindalade mõõtmise teel.

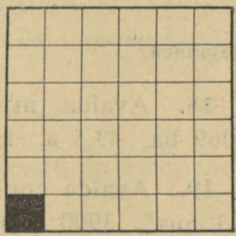
Mõõta hulknurga pindala tähendab leida, mitu korda pindalaühikuks võetud pindala mahub mõõdetavale pindalale või missuguse osa pindalaühikust ta moodustab.

Maatüki pindala mõõtmise ülesanne on vanim geomeetria ülesanne; selle ülesande järgi on geomeetria saanud oma nime, sest sõna „geomeetria" tähendab maamõõtmist.

Pindalaühikuina kasutatakse praegusel ajal niisuguste ruutude pindalasid, mille külgede pikkusteks on pikkusühikud. Vastavalt külje pikkusele neid ühikuid nimetatakse ruutkilomeetriks, hektaariks, aariks, ruutmeetriks, ruutdetsimeetriks, ruutsentimeetriks ja ruutmillimeetriks ning tähistatakse vastavalt sümbolitega

$$km^2,\ ha,\ a,\ m^2,\ dm^2,\ cm^2,\ mm^2.$$

Hektaar näiteks on ruudu pindala, mille külg on 1 hektomeeter, s. o. 100 meetrit, aar on ruudu pindala, mille külg on 1 dekameeter, s. o. 10 meetrit.



Joonis 9.

Kui üks pikkusühik on teisest n korda suurem, siis vastav pindalaühik on teisest pindalaühikust n^2 korda suurem, nagu võib veenduda joonise 9 abil. Seetõttu pindalaühikud on üksteisest järgmiselt olenevad:

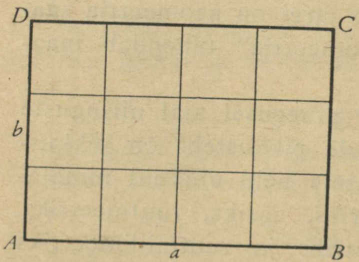
$$1\ km^2 = 100\ ha = 10\,000\ a = 1\,000\,000\ m^2;$$
$$1\ ha = 100\ a = 10\,000\ m^2;$$
$$1\ a = 100\ m^2;$$

$$1\ m^2 = 100\ dm^2 = 10\,000\ cm^2 = 1\,000\,000\ mm^2;$$
$$1\ dm^2 = 100\ cm^2 = 10\,000\ mm^2;$$
$$1\ cm^2 = 100\ mm^2.$$

Pindala mõõtmise tulemusena saadakse pindala m õ õ t - a r v. Pindala mõõtarvu leidmine ehk pindala mõõtmine võib olla kas o t s e n e või k a u d n e.

Pindala otsesel mõõtmisel loendatakse, mitu korda pindalaühik mahub mõõdetavale pindalale.

Olgu näiteks vaja mõõta ristküliku pindala, mille pikkus on 5 cm ja laius 3 cm. Kui selle ristküliku katame ühesentimeetriste vahedega paralleelsirgete võrguga, siis ristküliku pindala tükeldub ruutsentimeetriteks (joonis 10). Viimaste loendamisel saame pindala mõõtarvu.



Joonis 10.

Pindala kaudsel mõõtmisel arvutatakse kujundi pindala selle kujundi elementide põhjal.

Ülesanded.

18. Avalda m^2-tes 0,4 km^2, 0,705 km^2, 31,8 ha, 0,069 ha, 43,5 a, 1,2 a, 0,08 a.

19. Avalda cm^2-tes 0,75 m^2, 8 dm^2, 0,4 dm^2, 25 mm^2, 413 mm^2, 3900 mm^2.

20. Missuguse osa m^2-st moodustab 1 dm^2, 1 cm^2, 1 mm^2?

21. Avalda $2\frac{3}{4}$ ruutjalga ruuttollides, kui 1 jalg = 12 tolli.

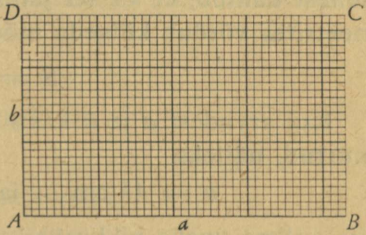
22. Avalda ruutjalgades 432 ruuttolli, 48 ruuttolli, 120 ruuttolli.

23. Missuguse osa ruutsüllast moodustab ruutjalg, kui 1 süld = 7 jalga?

§ 6. Ristküliku pindala.

Ristküliku pindala võrdub kahe lähiskülje korrutisega.

Tõestus. Olgu ristküliku $ABCD$ kahe lähiskülje AB ja AD pikkused vastavalt a sentimeetrit ja b sentimeetrit (joonised 10 ja 11). Nii arv a kui ka arv b võib olla kas täisarv või kümnendmurd või harilik murd. Vaatleme pindala määramist igal nimetatud juhul eraldi.



Joonis 11.

Kui a ja b on mõlemad täisarvud, siis ristkülikut $ABCD$ saab katta ruutsentimeetrise võrguga, nagu tehtud joonisel 10. Seejuures piki külge AB asetseb reas a cm². Et niisuguseid ridu üldse on b, siis ristkülik $ABCD$ on kaetud $b \cdot a$ ehk $a \cdot b$ ruutsentimeetriga. Seega ruutsentimeetrites avaldub ristküliku $ABCD$ pindala S järgmiselt:

$$S = ab.$$

Kui arvudest a ja b kas üks või mõlemad on kümnendmurrud, näiteks

$$a = 4{,}3 \text{ cm} \quad \text{ja} \quad b = 2{,}7 \text{ cm},$$

siis leiame niisuguse pikkusühiku, milles a ja b väljenduvad täisarvudes (joonis 11); käesoleval juhul võib võtta selleks ühikuks millimeetri:

$$a = 43 \text{ mm} \quad \text{ja} \quad b = 27 \text{ mm}.$$

Kuna külgede mõõtarvud nüüd on täisarvud, siis eespool-leitud arvutamiseeskirja alusel ristküliku pindala on

$$43 \cdot 27 \text{ mm}^2$$

ehk, võttes arvesse, et 1 $\text{mm}^2 = 0{,}01 \text{ cm}^2$,

$$0{,}01 \cdot 43 \cdot 27 \text{ cm}^2.$$

Selle avaldise teisendame ja kirjutame kujul

$$0{,}1 \cdot 43 \cdot 0{,}1 \cdot 27 \text{ cm}^2$$

ehk

$$4{,}3 \cdot 2{,}7 \text{ cm}^2.$$

Sellest nähtub, et ka sel juhul pindala mõõtarv ruutsentimeetrites võrdub külgede mõõtarvude korrutisega, s. t.

$$S = ab.$$

Kui arvudest a ja b kas üks või mõlemad on harilikud murrud, näiteks

$$a = 4\tfrac{1}{3} \text{ cm} \quad \text{ja} \quad b = 2\tfrac{3}{4} \text{ cm},$$

siis valime uueks pikkusühikuks niisuguse lõigu, mis täisarv kordi mahub nii küljesse a kui ka küljesse b, näiteks lõigu $\frac{1}{12}$ cm. Siis

$$a = 12 \cdot 4\tfrac{1}{3} \text{ uut pikkusühikut}$$

ja

$$b = 12 \cdot 2\tfrac{3}{4} \text{ uut pikkusühikut},$$

seega ristküliku pindala on

$$12 \cdot 4\tfrac{1}{3} \cdot 12 \cdot 2\tfrac{3}{4} \text{ vastavat pindalaühikut.}$$

Et uus pikkusühik on $\frac{1}{12}$ cm, siis vastav pindalaühik on $(\frac{1}{12})^2 \text{ cm}^2$. Seetõttu ristküliku pindala ruutsentimeetrites on

$$(\tfrac{1}{12})^2 \cdot 12 \cdot 4\tfrac{1}{3} \cdot 12 \cdot 2\tfrac{3}{4}$$

ehk

$$\tfrac{1}{12} \cdot 12 \cdot 4\tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{12} \cdot 12 \cdot 2\tfrac{3}{4}$$

ehk

$$4\tfrac{1}{3} \cdot 2\tfrac{3}{4}.$$

Seega ruutsentimeetrites avaldatuna ka sel juhul

$$S = ab.$$

Püüdes tõestatud teoreemi täpselt sõnastada, peaksime ütlema järgmiselt: ristküliku pindala mõõtarv võrdub tema kahe lähiskülje pikkuste mõõtarvude korrutisega, kui need küljed on mõõdetud ühtedes ja samades pikkusühikutes ning pindala on mõõdetud vastavais pindalaühikuis. Et see sõnastus on liiga pikk, siis kasutame eespool-antud lühemat sõnastust ja mõistame seda nii, nagu öeldud siinkohal. Niisamuti tuleb mõista ka valemit $S = ab$. Samasugust lühemat väljendust tarvitame ka järgnevate pindalateoreemide puhul.

J ä r e l d u s. Et ruut on ristkülik, mille lähisküljed on võrdsed, siis ruudu pindala

$$S = a \cdot a$$

ehk

$$S = a^2.$$

Seega

ruudu pindala võrdub külje teise astmega.

Ülesanded.

24. Arvuta ristküliku pindala, kui tema mõõtmed on 4,5 cm ja 6,8 cm, 12 cm ja 8,4 cm, 59 mm ja 12 mm, 0,8 m ja 18 cm.

25. Ristküliku pikkus on 4,2 cm ja pindala on 14,7 cm^2. Kui lai on ristkülik?

26. Ristküliku ümbermõõt on 28 cm ja alus on kõrgusest 3 cm võrra pikem. Arvuta ristküliku pindala.

27. Arvuta ruudu pindala, kui ruudu külg on 8 cm, 15 cm, 6,9 cm, 0,4 m, 24,6 m.

28. Mitu hektaari on ristkülikukujulise põllu pindala, mille pikkus on 240 m ja laius 75 m?

29. Mitu aari on ruudukujulise aia pindala, kui aia iga külg on 36 m?

30. Mitu korda suureneb ruudu pindala, kui ruudu külgi suurendada 4,5 korda?

31. Mille võrra suureneb ruudu pindala, kui ruudu külgi suurendada 5 cm-st 7,5 cm-ni?

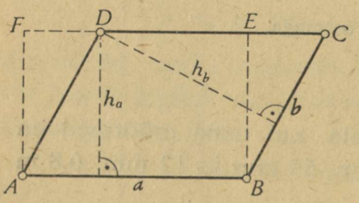
§ 7. Rööpküliku pindala.

Rööpküliku pindala võrdub aluse ja kõrguse korrutisega.

T õ e s t u s. Joonestame ristküliku $ABEF$, millel on rööpkülikuga $ABCD$ ühine alus AB ja ühine kõrgus h_a (joonis 12). Siis

$$S_{ABCD} = S_{ABEF},$$

sest võrdsete aluste ja võrdsete kõrgustega rööpkülikud on pindvõrdsed. Et



Joonis 12.

$$S_{ABEF} = a \cdot h_a,$$

siis ka

$$S_{ABCD} = a \cdot h_a,$$

m. o. t. t.

Võttes rööpküliku aluseks külje $BC = b$ ja tähistades sellele ehitatud kõrgust sümboliga h_b, võime rööpküliku pindala avaldada ka kujul $b \cdot h_b$.

Ülesanded.

32. Rööpküliku lühem diagonaal, mille pikkus on 3,6 cm, on risti ühe küljega ja võrdub sellega. Arvuta rööpküliku pindala.

33. Rööpküliku alus on 25 m ja pindala on 3,5 aari. Leia rööpküliku kõrgus.

34. Rööpkülikul $a = 15$ cm, $b = 12$ cm ja $h_a = 6$ cm. Arvuta h_b.

35. Rööpkülikul $a = 6{,}5$ cm, $h_a = 7{,}2$ cm ja $h_b = 5{,}4$ cm. Kui pikk on külg b?

§ 8. Kolmnurga pindala.

Kolmnurga pindala võrdub aluse ja kõrguse poole korrutisega.

T õ e s t u s. Joonestame läbi $\triangle ABC$ tipu A sirge AD nii, et

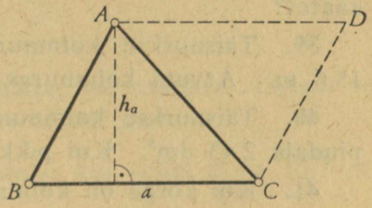
$$AD \parallel BC,$$

ja läbi tipu C sirge CD nii, et

$$CD \parallel AB.$$

Siis tekib rööpkülik $ABCD$, millel on kolmnurgaga ühine alus a ja ühine kõrgus h_a (joonis 13). Rööpküliku pindala võrdub aluse ja kõrguse korrutisega. Et $\triangle ABC$ on pool rööpkülikust $ABCD$, siis kolmnurga pindala võrdub aluse ja kõrguse poole korrutisega; seega

$$S = \tfrac{1}{2} a h_a.$$



Joonis 13.

Võttes kolmnurga aluseks mõne teise külje, võib kirjutada, et

$$S = \tfrac{1}{2} b h_b = \tfrac{1}{2} c h_c.$$

J ä r e l d u s 1. Kui täisnurkse kolmnurga aluseks võtta üks kaatet, siis teine kaatet on kõrguseks; seepärast

täisnurkse kolmnurga pindala võrdub kaatetite poole korrutisega.

J ä r e l d u s 2. Et rombi diagonaalid on risti ja poolitavad teineteist, siis tükeldavad nad rombi neljaks võrdseks täisnurkseks kolmnurgaks. Olgu diagonaalid e ja f. Siis ühe kolmnurga pindala on

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{e}{2} \cdot \frac{f}{2} = \frac{1}{8} ef$$

ja rombi pindala on

$$4 \cdot \frac{1}{8} ef = \frac{1}{2} ef.$$

Seega

rombi pindala on pool diagonaalide korrutisest.

Ülesanded.

36. Ühise alusega ristkülik ja kolmnurk on pindvõrdsed. Mis võib öelda nende kõrgustest?

37. Kolmnurgal $a = 3{,}12$ m, $b = 5{,}2$ m ja $h_a = 4$ m. Kui pikk on h_b?

38. Täisnurkne kolmnurk ja ruut on pindvõrdsed; ruudu külg on võrdne ühe kaatetiga. Kui pikk on teine kaatet?

39. Täisnurkse kolmnurga kaatetid on 12,7 m ja 15,6 m. Arvuta kolmnurga pindala.

40. Täisnurkse kolmnurga üks kaatet on 18 cm ja pindala 2,43 dm². Kui pikk on teine kaatet?

41. Kui kõrge on kolmnurk, mille alus on 0,82 m ja pindala on 0,492 m²?

42. Kui suur on rombi pindala, mille diagonaalid on 5,7 cm ja 8,4 cm?

§ 9. Trapetsi pindala.

Trapetsi pindala võrdub aluste poolsumma ja kõrguse korrutisega.

T õ e s t u s. Tükeldame trapetsi $ABCD$, mille alused on a ja c ning kõrgus h, diagonaaliga kolmnurkadeks ABD ja DBC. Siis

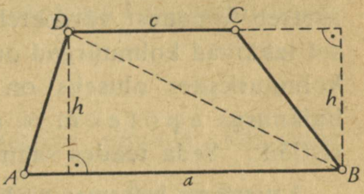
$$S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{DBC}.$$

Võttes neis kolmnurkades alusteks küljed a ja c, saame

$$S_{ABCD} = \tfrac{1}{2}ah + \tfrac{1}{2}ch$$

ehk, võttes sulgude ette ühised tegurid $\frac{1}{2}$ ja h,

$$S_{ABCD} = \tfrac{1}{2}h(a + c)$$



Joonis 14.

ehk, korrutades tegurid $\frac{1}{2}$ ja $a + c$,

$$S_{ABCD} = \frac{a + c}{2} \cdot h,$$

m. o. t. t.

Et trapetsi aluste poolsumma $\frac{a + c}{2}$ võrdub kesklõiguga l, siis pindala

$$S = l \cdot h.$$

Seega

trapetsi pindala võrdub kesklõigu ja kõrguse korrutisega.

Ülesanded.

43. Arvuta trapetsi pindala, kui trapetsi alused on 5,8 cm ja 4,6 cm ning kõrgus on 3,7 cm.

44. Arvuta trapetsi pindala, kui sellel $a = 15{,}7$ m, $c = 8\frac{2}{3}$ m ja $h = 4\frac{4}{5}$ m.

45. Trapetsi pindala $s = 127{,}1$ m^2, alus $a = 18$ m ja alus $c = 13$ m. Kui kõrge on trapets?

46. Trapetsi pindala $S = 394$ m^2, alus $a = 25$ m ja kõrgus $h = 14$ m. Kui pikk on alus c?

47. Teisenda trapets temaga pindvõrdseks ristkülikuks, millel on trapetsiga ühine kõrgus.

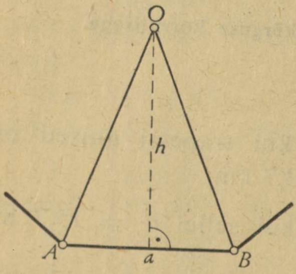
48. Missuguse kujundi pindala valemi saab trapetsi pindala valemist, kui selles ühe aluse pikkuseks võtta 0?

§ 10. Korrapärase hulknurga pindala.

Korrapärase hulknurga pindala määramiseks tükeldame hulknurga kolmnurkadeks, ühendades selle keskpunkti tippudega. Et korrapärase hulknurga keskpunkt asetseb tippudest võrdsetel kaugustel, siis kõik tükeldamisel tekkivad kolmnurgad on võrdsed ja võrdhaarsed. Neis kolmnurkades aluseks on hulknurga külg ja kõrguseks hulknurga a p o t e e m, s. o. keskpunktist küljele ehitatud ristlõik. Seda teades saame tõestada, et

korrapärase hulknurga pindala võrdub poole ümbermõõdu ja apoteemi korrutisega.

T õ e s t u s. Olgu antud korrapärase hulknurga küljede arv n, külg a ja apoteem h (joonis 15). Keskpunkti O ühendamisel tippudega hulknurk tükeldub n võrdseks kolmnurgaks. Ühe niisuguse kolmnurga pindala



Joonis 15.

$$S_\triangle = \tfrac{1}{2}ah$$

ja n kolmnurga pindala

$$n \cdot S_\triangle = n \cdot \tfrac{1}{2}ah$$

ehk

$$n \cdot S_\triangle = \frac{na}{2} \cdot h.$$

Seega korrapärase n-nurga pindala

$$S = \frac{na}{2} \cdot h.$$

Selles valemis na tähendab hulknurga ümbermõõtu ehk perimeetrit ja $\frac{na}{2}$ poolt ümbermõõtu. Hulknurga poolt ümbermõõtu tähistatakse sagedasti tähega p. Seda tähist tarvitades korrapärase hulknurga pindala

$$S = p \cdot h.$$

Kui korrapärasest hulknurgast on antud peale külgede arvu n veel külg või apoteem või ümberjoonestatud ringi raadius, siis on sellega määratud kõik ülejäänud elemendid. Edaspidi näeme, kuidas neid elemente arvutada. Esialgu leiame pindala arvutamiseks vajalikud elemendid joonestamise teel. On küllalt, kui selleks joonestada ainult üks kolmnurkadest, mis tekib hulknurga keskpunkti ühendamisel tippudega (joonis 15).

Ülesanded.

49. Leia korrapärase kuusnurga pindala, kui selle kuusnurga külg on 4,5 cm.

50. Korrapärase kaheksanurga ümber joonestatud ringjoone raadius on 5 cm. Arvuta pindala.

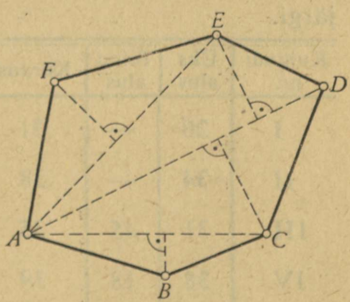
51. Korrapärase viisnurga ümber joonestatud ringjoone raadius on 6 cm. Arvuta pindala.

52. Avalda korrapärase kolmnurga pindala kahel viisil ja järelda saadud avaldistest, et korrapärase kolmnurga apoteem on $\frac{1}{3}$ selle kolmnurga kõrgusest.

