A. J. FETISOV, I. N. ŠEVTŠENKO, V. L. GONTŠAROV
ja I. A. GIBŠ

MATEMAATIKA ÕPETAMINE KOOLIS POLÜTEHNILISE ÕPETUSE ÜLESANNETE VALGUSEL

EESTI RIIKLIK KIRJASTUS

A. J. FETISOV, I. N. ŠEVTŠENKO, V. L. GONTŠAROV
ja I. A. GIBŠ

MATEMAATIKA ÕPETAMINE KOOLIS POLÜTEHNILISE ÕPETUSE ÜLESANNETE VALGUSEL

MATERJALE ÕPETAJATELE

EESTI RIIKLIK KIRJASTUS
TALLINN 1954

Originaali tiitel:
Академия Педагогических Наук РСФСР. Институт методов обучения.
А. И. Фетисов, И. Н. Шевченко, В. Л. Гончаров и И. А. Гибш.

Преподавание математики в школе в свете задач политехнического обучения.

Материалы в помощь учителю.

Издательство Академии Педагогических Наук РСФСР, Москва, 1953 г.

Tõlkinud R. Siirak.

MATEMAATIKA ÕPETAMINE JA POLÜTEHNILINE ÕPETUS KOOLIS.

Matemaatikas õpitakse materiaalse maailma ruumiliste vormide ja arvuliste väärtuste suhet. Erakordselt suur suhete ja seadusepärasuste terviklus, mida õpitakse matemaatikas, on tingitud sellest, et matemaatilised teadmised on aluseks loodusteadustele, tehnikale ja põllumajandusele. Koos sellega ei või kunagi unustada seda, et kindlad ja sügavad teadmised matemaatikast juba iseendast kujutavad polütehnilise õpetuse alust. Teostades matemaatika õpetamise protsessis polütehnilise õpetuse ülesannet, peame me kõige muu kõrval näitama, kuidas kasutatakse teadmisi üldistest matemaatilistest seadustest inimeste mitmesugustel tegevusaladel. Kooli matemaatika kursuse sisu kõik küsimused tuleb esitada nii, et õpilastele saaks selgeks, milleks on vaja seda või teist valemit või teoreemi, missugused praktilised küsimused viivad selle või teise matemaatilise ülesande püstitamisele.

Paralleelselt teoreetilise materjali õppimisega ja vahetus seoses sellega peavad õpilased omandama täieliku kompleksi mitmesuguseid teadmisi ja oskusi.

Nad peavad oskama lahendada kirjalikke ja suulisi ülesandeid, kasutada mitmesuguseid teatmikke ja tabeleid, arvutada mitmesuguste arvutusriistadega, teostada mitmesuguseid majanduslikke arvestusi, peavad oskama koostada skeeme, diagramme ja graafikuid, oskama vabalt käsitleda joonestus- ja mõõtmisinstrumente ning teostada mitmesuguseid mõõtmisi.

Üheaegselt sellega on vajalik õpilasi suunata mudelite ja lihtsamate mõõteriistade valmistamisele, mille tulemusena õpilased omandavad mõningad oskused papitööst, vineeritööst, klaasitööst, metallitööst jne. ning õpivad kasutama mõningaid puusepa ja lukksepa tööriistu.

On tarvis pöörata tähelepanu ka sellele, et õpilased, kes võtavad osa polütehnilise õpetusega seotud ekskursioonidest, kasutaksid neid ekskursioone oma teadmiste rikastamiseks näidetega kõikvõimalikest matemaatika rakendustest tööstuses ja põllumajanduses. Kui see on võimalik, siis tuleb neil juhtudel pöörata tähelepanu sellele, et õpilased saaksid ekskursioonil materjali, mida võiks võtta matemaatiliste harjutuste aluseks.

Õpilaste poolt täielike ja sügavate teadmiste omandamisel matemaatikast on eriti suur tähtsus polütehnilisel õpetusel.

Ainult teades, missugust määratu suurt osa etendab matemaatika inimese teoreetilises ja praktilises tegevuses, ainult otseselt nähes matemaatiliste meetodite jõudu ja võimsust, võivad õpilased täielikult hinnata selle teaduse tähtsust.

Peale selle peavad õpilased polütehnilise õpetuse protsessis avastama ja mõistma matemaatika seost paljude teiste teadustega, see võimaldab nende teaduste ja ka matemaatika enda paremat omandamist.

Teooria ja praktika vahelise pideva seose vajalikkus polütehnilisel õpetamisel kasvatab õpilastes analüüsi ja sünteesi võimeid, sest nad peavad paljudel juhtudel lahti mõtestama protsesse ja nähtusi, avastama nendes funktsionaalse sõltuvuse, esitades seda sõltuvust matemaatilise valemi kujul.

Üheaegselt sellega tuleb õpilastes kasvatada iseseisva, süstemaatilise, täpse ja korraliku töötamise oskust, ilmutades sealjuures loomingulist initsiatiivi ja algatusvõimet. Iseseisva töö mitmesugused vormid (mõõtmised maastikul, modelleerimine) peavad samaaegselt õpetama kollektiivselt ja õigesti organiseeritult töötama.

Õpilaste tutvustamine mitmesuguste tootmisharudega aitab mõista ja hinnata meie kodumaa teaduse ja tehnika tohutuid saavutusi ja samal ajal aitab teadlikumalt läheneda tulevase elukutse valikule.

Polütehnilise hariduse andmine koolis on võimatu ilma õpetaja aktiivse loomingulise tööta. Õpetaja peab ilmutama suurt initsiatiivi, leidlikkust, oskust leida elavaid ja ilmekaid näiteid, valida objekte mudelite valmistamiseks jne.

Olulist abi õpetajale selles töös peavad osutama õpetajate kollektiiv ja esmajärjekorras hästiorganiseeritud ainekomisjoni töö. Erilist tähelepanu tuleb osutada sellisele kogemuste vahetamise vormile nagu vastastikune tundide ja praktiliste õppuste külastamine sellele järgneva detailse arutlusega ning kriitilise analüüsiga.

On tingimata vajalik organiseerida koostöö mitmes naaberdistsipliini ainekomisjonis. Sel viisil võiksid vahetada kogemusi matemaatika, joonestamise, füüsika, keemia, astronoomia ja bioloogia õpetajad.

Lõpuks on tähtis, et koolil oleks küllaldane materiaalne baas praktiliste õppuste läbiviimiseks. Sellise baasi organiseerimine ei tohiks valmistada erilisi raskusi, kuna suurema osa vajalikest vahendeist saavad õpilased ise õpetaja juhtimisel valmistada. Siit järgneb, et eelkõige on vajalik hoolitseda selle eest, et see baas oleks varustatud hädavajalike materjalidega ning tööriistadega. Siin peaks leiduma mitmesuguseid materjale plakatite, diagrammide, tabelite, graafikute, jooniste valmistamiseks, materjale mudelite valmistamiseks (kartong või vineer, klaas, plekk, traat, liim jne.). Neile lisanduvad hädavajalikud lihtsamad tööriistad. Edasi on vaja joonestusvahendeid, instrumente ja nende juurde kuuluvaid abivahendeid mõõtmiste teostamiseks klassis ja maastikul. Kohustuslike arvutusabinõude hulka tuleb arvata arvelaud ja logaritmiline arvutuslükat, nii taskuskantav kui ka demonstreerimiseks sobiv. Baasis peavad leiduma ka tabelid ja käsiraamatud.

Sõltuvalt antud kooli kohalikest võimalustest on vajalik kas eraldada eri tuba (matemaatika kabinet) materjalide ja instrumentide paigutamiseks ning mudelite valmistamiseks või, äärmisel juhul, vähemalt statsionaarne koht (kapp) füüsika või joonestamise kabinetis, kus hoitakse kõik õppuste läbiviimiseks vajalik materjal.

Kõik ülalesitatu näitab kõige üldisemates joontes neid suundi, millistest tuleb juhinduda matemaatika õpetamisel, et lahendada polütehnilise õpetuse teostamise küsimust koolis. Alljärgnevates osades käsitletakse neid küsimusi üksikasjalisemalt, eraldi iga matemaatilise distsipliini kohta, milledest moodustub keskkooli matemaatika kursus.

ARITMEETIKA.

Aritmeetika, koolis esimesena õpitav matemaatiline distsipliin, on määratu suure teoreetilise ja praktilise tähtsusega. Selle õppimise objekt — arv — haarab endaga erakordselt suure ringi esemeid ja nähtusi. Seepärast seisab meie ülesanne eelkõige selles, et õpetada lastele aritmeetika aluseid, selle teooriat ja praktikat. Lähtudes aritmeetika õpetamise protsessis polütehnilise õpetuse ülesandest, peame me kõigil võimalikel juhtudel lähendama õpetamist elus vajalike küsimuste lahendamisele, kasvatama õpilaste teadmisi ja oskusi, mis peavad leidma otsest kasutamist mitmesugustel praktilise elu aladel.

TEHTED TÄIS- JA MURDARVUDEGA.

Oskus sooritada tehteid täis- ja murdarvudega on kõige vajalikumaks oskuseks, mida kool võib anda oma kasvandikele.

Otsitava arvulise väärtuse ligikaudne hindamine.

Täis- või murdarvudega sooritatava tehte eel on kasulik hinnata ligikaudselt otsitava resultaadi väärtust, s. t. määrata peast umbkaudselt kindlaks kuipalju numbreid on resultaadis. Näiteks nõutakse arvude 389 ja 28 korrutamist. Selleks et leida kuimitu numbrit tuleb korrutisse, võib kasutada jämedat ümmardamist, s. t. korrutada peast 400 ja 30; saame 12 000. Selle alusel võib öelda, et korrutisse ei tule sel juhul üle viie numbri. Peale selle võib leida piirid, milliste vahele langeb korrutis. Kui näiteks on vaja korrutada 3,63 arvuga 2,4, siis ümmardame algul tegureid puudusega:

$$3{,}5 \times 2 = 7;$$

siis aga ümmardame tegureid liiaga:

$$4 \times 2{,}5 = 10.$$

Siit nähtub, et korrutis $3{,}63 \times 2{,}4$ on suurem kui 7, kuid väiksem kui 10. Korrutis on 8,712.

Kontroll.

On tarvis õpetada õpilasi süstemaatiliselt kontrollima oma arvutuste tulemusi.

L i i t m i s e k o n t r o l l. Selleks et avastada viga liitmisel, võib liitmist teostada teistkordselt, võttes liidetavad uues järjekorras. Sel juhul ei või juba korduda viga, mis võis tekkida esimesel liitmisel, kuna teisel korral me teostame peast esimesest erinevad liitmised. Näiteks:

152	Liidame peast.	289	Liidame peast.
+317	2+7=9; 9+9=18	+317	9+7=16; 16+2=18
289	1+5+1=7; 7+8=15	152	1+8+1=10; 10+5=15
758	1+1+3=5; 5+2=7.	758	1+2+3=6; 6+1=7.

Lõpuks võib liitmise kontrollimist teostada ka pöördtehte — lahutamise abil.

L a h u t a m i s e k o n t r o l l. Lahutamist võib kontrollida kõigepealt lahutamise enda abil; selleks on vaja vähendatavast lahutada vahe. Teiseltpoolt võib lahutamist kontrollida liitmise abil, liites selleks lahutatava ja vahe. Mõninga vilumuse juures ei ole tarvidust lahutatava ja vahe uuesti väljakirjutamiseks, vaid on küllalt (kui lahutamine on kirjutatud tulbana) nende liitmisest samas suunaga alt üles.

K o r r u t a m i s e k o n t r o l l. Korrutamise kontrollimist võib teha nii korrutamise enda abil, teostades sel juhul tegurite ümberpaigutamist, kui ka jagamise abil, jagades korrutist ühega tegureist.

Võib näidata veel teisigi kontrollimise viise. Esiteks võib korrutamist mõnikord kergesti kontrollida jaguvuse tunnuste abil. Olgu näiteks vaja 3 462 korrutada 24-ga. Pöörates tähelepanu sellele, et mõlemad tegurid jaguvad 3-ga, võime öelda, et korrutis jagub 9-ga. Selline korrutis ka antud juhul saadakse. Kuid kujutame endale ette, et teine osakorrutis oleks meil 6 824, mitte aga 6 924; sel juhul oleks lõpptulemus 82 088. Teostades kontrolli me avastaksime, et meie korrutis (82 088) ei jagu 9-ga; järelikult on korrutamisel juhtunud viga. Kus nimelt? Esimene osakorrutis 13 848 jagub 3-ga ja seega kahtlust ei tekita. Teine osa-

$$\begin{array}{r} 3\,462 \\ \times\ \ 24 \\ \hline 13\,848 \\ +6\,924\ \ \\ \hline 83\,088 \end{array}$$

korrutis (6 824) ei jagu 3-ga; tähendab siin on tekkinud viga.

Ü h e k s a - k o n t r o l l. Peale selle võib korrutamist kontrollida veel nõndanimetatud «üheksa-kontrolli» abil. See viis põhineb asjaolul, et mistahes arv annab jagamisel 9-ga niisuguse jäägi, mis võrdub sama arvu numbrite summa jagamisel 9-ga saadud jäägiga. Olgu näiteks vaja korrutada 514 arvuga 26. Kirjutame tegurid harilikul viisil ja leiame korrutise 13 364. Kontrollime seda.

$$\begin{array}{r} 514 \\ \times\ 26 \\ \hline 3084 \\ +\ 1028 \\ \hline 13\,364 \end{array}$$

Liidame korrutatava numbrid: 5+1+4=10, jagame selle 9-ga ja leiame jäägi. See on 1.

Liidame korrutaja numbrid: 2+6=8. Korrutame saadud arvud 1 ja 8 ning saame: 1×8=8. Kui saadud korrutise analoogiliselt leitud numbrite summa jagamisel 9-ga saame samuti 8, siis võib loota, et korrutamine on teostatud õigesti. Liidame korrutise numbrid: 1+3+3+6+4=17. Summa 9-ga jagamisel saame jäägiks 8. Järelikult on resultaat õige.

Mõningate vilumuste juures teostatakse kontrollimine selle võtte abil peast ning see ei nõua suurt ajakulu. Siiski oleks vajalik märkida, et see meetod ei garanteeri tulemuste veatust.

On küllaldane näidata kas või seda, et ta jätab avastamata niisugused vead nagu numbrite ümberpaigutus resultaadis, juhuslikult kirjutatud nullid ja üheksad jne.

Siin kirjeldatud «9-kontroll» võimaldab mõningaid lihtsustusi arvutamisel: numbrite liitmisel võib ära jätta üheksad ja kõik liidetavate grupid, mis summana annavad 9.

Teostame arvu 4 732 korrutamise arvuga 413.

$$\begin{array}{r} 4\,732 \\ \times\ 413 \\ \hline 14196 \\ +\ 4732 \\ 18928 \\ \hline 1\,954\,316 \end{array}$$

Liidame korrutatava numbrid: 4+7+3+ +2=16, peale jagamist 9-ga saame jäägi 7. Liidame korrutaja numbrid: 4+1+3=8. Korrutame saadud arvud 7×8=56; peale jagamist 9-ga saame jäägi 2. Liidame korrutise numbrid: 1+9+5+4+3+1+6=29, pärast jagamist 9-ga jääb jäägiks 2. Korrutise numbrite liitmisel oleks võinud ära jätta 9, 5 ja 4, 3 ja 6 ning järele oleks jäänud ainult 2.

J a g a m i s e k o n t r o l l. Jagamise õigsust võib kontrollida esiteks jagamise abil, ja nimelt jagades jagatava jagatisega, teiseks korrutamise abil: korrutades jagaja ja jagatise, ning kolmandaks 9-kontrolli abil.

Arvutamine arvelaual.

Arvelaud kujutab endast väga lihtsat ja koos sellega mugavat arvutusvahendit. Kõigepealt kujutab arvelaud endast asendamatut vahendit numeratsiooni õppimisel. Samuti kuulub arvelaud majanduslike ja rahanduslike arvutuste juures kõige laialdasemalt levinud arvutusvahendite hulka. Soovides õppida arvelaual arvutama, peavad õpilased endile selgeks tegema, et arvelaud on määratud peamiselt arvude liitmiseks ja lahutamiseks. Seda on vaja teada ja siis saavutada harjutuste abil nende kahe põhilise tehte kiire teostamine. Mis puutub korrutamisesse ja jagamisesse arvelaual, siis taandub nende tehete sooritamine liitmisele ja lahutamisele.

Arvelaud on selles suhtes kasulik, et tugevasti kergendades ja kiirendades arvutamist, eriti liitmist ja lahutamist, ei tee ta arvutusprotsessi mehhaaniliseks, mõtlematuks, vaid vastupidi — aitab kaasa pidevale kümnendsüsteemi ja põhiliste matemaatiliste seaduste kordamisele. Peale selle ei tee töö arvelaual arvutamist ühekülgseks, sest paljudel juhtudel tuleb arvutajal valida kõige mugavam ja otstarbekohasem võte tehte sooritamiseks. Inimene, kes juba kaua on töötanud arvelaual, leiab katseliselt palju lihtsaid ja kasulikke (kiiruse mõttes) võtteid aritmeetiliste tehete teostamiseks. Näiteks muudab arvutaja sageli tegurite järjekorda korrutamisel, kui see lihtsustab tööd. Näiteks võib korrutise 333×587 asendada korrutisega 587×333. Tegureid on mõnikord kasulik esitada summa, vahe või korrutise kujul.

Arvutamine tabelite abil.

Tabelite abil arvutamist tuleb lugeda vajalikuks vormiks arvutuspraktikas. Õpetaja, tutvustades õpilasi tabelitega, peab selgitama neile, et nad oma teadmiste alusel võivad kasutada juba niisuguseid arvutusvahendeid, milliseid kasutavad kogemustega arvutajad.

Tabelid võetakse koolis tarvitusele alates V klassist. Mitmesuguseid tabeleid rakendatakse hiljem igal õppeaastal.

Kool ei valmista ette spetsialiste-arvutajaid; ta ei ole suuteline neid ette valmistama. Kuid kool seab endale ülesandeks tutvustada õpilasi praktikas kasutatavate vajalike arvutamisviisidega ja võtetega. Selletõttu peab kool sisendama oma kasvandikesse huvi tabelite abil arvutamise vastu ning tekitama neis soovi vajalikel juhtudel kasutada tabeleid.

V klassis on vaja kõigepealt kasutada korrutamistabeleid. Alata võib kahekohalise arvu kahekohalise arvuga korrutamise tabelist. Siin ei puututa kokku mingisuguste raskustega, kuna otsitav korrutis leitakse tabelist lõplikul kujul. Pärast mõningat treeningut võib nende tabelite abil teostada kümnendmurdude korrutamist. Sel korral ei ole korrutamine eelmisest raskem, kuid ta nõuab õpilaselt tähelepanu, et õigesti asetada koma korrutises. Viimast asjaolu peab õpetaja kasutama selle fakti allakriipsutamiseks, et korrutise numbriline koosseis ei olene koma asukohast tegurites. Kas korrutame 0,46 ja 32 või 4,6 ja 32 või 46 ja 32 või 46 ja 0,32 või 46 ja 3,2 jne. — igal juhul kirjutatakse korrutis samade numbritega (1; 4; 7 ja 2); erinevus määratakse ainult koma asendiga. See jääb õpilasel sageli «kahe silma vahele».

Järgmiseks sammuks on kolmekohaliste arvude korrutamine kahekohaliste arvudega samade tabelite abil. Mugavuse eesmärgil võib niisuguse korrutise asendada kahekohalise arvu korrutamisega kolmekohalise arvuga. Mõninga treeningu juures võib saavutada nende arvutuste teostamisel suure kiiruse.

Peale korrutamist võib õpilastele näidata jagamist samade tabelite abil. Pöördtehe nõuab õpilastelt tähelepanu ja lihtsaid täiendavaid arvutusi, kuna antud jagatav ainult üksikutel juhtudel võib leiduda tabelis, ning tuleb valida sellele kõige lähem arv.

Protsentarvutus.

Protsentidega kohtutakse mistahes tehnilistes, rahanduslikes, majanduslikes ja teistes arvutustes.

Protsentarvutamise ülesannete lahendamiseks soovitatakse kasutada tabeleid. Seda juhist tuleb õpetajate poolt rakendada; tuleb hinnata tabelite tähtsust, sest need lähendavad kooli arvutusmeetodeid elulistele ülesannetele (hoiukassades ja teistes finantsasutustes kasutatakse laialdaselt tabeleid).

Tabelid võivad olla mitmesugused. Me eeldame, et õpetajad ilmutavad siin oma leiduritalenti. Brošüüri lehekülgedel esitame kaks tabeli vormi.

Tabel protsentide arvutamiseks.

	1%	2%	3%	4%	. . .	10%	. . .	15%	. . .
10 000	100	200	300	400	. . .	1 000	. . .	1 500	. . .
9 000	90	180	270	360	. . .	900	. . .	1 350	. . .
8 000	80	160	240	320	. . .	800	. . .	1 200	. . .
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
1 000	10	20	30	40	. . .	100	. . .	150	. . .
900	9	18	27	36	. . .	90	. . .	135	. . .
800	8	16	24	32	. . .	80	. . .	120	. . .
700	7	14	21	28	. . .	70	. . .	105	. . .
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
100	1	2	3	4	. . .	10	. . .	15	. . .
90	0,9	1,8	2,7	3,6	. . .	9	. . .	13,5	. . .
80	0,8	1,6	2,4	3,2	. . .	8	. . .	12,0	. . .
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
10	0,1	0,2	0,3	0,4	. . .	1	. . .	1,5	. . .
9	0,09	0,18	0,27	0,36	. . .	0,9	. . .	1,35	. . .
8	0,08	0,16	0,24	0,32	. . .	0,8	. . .	1,20	. . .
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
1	0,01	0,02	0,03	0,04	. . .	0,1	. . .	0,15	. . .

Leheküljel 12 on antud protsentarvutamise tabeli vorm. See ei ole täidetud täielikult, kuid antud eeskuju alusel ei ole raske taastada tervet tabelit. Selle tabeli kasutamisel on mugav tarvitada kantselei arvelauda.

Leiame selle tabeli alusel 4% arvust 9 781. Tehted võib jaotada järgmiselt:

4%	arvust	9000	on	360
4%	arvust	700	on	28
4%	arvust	80	on	3,2
4%	arvust	1	on	0,04
4%	arvust	9781	on	391,24

Mõningate vilumuste juures ning arvelauda kasutades saadakse see kokkuvõte küllalt kiiresti.

Lõpuks võib märgatavalt vähendada selle tabeli mahtu, jättes sellesse ainult ühe alljaotuse, näiteks 10 000-st kuni 1000-ni. Sellist tabelit kasutades ei tohi unustada, et vajaliku arvu sajaliste, kümneliste ja üheliste protsentide otsimisel on tarvis tabelis antud arvus asetada koma ühe, kahe, kolme koha võrra vasakule.

Leheküljel 13 on antud protsendiliste suhete tabel (osad esimesest ja teisest leheküljest). Tabeli esimest veergu vasakult on tarvis täiendada sajani, samuti tuleb sajani täiendada ka ülemist rida (tabeli pead).

Selle tabeli kasutamisel ei esine mingisuguseid raskusi. Kui on tarvis leida kahe antud arvu suhe protsentides, siis esimese neist võtame vasakult esimesest veerust, teise aga esimesest reast (tabeli peas). Otsitava suhte protsentides leiame esimese arvuga algava rea ja teise arvuga algava veeru lõikepunktist. Näiteks arvude 3 ja 13 suhe protsentides on 23,08%, arvude 11 ja 15 suhe aga 73,33%.

On silmanähtav, et selle tabeli abil teostatavate tehete sfääri võib laiendada. Selle abil võib näiteks leida mitte ainult arvude 13 ja 20 suhet protsentides, vaid ka arvude 13 ja 200 suhet. Arvude 13 ja 20 suhe protsentides, nagu tabelist näha, on 65,00%. Kui me hakkame otsima arvude 13 ja 200 suhet, siis siin viimane suhte liige on suurenenud 10 korda; tähendab, suhe on vaja võtta 6,5%.

LIGIKAUDNE ARVUTAMINE.

Viiendast klassist alates võib kooli praktikasse sisse tuua ligikaudse arvutamise. Selle maht peab olema äär-

Protsendiliste suhete tabel.

	11	12	13	14	15	16	. . .	20	21	22	23	24	25
1	9,09							5,00					
2		16,67	15,38					10,00					
3			23,08	21,43	20,00	. . .	. . .	15,00					
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .					
10				71,43	66,67			50,00					
11	100,00				73,33								
12		100,00				75,00		60,00					
13			100,00					65,00					
. . .													
20								100,00					
21									100,00	95,45			
22										100,00			
23											100,00		
24												100,00	96,00
25													100,00
	26	27	28	. . .	. . .	32	33	34	. .	. . .	38	39	40
1	3,85												
2		7,41											
3			10,71										

miselt piiratud, teoreetilised teadmised sellest peavad olema minimaalsed. Ligikaudsete arvude ja nendega teostatavate tehete sisseviimine kooli tarvituseks peab toimuma järkjärgult. Kõigepealt on tarvis lapsi aeg-ajalt veenda selles, et arvud, mida me kohtame ajalehtedes, teatmikes, ülesannete kogudes, kaubapakkidel on peaaegu kõik ligikaudsed. Kui me loeme ajalehest, et miitingust võttis osa 5 tuhat inimest, et demonstratsioonist võttis osa 150 tuhat inimest, või seda, et linna elanike arv on 93 tuhat inimest, või roosa pastilaa pakile on kirjutatud kaal 250 g, või musta kalamarja pakile on kirjutatud kaal 120 g, kui steriilse pleegitatud sideme pikkuseks on märgitud 5 m ja laiuseks 10 cm, siis kõik need arvud on ebatäpsed — nad on ühel või teisel määral ligikaudsed.

Ümardamine.

Arvude ümardamisega on vaja tutvustada õpilasi juba kursuse alguses, numeratsiooni kordamise juures. Siin on tarvis anda reeglid arvude ümardamiseks kümnelisteni, sajalisteni, tuhandelisteni jne. nii puudusega kui liiaga ümardamise kohta.

Jagamine jäägiga.

Teist korda kohtutakse ligikaudsete arvudega täisarvude vallas pärast nelja aritmeetilise tehte kordamist. Siin tuleb vaatluse alla jagamine jäägiga, mille juures tekib ligikaudne jagatis üheliste täpsusega. Oma olemuselt on see ligikaudse arvutamise algus; sellest momendist alates on ligikaudne arv seotud aritmeetiliste tehetega.

Ligikaudse, üheliste täpsusega jagatise leidmisel on vaja rääkida tekkinud veast, jättes aga mainimata, missugune see viga on (kas absoluutne või relatiivne).

Näiteks, kui me jagame 687 25-ga, saame jagatiseks 27 ja jäägiks jääb 12. Tõeline jagatis on suurem kui 27, kuid väiksem kui 28. Ta saadakse, kui me, olles leidnud 27, jätkame jagamist, s. o. jagame jäägi 12 25-ga. See harilik murd annab meile tehtud vea suuruse, mis on märgatavalt väiksem kui 1.

Aritmeetiline keskmine.

Kolmandat korda me saame ligikaudse tulemuse aritmeetilise keskmise arvutamisel. Ei ole võimalik loendada kõiki juhte, kus tuleb lahendada sellist ülesannet. Juhime tähelepanu ainult üksikutele: keskmise kiiruse leidmine, keskmise temperatuuri leidmine, inimese sammu keskmise pikkuse arvutamine, rea kaalutavate esemete keskmise kaalu leidmine jne. Ühtesid neist juhtudest kohatakse täisarvude õppimisel, teisi — murdarvude õppimisel, ülejäänuid aga kord ühel, kord teisel juhul.

Ligikaudne jagatis.

Kümnendmurdude õppimisel tuleb jällegi seada üles küsimusi arvude ümardamisest, kuid seekord juba palju laiemas mõttes. Kõige lähemaks ülalmainitule osutub ligikaudse jagatise leidmine, alguses sellisel juhul, kus võib arvutada ka täpse jagatise, kuid kus meie teatud kaalutlustel piirdume ligikaudsega. Perioodiliste (lõputute) murdude avaldamisel oleme peale selle asjaolude sunnil sunnitud võtma nende ligikaudsed väärtused täpsusega kuni 0,1; 0,01; 0,001 jne.

Harilike murdude muutmisel kümnendmurdudeks, samuti paljudel juhtudel kaasneb ümardamine ja ligikaudsete resultaatide leidmine täpsusega 0,1; 0,01; 0,001 jne.

Absoluutne ja relatiivne viga.

Viienda klassi õpilasi võib tutvustada absoluutse ja relatiivse veaga. See küsimus tuleb anda õpilastele väga lühidal määral. Ta peab olema sõnastuselt kokkusurutud, kuid siiski küllalt väljendusrikas. Õpilased peavad omandama mõistete «absoluutne viga» ja «relatiivne viga» mõtte. Relatiivne viga võib olla antud protsentides. Õpilaste tutvustamine absoluutse veaga on vajalik, kuna ilma selleta nad ei mõista näiteks niisuguse väljenduse nagu «jagatis on leitud sajandiku täpsusega» mõtet. Sellise väljenduse mõtet võib selgitada järgmise fraasi abil: «sel juhul on absoluutne viga väiksem kui üks sajandik». Mis puutub relatiivse vea mõistesse, siis on see vajalik mõõtmiste kvaliteedi hindamiseks. Õpilased peavad mõistma, et kui 5 m pikkuse toa pikkuse mõõtmisel on tekkinud viga 1 cm ja 14 cm pikkuse hambaharja pikkuse mõõtmisel on tekkinud sama viga, siis esimest mõõtmist võib nimetada heaks, teist aga mitterahuldavaks. Mõlemal juhul on absoluutne viga 1 cm, kuid esimesel juhul relatiivne viga on $^1/_{500}$ ehk 0,2%, teisel juhul aga $^1/_{14}$ ehk 7,1%. Mõõtmiste kvaliteedi võrdlemiseks kasutatakse relatiivset viga.

