

Tartu Ülikool  
Matemaatika-informaatikateaduskond  
Matemaatika instituut

Riina Org

**JOONTEPARVEDE MÄHISJOONED**

Bakalaureusetöö

Juhendaja: Maido Rahula

Autor:

Juhendaja:

Instituudi juhataja:

Tartu 2013

# Sisukord

Sissejuhatus	3
1 Joonteparve mähisjoone leidmine	5
2 Ringjoonte ja sirgjoonte parved	7
2.1 Koonus . . . . .	7
2.2 Kaustika kohvitassis . . . . .	9
3 Konhoid	12
4 Pascali tigu	13
4.1 Pascali tigu jalgratta kodarais . . . . .	13
5 Helibarjäär	17
5.1 Ajalugu . . . . .	17
5.2 Helibarjääri ületamine . . . . .	18
Summary	23
Viited	24

## Sissejuhatus

Bakalaurusetöö eesmärgiks on uurida joonteparvede mähisjooni tasandil. Ühelt poolt kujutab iga teoreem mingit matemaatika ülesannet. Teiselt poolt on igal teoreemil geomeetiline tõlgendus, mis realiseerub mõnikord eriskummalisel kombel meie ruumis. Teooria ja praktika on neil juhtudel tihedalt seotud.

Esiteks, mähisjoone võrrandi tuletamine  $xy$ -tasandil toimub kindla algoritmi järgi (vt. mähisjoonte leidmise algoritmi), nimelt:

- parve joone võrrandis on parameeter  $t$ , mille fikseerimisel eraldub parves joon;
- kui võrrandit diferentseerida  $t$  järgi, saame süsteemi, mis määrab joone karakteristikliku punkti ja ühtlasi mähkija puutepunkti joonega;
- elimineerides süsteemist parameetri  $t$ , leiame mähkija võrrandi.

Teiseks, on näidatud, kuidas toimib algoritm – kord ringjoonte ja kord sirgete parve puhul (vt. teoreemid 2.2 ja 2.3).

Kolmandaks, on vaadeldud kahte juhtu, mil sirgjoonte karakteristiklikud punktid moodustavad ringjoone või Pascali teo (vt. teoreemid 4.1 ja 4.2). Sel juhul meid ei huvita mähkijad, vaid ratta kodarate karakteristiklikud punktid.

Teoreeme 2.3–4.2 on võimalik huvitaval kombel geomeetriliselt tõlgendada. Teoreem 1.4: ümmarguse anuma valgustamisel selle põhjas (nt kohvitassis) on selgelt nähtav kaus-tika – kaheharuline keskpunkti poole suunatud teravikuga kõverjoon ehk kiirte mähisjoon peale nende peegeldumist vastu anuma sisekülge. Veereva ratta varjus on nähtav tumedam piirkond, kas ringjoon – teoreem 4.1 – või Pascali tigu – teoreem 4.2. Olukord on eriti tähelepanuväärne, sest paigal pöörleva ratta varjus sellised piirkonnad puuduvad, kuid need tekivad ratta veeremisel. Sel juhul vaid liikumine on kujundite tekke põhjustajaks.

Neljandaks, möödunud sajandi alguses oli probleeme lennuaparaatidega, mis püüdsid vallutada helibarjääri. Lennukid, saavutades heli kiiruse, ei pidanud vastu vibratsioonidele, lagunesid ja lendasid tükkideks. Põhjuseks oli asjaolu, et heli sagedus (mootori müra) on tõlgendatav sfääride parvena. Selle parve mähispinnaks on koonus. Koonus liigub lennuki kiirusega, kui viimane lendab helist kiiremini. Sel juhul ohtu pole, sest lennuk asub koonuse tipus. Ohtlik on lennata heli kiirusega, sest sel juhul lennuki ümbruses kontsentreerub heli, mis on tuhandeid kordi võimsam võrreldes ühe helilaine (sfääri) võimsusega. Koonust, mille tekitab mootori(te) müra, on nähtud visuaalselt ning filmitud.

Seega uurida mähisjooni(-pindu) on äärmiselt vajalik, sest üks võnge teatud ostsilleerimisel võib olla väike ja isegi mitte märgatav, kuid lainete kattumisel ja kuhjumisel võivad tekkida lööklained, mille võimsus on ettearvamatu. Nt mõelgem, kuidas tekib „mulksatus“, kui vette kukub kivike, või tohutu tsunami, mis võib saada tõelise katastroofi põhjustajaks.

Möödunud sajandi suursündmuseks oli, kui prantsuse matemaatik René Thom pani alguse nn „katastroofide“ teooriale\*. Ennekõike teooria näeb ette struktuuride stabiilsust: süsteemi „raputamisel“ jäävad püsima stabiilsed invariandid. Järgmisel „raputamisel“ osa invariante langeb välja ning jäävad püsima veelgi stabiilsemad invariandid. Niiviisi toimub areng ning kohanemine keskkonnaga looduses ja kogu ruumis. Selles protsessis ühed režiimid surevad, teised sünnivad. Näeme vormide teket ja nende mitmekesisust – morfogeneesi. Mähisjoonte teooria kirjeldab siin vormide teket väga näitlikult.