§ 11. Korrapäratu hulknurga pindala.

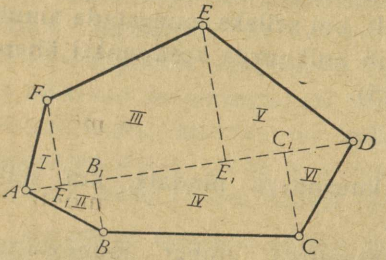
Korrapäratu hulknurga pindala määramiseks hulknurk tükeldatakse kujundeiks, mille pindala saab arvutada; nende arvutamisel ja saaduste liitmisel leitakse antud hulknurga pindala. Sagedamini tarvitatakse üht kahest järgmisest tükeldamisviisist.

1. Hulknurga ühest tipust ehitatakse kõik diagonaalid ja mõõdetakse igas niiviisi saadud kolmnurgas üks külg ja sellele vastav kõrgus. Nagu näha jooniselt 16, kulub kuusnurga pindala määramiseks sel viisil 7 mõõtmist.



Joonis 16.

2. Hulknurga ühele diagonaalile ehitatakse ristlõigud hulknurga tippudest. Niiviisi hulknurk tükeldub täisnurkseteks kolmnurkadeks ja täisnurkseteks trapetsiteks. Pindala arvutamiseks mõõdetakse ristlõigud FF_1, $BB_1, \ldots$ ja lõigud AF_1, $F_1B_1, \ldots$, milleks ristlõigud tükeldavad diagonaali (joonis 17). Nende mõõtmiste andmeil arvutatakse tükeldamisel saadud kolmnurkade ja trapetsite pindalad ja liidetakse need. Nagu joonisest näha, kulub kuusnurga pindala määramiseks sel viisil 9 mõõtmist.



Joonis 17.

N ä i d e. Olgu joonisel 17 kujutatud maatüki mõõtmisel saadud, et meetrites

$$AF_1 = 26, \quad E_1C_1 = 12, \quad BB_1 = 38,$$
$$F_1B_1 = 8, \quad C_1D = 12, \quad EE_1 = 45,$$
$$B_1E_1 = 27, \quad FF_1 = 31, \quad CC_1 = 18.$$

Maatüki pindala arvutamist toimetame järgmise skeemi järgi.

Kujundi nr.	Üks alus	Teine alus	Kõrgus	Pindala
I	26	—	31	$\frac{26 \cdot 31}{2} = 403$
II	34	—	38	$\frac{34 \cdot 38}{2} = 646$
III	31	45	35	$\frac{31 + 45}{2} \cdot 35 = 1330$
IV	38	18	39	$\frac{38 + 18}{2} \cdot 39 = 1092$
V	24	—	45	$\frac{24 \cdot 45}{2} = 540$
VI	12	—	18	$\frac{12 \cdot 18}{2} = 108$
				Kokku 4119 $m^2 \approx 41{,}2$ a.

Ülesanded.

53. Joonesta vabalt mingi viisnurk, tükelda see joonisel 17 näidatud viisil ja arvuta pindala.

54. Võrdhaarse täisnurkse kolmnurga pindala on 338 dm^2. Kui pikad on kaatetid?

55. Ruut on pindvõrdne ristkülikuga, mille mõõtmed on 3,6 cm ja 0,9 cm. Kui pikk on ruudu külg?

56. Ruut on pindvõrdne ristkülikuga, mille mõõtmed on a ja b. Kui pikk on ruudu külg?

57. Ruudu pindala on 11,56 dm^2. Arvuta ruudu ümbermõõt.

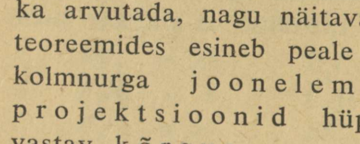
58. Ruudu pindala on S cm^2. Kui pikk on ümbermõõt?

Peatükk II.

Seosed täisnurkse kolmnurga joonelementide vahel.

§ 12. Täisnurkse kolmnurga joonelemendid.

Täisnurkse kolmnurga kahe küljega on see kolmnurk ja seega ka tema kolmas külg määratud. Selle külje leidmiseks joonestame kolmnurga antud kahe külje järgi ja mõõdame joonisest kolmanda külje. Kuid seda külge saab ka arvutada, nagu näitavad järgnevad teoreemid. Neis teoreemides esineb peale külgede veel teisi täisnurkse kolmnurga joonelemente, nimelt kaatetite projektsioonid hüpotenuusile ja hüpotenuusile vastav kõrgus.



Joonis 18.

Olgu $\triangle ABC$ täisnurkne ja AB selle hüpotenuus (joonis 18). Ehitame täisnurga tipust C hüpotenuusile ristlõigu CD. Lõik CD ongi selle kolmnurga kõrgus ja nimelt hüpotenuusile vastav kõrgus. Punktist C hüpotenuusile joonestatud ristlõigu ja hüpotenuusi ühist punkti D nimetatakse punkti C projektsiooniks hüpotenuusile. Selle punkti projektsioon jaotab hüpotenuusi kaheks lõiguks, mida nimetatakse kaatetite projektsioonideks hüpotenuusile; neist lõik AD on kaateti AC

projektsioon ja lõik BD kaateti BC projektsioon. Kaatetite projektsioone tähistame tähtedega f ja g; on selge, et

$$f + g = c.$$

Projektsiooni mõistet ei tarvitata mitte ainult ühenduses täisnurkse kolmnurgaga. Üldiselt

punkti projektsiooniks sirgele nimetatakse punktist sirgele joonestatud ristlõigu ja sirge ühist punkti.

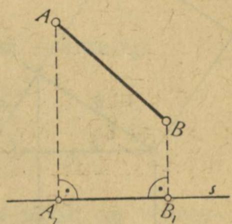
Seega punkt A_1 joonisel 19 on punkti A projektsioon sirgele s, kui

$$AA_1 \perp s.$$

Sirglõigu projektsiooniks sirgele nimetatakse sirglõigu otspunktide projektsioonide vahelist lõiku.

Seega A_1B_1 joonisel 19 on lõigu AB projektsioon sirgele s, kui

$$AA_1 \perp s \quad \text{ja} \quad BB_1 \perp s.$$



Joonis 19.

§ 13. Eukleidese teoreem.

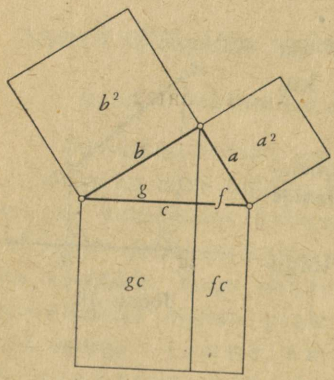
Ristküliku teisendamisel temaga pindvõrdseks ruuduks ehitasime niisuguse täisnurkse kolmnurga, mille hüpotenuusiks oli ristküliku üks külg ja kaateti projektsiooniks teine külg (joonis 8). Sel puhul tõestasime ka, et kaatetile ehitatud ruudu pindala võrdub antud ristküliku pindalaga. Selle tulemuse sõnastame nüüd järgmise teoreemina:

täisnurkse kolmnurga kaatetile ehitatud ruut on pindvõrdne ristkülikuga, mille üks külg võrdub hüpotenuusiga ja teine külg selle kaateti projektsiooniga hüpotenuusile.

Seda teoreemi nimetatakse kreeka matemaatiku Eukleidese nime järgi E u k l e i d e s e t e o r e e m i k s. Väljendades selle teoreemi sümbolites, saame järgmised valemid (joonis 20):

$$a^2 = fc \quad \text{ja} \quad b^2 = gc.$$

Nii ühes kui teises valemis esineb täisnurkse kolmnurga kolm elementi; kui neist kaks elementi on antud, siis kolmanda elemendi saab arvutada ülaltoodud valemite järgi.



Joonis 20.

Näide. Olgu antud, et

$$f = 4 \text{ cm} \quad \text{ja} \quad c = 9 \text{ cm}.$$

Et Eukleidese teoreemi järgi

$$a^2 = f \cdot c,$$

siis

$$a = \sqrt{f \cdot c} \; ;$$

seega antud juhul

$$a = \sqrt{4 \cdot 9}$$

ehk

$$a = \sqrt{36}$$

ehk

$$a = 6.$$

Ülesanded.

59. Täisnurkse kolmnurga kaatet $b = 16$ m ja hüpotenuus $c = 24$ m. Leia kaatetite projektsioonid.

60. Täisnurkse kolmnurga kaatet $a = 8$ cm ja hüpotenuus $c = 12$ cm. Kui pikad on kaatetite projektsioonid?

61. Täisnurkse kolmnurga hüpotenuus $c = 9{,}45$ m ja kaateti a projektsioon $f = 4{,}2$ m. Kui pikk on kaatet a?

62. Täisnurkse kolmnurga kaateti a projektsioon on 32 cm ja kaateti b projektsioon on 40 cm. Kui pikad on kaatetid?

§ 14. Pythagorase teoreem.

Eukleidese teoreemi abil saab kergesti tõestada, et

täisnurkse kolmnurga hüpotenuusile ehitatud ruudu pindala võrdub kaatetitele ehitatud ruutude pindalade summaga.

T õ e s t u s. Eukleidese teoreemi järgi

$$fc = a^2$$

ja

$$gc = b^2.$$

Nende võrduste vastavate poolte liitmisel saame

$$fc + gc = a^2 + b^2$$

ehk

$$c(f + g) = a^2 + b^2;$$

et $f + g = c$, siis saadud võrduse vasakut poolt on võimalik teisendada, millega saame

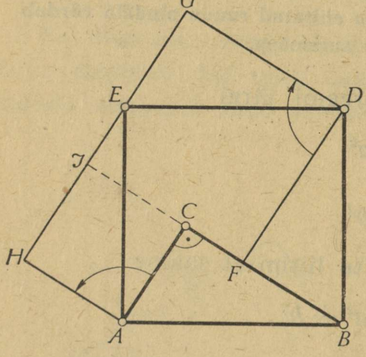
$$c^2 = a^2 + b^2,$$

m. o. t. t.

Seda teoreemi nimetatakse kreeka matemaatiku Pythagorase nime järgi P y t h a g o r a s e t e o r e e m i k s.

Mõnede teadete järgi olevat Pythagoras selle teoreemi tõestanud. Pythagorase tõestus on aegade vältel kaotsi läinud, kuid on säilinud mitmed teised vanad tõestused. Üldse on sellele teoreemile leitud tõestusi enam kui ühelegi teisele; nende üldarv küünib 100-ni! Tutvume neist kahega, mis ei toetu Eukleidese teoreemile.

Hindude poolt on leiutatud Pythagorase teoreemile järgmine teisendustõestus. Joonestame täisnurkse kolmnurga ABC ja ehitame selle hüpotenuusile ruudu $ABDE$, nii nagu näidatud joonisel 21. Kui ehitame veel lõigu DF nii, et $DF \perp CB$, siis tükeldub hüpotenuusile ehitatud ruut kolmeks osaks: kaheks võrdseks kolmnurgaks ABC ja BDF ning viisnurgaks $ACFDE$. Pöörame $\triangle ABC$ punkti A ümber asendisse AEH ja $\triangle BDF$ punkti D ümber asendisse EDG. Nii saame hüpotenuusile ehitatud ruudust kuusnurga $ACFDGH$. Kui pikendada külge BC kuni punktini I, siis kuusnurk $ACFDGH$ tükeldub kaheks ruuduks, milledest $ACIH$ on kaatetile AC ehitatud ruut ja $FDGI$ on kaatetile CB ehk FD ehitatud ruut.



Joonis 21.

Algebraliselt on võimalik tõestada Pythagorase teoreemi järgmiselt. Ehitame hüpotenuusile ruudu ja joonestame läbi selle tippude paralleelid kaatetitele (joonis 22). Need paralleelid tükeldavad hüpotenuusile ehitatud ruudu neljaks kolmnurgaks kaatetitega a ja b ning üheks ruuduks küljega $a - b$. Nende pindalade summa võrdub hüpotenuusile ehitatud ruudu pindalaga; seega

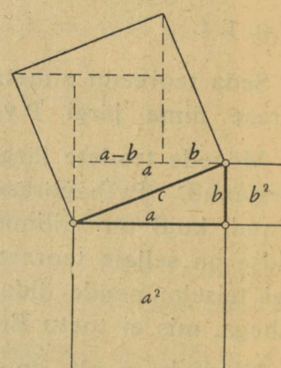
$$c^2 = 4 \cdot \frac{ab}{2} + (a - b)^2$$

ehk

$$c^2 = 2ab + a^2 - 2ab + b^2$$

ehk

$$c^2 = a^2 + b^2.$$



Joonis 22.

Märkus. Väljendi „hüpotenuusile ehitatud ruut“ ja teiste samalaadiliste asemel kasutame edaspidi lühiduse mõttes ka väljendit „hüpotenuusi ruut“ ja teisi samalaadilisi.

Ülesanne.

63. Tõesta ruutude tükeldamise teel Pythagorase teoreem võrdhaarse täisnurkse kolmnurga erijuhul.

§ 15. Pythagorase teoreemi pöördteoreem.

Kui kolmnurga ühe külje ruut on võrdne teiste külgede ruutude summaga, siis kolmnurk on täisnurkne.

E e l d u s : $c^2 = a^2 + b^2$ (joonis 23).

V ä i d e : külje c vastasnurk on täisnurk.

T õ e s t u s. Ehitame t ä i s n u r k s e kolmnurga kaatetitega a ja b. Olgu selle hüpotenuus x; Pythagorase teoreemi järgi siis

$$x^2 = a^2 + b^2.$$

Kuid antud kolmnurga kohta teame eeldusest, et

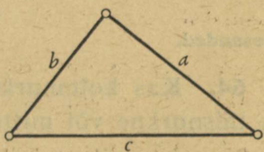
$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Seega

$$x^2 = c^2,$$

millest järeldub, et

$$x = c.$$



Joonis 23.

Kuid siis on ehitatud täisnurkse kolmnurga kolm külge võrdsed antud kolmnurga vastavate elementidega, millest järeldub, et ka antud kolmnurk on täisnurkne.

N ä i t e d. 1. Olgu kolmnurga külgede mõõtarvud 3, 4 ja 5 ühikut. Et

$$3^2 + 4^2 = 25$$

ja

$$5^2 = 25,$$

siis

$$5^2 = 3^2 + 4^2$$

ja seega kolmnurk külgedega 3, 4 ja 5 ühikut on täisnurkne.

2. Olgu $a = 8$, $b = 12$ ja $c = 10$ ühikut. Siis

$$b^2 = 144$$

ja

$$a^2 + c^2 = 64 + 100$$

ehk

$$a^2 + c^2 = 164$$

ja seega

$$b^2 < a^2 + c^2;$$

sellest järeldub, et kolmnurk ei ole täisnurkne.

See tõsiasi, et kolmnurk külgedega 3, 4 ja 5 ühikut on täisnurkne, oli tuntud egiptuse matemaatikuile juba mitu tuhat aastat e. Kr. Selle tõe põhjal egiptuse maamõõtjad ja ehitusmeistrid ehitasid täisnurka, kasutades 12 ühiku pikkust nööri, mis tõmmati pingule kolmnurgaks külgedega 3, 4 ja 5 ühikut. Ka vanadel hindudel oli ammu e. Kr. teada, et kolmnurgad, mille külgede mõõtarvud täidavad tingimust $c^2 = a^2 + b^2$, on täisnurksed.

Ülesanded.

64. Kas kolmnurk külgedega 3,6 m, 8,5 m ja 7,7 m on täisnurkne või mitte?

65. Täisnurkse kolmnurga kaatetid on 28 cm ja 45 cm. Kui pikk on hüpotenuus?

66. Ringjoonel võetud punkt on ühendatud ühe diameetri otspunktidega. Näita, et nii saadud kõõlude ruutude summa on võrdne diameetri ruuduga.

67. Ühe diameetri otspunktid on ühendatud: a) ringjoone sees oleva punktiga, b) väljaspool ringjoont oleva punktiga. Tõesta, et diameetri ruut on suurem juhul a saadud lõikude ruutude summast ja väiksem juhul b saadud lõikude ruutude summast.

§ 16. Pythagorase teoreemi rakendusi.

Pythagorase teoreem näitab sidet täisnurkse kolmnurga kolme külje vahel. Seepärast saab seda teoreemi kasutada täisnurkse kolmnurga kolmanda külje arvutamiseks, kui kaks külge on antud. Olgu antud näiteks kaatetid a ja b. Et

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

siis

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Seega

hüpotenuus võrdub ruutjuurega kaatetite ruutude summast.

Kui on antud hüpotenuus ja üks kaatet, näiteks kaatet b, siis teise kaateti leiame järgmiselt:

et

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

siis

$$c^2 - b^2 = a^2$$

ehk

$$a^2 = c^2 - b^2$$

ja

$$a = \sqrt{c^2 - b^2}.$$

Seega

kaatet võrdub ruutjuurega hüpotenuusi ja teise kaateti ruutude vahest.

Näide. Kui $c = 17$ cm ja $a = 8$ cm, siis samades ühikutes

$$b = \sqrt{17^2 - 8^2}$$

ehk

$$b = \sqrt{289 - 64}$$

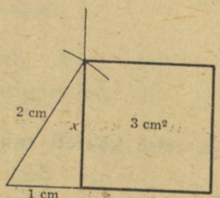
ehk

$$b = \sqrt{225},$$

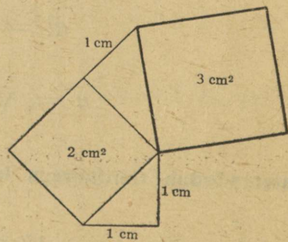
seega

$$b = 15.$$

Pythagorase teoreemi põhjal on võimalik joonestada ruutu, mille pindala võrdub kahe antud ruudu pindalade summaga või pindalade vahega. Esimese ülesande lahendamiseks joonestame täisnurkse kolmnurga, mille kaatetiteks on antud ruutude küljed; siis hüpotenuusi ruut on pindvõrdne antud ruutude summaga. Teise ülesande lahendamiseks ehitame täisnurkse kolmnurga, mille hüpotenuusiks on suurema ruudu külg ja üheks kaatetiks väiksema ruudu külg. Ruutude liitmise ja lahutamise teel on võimalik ehitada ruutu, mille pindala mõõtarv on mistahes täisarv, näiteks 3. Selleks ehitame täisnurkse kolmnurga, mille üks kaatet on 1 cm ja hüpotenuus on 2 cm; siis hüpotenuusi ruudu pindala on 4 cm^2, ühe kaateti ruudu pindala 1 cm^2 ja teise kaateti ruudu pindala on 3 cm^2 (joonis 24). Sama ülesannet võib veel teisiti lahendada, liites ruuduga, mille pindala on 2 cm^2, ruudu pindalaga 1 cm^2 (joonis 25). Niiviisi tööd jätkates võib saada ruudu, mille pindala mõõtarv on mistahes täisarv.



Joonis 24.



Joonis 25.

Olgu ruudu pindala mõõtarv mingi täisarv a; siis ruudu külg

$$x = \sqrt{a}.$$

Algebrast teame, et kui arv a ei ole mõne täisarvu ruut, nagu 4, 9, 16, siis $\sqrt{a}$ ehk x on irratsionaalarv. Pythagorase teoreemi alusel on võimalik iga irratsionaalarvu $\sqrt{a}$

kujutada lõiguna. Selleks ehitame eespool-kirjeldatud viisil ruudu, mille pindala on a; selle ruudu külg ongi $\sqrt{a}$.

Kergem kui Pythagorase teoreemi alusel on ruutirratsionaalarvu võimalik kujutada lõiguna Eukleidese teoreemi alusel. Olgu vaja kujutada lõiguna arv

$$x = \sqrt{a}\ ;$$

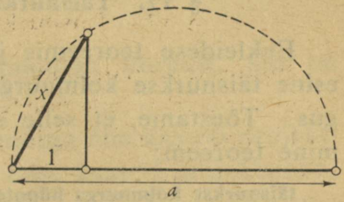
siis

$$x^2 = a$$

ehk

$$x^2 = 1 \cdot a,$$

millest nähtub, et x on täisnurkse kolmnurga kaatet, mille projektsioon hüpotenuusile on 1 ja hüpotenuus on a.