Mida on siin vaja õpilastelt nõuda? Esiteks nende faktide täpset mõistmist. Teiseks oskust arvutada absoluutset viga, kui on antud mõõdetava eseme täpne mõõde ja tema ligikaudne mõõde; oskust arvutada relatiivset viga, kui on antud mõõdetava suuruse mõõde ja absoluutne viga. Edaspidi võivad meie nõuded vaevalt laieneda, kui arvestada õpilaste vanust ja nende ettevalmistatust matemaatika alal. Sellepärast ei saa nõuda (äärmiselt V ja VI klassis) mingisuguse aritmeetilise tehte resultaadi vea hindamist. See tekitaks tõsiseid raskusi õpilastele.

Kuna jagamistabelites, pöördarvude tabelites, diameetri järgi ringi ümbermõõdu arvutamise tabelites, protsentarvutamise tabelites ja teistes on antud ligikaudsed arvud, siis ei tohi seda ka unustada nende tabelite kasutamisel. Ülesannete lahendamisel kaudsete andmetega on vaja ümardada kas tabelist saadud arve või ülesandes antud arve selleks, et saada võrdse täpsusega andmeid.

Tehted ligikaudsete arvudega.

Jääb veel üle vaadelda tehteid ligikaudsete arvudega. Nelja tehte õpetamisel kümnendmurdude ligikaudsete väärtustega, ei tohi anda mingisugust teooriat. Õpilased peavad rea ülesannete ja harjutuste tulemusena ise tulema vajalike reeglite juurde, mida on tarvis kasutada nende tehete sooritamisel. On tarvis mõista, et teoreetilised alused oleksid õpilastele ülejõukäivad. Sellel etapil võib piirduda «numbrite arvestuse» reeglitega, mille all mõistetakse reegleid, mis lubavad kindlaks määrata säilitamisele kuuluvate numbrite arvu selle või teise matemaatilise tehte resultaadis, kui on teada numbrite arv ligikaudsetes komponentides. Nende reeglite sõnastamiseks on tarvis defineerida kaks terminit: *kümnendkoht ja tüvenumber.*

Arvu kümnendkohtadeks nimetatakse selle arvu kõiki numbreid, mis asuvad paremal pool koma.

Arvu tüvenumbriteks nimetatakse kõiki tema numbreid *peale nullide, mis asuvad vasakul pool esimesest nullist erinevast numbrist, ja neid nulle, mis asuvad arvu lõpus juhul, kui need on asetatud tundmatute või ärajäetud numbrite asemele.*

Näiteks arv 73,407 omab 5 tüvenumbrit ja 3 kümnendkohta.

Pöörates tähelepanu nendele definitsioonidele, võime me sõnastada numbrite arvestuse reeglid järgmiselt.

Ligikaudsete arvude liitmisel ja lahutamisel on tarvis säilitada niimitu *kümnendkohta*, kuipalju neid oli antud arvudest kõige väiksema kümnendkohtade arvuga ligikaudses arvus.

Ligikaudsete arvude korrutamisel ja jagamisel on tarvis resultaadis säilitada niimitu *tüvenumbrit*, kuipalju neid oli antud arvudest kõige väiksema tüvenumbrite arvuga ligikaudses arvus.

Selgitame öeldut näidetega. Olgu nõutud nelja ligikaudse arvu 2,369; 17,2; 8,65 ja 73,21 summa leidmine. Antud liidetavate kümnendkohtade arvud on erinevad: kolm, kaks ja üks kümnendkoht. Summas on tarvis võtta ainult niimitu *kümnendkohta*, kui palju neid on antud arvudest kõige väiksema täpsusega liidetaval. Selliseks liidetavaks on järjekorras teine liidetav, millel on üks kümnendkoht. Seepärast me kõigepealt jätame antud arvudes ära kõik kümnendkohad alates teisest kohast ja jätame neile niisuguse murru järgu, mis on kõigil liidetavatel. Ärajätmisel on muidugi tarvis ümardada. Liidetavad kirjutame tulpa. Otsitav summa on 101,5. Me säilitasime summas ühe kümnendkoha, s. t. niimitu, kuimitu neid oli antud liidetavatest kõige väiksema kümnendkohtade arvuga ligikaudsel arvul.

$$\begin{array}{r} 2,4 \\ 17,2 \\ +\ 8,7 \\ 73,2 \\ \hline 101,5 \end{array}$$

Teostame nüüd lahutamise. Olgu vaja arvust 0,342 lahutada 0,07265. Kuna vähendataval on ainult 3 kümnendkohta, siis säilitame ka lahutatavas sama palju kohti. Sel juhul ka vahe omab kolm kümnendkohta (0,269).

$$\begin{array}{r} 0,342 \\ -0,073 \\ \hline 0,269 \end{array}$$

Korrutame arvu 2,449 arvuga 0,12. Korrutataval on neli tüvenumbrit, korrutajal aga kaks. Korrutame arvud antud kujul ja siis säilitame korrutises niimitu tüvenumbrit, kuimitu tüvenumbrit on kõige väiksema tüvenumbrite arvuga teguris, s. o. kaks (0,29).

$$\begin{array}{r} 2,449 \\ \times 0,12 \\ \hline 4898 \\ +\ 2449 \\ \hline 0,29\,388 \\ \hline 0,29 \end{array}$$

Jagame 12,14 arvuga 0,874. Jagatavas on 4 tüvenumbrit, jagajas aga 3. Tähendab, jagatises tuleb säilitada kolm tüvenumbrit. Teostame jagamise harilikul viisil, saame 13,9, täpsusega 0,1 (liiaga).

Kokkuvõtte «numbrite arvestamise» reeglitest võib leida prof. V. M. Bradise teostest, eriti aga tema poolt koolidele koostatud tabelitest (tabel XXI).

TÄHELINE MÄRKIMINE JA VALEMID.

Valemite kasutamine kõikvõimalike arvutuste juures peab igal õppeaastal järk-järgult laienema.

Siinkohal peab aga silmas pidama seda, et õpilasel ei ole esimestel tundidel veel küllaldast kalduvust valemite kasutamiseks. Nad ei näe tarvidust nende kasutamiseks ja ei mõista nende kasulikkust. Sellepärast on vajalik esitada probleem selliselt, et õpilased hindaksid valemite tähtsust. Selleks on tarvis valemite abil lahendada lihtsaid ülesandeid. Siiski, kui antakse ülesanne, milles on otsitavaks ainult üks (ainus) arv, eesmärki ei saavutata. Võtame ülesande: leida tee, mille läbib keha 10 minutiga, liikudes kiirusega $50 \frac{\text{m}}{\text{min.}}$. Õpilane annab kohe vastuseks $50 \times 10 = 500$ (m). Kui temal lastakse seda ülesannet lahendada valemi $s = v \cdot t$ abil, siis ta hämmastub ja kõige tõenäolisemalt vastab: «kuid ma juba lahendasin selle ilma valemita».

Selleks et veenda õpilasi valemite kasulikkuses, on tarvis esitada ülesandeid, milledes otsitavaks ei ole mitte üks, vaid mitu arvu.

Näitena võtame kerge ja lastele arusaadava ülesande.

Telegrammi saatmisel maakohta, kus pole telegraafi, võetakse iga sõna eest 0,25 rbl. ja telegrammi kohaleviimise eest 3 rbl. Kui palju tuleb maksta telegrammi eest, milles on 10 sõna? 11 sõna? 12 sõna? 13 sõna? 14 sõna? 15 sõna? . . . . 30 sõna?

Niisuguse ülesande lahendamiseks võime kirjutada valemi $y = 0{,}25\,x + 3$. Selle valemi abil võib leida mitte üht arvu, vaid paljusid arve, asetades x asemele järgimööda arvud 10; 11; 12 jne. Tähendab, selle valemi järgi meie lahendame nagu seeria väikeseid ülesandeid. Niisugust fakti lõpuks märgatakse õpilaste poolt ja pärast seda nad hakkavad enam hindama valemeid.

Võtame veel ühe analoogilise ülesande. Raha saatmisel telegraafiga võetakse iga saja rubla eest 2 rbl.; peale selle iga kirjaliku sõna eest 0,25 rbl. ja lõpuks täiendavalt 10 rbl. saadetava igasuguse suurusega summa pealt. Kui palju tuleb maksta

100 rbl. ja 5-sõnalise teksti saatmise eest?
200 rbl. „ 5-sõnalise „ „ „
300 rbl. „ 6-sõnalise „ „ „
300 rbl. „ 7-sõnalise „ „ „
400 rbl. „ 5-sõnalise „ „ „
400 rbl. „ 6-sõnalise „ „ „
400 rbl. „ 7-sõnalise „ „ „
400 rbl. „ 8-sõnalise „ „ „
....
1000 rbl. „ 5-sõnalise „ „ „
jne.

On näha, et niisuguse ülesande lahendamiseks me võime kirjutada valemi $z = 2x + 0{,}25y + 10$, kus x tähendab sadade arvu, y sõnade arvu. Siin on jällegi ühte ülesandesse mahutatud palju väikesi ülesandeid, kusjuures iga niisuguse ülesande lahendus saadakse antud arvude asetamisel ühte ja samasse valemisse.

Õpetaja võib ise koostada seeria selliseid ülesandeid või valida neid ülesannete kogust ja esitada aeg-ajalt õpilastele.

DIAGRAMMID JA GRAAFIKUD.

Keskkoolide programmid näevad ette diagrammide ja lihtsamate graafikute käsitlemist juba aritmeetika kursuses. Selle käsitlemise ülesandeks on arendada laste graafilist kujutlust ja laiendada graafiliste meetodite rakendamissfääri. Graafilist meetodit tema mitmesugustes vormides rakendatakse laialt kõige mitmesugusemates teadusharudes, tehnikas ja ühiskondlikel tegevusaladel.

Lihtsaimate geomeetriliste illustratsioonidega kohtutakse mitmesuguste aritmeetika küsimuste esitamisel. Nimetame neid küsimusi: naturaalarvude kujutamine arvteljel, murdarvude kujutamine arvteljel, geomeetrilised illustratsioonid liitmise kommutatiivsuse ja assotsiatiivsuse seadustele, korrutamise kommutatiivsuse, assotsiatiivsuse ja distributiivsuse seadustele, harilike murdude korrutamise ja jagamise reeglite geomeetrilised väljendused; mõnede murdude, näiteks taandumatute murdude geomeetriline kujutamine jne.

Diagrammid tuuakse aritmeetika kursusesse täisarvude, harilike murdude ja kümnendmurdude õppimisel. See töö koosneb kahest osast: õpikutest (matemaatika, ajalugu, geograafia), ajalehtedest, ajakirjadest ja teatmikest võetud valmis diagrammide lugemine või analüüs ja lihtsate diagrammide koostamine õpilaste endi poolt ülesannete kogust või teatmekirjandusest saadud andmete alusel.

Esimesed diagrammid peavad olema igas suhtes lihtsaimad. See tähendab, et materjali niisugusteks diagrammideks on tarvis võtta õpilastele hästi tuntud ja lähedasest valdkonnast ja seda selleks, et geomeetrilised kujud oleksid kõige lihtsamad (ristkülik, ring, lõik) ning et mõõdete vahendamine peab olema kerge ja loomulik.

Kaugus kodust kooli, raamatukogusse, jõeni, metsani, lähima asustatud punktini jne. võib anda materjali lihtsate diagrammide koostamiseks, mis koosnevad horisontaalselt asetatud lõikudest. Ka vähendamine peab olema lihtne, looduses kilomeetrid, joonisel aga vastavalt sentimeetrid.

Edasi võib võrrelda mitmesuguste õpilastele tuttavate hoonete kõrgusi; sel juhul on parem võtta joonisel vertikaalsed lõigud, mis enam vastavad illustreeritavate objektide väliskujule.

Pärast seda võib diagrammina kujutada õpilasele lähedaste inimeste (isa, ema, vendade jt.) vanuseid. Hiljem võib minna kaugemate esemete, nagu jõgede pikkuste, mägede kõrguste, linnade kauguste jne. juurde.

Üleminekul ristkülikukujulise diagrammi juurde võib kasutada andmeid linnade elanike arvust, külvipinna suurusest, järvede ja teiste veekogude pindalast, põllumajandussaaduste hulgast, vabrikus toodetud esemete arvust jne. Need küsimused võivad õpilaste eest läbi käia täisarvude õppimisel. Nad võivad aga korduda ka murdarvude õppimisel. Kuid, lõpuks, murdude õppimisel võib diagrammide temaatika olla palju mitmekesisem, ehitus palju täpsem ja mastaap üldisem.

Diagrammide vorm peab minema järk-järgult mitmekesisemaks ja komplitseeritumaks. Lõikudelt võib üle minna ristkülikutele, siis sektoritele või ruudu osadele, ringidele jne. Kui õpilased on saavutanud küllalt suure osavuse nende ehitamisel, siis võib juba minna üle protsentides antud ülesannetele.

Diagrammide ehitamine peab järk-järgult teed tasandama graafikutele. Üldse toimub üleminek diagrammilt graafikule täiesti loomulikult. Võib näiteks algul ehitada 10 päeva temperatuuri graafikut vertikaalsete lõikudena, siis aga ühendada nende ülemised otsad murdjoonega. Võib võtta tõelise (mingist meditsiinilisest punktist saadud) haige inimese temperatuuri kõvera ja demonstreerida seda klassis. Ei ole segav õpilastele möödaminnes jutustada sellest, et graafikud leiavad laialdast kasutamist mitmesugustes vabriku-tehaste valdkondades; neid kasutatakse tööviljakuse tõusu ja languse ning ka toodangu väljalaske näitlikustamiseks. Laialt kasutatakse graafikuid meteoroloogias, kus tähtsat osa etendavad temperatuuri ja baromeetrilise rõhu graafikud. Eriti vajalikud on graafikud raudteeasjanduses.

Materjali graafikute ehitamiseks tuleb võtta ajalehtedest, teatmikest ja aastaraamatutest.

Graafikute ehitamiseks tuleb soovitada niisuguseid teemasid, nagu autotööstuse toodangu kasv, kivisöe toodangu kasv, nafta toodangu kasv, leivavilja viljakuse tõus (rukis, nisu), raudtee veereva koosseisu suurenemine, vedude suurenemine antud aastatel, vabrikute arvu suurenemine antud alal jne.

Lõpuks näeb programm ette võrdeliste ja pöördvõrdeliste suuruste graafikute ehitamist.

Nähes graafikute eriti suurt tähtsust nii matemaatika edaspidisel õpetamisel kui ka teooria ja praktika vahelise seose loomisel, on tarvis hoolikalt läbi mõtelda selle küsimuse esitamise metoodika.

Graafikute ehitamisele eelneb õpilaste poolt x ja y väärtuste tabeli koostamine. Mõlemal juhul on tarvis võtta küllalt suur arv väärtuste paare. Tõsi küll, võrdelise olenevuse korral on graafiku ehitamiseks küllalt kahest punktist, kuid õpilased ei tea seda veel, graafiku sirgjoonelisuse tõestus aga on neile veel kättesaamatu. Õpilased saavad seda teada alles pärast rea konstruktsioonide sooritamist. Märgates seda fakti, võivad nad seda kasutada selleks, et tähistades kõigepealt kaks teineteisest küllalt kaugel asetsevat punkti, leida pärast graafikult rida vahepealseid punkte.

Õpilased ei pea mitte ainult ehitama võrdeliste ja pöördvõrdeliste olenevuste graafikuid antud võrrandite järgi, vaid peavad oskama ka analüüsida (lugeda) valmis graafikuid.

Et graafikute õppimine tooks tõelist kasu, on tarvis kindlaks teha, mil määral õpilased mõistavad seda, mida nad teevad. Seda kindlaks määrata pole aga nii lihtne. Asjaolust, et õpilased hästi õppisid ehitama graafikuid, ei järeldu veel, et nad mõistavad ka selle joone tähtsust, mida nad ehitasid. Ei ole haruldane juhus, kus õpilased, ehitades sirgjoone võrrandi $s=vt$ järgi, peavad seda liikumise trajektooriks. Ja õpetajal ei ole alati võimalik avastada seda eksitust, kuna õpilased sageli ei väljenda omi mõtteid kuuldavalt. Seepärast ei ole alguses vajalik esitada graafikuid, mis oleksid seotud liikumisega; parem on vaadelda teisi ülesandeid. Alles siis kui õpilased on juba küllaldaselt harjunud graafikutega, võib anda ülesandeid liikumise kohta. Sealjuures pole muidugi kunagi segav kontrollida, kas õpilased saavad nendest konstruktsioonidest aru.

Kas on tarvis õpilastele anda terminid abstsiss, ordinaat, koordinaadid, koordinaatteljed jne? Uued terminid toovad juurde täiendavalt raskusi, seepärast on parem neist hoiduda.

SUURUSED JA NENDE MÕÕTMINE.

Õpilased peavad kindlalt teadma suuruste mõõtühikuid, teadma nende ühikute vahelisi seoseid ja kindlalt teostama tehteid nendega.

On tarvilik saavutada selle fakti omandamine õpilaste poolt, et igat suurust mõõdetakse sellega homogeensete ühikutega, s. o. pikkust mõõdetakse pikkusega, pindala pindalaga, raskust raskusega jne. Väga paljud õpilased kuulasid küll sellest ja teavad seda ka kuidagi, kuid unustavad selle kõige vajalikemail juhtudel. Ristküliku pindala saadakse küll sellele laotatud ruudukeste loendamise teel, kuid juba teisel päeval on see loendamine ununenud ja mälus on säilinud ainult fraas «korrutada pikkus laiusega». Kui aga mõne kuu pärast nõutakse mingi tundmatu kujundi pindala leidmist, mida võib teha vahetult ruudukeste loendamise teel, siis õpilased ilmutavad abitust ja ei tea, kuidas asuda selle ülesande lahendamisele.

Mõõdusüsteemi omandamiseks on tarvis esitada mitmesuguseid harjutusi. Võib nimetada niisuguseid harjutusi:

leida mitmesuguste vedelike (petrooleum, õli, piiritus, elavhõbe jt.) kaal antud ruumalade ja erikaalude abil; leida mingi keha ruumala, kui on teada tema kaal ja erikaal. On kasulik tutvustada õpilasi mingite neile tuttavate esemete tegelike mõõdetega, samuti aga ka jalakäija, hobuse, laeva, jalgratturi, rongi, auto, trammi ja lennuki keskmiste kiirustega ning lülitada neid arve ülesannete tingimustesse.

On vajalik mitte ainult mõõteriistadega tutvunemine (kell, termomeeter, nurgamõõtmise riistad), vaid ka nende praktilise kasutamise oskus, millele seni pööratakse liialt vähe tähelepanu. Õpilased kohtavad ülesandes arvu, mis väljendab mingisuguse masina ratta kaalu ning on, oletame, võrdne 344 kiloga. Nad lahendavad selle ülesande ning teevad seda mõnikord õigesti, kuid ei mõtle sellele, milliste esemetega ja milliste arvudega nad kohtusid selles ülesandes; kas saab näiteks tõsta seda ratast, kas võib teda asetada taskusse või ei mahu ta läbi klassi uksest. See ükskõiksus ülesannete sisu vastu läheb nii kaugele, et kui näiteks ülesannete kogus oleks vigaselt trükitud, et aurukatla läbimõõt on 1,3 cm (1,3 m asemel), siis niisugune trükiviga võib jääda märkamatuks.

Maksab ainult rääkida sellest, et niisugune olukord on ebanormaalne ja et säärane eraldatus tegelikkusest toob õpetamisele kahju.

Pole tarvis tõestada, et õpilased peavad nägema, kompama, tõstma, lahti võtma ja kokku panema mõningaid esemeid, tähelepanelikult neid vaatlema, oskama valmistada lihtsamaid neist ja iseseisvalt leidma nende mõõteid.

Meie peatume praegu mõõtmise küsimusel. Õpilased peavad aritmeetika õppimisel teostama mõningaid mõõtmisi. Milleks on tarvis mõõta, kuidas seda teha ja milliseid tulemusi võib saavutada V—VI klassi õpilastega?

Nendes klassides me piirdume mõõdetavate objektide valikul selliste esemetega, millised kuuluvad mõõtmisele suurustega, mis on selles vanuses lastele juba tuttavad. Meie loendasime juba neid suurusi. Nende hulka kuuluvad pikkus, pindala, ruumala (maht), kaal, aeg, temperatuur, hind, nurk, baromeetriline rõhk.

Esimene ja kõige vajalikum kõigi mõõtmiste suhtes on *sirglõigu pikkuse* mõõtmine. Ta on vajalik esiteks sellepärast, et ta teostatakse vahetult, samal ajal kui teiste suuruste mõõtmine on sageli võimalik ainult kaudselt; teiseks vilumused, mis töötatakse välja pikkuste mõõtmisel, osutuvad kasulikuks paljude hoopis teiselt alalt suuruste mõõtmisel, kus nõutakse lugemise teostamist mingisuguselt skaalalt.

Pikkuste mõõtmine annab õpilastele võimalusi harjutada oma käsi ja silmi. Meie ei või lõpuks nõuda 11—13-aastastelt õpilastelt, et nad oleksid head mõõtjad, kuid koolis peavad nad õpetaja juhtimisel tegema esimesed mõõtmisvõtted, peavad teadma, milles seisab mõõtmise protsess ja katseliselt veenduma, milliste raskustega ta on seotud.

Millised küsimused kerkivad mõõtjate ette? Kõigepealt mõõdetava suuruse mõõtmiseks kõige sobivama mõõduühiku valik. Näiteks kahe linna vahelist kaugust me mõõdame kilomeetrites, koolihoone pikkust meetrites, vihikus kujutatud lõigu pikkust sentimeetrites ja millimeetrites. Peale selle mõõtja, asudes oma töö juurde, peab teadma mõõtmise eesmärki, sest sellest sõltub soovitav täpsus. Mõnedel juhtudel võib piirduda jämedalt ligikaudsete tulemustega, teistel juhtudel aga nõutakse väga suurt täpsust. Õpilastele võib seda selgitada lihtsa, elulise näitega. Võtame hariliku aknaraami. On tarvis vahetada aja jooksul mädanenud alumine horisontaalne pruss. Tisler, kes peab selle valmistama, asetab kaks korda meetripuu aknalauale ja kohe ütleb: poolteist meetrit. Milline täpsus on siin? Väga madal seepärast, et see mõõtmine on esialgne. Tisler tõenäoliselt ütles natukese suurema pikkuse kui oli vaja. Ta peab veel kaua seda prussi töötlema. Alguses ta lõikab selle välja suurest lauast, siis jälle proovib, sobitab, lõikab, hööveldab jne. Kuid vaadake, kui täpselt sama tisler mõõdab aknaklaasi pikkust ja laiust. Siin teisiti ei saa. Tal endal ei ole klaasi lõikamiseks teemanti ja ta ostab klaasikauplusest mõõdu järgi valmis klaasi.

On arusaadav, et kui ta ei osta klaasi mõõtude järgi, siis see kas ei lähe raami, või osutub väikseks ja tuleb raamist läbi. Seepärast peab ta viimasel juhul arvestama mitte ainult sentimeetreid, vaid ka millimeetreid.

Alustame oma mõõtmisi **pikkuste** mõõtmisega. Olgu tarvis mõõta vahemaa koolist kuni linna raamatukoguni. Kõigepealt on vaja märkida mõõdetava «lõigu» algus ja lõpp, s. t. need kaks punkti, millest milleni me teostame mõõtmist ning määrata see joon, mida mööda me liigume mõõtmise ajal. Suhteliselt suuremaid kaugusi on kõige kergem mõõta mõõdulindiga. Kuna aga lindi pikkus on võrdlemisi väike (10 m, 15 m, 20 m), siis on selleks et mõõta, oletame 135 m pikkust vahemaad, vaja mitu korda paigutada seda linti edasi, kuni me jõuame alguspunktist lõpp-punkti. Kuna selle juures on väga kerge kalduda sirgjoonelt kõrvale ja alustada liikumist mööda mingit murdjoont, siis juhitakse või märgitakse lahtisel maastikul asuva joone mõõtmisel mõõdetav joon tähiste abil maapinnale, s. o. peatused piki seda joont märgitakse lattidega või märkidega. Kui aga mõõdetav joon asub linna sees, siis teostatakse mõõtmine piki tänavat lindi edasitõstmise teel paralleelselt majade välisseintega. Mõõtmist tehakse mitu korda.

Oletame, et soovides leida kooli kaugust raamatukogust, me mõõtsime neli korda seda vahemaad ja saime järgmised arvud: 1805,8 m; 1889,3; 1895,0 m; 1830,5 m.

Leiame nende mõõtmiste keskmise. See on: 7420,6 : 4 = = 1855,15 m.

Mitu numbrit me peame säilitama saadud keskmises? Pöörame tähelepanu sellele, et kõigis neljas mõõtmistulemuses tuhandete ja sadade numbrid on ühesugused. Võnkumine esineb kümnelistes, ühelistes ja murdosas. Tähendab mitte täielikult usaldatavad numbrid algavad kümnelistest. Selle alusel me ümardame saadud aritmeetilise keskmise kümnelisteni ja otsitava vahemaa kirjutame järgmiselt: 1860 m.

Järelikult on tarvis mõõtmise resultaati ümardada nii, et temasse jääksid ainult usaldatavad numbrid ja ainult üks mitteusaldatav number.

Meie rääkisime praegu suurte kauguste mõõtmisest, kuid on vaja harjutada ka väikeste kauguste mõõtmist. See on kasulik silmamõõdu arendamiseks. Alustada võiks puust, kartongist või klaasist geomeetriliste kehade mudelite täpse mõõtmisega. Neid mõõtmisi võib teha täpsusega 1 mm.

Kujundite **pindala** reeglina otseselt ei mõõdeta. Siin kasutatakse kaudse mõõtmise viisi. Siiski on harjutuse mõttes tarvilik väikeste pindalade, s. o. niisuguste, mille mõõted ei ületa õpilase vihikulehe mõõteid, mõõtmise harjutusi teha otseselt. Selleks on tarvis võtta mingisuguseid korrapäratuid hulknurki, näiteks korrapäratu nelinurk, viisnurk või teised kujundid, mis on piiratud kõverjoontega. Kujund, mille pindala on vaja hoolikalt mõõta, joonestatakse üles, siis aga asetatakse tema peale leht läbipaistvat paberit, mis on jagatud väikesteks ruudukesteks (nn. palett). Osa ruudukesi asub kujundis, osa selle kontuuril ja osa väljaspool kujundit. Viimastele tähelepanu pööramata me peame lugema täisruudukesed, mis asuvad kujundis ja lisama neile pooled ruudukestest, mis asuvad kujundi kontuuril (joonel).

Ruumala leidmiseks kasutatakse samuti kaudseid meetodeid, kuid klassis võib teostada ruumala mõõtmist, mis ei ole seotud keha joonmõõdete leidmisega. Sel eesmärgil võib kasutada mensuuri. Esiteks võib mensuuri abil leida mingi nõu sisemise ruumala. Selleks on vajalik täita see nõu veega ja siis valada see vesi mensuuri. Teiseks võib leida kõva keha ruumala. See keha on vaja asetada vette, mis asub mensuuris ja märkida vee tase enne keha vette asetamist ja pärast vette asetamist. Veetasemete vahe annab meile keha ruumala.

Esemete **kaalumiseks** võib kasutada esiteks vedrukaalu. See on kasulik skaala jaotuste osade silma järgi hindamise vilumuse omandamiseks. Teiseks võib kaaluda kangkaaludega. Sel juhul tuleb kaalumist teostada 3—5 korda, leida saadud arvude aritmeetiline keskmine ja ümardada see.

ARV JA JOONMASTAAP.

Peaaegu kunagi ei õnnestu paberil kujutada loomulikus suuruses mingisugust eset, sest paberilehe mõõted võivad olla väiksemad kujutatava eseme mõõdetest. Raamatulehe suurusele paberile me võime loomulikus suuruses kujutada ainult väikese osa meid ümbritsevatest esemetest, näiteks taskukella, sule, kärbse, liblika. Kuid me ei või sellel kujutada laualampi, liitrist pudelit, seinakella. Tähendab, kui eseme mõõted ületavad paberilehe mõõted, millele see ese on kujutatud, siis see ese on joonistatud lehele vähendatult. Kuid iga joonis või plaan peab andma võimaluse otsustada eseme tõelist suurust, mis temal on kujutatud, s. o. sellisel joonisel peavad olema antud juhised selle kohta, mitu korda paberil kujutatud lõigud on väiksemad vastavatest tegelikest lõikudest looduses. Seda tehakse järgmiselt: kui klassitahvli laius on 1 m, joonisel aga on see kujutatud 1 dm näol, siis eseme suurus joonisel on 10 korda väiksem tema loomulikust suurusest; see fakt on vaja üles kirjutada. Sel juhul räägitakse, et ese on kujutatud mastaabis üks kümne vastu, s. o. 1 : 10 ehk $\frac{1}{10}$. Siin üheline näitab 1 dm paberil, kümneline aga 10 dm (1 m) tegelikkuses. Arvu 1 : 10 nimetatakse plaani arvmastaabiks. See on alus, mida õpilased peavad omandama. Seda on tarvis demonstreerida suure hulga mitmesuguste näidetega, s. t. näited peavad olema võetud mitmelt alalt ja mastaabid tuleb võtta mitmesugused: 1 : 100; 1 : 1000; 1 : 10 000; 1 : 25; 1 : 500; 1 : 2000 jne.

Arvmastaabi abil lahendatav praktiline ülesanne seisneb selles, et omades mingi maatüki plaani (kaarti) ja teades mastaapi, me võime arvutada selle maatüki tõelisi mõõteid, s. t. leida mõõteid maapinnal. Seda tehakse järgmiselt. Olgu näiteks plaani mastaap 1 : 1000 ja nõutagu leida kahe punkti vaheline kaugus maapinnal, kui nende vaheline kaugus plaanil on 4 cm. Pöörates tähelepanu antud arvmastaabile võime me ütelda, et kõik mõõted maapinnal on 1000 korda suuremad kui vastavad mõõted plaanil. Järelikult ülesande lahendamiseks on tarvis 4 korrutada 1000-ga: $4 \times 1000 = 4000$ cm = 40 m.

Võib esitada ka vastupidise ülesande. Leida, kui pika lõiguna on plaanil kujutatud 3 km pikkune tee, kui plaani mastaabiks võtta 1 : 5000. Me teame pikkust looduses, peame leidma aga pikkuse plaanil. Selleks on vaja tõelist pikkust vähendada 5000 korda.

3 km = 3000 m = 300 000 cm;
300 000 : 5000 = 60 (cm).