Viimasel ajal on maailma kirjanduses ilmunud hulgaliselt raamatuid ja teisi publikatsioone katastroofide teooria ainetel ning selle rakendusaladest: mehhanikas, füüsikas, majandusteadustes, sotsioloogias, psühholoogias, geoloogias, termodünamikas, embrüoloogias jne. Kogu see teooria kasutab matemaatikat alates geometriast (mida näeme antud bakalaureusetöös) ja lõpetades tõsiste funktsionaalanalüüsi teoreemidega.

---

\*R. Thom pälvis 1958. a. selle avastuse eest Fieldsi preemia, kõrgema autasu matemaatikas.

*Tõeline jõud peitub liikumises.*

*G.W. Leibniz*

*Liikumise vähetundmisel me ei tunne ka loodust.*

*Aristoteles*

## 1 Joonteparve mähisjoone leidmine

Olgu tegemist mitte üheainsa joonega, vaid mingis piirkonnas  $U \in \mathbf{R}$  muutuvast parameetrist  $u$  sõltuva muutuva joone  $\gamma_u$  asendite hulgaga, nn. üheparameetrilise joonteparvega.

**Definitsioon 1.1.** Joont  $\gamma$  nimetatakse joonteparve  $\{\gamma_k: u \in U\}$  *mähisjooneks*, kui ta igas oma punktis puutub üht parve joontest, ilma et tal oleks sellega ühist kaart.

Olgu antud tasemepind  $\{x: F(x_1, x_2, x_3) = 0\}$ , kus  $F(x_1, x_2, x_3) = 0$  on tasemepinna ilmutamata võrrand. Olgu antud piirkonnad  $U \in E_3$  ja  $T \subset \mathbf{R}$  ning kujutus  $F: U \times T \rightarrow \mathbf{R}$  selliselt, et funktsioon  $F(x_1, x_2, x_3, \tau)$  on piirkonnas  $U \times T$  pidevalt diferentseeruv ja võrrand

$$F(x_1, x_2, x_3, \tau) = 0$$

määrab iga fikseeritud  $\tau \in T$  korral mittetühja tasemepinna, mille kõikides punktides  $\nabla F \neq 0$ , kus

$$\nabla F = \left( \frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}, \frac{\partial F}{\partial x_3} \right).$$

**Definitsioon 1.2.** Lihtpinda  $\Upsilon = \{x: \mathbf{x} = \mathbf{x}(u_1, u_2), (u_1, u_2) \in D\}$  nimetatakse pinnaparve *mähispinnaks*, kui ta igas oma punktis puutub üht parve pindadest, omamata ühegagi neist ühist piirkonda.

**Definitsioon 1.3.** Parve *karakteristlikuks punktiks* nimetatakse joone  $\gamma_1$  ja nihutatud joone  $\gamma_1^*$  lõikepunkti piirasendit, kui nihutatud joon viia tagasi esialgsesse asendisse.

## Mähisjoonte leidmise algoritm

Olgu joonteparv  $xy$ -tasandil antud võrrandiga

$$f(x, y, a) = 0.$$

Fikseerime parameetri  $a$ . Selle tulemusena eraldub parvest üks joon. Kui muuta parameetrit  $a$  muudu  $\Delta a$  võrra, siis nihkub joon teise asendisse. Esialgse joone ja nihutatud joone lõikepunkt on määratud süsteemiga

$$\begin{cases} f(x, y, a) = 0, \\ f(x, y, a + \Delta a) = 0. \end{cases}$$

See süsteem on samaväärne süsteemiga

$$\begin{cases} f(x, y, a) = 0, \\ \frac{1}{\Delta a}(f(x, y, a + \Delta a) - f(x, y, a)) = 0. \end{cases}$$

Piirprotsessis  $\Delta a \rightarrow 0$  lähedased jooned ühtivad ja lõikepunktist saab esialgse joone karakteristiklik punkt. Saame süsteemi

$$\begin{cases} f(x, y, a) = 0, \\ f'_a(x, y, a) = 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

kus teine võrrand on esimese võrrandi osatuletis  $a$  järgi. Elimineerime süsteemist (1.1) parameetri  $a$ . Selle tulemusena saame mähisjoone võrrandi

$$\Phi(x, y) = 0.$$

## 2 Ringjoonte ja sirgjoonte parved

### 2.1 Koonus

**Teoreem 2.1.** *Olgu  $xy$ -tasandil antud ringjoonte parv*

$$(x + a)^2 + y^2 = (ka)^2, \quad a > 0, k > 0.$$

*Antud parve mähisjooneks on kaks lõikuvat sirget, mis läbivad nullpunkti.*

*Tõestus.* Eelduse kohaselt on ringjoone keskpunkti koordinaadid  $(-a, 0)$  ja raadius  $ka$ . Kui  $k > 1$ , siis vastab võrrand Doppleri efektile. Hiljem selgub, kui  $k = 1$ , vastab võrrand helibarjäärile ja juht, kus  $k < 1$  vastab olukorrale, mil helibarjäär on ületatud. Moodustame süsteemi, kus teine võrrand on saadud esimese võrrandi diferentseerimisel parameetri  $a$  järgi:

$$\begin{cases} (x + a)^2 + y^2 = (ka)^2, \\ 2(x + a) = 2k^2a, \end{cases} \iff \begin{cases} (x + a)^2 + y^2 = (ka)^2, \\ x + a = k^2a. \end{cases}$$