Joonis 26.

Ehitades täisnurkse kolmnurga, mille hüpotenuus on a ühikut ja ühe kaateti projektsioon on 1 ühik, saamegi lõiguna arvu $\sqrt{a}$ (joonis 26).

Ülesanded.

68. Kui pikk on täisnurkse kolmnurga hüpotenuus, kui kaatet $a = 2{,}8$ cm ja kaatet $b = 4{,}5$ cm?

69. Täisnurksel kolmnurgal $a = 0{,}39$ m ja $c = 0{,}89$ m. Kui pikk on b?

70. Täisnurksel kolmnurgal $c = 13$ cm ja $a = 5$ cm. Arvuta teised elemendid.

71. Ühel ruudul on külg 4,5 cm ja teisel 3 cm. Joonesta ruut, mis on pindvõrdne antud ruutude summaga.

72. Joonesta ruut, mille pindala on kaks korda suurem vabalt võetud ruudu pindalast.

73. Joonesta ruut, mille pindala on pool vabalt võetud ruudu pindalast.

74. Joonesta sirglõik pikkusega $\sqrt{8}$ cm.

75. Joonesta sirglõik pikkusega $\sqrt{13}$ cm.

§ 17. Täisnurkse kolmnurga kõrgus.

Eukleidese teoreemis ja ka Pythagorase teoreemis ei esine täisnurkse kolmnurga üks joonelement, nimelt kõrgus. Tõestame, et selle elemendi kohta on kehtiv järgmine teoreem:

täisnurkse kolmnurga hüpotenuusile vastava kõrguse ruut on pindvõrdne ristkülikuga, mille külgedeks on kaatetite projektsioonid hüpotenuusile.

Eeldus: $\triangle ABC$ on täisnurkne.

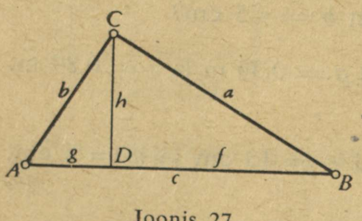
Väide: $h^2 = f \cdot g$ (joonis 27).

Tõestus. Pythagorase teoreemi järgi kolmnurgas ADC

$$h^2 = b^2 - g^2.$$

Eukleidese teoreemi järgi kolmnurgas ABC

$$b^2 = gc.$$



Joonis 27.

Järelikult

$$h^2 = gc - g^2$$

ehk

$$h^2 = g(c-g);$$

et $c - g = f$, siis

$$h^2 = g \cdot f,$$

m. o. t. t.

Viimase valemi lahendamisel tähe h suhtes saame valemi

$$h = \sqrt{g \cdot f}\,.$$

Et ruutjuurt kahe arvu korrutisest nimetatakse nende arvude **keskmiseks võrdeliseks** ehk **geomeetriliseks keskmiseks**, siis võime sõnastada täisnurkse kolmnurga kõrguse kohta kehtiva teoreemi ka järgmiselt:

täisnurkse kolmnurga hüpotenuusile vastav kõrgus on kaatetite projektsioonide geomeetriline keskmine.

See teoreem võimaldab

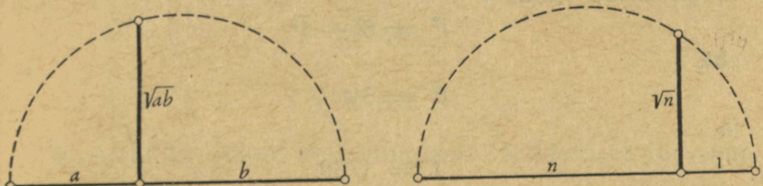
1. arvutada täisnurkse kolmnurga kõrgust, kui on antud kaatetite projektsioonid;

2. arvutada täisnurkse kolmnurga ühe kaateti projektsiooni, kui on antud kõrgus ja teise kaateti projektsioon;

3. joonestada kahe antud lõigu a ja b geomeetrilist keskmist $\sqrt{ab}$,

4. kujutada lõiguna iga irratsionaalarvu $\sqrt{n}$.

Viimase kahe ülesande lahendamiseks joonestame täisnurkse kolmnurga, mille kaatetite projektsioonid on a ja b või n ja 1 (joonis 28). Selle kolmnurga kõrgus on siis $\sqrt{ab}$ või $\sqrt{n}$.



Joonis 28.

Ülesanded.

76. Arvuta täisnurkse kolmnurga kõrgus, kui kaatetite projektsioonid on 27 cm ja 48 cm.

77. Täisnurkse kolmnurga kõrgus on 18 cm ja ühe kaateti projektsioon on 13,5 cm. Kui pikk on hüpotenuus?

78. Joonesta kahe vabalt võetud sirglõigu aritmeetiline keskmine ja geomeetriline keskmine.

79. Ehita lõik pikkusega $\sqrt{6}$ cm, kasutades täisnurkse kolmnurga kõrguse omadust.

80. Kasutades geomeetrilise keskmise mõistet anna Eukleidese teoreemile uus sõnastus.

§ 18. Kokkuvõte.

Teoreem täisnurkse kolmnurga kõrgusest ühes Pythagorase ja Eukleidese teoreemiga võimaldavad arvutada täisnurkse kolmnurga kahe joonelemendi põhjal kõiki teisi joonelemente. Mingi elemendi arvutamiseks tuleb kasutada valemit, milles esinevaist kolmest elemendist kaks on teada, ja arvutada siis kolmas element.

Ülesanne. Olgu antud, et $a = 8$ ja $h = 5$. Arvuta b, c, f ja g.

Lahendus. Pythagorase teoreemi järgi (joonis 27)

$$f^2 = a^2 - h^2,$$

seega antud juhul

$$f^2 = 8^2 - 5^2$$

ehk

$$f^2 = 39$$

ja

$$f = \sqrt{39}$$

ehk

$$f \approx 6{,}245.$$

Eukleidese teoreemi järgi

$$a^2 = fc,$$

millest

$$c = \frac{a^2}{f}.$$

Asendades selles a ja f nende väärtustega, saame

$$c \approx \frac{8^2}{6{,}245}$$

ehk, peale nõutud tehete teostamist,

$$c \approx 10{,}25.$$

Et kaatetite projektsioonide summa võrdub hüpotenuusiga, siis

$$g = c - f,$$

seega

$$g \approx 10{,}25 - 6{,}245$$

ehk

$$g \approx 4{,}005.$$

Pythagorase teoreemi järgi

$$b^2 = c^2 - a^2,$$

seega antud juhul

$$b^2 \approx 10{,}25^2 - 8^2$$

ehk

$$b^2 \approx 18{,}25 \cdot 2{,}25$$

ehk

$$b^2 \approx 41$$

ja

$$b \approx 6{,}4.$$

Kontrolliks võime b^2 arvutada ka Eukleidese teoreemi alusel:

$$b^2 = gc,$$

seega

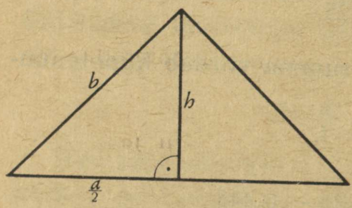
$$b^2 \approx 4{,}005 \cdot 10{,}25$$

ehk

$$b^2 \approx 41.$$

Vastus: $b \approx 6{,}4$; $c \approx 10{,}2$; $f \approx 6{,}2$; $g \approx 4{,}0$.

Neidsamu arvutamisvõtteid saab kasutada ristküliku, võrdhaarse kolmnurga, korrapärase hulknurga ja teiste kujundite elementide arvutamiseks, kui neid kujundeid saab tükeldada täisnurkseteks kolmnurkadeks.



Joonis 29.

Ülesanne. Võrdhaarse kolmnurga alus on 14 cm ja haar on 10 cm. Arvutada kolmnurga pindala.

Lahendus. Pindala arvutamiseks on vaja teada peale aluse ka kõrgus. Et kõrgus tükeldab võrdhaarse kolmnurga kaheks täisnurkseks kolmnurgaks, mille hüpotenuusiks on haar ja üheks kaatetiks on pool alust (joonis 29), siis

$$h^2 = b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

seega

$$h^2 = 10^2 - 7^2$$

ehk

$$h^2 = 51$$

ja

$$h = \sqrt{51},$$

ehk

$$h \approx 7{,}14.$$

Seega

$$S \approx \frac{14 \cdot 7{,}14}{2}$$

ehk

$$S \approx 50.$$

Vastus: kolmnurga pindala on ligikaudu 50 cm^2.

81. Täisnurksel kolmnurgal $a = 15$ cm ja $h = 12$ cm. Arvuta teised joonelemendid.

82. Täisnurksel kolmnurgal $c = 25$ cm ja $f = 4$ cm. Arvuta teised joonelemendid.

83. Võrdhaarse täisnurkse kolmnurga pindala on 10,58 m^2. Kui pikk on hüpotenuus?

84. Võrdhaarse kolmnurga alus on 72 dm ja kõrgus on 15 dm. Arvuta kolmnurga ümbermõõt.

85. Võrdhaarse trapetsi alused on 8 cm ja 2,6 cm ning kõrgus on 4,8 cm. Kui pikk on trapetsi ümbermõõt?

86. Ringi raadius on 78 cm. Kui kaugel keskpunktist asetseb 60 cm pikkune kõõl?

87. 7 cm pikkune kõõl asetseb ringjoone keskpunktist 8,4 cm kaugusel. Kui pikk on ringjoone raadius?

88. Ruudu diagonaali pikkus on 2,4 m. Arvuta ruudu ümbermõõt ja pindala.

89. Ruudu diagonaali pikkus on d cm. Kui pikk on ruudu külg?

90. Ristküliku ühe tipu projektsioon diagonaalile on selle diagonaali otspunktidest 8 ja 15 cm kaugusel. Kui pikad on ristküliku küljed?

91. Ristküliku diagonaali pikkus on 0,89 m ja ühe külje pikkus on 0,39 m. Arvuta ristküliku pindala.

92. Rombi pindala on 442 cm^2 ja ühe diagonaali pikkus on 26 cm. Kui pikk on rombi külg?

93. Võrdhaarse kolmnurga pindala on 540 cm^2 ja kõrgus on 36 cm. Kui pikk on ümbermõõt?

94. Võrdkülgse kolmnurga külg on 10 cm. Arvuta selle kolmnurga pindala.

95. Võrdkülgse kolmnurga kõrgus on 15 cm. Kui pikk on selle kolmnurga külg?

96. Korrapärase kuusnurga külg on 5 cm. Arvuta apoteem ja pindala.

97. Korrapärase nelinurga ümber joonestatud ringjoone raadius on 10 cm. Arvuta külg, apoteem ja pindala.

98. Korrapärase kolmnurga ümber joonestatud ringjoone raadius on 12 cm. Kui pikk on selle kolmnurga apoteem ja külg? Näpunäide: pikenda apoteemi kuni ringjooneni ja ühenda saadud punkt külje otspunktidega.

Peatükk III.

Hulknurkade sarnasus.

§ 19. Võrdelised sirglõigud.

Olgu antud kahe sirglõigu pikkused, näiteks

$$a = 6 \text{ cm} \quad \text{ja} \quad b = 2 \text{ cm}.$$

Arvu $\frac{6}{2}$ ehk 3 nimetatakse lõikude a ja b jagatiseks ehk suhteks. Lõikude a ja b suhet tähistame sümboliga

$$\frac{a}{b} \quad \text{ehk} \quad a:b.$$

Antud pikkuste puhul

$$a:b = 3.$$

Üldiselt

kahe lõigu suhe on arv, mis näitab, mitu korda üks sirglõik on teisest pikem või missuguse osa moodustab üks sirglõik teisest.

Kahe lõigu suhe on kas ratsionaalarv, nagu 3, $\frac{5}{7}$, 1,8, või irratsionaalarv, nagu $\sqrt{2}$, $2\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{4}$. Ilma tõestuseta usume, et

irratsionaalarvudega laiendatud arvuvallas leidub kahe mistahes lõigu suhet väljendav arv.

Olgu lõikude a ja b suhe k, teisiti

$$\frac{a}{b} = k.$$

Siis

$$a = kb$$

ja

$$\frac{1}{k} = \frac{b}{a}$$

ehk

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{k}.$$

Seega

lõikude b ja a suhe on lõikude a ja b suhte pöördväärtus.

Vaatleme kaht sirglõikude rida

$$a_1, b_1, c_1, d_1, \ldots$$

ja

$$a_2, b_2, c_2, d_2, \ldots,$$

kus esimese rea igale sirglõigule vastab teise rea üks sirglõik, ja ümberpöördult. Kui nende ridade vastavate lõikude jagatised on võrdsed, s. t. kui

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \ldots. = k,$$

siis ütleme, et need sirglõigud on võrdelised. Seega:

sirglõigud on võrdelised, kui vastavate sirglõikude suhted on võrdsed.

Arv k, millega võrduvad kõik need jagatised, näitab, mitu korda ühe sirglõikude rea lõigud on pikemad teise sirglõikude rea vastavatest lõikudest või missuguse osa neist nad moodustavad.

Kõige väiksem sirglõikude arv, mille kohta saab tarvitada mõistet „võrdelised", on 4: sirglõigud a_1 ja b_1 on võrdelised sirglõikudega a_2 ja b_2, kui

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}.$$

99. Külgede pikkused on ühel kolmnurgal 12,4 cm, 8,6 cm ja 14,8 cm ning teisel kolmnurgal 31 cm, 37 cm ja 21,5 cm. Arvuta nende kolmnurkade vastavate külgede suhted.

100. Lõikude *a* ja *b* suhe on 1,5. Kui suur on lõikude *b* ja *a* suhe?

101. Lõikude *s* ja *t* suhe on 0,25. Kui suur on lõikude *t* ja *s* suhe?

102. Leia järgmiste lõikude suhe ja otsusta igal juhul, kas see suhe on ratsionaalne või irratsionaalne: ruudu diagonaal ja külg, võrdkülgse kolmnurga kõrgus ja külg, ruudu külg ja sissejoonestatud ringi raadius.

103. Täida lüngad järgnevates ridades nii, et tekiks kaks rida võrdelisi pikkusi:

4, 2,4, . . ., 5,4, . . ., 18,5, . . . cm,

6, . . ., 9, . . ., 10,2, . . ., 78 cm.

104. Antud on lõigud pikkusega 2 cm, 5 cm, 7,5 cm ja 12,4 cm. Leia nendega võrdeliste lõikude pikkused, nii et antud lõikude suhted uutesse lõikudesse oleksid 2,5.

§ 20. Võrdeliste külgedega täisnurksed kolmnurgad.

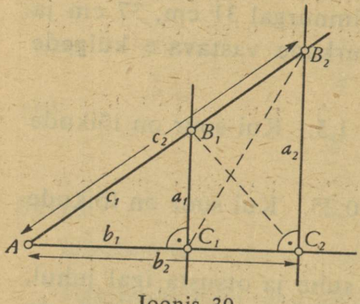
Võrdeliste sirglõikude joonestamist sirkli ja joonlaua abil võimaldab järgnev teoreem:

nurga haarade lõikamisel sirgetega, mis on risti nurga ühe haaraga, tekivad võrdeliste külgedega kolmnurgad.

Eeldus: $B_1C_1 \perp AC_1$ ja $B_2C_2 \perp AC_2$ (joonis 30).

Väide: $\frac{AB_1}{AB_2} = \frac{B_1C_1}{B_2C_2} = \frac{AC_1}{AC_2}$.

T õ e s t u s. Tähistame $\triangle AB_1C_1$ külgede pikkused sümbolitega a_1, b_1, c_1 ja $\triangle AB_2C_2$ külgede pikkused sümbolitega a_2, b_2, c_2 (joonis 30). Ühendame punkti B_1 punktiga C_2 ja punkti C_1 punktiga B_2. Siis $\triangle B_1C_1C_2$ on pindvõrdne $\triangle$-ga $B_1C_1B_2$, sest neil on ühine alus a_1 ja võrdsed kõrgused, nimelt paralleelide B_1C_1 ja B_2C_2 vaheline kaugus. Liites nende kolmnurkadega ühe ja sama kolmnurga AB_1C_1, saame pindvõrdsed kolmnurgad AB_1C_2 ja AB_2C_1. Neist esimese pindala on $\frac{a_1 \cdot b_2}{2}$ ja teise pindala on $\frac{a_2 \cdot b_1}{2}$. Seega



Joonis 30.

$$\frac{a_1 \cdot b_2}{2} = \frac{a_2 \cdot b_1}{2},$$

millest järeldub, et

$$a_1 \cdot b_2 = a_2 \cdot b_1;$$

jagades selle võrduse mõlemad pooled korrutisega a_2b_2, saame peale taandamist

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$$

ehk

$$\frac{B_1C_1}{B_2C_2} = \frac{AC_1}{AC_2}.$$

Seega $\triangle AC_1B_1$ ja $\triangle AC_2B_2$ vastavate kaatetite suhted on võrdsed; et ka hüpotenuuside suhe on niisama suur, seda tõestame järgmiselt.

Tähistame vastavate kaatetite suhte tähega k; seega

$$\frac{a_1}{a_2} = k \quad \text{ja} \quad \frac{b_1}{b_2} = k;$$

sellest järeldub, et

$$a_1 = ka_2 \quad \text{ja} \quad b_1 = kb_2$$

ning seega

$$a_1^2 = k^2a_2^2 \quad \text{ja} \quad b_1^2 = k^2b_2^2.$$

Et Pythagorase teoreemi järgi kolmnurgas AB_1C_1

$$c_1^2 = a_1^2 + b_1^2,$$

siis, asendades a_1^2 ja b_1^2 ülalleitud avaldistega, saame:

$$c_1^2 = k^2a_2^2 + k^2b_2^2$$

ehk

$$c_1^2 = k^2(a_2^2 + b_2^2).$$

Sulgudes olev avaldis Pythagorase teoreemi järgi on c_2^2; seega

$$c_1^2 = k^2c_2^2$$

ja

$$c_1 = kc_2,$$

millest

$$\frac{c_1}{c_2} = k.$$

Seega hüpotenuuside suhe on samuti k. Kokkuvõttes

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2},$$

m. o. t. t.

Ülesanded.

105. Täisnurkses kolmnurgas on joonestatud mõlema kaateti keskristsirged. Kus need sirged lõikuvad?

106. Täisnurkses kolmnurgas kaatetitega 4,8 cm ja 14 cm on joonestatud ühe kaatetiga paralleelne lõik nii, et saadud uue kolmnurga hüpotenuus on 11,1 cm. Kui pikad on uue kolmnurga kaatetid?

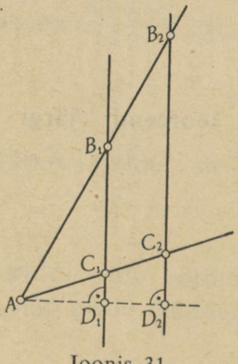
§ 21. Kiirteteoreem.

Tõestame nüüd, et üldiselt

nurga haarade lõikamisel paralleelsete sirgetega tekivad võrdeliste külgedega kolmnurgad.

Eeldus: $B_1C_1 \parallel B_2C_2$ (joonis 31).

Väide: $\frac{AB_1}{AB_2} = \frac{B_1C_1}{B_2C_2} = \frac{AC_1}{AC_2}$.



Joonis 31.