Lõpuks võib püstitada kolmanda ülesande. Võib leida mastaabi, kui ta millegipärast ei ole teada. Selleks on vaja teada eseme (või maatüki) mõõted tegelikkuses ja plaanil. Oletame, et me teame (teatmikust), et Moskva ja Leningradi vaheline kaugus on 651 km. Siis leiame mõõtesirkli ja joonlaua abil, et väikesel kaardil see vahemaa täpselt mõõtes on 2,17 cm. Millise mastaabiga on kaart? Arvutame mitu korda on tõeline pikkus suurem nende linnade kaugusest kaardil. Selleks jagame 651 km 2,17 cm-ga:

651 km = 651 000 m = 65 100 000 cm;
65 100 000 : 2,17 = 30 000 000.

Seega vahemaa Moskva ja Leningradi vahel on looduses 30 000 000 korda pikem vastavast vahemaast kaardil. Järelikult otsitav mastaap on 1 : 30 000 000.

Sellist tüüpi ülesandeid võib lahendada õpilastega neile tuttava konkreetse materjali alusel.

Kõige kasulikum rakenduslikust vaatepunktist on praktiline töö plaani koostamisel. On tarvis õpilastele anda ülesandeid, näiteks koostada antud mastaabis maatüki või kooliõue, koolimaja, või mõne koolimaja korruse plaan. Selle ülesande täitmiseks on vaja võimalikult suure täpsusega mõõta looduses kõik vajalikud vahemaad ja märgitud mastaabis kanda nad paberile. Mis puutub nurkadesse, siis esimesel korral on tarvis piirduda täisnurksete kujunditega. Kui aga antakse õpilastele valmistamiseks mitte üks, vaid rohkem plaane, siis võib järgmistesse töödesse lülitada nurki, mis erinevad täisnurgast ning millede mõõtmiseks kasutatakse mingisugust nurgamõõtmise riista. Plaan on tarvis joonistada heale paberile küllaldase täpsusega, kuna ainult niisugune töö võib omada hariduslikku tähendust.

Mõni sõna joonmastaabist. Plaanidel ja kaartidel antakse koos arvmastaabiga nõndanimetatud joonmastaap. Nii nimetatakse lõiku, mis on jagatud sentimeetriteks või millimeetriteks. Nende osade peale on kirjutatud arvud, mis näitavad vastava lõigu pikkust looduses.

Praktiliselt võivad õpilased tutvuda joonmõõduga plaanidel ja kaartidel. Selle jaoks võib soovitada neil leida kahe punkti vaheline kaugus kaardil või plaanil. Mõned ülesanded võib keerukamaks muuta, esitades arvutamiseks mingi plaanil eraldatud osa pindala.

PROPORTSIONAALSED SUURUSED.

Võib ilma liialdamata öelda, et mitte ükski aritmeetiline teema ei ole nii tihedalt seotud polütehnilise õpetusega kui teema suuruste proportsionaalsest sõltuvusest, kuna siin vaadeldakse kahte lihtsamat funktsionaalse seose vormi, mis on seotud määratu arvu praktiliste ülesannete lahendamisega. On muidugi õige, et ei saa üle hinnata neid kahte funktsionaalse sõltuvuse vormi, ning on vaja hoiatada õpilasi püüde eest lugeda neid erandlikeks ja ainukesteks. Sellest hoolimata kujutavad võrdelisus ja pöördvõrdelisus endast kahte sellist funktsionaalse sõltuvuse vormi, millega inimene väga sageli kokku puutub.

Et nimetatud teema õppimine oleks efektiivsem, võib selle esitamiseks kasutusele võtta niisuguse korra. On tarvis kõigepealt tegelda võrdeliste suuruste tabelite koostamisega, alates sellest, mis on lastele lähemal, hiljem aga teiste suuruste juurde üle minnes. Võib võtta järgmised suuruste paarid:

a) aeg ja selle ajaga ühtlaselt ja sirgjooneliselt liikuva keha poolt läbitud tee;

b) kauba hulk mingites ühikutes ja selle maksumus rublades;

c) keha ruumala ja tema kaal.

Õpilased koostavad need tabelid ja siis vaatlevad neid. Kui need tabelid on koostatud täis- ja murdarvulistest suurustest ning kui tabelil on küllalt suur maht, siis võib neid hiljem kasutada niisuguste ülesannete lahendamiseks, mille andmed on väljendatud nimetatud suurustega. Ei saa piirduda ainult nende suurustega, mis siin on antud, vaid on vaja võtta veel teisi suuruste paare kas õpetaja, või veel parem — õpilaste valiku järgi. On kasulik, kui kooli matemaatikakabinet omaks suured ja hästi koostatud tabelid proportsionaalsete suuruste kohta. Neid tabeleid tuleb kasutada antud teemade õpetamisel.

Järgmiseks etapiks proportsionaalse sõltuvuse õppimisel on selle sõltuvuse väljendamine valemi ($y = kx$) abil. Selle valemi võib saada otseselt niisuguse fakti vaatlemisel, kus ühe meelevaldselt valitud suuruse jagamisel teise vastava suurusega saadud jagatis on jääv suurus ($y : x = k$, kust $y = kx$).

Seda valemit on vaja kasutada ülesannete lahendamisel võrdeliste suurustega. Kordame paragrahvis «Täheline märkimine ja valemid» öeldut: valem on vajalik ja huvitav ainult sel juhul, kui ta annab võimaluse otsitavate suuruste paljude arvuliste väärtuste arvutamiseks. Seepärast on tarvis leitud valemi abil ülesannete lahendamisel seada küsimust nii, et otsitavaks ei oleks mitte üks arv, vaid mitu arvu.

Lihtne ülesanne selle kohta. Kiosk kaupleb õuntega. Müüjal tuleb terve päev arvutada mitmesuguste õunakoguste hinda. Temal oli kolme sorti õunu: hindadega 9 rbl. kilogramm, 12 rbl. kilogramm ja 14 rbl. kilogramm. Et kiirendada ostjatega arve tegemist, koostas ta kolm tabelit. Teise sordi õunte hinna jaoks oli tal järgmine tabel:

Õunte kaal grammides	100	200	250	300	350	400	...	1000	1100	1200	1250	...
Hind rublades	1,2	2,4	3,0	3,6	4,2	4,8	...	12	13,2	14,4	15,00	...

Kõrvuti valemi kasutamisega ülesannete lahendamisel on tarvis vaadelda ka teisi võrdeliste suurustega ülesannete lahendamise viise, näiteks ühele taandamise viis ja võrde abil lahendamise viis.

Selle teema lõppmomendiks on võrdeliste suuruste graafiku koostamine. Selleks koostamiseks on vajalik ruuduline või millimeetripaber, joonlaud mõõdetega ja hea pliiats. Konstruktsioon on tarvis teha täpselt. Esimese graafiku ehitamiseks on tarvis valida lihtne ülesanne hästi valitud andmetega. Et graafik kutsuks välja õpilaste huvi tema vastu, on tarvis esitada ta mingisuguse tööna, mitte aga teha temast mingit vaatlemise objekti, pilti; on tarvis esitatava graafikuga anda vastus mingisugustele küsimustele. Näiteks koostame me graafiku, mis väljendab alumiiniumi kaalu ja ruumala vahelist seost. Alumiiniumi erikaal on 2,6. Ehitame graafiku kahe punkti kaudu, näiteks punktide (0; 0) ja (10; 26) kaudu. Kordame veel kord, et graafik peab olema ehitatud täpselt. Omades sellist graafikut me võime joniselt leida 1 cm^3, 2 cm^3, 3 cm^3, ..., 11 cm^3 jne. alumiiniumi kaalu.

Meenutame, et empiiriliste graafikutega on vaja õpilasi tutvustada seni, kuni nad hakkavad ehitama graafikuid valemite järgi.

Pöördvõrdelisuse õpetamine tuleb teostada samas järjekorras nagu võrdelisuse õpetaminegi. Alguses koostatakse üksikute konkreetsete pöördvõrdeliste suuruste tabeleid, siis tuuakse sisse valem $y = \frac{k}{x}$ ja lahendatakse ülesandeid selle valemi järgi, siis antakse teisi võtteid pöördvõrdeliste suurustega ülesannete lahendamiseks (ühele taandamise võte ja proportsiooni võte) ja lõpuks ehitatakse pöördvõrdelise sõltuvuse graafik.

Selle teema õppimise juures on tarvis erilist tähelepanu pöörata ülesannete valikule. On tarvis ülesande tingimusteks seada kõige mitmekesisemad suuruste paarid, alates õpilastele lähedastest ja lõpetades kaugematega. Ammutavat nimekirja nendest paaridest ei ole võimalik anda; juhime tähelepanu ainult mõnele neist.

aeg	— keha poolt läbitud tee
kauba kaal	— kauba maksumus
kalevikanga pikkus	— tema maksumus
raadius (diameeter)	— ringjoone pikkus
keha ruumala	— keha kaal
korteri pindala	— korteriüür

ruudu külg	— tema perimeeter
tööliste arv	— nende poolt tehtud töö
tööpäevade arv	— töötasu
sööjate arv	— toidumoona hulk
masina tööaeg	— vajalik söehulk
tööliste arv	— nende töötasu
murru lugeja	— murru suurus
seina pindala	— krohvimiseks vajaliku materjali hulk
reservuaari maht	— tema veega täitmiseks kuluv aeg
energia kulu kWh-des	— tasu rublades
jagatava suurus	— jagatis jääva jagaja korral
tööaeg	— valmistatud toodete hulk
põllu pindala ha-des	— viljasaak tonnides
aeg	— pendli võngete arv
veejuhtme tööaeg	— läbivoolanud vee hulk
valmistatud esemete arv	— tarvismineva materjali hulk
põlevate lampide arv	— kulutatud petrooleumi hulk
ahjude arv	— puude hulk
veduri poolt läbitud maa	— kulutatud söe hulk.

Pöördvõrdeliste suurustega ülesannete koostamisel on tarvis hoiduda šabloonilisusest ja tuleb valida seda sõltuvust inimese praktika kõige mitmesugusematest osadest. Me arvame, et siin on otstarbekohane vaadelda lastele täielikult arusaadavaid ülesandeid kangide kohta, mis kuuluvad füüsika kursusesse, kuid mida edukalt võib lahendada aritmeetika tundides, kuna nad ei sisalda endas mitte midagi niisugust, mida lapsed pole kohanud oma igapäevastes katsetes.

ÜLESANDED.

Polütehniline õpetus nõuab aritmeetika ülesannete temaatika tunduvat ümberehitust. Ülesannete jaoks on vaja valida küsimusi, mis on seotud inimese tootmistööga. Siiski on vaja mõista, et aritmeetikat õpitakse V ja VI klassis, kus õpivad mitte vanemad kui 13-aastased lapsed. Neil ei ole veel olemas tehniliste teadmiste süsteemi ja alles VI klassis hakatakse omandama mõningaid elementaarseid teadmisi füüsikast. Selle tulemusena ei ole antud etapil ülesannetes võimalusi kuigi sügavalt kajastada tehnika küsimusi. Õpetajate mure peab seisma selles, et ülesannete temaatika ei oleks ühekülgne, et ülesannete temaatika oleks võetud inimeste elu kõige erinevamatest valdkondadest, et õpilaste eest mööduksid faktid ja sündmused, mis on neile lähedased, mida nad näevad ja vaatlevad enda ümbruses: kodus, koolis, kodukülas või kodulinnas, tööstuses, kus töötavad tema vanemad, põllul või põllumajanduses. Need nähtused peavad temale olema mõningal määral tuttavad, ta peab olema nendega juba kohtunud, kuid ülesande lahendamise protsessis peab ta pealiskaudse tutvuse juurest jõudma põhjalikumale arusaamisele sellest. Kuid see ei tähenda, et on tarvis õpilasele teatada mõnda tundmatut ja temale rasket detaili. Siin on tarvis äärmist ettevaatust.

Olgu näiteks lahendada ülesanded, mis on seotud transpordiga. See tähendab, et nende ülesannete lahendamise protsessis peavad õpilased omandama mõningad neile jõukohased teadmised transpordist. Missugused on need teadmised? a) Transpordi liigid: raudteetransport, veetransport, autotransport, trammitransport, õhutransport, maaalune transport, hobutransport. b) Iga transpordiliigi vajalik ja õpilastele arusaadav iseärasus, eriti raudteetranspordis raudteetammid, sillad, tunnelid, liiprid, roopad, vedur, vagunid, tsisternid, platvormid, teljed, rattad, reisirongid, postirongid, kaubarongid, kiirrongid, liikumisgraafikud, rongide sõiduplaan, rongide kiirused, kütteaine, pidur, sõiduhind, raudteepiletid, platskaardid, jaamad, pakivagun jne. Analoogilisi küsimusi võib esitada ka teiste transpordiliikide kohta. Igaühe juures me leiame rea spetsiifilisi iseärasusi, mis eraldavad teda kõigist ülejäänutest.

Anname näitena materjali transpordialaste ülesannete jaoks. Olgu nõutud raudteerööbaste vahetamine täielikult vahemaal pikkusega 10 km, 50 km jne. On vaja vahetada liiprid, asetada kohale roopad ja tasuda töö eest. On tarvis teada liiprite normi ühe kilomeetri kohta. Liiprid võib valmistada kohapeal ja võib kohale tuua teisest linnast. Esimesel juhul on vaja arvestada valmistamise kulusid, teisel juhul saatmise kulusid. Roobaste saatmise kulud on tarvis arvestada eraldi. Töötasu maksmine võib toimuda mitmel viisil. Ülesannetes on vaja lahendada küsimused: kas valmistatakse liiprid kohapeal või lastakse kohale saata teisest linnast; missugust töötasu maksmise viisi eelistatakse?

Edasi võib välja valida grupi ülesandeid, mis on seotud sidega: postist, telegraafist, telefonist, raadiost ja vaadelda iga sellise sideliigi erinevusi.

Suure hulga ülesandeid võib siduda *elektrienergia* küsimusega.

Nii nagu kahel eelmisel juhulgi ei oma õpilased teadmisi selle nähtuse füüsikalisest küljest, kuid nad teavad, et elektrit võib kasutada rahvamajanduse mitmesugustes harudes (valgustamiseks, transpordis, vabrikutes, tehastes, põllumajanduses, polügraafiatööstuses, meditsiinis jne.). Seepärast võib nendega rääkida esialgsetest ja enam üldistest küsimustest, mis on seotud selle teemaga.

Mitte väikese koha võivad enda alla võtta arhitektuurilis-ehituslikud küsimused. Esiteks on niisuguste ülesannete temaatika otseselt seotud inimeste tööalase tegevusega. Teiseks on need ülesanded haridusliku tähendusega, kuna neist omandavad õpilased rea neile vajalikke teadmisi. Kolmandaks on need faktid, millega siin kohtutakse, suurel määral jõukohased õpilaste arusaamisele. Milliseid küsimusi tuleb siin puudutada? Hoonete liike, näiteks elumaja, koolimaja, raamatukogu hoone, universaalkaupluse hoone, teater, klubi, söökla, postkontor, vaksal, riikliku ülikooli hoone, saun ja paljud teised majapidamishooned, näiteks garaaž, hobusetall, viljaladu, lehmalaut, turbakuur, juurviljahoidla ja paljud teised. See on õpilastele jõukohane hoonete ja ruumide loetelu. Ülesannetes võivad olla antud nende mõõted (pikkus, pindala, ruumala) ja öeldud iga hoone iseärasused. Arvud peavad olema reaalsed, see tähendab, et näiteks teatri mõõtmed peavad olema vastavad kohtade arvuga saalis jne.

Selle teema juures kerkib üles ehitusmaterjalide küsimus. Kivi, telliskivi (millest ja kuidas valmistatakse?), puu (milline?), palgid, lauad, raud (milline?), klaas, tsement, betoon, liiv, savi, alabaster jt.

Ülesannetes peab õpilaste eest läbi käima hoonete tähtsamad osad: vundament, seinad, vaheseinad, põrandad, laed, trepid, ahjud, uksed, aknad, katus jt.

Siin kohtutakse ka ehitusasjanduse tähtsamate elukutsetega: müürsepp, puusepp, tisler, maaler, krohvija, klaasija, potissepp, katusetegija, plekksepp, veevärgitööline ja teised.

Ehitusasjandusega tutvumisel õpilased õpivad tundma mõningaid tööriistu (puusepa tööriistad, plekksepa tööriistad, tisleri tööriistad jne.).

Lähenedes ümbritsevatele faktidele ja nähtustele mõõtudega ja arvudega, peab õpilane midagi neist teadma. Kui ta neid varem ainult pealiskaudselt vaatles või ilma tähelepanuta jättis, siis praegu võtab ta neid kätte juba matemaatiliselt ümbertöötlemiseks ja see muutub teataval määral tema omanduseks. Ta peab omandama ja mõistma mõningaid fakte, mida ta kohtab ülesannete lahendamisel. Kohtutakse ülesannete lahendamisel mitmesuguste metallidega: malm, raud, teras, vask; õpilane kuuleb niisugusest sulamist nagu duralumiinium, õpib tundma tema erikaalu, tema koostist ja mõistab, miks nimelt see metall leidis nii laialdase kasutuse transpordis, eriti lennuasjanduses.

Seoses sellega tõuseb üles küsimus mõningatest ümberkorraldustest meie ülesannete kogudes. Tänapäeva õpikutes, millede autorid ükskõikselt suhtuvad ülesannete temaatikasse, võime mistahes leheküljel leida 10—12 teemat, niimitu, kuimitu on leheküljel ülesandeid. Selle tulemusena ei saa need ülesanded omada õpetuslikku tähtsust, lapsed lahendavad neid, kuid ei pea vajalikuks ammutada neist mingisuguseid teadmisi, mida omandada ning mõista. Meile näib, et praegu peavad ülesanded sisaldama läbiproovitud ja vastavat kaasaegset materjali. Numbrilised andmed peavad olema muidugi ümardatud, kuid olema saadud kas mõõtmise teel või usaldatavatest allikatest.

Millistelt aladelt oleks vaja valida ülesannete temaatika?

Me juba rääkisime, et õppimise objektiks peab olema kogu last ümbritsev ja tema arusaamisele jõukohane maailm. Me piirdume siin mõnede nimetustega sellest suurest valdkonnast, kust tuleb võtta konkreetne materjal ülesanneteks. Siia kuuluksid transport ja teed, mitmesugused side liigid, põllumajandus, arhitektuurilis-ehitusasjandus, vabrikutehaseline tegevus, mitmesugused kütteaine liigid, veevärk ja kanalisatsioon, keskküte, elektrienergia, kultuur ja haridus, hügieen ja tervishoid, majandus-ökonoomilised küsimused, eluolustikulised küsimused, geograafia ja astronoomia, ajalugu ja poliitika ning paljud-paljud teised. See loetelu kujutab endast kõige vähem mingit klassifikatsiooni, sellepärast on temas palju kordamist; näiteks eraldi on võetud elektrienergia, kuid samal ajal elektriga kohtume me transpordis, põllumajanduses ja paljudel teistel juhtudel. Sel viisil ei ole see ammutavaks loeteluks, ei klassifikatsiooniks, vaid ainult nende valdkondade meenutamine, millistest võib omandada vajalikku materjali.

Kõiges eelnenus me püüdsime esitada võimalikult rohkel arvul metoodilisi juhiseid, mis määravad õpetajale põhilise tee polütehnilise õpetuse ülesannete teostamiseks. Iga õpetaja, opereerides oma isiklike kogemustega ja pedagoogilise meisterlikkusega, võib kergesti kohandada vastavat materjali oma isikliku töö tingimustega ja viia nendesse parandusi, muudatusi ja täiendusi.

ALGEBRA.

ALGEBRALISE AVALDISE KUI TEDA VÄLJENDAVATE TÄHTEDE FUNKTSIOONI KÄSITLEMINE.

Algebralise avaldise mõiste tekib arvude tähistamiseks tähtede kasutamisele võtmisel. Arvude tähtedega tähistamise otstarbekus selgub: 1) samatüübiliste ülesannete lahenduste valemite üleskirjutamisel ja 2) tehete seaduste ja omaduste ülesmärkimisel. Need tähtede algebrasse viimise meetodid kujutavad endast loomulikku üleminekut aritmeetikalt algebrale, kuid nad on erinevad mõttelt: esimene väljendab analüütilises vormis otsitava suuruse funktsionaalset sõltuvust antud suurusest, teine asendab matemaatilise lause sõnalise formuleeringu tema sümboolse formuleeringuga. Esimene meetod võetakse tarvitusele esiteks aritmeetiliste ülesannete juures ja seejärel ülesannete juures, mis kuuluvad geomeetriasse (kolmnurga pindala, risttahuka külg- ja täispindala), mehhaanikasse (ühtlane liikumine), füüsikasse (sõltuvus keha kaalu, erikaalu ja ruumala vahel; jõu poolt tekitatud rõhk pinnale), aga ka ülesannete juures tehnika valdkonnast, mis muidugi peavad olema õpilastele jõukohased.

Algebralise avaldise numbriliste väärtuste leidmisele õpilaste poolt mistahes tähe erinevate väärtuste juures peab kaasnema vastavasisuliste tabelite koostamine (nendest tähtedest ja avaldisest). See õpetab õpilast nägema algebralises avaldises mitte üksi teatud tähtede ja numbrite kogumikku, vaid ka nende tähtede funktsiooni.

Selletaoline töö on paratamatu kursuse alguses, kuid seda tuleb pidevalt korrata ka edaspidistel algebra õppimise etappidel.

Praktiliste näpunäidete korras anname õpetajatele rea juhiseid:

1. Avaldises esinevate tähtede vastavate väärtuste ja

avaldiste endi üleskirjutamist *tabeli kujul* on vajalik praktiseerida juba kõige varasematel algebra õppimise etappidel.

2. Toome näite niisugusest üleskirjutusest:

$$y = \frac{x^2+1}{2}.$$

x	y
1	1
3	5
5	13
8	32,5
11	60
. . .	. . .

Võib asetada x-i ja y-i väärtused vertikaalselt, nagu näidatud ülal, aga ka horisontaalselt.

3. Ühemuutujaga funktsiooni puhul kasutatavate lihtsate tabelite kõrval on kasulik vaadelda «kahekordseid» tabeleid, mida kasutatakse kahemuutujaga funktsiooni puhul. Olenevalt antud numbriliste väärtuste iseloomust, võib asetus olla erinev.

Näiteks avaldise $z = x^2 + y$ puhul võib koostada tabeli järgmiselt:

x	y	z
1	2	3
2	1	5
3	2	11
6	1	37
. . .	. . .	. . .

või

x	y	1	2	5	. . .
	1	2	3	6	
	2	5	6	9	
	5	26	27	30	
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

4. Sõltumatuteks muutujateks olevate tähtede numbriliste väärtuste valik *peab reeglina olema tehtud õpetaja, mitte aga õpilaste* poolt, eriti VI—VII klassis.

5. Nende numbriliste väärtuste allutamine nõudele, et nad moodustaksid aritmeetilise progressiooni või alluksid mõnele muule seadusele, ei ole kohustuslik. On soovitav (olenevalt olukorrast ja õpetaja kavatsusest), et kõrvuti positiivsete täisarvuliste väärtustega antakse sõltumatutele muutujatele murdarvulisi ja ka negatiivseid väärtusi, ning eriti arv null.

6. Õpilased tunnevad rahuldust, kui ülesanne antakse tekstilises vormis. Sel juhul taandub tegevus rea samatüübiliste, numbriliste andmete poolest erinevate ülesannete lahendamisele. Sellepärast on vajalikud ka sõnalised näited.

7. Sõnaliste näidete puhul tuleb arvestada (olenevalt tekstist) seda, milline on sõltumatuks muutujaks oleva tähe lubatud väärtuste piirkond; näiteks: olgu kõne all telegrammi hind olenevalt sõnade arvust, siis reaalsete võimaluste piires on lubatud ainult positiivsed täisarvulised väärtused. On siiski soovitav, et arvuliselt domineeriksid näited argumendi pideva muutumisega.

8. Pöördtehetest õigete kujutluste arendamise eesmärgil on sobiv (lihtsatel juhtumitel, näiteks proportsionaalsuse puhul) jätta tabelis täitmiseks tühjad kohad mõlemas lahtris; näiteks:

x	y
2,5	
	1,2
4,5	

9. Varastel etappidel õpetaja valib valemi (või sõnalise tingimuse) juhendudes lihtsuse kaalutlusist ja pidades silmas seda, millist materjali läbi võetakse. Kuid edaspidistel etappidel on tarvilik suuremal arvul sisse tuua polütehnilist elementi: tabeleid peab koostama valemite jaoks, milledel on praktiline tähtsus. Näiteks:

$s = bh$ (kolmnurga pindala); $s = vt$ (ühtlasel liikumisel t ajaühiku jooksul läbitud tee pikkus); $p = dv$ (keha kaal); $p = \frac{F}{S}$ (jõu F rõhk pinnale S); $v = gt$ (keha langemise kiirus; $g = 9{,}8$); $s = \frac{gt^2}{2}$ (langeva keha poolt t ajaühiku jooksul läbitud tee); $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ (pendli võnkumise periood olenevalt pikkusest l); $l = l_o\,(1 + \alpha\, t)$ (joonpaisumine).

Kahe argumendi olemasolu puhul võib ühele neist anda esialgu kindlaksmääratud väärtuse.

Rida valemeid võib olla võetud tehnilistest teatmikest.

10. Töö valemite järgi tabelite koostamisel ei tohi olla ainult arvutuslikuks tööks. On tarvilik, et õpilased kontrolliksid, jälgides graafikut, kuidas suureneb või väheneb tähefunktsiooni väärtus tähe-argumendi väärtuse kasvamisel.

ARVUTUSLIKE VILUMUSTE ARENDAMINE.

Arvutuslike vahendite hulka, mida õpilased algebra õppimise tulemusena peavad oskama kindlalt kasutada, kuuluvad arvutustabelid ja arvutuslükat.

Tabelid on kõige enam tarvitatavad arvutusvahendid. Tarvitatavad on eriti ruutude, kuupide ja teiste astmete tabelid, samuti tabelid pöördarvudest, juurtest, kümnendlogaritmidest (rääkimata trigonomeetrilistest funktsioonidest). Tabelite poole pöördutakse alati, kui nad on käepärast — vajalikud andmed saadakse neist ju kiiremini kui arvutuslikul teel.

Valmis tabelite kasutamise õppimine ei ole raske; nende ladusalt käsitlemiseks on siiski vaja teatavat vilumust. Vilumus omandatakse aga harjutuste protsessis.

Keskkoolide jaoks on vajalik lugeda normaalseks niisugust järjekorda: õpilased a l g u s e s ise õpivad koostama tabeleid, s i i s lähevad üle valmis (trükitud) tabelite kasutamisele. Siinjuures iseseisvalt koostatakse, õieti öeldes, niisuguseid tabeleid (või nende väikesi osi, tükikesi tabeleist), millede arvutus ei nõua erilist vaeva ja teostatakse tavalise algoritmi abil. Valmis tabeleid kasutatakse aga neil juhtumeil, kui arvutuslik algoritm on keeruline või üldse õpilastele tundmatu. Ehkki üldise arusaamise andmine arvutusvõttest on soovitav, muide, igal juhul. Tabelite kasutamine on seda enam otstarbekam, mida suurem arv samatüübilisi tehteid on vajalik teostada.

Ruutjuure leidmise suhtes juhime tähelepanu sellele, et õpilastele tuleb soovitada tabelite kasutamist, kuid sellega seoses nad ei saa toime tulla ka ilma teadmisteta harilikust algoritmist (arvestades ruutjuure leidmise vajaduse sagedast olemasolu). Mis puutub kõrgema astme (suurem kui 3) juurtesse, siis on neid muidugi mugavam arvutada tabelite järgi või logaritmide abil. Arusaadavalt ei tohi unustada, et

$$\sqrt[4]{a}=\sqrt{\sqrt{a}}; \quad \sqrt[6]{a}=\sqrt{\sqrt[3]{a}} \text{ jne.}$$

Logaritmide tabelid — need on enam võimsamad, paljude kümnete aastate jooksul kooli tingimustes läbi proovitud abistavad arvutusvahendid. On koguni oluline saavutada seda, et iga õpilane täiesti selgelt kujutaks endale ette kümnendlogaritmi graafiku asetust. Niisugune graafik, valmistatud õpilaste endi poolt võimalikult täpselt millimeetri paberile, on võimeline asendama kolmekohalist logaritmide tabelit.

Mitte peatudes eriti arvutuslükatil, mille õpetamise soovitatavuse kohta on juhiseid programmi seletuskirjas, anname ainult mõned juhendid:

1. Selleks et omandada arvutuslükatil programmis ette nähtud tehete tehnika, ei piisa ainult selleks ette nähtud tundidest, vaid selleks on tarvis kestvat iseseisvat harjutamist, mis kõige paremini võiks olla õpilaste matemaatika ringi tegevuse eesmärgiks.

2. Seadeldist, mis erineb arvutuslükatist ainult selle poolest, et mõlema raami (liikuv ja liikumatu) skaalad on ühesugused, samamõõtmelised, peaks tingimata olema kasutatud juba VI klassis positiivsete ja negatiivsete arvudega liitmise ja lahutamise harjutuste juures. Iga õpilane võib endale valmistada niisuguse seadeldise kahest ruudulise paberi ribast. Ei nõuaks vaeva valmistada klassis kasutamiseks samasugune demonstreeritav seadeldis kahest puuliistust, ainult mõõtmetelt suurem.

Niisugune seadeldis teeniks ka teist eesmärki — annaks esialgse õpetuse arvutuslükatist (raskuste kaheks jaotamine: erijaotusline funktsionaalne skaala ja liikumise printsiip).

3. Arvutuslike oskuste süvendamise küsimusega on tihedalt seotud küsimus ligikaudsest arvutamisest. Kõik arvutused, mis viiakse läbi tabelite abil, on tihti ligikaudsed.

Piirdume näidetes nende minimaalsete nõuete loeteluga, milliseid võib esitada tabeliline ligikaudne arvutamine, ja mis on tingimata vajalik igale õpilasele polütehnilise õpetuse tingimustes. Need nõuded puudutavad tabelite koostamist ja valmis tabelite kasutamist.

Peatume näitel ruutjuurte tabelitest. Oletame, et tabelis peab olema näidatud juurte ligikaudne väärtus kolme kohaga pärast koma iga kümnendmurru kohta, millel on kaks kohta pärast koma.