Süsteem määrab ringjoone karakteristikud punktid. Leiame mähisjoone. Selleks elimineerime parameetri  $a$ :

$$x + a = k^2a \iff x = k^2a - a \iff x = (k^2 - 1)a \implies a = \frac{x}{k^2 - 1}.$$

Asendame parameetri  $a$  ringjoonte parve võrrandisse:

$$\begin{aligned} \left(x + \frac{x}{k^2 - 1}\right)^2 + y^2 &= \left(k \frac{x}{k^2 - 1}\right)^2 \iff x^2 \left(1 + \frac{1}{k^2 - 1}\right)^2 + y^2 = x^2 \left(\frac{k}{k^2 - 1}\right)^2 \\ \iff x^2 \left(\frac{k^2}{k^2 - 1}\right)^2 + y^2 &= x^2 \left(\frac{k}{k^2 - 1}\right)^2 \\ \implies y^2 &= \frac{x^2 k^2 - x^2 k^4}{(k^2 - 1)^2} = \frac{x^2 k^2 (1 - k^2)}{(k^2 - 1)^2} = -\frac{x^2 k^2}{(k^2 - 1)} = \frac{x^2 k^2}{1 - k^2} \\ \implies \boxed{y = \pm \frac{xk}{\sqrt{1 - k^2}}}, & \text{ kui } k < 1. \end{aligned}$$

Oleme saanud mähisjooneks kaks lõikuvat sirget. □

**Järeldus 2.2.** *Ruumis, kui parv pöörleb ümber  $x$ -telje, on tulemuseks pöördkoonus. St iga ringjoon annab sfääri ja kaks sirget (mähisjoont) moodustavad koonuse.*

## 2.2 Kaustika kohvitassis

Sageli on parve mähisjoon paremini nähtav kui üksik joon eraldi. Nagu öeldud, murdlaine võib olla märksa võimsam ja ohtlikum kui üks laine, mis teiste lainetega koos murdlaine põhjustab.

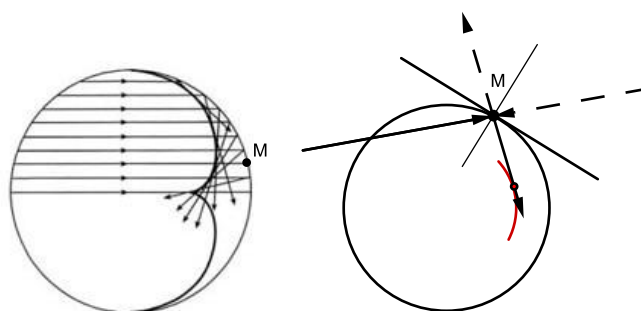
Mähisjooned ja mähispinnad esinevad reaalsuses üsna tihti, nt võivad nad tekitada häireid elektroonikas ning raadiolainete levikul.

Lihtsam juht, mida võib meist igaüks vaadelda päikesepaistelisel kohvijoomisel, on *kaustika kohvitassis*.



JOONIS 2.1. Kaustika kohvitassis

Paralleelsed kiired langevad ringjoone sisse ja peegeldudes vastu ringjoont moodustavad kaustiku.



JOONIS 2.2. Kaustika

**Teoreem 2.3.** Valguskiir kulgeb paralleelselt  $x$ -teljega ühikringjoonele  $x^2 + y^2 = 1$ . Toimub peegeldumine. Peegeldatud kiirte parve mähisjoon on kõverjoon, mille parameetrilised võrrandid on järgmised:

$$\begin{cases} x = \cos t \left( \frac{1}{2} + \sin^2 t \right), \\ y = \sin^3 t. \end{cases}$$

Mähisjoonel on teravikupunkt  $(\frac{1}{2}, 0)$  ja selle kaks kaart väljuvad teravikupunktist ning väärtusel  $t = \frac{\pi}{2}$  toimub puutumine ühikringjoonega punktides  $(0, \pm 1)$ .

*Tõestus.* Olgu ringjoon ühikringjoon. Võtame sellel punkti  $M(\cos t, \sin t)$ . Kiir langeb vasakult punkti  $M$  ja peegeldub vastu rinjoont. Peale peegeldumist kulgeb kiir piki sirget

$$y - \sin t = \tan 2t (x - \cos t). \quad (2.1)$$

Võrrand (2.1) määrab sirgete parve, parameetriks on  $t$ . Diferentseerime parameetri järgi ning moodustame süsteemi (1.1):

$$\begin{aligned} -\cos t &= \frac{2}{\cos^2 2t} (x - \cos t) + \tan 2t \sin t, \\ x - \cos t &= \frac{(-\cos t - \tan 2t \sin t) \cos^2 2t}{2} = -\frac{\cos^2 2t (\cos t + \tan 2t \sin t)}{2} \\ &= \frac{-\cos^2 2t \cos t - \cos 2t \sin 2t \sin t}{2} = \frac{-\cos 2t (\cos 2t \cos t + \sin 2t \sin t)}{2} \\ &= -\frac{1}{2} \cos 2t \cos(2t - t) \\ &= -\frac{1}{2} \cos 2t \cos t. \end{aligned}$$

