ТАРТУСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
КАФЕДРА ГЕОМЕТРИИ

Э. Г. РЕЙМЕРС

ТЕОРЕМЫ О СРЕДНЕМ ЗНАЧЕНИИ В ТЕОРИИ ДВОЙНЫХ РЯДОВ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических наук
профессор Г. Ф. КАНГРО

ТАРТУ 1958

ТАРТУСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
КАФЕДРА ГЕОМЕТРИИ

Э. Г. РЕЙМЕРС

ТЕОРЕМЫ О СРЕДНЕМ ЗНАЧЕНИИ В ТЕОРИИ ДВОЙНЫХ РЯДОВ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических наук
профессор Г. Ф. КАНГРО

ТАРТУ 1958

Диссертация написана на эстонском языке, представлена в виде рукописи, состоящей из 72 страниц нормального формата, и имеющей следующие разделы: Введение, I Обозначения, основные понятия и вспомогательные леммы, II Теоремы о среднем значении для двойных рядов, III Умножение суммируемых рядов, IV Теоремы умножения для методов Рисса и Вороного-Нерлунда. В связи с теорией теорем о среднем значении и умножением двойных рядов в работе доказывается 31 теорема, из которых в автореферате приводятся результаты 10 теорем. В списке литературы указано 19 работ.

Диссертация выполнена в Тартуском Государственном университете при кафедре геометрии в течение 1954 по 1957 г. Защита назначена Ученым Советом естественно-математического факультета Тартуского Государственного Университета на 10 окт. 1958 г.

Дата отправления автореферата 10 сент. 1958 г.

Ученый секретарь ТГУ И. Маароос

Общую теорию теорем о среднем значении для обычных рядов создали В. Юркат и А. Пейеримхофф [2, 3, 5]. Они применили его для изучения включения методов суммирования [3] и проблемы множителей суммируемости [2, 5]. Для некоторых конкретных методов суммирования теоремы о среднем значении были известны уже раньше (см. [1, 7]). В случае двойных рядов теорему о среднем значении применил Г. Кангро [4] для изучения проблемы множителей суммируемости.

Целью настоящей диссертации является разработка общей теории теорем о среднем значении в случае двойных рядов и применение ее для исследования включения методов суммирования и проблемы умножения рядов.

В ПЕРВОЙ ГЛАВЕ диссертации излагаются основные понятия, определения и вспомогательные леммы.

Введем следующие классы двойных последовательностей* $x=\{x_{\mu\nu}\}$: bc — класс ограниченно сходящихся последовательностей ($|x_{\mu\nu}|<M$ и существует $\lim\limits_{\mu\nu\to\infty} x_{\mu\nu}=\xi$), rc — класс регулярно сходящихся последовательностей (существуют $\lim\limits_{\mu\nu\to\infty} x_{\mu\nu}=\xi$, $\lim\limits_{\mu\to\infty} x_{\mu\nu}=x^{\nu}$, $\lim\limits_{\nu\to\infty} x_{\mu\nu}=x_{\mu}$), a — класс абсолютно сходящихся последовательностей ($\Sigma|\overline{\Delta}_{\mu\nu}x_{\mu\nu}|<\infty$).

В дальнейшем буквой α будем обозначать один из этих классов и буквой β — один из классов bc и rc. Мы будем называть $x=\{x_{\mu\nu}\}$ α-сходящейся, если $x\in\alpha$.

---

* Если пределы изменения индексов в последовательностях и суммах не указаны, то они имеют все целочисленные значения от 0 до ∞. Ниже везде $\Delta_{\mu\nu}a_{\mu\nu}=\Delta_{\mu}(\Delta_{\nu}a_{\mu\nu})$, $\overline{\Delta}_{\mu\nu}a_{\mu\nu}=\overline{\Delta}_{\mu}(\overline{\Delta}_{\nu}a_{\mu\nu})$, причем $\Delta_{\nu}a_{\nu}=a_{\nu}-a_{\nu+1}$, $\overline{\Delta}_{\nu}a_{\nu}=a_{\nu}-a_{\nu-1}$ $(a_{-1}=0)$.

В диссертации рассматриваются треугольные методы суммирования $A=(a_{mn\mu\nu})$, вводимые преобразованием

$$A_{mn}(x)=\sum_{\mu\nu=0}^{mn} a_{mn\mu\nu}\, x_{\mu\nu}.$$

Если $a_{mnmn} \neq 0$, то называем метод A нормальным.

Мы скажем, что ряд Σu_{kl} A_α-суммируем к сумме $A(x)$, если $\{A_{mn}(x)\}$ α-сходится к $A(x)$, где

$$x=\{x_{\mu\nu}\}=\{\sum_{kl=0}^{\mu\nu} u_{kl}\},$$

и пишем $x \in \alpha A$. Множество последовательностей αA мы рассматриваем как пространство Банаха. Если все последовательности $x \in \alpha$ A_{rc}-суммируемые с сохранением суммы и пределов по строкам и столбцам, то скажем, что метод A вполне $\alpha \to rc$ регулярен. Аналогично определяются другие виды регулярности метода A. Соответствующие условия для регулярности излагаются ввиде вспомогательных лемм.

ВО ВТОРОЙ ГЛАВЕ диссертации даются необходимые и достаточные условия для α-совершенности метода A и для сходимости по отрезкам в пространстве αA, а также излагается общая теория теорем о среднем значении с применением к изучению включения методов суммирования.