Niisuguse tabeli koostamisel peetakse ilmtingimata silmas järgmisi reegleid:

1. Arv, mis seisab tabelis (meie näite juures ruutjuure väärtus), peab olema ümardatud ligikaudse kümnendmurruni kolme kohaga pärast koma. Nii näiteks:

$$\sqrt{2} = 1,41421\ldots,$$

ja sellepärast tabelis $\sqrt{2}$ väärtuseks tuleb arv 1,414 (puudusega); samal viisil

$$\sqrt{7} = 2,64575\ldots,$$

ja sellepärast tabelisse tuleb väärtus 2,646 (liiaga)[1].

2. Kui juur avaldub täpselt lõpliku kümnendmurruna, on ikkagi vajalik kirjutada kolm kümnendkohta. Näiteks,

$$\sqrt{0,25} = 0,5,$$

kuid tabelisse on vaja kirjutada 0,500.

Tabelite kasutamisel võib kas mitte hoolida interpolatsioonist (algstaadiumis) või soovitada seda (edaspidises praktikas ja suure täpsuse saavutamise soovil).

3. a) Interpolatsioonita. Kui antud arv, mille juurimist nõutakse, puudub tabelis, siis on vaja teda asendada lähimaga kahest tabelis olevast, mille vahel ta asub.

Näiteks: tabelis ei ole arvu 2,173, kuid on arvud 2,17 ja 2,18. Nendest arvule 2,173 on lähem arv 2,17; sellepärast juure asemel arvust 2,173 võtame $\sqrt{2,17}$, s. o. (tabeli järgi) 1,473.

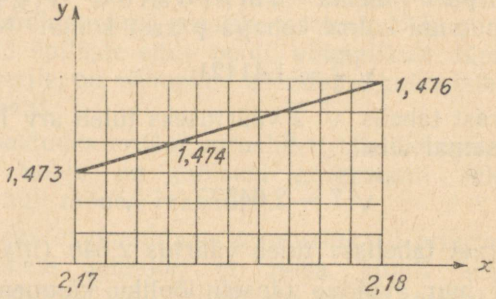
b) Lineaarse interpolatsiooniga. Kui antud arv, mille juurimist nõutakse, puudub tabelis, siis on vaja teha parandus järgneva ümmardusega «võrdeliste osade» reegli järgi.

Näiteks: arvude 2,17 ja 2,18 jaoks on tabelis antud juurte väärtused 1,473 ja 1,476. Arvu suurendamisel ühe sajandiku võrra, juur suureneb 3 tuhandiku võrra («tabeliline erinevus»); tähendab, arvu suurendamisel 0,3 sajandiku võrra, juur suureneb 0,3 · 3 tuhandiku võrra, s. o. 0,9 tuhan-

---

[1] Sellele võib lisada «paarisnumbri reegli»: «kaheldavatel juhtudel andke eesõigus paarisnumbrile». Näiteks, arv 0,3175 erineb ühepalju arvust 0,317 ja arvust 0,318; kuid, andes eesõiguse paarisnumbrile võtame 0,318.

diku võrra. Niisiis, peame saama 1,4739; kuid ümmardades kolme kohani pärast koma, võtame juure väärtuseks arvust 2,173 arvu 1,474.



Joon. 1.

Lisame illustratsiooni (joon. 1), mis näitab, kuidas teostada sooritatud arvestust graafiliselt, ruudulisele paberile (praktikas võib numbreid ka mitte kirjutada, vaid märkida ainult punktid ja tõmmata sirglõik).

SIDEME TUGEVDAMINE ALGEBRA JA GEOMEETRIA VAHEL.

Polütehnilise õpetuse juures me ei luba algebra lahutamist geomeetriast. Vastupidi, kui on vaja näitlikustada abstraktseid fakte ja suhteid, kui on vaja ülesannete lahendamise kiirendatud meetodeid, kui nõutakse kontrolli kindlaid vahendeid — tulevad abiks geomeetrilised ettekujutlused.

Mõningal määral geomeetriliste kujutluste kasutamine algebra õppimise juures omab koha juba õpetamise praktikas. On vaja, et seoses üleminekuga polütehnilisele õppusele geomeetrilisi kujutlusi kasutatakse veelgi sügavamalt ja mitmekülgsemalt.

Jälgime, millist edu on juba saavutatud geomeetriliste kujutluste suhtes algebra kursuses ja milleni on vaja veel edaspidi jõuda.

Juba V klassi aritmeetika kursuses õpilased puutuvad kokku suuruse mõistega ja tema mitmesuguste osade arvuliste väärtustega, mõtestavad lahti abstraktseid skeeme geomeetriliste kujundite abil. Siia kuuluvad mitut liiki diagrammid: joon-, kolmnurksed-, tulp-, sektordiagrammid. Jõe pikkust ja mäe kõrgust kujutatakse vajaliku pikkusega sirglõikudega; söe, raua ja muu sarnase toodangut aastate järgi — vajaliku kõrgusega ja võrdsete alustega kolmnurkadega; maa kõlviku jaotust, õpilase aja jaotust jne. — ringi sektoritega, mis on võrdelised kesknurkade poolest. Sellel etapil õpilased tutvuvad m a s t a a - b i g a. Sellega seoses tuleb mainida plaanide ja kaartide lugemist ja eriti koostamist, mis kinnistab võrdelisuse mõistet.

Väga tähtsaks etapiks on üleminek a r v t e l j e, millel suuruse arvulised väärtused kujutatakse p u n k t i d e g a, kasutamisele. Arvtelge loomulikult ja paratamatult kasutatakse seoses negatiivsete arvude sisseviimisega. Siiski on täielikult võimalik ja soovitav raskuste jaotamise mõttes, et õpilased tutvuksid temaga juba enne negatiivsete arvude sisseviimist. Sel korral tuleks rääkida ü h e p o o l s e s t a r v - t e l j e s t või a r v k i i r e s t. Peab olema väga hästi selgitatud, et suuruse positiivseid väärtusi kujutatakse sirglõikudega, mis eralduvad algusest ühes ja samas positiivses suunas (paremale); kui aga kõigi sirglõikude algus on sama, siis on küllaldane näidata ainult nende lõppu. Sel kujul osutub, et suuruse väärtused kujutatakse p u n k t i - d e g a. Enne negatiivsete arvude sisseviimist peavad õpilased omandama harilike või kümnendmurdude kujul antud murdarvude kujutamise punktidega kiirel. Ruudulise paberi kasutamine harjutuste juures on vajalik juba sellel etapil. Tuleb vajadust mööda abiks võtta erinevad, tihti suured mastaabid (näiteks ühikuks 10 või 20 ruutu)[1]. «Ruutude arvestus» peab olema selgitatud. Kogemus näitab, et mitteküllaldaste selgituste korral mõned õpilased ütlevad «üks», näidates algusele. Nende jaoks kaob võimalus omandada teadlikult üldiselt tarvitusele võetud üksühest vastavust arvude ja arvtelje punktide vahel.

Negatiivsete arvude sisseviimisel kiir pikeneb, muutudes sirgeks (telg). Selle juures arvu absoluutväärtused, positiivsete ja negatiivsete arvude võrdlemine ning neli põhitehet nende arvudega saavad piltliku tõlgenduse.

Harjutuste sooritamisel on oluline alla kriipsutada seda, et arvtelge võib kasutada ü k s k õ i k m i l l i s t e suuruste vaatlemisel, olenemata nende suuruste iseloomust. Arvteljel

---

[1] On kasulik niisuguses suures mastaabis ära märkida punktid 0; 1; siis $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$ jne.

võib kujutada mitte ainult jõgede pikkust, mägede kõrgust ja muid joonsuurusi, vaid ka riikide pindalasid, anumate ruumalasid, temperatuure, mitmesuguste transpordiliikide kiirusi jne.

K o o r d i n a a t i d e   t a s a p i n d abstraktse uurimise objektina on VII klassi programmi üheks punktiks, kuid ettevalmistavas korras puutuvad õpilased temaga kokku varem ja nimelt VI klassis, näiteks seoses temperatuuride graafikutega või rongide liikumise graafikutega. Koordinaatide tasapind soodustab s u u r u s t e   p a a r i d e (sellised on antud näidetes «aeg — temperatuur» või «aeg — läbikäidud tee») arvuliste väärtuste kujutamist tasapinnal punktide näol.

Nagu kogemus näitab, ei tekita arvude paaride ja koordinaattasapinna punktide vahelise vastavuse ja samuti pöördvastavuse (analüütilises geomeetrias esimeses järjekorras uuritav) omandamine õpilastele raskusi. Märksa raskemalt omandatakse nende poolt vastavus võrrandi ja tema graafiku — punktide, mille koordinaadid rahuldavad võrrandit, geomeetrilise koha vahel. Kuid see on ka mitu korda tähtsam. Selleks et määrata kindlaks vastavust antud võrrandi ja tema graafiku vahel, ei ole õpilastel muud vahendit kui märkida joonisel (ruudulisel paberilehel) vajalik arv graafiku punkte ja ühendada siis need sujuva joonega. Õige, mõnedel lihtsatel juhtudel võib graafikut leida loogilise arutelu teel või, rakendades tõhusamaid vahendeid (näiteks matemaatilise analüüsi vahendeid), määrata kindlaks, äärmisel juhul, mõned tema omadused. Siiski õpilaste loogika sellel etapil ei ole veel nii kindel, et temale võiks edukalt tugineda. Piirduda mainitud lihtsaimate juhtudega ei ole küllaldane, kuid viimistletud vahendeid õpilaste käsutuses ka veel ei ole. Sellepärast on paratamatu õ p e t a d a   õ p i l a s i nende e s i m e s e l   t u t v u m i s e l   k o o r d i n a a t i d e   t a s a p i n n a g a   e h i t a m a   v õ r r a n d i t e   g r a a f i k u i d   p u n k t i d e   j ä r g i. See on peamine ja õieti ainuke ülesanne, mille peab endale püstitama õpetaja, töötades klassis koordinaatidevõrguga. Muidugi peetakse silmas koordinaatide printsiibi omandamist; detailiseerimised, eriti erijuhud, jäetakse aga välja.

VII klassis tuleb programmi kohaselt tegelda sirgjoontega. Siiski oleks märksa soovitavam näidata esimeste näidete seas samuti ka lihtsamaid kõverjooni (näiteks pöördvõrdelisus). Sirgjoonte puhul on kõige enam tähtis silmas pidada järgmisi juhiseid:

1. Igal juhtumil peab olema täidetud mõõdulise täpsuse (arvulise vastavuse olemasolu esitatud ülesande ja joonise vahel) nõue. Eriti sirgjoone korral kontrollitakse seda täisarvuliste koordinaatidega punktide abil, milliseid graafik läbistab.

2. Tuleb pöörata erilist tähelepanu sirgjoone t õ u s u l e. Tõusu all tuleb mõista sirge nurgakoefitsienti, s. o. tangens nurgale, mille võrra sirgjoon erineb x teljest. Õpilastele, kes veel ei tunne trigonomeetriat, on tõus x-i kordaja võrrandis, mis on lahendatud y-i suhtes. Selleks et näha teda joonisel, on küllaldane leida sirgel kaks täisarvuliste koordinaatidega punkti (soovitav kõrvutiolevad) ja eraldades telgedega paralleelsete kaatetitega täisnurkse kolmnurga, mille hüpotenuusiks on sirglõik nende punktide vahel, ning võtta (arvestades märki) vertikaalse ja horisontaalse kaateti suhe.

3. On vajalik saavutada oskust leida neid sirglõike, milliseid sirgjoon moodustab koordinaattelgedel.

4. Raskem on omandada oskust sirgjoone juhtimiseks läbi kahe arvuliste koordinaatidega antud punkti. Võrrandis $y = ax + b$ tuleb tähelised kordajad a ja b lugeda tundmatuteks ja valida nende väärtused vastavalt ülesande nõuetele: saadakse lineaarne süsteem.

Teise astme kolmliikme omadusi (VII klassis) tuleb uurida tihedas seoses tema graafikuga.

VIII klassis pärast funktsiooni $y = \frac{k}{x}$ graafiku uurimist võib üldistamise korras uurida lineaarse arvuliste kordajatega murdfunktsiooni

$$y = \frac{ax + b}{a'x + b'}$$

graafikut. Õpilased ehitavad graafiku harjutuste korras punktide järgi. Selle tulemusena nad näevad, et lineaarse murdfunktsiooni graafik on neile juba tuttav kõver-hüperbool. Seejärel õpetaja näitab, et lineaarse murdfunktsiooni graafikut on kergem ehitada pärast mõningaid teisendusi. Nimelt: funktsiooni

$$y = \frac{2x + 3}{4x - 1}$$

graafiku ehitamiseks sooritame esialgu järgmised teisendused:

a) eraldame murrust täisosa:

$$\frac{2x+3}{4x-1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{4x+6}{4x-1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(4x-1)+7}{4x-1}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{7}{4x-1}\right)=\frac{1}{2}+\frac{7}{2(4x-1)};$$

b) toome nimetajas sulgudest välja x-i kordaja ja tulemuse kirjutame järgmisel kujul:

$$\frac{1}{2}+\frac{\frac{7}{8}}{x-\frac{1}{4}}.$$

Nüüd on selgesti näha, et antud funktsiooni graafikut võib saada funktsiooni

$$x=\frac{\frac{7}{8}}{x}$$

graafikust, viies viimast paremale $\frac{1}{4}$ ühiku võrra ja üles $\frac{1}{2}$ ühiku võrra. Nihutatud graafiku asümtootideks on sirged, mis on saadud ordinaat- ja abstsisstelje nihutamise teel vastavalt $\frac{1}{4}$ ühiku võrra paremale ja $\frac{1}{2}$ ühiku võrra üles. Sellepärast antud funktsiooni graafik kandub üle funktsiooni $y=\frac{\frac{7}{8}}{x}$ graafikule, mis on nihutatud sirgeteni

$$y=\frac{1}{2} \text{ ja } x=\frac{1}{4}$$

kui ka telgedeni.

VIII klassis võivad õpilased lahendada graafiliselt võrrandi $ax^2+bx+c=0$, andes talle kuju $ax^2=-bx-c$ ja ehitades funktsioonide

$$y=ax^2 \text{ ja } y=-bx-c$$

graafikud. Nende graafikute (parabooli ja sirge) lõikepunktide abstsissid ongi antud võrrandi lahendid.

Sama idee on kahe tundmatuga, milledest üks või mõlemad on teises astmes, kahest võrrandist koosneva süsteemi lahendamismeetodi aluseks. Ei saa muidugi nõuda, et iga niisuguse süsteemi lahendamisega kaasneks tema geomeetriline kujutamine, kuid siiski on vajalik niisugust kujutust vaadelda, äärmisel juhul, mõne mittelineaarse süsteemi juures.

Õpilased võivad VIII klassis ruutjuurte tabelite abil edukalt punktide järgi ehitada ringjoone, hüperbooli ja parabooli arvuliste kordajatega võrrandite graafikuid.

IX klassis tuleb tähelepanu osutada eksponent- ja logaritmfunktsiooni graafikutele.

Õpetaja peab funktsioonide graafikutega töötamise ajal jälgima funktsioonide kasvu ja kahanemise juurde kuuluvatest terminitest õiget arusaamist ja aktiivset tarvitamist õpilaste poolt. On loomulik, et õpilased, kodunedes pikkamööda nende terminitega, kasutaksid neid enam lühendatud kujul. Näiteks, alguses, vaadeldes joonist, on vaja funktsiooni

$$y = x^2 - 6x + 11$$

«käitumist» iseloomustada sõnadega: «muutuja x kasvades 3-st kuni lõpmatuseni, funktsioon y kasvab 2-st lõpmatuseni, aga muutuja x kasvamisel miinus lõpmatusest kuni 3-ni, funktsioon y kahaneb lõpmatusest 2-ni»; edaspidi võib rääkida lühemalt: «funktsioon y kasvab kui $x > 3$ 2-st kuni $+\infty$ ja kahaneb kui $x < 3$ $+\infty$-st kuni 2-ni». «Kui $x = 3$, siis funktsioon y omab väikseima väärtuse 2», või «saavutab miinimumi 2». Võimalikult tihedamini tuleb funktsioonide graafikuid õpilastele esitada mitte abstraktselt — geomeetrilises vormis, vaid kaastekstiga, mis selgitaks nende graafikute tekkimist, ülesannet või kasutamist. Vahel võib leppida sellega, et nimetatakse füüsikaliste suuruste nimetuse, mille väärtused asuvad koordinaattelgedel. Siit tulevad niisugused kõnekäänud nagu «ajatelg», «temperatuuritelg» jne.

Mitmesugust liiki «nimega» graafikute seas omavad esimest ja tähtsamat kohta liikumise graafikud. Keskkooli õpilastele on täiesti jõukohased niisugused kahte tüüpi graafikud: 1) *punkti liikumine mööda sirget* (mööda x-telge) ja 2) *punkti liikumine tasapinnal xy.* Esimesel juhul koordinaat x esineb kui aja t funktsioon; teisel juhul kaks koordinaati x ja y esinevad kui aja t funktsioonid. Arvutanud välja koordinaatides arvulised väärtused, mis määravad kindlaks liikuva punkti asendi erinevatel ajamomentidel ja kirjutanud tulemused tabeli kujul, märgitakse joonisel punktide asukohad ning asetatakse nende juurde vastavad t väärtused. Niisugusel juhul on kergesti nähtavad mitte üksi liikumise trajektoorid, vaid kogu liikumise iseloom (suund, kiirus) mööda seda trajektoori. Kõrvuti liikumise kujutamise näidatud meetodiga on võimalik, juhul kui liikumine toimub mööda sirget (mööda x-telge), ka teine meetod, kus aega t kujutatakse horisontaalsel teljel, kuid liikumist vertikaalsel teljel. Näiteks, võrrand $y = x - \frac{1}{10} x^2$ esitab parabooli, mis läbib koordinaatide alguspunkti; ja seesama parabool[1], kirjutatud kujul $x = t - \frac{1}{10} t^2$, kujutab sellise langeva punkti, mis on visatud alguspunktist 0 vertikaaltelje suunas, liikumist.

Näiteid tekstilises vormis antud andmete järgi graafikute ehitamiseks leidub Šapošnikov'i ja Valtsov'i ülesannete kogus (II osa X peatükk, lk. 30—31). Nende temaatikaks on vee auramine olenevalt temperatuurist, Faraday seadus, Ohmi seadus, keevitusõmbluse omahind olenevalt plaatide paksusest jne. Väärivad tähelepanu ka seal toodud vastupidised näited, kus minnes välja antud tabelist, soovitatakse graafiku märkimisel ära näidata ka ligikaudne valem (hääle kiirus erinevate temperatuuride juures, elektriveduri jõud olenevalt voolu tugevusest). Nendele ja analoogilistele vastupidistele ülesannetele, s. t. valemi otsimisele antud empiiriliste andmete — tabeli või graafiku — järgi, tuleb samuti osutada tähelepanu.

Märgime selle lõigu lõpuks, et keskkooli tingimustes on võimalik ehitada ainult niisuguseid graafikuid, millised näitavad sõltuvust k a h e muutuva suuruse vahel. Kui mõned võrrandid sisaldavad k o l m e suurust, siis, andes ühele neist järk-järgult rea kindlaid väärtusi, saame r e a kahemuutujaga võrrandeid. Ehitanud samal joonisel iga niisuguse võrrandi jaoks graafiku, saame «nomogrammi», mis võimaldab vaadelda sõltuvust tervikuna.

---

[1] Täpsemalt, tema osa mis vastab argumendi x positiivsetele väärtustele.

POLÜTEHNILISE SISUGA ÜLESANDED.

Õpilaste ja õpetaja tähelepanu peab olema suunatud praktiliste tööde täitmisele ja iga liiki ülesannete lahendamisele. Nende seas omavad tähtsama koha polütehnilise sisuga tekstülesanded. Sellist tüüpi ülesanded ei kujune kunstlikeks, kui nad on võetud vahenditult praktikast.

Praktilise sisuga tekstülesannete juurde võivad kuuluda need ülesanded Šapošnikov'i ja Valtsov'i «Algebra ülesannete kogust ning ka Laritševi «Algebra ülesannete kogust», mille sisuks on küsimused mehhaanikast (jõud, kangid), füüsikast (erikaal, sulamid, soojus, hääl, valgus, elekter), keemiast (segud).

Toome veel mõned näited polütehnilise sisuga ülesannetest.

1. 0° temperatuuri juures raudkangi pikkus 1 on 5 m. Kujutada graafiliselt, kuidas muutub selle kangi pikkus tema kuumutamisel — 20° kuni 50°, teades et raua joonpaisumise koefitsient on 0,000012.

2. 1 m pikkuse raudkangi otsa on joodetud 0,5 meetrine vaskkang. Kujutada graafiliselt, kuidas muutub saadud kangi pikkus kuumutamisel — 10° kuni 100°, teades et raua joonpaisumise koefitsient on 0,000012, vasel aga 0,000018.

3. Klaasanum sisaldab 250 cm^3 elavhõbedat. Kujutada graafiliselt, kuidas muutub selle elavhõbeda vaadeldav ruumala kuumutamisel 0°—100°, teades et ruumpaisumise koefitsient klaasil on $\frac{1}{38\,700}$, elavhõbedal $\frac{1}{5550}$.

J u h i s:

Võtta arvesse, et elavhõbeda vaadeldav ruumala võrdub tema absoluutse ruumala ja nõu ruumala vahega.

4. 2,33 g raua ja tsingi segu lahustamisel happes saadi 896 *ml* vesinikku (normaalsete tingimuste juures). Mitu grammi rauda ja mitu grammi tsinki sisaldas segu?

V a s t u s: 1,68 g rauda ja 0,65 g tsinki.

5. Segu koosneb kloorkaaliumist ja kloornaatriumist ning kaalub 3 G; segusse tulnud kloori kaal on 1,7 G. Leida segusse tulnud kloorkaaliumi ja kloornaatriumi kaalud, teades et aatomkaalud kaaliumil, naatriumil ja klooril on vastavalt 39,1; 23; 35,4.

V a s t u s: Kloorkaaliumi kaal on ligikaudu 0,9 G, kloornaatriumi kaal 2,1 G.

Juhis. Kui A, B, P on kolm keemilist ühendit, milledes ühe elemendi igale aatomile tuleb juurde teise elemendi üks aatom, siis, tähistades elementide A, B, P aatomkaalud vastavalt tähtedega a, b, p, leiame, et ühendi AP molekulkaal väljendub arvuga $a+p$, aga molekulide arv selle ühendi x kaaluühikus võrdub $\frac{x}{a+p}$, nii et elemendi P kõigi nende aatomite, mida sisaldab ühend AP kaal on $\frac{px}{a+p}$; täpselt samuti leiame, et ühendi BP y kaaluühikus olevate elemendi P kõigi aatomite kaal on võrdne $\frac{py}{b+p}$.

6. Kui kiir, väljudes punktist X, mis asub kaksikkumera läätse optilisel teljel, pärast murdumist selles läätses lõikab optilist telge punktis Y, siis punkti X ja läätse keskpunkti vahelise kauguse x ning punkti Y ja läätse keskpunkti vahelise kauguse y vahel kehtib seos.

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{f},$$

kus f on läätse peafookuse kaugus.

Läätse peafookuse kauguseks on selle punkti, kus lõikuvad peale murdumist läätsele langenud paralleelsed kiired, kaugus läätse keskpunktist. Seda võib avaldada valemiga

$$f=\frac{R_1R_2}{(n-1)(R_1+R_2)},$$

kus n on läätse murdumisnäitaja, R_1 ja R_2 — läätse moodustavate kõverpindade raadiused.

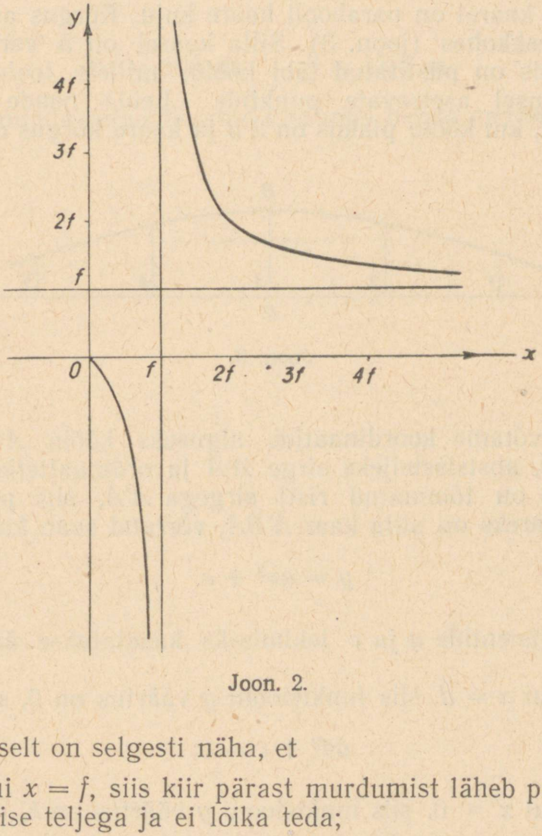
Väljendame kauguse y kauguse x kaudu

$$y=\frac{fx}{x-f}.$$

Ehitame selle murdlineaarse funktsiooni graafiku. Selleks teostame järgmise teisenduse (vt. lk. 49):

$$y=\frac{fx}{x-f}=\frac{fx-f^2+f^2}{x-f}=f+\frac{f^2}{x-f}.$$

Näeme, et selle funktsiooni graafik on hüperbool, mis saadakse hüperboolist $\frac{f^2}{x}$ nihutades viimast f ühiku võrra paremale ja f ühiku võrra üles (joon. 2).



Joon. 2.

Jooniselt on selgesti näha, et

1) kui $x = f$, siis kiir pärast murdumist läheb paralleelselt optilise teljega ja ei lõika teda;

2) kui $x = 2f$, siis kiir pärast murdumist lõikab optilist telge kaugusel $2f$;

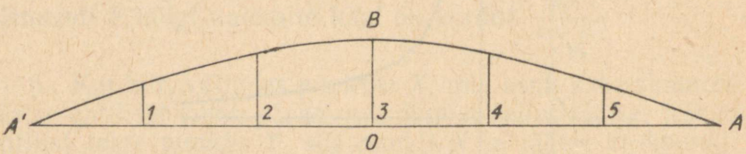
3) kauguse x suurenemisel f-ist kuni lõpmatuseni kaugus y väheneb (lõpmatusest), lähenedes piiramatult väärtusele f;

4) kui kaugus x on suurem kui null, kuid väiksem kui f, siis kaugus y omab negatiivse väärtuse

$$(-\infty < y < 0);$$

s. t. kiir murdudes ei lõika optilist telge, kuid murdunud kiire pikendus lõikab optilist telge punktis, mis asub läätsest samal pool, kus on punkt X; teisiti öeldes, murdunud kiir kaldub optilisest teljest kõrvale.

Silla kaarel on parabooli kaare kuju. Kõrgus asub selle kaare keskkohas (joon. 3). Silla kaarel on 5 vertikaalset telge, mis on püstitatud läbi kõõlu, millele toetub kaar, ühekaugusel asetsevate punktide. Leida nende telgede pikkused, kui kõõlu pikkus on 2 d ja kaare kõrgus on h.



Joon. 3.

Kui võtame koordinaatide alguseks kõõlu $A'A$ keskpunkti 0, abstsissteljeks sirge $A'A$ ja ordinaatteljeks sirge OB, mis on tõmmatud risti sirgega $A'A$, siis parabooli, mille kaareks on silla kaar $A'BA$, võrrand saab kuju:

$$y = ax^2 + c.$$

Koefitsientide a ja c leidmiseks kasutatakse ära kahte fakti:

1) kui $x = d$, siis funktsiooni y väärtus on 0, s. t.

$$ad^2 + c = 0; \tag{1}$$

2) kui $x = 0$, siis funktsiooni y väärtus on h, s. t.

$$c = h. \tag{2}$$

Võrranditest (1) ja (2) leiame, et $a = -\frac{h}{d^2}\cdot$

Otsitav võrrand saab kuju:

$$y = -\frac{h}{d^2}x^2 + h.$$

Nüüd on kerge leida tugede 4 ja 5 pikkusi.

Toe 4 pikkus on võrdne parabooli (1) punkti ordinaadiga, mis vastab abstsissile $\frac{d}{3}$ ja toe 5 pikkus on võrdne parabooli (1) punkti ordinaadiga, mis vastab abstsissile $\frac{2d}{3}$.

N ä i d e:

$$2d = 108\ m, \qquad h = 13{,}5\ m.$$

Lahendada eelpooltoodud ülesanne nende andmete järgi.

GEOMEETRIA

ÜLDISED SEISUKOHAD

Geomeetria õppimise objektiks on materiaalse maailma ruumilised vormid. Sellepärast kujutab geomeetria endast ühte loodusteadustest, mille sisu haarab äärmiselt laia ringi esemeid, nende omadusi ja vastastikuseid suhteid. See asjaolu tingib märksa kindlamate ja mitmekesisemate sidemete olemasolu geomeetria ja teiste loodusteaduste ning tehnika vahel.

Sellepärast peab polütehnilise õpetuse ülesannete lahendamiseks eelkõige tundma hästi geomeetria teooriat. Seda silmas pidades on vajalik geomeetria teoreetilise materjali õppimise juures näidata, kuidas kasutatakse ruumiliste kujundite omadusi inimese teaduslikus ja praktilises tegevuses. Nende teooria ja praktika vaheliste sidemete avastamine, geomeetria mitmekesise rakendamise selgitamine teaduses, tehnikas, põllumajanduses mõnede tööprotsesside juures (mõõtmised klassis ja väljas, joonestusinstrumentide tarvitamine, modelleerimine jne.) moodustab polütehnilise õpetuse aluse geomeetria õpetamises.

Pidades meeles, et geomeetria õppimise eesmärgiks on materiaalse maailma ruumiliste omaduste tunnetamine, peame vaatlema polütehnilist õpetust mitte programmi laiendamisena ja kursuse juhusliku lisandina, vaid kursuse printsipiaalse alusena, mis soodustab aine täielikumat ja sügavamat tundmaõppimist.

Lähtudes sellest võime üles seada peamised teed polütehnilise õpetuse eesmärgi saavutamiseks geomeetria õpetamisel. Need teed on järgmised.