Avaldame koordinaadid  $x$  ja  $y$  parameetri  $t$  funktsioonidena – saame kaustiku parameetrilised võrrandid:

$$\begin{aligned} x &= -\frac{1}{2} \cos 2t \cos t + \cos t = \cos t \left( 1 + \frac{1}{2} (\sin^2 t - \cos^2 t) \right) \\ &= \cos t \left( \frac{3}{2} \sin^2 t + \frac{1}{2} \cos^2 t \right) = \cos t \left( \frac{1}{2} (\sin^2 t + \cos^2 t) + \sin^2 t \right) \\ &= \cos t \left( \frac{1}{2} + \sin^2 t \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y &= \tan 2t \left( \frac{1}{2} \cos t + \cos t \sin^2 t - \cos t \right) + \sin t = \tan 2t \cos t \left( \frac{1}{2} + \sin^2 t - 1 \right) + \sin t \\
&= \frac{\sin 2t}{\cos 2t} \cos t \left( \frac{1}{2} - \cos^2 t \right) + \sin t = \frac{2 \sin t \cos^2 t \left( \frac{1}{2} - \cos^2 t \right)}{\cos^2 t - \sin^2 t} + \sin t \\
&= \frac{\sin t \cos^2 t - 2 \sin t \cos^4 t + \sin t \cos^2 t - \sin^3 t}{\cos^2 t - \sin^2 t} \\
&= \frac{2 \sin t \cos^2 t - 2 \sin t \cos^2 t (1 - \sin^2 t) - \sin^3 t}{\cos^2 t - \sin^2 t} \\
&= \frac{2 \sin t \cos^2 t - 2 \sin t \cos^2 t + 2 \sin^3 t \cos^2 t - \sin^3 t}{\cos^2 t - \sin^2 t} \\
&= \frac{\sin^3 t (2 \cos^2 t - 1)}{\cos^2 t - \sin^2 t} = \frac{\sin^3 t (2 \cos^2 t - \sin^2 t - \cos^2 t)}{\cos^2 t - \sin^2 t} \\
&= \sin^3 t.
\end{aligned}$$

Arvutame ka koordinaatide  $x$  ja  $y$  tuletised parameetri  $t$  järgi:

$$\begin{cases} x = \cos t \left( \frac{1}{2} + \sin^2 t \right), \\ y = \sin^3 t, \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \dot{x} = 3 \sin t \left( \frac{1}{2} - \sin^2 t \right), \\ \dot{y} = 3 \cos t \sin^2 t. \end{cases}$$

Kuna koordinaadid  $(x, y)$  määravad kaustika punkti hetkel  $t$ , siis tuletised  $(\dot{x}, \dot{y})$  määravad kaustika puutujavektori selles punktis. Vaatame seda kaustikat lähemalt. Esiteks, kaustika on sümmeetriline  $y$ -telje suhtes, sest  $y(-t) = -y(t)$ . Kaustika lõikub  $x$ -teljega punktis  $(\frac{1}{2}, 0)$ , mis on ka selle teravikupunkt,  $\dot{x} = \dot{y} = 0$ . Kaks kõverat kaart hargnevad punktist  $(\frac{1}{2}, 0)$  ja kulgevad kuni puutumiseni ringjoonega punktides  $(0, \pm 1)$ .  $\square$

**Märkus.** Kui kiir langeb ringjoonele paremalt ja peegeldub vastu ringjoont väljaspoolt, siis peale peegeldumist kiire suund on sama, mis sirgjoonel (2.1), ning mähisjoon on seesama kaustika – kuigi kiir on ringjoonest väljas ja kaustika ringjoone sees.

### 3 Konhoid

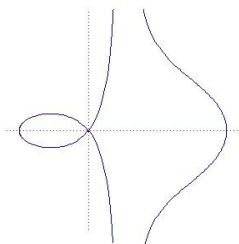
Kui (kõver)joone kohavektor on mingi konstantse löigu  $l$  võrra pikendatud ja lühendatud (nii ühele kui teisele poole), siis kahele poole moodustub antud joone *konhoid*<sup>†</sup>. Konhoidi on kasutatud kuubi duplikatsiooni ja nurga trisektsiooni probleemide lahendamisel ning ka antiikarhitektuuris. Vana-Kreeka sammaste vertikaalläbilõige oli konhoidi silmuse kujuline.

Tähtsamad erijuhud on järgmised:

- 1) sirgjoone konhoid e. *Nikomedese konhoid*,
- 2) ringjoone konhoid e. *Pascali tigu*,

Pascali teo 4 erijuhtu (ringjoone diameeter on  $a$ ):

- 2a)  $l \geq 2a$  – sile ovaal,
- 2b)  $a < l < 2a$  – lohuga ovaal (2 käänupunkti),
- 2c)  $a > l$  – aasaga ovaal<sup>‡</sup>,
- 2d)  $a = l$  – teravikuga ovaal e. *kardioid*.



JOONIS 3.1. Konhoid

---

<sup>†</sup>Kreeka sõnast "merekarv".

<sup>‡</sup>Jalgratta kodarais me näeme Pascali tigu juhul 2c), vt. teoreem 4.2.