Tõestus. Joonestame antud nurga tipust A ristsirge AD_1 sirgele B_1C_1. Et AD_1 ristub ka sirgega B_2C_2, siis tekib kaks paari võrdeliste külgedega täisnurkseid kolmnurki: üks paar on $\triangle AB_1D_1$ ja $\triangle AB_2D_2$, teine paar on $\triangle AC_1D_1$ ja $\triangle AC_2D_2$. Neil kolmnurkade paaridel on üks paar ühiseid külgi, nimelt AD_1 ja AD_2; järelikult on neil kolmnurkadel kõik vastavate külgede suhted võrdsed:

$$\frac{AB_1}{AB_2} = \frac{B_1D_1}{B_2D_2} = \frac{AD_1}{AD_2} = \frac{C_1D_1}{C_2D_2} = \frac{AC_1}{AC_2}.$$

Seega teoreemi väitest on tõestatud esimese ja viimase suhte võrdsus ja tuleb tõestada veel, et ka suhe $\frac{B_1C_1}{B_2C_2}$ on niisama suur. Tähistame suhte $\frac{AB_1}{AB_2}$ tähega k. Siis

$$\frac{B_1D_1}{B_2D_2} = k \quad \text{ja} \quad \frac{C_1D_1}{C_2D_2} = k,$$

millest

$$B_1D_1 = k \cdot B_2D_2 \quad \text{ja} \quad C_1D_1 = k \cdot C_2D_2.$$

Joonise järgi

$$B_1C_1 = B_1D_1 - C_1D_1.$$

Asendades B_1D_1 ja C_1D_1 eespool-saadud avaldisega, saame:

$$B_1C_1 = k \cdot B_2D_2 - k \cdot C_2D_2$$

ehk

$$B_1C_1 = k(B_2D_2 - C_2D_2).$$

Et joonise järgi $B_2D_2 - C_2D_2 = B_2C_2$, siis

$$B_1C_1 = k \cdot B_2C_2,$$

millest

$$\frac{B_1C_1}{B_2C_2} = k.$$

Seega

$$\frac{AB_1}{AB_2} = \frac{B_1C_1}{B_2C_2} = \frac{AC_1}{AC_2},$$

m. o. t. t.

Kui läbi nurga tipu A joonestada veel mingi sirgete paar, siis paralleelid B_1C_1 ja B_2C_2 lõikavad ka neid nii, et tekib võrdeliste külgedega kolmnurkade paar (joonis 32). Ühest punktist lähtuvad sirged moodustavad nn. k i i r t e k i m b u. Seepärast võime eespool-tõestatud teoreemi sõnastada ka järgmiselt:

kiirte kimbu lõikamisel kahe paralleelse sirgega tekivad võrdeliste külgedega kolmnurkade paarid iga kahe kiire vahel.

Seda teoreemi saab üldistada, kui kahe paralleeli asemel võtame neid enam (joonis 33). Saab tõestada, et

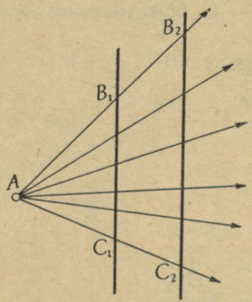
paralleelid lõikavad kiirte kimpu nii, et lõigud, mis tekivad ühel kiirel, on võrdelised lõikudega, mis tekivad teisel kiirel.

Eeldus: paralleelid tekitavad ühel kiirel lõigud $a_1, a_2, a_3, \ldots$ ja teisel kiirel vastavalt lõigud $b_1, b_2, b_3, \ldots$

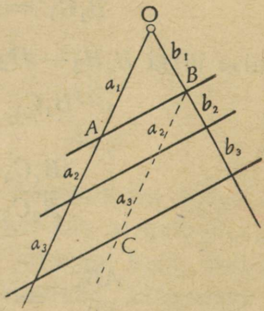
Väide: $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \ldots$

Tõestus. Eelmise teoreemi järgi (joonis 33)

$$\frac{a_1 + a_2}{a_1} = \frac{b_1 + b_2}{b_1};$$



Joonis 32.



Joonis 33.

jagades lugejaid nimetajatega saame

$$1 + \frac{a_2}{a_1} = 1 + \frac{b_2}{b_1};$$

lahutades selle võrduse mõlemast poolest 1, jääb

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1};$$

vahetades selle võrde sisemised liikmed ja peale selle võrde pooled, saame võrde.

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}.$$

Joonestame nüüd läbi punkti B abisirge BC nii, et $BC \parallel OA$. Et rööpküliku vastasküljed on võrdsed, siis jaotavad paralleelid kiire BC lõikudeks, mis vastavalt on võrdsed lõikudega a_2, a_3, ... (joonis 33). Et eelmine võrre on kehtiv ka punktist B lähtuvate kiirte lõikude kohta, siis

$$\frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}.$$

Ühendades kaks viimast võrret, saame

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}.$$

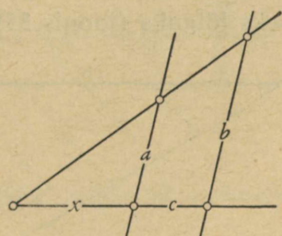
Uusi abisirgeid joonestades võib väidet samal viisil tõestada iga sirglõikude paari kohta lõikajate vahel.

Ülesanded.

107. Kolmnurga küljed on 12 cm, 18 cm ja 20 cm. Kõige pikemale küljele on joonestatud paralleel, mis poolitab kõige lühema külje. Kui pikad on väiksema kolmnurga küljed?

108. Joonises 34 $a = 21$ cm, $b = 33$ cm ja $c = 6$ cm. Kui pikk on sirglõik x, kui $a \parallel b$?

109. Kui pikk on sirglõik x joonisel 34, kui $b = 1{,}5\,a$ ja $c = 0{,}4\,b$?



Joonis 34.

110. Kolm ühest ja samast punktist lähtuvat kiirt on lõigatud kolme paralleeliga, mis esimesel kiirel tekitavad lõigud 3,5 cm, 1,6 cm ja 2,4 cm. Teise ja kolmanda kiire lõigud kiirte otspunktist esimese paralleelini on vastavalt 3 cm ja 4 cm. Kui pikad on nende kiirte lõigud paralleelide vahel?

§ 22. Kiirteteoreemi rakendusi.

Kui nurga haarasid lõigata mitme rööpsirgega nii, et ühel haaral tekivad võrdsed lõigud, siis tekivad ka teisel haaral võrdsed lõigud; tõepoolest, kui joonisel 33

$$a_1 = a_2 = a_3 = \ldots,$$

siis

$$b_1 = b_2 = b_3 = \ldots,$$

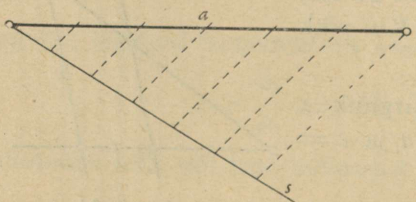
sest kui võrdsete murdude

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \ldots$$

lugejad on võrdsed, siis on seda ka nimetajad. Seetõttu nurga haarade lõikamine paralleelsete sirgetega võimaldab

jaotada antud sirglõigu sirkli ja joonlaua abil *n* võrdseks lõiguks.

L a h e n d u s. Et jaotada lõik a näiteks 6-ks võrdseks lõiguks (joonis 35), võetakse läbi a ühe otspunkti abisirge s, märgitakse sellel 6 võrdset lõiku, ühendatakse punkt, milleni jõutakse, sirglõigu a teise otspunktiga ja joonestatakse sellele ühenduslõigule paralleelid läbi abisirgel märgitud punktide. Need paralleelid jaotavad lõigu a kuueks võrdseks lõiguks.



Joonis 35.

Võrde kolme liikmega on neljas määratud; kui näiteks kolm esimest liiget a, b ja c on antud, siis neljanda liikme võib arvutada järgmiselt: et

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x},$$

siis võrde peaomaduse põhjal

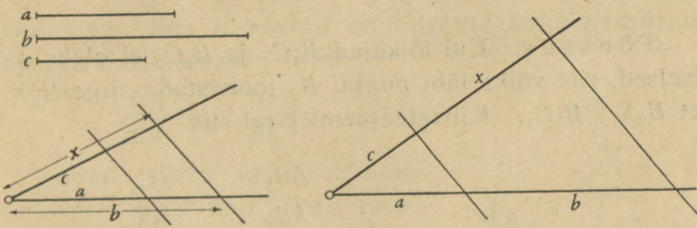
$$ax = bc$$

ja seega

$$x = \frac{bc}{a}.$$

Selle ülesande geomeetrilist lahendamist nimetatakse kolmele sirglõigule neljanda võrdelise leidmiseks.

Lahendus. Kanname vabalt võetud nurga ühele haarale, alates tipust, lõigud a ja b ning teisele haarale lõigu c. Läbi lõigu b otspunkti joonestame paralleeli sirgele, mis läbib lõikude a ja c otspunkte. Lõigule b vastav lõik nurga teisel haaral ongi otsitav lõik x (joonis 36).



Joonis 36.

Ülesanded.

111. Jaota vabalt võetud sirglõik sirkli ja joonlaua abil viieks võrdseks lõiguks.

112. Leia neljas võrdeline sirglõikudele $a = 3{,}2$ cm, $b = 4{,}8$ cm ja $c = 4{,}2$ cm nii arvutamise kui ka joonestamise teel.

113. Tõesta, et täisnurkse kolmnurga hüpotenuusile vastav kõrgus on hüpotenuusi ja kaatetite neljas võrdeline.

114. Võrdhaarse trapetsi alused on 14 cm ja 9 cm ning haarad 7 cm. Kui palju tuleb haarasid pikendada, et nad lõikuksid?

115. Trapetsi alused on 6 cm ja 3,2 cm ning haarad on 3 cm ja 2,5 cm. Kui palju tuleb kumbagi haara pikendada, et nad lõikuksid?

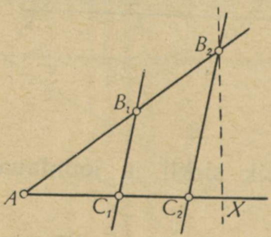
§ 23. Kiirteteoreemi pöördteoreem.

Kui kaks sirget lõikab nurga haarasid nii, et lõigud nurga tipust ühe lõikajani on võrdelised lõikudega nurga tipust teise lõikajani, siis lõikajad on paralleelsed.

Eeldus: $\frac{AB_1}{AB_2} = \frac{AC_1}{AC_2}$ (joonis 37).

Väide: $B_1C_1 \parallel B_2C_2$.

Tõestus. Kui lõikajad B_1C_1 ja B_2C_2 ei oleks paralleelsed, siis võiks läbi punkti B_2 joonestada sirge B_2X nii, et $B_2X \parallel B_1C_1$. Kiirteteoreemi järgi siis



Joonis 37.

$$\frac{AB_1}{AB_2} = \frac{AC_1}{AX};$$

kuid eelduse järgi

$$\frac{AB_1}{AB_2} = \frac{AC_1}{AC_2}.$$

Nende kahe võrde võrdlemisel selgub, et $AX = AC_2$, mis on võimalik ainult siis, kui punktid X ja C_2 ühtivad. Kuid siis ühtivad ka sirged B_2C_2 ning B_2X, millest järeldub, et $B_2C_2 \parallel B_1C_1$, nagu seda oletasime sirgest B_2X.

Kiirteteoreemi pöördteoreemi abil on võimalik otsustada kahe sirge paralleelsust.

§ 24. Kolmnurga sisenurga poolitaja.

Kolmnurga sisenurga poolitaja lõikub selle nurga vastasküljega. Tõestame, et

sisenurga poolitaja jaotab vastaskülje lõikudeks, mis on võrdelised selle nurga lähiskülgedega.

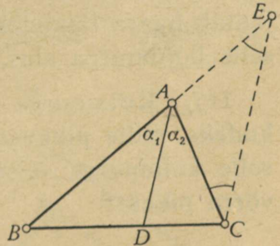
Eeldus: $\triangle$-s ABC on AD nurga A poolitaja (joonis 38).

Väide: $\frac{BD}{BA} = \frac{CD}{CA}$.

Tõestus. Joonestame läbi punkti C paralleeli nurgapoolitajale AD ja leiame selle lõikepunkti E külje BA pikendusega. Siis $\hat{B}$ haarad on lõigatud kahe paralleeliga ja seega kiirteteoreemi järgi

$$\frac{BD}{BA} = \frac{DC}{AE}.$$

Saadud võrre erineb väites nõutavast ainult ühe liikme poolest. Kui läheks korda näidata, et $AE = AC$, siis olekski väide tõestatud. Et see ongi nii, seda tõestame järgmiselt.



Joonis 38.

Kui vastavad nurgad paralleelide AD ja EC juures

$$\hat{E} = \alpha_1;$$

kui põiknurgad samade paralleelide juures

$$\hat{C} = \alpha_2;$$

et eelduse järgi

$$\alpha_1 = \alpha_2,$$

siis ka

$$\hat{E} = \hat{C}.$$

Sellest järeldub, et $\triangle$ AEC nurkade E ja C vastasküljed AE ja AC on võrdsed. Järelikult võib eespoolsaadud võrdes

$$\frac{BD}{BA} = \frac{DC}{AE}$$

asendada lõigu AE lõiguga AC; sellega saame, et

$$\frac{BD}{BA} = \frac{DC}{AC},$$

m. o. t. t.

J ä r e l d u s: kui viimases võrdes $BA = AC$, siis $BD = DC$; seega võrdhaarse kolmnurga tipunurga poolitaja on ühtlasi aluse poolitaja.

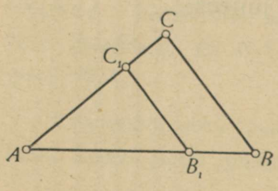
Ülesanded.

116. Võrdhaarse kolmnurga aluse lähisnurga poolitaja jaotab haara lõikudeks pikkusega 5 cm ja 4 cm. Arvuta selle kolmnurga alus, kui ta on haarast lühem.

117. Kolmnurga nurgapoolitaja jaotab vastaskülje lõikudeks, mille pikkused on 3 cm ja 5 cm. Kui pikad on selle kolmnurga teised küljed, kui üks on teisest 6 cm võrra pikem?

§ 25. Sarnased hulknurgad.

Kiirteteoreemi järgi nurga haarade lõikamisel kahe paralleelse sirgega tekivad võrdeliste külgedega kolmnurgad. Näitame nüüd, et nende kolmnurkade vastavad nurgad on võrdsed. Tõepoolest, kui joonisel 39 $BC \parallel B_1C_1$, siis kolmnurkade ABC ja AB_1C_1 nurkadest



Joonis 39.

$$\hat{B} = \hat{B}_1$$

ja

$$\hat{C} = \hat{C}_1$$

kui vastavad nurgad, mis tekivad kahe paralleelse sirge lõikamisel kolmandaga. Kolmas nurk neil kolmnurkadel on ühine.

Seega $\triangle ABC$ ja $\triangle AB_1C_1$ on vastavalt võrdsete nurkadega ja võrdeliste külgedega. Niisuguseid kolmnurki nimetatakse s a r n a s t e k s. Üldiselt:

hulknurki nimetatakse sarnasteks, kui ühe hulknurga nurgad on võrdsed teise hulknurga vastavate nurkadega ja küljed on võrdelised teise hulknurga külgedega.

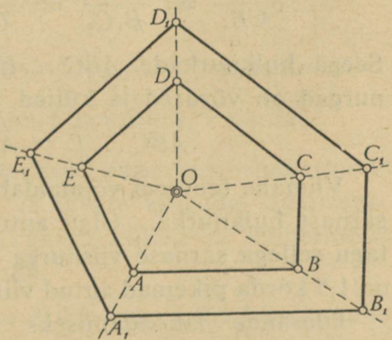
Hulknurkade sarnasuse märkimiseks kasutatakse sümbolit $\sim$. Tõestame, et

kaks hulknurka on sarnased, kui ühe hulknurga küljed on paralleelsed teise hulknurga vastavate külgedega ja nende hulknurkade vastavaid tippe läbivad sirged lõikuvad ühes ja samas punktis.

E e l d u s : $AB \parallel A_1B_1$, $BC \parallel B_1C_1, \ldots EA \parallel E_1A_1$; sirged AA_1, $BB_1, \ldots EE_1$ läbivad ühist punkti O (joonis 40).

V ä i d e : $ABC \ldots E \sim A_1B_1C_1 \ldots E_1$.

T õ e s t u s. Väite tõestamiseks on vaja näidata, et nende hulknurkade vastavad nurgad on võrdsed ja küljed on võrdelised. Nende hulknurkade mistahes kaks vastavat nurka on võrdsed, sest nad on vastavalt paralleelsete ja samasuunaliste haaradega nurgad. Näiteks $\hat{A} = \hat{A}_1$,



Joonis 40.

sest eelduse järgi nende nurkade haaradest

$$AB \parallel A_1B_1 \quad \text{ja} \quad AE \parallel A_1E_1$$

ning joonise järgi need haarad on samasuunalised.

Tõestame nüüd, et kõnesolevate hulknurkade küljed on võrdelised. Et eelduse järgi

$$AB \parallel A_1B_1 \quad \text{ja} \quad BC \parallel B_1C_1,$$

siis kiirteteoreemi põhjal

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BO}{B_1O} \quad \text{ja} \quad \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{BO}{B_1O}.$$

Et nende võrrete paremad pooled on võrdsed, siis on võrdsed ka vasakud pooled; seega

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}.$$

Samal viisil tõestust jätkates saame

$$\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1}; \quad \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{DE}{D_1E_1}; \ \ldots$$

ehk, kokkuvõetult,

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \ldots = \frac{EA}{E_1A_1}.$$

Seega hulknurkade $ABC\ldots E$ ja $A_1B_1C_1\ldots E_1$ vastavad nurgad on võrdsed ja küljed võrdelised, mistõttu

$$ABC\ldots E \sim A_1B_1C_1\ldots E_1.$$

Viimane teoreem võimaldab ehitada antud hulknurgaga sarnast hulknurka. Olgu antud viisnurk $ABCDE$ ja nõutagu sellega sarnase viisnurga ehitamist nii, et selle küljed on 1,5 korda pikemad antud viisnurga külgedest (joonis 40).

Ülesande lahendamiseks joonestame vabalt valitud punktist O kiired läbi antud hulknurga tippude, võtame ühel kiirel, näiteks OA, punkti A_1 nii, et

$$OA_1 = 1{,}5 \cdot OA,$$

ja lähtudes punktist A_1 joonestame hulknurga $A_1B_1C_1D_1E_1$ nii, et selle küljed on paralleelsed antud hulknurga vastavate külgedega. Viimati tõestatud teoreemi järgi on uus hulknurk endisega sarnane, kusjuures nende vastavate külgede jagatis on 1,5, sest konstruktsiooni järgi

$$\frac{A_1O}{AO} = 1,5.$$

Antud hulknurgaga sarnase hulknurga joonestamist nimetatakse ka h u l k n u r g a s u u r e n d a m i s e k s või v ä h e n d a m i s e k s vastavalt sellele, kas uue hulknurga küljed on suuremad või väiksemad antud hulknurga külgedest. Seega

suurendada hulknurk *n* korda tähendab joonestada antud hulknurgaga sarnane hulknurk *n* korda pikemate külgedega.

Hulknurga suurendamiseks või vähendamiseks vabalt võetud punkt O joonisel 40 ei tarvitse asetseda antud hulknurga sees; ta võib olla ka selle küljel, tipus või väljaspool hulknurka.

Ülesanded.

118. Suurenda vabalt võetud viisnurk 2 korda.

119. Vähenda vabalt võetud kuusnurk 3 korda.

120. Tõesta, et kahe sarnase hulknurga ümbermõõtude jagatis võrdub nende vastavate külgede jagatisega. Näpunäide: avalda ühe hulknurga küljed ja ümbermõõt teise hulknurga külgede kaudu.

121. Joonesta täisnurkne kolmnurk, mille hüpotenuus $c = 5,6$ cm ja mille kaatetite suhe on 0,6.

122. Täisnurkse kolmnurga hüpotenuus $c = 8,5$ cm ja kaatet $b = 3,6$ cm. Teise, eelmisega sarnase kolmnurga kõige lühema külje pikkus on 2,4 cm. Kui pikad on viimase kolmnurga teised küljed?

123. DIN-formaadi paberilehtede iga järgmine väiksem formaat saadakse eelmise formaadi poolitamise teel. Kõik formaadid on üksteisega sarnased. Näita, et DIN-formaadi mõõtmete suhe on $1 : \sqrt{2}$.

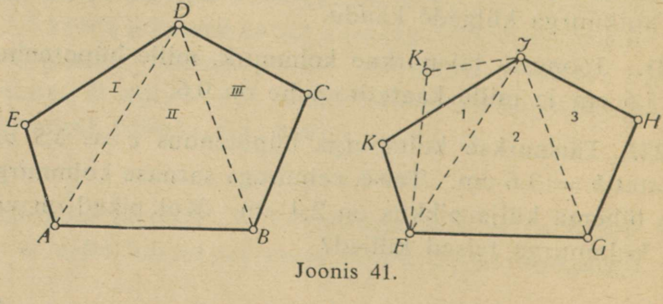
§ 26. Hulknurkade sarnasuse tunnuseid.