1. Sideme avastamine geomeetria ja teiste teaduste vahel.

Siin on vaja kõigepealt näidata geomeetria arvukaid ja mitmekesiseid sidemeid füüsikaga. Teame, et terved suured lõigud füüsikast, näiteks mehhaanika, geomeetriline optika, elektrostaatilise ja elektromagneetilise välja teooria, tuginevad geomeetriale.

Keemias on väga suur tähtsus stereokeemial, milles määratakse kindlaks side orgaaniliste ühendite omaduste ja aatomite, mis moodustavad antud aine molekuli, ruumilise asetuse vahel.

Olulise osa mineraloogiast moodustab kristallograafia, milles õpitakse tundma kristallide geomeetrilisi omadusi. Kristallograafias tõestatakse, et kõigi meile tuntud kristallidesüsteemi olemasolu on tingitud punktidevõre geomeetrilistest omadustest.

Geomeetrilisi lauseid kasutatakse järjest ka astronoomias.

Väga tihe ja kindel side peab olema geomeetria ja joonestamise õpetamise vahel, kuna geomeetrias süstemaatiliselt kasutatakse jooniseid lausete illustreerimiseks ja mitmesuguste ülesannete lahendamiseks ning joonestamisel kasutatakse geomeetria seadusi igasuguste konstruktsioonide põhjendamiseks. Siiski paljudel juhtudel tuleb ilmsiks oluline lõhe geomeetria ja joonestamise õpetamise vahel. Mõlema aine õpetajad tihti ei tea ja ei huvitu sellest, mis tehakse teise õpetaja tundides. Joonestamisõpetaja tihti esitab oma ainet, mitte hoolides tema poolt esitatud konstruktsiooni reegli teoreetilisest põhjendamisest, vaid tõstes esimesele kohale ainult joonestamisprotsessi tehnilist külge. Teiselt poolt, geomeetria õpetaja suhtub vahel hoolimatult joonise välimusesse, kujundi täpsesse ja õigesse kujutamisesse. Polütehniline õpetus nõuab, et geomeetria ja joonestamise õpetamine kulgeks tihedas seoses ning alalises vastastikuses koostöös.

2. Sideme avastamine geomeetria ja tehniliste distsipliinide vahel.

Ruumiliste kujundite omaduste tundmist on vaja terve rea praktiliste, majanduslike ja kultuuriliste tarvidustega seoses olevate küsimuste lahendamiseks. Praktilistest distsipliinidest on kõige rohkem geomeetriaga seotud geodeesia, mille ülesandeks on maamõõtmine. Nagu teada, käsitleti esialgu ka geomeetriat ennast kui maamõõtmist, kust on tulnud ka nimetus. Mitmesugused maamõõtetööd tuginevad täielikult geomeetria seadustele ja reeglitele.

Meie päevil omab väga suurt tähtsust maapõue geomeetria — praktiline teadus ruumiliste vahekordade määramisest maa-aluse töö tingimustes. Kaasaegses rahvamajanduslikus elus on selle teaduse osa äärmiselt suur, kui võtta arvesse, millist määratu suurt tähtsust praegusel ajal omavad mitmesugused maa-alused ehitised: šahtid, kaevandused, tunnelid, maa-alused juhtmete- ja kanalisatsioonisüsteemid jne.

Väiksemat osa ei etenda geomeetria ka ehitusasjanduses, hoonete, sildade, kanalite, teede, mitmesuguste hüdrotehniliste ehituste ehitamisel.

Tehnika tugineb geomeetriale ka mitmesuguste tehniliste konstruktsioonide teostamisel — tööpinkide, masinate, mootorite jne. projekteerimisel ja ehitamisel.

Geomeetrilised probleemid tekivad samuti ka riide, naha, metalli juurdelõikamisel. Siin on väga suur tähtsus küsimuse lahendamisel, kuidas antud materjalitükist välja lõigata määratud vormiga kujundit ja seejuures nii, et jäätmetükkide arv oleks võimalikult väike.

Me tõime ainult mõned näited geomeetria ja tehnika vahelisest seosest. Soovi korral võiks nende näidete arvu tunduvalt suurendada. Juhime õpetaja tähelepanu sellele, et tuleb igati kasutada tema käsutuses olevaid võimalusi nende sidemete näitamiseks õpilastele.

3. Polütehniline õpetus geomeetriliste ülesannete lahendamisel.

Geomeetriliste ülesannete lahendamisel koolis on esmaseks eesmärgiks saadud teoreetiliste teadmiste kinnistamine, loogilise mõtlemise ja ruumilise kujutluse arendamine, konstruktiivsete ja arvutuslike oskuste sisendamine, samuti mitmesuguste praktiliste küsimuste lahendamine.

Küllalt tihti võib ülesande geomeetrilist sisu siduda näidetega teaduse mitmesugustest valdkondadest, tehnikast ja praktilisest elust. Näiteks, ülesanne: «Leida antud sirgel l niisugune punkt M, et tema kauguste summa sirgest ühel pool asetsevatest punktidest A ja B oleks kõige väiksem» — lahendatakse teljelise sümmeetria omaduste rakendamisega: võetakse punkt B', mis on sümmeetriline punktiga B sirge l suhtes; otsitav punkt M on sirge l ja sirglõigu BB' lõikepunkt. Sellele ülesandele võib anda rea tõlgendusi.

«Olgu l jõe kallas, punktid A ja B — asustatud punktid. Kuhu kohta kaldal tuleb ehitada sadam, et teepikkuste summa $AM + BM$ oleks kõige väiksem? Millises suunas peab minema valgusallikast A väljunud valguskiir, et ta, peegeldunud tasapinnaliselt peeglilt l, langeks punkti B'. Selle ülesande vastus näitab, et valguskiir peab olema suunatud nii, et teede — valgusallikast peeglini ja peeglilt punktini B — pikkuste summa oleks lühim.

«Punktides A ja B asuvad piljardikuulid. Millises suunas tuleb tõugata kuuli A, et ta põrkudes tagasi piljardilaua äärelt l, tabaks kuuli B?» «Mööda polti l libiseb hõõrdumiseta rõngas M, läbi rõnga on juhitud pingule tõmmatud elastne nöör, mis on kinnitatud otstesse A ja B. Milline on rõnga M asend tasakaalutingimustes?»

Selle kirjutise teises osas toome veel näiteid sellistest tõlgendustest, mis näitavad, kuidas abstraktselt geomeetriliselt formuleeritud ülesannet võib tõlkida praktilisse keelde.

Teisest küljest ei ole polütehnilise õpetuse vaatepunktist vähem tähtis arendada oskusi antud praktilise küsimuse kujutamiseks geomeetrilise ülesande vormis. Näiteks, küsimus sellest, kuidas antud kolme raadiomajaka asukoha järgi määrata kindlaks laeva asend merel, kui on teada suunad laevalt majakateni — taandub geomeetriliseks ülesandeks («Potenot ülesanne»): leida punkt, millest kaks antud sirglõiku on näha antud nurga all.

Esitades praktilise sisuga ülesandeid, tuleb olla siiski väga ettevaatlik ja pidada silmas, et praktilised küsimused oleksid küllaldaselt selged ja jõukohased õpilaste arusaamisele ning ei juhiks nende tähelepanu kõrvale ülesande geomeetrilisest olemusest. Sellepärast ei tohi anda ülesandeid liitmehhanismide kirjeldustega, mis on üle kuhjatud õpilastele tundmatute tehniliste terminitega.

Tuleb juhtida tähelepanu veel sellele, et praktilise sisuga ülesande tingimus oleks täiesti konkreetne ja peegeldaks õigesti reaalseid suhteid esemete vahel. Seda nõuet ei rahulda näiteks ülesanne nr. 29 Rõbkini ülesannete kogust (I osa § 15.). Selles ülesandes nõutakse 1,884 meetrise ümbermõõduga puu lõikepindala leidmist. Kui mitte eriti arvestada tüve lõike kindlat kuju, koore ebatasasust jne., jääb siiski täiesti arusaamatuks, miks oli autoril vaja anda ümbermõõt täpsusega kuni üks millimeeter (!), kui tegelikult niisuguse puu ümbermõõtu saab mõõta paremal juhul ühe sentimeetri täpsusega.

Geomeetria õpetamisel on suur tähtsus mitmesugustel konstruktsioonülesannetel, mille lahendamisel õpilased omandavad konstruktiivseid vilumusi ning mitmesuguste instrumentide kasutamise oskusi. On väga tähtis, et õpilased saaksid kasutada mitte üksi klassikalisi geomeetria instrumente — sirklit ja joonlauda, vaid ka joonestuskolmnurka, mis tunduvalt lihtsustab paljusid konstruktsioone. Peale selle on soovitav, et õpilased saaksid tegelda mõningatel juhtudel konstruktsioonidega, mis teostatakse ainult sirkli jne. abil. Geomeetriliste instrumentide hulka tuleb lugeda ka pantograafi — väga lihtsat instrumenti, mida võivad õpilased kergesti ise valmistada.

Ruumiliste kujutluste arendamisel ja kõigile tehnilistele distsipliinidele vajaliku oskuse, jooniste lugemise ja mõistmise omandamisel peab etendama määratu suurt osa stereomeetriliste ülesannete lahendamine projektiivse joonise kujul.

4. Praktilised õppused geomeetriast.

Õppustega geomeetrias peavad kaasas käima kohustuslikud praktilised tööd, kuhu tuleb kaasa tõmmata kõiki õpilasi. Praktiliste tööde hulka peavad kuuluma kõik modelleerimise tööd, mitmesugused maamõõtmise tööd, mitmesuguste tehniliste, majatalitus-, majanduslike ehitiste jne. esemete pindala ja ruumala mõõtmine.

Modelleerimist võib läbi viia kõigil geomeetria õppimise astmetel, kusjuures võib valmistada nii planimeetrilisi kui ka stereomeetrilisi mudeleid. Mudelite valmistamise protsessis kinnistatakse õpilaste teoreetilisi teadmisi ja omandatakse rida praktilisi oskusi.

Maamõõtmise tööd võimaldavad märksa laiemalt demonstreerida geomeetria praktilist tarvitamist. Nendes töödes õpilased saavad ettekujutuse plaanikindla kollektiivse töö korraldusest, tutvuvad mõõteriistade kasutamisega, saavad aimu mõõtmise täpsusastmest, vea arvestamisest, õpivad ümber töötama mõõtmise tulemusena saadud arvulisi materjale.

Peale maamõõtmistööde viiakse mõõtmisi läbi ka teistel objektidel: määratakse kindlaks mudelite, tehniliste esemete pindala ja ruumala ning mitmesuguste ehitiste maht.

Me loetlesime peamisi suundi, millistele peavad olema keskendatud õpetaja jõupingutused polütehnilise õpetuse teostamisel geomeetrias. Tuleb pöörata tähelepanu sellele, et mitte ükski nendest suundadest üksikult võetuna ei võimalda püstitatud probleemi täielikku lahendamist. Sellepärast oleks suur viga mõtelda, et täites mistahes ühte ülalpool toodud tingimustest, näiteks organiseerides praktilisi töid mõõtmises, võime ülejäänud tingimuste täitmise üle muretud olla.

Selle lõigu lõpuks loeme vajalikuks juhtida õpetaja tähelepanu veel ühele mitte vähem tähtsale asjaolule. Peame silmas seda suurt mõju, mida osutab polütehniline õppus geomeetria aine omandamisele õpilaste poolt. Kuiva, abstraktse loogilise süsteemi õppimise asemel näevad õpilased elavat, kõikehõlmavat teadust, mis on seotud mitmekesiste suhete abil mitmesuguste teaduse ja praktilise elu valdkondadega. Õpilased veenduvad selles, et nende poolt õpitud teoreemid «töötavad», s. t. saavad vahenditu rakenduse inimeste loovas töös. See aga tagab koolis õpetatavate, meid ümbritseva maailma ruumiliste vormide omaduste veel sügavama mõistmise ja kindlama meelespidamise.

POLÜTEHNILINE ÕPETUS GEOMEETRIA KÄSITLEMISE ERINEVATEL ASTMETEL.

Vaatleme nüüd detailsemalt ja konkreetsemalt seda, mida võib teha õpetaja geomeetria õpetamise erinevatel astmetel.

Täiesti mõistetavatel põhjustel ei ole meil võimalik anda õpetajale üksikasjalisi juhiseid selle kohta, mida tuleb teha igas tunnis, kuid püüame tuua kursuse iga osa kohta küllalt ilmekaid ja veenvaid näiteid, millele tuginedes võib õpetaja iseseisvalt jätkata tööd samas suunas. Polütehnilise õppuse teostamisel peab etendama eriti suurt osa õpetaja enda initsiatiiv ja loov mõte, samuti õpetajate kollektiivi koostöö ning elav kogemuste vahetamine.

1. Esimesed sammud ruumiliste kujundite tutvustamisel.

Käesoleval ajal asutakse koolis geomeetria õppimisele VI klassis. Esimeses viies klassis ei tutvu lapsed üldse materiaalse maailma ruumiliste omadustega, kui mitte arvestada neid kasinaid teadmisi mõõtmelisest geomeetriast, milliseid antakse aritmeetika tundides. Niisugust olukorda ei saa kuidagi lugeda normaalseks, kuna õpilased asuvad süstemaatilise geomeetria kursuse õppimisele, omamata vajalikke ruumilisi ettekujutusi ja mõisteid. See ebanormaalsus annab eriti teravalt tunda polütehnilise õpetuse probleemide lahendamisel, mis nõuab, et kõik mõisted, milliseid kasutatakse õpetamise protsessis, oleksid õigesti kujundatud vastavate objektide vahetu, elava intuitsiooni alusel.

Sellepärast peab alustama ruumiliste vormidega tutvumist võimalikult vara, õpilaste esimestest koolisviibimise päevadest alates. Õieti võiks niisugust tutvumist alustada juba eelkoolieas, lasteaias.

Me ei eelda sugugi, et algklassides tuleks esitada süstemaatilist tsüklit geomeetrilistest teadmistest. On täiesti küllaldane, kui õpilased õpivad eraldama, tundma ja õigesti nimetama mõningaid geomeetrilisi kujundeid ning kõige üldisemates joontes teaksid nende peamisi omadusi. Neid esialgseid teadmisi võib anda õpilastele täpselt samuti, kui antakse algklassides elementaarseid mõisteid ajaloo, geograafia, loodusõpetuse jne. valdkonnast.

Niisugust tutvustamist tuleb alustada esemetest, mis on lastele hästi tuttavad. Valides võimalikult erinevad esemed, tuleb näidata, et vaatamata nende esemete füüsikaliste omaduste erinevusele, nad võivad omada ühte ja sama k u j u. Pall, gloobus, seebimull, kuullaagri kuul — kõik need esemed omavad kera k u j u. Klaasil, kruusil, ämbril on silindri k u j u. Samal viisil võib õpilasi tutvustada kuubi, rööptahuka, püramiidi, koonuse kujuga. Samal ajal tuleb õpilastele näidata lihtsamaid tasapinnalisi kujundeid: ringi, ruutu, ristkülikut, kolmnurka — arvutuid näiteid, mida ei ole raske leida ümbritsevast keskkonnast. Sellega seoses peavad õpilased tutvuma nende kujundite mõningate tähtsamate omadustega, milleks on näiteks ringi ühtlane kõverus, kolmnurga kuju stabiilsus (kujupüsivus), ristküliku kahesugune sümmeetria. On vajalik, et õpilased tajuksid, kui võimalik, neid omadusi konkreetselt, toetudes elavale vaatlusele ja praktikale. «Miks tehakse rattad ümmargused?» «Miks katuse sarikad ühendatakse kolmnurgakujuliselt?» «Miks vihikutele ja raamatutele antakse ristküliku kuju?» Selleks et saada usutavaid vastuseid nendele küsimustele, on küllaldane katsuda teha ratas mitte ringikujuline, ehitada sarikate mudel nelinurga kujuline või proovida teha paberilehest vihik kolmnurkses vormis.

Edasi tuleb lastele tutvustada enam abstraktseid mõisteid — pind, joon, punkt — kasutades nende mõistete formuleerimisel konkreetseid objekte. Seoses nende üldiste mõistetega formuleeritakse ka enam üksikuid, kuid geomeetria jaoks väga tähtsaid teadmisi — tasa- ja kõverpind, sirg- ja kõverjoon — mille juures on täiesti vajalik, et neid teadmisi formuleeritaks alalise võrdlemise ja üksteisega kõrvutamise protsessis: laua, klassitahvli, peegli tasapind; palli, elektrilambi, klaasi kõverpind; pingule tõmmatud niit ja kahest punktist kinnitatud vabalt rippuv pingutamata niit (aheljoon) jne.

Koos mõistega sirgest antakse ka mõiste suunast — vertikaalne sirge, horisontaalne tasapind. Nendest mõistetest selge ettekujutuse saamiseks tuleb lastele näidata lihtsamaid instrumente — püstloodi ja vesiloodi, mille abil need suunad kindlaks määratakse. Siin on jällegi sobiv esitada küsimusi: «Miks põranda, laua pind püütakse teha horisontaalne?» «Miks hoonete seinad tehakse vertikaalsed?»

Lõpuks, samal astmel, tuleb anda teadmisi ka mõningatest geomeetriliste kujundite vahelistest suhetest nagu näiteks paralleelsusest, perpendikulaarsusest, kongruentsusest, sarnasusest, sümmeetriast.

Mõisteid sirgete paralleelsusest ja perpendikulaarsusest võib näidata suure arvu näidete abil: jooneline vihik, raudtee rööpad, joonlaua servad jne. annavad ettekujutuse paralleelsetest sirgetest. Täisnurka näevad õpilased igal sammul, kuna suurel arvul neid ümbritsevatel esemetel on ristküliku kuju.

Esemete kongruentsus esineb väga lihtsa ja näitliku suhtena, mida saab näidata paljude näidete abil. Seejuures tuleb juhtida tähelepanu sellele, milline suur tähtsus kaasaegses tehnikas on mitmesuguste detailide geomeetrilisel kongruentsusel igasuguste masinate seeriaviisilise väljalaskmise juures ja millist suurt täpsust tuleb silmas pidada nende detailide valmistamisel.

Sama lihtne ja jõukohane on sarnasuse mõiste: lapsed näevad oma mänguasjades miniatuurseid inimeste, loomade, autode, vagunite jne. kujutisi. Samasuguseid esemete kujutisi leidub ka joonistel, piltidel fotodel. Maakera selliseks kujutiseks on gloobus. Tehnikas on suur tähtsus masinate, mootorite, lennukite, hüdrojaamade jne. mudelitel, mis kujutavad endast vähendatud sarnaseid kujutisi vastavatest esemetest.

Sama tihti kui kongruentsust ja sarnasust, võivad lapsed näha ka sümmeetrilisust, mida me näeme igal sammul meid ümbritsevates esemetes: inimese nägu, taime leht, liblika tiivad, lill, lumehelves, ornamendid, arhitektuurilised ja tehnilised vormid jne. Sümmeetriat on kerge saavutada mitmesuguste võtetega, näiteks peegeldamisega peeglist, paberilehest murdmise ja väljalõikamise teel. Paljude eelpoolloetletud geomeetriliste mõistete omandamiseks tuleb kasutada ka joonistamistunde algklassides.

Kõik need esialgsed õppused peamiste geomeetriliste kujutiste ja mõistete tutvustamiseks omavad suurt tähtsust lapse psüühika kujundamisel.

Seoses sellega on polütehnilise õpetuse jaoks esmajärguline tähtsus kasvatada õpilastes harjumusi näha neid ümbritseva keskkonna esemetes geomeetrilisi vorme, kuna sellega avatakse võimalus teha ilmsiks sõltuvust geomeetria ja inimese praktilise tegevuse vahel.

Peab lugema samuti täiesti hädavajalikuks, et juba õppimise esimesel astmel sooritaksid lapsed mõningaid praktilisi töid, tutvuksid joonlaua, sirkli ja kolmnurga kasutamisega ning viiksid läbi klassis ja kodus esinevate esemete lihtsamaid mõõtmisi. Tasub samuti sooritada väikesi modelleerimistöid, näiteks kuubi ja risttahuka pinnalaotuse ehitamine ning mudeliteks kleepimine.

2. Süstemaatilise geomeetria kursuse käsitlemise algus.

Kõik see, millest on räägitud eelmistes lõikudes, peab olema läbi viidud algklassides enne geomeetria süstemaatilise kursuse õppimist programmi ja õpiku järgi. Siiski rõhuval enamusel juhtudel, nagu me juba näitasime, seda kas üldse ei tehta või tehakse puudulikult. Seepärast, asudes geomeetria süstemaatilise kursuse esitamisele, peab õpetaja kõigepealt järgi uurima, millised geomeetriliste kujutluste ja mõistete varud on õpilastel juba olemas. Kui selgub, et need varud on puudulikud, peab püüdma võimalust mööda neid lünki täiendada, pühendades esimesed tunnid vestlustele, millede eesmärgiks on õpilaste õigete geomeetriliste kujutluste loomine. See ülesanne on küllalt raske, kui varem pole selles suunas mingisugust tööd läbi viidud.

Et võimalust mööda kergendada õpilastel põhiliste geomeetriliste mõistete, eelkõige sirge, kiire, sirglõigu mõiste kujunemist, peab juba esimestest päevadest alates teostama praktilisi õppusi maastikul. Need õppused peavad omama täiesti elementaarset iseloomu ja haarama järgmisi operatsioone: 1) punktide tähistamine maastikul; 2) sirgjoone tähistamine; 3) sirglõikude mõõtmine mõõdulindi abil, mõõtmine mõõtesirkliga, sammudega, kauguse hindamine silma järgi. Septembrikuu esimesed päevad, mil algab õppeaasta, võimaldavad tavaliselt ilmastikuolude poolest viia töid läbi vabas õhus.

Praktiliste tööde läbiviimiseks jaotatakse klass rühmadeks, 4—5 õpilast rühmas. Seejärel saab iga rühm eri ülesande: ühele usaldatakse punktide märkimine, teine tähistab sirgeid, kolmas sooritab mõõtmisi ühe instrumendiga, neljas sooritab mõõtmisi teise instrumendiga, viies harjutab kauguse hindamist silma järgi jne.

Lõpetanud oma töö, vahetavad brigaadid osad. Selleks tuleb praktilisi töid kalkuleerida nii, et iga õpilane saaks tutvuda kõigi tööviisidega.

Neil juhtudel, kui koolil ei ole maalappi või kui ilmastikutingimused ei luba mõõtmisi läbi viia vabas õhus, võib neid sooritada miniatuuris, kasutades «klassipolügooni». Klassipolügoon kujutab endast madalat lahtist puukasti laiusega 1½—2 m, pikkusega kuni 3 m ja kõrgusega 15—20 cm. Kasti riputatakse kuni 10 cm paksune liivakord. Punktide märkimiseks ja sirgjoonte tähistamiseks kasutatakse väikesi, 30—35 cm pikkusi puust vaiakesi. Mõõtmisi võib sooritada klassijoonlauaga, kui sellel on olemas sentimeetrijaotused, või veel parem rull-mõõtpaela abil. Klassipolügoonil võib teostada kõiki mõõtmistööde võtteid. Klassipolügoon on suurepärane näitlik vahend. Ka sel juhul, kui koolil on olemas maalapp ja kui on täiesti võimalik mõõtmistöid läbi viia vabas õhus, on väga otstarbekas esialgu näidata õpilastele peamisi töövõtteid klassipolügoonil.

Esialgseid mõisteid nurkadest, ringjoonest ja kaarte ning nurkade vahelistest sõltuvustest kujundatakse samuti vahenditult praktika abil. Õpilased peavad hästi omandama ristsirge ehitamise paberil ja tahvlil joonestuskolmnurga abil, aga ka maastikul (või klassipolügoonil) ekkeri abil. Edasi minnakse nurkade mõõtmisele ja ehitamisele malli abil. Samal ajal tutvustatakse õpilasi nurgamõõtmise riistadega ja nende kasutamisega nurkade mõõtmiseks maastikul. Päris kasulik on sooritada ka nurkade väärtuste silma järgi hindamise ja antud väärtustega nurkade silma järgi ehitamise harjutusi.

On vajalik juhtida laste tähelepanu sellele, milline tähtsus on nurga väärtuse hindamisel tehnikas: teetammi kallakunurk, tammi kallakunurk, vaatenurk, mille all ese on nähtav ja sellega seoses kauguse hindamine, lõikenurk metallide töötlemise juures jne.

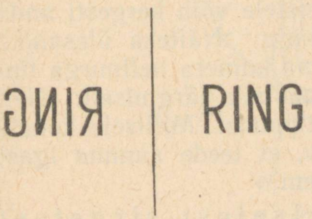
Polütehnilise õpetuse eesmärkide saavutamiseks on vajalik tõmmata õpilasi mõnede lihtsamate mõõteriistade ja mõõtmise abivahendite iseseisvale valmistamisele. Nad võivad õpetaja juhtimisel valmistada vaiakesi punktide märkimiseks, tähiseid, mõõdulindi, mõõtesirkli.

Märgime lõpuks, et mõningaid praktilisi töid geomeetrias võib siduda geograafilise sisuga ekskursioonidega, kuna osa praktilistest töödest geograafias on tihedalt seotud geomeetriliste küsimustega (orienteerumine maastikul, kaardistamine jne.).

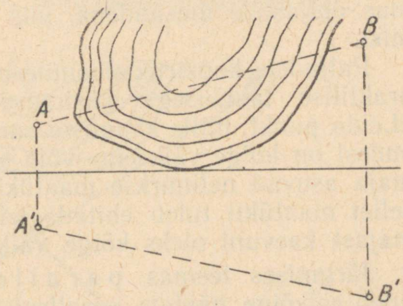
3. Polütehniline õpetus planimeetria käsitlemisel.

Üks esimestest teemadest süstemaatilises planimeetria kursuses on õpetus kolmnurkadest, nende omadustest ja omavahelistest suhetest. Juba esimesed teoreemid kolmnurkade kongruentsusest näitavad ilmekalt geomeetrilise teooria seost praktikaga. Kolmas kolmnurkade kongruentsuse tunnus (kolme külje järgi) on teoreetiliseks aluseks sellele kolmnurga omadusele, mida nimetatakse tema «kujupüsivuseks» ja milline oma olemuselt viib väitele, et kolmnurk on täiesti määratud, kui on antud tema kolm külge. Seda omadust tuleb näidata, lastes õpilastel valmistada kolmnurga mudeli kolmest vardast (kepikesest). Seejuures on tingimata tarvis näidata, et sarnane mudel mingist teisest hulknurgast, näiteks nelinurgast, ei rahulda kuju püsivuse omadust. Tuleb jälle pöörata õpilaste tähelepanu selle omaduse kasutamisele tehnikas: näidata sildade, tõstekraanade jne. konstruktsioonilisi iseärasusi.

Sama teema juurde kolmnurkadest kuulub väga oluline teema teljelisest sümmeetriast. Teljelise sümmeetria omadustest peavad õpilased eriti hästi omandama tõsiasja, et vastastikku sümmeetrilised lõigud on võrdsed ning vastastikku sümmeetrilised nurgad on võrdsed. Samuti peab õpilastel olema selge ettekujutus sellest, et kaks vastastikku sümmeetrilist kujundit osutuvad vastupidiselt orienteerituiks. Viimase omaduse ilmekamaks esiletoomiseks on otstarbekas õpilastele näidata mingit suurte tähtedega kirjutatud sõna ja kõrval selle sõna sümmeetrilist kujutist vastava sümmeetriatelje suhtes (joon. 4).



Joon. 4.



Joon. 5.

Nagu juba eespool öeldud, tuleb õpilaste tähelepanu juhtida mitmesuguste näidete tohutule hulgale igapäevasest elust, teadusest ja tehnikast.

Antud punktiga antud sümmeetriatelje suhtes sümmeetrilise punkti ehitamist on paberil kerge läbi viia joonestuskolmnurga ja sirkli abil, maastikul aga ekkeri ja mõõtlindi abil. Selleks tuleb antud punktist lasta ristsirge sümmeetriateljele ja pikendada teda teiselpool sümmeetriatelge samale kaugusele.

Teljelise sümmeetria omadusi tuleb kasutada mitmesuguste mõõtmisülesannete lahendamisel maastikul. Olgu, näiteks, tarvis mõõta kahe punkti A ja B vaheline kaugus, kui punktid on eraldatud üksteisest mingisuguse takistusega — ehitusega, tiigiga jne. (joon. 5). Ehitame mingi sirge s nii, et punktidest A ja B võib temale lasta ristsirged. Seejärel leiame punktid A' ja B', mis on sümmeetrilised punktidele *A* ja *B* sirge *s* suhtes. Mõõtes kauguse *A'B'* oleme sellega ühtlasi määranud ka temaga võrdse kauguse *AB*.

Teema kolmnurkadest lõpeb põhiliste konstruktsioonülesannetega ja nende rakendamisega keerukamate konstruktsioonülesannete puhul.

Konstruktsioonülesannete tähtsusest polütehnilise hariduse andmisel me rääkisime juba varem. Siinjuures peab õpilastele selgitama vastavate konstruktsioonide ehitamisel kasutatud instrumentide tähtsust. Tingimata tuleb õpilastele ka esitada küsimus, millisel viisil võib neid põhikonstruktsioone, mida nad on teinud paberil, teostada maastikul nende käsutuses olevate elementaarsete vahenditega, näiteks mõõtlindi ja ekkeri abil. On kasulik anda selline küsimus õpilastele ülesandena, mis nõuab iseseisvat lahendamist.

Paljudele konstruktsioonülesannetele võib kergesti anda praktilise tähtsusega küsimuse kuju. Näiteks ülesande: «Leida punkt, mille kauguste summa kumera nelinurga tippudest on kõige väiksem» võib sõnastada järgmiselt: «Neli maja asuvad nelinurkse maatüki tippudel. Millisele kohale sellel maatükil tuleb ehitada kaev, et teede summa igast majast kaevuni oleks kõige väiksem?»