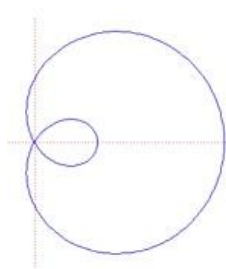
## 4 Pascali tigu

Pascali tigu on ringjoone konhoid selle ringjoone ühe punkti suhtes. Selle joone avastas Blaise Pascali isa Étienne Pascal, aga nime andis sellele Gilles-Personne Roberval aastal 1650. Polaarkoordinaatides on joon esitatav võrrandiga

$$\rho = a + b \cos t,$$

kus  $b$  on ringjoone diameeter. Ristkoordinaatides on Pascali teo võrrand

$$(x^2 + y^2 - bx)^2 = a^2(x^2 + y^2).$$



JOONIS 4.1. Pascali tigu

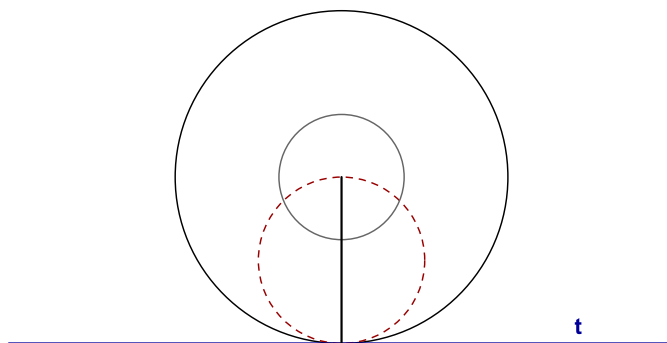
### 4.1 Pascali tigu jalgratta kodarais

**Teoreem 4.1.** *Veeregu ratas mööda sirgjoont. Sel juhul on igal kodaral karakteristik punkt ja kõikide kodarate karakteristikud punktid asuvad ringjoonel, mille diameetriks on ratta kodar, mis on risti antud sirgega  $t$ .*

Põhjendame seda järgmiselt. Liikumine võib tekitada üsna ootamatuid tulemusi. Kujutame, et ratas raadiusega 1 veereb vasakult paremale piki  $x$ -telge. Alghetkel ratta keskpunkt on punktis  $(0,1)$ . Ratta kodar on sirgjoon  $y - 1 = kx$ . Ratta veeremisel tekib sellel karakteristik punkt – löikepunkt ristsirgega  $y = -\frac{x}{k}$ , kuna 0-punkt on hetkelise pöörde

püsipunkt. Kui kodar heidab varju maapinnale, siis karakteristikliku punkti vari kestab kauem, kui kodara ükskõik millise teise punkti vari. Kodarate kõik karakteristiklikud punktid asuvad ringjoonel, mille diameetriks on ratta kodar, mis hetkel on risti  $x$ -teljega, ja keskpunktiks punkt  $(\frac{1}{2}, 0)$ :

$$\begin{cases} y - 1 = kx, \\ y = -\frac{x}{k}, \end{cases} \implies \boxed{x^2 + y^2 - y = 0.}$$



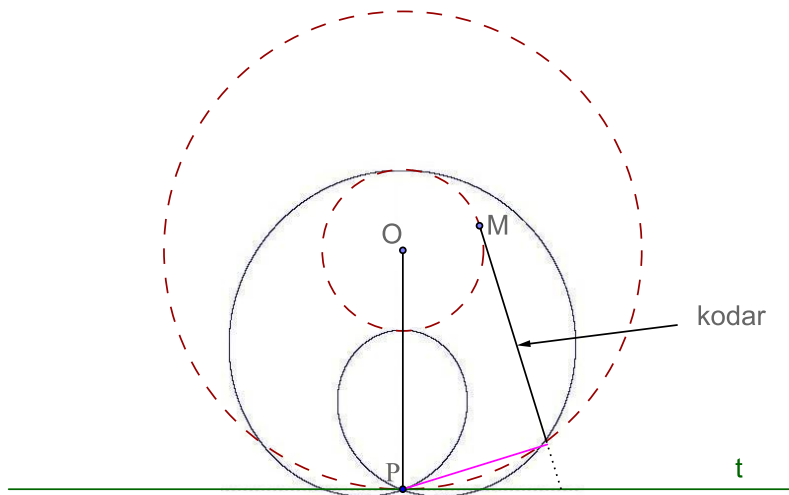
JOONIS 4.2. Ringjoon ratta varjul

Seetõttu, kui paigal pöörleva ratta vari on ühtlaselt hall, siis ringjoon, kus asuvad kodarate karakteristiklikud punktid, ratta veeremisel tekitab ratta varjus piirkonna, mis üldise taustaga võrreldes näib tumedamana.

Delikaatsem on olukord jalgratta ratta varjus, sest sel juhul kodarad ei moodusta kimpu, nagu eelmises näites, vaid moodustavad ringjoone (ratta rummu) puutujate parve.