Eespool nägime, et kaks hulknurka on sarnased, kui ühe hulknurga küljed on paralleelsed teise hulknurga vastavate külgedega ja nende vastavaid tippe läbivad sirged lõikuvad ühes ja samas punktis. Vaatleme nüüd hulknurkade sarnasuse tunnuseid juhul, kui hulknurgad ei ole niisuguses asendis.

Kõige kergem on otsustada korrapäraste hulknurkade sarnasust:

kaks korrapärast hulknurka on sarnased, kui neil on ühepalju tippe,

sest kahe korrapärase n-nurga nurgad on vastavalt võrdsed ja ka küljed on võrdelised. Nii on kõik korrapärased 5-nurgad sarnased, kõik korrapärased 8-nurgad sarnased jne. Teiste hulknurkade sarnasuse otsustamiseks, kui see teisiti pole võimalik, tükeldatakse nad kolmnurkadeks; seda tükeldamist võib toimetada näiteks diagonaalidega, mis lähtuvad ühest paarist vastavatest tippudest. Kui hulknurki saab tükeldada ühesuuruseks arvuks kolmnurkadeks, mis on sarnased ja ühel viisil asetatud, siis hulknurgad on sarnased. Nii on joonisel 41 kujutatud hulk-



Joonis 41.

nurk $ABCDE$ sarnane hulknurgaga $FGHIK$, kui on sarnased kolmnurgad I ja 1, II ja 2, III ja 3, sest sel juhul on sarnased kolmnurgad ühel viisil asetatud. Kuid sama hulknurk $ABCDE$ ei ole sarnane hulknurgaga $FGHIK_1$, sest kolmnurga 1 asetus ei vasta kolmnurga I asetusele.

Sellest selgub, et hulknurkade sarnasuse otsustamiseks on vaja tunda kolmnurkade sarnasuse tunnuseid. Neid on neli, nagu võrdsusetunnuseidki.

Ülesanded.

124. Millal on kaks ruutu sarnased?

125. Millal on kaks rombi sarnased?

126. Millal on kaks ristkülikut sarnased?

127. Kolmnurgas, mille külgede pikkused on 14,8 cm, 10,6 cm ja 12,4 cm, on joonestatud rööpsirge kõige lühemale küljele. Saadud uues kolmnurgas on kõige pikem külg 9,62 cm. Kui pikad on uue kolmnurga teised küljed?

§ 27. Kolmnurkade sarnasuse I tunnus.

Kaks kolmnurka on sarnased, kui ühe kolmnurga kaks nurka on võrdsed teise kolmnurga vastavate nurkadega.

Eeldus: $\hat{A} = \hat{D}$, $\hat{B} = \hat{E}$ (joonis 42).

Väide: $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

Tõestus. Paigutame $\triangle DEF$ nii $\triangle ABC$ peale, et nurgad D ja A ühtiksid ja külg DE läheks mööda külge AB; $\triangle DEF$ tuleb siis asendisse AKL. Et

$$\hat{B} = \hat{E} = \hat{K},$$

siis

$$BC \parallel KL,$$

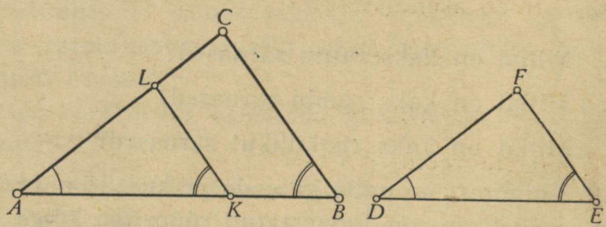
sest nende lõikamisel sirgega AB on tekkinud võrdsed vastavad nurgad. Kuid siis on $\widehat{CAB}$ haarad lõigatud kahe paralleelse sirgega ja järelikult

$$\triangle ABC \sim \triangle AKL.$$

Et $\triangle AKL$ on võrdne $\triangle$-ga DEF, siis ka

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF,$$

m. o. t. t.



Joonis 42.

Ülesanded.

128. Kuidas sõnastada kolmnurkade sarnasuse I tunnust täisnurksete kolmnurkade juhul, kuidas võrdhaarsete kolmnurkade juhul?

129. Trapetsi üks alus on pool teisest alusest; tõesta, et diagonaalid lõikuvad punktis, mis eraldab neist ühe kolmandiku.

3a 130. Tõesta, et täisnurkse kolmnurga kõrgus jaotab kolmnurga kaheks sarnaseks kolmnurgaks, ja tuleta sellest valem $h^2 = f \cdot g$.

131. Tõesta, et täisnurkse kolmnurga kõrgus tükeldab antud kolmnurga kaheks kolmnurgaks, mis on sarnased antud kolmnurgaga. Järelda sellest Eukleidese teoreem.

§ 28. Kolmnurkade sarnasuse II tunnus.

Kaks kolmnurka on sarnased, kui ühe kolmnurga üks nurk on võrdne teise kolmnurga ühe nurgaga ja nende nurkade lähisküljed on võrdelised.

Eeldus: $\hat{A} = \hat{D}$; $AB : DE = AC : DF$ (joonis 42).

Väide: $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

Tõestus. Paigutame $\triangle DEF$ nii $\triangle ABC$ peale, et nurgad D ja A ühtiksid ja külg DE läheks mööda külge AB; siis $\triangle DEF$ tuleb asendisse AKL. Et eelduse järgi

$$AB : DE = AC : DF,$$

siis ka

$$AB : AK = AC : AL$$

ja seega kiirteteoreemi pöördteoreemi järgi

$$BC \parallel KL.$$

Kuid siis on $C\hat{A}B$ haarad lõigatud kahe paralleelse sirgega, mistõttu

$$\triangle ABC \sim \triangle AKL.$$

Et $\triangle AKL$ on võrdne $\triangle$-ga DEF, siis ka

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF,$$

m. o. t. t.

Ülesanded.

132. Kuidas sõnastada kolmnurkade sarnasuse II tunnust täisnurksete kolmnurkade juhul?

133. Tõesta, et kolmnurga kahe külje keskpunkte ühendav lõik on pool kolmandast küljest ja on paralleelne sellega.

134. Tõesta, et kolmnurga kaks küljepoolitajat lõikuvad punktis, mis eraldab neist ühe kolmandiku. Järelda sellest, et kolmnurga kolm küljepoolitajat lõikuvad ühes ja samas punktis.

§ 29. Kolmnurkade sarnasuse III tunnus.

Kaks kolmnurka on sarnased, kui ühe kolmnurga küljed on võrdelised teise kolmnurga külgedega.

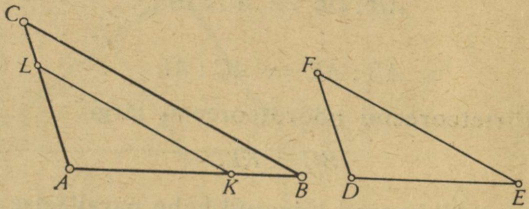
Eeldus: $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$ (joonis 43).

Väide: $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

Tõestus. Mõõdame $\triangle ABC$ külgedel, alates tipust A, sirglõigud

$$AK = DE \quad \text{ja} \quad AL = DF$$

ning ühendame punktid K ja L. Nii saadud $\triangle AKL$ kohta



Joonis 43.

näitame, et ta on sarnane $\triangle$-ga ABC ja võrdne $\triangle$-ga DEF. Eelduse järgi

$$AB : DE = AC : DF.$$

Konstruktsiooni järgi viimase võrde liikmeist

$$DE = AK \quad \text{ja} \quad DF = AL.$$

Asendades saame, et

$$AB : AK = AC : AL,$$

Sellest järeldub kiirteteoreemi pöördteoreemi põhjal, et

$$BC \parallel KL.$$

Seega

$$\triangle ABC \sim \triangle AKL.$$

Et sarnaste kolmnurkade küljed on võrdelised, siis

$$AB : AK = BC : KL.$$

Et $AK = DE$, siis võime AK asendada DE-ga ja seega

$$AB : DE = BC : KL.$$

Eelduse järgi

$$AB : DE = BC : EF.$$

Et kaks viimast võrret erinevad ainult viimase liikme poolest, siis $KL = EF$. Nüüd järgneb kolmnurkade võrdsuse tunnuse kkk põhjal, et

$$\triangle AKL = \triangle DEF.$$

Eespool saime, et

$$\triangle ABC \sim \triangle AKL.$$

Asendades kolmnurga AKL kolmnurgaga DEF saame, et

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF,$$

m. o. t. t.

§ 30. Kolmnurkade sarnasuse IV tunnus.

Kaks kolmnurka on sarnased, kui ühe kolmnurga kaks külge on võrdelised teise kolmnurga kahe küljega ja nurk, mis ühes kolmnurgas asetseb nimetatud küljepaari suurema külje vastas, võrdub vastava nurgaga teises kolmnurgas.

Eeldus: $AB : DE = AC : DF$; $AB > AC$ ja seega ka $DE > DF$; $\hat{C} = \hat{F}$.

Väide: $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ (joonis 43).

Tõestus. Mõõdame $\triangle ABC$ külgedel, alates punktist A, sirglõigud

$$AK = DE \quad \text{ja} \quad AL = DF$$

ning ühendame punktid K ja L. Nii saadud $\triangle AKL$ kohta näitame, et ta on sarnane $\triangle$-ga ABC ja võrdne $\triangle$-ga DEF.

Eelduse järgi

$$AB : DE = AC : DF.$$

Konstruktsiooni järgi selle võrde liikmeist

$$DE = AK \quad \text{ja} \quad DF = AL.$$

Asendades saame, et

$$AB : AK = AC : AL.$$

Sellest järeldub kiirteteoreemi pöördteoreemi põhjal, et

$$BC \parallel KL.$$

Kuid siis

$$\triangle ABC \sim \triangle AKL.$$

Sellest järeldub, et

$$\hat{C} = \hat{L};$$

et eelduse järgi

$$\hat{C} = \hat{F},$$

siis

$$\hat{L} = \hat{F}.$$

Kolmnurkade võrdsuse tunnuse KkN järgi siis

$$\triangle AKL = \triangle DEF.$$

Eespool saime, et

$$\triangle ABC \sim \triangle AKL,$$

millest nüüd järeldame, et

$$\triangle ABC \sim DEF,$$

m. o. t. t.

Ülesanded.

135. Külgede pikkused on ühel kolmnurgal 2,5 m, 4 m ja 3,75 m ning teisel kolmnurgal 75 cm, 80 cm ja 50 cm. Kas need kolmnurgad on sarnased?

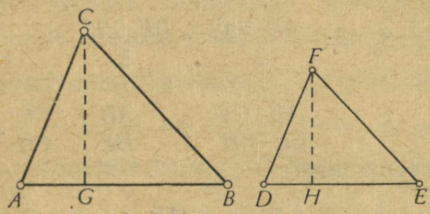
136. Kuidas sõnastada sarnasuse IV tunnust täisnurksete kolmnurkade juhul?

§ 31. Sarnaste kolmnurkade kõrgused.

Sarnaste kolmnurkade vastavate kõrguste jagatis on võrdne vastavate aluste jagatisega.

E e l d u s: $\triangle ABC \sim \triangle DEF$; CG ja FH on vastavad kõrgused.

V ä i d e: $CG : FH = AB : DE$ (joonis 44).



Joonis 44.

T õ e s t u s. Eelduse järgi kolmnurkades AGC ja DHF

$$\hat{A} = \hat{D} \quad \text{ja} \quad \hat{G} = \hat{H} = 90^0;$$

seega kolmnurkade sarnasuse I tunnuse järgi

$$\triangle AGC \sim \triangle DHF,$$

millest järeldub, et

$$CG : FH = AC : DF.$$

Et eelduse järgi $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, siis

$$AB : DE = AC : DF.$$

Neist kahest võrdusest järeldub, et

$$CG : FH = AB : DE,$$

m. o. t. t.

§ 32. Sarnaste kolmnurkade pindalad.

Sarnaste kolmnurkade pindalade jagatis on võrdne vastavate küljede jagatise ruuduga.

E e l d u s: $\triangle ABC \sim \triangle DEF$; CG ja FH on vastavad kõrgused (joonis 44).

Väide: $S_1 : S_2 = (AB : DE)^2$, kus S_1 on $\triangle ABC$ pindala ja S_2 on $\triangle DEF$ pindala.

Tõestus. Avaldame kolmnurkade pindalad aluse ja kõrguse kaudu; siis

$$S_1 = \frac{AB \cdot CG}{2} \quad \text{ja} \quad S_2 = \frac{DE \cdot FH}{2}$$

Seega

$$S_1 : S_2 = \frac{AB \cdot CG}{2} : \frac{DE \cdot FH}{2}$$

ehk

$$S_1 : S_2 = \frac{AB \cdot CG}{DE \cdot FH} = \frac{AB}{DE} \cdot \frac{CG}{FH}.$$

Eelmise teoreemi järgi

$$\frac{CG}{FH} = \frac{AB}{DE};$$

seepärast

$$S_1 : S_2 = \frac{AB}{DE} \cdot \frac{AB}{DE}$$

ehk

$$S_1 : S_2 = (\frac{AB}{DE})^2,$$

m. o. t. t.

Olgu kolmnurkade ABC ja DEF vastavate külgede suhe k; siis

$$S_1 : S_2 = k^2$$

ja

$$S_1 = k^2 \cdot S_2.$$

Seega

kui kolmnurka suurendada k korda, siis kolmnurga pindala suureneb k^2 korda.

Ülesanded.

137. Kolmnurga külg $a = 5$ dm ja sellele küljele joonestatud kõrgus $h = 3{,}5$ dm. Teise, eelmisega sarnase kolmnurga külg $a_1 = 3$ dm. Arvuta kolmnurkade pindalad.

138. Kahe sarnase kolmnurga vastavate külgede suhe on 2,5. Väiksema kolmnurga pindala on 18,4 dm². Leia suurema kolmnurga pindala.

139. Kahe sarnase kolmnurga pindalade suhe on 1,96. Suurema kolmnurga küljed on 75,6 cm, 91 cm ja 119 cm. Kui pikad on teise kolmnurga küljed?

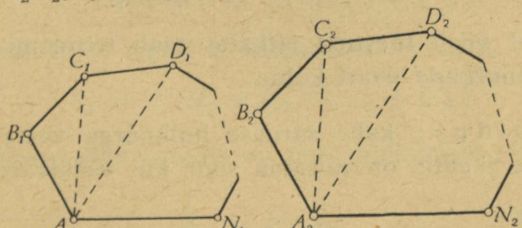
140. Kahe sarnase kolmnurga pindalade vahe on 60 cm² ja nende kolmnurkade vastavate külgede suhe on $\frac{3}{2}$. Arvuta nende kolmnurkade pindalad.

§ 33. Sarnaste hulknurkade diagonaalid.

Diagonaalid, mis lähtuvad kahe sarnase hulknurga ühest vastavate tippude paarist, jaotavad need hulknurgad paariti sarnasteks kolmnurkadeks.

E e l d u s : $A_1B_1C_1D_1 \ldots N_1 \sim A_2B_2C_2D_2 \ldots N_2$; A_1 ja A_2 on vastavad tipud.

V ä i d e : $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2$; $\triangle A_1C_1D_1 \sim \triangle A_2C_2D_2$; jne. (joonis 45).



Joonis 45.

T õ e s t u s. Et antud hulknurgad on sarnased, siis

$$A_1B_1 : A_2B_2 = B_1C_1 : B_2C_2$$

ja

$$\hat{B}_1 = \hat{B}_2.$$

Seega kolmnurkade sarnasuse II tunnuse järgi

$$\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2.$$

Sellest järeldame, et diagonaalide A_1C_1 ja A_2C_2 suhe on niisama suur kui antud hulknurga vastavate külgede suhe.

Eelduse järgi

$$B_1\hat{C}_1D_1 = B_2\hat{C}_2D_2;$$

kolmnurkade $A_1B_1C_1$ ja $A_2B_2C_2$ sarnasusest järeldub, et

$$B_1\hat{C}_1A_1 = B_2\hat{C}_2A_2.$$

Lahutades eelviimase võrduse pooltest viimase võrduse vastavad pooled, saame

$$A_1\hat{C}_1D_1 = A_2\hat{C}_2D_2.$$

Eespool selgus, et

$$A_1C_1 : A_2C_2 = C_1D_1 : C_2D_2.$$

Seega kolmnurkade sarnasuse II tunnuse järgi

$$\triangle A_1C_1D_1 \sim \triangle A_2C_2D_2.$$

Samal viisil tõestust jätkates saab teoreemi tõestada iga kolmnurkade paari kohta.

J ä r e l d u s : kahe sarnase hulknurga vastavate diagonaalide jagatis on niisama suur kui vastavate külgede jagatis.

§ 34. Sarnaste hulknurkade pindalad.

Sarnaste hulknurkade pindalade jagatis võrdub nende vastavate külgede jagatise ruuduga.

E e l d u s : $A_1B_1 \ldots N_1 \sim A_2B_2 \ldots N_2$; $A_1B_1 \ldots N_1$ pindala on S_1 ja $A_2B_2 \ldots N_2$ pindala on S_2.

Väide: $S_1 : S_2 = (A_1B_1 : A_2B_2)^2$ (joonis 45).

Tõestus. Diagonaalid, mis lähtuvad vastavatest tippudest A_1 ja A_2, jaotavad hulknurgad paariti sarnasteks kolmnurkadeks. Olgu esimese hulknurga jaotamisel saadud kolmnurkade pindalad

$$P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$$

ja teise hulknurga jaotamisel saadud kolmnurkade pindalad vastavalt

$$Q_1, Q_2, Q_3, \ldots, Q_n.$$

Siis

$$S_1 = P_1 + P_2 + P_3 + \ldots + P_n$$

ja

$$S_2 = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \ldots + Q_n.$$

Kui antud hulknurkade vastavate külgede jagatis on k, siis

$$P_1 = k^2Q_1, \; P_2 = k^2Q_2, \ldots$$

Seega

$$S_1 = k^2Q_1 + k^2Q_2 + \ldots + k^2Q_n$$

ehk, pärast ühise teguri k^2 sulgude ette viimist,

$$S_1 = k^2(Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_n).$$

Et sulgudesse jääv avaldis on teise hulknurga pindala S_2, siis

$$S_1 = k^2 \cdot S_2,$$

millest

$$S_1 : S_2 = k^2.$$

Tulemust võib sõnastada ka järgmiselt:

kui hulknurka suurendada k korda, siis hulknurga pindala suureneb k^2 korda.

141. Mitu korda suureneb hulknurga pindala selle hulknurga suurendamisel 2, 3, 4, 5 korda?

142. Mitu korda tuleb suurendada hulknurka, et selle pindala suureneks 4, 10, 16, 50, 100 korda?

143. Kahe sarnase ristküliku pindalade jagatis on 13,69 ja väiksema ristküliku mõõtmed on 2,9 cm ja 5,5 cm. Arvuta suurema ristküliku mõõtmed.

144. Kahe sarnase hulknurga pindalad on 180 cm^2 ja 80 cm^2. Arvuta suurema hulknurga ümbermõõt, kui väiksema hulknurga ümbermõõt on 48 cm.

145. Kahe ruudu pindalade vahe on 1 m^2 ja pindalade suhe on 2. Kui pikad on nende ruutude küljed?

§ 35. Teoreem ringjoone lõikajast.

Kasutades kolmnurkade sarnasust, saab tõestada järgmise teoreemi ringjoone lõikajast:

kui lõikaja pöördub mingi oma punkti ümber, siis ei muutu korrutis, mille teguriteks on eelnimetatud punkti kaugused ringjoone ja lõikaja ühistest punktidest.