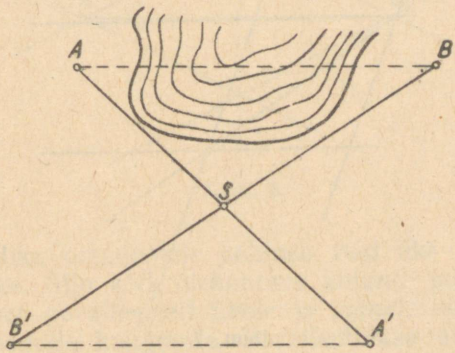
Järgmises teemas p a r a l l e e l s e t e s t s i r g e t e s t tuleb eelkõige näidata paralleelsirgete ehitamise praktilisi meetodeid joonestuskolmnurga ja rööpjoonlaua abil, samuti ka paralleelsirgete ehitamist maastikul ekkeri abil, ristsirgete tõmbamisega ühele ja samale sirgele.

Teoreemid hulknurga ja kolmnurga sisenurkade summa kohta leiavad vahetut rakendamist maamõõdistamise praktikas maatüki plaani koostamisel «ümberkäigu» meetodiga. See meetod seisneb selles, et plaanile kantaval maatükil, millel on hulknurga kuju, mõõdetakse kõik küljed ja sisenurgad. Nurkade mõõtmise täpsuse kontrollimiseks arvutatakse teatud valemiga antud hulknurga sisenurkade summa ja võrreldakse seda vahetu mõõtmise tulemusena saadud nurkade summaga. Teades suurima võimaliku vea suurust, mida me võime teha iga nurga mõõtmisel meie käsutuses oleva instrumendiga, saame kindlaks määrata faktiliselt tekkinud vea lubatavuse.

Algul võetakse plaani koostamiseks lihtsam maatükk: nelinurk või viisnurk. Peale plaani koostamist ümberkäigu meetodi abil, tuleb näidata ka plaanistamist maatüki kolmnurkadeks jaotamise abil. Kasulik on nende kahe variandi kõrvutamiseks võtta üks ja sama maatükk ning võrrelda saadud tulemusi.

Paralleelsusega on tihedalt seotud tsentraalne sümmeetria, s. o. sümmeetria mingi kindla punkti suhtes.

Tsentraalse sümmeetria omadusist on eelkõige vajalik pöörata tähelepanu omavahel tsentraalsümmeetriliste lõikude ja nurkade võrdsusele ning omavahel tsentraalsümmeetriliste sirgete paralleelsusele. Kaks kujundit, millised on tsentraalsümmeetrilised teineteisega, on kongruentsed ja ühesuguselt orienteeritud. Tsentraalne sümmeetria leiab sagedast kasutamist mitmesugustes tehnilistes konstruktsioonides: lennuki propeller, tuulemootori tiivikud jt.



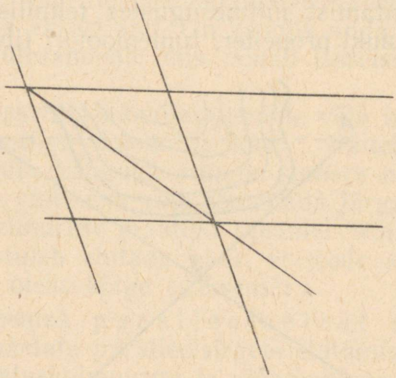
Joon. 6.

Tsentraalset sümmeetriat võib kasutada mitmesuguste ülesannete lahendamisel, millised on seotud mõõtmistega maastikul. Näiteks, eespooltoodud ülesande kahe takistusega eraldatud punkti A ja B vahelise kauguse mõõtmisest võib lahendada tsentraalse sümmeetria abil (joon. 6). Selleks valime punkti S nii, et sellest oleks näha punktid A ja B ning oleks võimalik mõõta punkti S kaugust neist. Pikendades AS üle punkti S kaugusele $A'S = AS$ ja BS kaugusele $B'S = BS$, saame $A'B' = AB$. Kui kaugust $A'B'$ on võimalik vahetult mõõta, võime lugeda ülesande lahendatuks.

VII klassi[1] geomeetriakursus algab teemaga «Neli-

[1] Vene NFSV koolides.

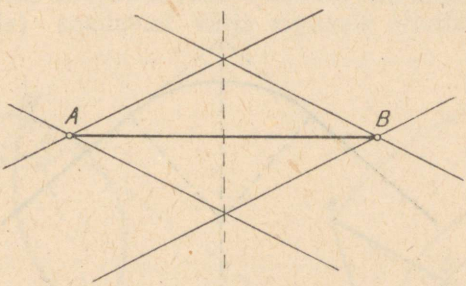
nurgad». Parallelogrammi omaduste käsitlemisel pöörame õpilaste tähelepanu sellele, et meid ümbritsevas keskkonnas esinevatest geomeetriiistest kujunditest esineb kõige sagedamini ristkülik. Mainitud asjaolu on tingitud sellest, et ristkülikul on kaks sümmeetriatelge, milledest kumbki jaotab ristküliku kaheks uueks ristkülikuks. Iga ristküliku võib jaotada mistahes arvuks uuteks ristkülikuteks ja ümberpöördult; liites võrdseid ristkülikuid võime uuesti saada ristküliku. Kõige sobivamaks põllu vormiks tööde mehhaniseerimise mõttes on ristkülik. Seoses sellega tuleb läbi viia praktiline töö etteantud külgede pikkusega rist-



Joon. 7.

külikukujulise maatüki väljaplaneerimiseks. Kui koolil on maatükk, millel teostatakse põllunduse-, aianduse- ja köögiviljaaianduse alaseid töid, siis nende rajamine tuleb siduda maatüki jaotamisega ristkülikukujulisteks osadeks, peenrakesteks jne.

Rombi omadusi kasutatakse konstrueerimisel kahepoolse joonlauaga, s. t. joonlauaga, mille ·ääred on omavahel paralleelsed. Võib tõestada, et selline kahepoolne joonlaud on kõige «võimsam» konstruktiivne instrument, kuna sellega võib teostada kõik need konstruktsioonid, millised tavaliselt viiakse läbi sirkli ja joonlaua abil. Mõningaid konstruktsioone kahepoolse joonlaua abil tuleb tingimata õpilastele näidata, aga mõningaid anda neile konstruktsioonülesannetena. Näiteks nurgapoolitaja ehitamiseks piisab, kui asetada joonlaud algul nurga ühele haarale ja tõmmata sirge joonlaua teist külge mööda, seejärel aga talitada samuti nurga teisel haaral. Tulemusena saadakse romb, mille üks diagonaalidest ongi otsitav nurgapoolitaja (joonis 7). Et leida kahepoolse joonlaua abil lõigu keskkohta, asetame joonlaua lõigu otste vahele, nagu näidatud joonisel 8 ja tõmbame kaks paralleelsirget läbi lõigu otste; seejärel pöörame joonlauda ja teostame sama operatsiooni teises suunas. Saame jällegi rombi, mille kaks üksteise vastas asetsevat tippu on antud lõigu otsteks. Rombi diagonaalide lõikepunkt ongi otsitav lõigu keskpunkt.



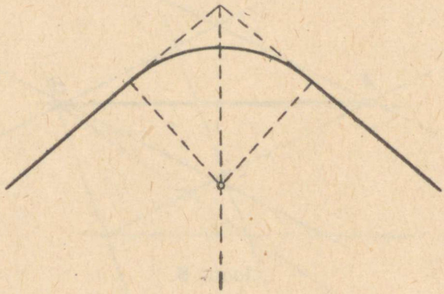
Joon. 8.

Rööpküliku omadustele põhineb veel üks teisendus — paralleellüke. Siin kõik ülekantava kujundi punktid paigutuvad ümber paralleelselt ühele ja samale suunale ning ühele ja samale kaugusele. Paralleellükke abil teisendub iga kujund iseenesega kongruentseks ja samapidiselt orienteeritud kujundiks, kusjuures mõlemate kujundite vastavad lõigud on võrdsed ja omavahel paralleelsed. Tuleb märkida, et paljud füüsikalised liikumised (nn. kulgev liikumine), mida kasutatakse mitmesugustes mehhanismides, taanduvad paralleellükkele. Sellised on, näiteks, sirgjoonelistes soontes liikuva liuguri teekond, katiku liikumine fotoaparaadis jne.

Paralleellükke omaduste põhjal võib lahendada tähelepanuväärse hulga konstruktsioonülesandeid, kusjuures mõningaid neist saab esitada praktilist laadi küsimustena. Näiteks selline ülesanne: «Punktides A ja B, mis asetsevad kahel pool isekeskis paralleelsete kallastega jõge, asetsevad asustatud punktid. Millisesse kohta jõel tuleb ehitada sild, et tee punktist A punkti B oleks lühim?» Selle ülesande lahendamiseks tuleb punkt A viia asendisse A' nii, et lõik

AA' suuruselt ja suunalt ühtuks jõe laiusega. Ühendades punkti *A'* punktiga *B*, saame lõigu *A'B* lõikumise selle kaldaga, millisel asub *B*. Lõikepunkt määrabki silla ehitamise koha.

Lõpetades teema «Nelinurgad» käsitlemise on tulus näidata veel üht huvitavat nelinurkade omadust, milline omab ka praktilist tähtsust. Osutub, et mistahes kujuga võrdsete nelinurkadega võib tihedalt katta pinda. Teiste sõnadega, see tähendab, et võib teha parketti, mille plaadid on mistahes kujuga, isegi mittekumerad võrdsed nelinurgad. Selle tõestamiseks piisab, kui võtta antud nelinurk ja teostada



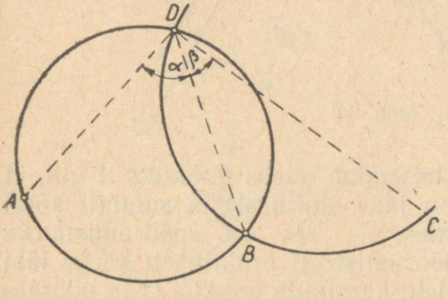
Joon. 9.

tema paralleellüke iga diagonaali pikkuses ja suunas ühele ja teisele poole. Iga saadud nelinurgaga tuleb uuesti teostada selline teisendus jne. Väga huvitav on selline küsimus püstitada ka teiste hulknurkade kohta: millistest hulknurkadest võib veel saada selliseid parkette?

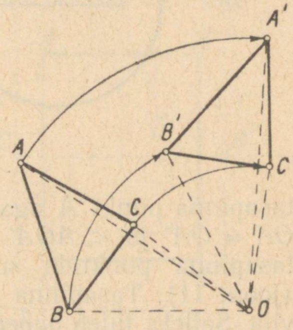
Järgmise teemana VII klassi kursuses õpitakse tundma r i n g j o o n t. Ringjoone mitmesugused ja tähtsad omadused leiavad rohkearvulise praktilise rakenduse paljudes mehhanismides kõigil juhtumeil, kus esineb pöörlev liikumine ümber telje, sest siis keha kõik punktid joonestavad ringjooni. Sellega seletub seibide, k e t i r a t a s t e, hammasrataste jne. sõõritaoline kuju.

Ringjoone puutumine sirgega ja ringjoonte omavaheline puutumine leiab laiendatud rakendamist kõigil juhtudel, kui tuleb teostada j o o n t e l i i t m i s t, s. o. sujuvat üleminekut ühelt joonelt teisele. Geomeetriliselt tähendab see, et ühe kaare teisele ülemineku punktis, mõlemad kaared peavad omama ühist puutujat. Sellel on suur tähtsus masina-elementide joonestamisel, teede projekteerimisel jne. Praktilistel õppustel maastikul võib lasta õpilastel liita kaks sirgjoonelist tee tükki ringjoone kaarega (joon. 9).

Sissejoonestatud nurkade omadused leiavad rakendamist väga tähtsa ülesande lahendamisel, milles nõutakse punkti asendi määramist teatud sihil kolme antud punkti suhtes. See on niinimetatud Potenot' ülesanne, millest me juba rääkisime leheküljel 57. Ülesande lahendus annab võimaluse määrata laeva asendit merel või lennuki asendit õhus raadiolokatsiooni abil. Sellise määramise olemus seisneb selles, et teatud raadiojaamad (niinimetatud «raadiomajakad») saadavad välja signaale kindlaksmääratud



Joon. 10.

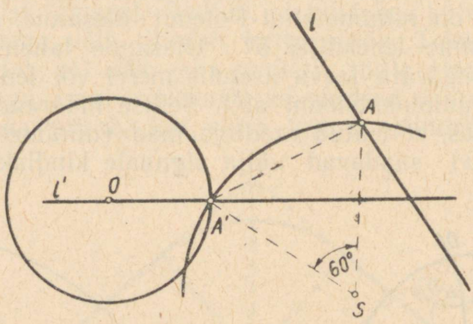


Joon. 11.

lainepikkusel. Vastuvõtuseadeldis laeval (raamantenn) annab võimaluse määrata saatva raadiojaama suunda. Kui on teada kolme sellise raadiomajaka asukoht ja on määratud suund neile, siis sellega määratakse ka laeva asend. Geomeetriliselt see tähendab, et on antud kolm punkti A, B, C ja on teada, et lõigud AB ja BC on nähtavad neljandast punktist D nurkade α ja β all. Punkti D asendi määramiseks ehitame AB-le segmendi kaare, mis mahutab endas nurga α, BC-le aga segmendi kaare, mis mahutab nurga β. Nende kaarte lõikumine määrab punkti D asendi (joon. 10).

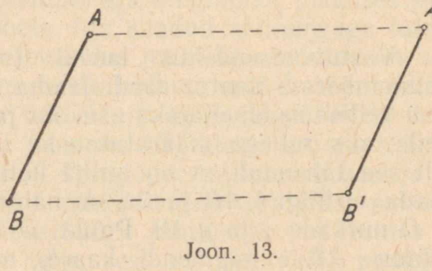
Seda ülesannet tuleb tingimata lahendada praktilistel õppustel. Selleks on tarvis võtta juba plaanile kantud maatükk ning asetada nurgamõõtmisriist punkti, mille asendit tahame määrata. Viseerides kolmele punktile, millede asendid plaanil on antud, määrame nurgad α ja β ning vastava konstruktsiooniga plaanil määrame punkti asendi, milles seisab nurgamõõtmise instrument.

Ringjoone omadustega on tihedas seoses p ö ö r a m i s - t e i s e n d u s, milline seisneb selles, et üks tasapinna punkt — pööramistsenter O — jääb paigale, mistahes teine



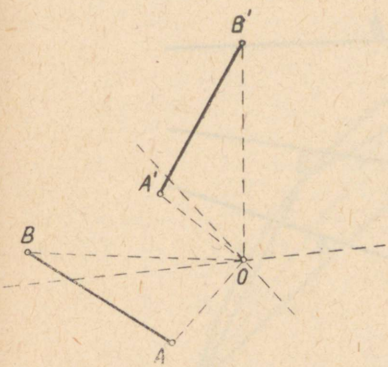
Joon. 12.

tasapinna punkt A aga teisendub uueks punktiks A' nii, et $OA = OA'$ ja $< AOA'$ on jääv suuruselt ja suunalt kõigi tasapinna punktide suhtes, — see on «pööramisnurk» (joon. 11). Tasapinna pööramist on praktiliselt kerge läbi viia. Selleks tuleb paberileht kinnitada punktis O ja pöörata

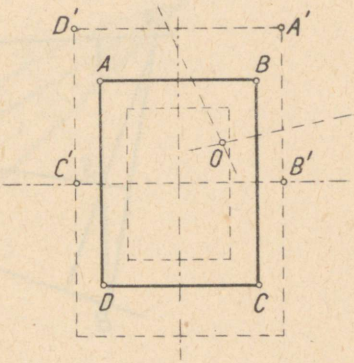


Joon. 13.

paberit pööramisnurga suurusele vastavalt. Pööramisel geomeetrilised kujundid teisenduvad kongruentseteks ja ühesuguselt orienteerituiks, kusjuures mõlema kujundi vastavate sirgete vahel moodustunud nurk võrdub pööramisnurgaga. Pööramismeetodiga lahenduvad paljud konstruktsioonülesanded. Selline on, näiteks, ülesanne: «On antud punkt S, sirge l ja ringjoon c keskpunktiga O. Ehitada võrdkülgne kolmnurk nii, et tema üks tipp oleks punktis S, teine sirgel l, kolmas — antud ringjoonel» (joon. 12). Ülesande lahendamiseks piisab punkti S ümber pööramise teostamisest 60° võrra. Selle tulemusena sirge l võtab asendi l'. Sirge l' lõigaku antud ringjoont punktis A'. Pöörates nüüd l' tagasi lähteasendisse, me teisendame punkti A' punktiks A sirgel l; kuna $SA = SA'$ ja $\angle ASA' = 60°$, siis $\triangle ASA'$ on võrdkülgne. Ülesandel on kas kaks lahendust, üks lahendus või mitte ühtki, sõltuvalt sellest, kas sirge l pärast pööramist lõikub ringjoonega, puutub teda või asub väljaspool ringjoont.



Joon. 14.



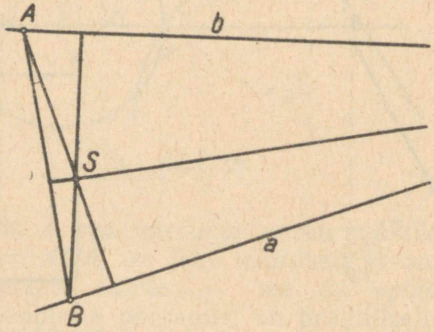
Joon. 15.

Pööramise teoorias on tuntud kõigi tasapinnaliste mehhanismide kinemaatikale äärmiselt tähtis Bernoulli — Šali teoreem. See teoreem väidab, et k a k s k o n g r u e n t s e t j a ü h e s u g u s e l t o r i e n t e e r i t u d t a s a p i n n a l i s t k u j u n d i t v õ i b a l a t i v i i a ü h t i m i s e l e k a s ü h e p a r a l l e e l l ü k k e g a v õ i ü h e p ö ö r a m i s e g a. Selle lause tõestus on niivõrd lihtne ja elementaarne, et teda kahtlemata võib anda õpilastele harjutamiseks. Selleks kõigepealt näitame, et kahe võrdse ja ühesuguselt orienteeritud kujundi ühtumiseks on küllalt, kui ühtuvad ühe kujundi kaks punkti teise kujundi vastavate punktidega. Selle kindlaks teinud, võtame kaks punkti A ja B esimeses kujundis ning vastavad punktid A' ja B' ka teises kujundis.

Kui $AB \parallel A'B'$ ja nad on ühesuunalised (joon. 13), siis $AB = A'B'$ tõttu ka $AA' = BB'$ ning $AA' \parallel BB'$; seepärast, teostades paralleellükke punktist A punkti A', me sama lükkega punkti B viime punkti B'. Tähendab, esimene kujund on viidud ühtumisele teisega paralleellükke abil.

Kui AB ei ole paralleelne $A'B'$, siis tõmbame punktide A ja A' ning punktide B ja B' sümmeetriateljed. Need teljed lõikuvad punktis O. $OA = OA'$, $OB = OB'$, $AB = A'B'$, mistõttu $\triangle OAB = \triangle OA'B'$ ja võttes O pööramistsentriks ning pöörates esimest kujundit nurga AOA' võrra, me viime ta ühtumisele teise kujundiga (joonis 14).

Sellel teoreemil on suur tähtsus praktiliste ülesannete lahendamisel. Esitame ühe neist.

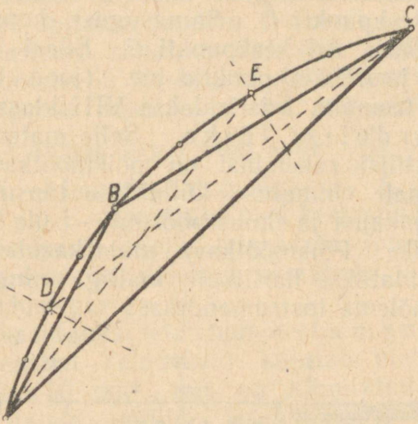


Joon. 16.

«Nõndanimetatud kaardilaud koosneb raamist, millele asetatakse kahest võrdsest poolest koosnev kate. Kokkupandud asendis kate on sümmeetriliselt raamil. Kui on tarvis lauda lahti võtta, siis katet pööratakse 90° võrra raamisse kinnitatud tapi ümber ja avatakse kaheks pooleks, kusjuures mõlemad pooled asetuvad uuesti sümmeetriliselt raami suhtes. Millisesse raami kohta tuleb asetada tapp?» Bernoulli — Šali teoreemi abil ülesanne lahendub väga lihtsalt: olgu A, B, C, D katte nurgad esialgses asendis, A', B', C', D' — samad nurgad pärast katte pööramist 90°. Tapi asendi määravad punktide A, A' ja B, B' sümmeetriatelgede lõikepunkt (joonis 15).

Viimane teema 7-ndas klassis kolmnurga kõrguste ja mediaanide lõikumisest võib samuti leida rakenduse mõningate praktiliste ülesannete lahendamisel.

Maamõõdistamise praktikas maastikul ja mõõdetud maatüki kandmisel plaanile satutakse sageli raskustele, mis seisnevad selles, et kahe antud sirge lõikepunkt osutub kättesaadamatuks: sirged satuvad ehituse korpusesse või nende pikendus langeb jõkke, järve, sohu. Plaanil võib juhtuda, et kahe sirge lõikepunkt osutub väljaspool seda paberit olevaks, millele on kujutatud plaan, samal ajal see punkt võib osutuda hädavajalikuks järgneval konstruktsioonil. Olgu näiteks meil vaja tõmmata sirge läbi antud kättesaadava punkti S ja läbi sirgete a ja b mittekättesaadava lõikepunkti. Selle ülesande lahendamiseks kasutame teoreemi kolmnurga kõrguste lõikumisest ühes ja samas

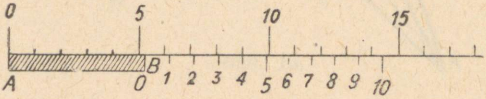


Joon. 17.

punktis. Laseme punktist S ristsirge sirgele a ja pikendame teda lõikumiseni sirgega b punktis A. Täpselt samuti laseme punktist S ristsirge sirgele b ja pikendame teda lõikumiseni sirgega a punktis B. Kui tähistada C-ga sirgete a ja b mittekättesaadavat lõikepunkti, siis punkt S on kolmnurga ABC kõrguste lõikepunkt. Kuna kolmas kõrgus peab läbima sama punkti S, siis, tõmmates ristsirge punktist S sirgele AB, leiamegi otsitava sirge, mis langeb ühte kolmnurga kolmanda kõrgusega. Võib vahetult näha, et paberil see konstruktsioon on kergesti teostatav joonestuskolmnurga abil, maastikul aga — ekkeri abil.

Äsjavaadeldud ülesanne on näiteks huvitavast ja praktiliselt tähtsast konstruktsioonülesannete kategooriast tasapinna piiratud osal. Toome veel ühe näite ülesandest, millist sageli võib kohata maamõõdistamis- ja joonestuspraktikas. «Joonestada ringjoone kaar läbi kolme antud punkti *A*, *B* ja *C*, kui kaare tsenter ei ole kättesaadav.» Kuna me antud juhul ei saa kasutada sirklit, siis kaare ehitamiseks on tarvis leida küllaldane arv tema punkte, milliseid hiljem võib ühendada kas käega või lekaali abil. Otsitavaid punkte on lihtne leida, lähtudes asjaolust, et nurga *ACB* nurgapoolitaja (eeldades, et *AC* on kolmnurga *ABC* suurim külg) läheb läbi kaare *AB* keskpunkti ja sama keskpunkti läbib ka kõõlu *AB* keskristsirge. Ehitades mõlemad nimetatud sirged, leiamegi nende lõikekohana kaare *AB* keskpunkti *D*. Samasuguse konstruktsiooniga leiame ka kaare *BC* keskpunkti *E*. Edasi leiame kaarte *AD*, *DB*, *BE* ja *EC* keskpunktid jne. (joon. 17).

Esimese teemana käsiteldakse VIII klassi geomeetriakursuses võrdelisi lõike. Selle materjali üks tähtsamaid praktilisi rakendusi on põikmõõtkava ehitamine. Viimane annab võimaluse küllaldase täpsusega määrata antud lõigu pikkust ja ümberpöördult — üle viia etteantud pikkusega lõike. Põikmõõtkava, mida kasutatakse plaanistamisel, ühendatakse harilikult malliga ning kasutatakse üheaegselt mõlema instrumendina.

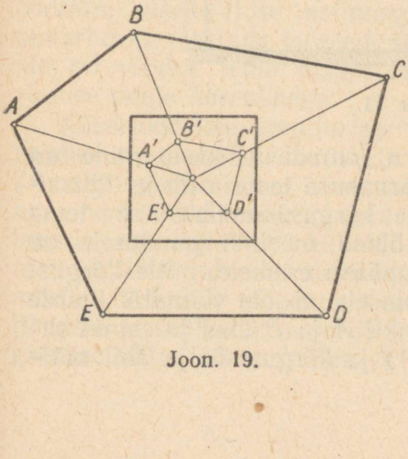


Joon. 18.

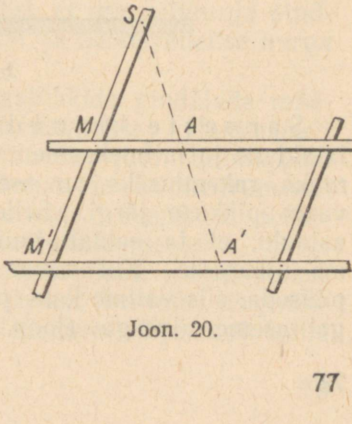
Teiseks abinõuks, mida kasutatakse samuti lõigu pikkuse määramisel, eriti lugemi tegemiseks skaalalt, on *noonius*. Selle põhimõtte selgitamiseks vaatleme sirgjoonelist skaalat võrdsete jaotustega. Et sellel skaalal oleks võimalik teha lugemeid täpsusega 0,1 ühikut, võtame vahemiku üheksa jaotusega ja, asetades ta teisele skaalale, jaotame kümneks võrdseks osaks. Siis iga jaotus uuel skaalal võrdub 0,9 jaotusega endisel skaalal. Märgime uue skaala jaotused numbritega 0 kuni 10-ni ja teeme selle skaala liikuvana. Kui nüüd soovime mõõta eseme *AB* pikkust, siis viime esimese skaala nullpunkti punkti *A*, aga teise skaala nullpunkti punkti *B* (joon. 18). Me näeme, et pikkuses *AB* sisaldub 5 täit ühikut esimeselt skaalalt mingisuguse ülejäägiga. Pikkuse täpsemaks määramiseks vaatame, milline jaotus teisel skaalal langeb ühte mõne esimese skaala jaotusega. Meie joonisel, näiteks, teise skaala neljas jaotus langeb ühte esimese skaala teise jaotusega. Kuid siis kolmas jaotus teisel skaalal erineb esimese skaala lähimast jaotusest 0,1 võrra, teine — 0,2 võrra, esimene — 0,3 võrra, nullpunkt — 0,4 võrra. Niisiis AB pikkus on 5,4. Siit selgub, et kümnendosade loendamiseks piisab, kui kindlaks määrata, milline liikuva skaala jaotus langeb ühte esimese skaala mingi jaotusega. Liikuvat skaalat nimetataksegi nooniuseks. Nooniust kasutatakse ka lugemi tegemiseks ringskaalal, näiteks täpsetes nurgamõõtmisinstrumentides.

VIII klassis õpitakse tundma h o m o t e e t s e t teisendust, milline seisneb selles, et valitakse kindlaksmääratud punkt — homoteetia keskpunkt ja teisendatakse antud punkt A vastavaks punktiks A' nii, et punktid S, A ja A' oleksid ühel ja samal sirgel ning suhe $\frac{SA'}{SA}$ võrduks konstantse arvuga — homoteetiateguriga — K. Kui $K > 0$, siis punktid A ja A' asuvad ühelpool keskpunkti, kui $K < 0$, siis teine teiselpool. Selle teisenduse juures kujundite sarnased lõigud on paralleelsed üksteisele ja nende suhe võrdub teisendusteguriga.

Praktilist kasutamist leiab homoteetia m e n s u u l ü l e s v õ t t e l. Mensuul («lauake») kujutab endast planšetti mõõdetega 50×50 cm², mis on kinnitatud horisontaalasendis kolmjalale, milline asub mingis plaanistatava hulknurga punktis. Seejuures on ainult nõutav, et valitud punktist oleksid kõik hulknurga tipud näha (joon. 19). Viseerides valitud kinnispunktist S mensuulil kõigile hulknurga tippudele, tõmmates vastavad sirged SA, SB, . . ., SE



Joon. 19.



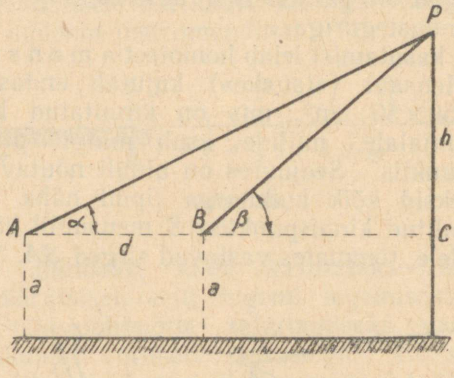
Joon. 20.

ja kandes neile võrdelised lõigud SA', SB', ..., SE' saame hulknurga $A'B'C'D'E'$, mis ongi antud hulknurga $ABCDE$ plaaniks.

Homoteetse teisenduse selgitamiseks võib ehitada lihtsa, kuid väga kasuliku abinõu — p a n t o g r a a f i. Pantograaf kujutab endast šarniirset rööpkülikut (joon. 20). Kui kinnitada see rööpkülik punktis S, punkti A kinnitada nõel, punkti A' aga pliiats, siis vedades nõelaga mingi kujundi jooni mööda pliiats joonestab antud kujundiga homoteetse kujundi. Tõepoolest, arvestades, et rööpküliku küljed alati säilitavad paralleelsuse, saame

$$\frac{SA'}{SA} = \frac{SM'}{SM} = K$$

(joonisel $1 : K = 2$). Niisiis on meil tegemist homoteetiaga, mille tsentriks on S ja teguriks K. Pantograafi konstruktsioon on sedavõrd lihtne, et seda võivad õpilased ise ilma eriliste raskusteta valmistada. Instrument on väga kasulik jooniste, plaanide, kaartide jne. kopeerimisel.



Joon. 21.