**Teoreem 4.2.** *Jalgratta ratta kodarad on ringjoone (rummu) puutujad. Igal kodaral on karakteristiklik punkt. Kõik karakteristiklikud punktid asuvad kõverjoonel ehk Pascali teol. Pascali tigu on ühtlasi ringjoone konhoid, mille diameetriks on lõik  $OP$ , kus  $O$  on ratta keskpunkt ja  $P$  on ratta puutepunkt sirgega  $t$ .*

Joonisel on kujutatud ühikringjoon  $x^2 + y^2 = 1$  (rumm) ja selle punktist  $M(\cos t, \sin t)$  on tõmmatud ringjoone puutuja  $x \cos t + y \sin t = 1$  (kodar). Olgu punkt  $P(0, -a)$  pöörlemise



JOONIS 4.3. Pascali tigu ratta kodarais

hetkeline keskpunkt (ratta puutepunkt maapinnaga). Tõmbame punktist  $P$  ristsirge kodarale ja moodustame süsteemi, mis määrab kodaral karakteristliku punkti:

$$\begin{cases} x \cos t + y \sin t = 1, \\ x \sin t - (y + a) \cos t = 0. \end{cases} \quad (4.1)$$

Kui süsteemist (4.1) elimineerida parameeter  $t$ , saame võrrandi (vt. raamis), mida rahuldavad karakteristlike punktide koordinaadid. Elimineerime parameetri  $t$ , siis

$$\begin{aligned} \tan t &= \frac{y + a}{x}, \\ \cos t &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + (y + a)^2}}, \\ \sin t &= \frac{y + a}{\sqrt{x^2 + (y + a)^2}}. \end{aligned}$$

Asendame  $\sin t$  ja  $\cos t$  süsteemi (4.1) esimeses võrrandis, siis

$$\boxed{(x^2 + y^2 + ay)^2 = x^2 + (y + a)^2.}$$

Võrrand määrab  $xy$ -tasandil kõverjoone, mille nimetuseks on *Pascali tigu*. Jalgratta ratta varjus Pascali tigu jätab tumeda jälje.

**Märkus.** Suvalise arvu  $a$  korral on kõverjoon nn. *ringjoone konhoid*, kuid vaid juhul  $a > 1$  on see Pascali tigu. Juhul  $a = 1$  on see joon *kardioid*. Kui 0-punkt nihutada punkti  $P$ , saab võrrand tavapärase kuju:

$$\begin{cases} \tilde{x} = x, \\ \tilde{y} = y + a, \end{cases} \implies \boxed{(\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 - a\tilde{y})^2 = \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2.}$$

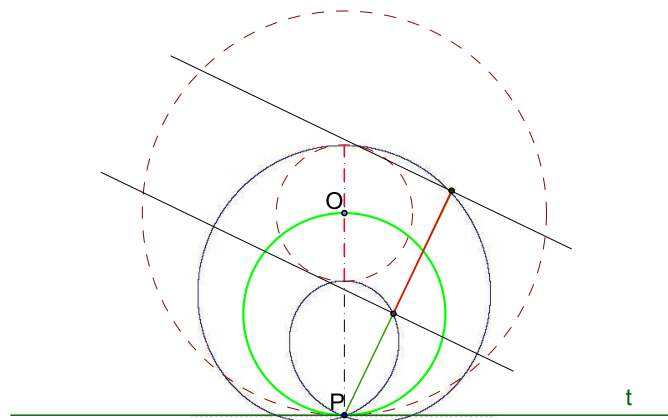
Minnes koordinaatidelt  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  üle polaarkoordinaatidele  $(\rho, \varphi)$ , saame ka polaarvõrrandi:

$$\begin{cases} \tilde{x} = \rho \cos \varphi, \\ \tilde{y} = \rho \sin \varphi, \end{cases} \implies \boxed{\rho = \pm 1 + a \sin \varphi.}$$

Vastavalt definitsioonile on suvalise kõverjoone konhoid punkti  $P$  suhtes joon, millel liiguvad lõigu otspunktid, kui selle keskpunkt liigub mööda antud joont ning pikendus läbib punkti  $P$ . Antud juhul kõne all on ringjoone konhoid, mille diameetriks on  $OP = a$  ja võrrandiks

$$\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 - a\tilde{y} = 0, \quad \text{e. polaarkoordinaatides} \quad \boxed{\rho = a \sin \varphi.}$$

Võrreldes polaarvõrrandeid  $\rho = a \sin \varphi$  ja  $\rho = \pm 1 + a \sin \varphi$ , ilmneb tõepoolest, et ringjoone konhoid punkti  $P$  suhtes on juhul  $a > 1$  Pascali tigu, ning lõigu pikkus on 2.



JOONIS 4.4. Rohelise ringjoone konhoid

## 5 Helibarjäär

### 5.1 Ajalugu

Helibarjääri olemasolu ilmnes 1940. aastail kiirete lennukite katsetamisel. See avaldus juhitavuse kadumises, vibreerimises ning lennukite lagunemises. Sageli oli tulemuseks lennuki purunemine. Enne, kui õpiti helist kiiremini lendama, hukkus katsetel palju lendureid.

Esimese lennuk, mis ametlikult lendas helist kiiremini, oli 1947. aastal rakettmootoriga lennuk X-1. 1948. aastal oli ThrustSSC esimene auto, mis ületas helikiiruse. 2010. aastal õnnestus Felix Baumgartneril kosmosest vabalangemises helikiirus ületada. Samal aastal avastasid Hollandi teadlased, et mingi eseme vette viskamisel tekib ketkeks tilluke õhujuga, mis paiskub ülehelikiirusega üles.