Pöördugu lõikaja punkti S ümber ja olgu ringjoone ja lõikaja ühised punktid A ja B. Vaatleme selle lõikaja kaht asendit A_1B_1 ja A_2B_2 (joonis 46) ja tõestame, et

$$A_1S \cdot B_1S = A_2S \cdot B_2S.$$

Ühendame punkti A_1 punktiga B_2 ja punkti A_2 punktiga B_1 ning vaatleme kolmnurki A_1B_2S ja A_2B_1S. Igal juhul on neil kolmnurkadel üks paar võrdseid nurki, nimelt punkti S juures; kuid peale selle on neil võrdsed nurgad punktide B_2 ja B_1 juures, sest need on kas piirdenurgad, mis toetuvad ühele ja samale kaarele, või piirdenurk ja nurk puutuja ning kõõlu vahel. Seepärast kolmnurkade sarnasuse I tunnuse põhjal

$$\triangle A_1B_2S \sim \triangle A_2B_1S.$$

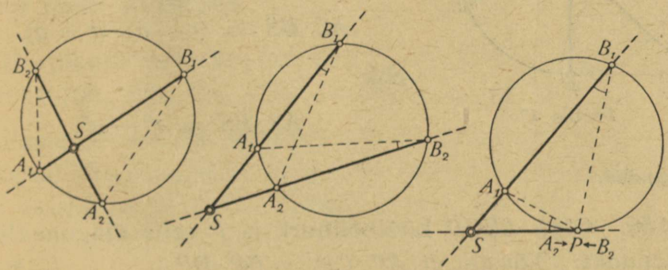
Sellest järeldub, et nende vastavate külgede jagatised on võrdsed, seega

$$A_1S : A_2S = B_2S : B_1S.$$

Võrde peaomaduse põhjal järeldub sellest, et

$$A_1S \cdot B_1S = A_2S \cdot B_2S,$$

m. o. t. t.



Joonis 46.

Punkti S läbiva lõikaja osade korrutis $AS \cdot BS$ ei muutu, kui lõikaja pöördub punkti S ümber, kuid muutub, kui punkt S muudab oma asukohta ringjoone suhtes. Lõikaja osade korrutise $AS \cdot BS$ arvutamiseks tähistame ringjoone raadiuse tähega r ja punkti kauguse ringjoone keskpunktist tähega a.

Kui punkt S asetseb väljaspool ringjoont, siis lõikaja osade korrutis võrdub puutuja lõigu ruuduga (joonis 46):

$$AS \cdot BS = PS^2.$$

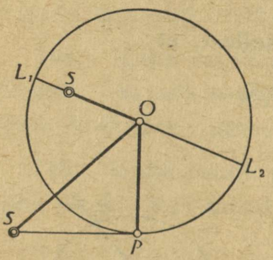
Et puutuja on risti puutepunktist lähtuva raadiusega, siis (joonis 47)

$$PS^2 = a^2 - r^2$$

ja seega sel juhul

$$AS \cdot BS = a^2 - r^2.$$

Kui punkt S asetseb ringjoone sees, siis on lõikaja osade korrutist kõige lihtsam arvutada seda punkti läbiva diameetri abil (joonis 47); sel juhul



Joonis 47.

$$AS \cdot BS = L_1S \cdot L_2S$$

ehk

$$AS \cdot BS = (r - a) \cdot (r + a)$$

ehk

$$AS \cdot BS = r^2 - a^2.$$

Ülesanded.

146. Olgu $ABCD$ kõõlnelinurk ja P selle diagonaalide lõikepunkt. Tõesta, et $AP \cdot CP = BP \cdot DP$.

147. Ringis, mille raadius $r = 8$ cm, on joonestatud 14 cm pikkune kõõl läbi punkti P, mis asetseb 5 cm kaugusel ringi keskpunktist. Kui pikkadeks lõikudeks jaotab punkt P selle kõõlu?

148. Punktis S lõikuvad ringjoone puutuja ja keskpunkti läbiv lõikaja. Punktist S on ringjoone lähima punktini 7 cm ja puutepunktini 12 cm. Kui kaugel punktist S asetseb ringjoone kõige kaugem punkt?

149. Tõesta, et kahe lõikuva ringjoone ühiseid punkte läbiv sirge poolitab nende ringjoonte ühise puutuja puutepunktide vahelise lõigu.

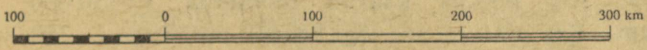
§ 36. Maa-alade plaanistamine.

Hulknurkade sarnasuse üheks rakendusalaks on maa-alade plaanistamine. Suuremate maa-alade, näiteks maailmajao, kaardistamisel tuleb arvestada maapinna kui kerapinna kõverust, kuid väiksemaid maa-alasid võib ilma suurema veata vaadelda kui tasapinnalisi kujundeid. Maa-ala plaanistada tähendab sel juhul maatükiga sarnase vähendatud kujundi joonestamist. Kui plaani joonestamisel on pikkused vähendatud n korda, siis plaanil iga pikkus on $\frac{1}{n}$ vastavast pikkusest looduses.

Plaani ja maatüki vastavate pikkuste jagatist $\frac{1}{n}$ või $1:n$ nimetatakse plaani arvmõõduks.

Harilikult valitakse arvuks n mingi ümmargune arv, näiteks 100, 250, 500, 1000, 1 000 000 või m. m.

Peale arvmõõdu on plaan või kaart harilikult veel varustatud joonmõõduga; joonis 48 kujutab joonmõõtu, millele vastav arvmõõt on 1 : 5 000 000.



Joonis 48.

Kaardi joonmõõt näitab vastavust kaardilt võetud pikkuse ja vastava loodusliku pikkuse vahel. Näiteks kaardil, mille joonmõõtu kujutab joonis 48, vastab lõigule punktide 0 ja 100 vahel pikkus 100 km.

Tuntakse mitmeid plaanistamisvõtteid. Järgnevalt on toodud mõned näited neist mõõtmistest, mille teostamisel on võimalik plaani joonestamine.

1. Käies ümber plaanistatava maa-ala, mõõdetakse selle kui hulknurga küljed ja nurgad.

2. Asutakse plaanistatava maa-ala ühte tippu ja mõõdetakse sellest lähtuvad küljed, diagonaalid ja nurgad nende vahel (joonis 45).

3. Tähistatakse maatüki üks diagonaal ja ülejäänud tippudest sellele diagonaalile ehitatud ristlõigud ning mõõdetakse need ristlõigud ja diagonaali lõigud ristlõikude vahel (joonis 17).

Ülesanded.

150. Tallinna ümbruse kaardil mõõduga 1 : 100 000 on Ülemiste järve pikkus 48 mm. Kui pikk on see järv tõeliselt?

151. Eesti kaardil mõõduga 1 : 1 500 000 on Kuressaare ja Ruhnu vahe 43 mm. Kui kaugel asetseb Ruhnu Kuressaarest?

152. Kaarti, mille mõõt oli 1 : 100 000, suurendati 4 korda. Kui suur on uue kaardi mõõt?

153. Jõe pikkus kaardil mõõduga 1 : 150 000 on 17,4 cm. Kui pikk on see jõgi kaardil mõõduga 1 : 750 000?

154. Musta mere pikkus kaardil mõõduga 1 : 18 000 000 on 6,7 cm. Kui pikk on sama meri kaardil mõõduga 1 : 3 000 000?

155. Harku järve pikkus kaardil mõõduga 1 : 100 000 on 2 cm. Sama järve pikkus teisel kaardil on 0,8 cm. Kui suur on teise kaardi mõõt?

156. Kaardil mõõduga 1 : 500 000 on järve pindala ligikaudu 3,2 cm^2. Kui suur on järve pindala tõeliselt?

§ 37. Pikkuste kaudne mõõtmine sarnaste kolmnurkade abil.

Üheks kolmnurkade sarnasuse rakendusalaks on kõrguste ja kauguste kaudne mõõtmine.

Puu kõrgust näiteks saab mõõta tema varju abil (joonis 49): kui puu kõrgus on x m, puu varju pikkus tasasel maapinnal v m, kepi pikkus a m ja kepi varju pikkus b m, siis sarnastest kolmnurkadest ABC ja $A_1B_1C_1$ saab, et

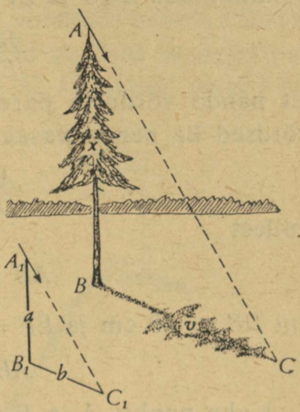
$$x : a = v : b,$$

millest

$$x = \frac{av}{b}$$

ehk

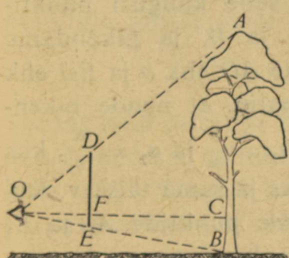
$$x = \frac{a}{b} \cdot v.$$



Joonis 49.

Erijuhul, kui $a = b$, siis $x = v$.

Metsaametnikud sagedasti mõõdavad kasvava puu kõrgust 80 cm pikkuse kepiga, millele on tehtud märk 8 cm kaugusel selle otsast. Hoides keppi väljasirutatud käes püstsuunas, leitakse niisugune asend, kus puu latv A, vaatleja silm O ja kepi üks ots D asetsevad ühel ja samal sirgel ning puu juur B, vaatleja silm O ja kepi teine ots E asetsevad teisel sirgel (joonis 50). On niisugune asend leitud, siis märgitakse puu tüvel punkt C, mis asetseb vaatleja silmaga O ja kepil märgitud punktiga F ühel ja samal sirgel. Puu kõrguse leidmiseks tuleb BC pikkus korrutada 10-ga.



Joonis 50.

P õ h j e n d u s. Kolmnurkade ABO ja DEO sarnasusest järeldub, et

$$\frac{AB}{DE} = \frac{OB}{OE};$$

kolmnurkade BCO ja EFO sarnasusest järeldub, et

$$\frac{BC}{EF} = \frac{OB}{OE}.$$

Et nende võrduste paremad pooled on võrdsed, siis on võrdsed ka nende vasakud pooled; seega

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF},$$

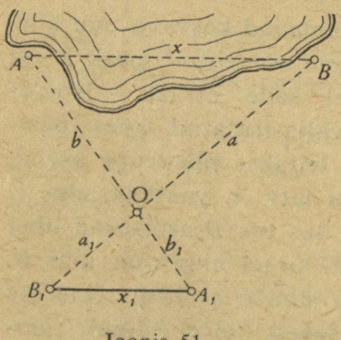
millest

$$AB = \frac{BC \cdot DE}{EF};$$

kui $DE = 80$ cm ja $EF = 8$ cm, siis

$$AB = 10 \cdot BC.$$

Kahe punkti A ja B vahelise kauguse mõõtmiseks, kus see otseselt on võimatu, kasutatakse järgmist võtet, kui punktidele A ja B on võimalik juurde pääseda (joonis 51): valime punkti O nii, et saab mõõta selle kaugusi punktidest A ja B, ja pikendame sirglõike AO ehk b ja BO ehk a nii palju, et nende pikendused $b_1 = \frac{b}{n}$ ja $a_1 = \frac{a}{n}$, kus n on üks ja sama täisarv. Kui mõõdame punktide A_1 ja B_1 vahelise kauguse x_1 ja suurendame selle n korda, siis saame otsitava kauguse AB. Tõepoolest kolmnurkade sarnasuse II tunnuse järgi



Joonis 51.

$$\triangle AOB \sim \triangle A_1OB_1,$$

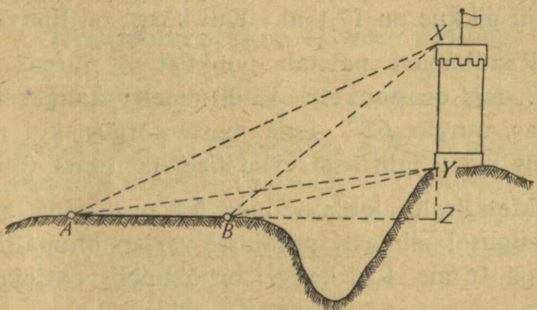
millest järeldub, et

$$x : x_1 = a : a_1.$$

Et $a : a_1 = n$, siis

$$x = nx_1.$$

Sarnaste kolmnurkade abil on võimalik mõõta kõrgusi ja kaugusi ka sel juhul, kui mõlemad punktid on ligipääsematud. Olgu vaja mõõta joonisel 52 kujutatud torni kõr-



Joonis 52.

gust. Selle mõõtmiseks tähistame rõhtsal maapinnal torni suunas mineva b a a s i AB, mille otspunktidest on näha torni tipp X ja torni jalg Y. Nüüd mõõdame baasi otspunktide juures torni tipu ja torni jala kõrgusnurgad

$$XAZ, \quad YAZ, \quad XBZ \text{ ja } YBZ.$$

Teades neid nurki ja baasi pikkust AB, joonestame vähendatud mõõdus nelinurga $ABYX$, millest leiame torni kõrguse XY. Samast joonisest võib määrata ka torni jala kõrguse rõhtsirgest AB.

Ülesanded.

157. Telefoniposti varju pikkus on 4,9 m samal ajal, kui 1,7 m pikkuse kepi varju pikkus on 1,4 m. Kui kõrge on telefonipost?

158. 200 m kaugusel kirikust viseeriti selle kõrgust väljasirutatud käes püstloodis hoitud mõõtpuuga ja saadi kiriku näiva kõrgusena 24 cm. Kui kõrge on kirik, kui väljasirutatud käe pikkus on 75 cm?

159. Kui kõrgel on päike silmapiirilt momendil, mil 2,5 m kõrguse posti varju pikkus rõhtsal pinnal on 3,2 m?

160. Kui päikese kõrgus silmapiirilt on 35^0, siis lipuvarda varju pikkus on 17,1 m. Kui kõrge on lipuvarras?

161. Raadiomast paistab punktist A nurgas 30^0 ja punktist B, mis on punktist A 100 meetri kaugusel masti jala suunas, nurgas 62^0. Leia masti kõrgus, kui punktid A ja B ning masti jalg asetsevad ühel ja samal rõhtsirgel.

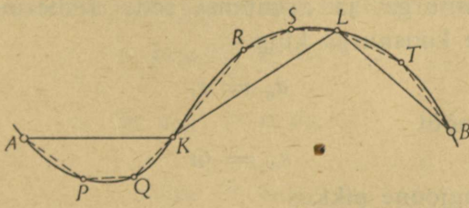
162. Metallraha läbimõõduga 2,5 cm, mida hoitakse 50 cm kaugusel silmast, parajasti varjab õhupalli, mille läbimõõt on 16 m. Kui kaugel on õhupall vaatlejast?

Peatükk IV.

Ringjoone pikkus ja ringi pindala.

§ 38. Kõverjoone ligikaudne pikkus.

Ringjoone nagu iga kõverjoone pikkuse mõõtmise põhimõtteliseks raskuseks on asjaolu, et pikkusühik kui sirgjoone lõik ei saa olla ühtiv mõõdetava kõverjoone ühegi lõiguga. Selle raskuse ületamiseks asendatakse kõverjoon murdjoonega, mille pikkus võimalikult vähe erineb antud kõverjoone pikkusest, ja mõõdetakse selle murdjoone pikkus. Olgu vaja mõõta näiteks joonisel 53 kujutatud kõverjoone lõik punktide *A* ja *B* vahel. Kui selle kõver-



Joonis 53.

joone lõigu asendame murdjoonega *AKLB*, siis saame tublisti lühema joone kui on kõverjoone lõik *AKLB*, sest selle murdjoone iga lõik *AK*, *KL*, . . . on lühem kui vastav kõverjoone lõik. Et saada murdjoon, mille pikkus vähem erineb kõverjoone lõigu *AKLB* pikkusest, selleks võetakse kõverjoonel lisaks punktidele K ja L veel uusi punkte P, Q, R, S, T ja ühendatakse need uueks murdjooneks. Uus murdjoon $APQKR \ldots B$ on pikem kui endine murdjoon $AKLB$, sest murdjoon

$$APQK > AK, \quad KRSL > KL \text{ jne.},$$

järelikult ka nende summa $APQKR \ldots B$ on pikem kui murdjoon $AKLB$.

Kuid kõverjoone lõigust AB on uus murdjoon $APQK \ldots B$ siiski lühem, sest murdjoone iga lõik AP, $PQ \ldots$ on lühem vastavast kõverjoone lõigust. Niiviisi uute punktide juurdevõtmisega võib moodustada murdjooni, mille pikkus küllalt hästi asendab mõõdetava kõverjoone pikkust. Selle murdjoone pikkuse mõõtmisel saame kõverjoone ligikaudse pikkuse.

§ 39. Ringjoone ligikaudne pikkus kõõlhulknurga abil.

Ringjoone ligikaudse pikkuse määramiseks joonestame ringjoone sisse mingi korrapärase hulknurga, näiteks korrapärase kuusnurga, ja arvutame selle ümbermõõdu. Et korrapärase kuusnurga külg

$$a_6 = r,$$

siis ümbermõõt

$$s_6 = 6r$$

ja seega ringjoone pikkus

$$s \approx 6r.$$

Soovides saada ringjoone pikkust täpsemalt, joonestame kaks korda suurema tippude arvuga kõõlhulknurga ja arvutame selle ümbermõõdu. Nii saadud ümbermõõt on endisest suurem, sest nagu saab tõestada,

korrapärase kõõlhulknurga ümbermõõt kasvab selle tippude arvu kahekordistamisel.

Tõestus. Tähistame sissejoonestatud korrapärase n-nurga külje pikkuse sümboliga a_n ja kaks korda suurema tippude arvuga hulknurga külje pikkuse vastavalt sellele sümboliga a_{2n}. Siis esimese hulknurga ümbermõõt

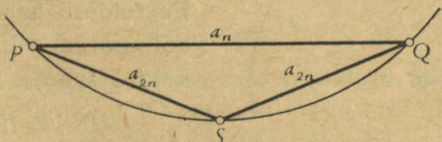
$$s_n = n \cdot a_n$$

ja teise hulknurga ümbermõõt

$$s_{2n} = 2n \cdot a_{2n}.$$

Tippude arvu kahekordseks muutumisel n-nurga iga külje asemele tuleb kaks $2n$-nurga külge (joonis 54). Nende kahe külje summa

$$2a_{2n} > a_n ,$$



Joonis 54.

sest murdjoon PSQ on pikem kui sirglõik PQ. Seega ka

$$n \cdot 2a_{2n} > n \cdot a_n$$

ehk

$$2n \cdot a_{2n} > n \cdot a_n$$

ehk

$$s_{2n} > s_n ,$$

m. o. t. t.

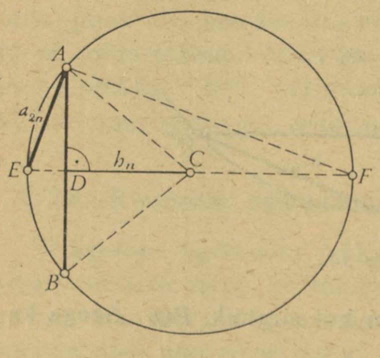
Seega korrapärase kõõlhulknurga tippude arvu kahekordistamisel hulknurga ümbermõõt kasvab. Mida suurem on tippude arv, seda vähem erineb hulknurga ümbermõõt ringjoone pikkusest. Kahekordistatud tippude arvuga korrapärase kõõlhulknurga ümbermõõdu arvutamiseks tõestame, et

ringjoone sisse joonestatud korrapärase $2n$-nurga külg on ringjoone läbimõõdu ning raadiuse ja korrapärase n-nurga apoteemi vahe geomeetriline keskmine.

Olgu AB joonisel 55 korrapärase n-nurga külg a_n ja CD selle n-nurga apoteem h_n, siis AE on korrapärase $2n$-nurga külg a_{2n}. Teoreemi väite järgi

$$a_{2n} = \sqrt{2r(r - h_n)}.$$

Väite tõestamiseks joonestame diameetri EF ja ühendame punkti F punktiga A (joonis 55). Et $\hat{A}$ kui diameetrile toetuv piirdenurk on täisnurk, siis $\triangle AEF$ on täisnurkne. Rakendades Eukleidese teoreemi selle kolmnurga kaateti AE kohta, saame



Joonis 55.

$$AE^2 = EF \cdot ED$$

ehk

$$a_{2n}^2 = 2r \cdot (r - h_n),$$

millest

$$a_{2n} = \sqrt{2r \cdot (r - h_n)},$$

m. o. t. t.