S a r n a s t e k u j u n d i t e omaduste kasutamine on laialdane ja mitmekesine. Sarnasuse teooria üheks lihtsaimaks rakenduseks on eseme kõrguse määramine tema varju pikkuse järgi. Selle lihtsa meetodi puuduseks on asjaolu, et ta eeldab juurdepääsu esemele, mille kõrgust me määrame. Kui eseme alusele ei ole võimalik juurde pääseda, siis valime kaks punkti A ja B ühel ja samal sirgel eseme alusega (joon. 21) ja kõrgusmõõtja abil määrame nurgad horisontaalsihi ja valitud punktidest mõõdetava eseme kõrgeimasse punkti mineva suuna vahel. Punktide A ja B vahelise kauguse ning nurkade suuruse järgi määrame otsitava kõrguse, ehitades kolmnurga, mis on sarnane kolmnurgale ABP aluse ja selle lähisnurkade järgi. Kuid graafilise meetodiga võib saavutada ainult väikest täpsusastet; seetõttu kõrguse väljaarvutamist on otstarbekam läbi viia täisnurksete kolmnurkade trigonomeetrilise lahenduse abil, milleks piisab neist trigonomeetriaalastest teadmistest, mida antakse VIII klassis. Täisnurksest kolmnurgast APC saame $AC = h \cot \alpha$; täisnurksest kolmnurgast BPC saame $BC = \cot \beta$; $AC - BC = = d = h (\cot \alpha - \cot \beta)$; millest

$$h = \frac{d}{\cot\alpha - \cot\beta}.$$

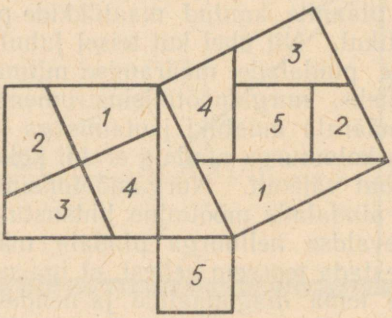
Samasugust täisnurksete kolmnurkade lahendusvõtet võib kasutada ka mittejuurdepääsetavate kauguste määramiseks.

Üks praktilises mõttes tähtsamatest geomeetria osadest on p i n d a l a d e m õ õ t m i s e t e o o r i a. Praktilisi õppusi pindalade mõõtmises võib läbi viia nii klassis, kus võib määrata plaanile kantud maatükkide pindala, kui ka vahetult maastikul. Nii ühel kui teisel juhul on tingimata vajalik näidata pindalade määramise mitmesuguseid võtteid. Nii, näiteks, nurgamõõtmisinstrumendi puudumisel võib pindala määrata maatüki jaotamisega kolmnurkadeks ja määrata iga kolmnurga pindala eraldi kolme külje järgi, kasutades Heroni valemit. Nurgamõõtmisinstrumendi olemasolu korral pindalade mõõtmine lihtsustub märgatavalt. Näiteks, meelevaldse nelinurga pindala määramiseks on otstarbekas tõestada teoreem sellest, et iga nelinurga pindala on võrdne tema diagonaalide ja nendevahelise nurga siinuse poole korrutisega.

Kõverjoonelise kontuuriga maatükkide pindalade määramiseks plaanil harilikult kasutatakse planimeetrit (Amsleri planimeeter, kirves-planimeeter jt.). Koolis pole aga neid instrumente sageli olemas ja ka instrumendi teooria on õpilastele küllalt keerukas. Seepärast soovitame sellistel juhtudel kasutada kaalumise meetodit. Selle meetodi kohaselt mõõdetava maatüki plaan joonestatakse tihedale ja ühtlasele paberile ja täpselt kontuuri järgi lõigatakse välja. Samast lehest lõigatakse välja ruut, mille külje pikkust on võimalik täpselt mõõta vastavais mastaabiühikuis. Kaaludes mõlemad kujundid küllalt täpsetel kaaludel ja võttes arvesse, et pindala on võrdeline kaaluga, võime lihtsa arvutuse teel leida mõõdetava pindala arvulise väärtuse.

Pindalade mõõtmise teooriaga on tihedalt seotud küsimus kujundite pindvõrdsusest ja võrdkoostisest. Antud kujundi lõikamine sellisteks tükkideks, millest võib koostada teise antud kujundi, kujutab endast ülesannet, millega tegelevad edukalt juba nooremate klasside õpilased. Sellised harjutused on väga kasulikud esialgseks tutvumiseks kujundite mõningate lihtsamate omadustega. Vanemates klassides võib selgitada ka võrdkoostise omaduste suurema printsipiaalse tähenduse. On teada, et planimeetrias eksisteerib tähelepanuväärne lause (stereomeetrias sellist lauset ei ole), mille kohaselt kaks pindvõrdset hulknurka on alati ka võrdkoostisega.

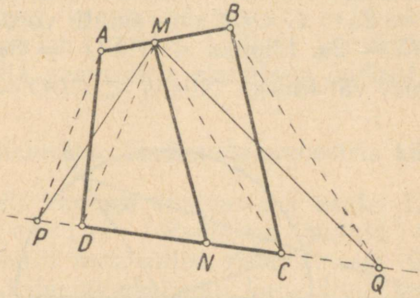
Võrdkoostise omadustel põhinevad Pythagorase teoreemi rohkearvulised näitlikud tõestused, ühe sellistest esitame joonisel 22. Sellel joonisel kujundi võrdsed osad kannavad ühesuguseid numbreid.



Joon. 22.

Probleem tasapinnalise kujundi lõikamisest võimalikult väikeseks arvuks osadeks, millest võib koostada teise antud kujundi, omab suurt praktilist tähtsust. Nagu juba eespool osutatud, tuleb seda liiki ülesandeid lahendada kõigil neil juhtumeil, kus on vaja juurde lõigata mingisugust materjali: vineeri, nahka, metallilehti, riiet ja muud sarnast. Seepärast harjutused kujundite tükeldamises ja koostamises annavad õpilastele kogemusi, millised võivad osutuda neile kasulikuks tulevikus.

Suur praktiline tähtsus on ka antud pindalade jaotamisel antud suhtes. Uute külvikordade sisseviimine, kolhooside suurendamine — kõik see nõuab maatükkide piiritlemist. Õpilastele on vaja näidata lihtsamaid maatüki jaotamise võtteid ettenähtud osadeks. Olgu näiteks ebakorrapärase kujuga nelinurkne maatükk $ABCD$ (joon. 23) tarvis jaotada kaheks võrdse suurusega osaks piirvao abil, milline peab minema läbi punkti M küljel AB. Selle ülesande lahendamiseks teisendame nelinurga $ABCD$ kolm-

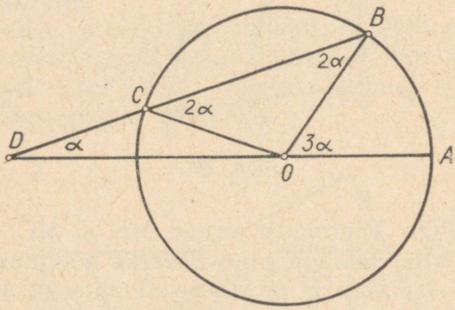


Joon. 23.

nurgaks MPQ. Tõmmates sirged MD ja MC, teisendame kolmnurga AMD temaga pindvõrdseks kolmnurgaks PMD, kandes tipu A punkti P paralleelselt alusega MD. Samal viisil teisendame kolmnurga BCM kolmnurgaks QCM. Kui nüüd $\triangle MPQ$ jaotame mediaaniga MN kaheks võrdse suurusega osaks, siis see mediaan jaotab ühtlasi kaheks võrdseks osaks ka nelinurga $ABCD$.

VIII klassi geomeetriakursuses tuleb sageli kasutada geomeetriliste ülesannete lahendamisel algebralist meetodit. Algebraline meetod geomeetrias omab suurt tähtsust tänu sellele, et ta annab võimaluse kindlaks määrata geomeetrilise ülesande lahenduvust meie käsutuses olevate instrumentide abil.

Näiteks tuleb õpilastele näidata, et kõrgema algebra meetoditega võib tõestada, et mistahes nurga jaotamist kolmeks võrdseks osaks sirkli ja joonlaua abil teostada on võimatu. Koos sellega tuleb siin ka öelda, et ülesanne, mis ühtede instrumentide abil ei olnud lahenduv, võib seda olla teiste instrumentide abil. Nurga jaotamine kolmeks võrdseks osaks, mis ei olnud teostatav sirki ja joonlaua abil, on kergelt teostatav pabeririba abil. Olgu meil tarvis jaotada nurk AOB (joon. 24) kolmeks võrdseks osaks. Joonestades ta ümber ringjoone keskpunktiga O, kujutame teda kesknurgana. Võtame nüüd sirgjooneliste äärtega pabeririba ja teeme sellele äärele kriipsukestega märgid nii, et vahe kahe naaberkriipsu vahel võrduks raadiusega. Asetades riba ääre punkti B, me paigutame ta nii, et raadiusele võrdne lõik toetuks otstega ringjoonele ja pikendame nurga haara AO. Sel teel leiame punkti D. Niisiis: $CD = OC = OB = OA$. Olgu $< CDO = \alpha$, $\triangle DCO$ — võrdhaarne, seetõttu $< COD = \alpha$. Selle kolmnurga välisnurk $< BCO = 2\alpha$. $\triangle OBC$ on samuti võrdhaarne, seepärast $< OBC = 2\alpha$. Lõpuks $< ABO = 3\alpha$ kui kolmnurgas OBD olev välisnurk. Niisiis $< CDO = \frac{1}{3} < AOB$.



Joon. 24.

Üheaegselt sellega on tarvis õpilastele pidevalt näidata mitmesuguseid l i g i k a u d s e arvutamise võtteid. Näiteks ringjoone kaare jaotamisel kolmeks võrdseks osaks, me sirkli abil silma järgi asetame kaarele, selle algusest alates, kolm võrdset kaart. Kui meil sealjuures tekib ülejääk, siis jällegi silma järgi jaotame selle kolmeks võrdseks osaks, vähendame sirkli haaret selle kolmandiku võrra ja proovime uuesti. Samuti talitame juhul, kui on tegemist puudujäägiga. Pärast mõningaid katsetamisi jõuame küllalt hea tulemuseni. Õpilastele on tarvis selgitada, et küllalt korralikult teostades ligikaudset konstruktsiooni, saadakse tulemus, mis ei ole palju halvem niinimetatud «täpsetest konstruktsioonidest», milledes samuti leidub kõrvalekaldumisi, mis on vältimatud meie instrumentide ebatäpsuste tõttu.

Ligikaudsete konstruktsioonidega me kohtume ka IX klassi geomeetriakursuse esimeses teemas, milles käsiteldakse korrapäraseid hulknurki. On teada, et korrapärast seitsenurka, üheksanurka, üksteistnurka ja tervet rida teisi korrapäraseid hulknurki ei saa ehitada sirkli ja joonlaua abil. Ainult ligikaudsed meetodid, mis on analoogilised ülalesitatud nurga kolmeksjagamise meetodiga, annavad võimaluse ehitada korrapärast hulknurka mistahes arvu külgedega.

On teada ka rohkearvulised ligikaudsed meetodid ringjoone ja tema kaarte sirgestamiseks, samuti ka ringi ruutimiseks. Selliste konstruktsioonide näiteid võib leida geomeetria stabiilsest õpikust.

4. Polütehniline õpetus stereomeetria käsitlemisel.

Geomeetria kursuse tähtsamaks osaks IX[1] klassis on stereomeetria. Esimesed tunnid stereomeetriast sisaldavad suuri metoodilisi raskusi, sest üleminek tasapinnalistelt, kahemõõtmelistelt kujunditelt kolmemõõtmelistele, ruumilistele kujunditele nõuab õpilastelt suurt kujutlusvõimet.

Abistada võib siin ainult vahenditu pöördumine meid ümbritseva maailma reaalsete kujundite poole, aga ka modelleerimine. Mudeleid põhimistele stereomeetria lausetele võib ehitada nn. stereomeetria kastides plastilliinile või metallist võrestikule, kasutades selleks kastis olevaid vardaid, vineerist, kartongist ja muust materjalist plaate. Modelleerimine on tähtis selle poolest, et ta annab õpilastele võimaluse aktiivselt luua vajalikke geomeetrilisi kujundeid. Peale selle on selles töös tähtis koht mitte üksi nägemis-, vaid ka kompimis- ja motoorsetel tajudel. Selle tulemusena muutuvad õpilaste kujutlused geomeetrilistest kujunditest tunduvalt täielikumaks kui nende kujundite passiivsel vaatlemisel. Samal ajal omandatakse modelleerimise juures ka mõningaid tehnilisi oskusi metalli, kartongi, puu jt. töötlemisest.

Aeg-ajalt lisandatakse modelleerimisele ruumiliste kujundite projektiivne joonis, millel on esma-

[1] Vene NFSV koolides.

järguline koht õpilaste ruumiliste kujutluste arendamisel ja polütehnilises õpetuses. «Joonis — see on tehnika keel», sellepärast peavad õpilased võimalikult suuremal määral oskama valmistada täpseid, näitlikke ja hõlpsa konstruktsiooniga jooniseid, oskama neid lugeda ja mõista ning lihtsamatel juhtudel nende jooniste järgi valmistada ka vastavaid ruumilisi kujundeid.

Projektiivne joonis peab olema valmistatud kaldnurkses või ortogonaalses paralleelprojektsioonis, olenevalt projekteeritavate kujundite iseloomust.

Et võimalikult näitlikult näidata õpilastele paralleelprojektsiooni omadusi, tuleb võtta mingisuguse hulktahuka (kõige parem kuubi) traadist (raamistikuline) mudel ja, tekitades selle mudeli varju ekraanile, uurida varjul saadud kujutise iseärasusi. Valgusallikana võib kasutada päikest või projektsioonlaternat. Pöörates mudelit mitmesugustesse asenditesse ja uurides tema varju, konstateerime:

1) Punkti projektsioon on punkt; projekteerivate kiirte suunaga mitteparalleelse sirge projektsioon on sirge.

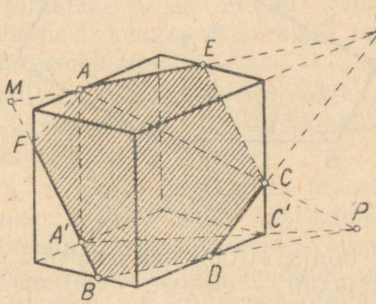
2) Paralleelsed sirged projekteeruvad paralleelsetena.

3) Säilib ühel ja samal sirgel asetsevate lõikude suhe.

Neid paralleelprojektsiooni omadusi on vajalik tõestada ka teoreetiliselt, tuginedes teoreemidele sirgete ja tasapindade paralleelsusest ruumis.

Õigel projektiivsel joonisel on see väärtus, et temal võib läbi viia täiesti täpseid konstruktsioone ja saada määratud tulemuse. Niisuguste konstruktsioonide hulka võib IX klassis lugeda hulktahukate lõigete konstruktsioone. Sellel õppimise astmel tuleb hulktahukat vaadelda kui mingisugust punktide, sirgete ja tasapindade ühendit, lükates tema täpsema defineerimise edasi X klassini. Lõige antakse tavaliselt kolme punktiga antud hulktahuka servadel või tahkudel. Hulktahukad valitakse lihtsad: kuup, prisma, püramiid. Joonisel 25 on toodud näide kuubi lõike konstrueerimisest kolme punkti järgi, mis on antud kuubi kolmel serval.

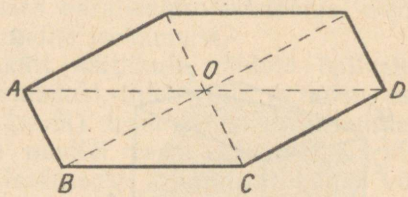
Konstrueerimise järjekord on selline: 1) A, B, C on antud punktid. Leiame punktide A ja C projektsioonid A' ja C' põhjatasapinnal. 2) Sirgete AC ja $A'C'$ lõikamisega määratakse kindlaks sirge AC ja põhjatasapinna lõikepunkt P. 3) Sirge BP kuulub lõiketasapinnale, sellepärast on selle sirge ja alumise serva lõikepunkt D lõiketasapinna punktiks. 4) Sirge *CD* lõikab ülemise serva pikendust punktis *Q*, mis asub ülemise tahu tasapinnal, seepärast sirge *AQ* lõikab ülemist serva punktis *E*, mis samuti on lõiketasapinna punkt. 5) Sirge *AQ* lõikab veel ühte ülemise tahu serva pikendust punktis *M*, mis asub vasaku külgtahu tasapinnal. Sellepärast sirge *MB* lõikab selle tahu vasakut serva punktis *F* — see on veel üks lõiketasapinna punkt. Kuusnurk *AECDBF* annabki meile lõiketasapinna.



Joon. 25.

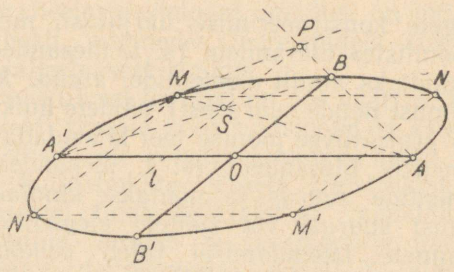
Peale lõigete konstrueerimise harjutusi, mis kuuluvad nn. «Positsiooniliste» ülesannete (s. t. ülesanded, milledes määratakse kindlaks ainult elementide asend, kuid ei tõsteta üles küsimust nende suurusest) näidete hulka, on vajalik IX klassis projektiivse joonise teel lahendada ka mõningaid «mõõtmelisi» ülesandeid (s. t. ülesandeid, milledes antakse elementide suurus ja nõutakse kindlaks määrata mõningaid uusi suurusi või suhteid elementide vahel). Nende ülesannete lahendamisel tuleb eelkõige meeles pidada, et projektiivsel joonisel lõikude ja nurkade suurus üldiselt muutub (moondub): täisnurk võib kujutuda nüri- või teravnurgana, lõigu pikkus võib kas lüheneda või pikeneda. Kuid võib näidata, et kui tasapinna projektsioonil on teada kahe lõigu tõeline suhe ja tõeline nurk nende vahel, siis sellisel projektsioonil võib teostada täiesti täpselt kõiki planimeetrilisi konstruktsioone, mis õigesti kujutavad vastavaid konstruktsioone antud kujundi originaaliga. Niisugust tasapinna projektsiooni nimetatakse «mõõtmeliseks definitsiooniks». Vaatame näiteks, kuidas korrapärase kuusnurga kahe külje antud projektsiooni järgi võib konstrueerida kogu kuusnurga projektsiooni. Olgu

A, B, C korrapärase kuusnurga järjestikused tipud (joon. 26). Diagonaal, mis läbib tippu A ja keskpunkti, peab olema küljest BC kaks korda pikem ja temaga paralleelne. Sellega määratakse kindlaks neljas tipp D ja keskpunkt O. Ülejäänud tipud leiame punktidele B ja C keskpunkti O suhtes sümmeetriliste punktide konstrueerimise teel.



Joon. 26.

Kuid on eriti tähtis, et õpilased oskaksid õigesti ehitada ringjoone projektsiooni — ellipsit. Näitame seda juhtumil, kui ringjoon on antud tema kahe teineteisega risti olevate raadiuste — OA ja OB projektsioonina (joon. 27).



Joon. 27.

Pikendades neid raadiusi üle punkti O oma pikkuse võrra, saame veel kahe ringjoone punkti projektsioonid A' ja B'. Et saada veel mõningaid punkte, tõmbame sirge $l \parallel BB'$. Sirge AB lõikab sirget l punktis P, sirge $A'B$ lõikab teda punktis S. Otsitava punkti M leiame sirgete AS ja $A'P$ lõikumisel. Tõesti: sirged l ja $A'B$ on kolmnurgas $AA'P$ tema kõrguste projektsioonideks; tähendab punkt S on ortotsentri projektsioon ja AM kolmanda kõrguse projektsioon. Sellepärast punkt M on täisnurga, mis toetub diameetrile, tipu projektsioon, s. t. ringjoone punkti projektsioon. Veel kolm punkti M, N ja N' leiame kergesti, kasutades seda, et kumbki diameetritest AA' ja BB', olles ringjoone teineteisega ristiolevate diameetrite projektsioonideks, peavad pooleks jagama teise diameetriga paralleelsed kõõlud.

Niisuguseid ellipsi diameetreid nimetatakse teineteise kaasdiameetriteks ja seda nende omadust tuleb eriti hästi meeles pidada.

Korrates seda konstruktsiooni, võime saada kuipalju tahes ellipsi punkte. Siiski jätkub kaheksast punktist, millede ühendamisel käega või lekaali abil saame rahuldava ringjoone projektsiooni.

Stereomeetriliste ülesannete projektiivse joonise teel lahendamise küsimus on üksikasjalikumalt kirjeldatud prof. N. F. Tšetveruhini raamatus.

X[1] klassis algab geomeetria kursus hulktahukate käsitlemisega. Selle teema käsitlemisel tuleb eelkõige tähelepanu osutada nende kehade õigele kujutamisele projektiivsel joonisel, kasutades teadmisi nendest paralleelprojektsiooni omadustest, milliseid omandati IX klassis. Hulktahukatest kohtame meid ümbritsevas keskkonnas kõige sagedamini risttahukat. On vajalik, et õpilased ise teeksid kindlaks sedaliiki hulktahukate levimise põhjused: nende sümmeetria kolme tasapinna suhtes; selle fakti, et risttahuka lõikamisel tema tahkudega paralleelsete tasapindadega saadakse jällegi risttahukad jne.

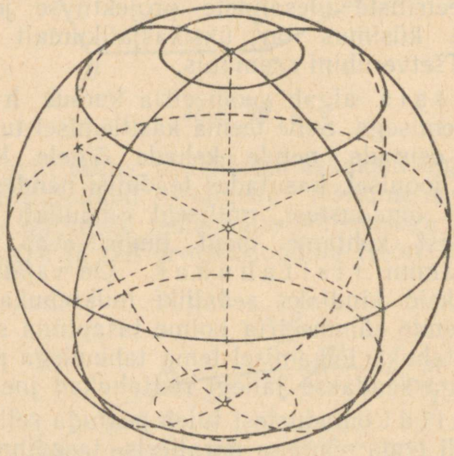
Püramiidi omadustest tuleb peatuda sellel, et lõigates püramiidi tema põhjaga paralleelse tasapinnaga, saame lõike, mille pindala on võrdeline kauguse ruuduga püramiidi tipust. Sellele asjaolule põhineb teoreetiline selgitus valgustustugevuse sõltuvusest valgusallika kaugusest. Tõesti, kui kujutleda, et püramiidi tipus asub valgusallikas, siis näeme, et püramiidi paralleelsete lõigete poolt haaratud valgusvoog jaotub mööda lõike pinda. Viies tasapinna püramiidi tipust kaks korda kaugemale, suureneb pindala neljakordseks, kuid tasapinna ühele ühikule langev valgusenergia hulk muutub neli korda väiksemaks. Seega valgustustugevus peab olema pöördvõrdeline valgusallika kauguse ruuduga. Peab juhtima tähelepanu sellele, et kasutades seda seadust määras kaasaegne astronoomia kindlaks kauguse Maailmaruumi kõige kaugemate objektide —

---

[1] Vene NFSV koolides.

välisgalaktiliste udukogudeni, milleni jõudmiseks valgusel tuleb liikuda paljusid sajatuhandeid aastaid.

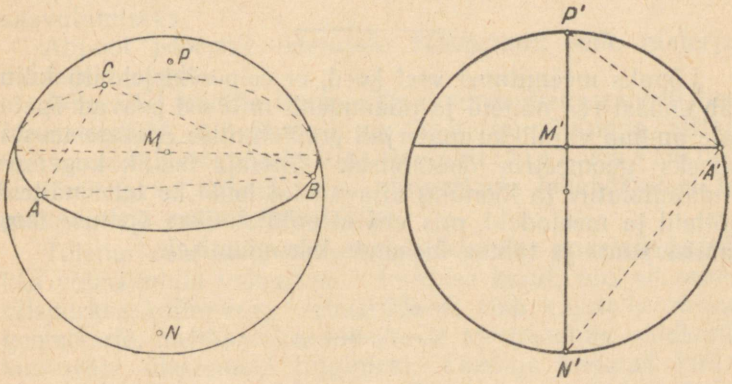
Valemite leidmisel kehade pindala ja ruumala arvutamiseks tuleb tähelepanu osutada sellele, et keha joonmõõtmete muutumisel tema pindala muutub võrdeliselt nende mõõtmete ruuduga ja ruumala — nende mõõtmete kuubiga. See sõltuvus mõjustab väga erinevate mõõtmetega kehade füüsikalisi omadusi. Keha joonmõõtmete vähendamisel tema ruumala väheneb märksa kiiremini kui tema pindala. Seepärast keha õige väikeste mõõtmete juures pindalale mõju avaldava jõu efekt muutub märgatavamaks kui ruumalaga, s. t. keha massiga kindlaks määratud jõu mõju.



Joon. 28.

Sellega seletatakse väikeste tolmukübemete hõljumist õhus: kübemete ruumala vähenemisel nende kaal muutub tähtsusetult väikeseks võrreldes õhu takistusega langemisel, kuna see takistus mõjub pindalale. Sellega on seotud ka valguse rõhu toime mateeria väikestele osakestele. See rõhk võib osakeste ruumala küllaldasel vähendamisel ületada külgetõmbejõu ja heita osakese valgusallikast eemale. See on fakt, millel on määratu suur tähtsus kaasaegse astrofüüsika ja kosmogoonia küsimustes. Olles fikseerinud valemid, mille järgi määratakse kindlaks mitmesuguste kehade pindala ja ruumala, on kasulik rakendada neid valemeid mitmesuguste konkreetsete kehade — klassiruumi, mitmesuguste majapidamisesemete jne. pindala ja ruumala kindlaks määramiseks. On vajalik, et seejuures õpilased ise osutaksid nendele joonsuurustele, milliseid on vaja mõõta püstitatud küsimuste lahendamiseks. Nii näiteks on kasulik anda õpilastele korrapärase püramiidi puust mudel ja küsida, milliseid mõõtmisi tuleb sooritada ruumala arvutamiseks. Võib samuti küsida, milliseid mõõtmisi tuleb läbi viia kelbaga katuse juures, et määrata kindlaks pööningu ruumala.

Pöördkehade — s i l i n d r i ja k o o n u s e — käsitlemise juures on samuti vaja tähelepanu osutada nende vormide levimisele looduses, meid ümbritsevas keskkonnas, tehnikas. Pöördkehade sagedase rakendamise põhjusi mitmesuguste mehhanismide juures peavad selgitama õpilased ise.



Joon. 29.

Samuti nagu hulktahukate käsitlemise juureski, peab rakendama silindri ja koonuse pindala ning ruumala arvutamise valemeid mitmesuguste konkreetsete kehade juures.

S f ä ä r i ja k e r a käsitlemisel tuleb kõigepealt juhtida õpilaste tähelepanu sellele, et kera võib kujutada a i n u l t ortogonaalses projektsioonis, kuna ainult sel juhul kera kujutub ringina, s. t. just nii, nagu me teda silmaga näeme (joon. 28): igasugune teine kaldnurkne projektsioon annab meile kera kujutiseks ellipsi, mis meie silmale on täiesti harjumatu. Materiaalse kera (näiteks puust või metallist mudeli) pindala ja ruumala kindlaks määramisel tekib küsimus selle kera raadiuse kindlaks määramisest. Toome selle huvitava praktilise ülesande ühe lahenduse, mis teostatakse sirkli ja joonlauaga. Võtame kera pindalal vabalt punkti M ja joonestame meelevaldse raadiusega ringjoone (joon. 29). Sellel ringjoonel võtame kolm punkti — A, B ja C ning võttes sirklisse kaugused BC, CA ja AB ehitame paberil kolmnurga $A'B'C'$, mis on võrdne kolmnurgaga ABC. Kolmnurga $A'B'C'$ ümberjoonestatud ringjoone raadius on võrdne punkte A, B ja C läbiva ringi tasapinnaga kindlaks määratud kera lõike raadiusega. Selle raadiuse ja kauguse MA järgi on kerge ehitada meie kera suurringi. Selleks püstitame meelevaldsest punktist M' sirgele ristsirge $M'A$, mis on võrdne lõike raadiusega. Punktist A kuni antud sirgeni kanname pikkuse AM. Punktist A sirgele AM tõmmatud ristsirge määrab kindlaks punkti N, mis on kera diameetri lõpp-punktiks (joon. 29).

Lõpuks meenutame veel kord, et eelpoolkirjeldatu kujutab endast rea näiteid ja nõuandeid, millised peavad õpetajale andma vajalikku materjali polütehnilise õpetuse teostamiseks geomeetria õpetamisel. Õpetaja isiklik kogemus, endainitsiatiiv ja looming aitavad tal leida ka teisi näiteid, võtteid ja meetodeid, mis viivad polütehnilise õpetuse teostamise suure ja tähtsa ülesande lahendamisele.

TRIGONOMEETRIA.

Trigonomeetria kui õppeaine koosneb trigonomeetriliste funktsioonide õpetusest, mis moodustab tema põhilise ideelise sisu, ja kolmnurkade lahendamise kokkuvõttest.

Need mõlemad trigonomeetria põhilised osad neile vastavate ülesannetega sisaldavad suure hulga materjali, mille õpetamine võib kaasa aidata polütehnilise õpetuse eesmärgi saavutamiseks.

Allpool pöörame õpetajate tähelepanu selle materjali mõnedele osadele.

Juba VIII klassis teema «Teravnurga trigonomeetrilised funktsioonid» läbivõtmisel on õpetajal võimalus esitada õpilastele lahendamiseks rida praktilisi küsimusi, mis seisnevad täisnurksete kolmnurkade lahendamisel trigonomeetria rakendamisega.

Täisnurksete kolmnurkade lahendamine on matemaatika üks võimsamaid vahendeid. Võrduse kujul, mis on seotud täisnurkse kolmnurga elementidega, võib kujutada paljude geomeetria, mehhaanika, füüsika ja astronoomia valdkonda kuuluvate ülesannete tingimusi. Õpetaja kasutab küllalt täielikult selle teema juures artikli 2. osas antud materjali ja peale selle avastab iseseisvalt materjali, mis on seoses ülalnäidatud distsipliinidega.

Täisnurksete kolmnurkade lahendamisel põhineb nagu teada ka rea maastikul mõõtmistega seotud ülesannete lahendamine; need mõõtmised kujutavad VIII klassi praktiliste tööde sisu, mida õpilased teostavad tunnis ja ka väljaspool klassi.