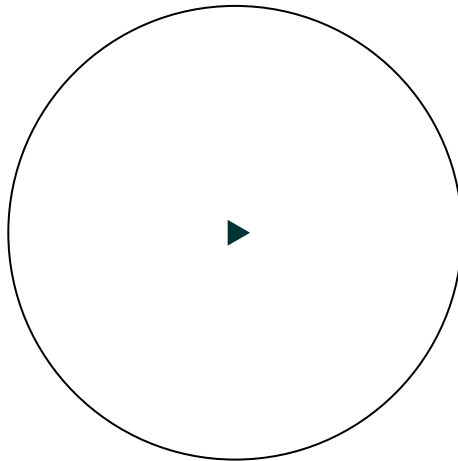
Mõned palentoloogid on väitnud, et helikiirus võidi ületada juba 150 miljonit aastat tagasi. Arvutimudelite põhjal jõuti järeldusele, et teatud pika sabaga dinosaurused võisid omada võimet lüüa oma sabaga nii, et löögi kiirus ületas ülehelikiiruse. Nendeks dinosaurusteks võisid olla näiteks Apatosaurus ja Diplodookus. See avastus on teoreetiline ja vaieldav. Kuid on teada, kui meteoriidid sisenevad Maa atmosfääri, siis tavaliselt langevad nad kiiremini kui heli.



JOONIS 5.1. Ülehelikiirusel lendav lennuk

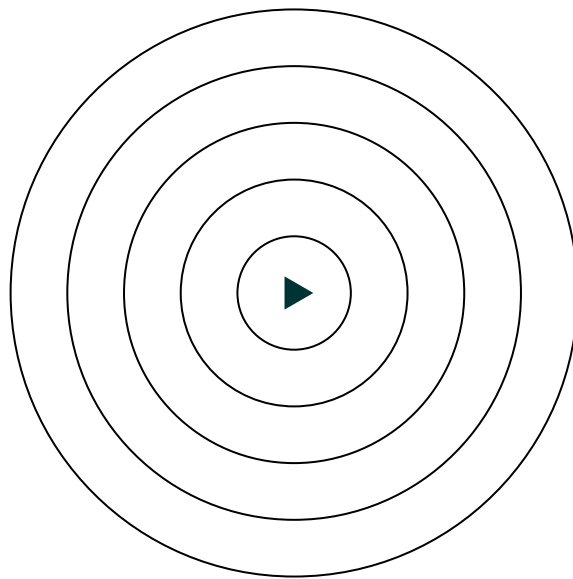
## 5.2 Helibarjääri ületamine

Kui heliallikas asub ühes punktis paigal, on helilaine sfäär, mis atmosfääris paisub kiirusega ca 340 m/s. Helilaine kannab endaga energiat, mis kiiresti haihtub, sest sfääri pindala suureneb – mida kaugemal oleme, seda nõrgem on heli.



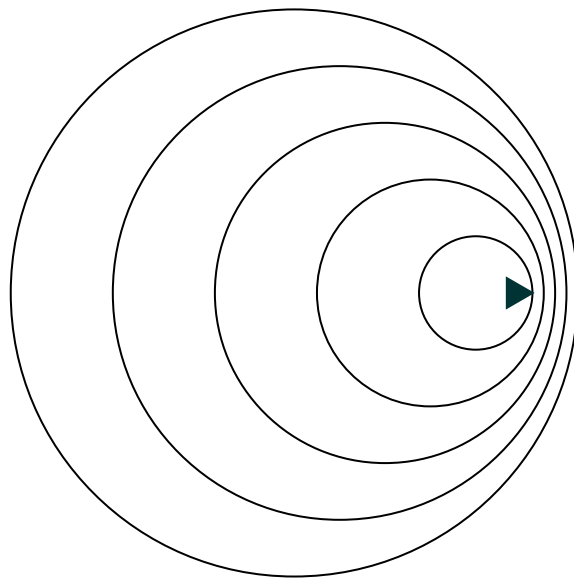
JOONIS 5.2. Helilaine - sfäär

Meie kõrv tajub sagedusi ligikaudu 15 000 võnget sekundis. Kujutame ette 15 000 kontsentrilist sfääri ühe sfääri sees, mille raadius on 340 m. Jagame 340 meetrit 15000 meetriga, saame kahe sfääri vahelise kauguse ca 2 cm. Selline on heli sagedus, mida kuuleme.



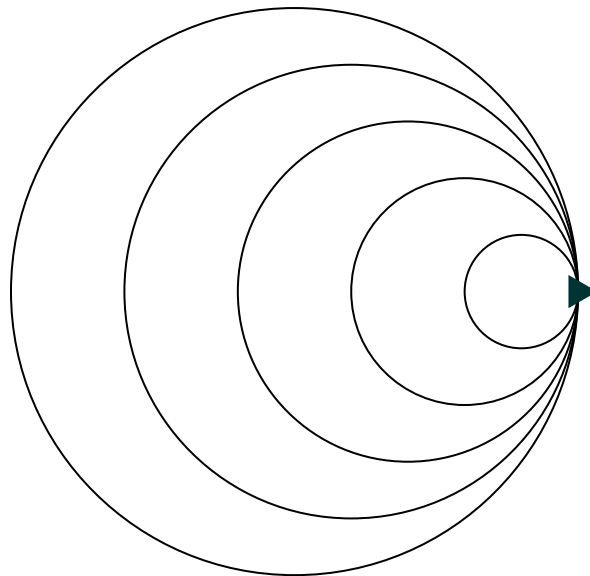
JOONIS 5.3. Sagedus

Kui heliallikas liigub teatud suunas, siis sfäärid ei ole kontsentrilised, sest iga järgmise sfääri keskpunkt on nihkunud liikumise suunas ettepoole. Lennuki ees on sagedus kõrgem ja lennuki taga madalam. See on niinimetatud Doppleri efekt – vaatleja ja laineallika lähenemisel teineteisele sagedus suureneb, teineteisest eemaldumisel väheneb.