Общее понятие отрезка g_α в пространстве αA мы определяем как любую линейную комбинацию элементов основного множества пространства α. Специально определяется понятие отрезка для последовательности $x \in \alpha A$ так что имеет смысл рассматривать сильную и слабую сходимость по отрезкам в пространстве αA. Доказывается, что если в пространстве αA имеет место слабая сходимость по отрезкам, то также и сильная сходимость по отрезкам, и метод A оказывается α-совершенным. При этом мы называем нормальный метод A α-совершенным, если $g_\alpha \in \alpha A$ и если множество отрезков g_α плотно в αA.

Теоремы о среднем значении для метода $A=(a_{mn\mu\nu})$ определяются следующими оценками (где $x=\{x_{\mu\nu}\}$ — произвольная последовательность и K — константа):

$$(1)\quad \left|\sum_{\mu\nu=0}^{kl} a_{mn\mu\nu} x_{\mu\nu}\right| \leqslant K \left|A_{k'l'}(x)\right| \qquad \begin{matrix}(0 \leqslant k' \leqslant k \leqslant m),\\ (0 \leqslant l' \leqslant l \leqslant n),\end{matrix}$$

$$(2)\quad \left(\sum_{mn=0}^{\infty} - \sum_{mn=0}^{kl}\right) \left|\bar{\Delta}_{mn} \sum_{\mu\nu=0}^{kl} a_{mn\mu\nu} x_{\mu\nu}\right| \leqslant K \left|A_{k'l'}(x)\right| \quad (\text{—»—})$$

$$(3)\quad \sum_{\mu\nu=0}^{mn} \left|a_{mn\mu\nu} x_{\mu\nu}\right| \leqslant K \sum_{\mu\nu=0}^{mn} \left|\bar{\Delta}_{\mu\nu} A_{\mu\nu}(x)\right|.$$

Здесь в случае оценок (1) и (2) полагаем, что существуют такие числа k' и l', что соответствующее неравенство выполняется.

Даются достаточные, а также необходимые условия для выполнения оценок (1), (2) и (3). Если A вполне $\beta \to \beta$ регулярен и удовлетворяет оценке (1), то он β-совершенный, а если A вполне $\alpha \to \alpha$ регулярен и удовлетворяет оценке (2), то A α-совершенный. В обоих случаях в αA имеет место сходимость по отрезкам.

В ТРЕТЬЕЙ ГЛАВЕ диссертации мы применяем теорию теорем о среднем значении для изучения проблемы умножения суммируемых двойных рядов, где ряд-произведение составляется по правилу Коши.

Общее решение проблемы, как известно, из-за сложности условий имеет главным образом теоретическое значение. Оказывается, однако, что при помощи теорем о среднем значении можно выделить такие классы неконкретизированных методов суммирования для которых решение оказывается эффективным и получаемые условия хорошо трактуемы. Мы проиллюстрируем это на двух примерах.

Обозначим последовательности частных сумм рядов Σu_{kl}, Σv_{kl} и Σw_{kl} соответственно, через U, V и W.

Т е о р е м а. Пусть метод А нормален, вполне $\alpha \to \alpha$ регулярен и удовлетворяет оценкам (2) и (3). Пусть метод B удовлетворяет таким же условиям, а метод C — условию *

$$\left|\frac{\Delta_{kl}\, c_{mn\mu+k\nu+l}}{a_{mnkl}\, b_{m-kn-l\mu\nu}}\right| \leqslant M \quad (m, n, k, l, \mu, \nu = 0,1,\ldots).$$

* В этом условии члены, неимеющие смысла, исключаются.

Ряд-произведение Σw_{kl} при любых рядах $\Sigma u_{kl} \epsilon \alpha A$ и $\Sigma v_{kl} \epsilon \alpha B$ C_β-суммируем к сумме $C(W) = A(U)B(V)$ тогда и только тогда, когда метод C $\alpha \to \beta$ регулярен.

Теорема. Пусть метод A нормален, вполне $\beta \to \beta$ регулярен, удовлетворяет условиям (1) и *

$$\sum_{\mu\nu=0}^{m-k\, n-l} \left| \Delta_{\mu\nu} \frac{a_{mn\mu+k\nu+l}}{a_{m-kn-l\mu\nu}} \right| \leqslant N \qquad (m, n, k, l = 0, 1, \ldots).$$

Ряд-произведение Σw_{kl} для всех α-сходящихся рядов Σu_{kl} тогда и только тогда A_β-суммируем к сумме $A(W) = A(V)\,\Sigma u_{kl}$, когда ряд Σv_{kl} A_β-суммируем.

В конце главы доказывается, что для некоторых классов методов суммирования в полученных теоремах умножения некоторые предположения оказываются излишними (например требование выполнения теорем о среднем значении). Сюда относятся в частности методы Вороного-Нёрлунда.

В ЧЕТВЕРТОЙ ГЛАВЕ диссертации из общих теорем предыдущей главы выводятся теоремы умножения для методов суммирования Рисса и Вороного-Нёрлунда.

Основные теоретические результаты настоящей диссертации опубликованы в Ученых записках Тартуского университета [6].

Литература

[1] Bosanquet L., J. London Math. Soc., 16 (1941), 146—148.
[2] Jurkat W. — Peyerimhoff A., Math. Z., 55 (1951), 92—108.
[3] Jurkat W. — Peyerimhoff A., Math. Z., 56 (1952), 152—178.
[4] Кангро Г., Уч. зап. Тартуск. ун-та, 46 (1957), 3—42.
[5] Peyerimhoff A., Math. Z., 57 (1953), 265—290.
[6] Реймерс Э., Уч. зап. Тартуск. ун-та, 62 (1958).
[7] Riesz M., Acta Szeged, 3 (1923), 114—126.

---

* В этом условии члены, неимеющие смысла, исключаются.

«Pioneer», Tartu, Kastani 38. VIII 58. 1420. 160. MB 05573.

Бесплатно.