Viimases valemis esineva apoteemi h_n arvutame Pythagorase teoreemi põhjal kolmnurgast ADC (joonis 55). Selle järgi

$$CD^2 = AC^2 - AD^2$$

ehk

$$h_n^2 = r^2 - \left(\frac{a_n}{2}\right)^2$$

ehk

$$h_n^2 = \frac{4r^2 - a_n^2}{4},$$

millest

$$h_n = \sqrt{\frac{4r^2 - a_n{}^2}{4}}$$

ehk

$$h_n = \tfrac{1}{2}\sqrt{4r^2 - a_n{}^2}\,.$$

Arvutame nüüd ringjoone ligikaudse pikkuse korrapärase kõõl-kaksteistnurga abil. Et

$$a_6 = r,$$

siis valemi

$$h_n = \tfrac{1}{2}\sqrt{4r^2 - a_n{}^2}$$

järgi

$$h_6 = \tfrac{1}{2}\sqrt{4r^2 - r^2}$$

ehk

$$h_6 = \tfrac{1}{2}r\sqrt{3}\,.$$

Seega eespool a_{2n} arvutamiseks tuletatud valemi järgi

$$a_{12} = \sqrt{2r\cdot(r - \tfrac{1}{2}r\sqrt{3})}$$

ehk, võttes ühise teguri r sulgude ette ja viies teguri 2 sulgude sisse,

$$a_{12} = \sqrt{r^2(2 - \sqrt{3})}$$

ehk

$$a_{12} = r\sqrt{2 - \sqrt{3}}\,.$$

Et $\sqrt{3} \approx 1{,}7321$, seega $2 - \sqrt{3} \approx 0{,}2679$, siis

$$a_{12} \approx r\cdot\sqrt{0{,}2679}$$

ehk

$$a_{12} \approx 0{,}5176r.$$

Saaduse korrutamisel 12-ga saame, et ümbermõõt

$$s_{12} \approx 6{,}21r$$

ja seega ka ringjoone pikkus

$$s \approx 6{,}21r.$$

Ülesanded.

163. Avalda korrapärase kõõl-nelinurga külg, apoteem ja ümbermõõt ringi raadiuse r kaudu.

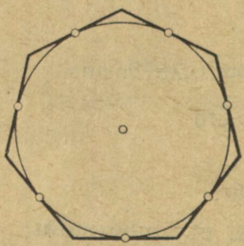
164. Kasutades eelmise ülesande tulemusi, leia korrapärase kõõl-kaheksanurga külg ja ümbermõõt.

165. Kasutades eespool-antud korrapärase kõõl-kaksteistnurga külje ligikaudset pikkust, leia korrapärase kõõl-kakskümmendnelinurga külg ja ümbermõõt. Arvutamise lihtsustamiseks kasuta ruutude ja ruutjuurte tabeleid.

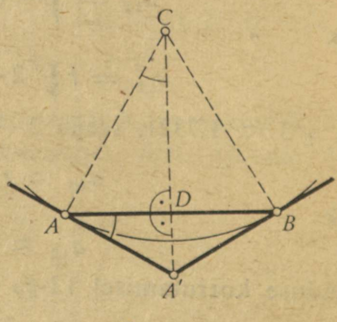
166. Leia ringi ümber joonestatud korrapärase nelinurga abil arv, millest ringjoone pikkus kindlasti on väiksem.

§ 40. Ringjoone ligikaudne pikkus puutujahulknurga abil.

Joonestame ringjoone ümber mingi korrapärase hulknurga, näiteks korrapärase seitsenurga (joonis 56). Meie kujutluse järgi on selle hulknurga ümbermõõt ringjoone pikkusest suurem. Seetõttu puutujahulknurga ümbermõõdu arvutamisega leiame suuruse, millest ringjoone pikkus on igal juhul väiksem.



Joonis 56.



Joonis 57.

Ringjoone ümber joonestatud korrapärase n-nurga ümbermõõtu on võimalik arvutada sissejoonestatud n-nurga ümbermõõdu abil. Olgu joonisel 57 kõõl AB korrapärase n-nurga külg a_n ja CD selle hulknurga apoteem h_n. Siis puutujad punktides A ja B lõikuvad punktis, ütleme A', mis on ümberjoonestatud korrapärase n-nurga üheks tipuks. Seega

$$A'A = A'B = \frac{a'_n}{2},$$

kui a'_n tähistab korrapärase puutuja-n-nurga külge. Kolmnurkades $A'AD$ ja CAD

$$A'\hat{A}D = A\hat{C}D$$

kui vastavalt ristuvate haaradega teravnurgad; et $A'C \perp AB$, siis ka

$$A'\hat{D}A = C\hat{D}A.$$

Seega

$$\triangle A'AD \sim \triangle ACD,$$

millest järeldub, et

$$A'A : AC = AD : CD$$

ehk

$$\frac{a'_n}{2} : r = \frac{a_n}{2} : h_n.$$

Sellest võrdest leiame, et

$$\frac{a'_n}{2} = \frac{a_n \cdot r}{2h_n}$$

ehk

$$a'_n = \frac{a_n \cdot r}{h_n}.$$

Korrutades selle võrduse mõlemad pooled arvuga n, saame ümberjoonestatud korrapärase n-nurga ümbermõõdu $ü_n$; seega

$$ü_n = n \cdot \frac{a_n \cdot r}{h_n}$$

ehk

$$\ddot{u}_n = \frac{r}{h_n} \cdot na_n$$

ehk

$$\ddot{u}_n = \frac{r}{h_n} \cdot s_n.$$

Saadud valemist on kerge näha, et

korrapärase puutujahulknurga ümbermõõt on suurem kui niisama suure tippude arvuga korrapärase kõõlhulknurga ümbermõõt.

Tõepoolest, $h_n < r$, seega $\frac{r}{h_n} > 1$ ja

$$\frac{r}{h_n} \cdot s_n > s_n$$

ehk

$$\ddot{u}_n > s_n.$$

Arvutame korrapärase puutuja-kuusnurga ümbermõõdu. Et

$$h_6 = \tfrac{1}{2} r\sqrt{3} \quad \text{ja} \quad s_6 = 6r,$$

siis

$$\ddot{u}_6 = \frac{r}{\frac{1}{2} r\sqrt{3}} \cdot 6r$$

ehk

$$\ddot{u}_6 = \frac{12r}{\sqrt{3}}$$

ehk, korrutades lugejat ja nimetajat arvuga $\sqrt{3}$ ja taandades,

$$\ddot{u}_6 = 4r\sqrt{3}.$$

Et $\sqrt{3} \approx 1{,}7321$, seega $4\sqrt{3} \approx 6{,}9284$ ja

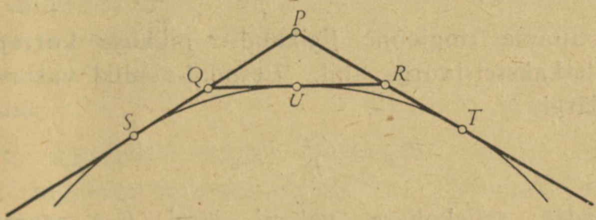
$$\ddot{u}_6 \approx 6{,}93r.$$

Seega oleme leidnud pikkuse, millest ringjoone pikkus on igal juhul väiksem. Ühtlasi võime selle lugeda ringjoone ligikaudseks pikkuseks.

Vaatleme edasi, kuidas muutub puutujahulknurga ümbermõõt selle tippude arvu kasvamisel. Saab tõestada, et

korrapärase puutujahulknurga ümbermõõt kahaneb tippude arvu kahekordseks muutumisel.

Tõestus. Olgu punkt P korrapärase puutujahulknurga üks tipp ning punktid S ja T sellest tipust lähtuvate külgede ja ringjoone ühised punktid (joonis 58). Pooli-



Joonis 58.

tame kaare ST ja joonestame selle keskpunktist U puutuja QR. Lõik QR on kaks korda suurema tippude arvuga puutujahulknurga üks külg. Seega

$$QR = a'_{2n}, \quad QS = RT = \frac{a'_{2n}}{2} \quad \text{ja} \quad PS = PT = \frac{a'_n}{2}.$$

Et

$$PQ + PR > QR,$$

siis ka

$$PS + PT > QR + QS + RT$$

ehk

$$\frac{a'_n}{2} + \frac{a'}{2} > a'_{2n} + \frac{a'_{2n}}{2} + \frac{a'_{2n}}{2}$$

ehk

$$a'_n > 2a'_{2n}.$$

Korrutades selle võrduse mõlemad pooled arvuga n saame

$$n \cdot a'_n > 2n \cdot a'_{2n}$$

ehk

$$ü_n > ü_{2n},$$

m. o. t. t.

Sellest teoreemist järeldub, et ka puutujahulknurga ümbermõõt kujutab ringjoone pikkust seda paremini, mida suurem on tippude arv.

Arvutame ringjoone ligikaudse pikkuse korrapärase puutuja-kaksteistnurga abil. Eespool-saadud vastava valemi järgi

$$ü_{12} = \frac{r}{h_{12}} \cdot s_{12}.$$

Arvutades sellekohase valemi järgi h_{12} saame, et $h_{12} \approx 0{,}966r$. Varemini leidsime, et $s_{12} \approx 6{,}21r$.

Seega

$$ü_{12} \approx \frac{r}{0{,}966r} \cdot 6{,}21r$$

ehk

$$ü_{12} \approx \frac{6{,}21r}{0{,}966}$$

ehk

$$ü_{12} \approx 6{,}4r.$$

Kokkuvõttes võime öelda, et arvutades ringjoone sisse joonestatud kui ka ümber joonestatud korrapäraste hulknurkade ümbermõõdud

$$s_6,\ s_{12},\ s_{24},\ \ldots$$

ja

$$ü_6,\ ü_{12},\ ü_{24},\ \ldots$$

saame kaks rida arve, milledest esimese rea arvud kasvavad ja teise omad kahanevad, kuid nii, et ikka esimese rea iga arv on väiksem teise rea igast arvust. Kirjutades need arvud kasvavas järjekorras ühte ritta, saame rea

$$s_6 < s_{12} < s_{24} < \ldots\ldots < ü_{24} < ü_{12} < ü_6.$$

Selles reas arvude s ja $ü$ vahel asetseb ringjoone pikkus. Kui suur see on, seda me esialgu ei tea. Tema ligikaudseks pikkuseks võime lugeda mistahes arvu sellest reast. Mida kaugemal rea otstest asetseb see arv, seda täpsemalt kujutab ta ringjoone pikkust.

Ülesanded.

167. Kasutades eespool-arvutatud s_{12} ja $ü_{12}$ väärtusi, määra ringjoone ligikaudne pikkus s_{12} ja $ü_{12}$ aritmeetilise keskmise abil.

168. Kasutades valemit h_n arvutamiseks leia h_{12} ligikaudne pikkus.

169. Joonesta ringjoon raadiusega $r = 2$ cm, arvuta sellele vastavad s_6, $ü_6$, s_{12} ja $ü_{12}$ ning kujuta need ühise otspunktiga lõikudena (astmikuna).

§ 41. Ringjoone pikkus.

Eespool nägime, et ringjoone pikkus asetseb korrapärase kõõlhulknurga ja korrapärase puutujahulknurga ümbermõõtude vahel. Saab näidata, et küllalt suure tippude arvu puhul nende hulknurkade ümbermõõtude vahe

$$ü_n - s_n$$

muutub kuitahes väikeseks. Arvutades eespool-tuletatud valemite järgi korrapäraste kõõlhulknurkade ja puutuja-hulknurkade ümbermõõte viiekohaliste murdosadega, saame järgmise tabeli:

Tippude arv n	s •	$ü$
6	$2r \cdot 3{,}00000$	$2r \cdot 3{,}46410$
12	$2r \cdot 3{,}10583$	$2r \cdot 3{,}21539$
24	$2r \cdot 3{,}13263$	$2r \cdot 3{,}15966$
48	$2r \cdot 3{,}13935$	$2r \cdot 3{,}14609$
96	$2r \cdot 3{,}14103$	$2r \cdot 3{,}14271$
192	$2r \cdot 3{,}14145$	$2r \cdot 3{,}14187$
384	$2r \cdot 3{,}14156$	$2r \cdot 3{,}14166$
768	$2r \cdot 3{,}14158$	$2r \cdot 3{,}14161$
1536	$2r \cdot 3{,}14159$	$2r \cdot 3{,}14160$

Sellest tabelist nähtub, et puutujahulknurga ümbermõõt $ü$ erineb vastava kõõlhulknurga ümbermõõdust s_n seda vähem, mida suurem on n. Tõepoolest,

kui $n = 6$, siis

$$ü_n - s_n \approx 0{,}5 \cdot 2r;$$

kui $n = 96$, siis

$$ü_n - s_n \approx 0{,}002 \cdot 2r;$$

kui $n = 1536$, siis

$$ü_n - s_n \approx 0{,}00001 \cdot 2r.$$

Saab tõestada, et kui n lõpmatult kasvab, siis $ü_n - s_n$ muutub väiksemaks igast etteantud arvust, olgu see kuitahes väike. Seda tõsiasja väljendatakse veel teisiti, öeldes, et tippude arvu n lõpmatul kasvamisel $ü_n$ ja s_n vahe läheneb nullile. Sümbolites kujutatakse seda järgmiselt:

$$\text{kui } n \to \infty, \text{ siis } ü_n - s_n \to 0.$$

Seega on olemas ü k s a i n u s pikkus, millest iga $ü_n$ on suurem ja iga s_n on väiksem. Seda pikkust nimetatakse $ü_n$ ja s_n ü h i s e k s p i i r v ä ä r t u s e k s ja see ongi ringjoone pikkus. Seega

ringjoone pikkus on see piirväärtus, millele tippude arvu lõpmatul kasvamisel läheneb nii korrapärase puutujahulknurga ümbermõõt kui ka korrapärase kõõlhulknurga ümbermõõt.

Tähistame ringjoone pikkuse tähega s. Eespool-antud tabeli viimase rea järgi

$$2r \cdot 3{,}14159 < s < 2r \cdot 3{,}14160,$$

seega

$$s \approx 3{,}14159 \cdot 2r.$$

Saadud valem väljendab ringjoone ligikaudset pikkust väga väikese veaga. Ringjoone pikkuse täpseks avaldamiseks oleks vaja teada arvu, millele lähenevad viimases tabelis $2r$ juures olevad tegurid, kui n lõpmatult kasvab. Arvu, millele need tegurid lähenevad, tähistatakse kreeka tähega π. Teades seda arvu võime kirjutada, et

$$s = 2\pi r$$

ehk

$$s = \pi d.$$

Seega

ringjoone pikkus võrdub π ja läbimõõdu korrutisega.

Arvu π uurimisel on teadusmehed selgitanud, et see on irratsionaalarv, mis ei ole meie arvusüsteemis üldse täpselt väljendatav. Selle arvu ligikaudne väärtus on arvutatud enam kui 700 kohaga, millest esimesi on järgmiselt:

$$\pi = 3{,}14159\,26535\,89793\,23848\,26433\,83279.$$

Arvutamisel ei saa muidugi kusagil kasutada niisugust väärtust, vaid tuleb piirduda väärtusega 3,14 või eriti täpsete arvutuste juures väärtusega 3,1416.

Kreeka matemaatik Archimedes, kes elas a. 287—212 e. Kr., leidis, et

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70},$$

millest

$$\pi \approx 3\tfrac{1}{7}.$$

Ülesanded.

170. Arvuta ringjoone pikkus, kui raadius on 5 cm; 7,2 cm; 0,3 dm; $1\frac{2}{3}$ km.

171. Kui pikk on raadius ringjoonel, mille pikkus on 17,6 cm; 0,942 m; 10 m?

172. Tõesta, et ringjoone pikkus suureneb n korda, kui raadiust suurendada n korda.

173. Kui palju suureneb ringjoone pikkus, kui selle raadiust suurendada 10 cm võrra?

174. Masinaratas teeb 900 tiiru minutis. Kui pika tee kulgeb 1 tunni vältel ratta punkt, mis asetseb 40 cm kaugusel keskpunktist?

175. Muuda $3\frac{1}{7}$ kümnendmurruks ja leia, mitme õige kohaga see annab π väärtuse.

176. Muuda kümnendmurruks murd $\frac{355}{113}$ ja leia, mitme õige kohaga see annab π väärtuse.

177. Tornikella minutiosuti pikkus on 58 cm. Kui pika tee kulgeb tema otspunkt öös-päevas?

178. Veduri suure ratta läbimõõt on 2 m ja väikese ratta läbimõõt on 0,80 m. Mitu täispööret teeb kumbki ratas Tallinnast Tartu sõites, kui selle tee pikkus on 191 km?

179. Täisnurkse kolmnurga ümber, mille kaatetid on 2,4 cm ja 4,5 cm, on joonestatud ringjoon. Kui pikk on see ringjoon?

180. Ringjoon on oma diameetrist 10,7 cm võrra pikem. Kui pikk on raadius?

181. Üle kahe masinaratta, mille raadiused on 8,5 dm ja 1,7 dm, läheb veorihm. Mitu tiiru teeb masina töötamisel väike ratas minutis, kui suur teeb 150 tiiru minutis?

§ 42. Võrdsete ümbermõõtudega hulknurgad.

Ringjoone pikkuse valemist

$$s = \pi d$$

saame, et

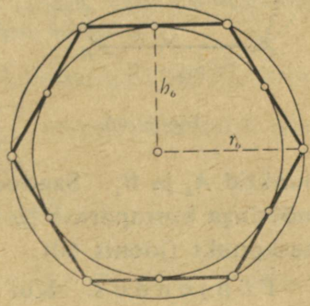
$$\pi = s : d.$$

Seega

arv π on ringjoone pikkuse ja läbimõõdu suhe.

Eespool käsitlesime π arvutamist ringi sisse ja ümber joonestatud korrapäraste hulknurkade abil. Arvu π on võimalik määrata ka teisiti, nimelt võrdsete ümbermõõtudega hulknurkade abil.

Olgu antud ringjoone pikkus s. Et määrata selle ringjoone läbimõõtu d, kui arv π ei ole teada, selleks joonestame mingi korrapärase hulknurga ümbermõõduga s, näiteks korrapärase 6-nurga, ja arvutame selle sisse ja ümber joonestatud ringjoone raadiused h_6 ja r_6 (joonis 59). Siis



Joonis 59.

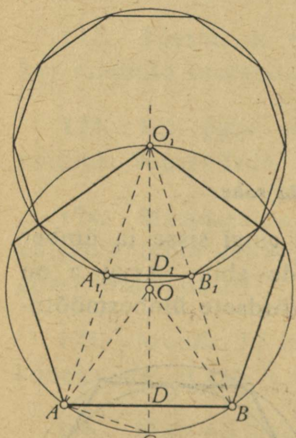
$$2h_6 < d < 2r_6.$$

Nii saame kaks tõket, millede vahel asetseb otsitav läbimõõt d. Paremate tõkete saamiseks arvutame n i i s a m a s u u r e ümbermõõduga korrapärase 12-nurga sisse ja ümber joonestatud ringjoonte raadiused h_{12} ja r_{12}. Siis

$$2h_{12} < d < 2r_{12}.$$

Nüüd on d surutud juba kitsamasse vahemikku. Sama võtet korduvalt tarvitades võime otsitava läbimõõdu d määrata kuitahes täpselt.

Kirjeldatud võtte rakendamiseks peame oskama korrapärase n-nurga sisse ja ümber joonestatud ringjoonte raadiuste järgi arvutada niisama suure ümbermõõduga korrapärase $2n$-nurga vastavaid elemente. Nende arvutamiseeskirjade leidmiseks vaatleme enne, kuidas korrapärase n-nurga järgi joonestada niisama suure ümbermõõduga korrapärast $2n$-nurka. Olgu AB korrapärase n-nurga külg ja punkt O selle n-nurga keskpunkt (joonis 60). Joonestame lõigu AB keskristsirge OD ja leiame selle lõikepunkti O_1 antud hulknurga ümber joonestatud ringjoonega. Punkti O_1 ühendame punktidega A ja B, poolitame lõigud AO_1 ja BO_1 ning ühendame nende lõikude keskpunktid A_1 ja B_1. Saadud sirglõik A_1B_1 ongi antud ümbermõõduga korrapärase $2n$-nurga külg ja O_1 on selle $2n$-nurga keskpunkt (joonis 60).