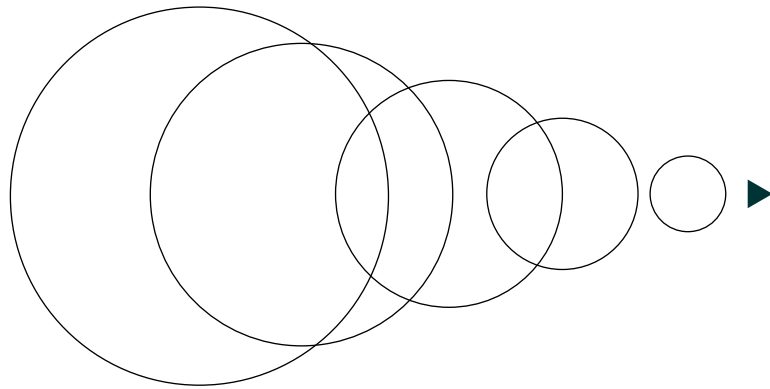
JOONIS 5.4. Doppleri efekt

Eeldame, et lennuk on saavutanud helikiiruse 340 m/s. Kui ta on lennanud selle kiirusega ühe sekundi, siis ta on jäänud iga sfääri peale, st lennuki lähedases ümbruses on kontsentreerunud 15 000 sfääri ja energia on kasvanud 15 000-kordseks võrreldes ühe sfääriga. Ükskõik kui nõrk energia ühel sfääril ka poleks, siis nüüd on see tohutult kordistunud ja kujutab tõsist ohtu lennuaparaatidele ja pilootidele. Lennuk on saavutanud helibarjääri ning selle kiirusega pikemat aega lendamine on eluohtlik.



JOONIS 5.5. Helikiirus

Kui lennuk on ületanud helibarjääri, st lennates kiiremini kui 340 m/s, siis ta jätab endast maha kõik sfäärid. Piloot ei kuule mingit müra ja pole mingeid heli poolt tekitatud vibratsioone. Lennuki sabas on koonus, mille sisse jäävad kõik sfäärid – heli on koonuse sees, väljaspool koonust valitseb vaikus. Kui oleme maapinnal ja lennuk lendab meist üle, ei kuule me lennukimootori müra seni, kuni koonus pole meieni jõudnud. Kui helikoonus meieni jõuab, käib äge kärgatus ning peale seda on kuulda müra. Matemaatikud ütlevad, et koonus on sfääride ehk sfääriparve mähispid.



JOONIS 5.6. Heli ületamine

# **Enveloping lines of families of curves**

## **Bachelor's Thesis**

**Riina Org**

### **Summary**

The point of this bachelor's thesis is to explore the envelopes of family of curves and curves characteristic points on the plane. In this thesis it has been studied enveloping surface of family of spheres (cone of sound in the tail of aircraft), caustic of lighting the inside of container, curved lines formed by characteristic points of spokes of wheel (for example Pascal's limaçon in the spokes of bicycle's wheel). The Result is miscellaneous possible applications in interpretation of wave formation and shock waves.

## Viited

- [1] M. Rahula, *Sissejuhatus Diferentsiaalgeomeetriasse*, TÜ, Tartu, 1991.
- [2] R.Gilmore, *Catastrophe Theory for Scientists and Engineers*, 1,2, J.Wiley& Sons, New-York, 1981.
- [3] P.I. Stewart, *Les Chroniques de Rose Polymath; Oh! Catastrophe*, Belin, Paris, 1982.
- [4] Sound Barrier - Wikipedia [http://en.wikipedia.org/wiki/Sound\\_barrier](http://en.wikipedia.org/wiki/Sound_barrier) (vaadatud 05.08.2012)
- [5] Coffecup [http://graceweir.com/project20/The\\_Coffee\\_Cup\\_Caustic](http://graceweir.com/project20/The_Coffee_Cup_Caustic) (vaadatud 05.01.2013)
- [6] Cup <http://www.nanowerk.com/spotlight/spotid=19915.php> (vaadatud 08.09.2012)
- [7] Konhoid ja Pascali tigu  
<http://art.tartu.ee/~illi/kunstigeomeetria/koverad/jooned4.htm> (vaadatud 08.03.2013)

## **Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja üldsusele kättesaadavaks tegemiseks**

Mina, Riina org (sünnikuupäev: 23.10.1990),

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose „Joonteparvede mähisjooned“, mille juhendaja on prof. Maido Rahula,
  - 1.1. reprodutseerimiseks säilitamise ja üldsusele kättesaadavaks tegemise eesmärgil, sealhulgas digitaalarhiivi lisamise eesmärgil kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni;
  - 1.2. üldsusele kättesaadavaks tegemiseks Tartu Ülikooli veebikeskkonna kaudu, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace kaudu kuni autoriõiguse kehtivusaja tähtaja lõppemiseni:
2. olen teadlik, et punktis 1 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile;
3. kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.

Tartus, **02.06.2013**