Joonis 60.

P õ h j e n d u s. Kui korrapärase hulknurga külgede arv 2 korda suureneb, ilma et ümbermõõt muutuks, siis peab külje pikkus 2 korda vähenema. See tingimus on täidetud, sest $\triangle A_1B_1O_1$ küljed, nende seas ka A_1B_1, on 2 korda väiksemad $\triangle ABO_1$ vastavatest külgedest.

Samuti peab korrapärase hulknurga küljele toetuv kesknurk O kaks korda vähenema. Ka see tingimus on täidetud, sest

$$A_1\hat{O}_1B_1 = \frac{A\hat{O}B}{2}$$

kui piirdenurk, mis toetub samale kaarele, millele toetub kesknurk AOB.

Tuletame nüüd valemid, mille järgi saab korrapärase n-nurga ümber joonestatud ringjoone raadiuse r_n ja apoteemi (ehk sissejoonestatud ringjoone raadiuse) h_n põhjal arvutada $2n$-nurga vastavaid elemente. Joonisel 60

$$OD = h_n; \quad O_1D_1 = h_{2n}; \quad O_1A_1 = r_{2n}.$$

Sellest joonisest ja konstruktsiooni põhjendusest selgub, et

$$O_1D_1 = \frac{O_1O + OD}{2}$$

ehk

$$h_{2n} = \frac{r_n + h_n}{2}.$$

Seega

korrapärase $2n$-nurga apoteem on niisama suure ümbermõõduga n-nurga apoteemi ja raadiuse aritmeetiline keskmine.

Raadiuse r_{2n} saab arvutada kolmnurgast AO_1C, milles $\hat{A}$ on täisnurk kui diameetrile O_1C toetuv piirdenurk (joonis 60). Eukleidese teoreemi järgi

$$(AO_1)^2 = CO_1 \cdot DO_1;$$

et

$$AO_1 = 2 \cdot A_1O_1 = 2r_{2n}, \quad CO_1 = 2r_n \quad \text{ja} \quad DO_1 = 2h_{2n},$$

siis

$$(2r_{2n})^2 = 2r_n \cdot 2h_{2n}$$

ehk

$$4r_{2n}^2 = 4r_n \cdot h_{2n}$$

ja

$$r_{2n}^2 = r_n \cdot h_{2n},$$

millest

$$r_{2n} = \sqrt{r_n \cdot h_{2n}}.$$

Seega

korrapärase $2n$-nurga ümber joonestatud ringjoone raadius on niisama suure ümbermõõduga n-nurga vastava raadiuse ja $2n$-nurga apoteemi geomeetriline keskmine.

Kasutades valemeid h_{2n} ja r_{2n} arvutamiseks on võimalik ringjoone pikkuse järgi arvutada selle ringjoone läbimõõtu kuitahes täpselt.

Näide. Arvutame korrapärase 8-nurga abil tõkked, millede vahel asetseb ringjoone läbimõõt, kui ringjoone pikkus on 48 cm.

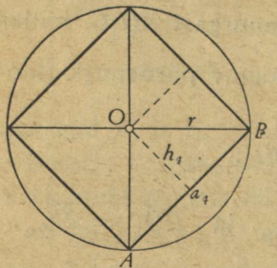
Antud ümbermõõduga korrapärase 4-nurga külg

$$a_4 = 12,$$

apoteem

$$h_4 = 6$$

ja ümberjoonestatud ringjoone raadius (joonis 61)



Joonis 61.

$$r_4 = \sqrt{\left(\frac{a_4}{2}\right)^2 + h_4^2},$$

seega

$$r_4 = \sqrt{36 + 36}$$

ehk

$$r_4 = \sqrt{72}$$

ehk

$$r_4 \approx 8,485.$$

Niisama suure ümbermõõduga korrapärase 8-nurga apoteem

$$h_8 = \frac{r_4 + h_4}{2},$$

seega

$$h_8 \approx \frac{8{,}485 + 6}{2}$$

ehk

$$h_8 \approx 7{,}243;$$

selle hulknurga ümber joonestatud ringjoone raadius

$$r_8 = \sqrt{r_4 \cdot h_8},$$

seega

$$r_8 \approx \sqrt{8{,}485 \cdot 7{,}243}$$

ehk

$$r_8 \approx \sqrt{61{,}46}\,,$$

millest

$$r_8 \approx 7{,}840.$$

Antud pikkusega ringjoone läbimõõdu d kohta saame nüüd, et

$$2 \cdot 7{,}24 < d < 2 \cdot 7{,}84$$

ehk

$$14{,}48 < d < 15{,}68.$$

§ 43. π arvutamise näide.

Arvu π suuruse määramiseks eelmises paragrahvis kirjeldatud viisil arvutame näiteks 12-sentimeetrise ümbermõõduga korrapärase 6-, 12-, 24-,... nurga sisse ja ümber joonestatud ringjoone raadiused ja määrame nende abil 12-sentimeetrise ümbermõõduga ringjoone raadiuse. Et otsitava raadiuse pikkus arvude ümmardamise tagajärjel ei satuks välja sisse- ja ümberjoonestatud ringjoonte raadiuste h_n ja r_n vahelt, selleks võtame ümmardamisel h_n puudusega ja r_n liiaga.

Kui korrapärase 6-nurga ümbermõõt on 12, siis külg on $\frac{12}{6}$ ehk 2. Eespool-saadud valemite

$$r_6 = a_6 \quad \text{ja} \quad h_6 = \tfrac{1}{2} a_6 \sqrt{3}$$

järgi

$$r_6 = 2 \quad \text{ja} \quad h_6 = \sqrt{3} \approx 1{,}7320.$$

Lähtudes neist r_6 ja h_6 väärtustest, arvutame valemite

$$h_{12} = \tfrac{1}{2}(r_6 + h_6) \quad \text{ja} \quad r_{12} = \sqrt{r_6 h_{12}}$$

järgi h_{12} ja r_{12}. Nii saame, et

$$h_{12} \approx \tfrac{1}{2}(2 + 1{,}7320) \approx 1{,}8660$$

ja

$$r_{12} \approx \sqrt{2 \cdot 1{,}8660} \approx \sqrt{3{,}7320} \approx 1{,}9319.$$

Samal viisil jätkame arvutust, kuni h_n ja r_n erinevad võimalikult vähe. Geomeetrilise keskmise asemel võib r_n arvutada alates r_{48}-ga aritmeetilise keskmise abil, sest sellest sõltuv viga ei muuda tulemust. Nii saame järgmise tabeli andmed:

n	h_n	r_n
6	1,7320	2,0000
12	1,8660	1,9319
24	1,8989	1,9154
48	1,9071	1,9113
96	1,9091	1,9102
192	1,9096	1,9100
384	1,9098	1,9099

Olgu eespool-antud ümbermõõduga ringjoone raadius r; siis

$$1{,}9098 < r < 1{,}9099$$

ja

$$2 \cdot 1{,}9098 < 2r < 2 \cdot 1{,}9099.$$

Et $\pi = s : 2r$ ja s antud juhul on 12, siis π asetseb tõkete

$$\frac{12}{2 \cdot 1{,}9098} \text{ ja } \frac{12}{2 \cdot 1{,}9099}$$

ehk

$$\frac{6}{1{,}9098} \text{ ja } \frac{6}{1{,}9099}$$

vahel. Jagamisel saame, et

$$3{,}1417 > \pi > 3{,}1415.$$

Tõketel, mille vahel asetseb π, on neli esimest kohta ühised; need ongi π esimesed kohad.

Kui soovime saada π jaoks täpsemat väärtust, siis h_6 arvutamisel tuleb võtta $\sqrt{3}$ suurema arvu kohtadega; võttes

$$\sqrt{3} = 1{,}732050$$

saame, et

$$3{,}141591 < \pi < 3{,}141594.$$

§ 44. Ringi pindala.

Olgu ringi sisse ja ümber joonestatud korrapärane hulknurk (joonis 62). Tähistame sissejoonestatud n-nurga pindala sümboliga S_n, ümberjoonestatud n-nurga pindala sümboliga $Ü_n$ ja ringi pindala sümboliga S. Siis

$$S_n < S < Ü_n.$$

Kui hulknurkade tippude arvu kaks korda suurendada, siis kõõlhulknurga pindala suureneb ja puutujahulknurga pindala väheneb:

$$S_{2n} > S_n \quad \text{ja} \quad \ddot{U}_{2n} < \ddot{U}_n;$$

seejuures ikkagi

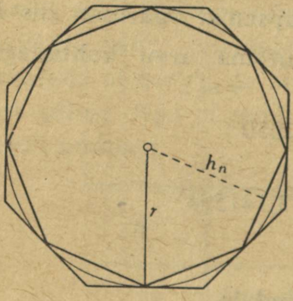
$$S_{2n} < S < \ddot{U}_{2n}.$$

Kui niiviisi lasta tippude arvu lõpmatult kasvada, siis nii S_n kui ka $\ddot{U}_n$ lähenevad ringi pindalale, seega

ringi pindala on selleks piiriks, millele tippude arvu lõpmatul kasvamisel läheneb nii korrapärase kõõlhulknurga pindala kui ka korrapärase puutujahulknurga pindala.

Olgu ringi sisse joonestatud korrapärase n-nurga ümbermõõt s_n ja apoteem h_n ning ümberjoonestatud korrapärase n-nurga ümbermõõt $\ddot{u}_n$ ja apoteem r; siis

$$S_n = \frac{s_n \cdot h_n}{2} \quad \text{ja} \quad \ddot{U}_n = \frac{\ddot{u}_n \cdot r}{2},$$



Joonis 62.

seega

$$\frac{s_n \cdot h_n}{2} < S < \frac{\ddot{u}_n \cdot r}{2}.$$

Kui $n \to \infty$, siis

$$s_n \to s \quad \text{ja} \quad h_n \to r,$$

seega

$$\frac{s_n \cdot h_n}{2} \to \frac{s \cdot r}{2}.$$

Samuti juhul, kui $n \to \infty$,

$$\ddot{u}_n \to s$$

ja seega

$$\frac{\ddot{u}_n \cdot r}{2} \to \frac{s \cdot r}{2}.$$

See avaldiste $\frac{s_n \cdot h_n}{2}$ ja $\frac{ü_n \cdot r}{2}$ ühine piir on ringi pindala; seega

$$S = \frac{s \cdot r}{2}$$

ehk, sõnades,

ringi pindala võrdub ümbermõõdu ja raadiuse poole korrutisega.

Asendades pindala valemis ümbermõõdu s avaldisega $2\pi r$, saame, et

$$S = \frac{2\pi r \cdot r}{2}$$

ehk

$$S = \pi r^2.$$

Seega

ringi pindala võrdub π ja raadiuse ruudu korrutisega.

Ülesanded.

182. Arvuta ringi pindala, kui raadius on 18 cm, 4,3 dm, 0,54 m, 175 m.

183. Arvuta ringi raadius, kui ringi pindala on 22,9 m^2, 4681 mm^2, 1 km^2.

184. Ümmarguse palgi ümbermõõt on 88 cm. Arvuta palgi ristlõike pindala.

185. Tõesta, et ringi pindala suureneb n^2 korda, kui raadius suureneb n korda.

186. Ruudu sisse ja ümber on joonestatud ringjoon. Mitu korda on ühe ringi pindala suurem teise ringi pindalast?

187. Ristküliku mõõtmed on 0,66 m ja 1,16 m. Kui suur on pindala, mida piirab selle ristküliku tippe läbiv ringjoon?

188. Kahe kontsentrilise ringjoone, s. t. ühise keskpunktiga ringjoone raadiused on 0,5 m ja 0,7 m. Kui suur on nende ringjoonte vahelise rõnga pindala?

189. Kahest kontsentrilisest ringjoonest seesmine poolitab välimisega piiratud pindala. Kui suur on seesmise ringi raadius, kui välimise ringi raadius on r.

190. Kolme ringi läbimõõdud $2r_1$, $2r_2$ ja $2r_3$ on ühe täisnurkse kolmnurga külgedeks. Tõesta, et kahe väiksema ringi pindalade summa võrdub kolmanda ringi pindalaga.

191. Joonesta ring, mille pindala võrdub kahe antud ringi a) pindalade summaga, b) pindalade vahega.

§ 45. Ringjoone sirgestamine ja ringi ruutimine.

Ringi pindala valemist

$$S = \frac{s \cdot r}{2}$$

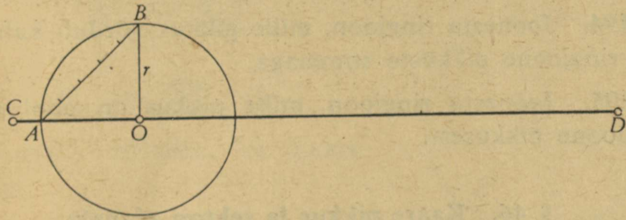
on näha, et ring on pindvõrdne niisuguse kolmnurgaga, mille alus on s ja kõrgus on r. Kui oleks võimalik sirkli ja joonlaua abil ehitada niisugust sirglõiku, mille pikkus täpselt võrdub ringjoone pikkusega, siis saaks ehitada ringiga pindvõrdse kolmnurga ja viimase järgi ka ruudu. Sirglõigu joonestamist, mille pikkus võrdub ringjoone pikkusega, nimetatakse ringjoone sirgestamiseks ehk rektifikatsiooniks. Seda ülesannet püüti lahendada enam kui 2000 aasta vältel, kuni saksa matemaatik Lindemann 1882 tõestas, et π on niisugune irratsionaalne arv, mille pikkusega sirglõiku ei saagi ehitada sirkli ja joonlaua abil. Sellest järeldub, et

ringjoone sirgestamine on sirkli ja joonlaua abil võimatu.

Samuti on teostamatu ringi ruutimine ehk kvadratuur, s. o. ringiga pindvõrdse ruudu ehitamine sirkli ja joonlaua abil.

Ringjoone l i g i k a u d s e k s s i r g e s t a m i s e k s on palju võtteid. Tutvume kahega neist.

1. Joonestame kaks ristuvat raadiust, ühendame nende otspunktid ja leiame nii saadud kõõlust $\frac{1}{5}$ (joonis 63). Kui ringjoone läbimõõdu kolmekordset AD pikendada kõõlu AB ühe viiendiku võrra, siis saame ringjoone ligikaudse pikkuse CD.



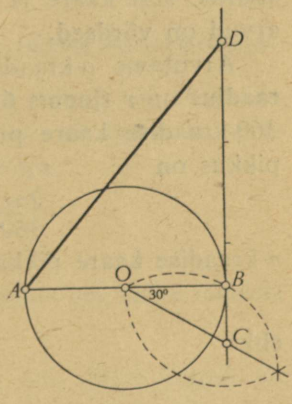
Joonis 63.

Sellekohane arvutus näitab, et nii saadud ringjoone pikkus erineb tõelisest pikkusest vähem kui $0{,}0004r$ võrra.

2. Läbi diameetri AB otspunkti B joonestame puutuja ja keskpunkti O juurde ehitame nurga $BOC = 30^0$. Selle kesknurga teine haar lõigaku puutujat punktis C. Edasi leiame puutujal CB punkti D nii, et

$$CD = 3r.$$

Punktide A ja D ühendamisel saame sirglõigu, mille pikkus ligikaudu võrdub poolringjoone pikkusega (joonis 64).



Joonis 64.

Arvutades lõigu AD pikkuse, näeme, et see erineb poolringjoone pikkusest ligikaudu $0{,}00006r$ võrra. Seega eelkirjeldatud võte on väga täpne!

192. Prantsuse matemaatik Vieta (1540—1603) leiutas π jaoks ligikaudse väärtuse $1{,}8 + \sqrt{1{,}8}$. Arvuta sellest π viiekohalise murdosaga ja määra ligikaudse väärtuse vea ülemmäär.

193. Arvuta lõigu CD pikkus joonisel 63, kui ringi raadius on r. Kui palju see erineb ringjoone pikkusest?

194. Joonesta ringjoon, mille pikkus võrdub kahe antud ringjoone pikkuste summaga.

195. Joonesta ringjoon, mille pikkus on pool antud ringjoone pikkusest.

§ 46. Kaare pikkus ja sektori pindala.

Ringjoone kaare pikkus on määratud, kui on teada kaare raadius r ja kraadide arv α. Kaare kraadide arvu asemel võib olla antud sellele kaarele toetuva kesknurga suurus, sest kaare ja sellele toetuva kesknurga kraadide arvud on võrdsed.

Arvutame α-kraadise kaare pikkuse k, kui ringjoone raadius on r (joonis 65). Et ringjoone pikkus ehk, teisiti, 360-kraadise kaare pikkus on $2\pi r$, siis 1-kraadise kaare pikkus on

$$\frac{2\pi r}{360} \quad \text{ehk} \quad \frac{\pi r}{180},$$

α-kraadise kaare pikkus

$$k = \alpha \cdot \frac{\pi r}{180}$$

ehk

$$k = \frac{\pi r \alpha}{180}.$$

Kesknurk α ja sellele vastav kaar k piiravad sektorit ABO (joonis 65). Tähistame sektori pindala sümboliga S_α ja leiame selle arvutamiseks valemi.

Kui sektori nurk kasvab ja saab võrdseks 360^0, siis sektori pindala saab võrdseks ringi pindalaga, s. t. 360-kraadise sektori pindala on πr^2; et sama ringi ühekraadised sektorid on võrdsed, siis

1-kraadise kaarega sektori pindala on $\frac{\pi r^2}{360}$, α-kraadise kaarega sektori pindala

$$S_\alpha = \frac{\pi r^2 \alpha}{360}$$

ehk

$$S_\alpha = \frac{\pi r \alpha}{180} \cdot \frac{r}{2}.$$

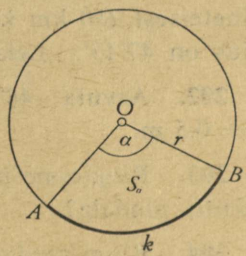
Eespool leidsime, et kaare pikkus

$$k = \frac{\pi r \alpha}{180};$$

seega

$$S_\alpha = \frac{kr}{2},$$

tähendab,



Joonis 65.

sektori pindala võrdub raadiuse ja kaare pikkuse poole korrutisega.

Viimasest sektori pindala valemist selgub, et sektor on pindvõrdne kolmnurgaga, mille alus on võrdne kaare pikkusega ja kõrgus on võrdne raadiusega.

Ülesanded.

196. Kui pikk on 38^0-ne kaar ringjoonel, mille raadius $r = 24$ dm?

197. Ringjoone raadius $r = 62$ cm. Mitu kraadi on poole meetri pikkuses kaares?

198. Kaks linna asetsevad ühel ja samal meridiaanil, kuid üks neist põhjalaiusel 51^0 ja teine põhjalaiusel 39^0.

Kui suur on nende linnade vaheline kaugus, kui Maakera meridiaani raadius on 6370 km?

199. Arvuta, mitu kraadi on 1 r a d i a a n ehk raadiuse-pikkusele kaarele vastav kesknurk.

200. Mitu kraadi sisaldab Maakera ekvaatori 1000 km pikkune kaar, kui ekvaatori raadius on 6380 km?

201. Kaks ühel ja samal meridiaanil asetsevat linna on teineteisest 250 km kaugusel. Lõunapoolsema linna põhjalaius on $47^0 15'$. Leia põhjapoolsema linna põhjalaius.

202. Arvuta 48^0-se sektori pindala, kui raadius $r = 0{,}5$ m.

203. Ringjoone pikkus on 96 dm. Kui suur on 35^0-se sektori pindala?

204. Ringi raadius on 1 m ja sektori pindala on 1 m^2. Mitu kraadi sisaldab sektori kaar?

205. Ringi 56^0-se sektori pindala on 84 cm^2. Arvuta ringjoone pikkus.

206. Raadiuse-pikkuse kaarega sektori pindala on 0,72 m^2. Kui pikk on raadius?

l

HIND RMK. 1.40

HIND RMK. 1.40

E. ETVERK — GEOMEETRIA ÕPIK GÜMN. II KL.

E. ETVERK

GEOMEETRIA

ÕPIK

GÜMNAASIUMI II KLASSILE

TARTU EESTI KIRJASTUS