Artikli osad 1—12 kuuluvad täielikult IX ja X klassi trigonomeetria kursusesse [1]. Iga osaga koos on antud lühikesed metoodilised juhised, mida õpetaja võib kasutada. Kuid ta peab vaatlema neid juhiseid kui soovitusi ja igal

[1] Eesti NSV koolides on õppeprogrammid erinevad VNFSV õppeprogrammidest, seepärast on ka trigonomeetria jaotus teistsugune.

üksikul juhul toimima nii nagu on vajalik antud konkreetsetel tingimustel. Näiteks võib ta vahele jätta neid või teisi järeldusi, valgustades ainult valemite polütehnilist sisu ja kasutades neid siis praktilisteks rakendusteks. Teiseltpoolt võib ta iseseisvalt juurde tuua analoogilist täiendavat või uut polütehnilist materjali, mis on kogutud mitmesugustest allikatest.

Materjal, mis sisaldab kokkuvõtteid küsimustest, milliseid ei kuulu kehtivasse programmi, on näidatud osa pealkirja ette märgitud tärnikestega. Seda materjali võib mõningal määral kasutada ainult matemaatika ringi töös.

MISTAHES NURGA TRIGONOMEETRILISED FUNKTSIOONID.

1. Trigonomeetrilise funktsiooni väärtuse leidmine argumendi antud väärtuse järgi ja vastupidi.

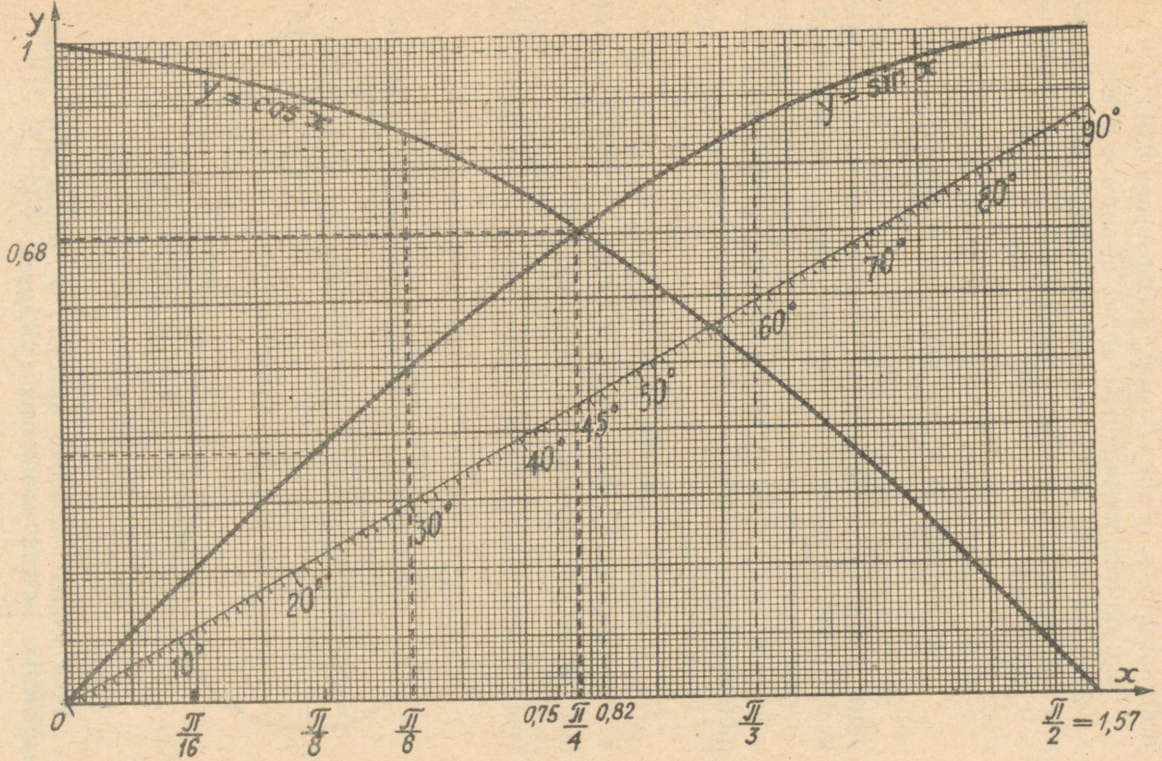
Nende kahe ülesande lahendamine peab VIII ja IX klassis aasta algul toimuma trigonomeetriliste funktsioonide väärtuste tabeli abil, aasta lõpul ka trigonomeetriliste funktsioonide logaritmide tabelite ja arvutuslükati abil.

Kuid õpilased peavad koduste tööde korras küllalt täpselt ja hoolikalt ehitama trigonomeetriliste funktsioonide graafiku (millimeetripaberile niisuguses mastaabis, et 1 ei kujutaks väiksemat lõiku kui 1 dm), nad peavad õppima mõlemaid ülesande tüüpe lahendama selle graafiku abil.

Selleks et graafiku (joon. 30 [1]) abil leida kraadides väljendatud nurga siinuse väärtust, on vaja koordinaatide alguspunktist väljuvale sirgele asetada kraadide skaala arvestusega, et jaotus 0° oleks koordinaatide alguspunktis, jaotus 90° ja punkt $\frac{\pi}{2}$ x-teljel asuksid ühel ja samal ristsirgel x-teljega; on kasulik kraadide skaala ehitada mastaabis 1 cm = 5°; on kerge näha, et sel korral jaotus $n°$ ja x-teljel asuv punkt $\frac{n\pi}{180}$ samuti asuvad ühel ja samal x-telje ristsirgel. Sellisel teel me teostame kraadide ülemineku radiaanidele ja vastupidi.

N ä i d e. Jaotus 47° vastab x-teljel abstsissile 0,82. Järelikult 47° = 0,82 radiaani täpsusega 0,01, mida on

[1] Joonise 30 ja selle seletuse on koostanud N. N. Solaster.



y
1
0,68
y = cos x
y = sin x
x
0
10°
20°
30°
40°
45°
50°
60°
70°
80°
90°
π/16
π/8
π/6
0,75
π/4
0,82
π/3
π/2 = 1,57

Joon. 30.

kerge kontrollida arvutamisega. Abstsissile 0,82 vastab ordinaat 0,73, s. o. $\sin 47° = 0{,}73$ (täpsusega 0,01).

Olgu näiteks vastupidiselt antud, et $\sin \alpha = 0{,}68$.

Graafiku punkt, mille ordinaat on 0,68, vastab abstsissile 0,75 ja täiendaval skaalal jaotusele 43°, seega $\alpha = 43° = 0{,}75$ radiaani.

2. Nurkade ja kaarte mõõtmine radiaanides.

Selles teemas õpitava kokkuvõttena võib kasutusele võtta arvutusi, mis on seotud rihmülekande kahe tüübiga: avatud rihmülekandega ja ristuva rihmaga rihmülekandega.

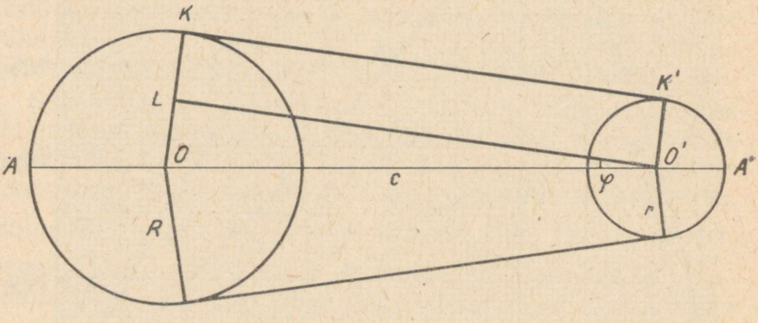
Ülesanne 1. Leida rihma pikkus, mis on pingutatud üle kahe rihmaseibi, kui seibide raadiused on vastavalt R ja r ning seibide keskpunktide vaheline kaugus on c.

L a h e n d u s:

1) A v a t u d r i h m ü l e k a n d e j u u r e s (joon. 31-a).

On õige, et $OK = R$; $O'K' = r$; $OO' = c$; $\angle OO'L = \varphi$; täisnurksest kolmnurgast OLO' leiame, et

$$\sin \varphi = \frac{R-r}{c}. \qquad (1)$$



Joon. 31-a.

Pool rihmast koosneb kaarest AK, lõigust KK' ja kaarest $K'A'$. Leiame nende osade pikkused:

$$\smile \overline{AK} = R\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right); \quad KK' = LO' = c \cos \varphi;$$

$$\smile\overline{K'A'} = r\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right),$$

kus φ on kaare radiaanmõõt, s. o.

$$\varphi = \arcsin \frac{R-r}{c}.$$

Tähistades rihma kogupikkuse l-ga saame:

$$l = 2R\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) + 2c\cos\varphi + 2r\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) =$$

$$= 2c\cos\varphi + \pi(R+r) + 2(R-r)\varphi =$$

$$= 2c\cos\varphi + \pi(R+r) + 2c\varphi\sin\varphi =$$

$$= \pi(R+r) + 2c(\cos\varphi + \varphi\sin\varphi),$$

kus $\sin\varphi = \frac{R-r}{c}$. (2)

Selline on täpne valem. Praktikas aga kasutatakse ligikaudset valemit. Selle väljendamiseks püüame valemist elimineerida nurka φ ja tema funktsioone $\sin\varphi$ ja $\cos\varphi$. Selleks asendame φ $\sin\varphi$ kaudu; edasi $\cos\varphi = \sqrt{1-\sin^2\varphi}$; arvestades, et $0 < \sin\varphi < 1$, saame ligikaudse valemi

$$\sqrt{1-\alpha} \approx 1 - \frac{\alpha}{2}\,^{1};$$

siis saame: $\cos\varphi = 1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi$; järelikult

$$\cos\varphi + \varphi\sin\varphi \approx \cos\varphi + \sin^2\varphi \approx 1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi + \sin^2\varphi =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\sin^2\varphi = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{R-r}{c}\right)^2;$$

seepärast:

$$l \approx \pi(R+r) + 2c + \frac{(R-r)^2}{c}. \qquad (3)$$

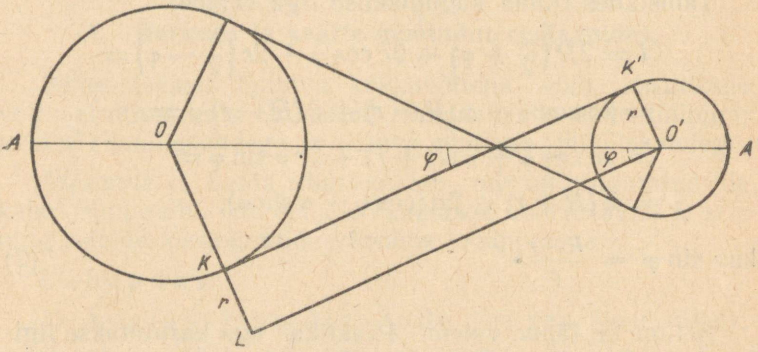
---

[1] $\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)^2 = 1 - \alpha + \frac{\alpha^2}{4}$, kuid tingimuse $0<\alpha<1$ juures see hulkliige erineb juurealusest avaldisest ainult liikme $\frac{\alpha^2}{4}$ poolest, mis on aga väga väike, kuna α on väike suurus.

2) Ristuva rihmaga rihmülekande juures (joon. 31-b).

Säilitades ülalkasutatud tähistuse, saame täisnurksest kolmnurgast OLO':

$$\sin\varphi = \frac{R+r}{c}. \tag{1}$$



Joon. 31-b.

Nüüd järk-järgult saame:

$$\begin{aligned} l &= 2\smile\overline{AK} + 2\,\overline{KK'} + 2\smile\overline{K'A'} = \\ &= 2R\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right) + 2c\cos\varphi + 2r\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right) = \\ &= 2c\cos\varphi + \pi(R+r) + 2(R+r)\varphi = \\ &= 2c\cos\varphi + \pi(R+r) + 2c\,\varphi\sin\varphi = \\ &= \pi(R+r) + 2c(\cos\varphi + \varphi\sin\varphi), \end{aligned} \tag{2'}$$

kus $\sin\varphi = \frac{R+r}{c}$.

Sellele valemile vastav ligikaudne valem saadakse samuti kui valem (3) ning avaldub järgmiselt:

$$l \approx \pi(R+r) + 2c + \frac{(R+r)^2}{c}. \tag{3'}$$

Ülesanne 2. Rihma pikkus on l. Rihmaseibide keskpunktide vahemaa on c, nurk φ rihma sirgjoonelise osa KK' ja seibide keskpunkte läbiva sirge OO' vahel on φ. Leida rihmaseibide raadiused.

L a h e n d u s.

1) A v a t u d r i h m ü l e k a n d e j u u r e s.

Võrdustest (1) ja (2) leiame rihmaseibi raadiuste vahe $R-r$ ja raadiuste summa $R+r$, siis aga raadiused R ja r.

2) R i s t u v a r i h m a g a r i h m ü l e k a n d e j u u r e s.

Võrdusest (1′) leiame seibide raadiuste summa $R+r$ c ja φ kaudu.

Võrrand (2′) sisaldab samuti summat $R+r$, kuid ei sisalda vahet $R-r$. Seepärast ei võimalda antud l R ja r leidmist eraldi. Kolmest antud suurusest (l, c, φ) juba kaks (c, φ) määravad summa $R+r$.

H a r j u t u s. Leida pikkus l mõlema ülekandejuhu jaoks, teades et

1) $R=22,5$ cm; $r=12,5$ cm; $c=4,00$ m;
2) $R=40,0$ cm; $r=20,0$ cm; $c=5,00$ m.

V a s t u s: 1) 9,10 m ja 9,11 m;
2) 11,89 m ja 11,96 m.

Neid ligikaudseid vastuseid on vaja võrrelda täpsete valemite (2) ja (2′) abil leitud vastustega.

TAANDAMISVALEMID. TRIGONOMEETRILISTE FUNKTSIOONIDE GRAAFIKUD.

Trigonomeetria kursuses konstrueerivad õpilased funktsioonide $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ ja $\cot x$ graafikuid. Siiski nõuavad polütehnilise õpetuse huvid tungivalt, et õpilased oskaksid ehitada trigonomeetrilistest funktsioonidest mõningaid lihtsamaid algebraliste funktsioonide graafikuid (täisratsionaalsed I ja II astme funktsioonid ja murdlineaarsed funktsioonid).

Selleks et kõige ratsionaalsemalt ehitada nimetatud funktsioonide graafikuid, on tarvis osata nende perioodi leida, samuti aga ka iga graafiku telgi ja sümmeetriakeskpunkti. Osades 3, 4 ja 5 on üksikasjalikult selgitatud kõikide nende küsimuste lahendamine.

Õpetaja võib need teadmised õpilastele järk-järgult teatavaks teha, piirates saatematerjali programmi teemadega; näiteks trigonomeetrilise funktsiooni perioodi leidmine on täielikult seotud funktsiooni perioodi mõistega; trigonomeetriliste funktsioonide teljelise ja punktilise sümmeetria olemasolu võib olla kindlaks määratud mõnede geomeetriliste valemite tõlgendamise tulemusena.

Viiendas osas vaadeldavate trigonomeetriliste funktsioonide graafikute ehitamist tuleks ainult alata funktsioonide $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$ graafikute ehitamisega, siis aga võivad õpilased õpetaja juhtimisel tegelda ka nendega IX ja X klassi trigonomeetria kursuses, tehes keerulisemad neist ringi koosolekutel.

3. Trigonomeetrilise funktsiooni perioodi leidmine.

Funktsiooni $f(x)$ perioodiks nimetatakse arvu h, millel on niisugune väärtus, et argumendi x iga väärtuse korral kehtib võrdus

$$f(x+h)=f(x), \text{ kus } h\neq0.$$

Opereerides selle definitsiooniga, näitame näidetega, kuidas võib leida trigonomeetrilise funktsiooni perioodi.

Näide 1. $f(x)=\sin ax$. Leiame arvu h, mille juures argumendi x mistahes väärtuse korral kehtib võrdus

$$\sin a(x+h)=\sin ax. \qquad (1)$$

Selleks on küllaldane, et vahe $a(x+h)-ax$ oleks võrdne avaldisega $2k\pi$, kus k on täisarv.

See tingimus on täidetud, kui $ah=2k\pi$, s. o. kui

$$h=\frac{2k\pi}{a}.$$

Seega iga arv, mis avaldub kujul $\frac{2k\pi}{a}$, rahuldab võrdust (1). Kõige väiksemaks selliseks arvuks on $\frac{2\pi}{a}$.

Seega funktsiooni $\sin 3x$ perioodiks on $\frac{2\pi}{3}$; funktsiooni $\sin\frac{x}{5}$ perioodiks on $2\pi:\frac{1}{5}=10\pi$; funktsiooni $\sin\frac{3x}{5}$ perioodiks on $2\pi:\frac{3}{5}=\frac{10\pi}{3}$; üldkujul funktsiooni $\sin ax$ perioodiks on $\frac{2\pi}{a}$.

N ä i d e 2. $f(x) = \sin(ax+b)$. Leiame arvu h, mille juures argumendi x mistahes väärtuse korral kehtib võrdus

$$\sin[a(x+h)+b]=\sin(ax+b). \qquad (2)$$

See tingimus on täidetud, kui

$$[a(x+h)+b]-(ax+b)=2k\pi, \text{ s. o. kui}$$

$$h=\frac{2k\pi}{a}.$$

Kõige väiksemaks sellistest arvudest on arv $\frac{2\pi}{a}$.

Seega funktsiooni $\sin(ax+b)$ periood oleneb ainult argumendi x kordajast a ja on võrdne arvuga $\frac{2\pi}{a}$.

N ä i d e 3. $f(x)=\cos(ax+b)$. Eelmiste näidetega analoogiliselt teeme kindlaks, et selle funktsiooni periood on $\frac{2\pi}{a}$.

N ä i d e 4. $f(x)=\tan(ax+b)$. Pöörates tähelepanu asjaolule, et funktsiooni $\tan x$ perioodiks on π, leiame, et funktsiooni $\tan(ax+b)$ periood on $\frac{\pi}{a}$.

N ä i d e 5. $f(x)=\sin^2 x$. Kuna $\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$, funktsiooni $\cos 2x$ perioodiks on aga π (näide 3), siis funktsiooni $\sin^2 x$ periood on π.

N ä i d e 6. $f(x)=\cos^2 x$. Selle funktsiooni periood on π.

N ä i d e 7. $f(x)=\tan^2 x$. Kuna $\tan^2 x=\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}$, funktsiooni $\cos^2 x$ periood aga on π, siis funktsiooni $\tan^2 x$ periood on π.

N ä i d e 8. $f(x)=\tan^2\frac{x}{2}$. Selle funktsiooni periood on 2π.

4. Trigonomeetriliste funktsioonide teljelisest ja tsentraalsest sümmeetriast.

Juba funktsiooni $y = \sin x$ graafiku ehitamisel juhib õpetaja õpilaste tähelepanu sellele, et valemi

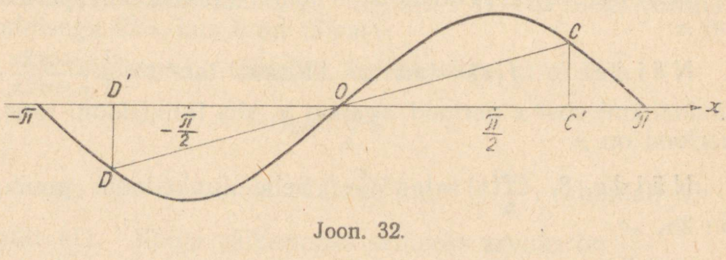
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$$

alusel on funktsioonil $y = \sin x$ olemas sümmeetriatelg, milleks on x-telje punktist $\frac{\pi}{2}$ y-teljega paralleelselt tõmmatud sirge L; igale kahele punktile M ja M', mille abstsissid on vastavalt $\frac{\pi}{2} - x$ ja $\frac{\pi}{2} + x$, ning mis järelikult on sümmeetrilised punkti $\frac{\pi}{2}$ suhtes, vastavad graafikul punktid P ja P', millede ordinaadid $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ ja $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ on võrdsed; seepärast, kui me joonise mööda sirget L kokku murraksime, langeksid punktid P ja P' kokku. See aga näitab, et need punktid asuvad sümmeetriliselt sirge L suhtes. Kuna viimane arutlus kehtib mistahes punktide paari M ja M' kohta, mis on võetud x-teljel ning asuvad sümmeetriliselt punkti $\frac{\pi}{2}$ suhtes, siis sirge L on ilmselt funktsiooni $y = \sin x$ graafiku sümmeetriateljeks.

Täpselt samasugusest valemist

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$$

järgneb, et sirge, mis läbib punkti $\frac{3\pi}{2}$ ja on paralleelne y-teljega, on sama funktsiooni $y = \sin x$ graafiku sümmeetriateljeks.



Joon. 32.

Pärast selle fakti kindlakstegemist juhib õpetaja õpilaste tähelepanu sellele, et valemi $\sin(-x) = -\sin x$ alusel on funktsiooni $y = \sin x$ graafikul sümmeetria keskpunktiks punkt O, mis on koordinaatide alguspunktiks; kui abstsissidele x ja $-x$ vastavad x-teljel punktid C' ja D', graafikul aga punktid C ja D (joon. 3), siis täisnurksete kolmnurkade OCO' ja ODD' võrdsusest ($OC' = OD'$;

$CC' = DD'$) järgneb, et punktid C ja D on sümmeetrilised punkti O suhtes.

Täpselt samuti, põhinedes valemile $\sin(\pi - x) = -\sin(\pi + x)$ me tuleme järeldusele, et funktsiooni $y = \sin x$ graafik on kõverjoon, mis on sümmeetriline punkti π kui sümmeetriakeskpunkti suhtes.

Seega vahemikes

$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, ja $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, s. o. igas poolperioodis funktsiooni $y = \sin x$ graafikul on üks sümmeetriakeskpunkt (0 ja π).

Analoogiliselt ülaltoodud näitega, tuginedes valemitele $\cos(-x) = \cos x$; $\tan(-x) = -\tan x$ teeb õpetaja kindlaks, et funktsiooni $y = \cos x$ graafikul on sümmeetriateljeks ordinaattelg, funktsiooni $y = \tan x$ graafikul on sümmeetria keskpunktiks koordinaatide alguspunkt O.

* 5. Trigonomeetriliste funktsioonide graafikute ehitamine.

Peale neid ettevalmistavaid harjutusi võib õpetaja asuda trigonomeetriliste funktsioonide graafikute ehitamisele.

Näide 1. $y = \cos^2 x$.

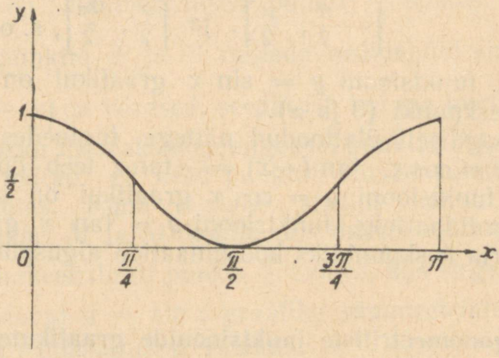
Kolmandas osas (näide 6) tehti kindlaks, et funktsiooni $\cos^2 x$ periood on π. Sellepärast on küllalt, kui ehitada selle funktsiooni graafik vahemikus $[0, \pi]$.

Uurime funktsiooni $\cos^2 x$ muutumist selles vahemikus: kui x kasvab nullist kuni $\frac{\pi}{2}$-ni, siis $\cos x$ kahaneb 1-st nullini ja $\cos^2 x$ kahaneb 1-st nullini; kui x kasvab $\frac{\pi}{2}$-st kuni π-ni, siis $\cos x$ kahaneb nullist -1-ni ja $\cos^2 x$ kasvab nullist üheni; seda muutumist võib esitada järgmise tabeli näol:

x	0		$\frac{\pi}{2}$		
y	1	↘	0	↗	1

Nüüd näeme, et

$\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$; seepärast on graafikul sümmeetriatelg L, mis läbib punkti $\frac{\pi}{2}$ ja on paralleelne y-teljega, seega graafiku ehitamiseks vahemikus $[0, \pi]$ on küllalt, kui ehitada temast see osa, mis asub vahemikus $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ja leida selle telje L suhtes sümmeetriline kõver. Selle tulemusena saame (joon. 33):



Joon. 33.

M ä r k u s. Võiks ka, tuginedes valemile $\cos^2(-x) = \cos^2 x$, teha järelduse, et funktsiooni $\cos^2 x$ graafik on sümmeetriline ordinaatteljega, ning ehitanud temast osa, mis asub vahemikus $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, leiame sellele ordinaattelje suhtes sümmeetrilise kõvera; siis saaksime graafiku vahemikus $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, mille pikkus on võrdne funktsiooni perioodiga.

N ä i d e 2. $y = -\cos^2 x + 4 \cos x$.

Vaadeldes seda kaksliiget $\cos x$ suhtes kui mittetäielikku ruutvõrrandit, esitame ta järgmisel kujul: $-(\cos x - 2)^2 + 4$, ja teeme kindlaks, et antud funktsiooni periood on 2π.

Kuna argumendi x muutumisel nullist kuni π-ni vahe $2 - \cos x$ jääb positiivseks ja kasvab, siis ka selle vahe ruut kasvab ja järelikult funktsioon y kahaneb; argumendi x muutumisel π-st kuni 2π-ni muutub funktsioon vastupidises suunas.

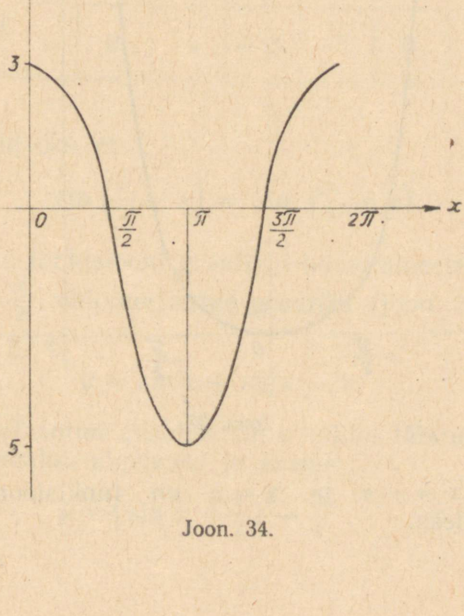
Koostame funktsiooni $y = -(\cos x - 2)^2 + 4$ muutumiste tabeli vahemikus $(0, 2\pi)$.

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\cos x - 2$	-1	$\searrow$	-2	$\searrow$	-3	$\searrow$	-2	$\nearrow$	-1
y	3	$\searrow$	0	$\searrow$	-5	$\searrow$	0	$\nearrow$	3

Kuna $\cos(\pi - x) = \cos(\pi + x)$, siis funktsiooni y graafikul on sümmeetriateljeks sirge, mis läbib punkti π ja on paralleelne ordinaatteljega. Sellepärast ehitame vahemikus $[0, \pi]$ oleva graafiku osa ja leiame siis temaga sümmeetrilise graafiku osa sümmeetriatelje suhtes (joon. 34).

Märkus. Kuna sümmeetriateljeks funktsioonile y on ka ordinaattelg, siis võib vahemikus $[0, \pi]$ olevale graafikule leida sümmeetrilise graafikuosa ordinaattelje suhtes.

Näide 3. $y = \tan^2 \frac{x}{2}$ perioodiga 2π (vt. lk. 107).

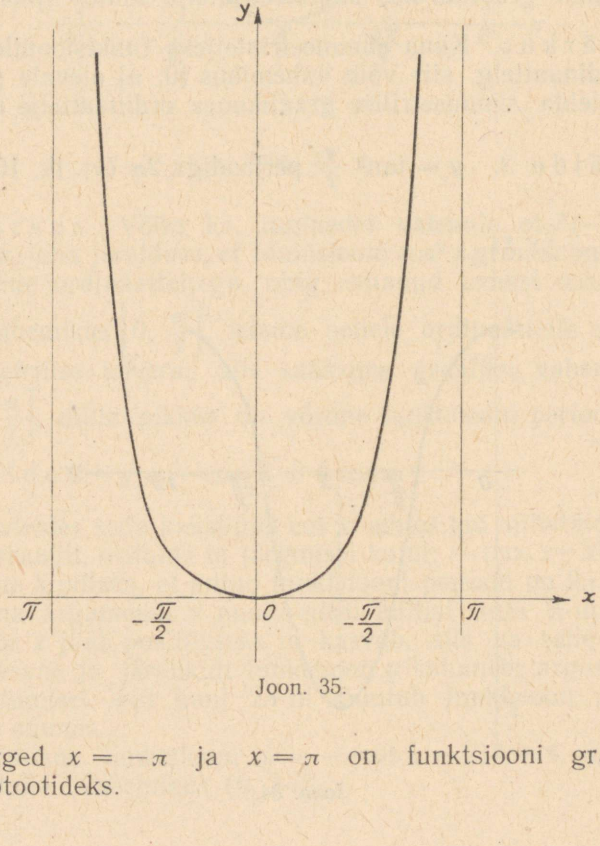


Joon. 34.

Koostame funktsiooni muutumise tabeli vahemikus $[-\pi, \pi]$:

x	$-\pi$		0		π
$\tan\frac{x}{2}$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	∞
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	∞

Kuna $\tan^2\left(-\frac{x}{2}\right) = \tan^2\left(+\frac{x}{2}\right)$, siis y-telg on funktsiooni graafiku sümmeetriateljeks (joon. 35.).



Joon. 35.

Sirged $x = -\pi$ ja $x = \pi$ on funktsiooni graafiku asümptootideks.

Näide 4. $y = \frac{3 \sin x}{\sin x - 2}$.

Kuna

$$\frac{3 \sin x}{\sin x - 2} = \frac{(3 \sin x - 6) + 6}{\sin x - 2} = 3 + \frac{6}{\sin x - 2},$$

siis

$$y = 3 + \frac{6}{\sin x - 2}.$$

Antud funktsiooni periood on 2π.

Kuna $\sin x$ kõik väärtused mahuvad vahemikku

$$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

ja vahemikku $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, siis koostame tabeli antud funktsiooni muutumise kohta vahemikus $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$:

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$
$\sin x$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1
y	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-3	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1

Meeles pidades, et

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

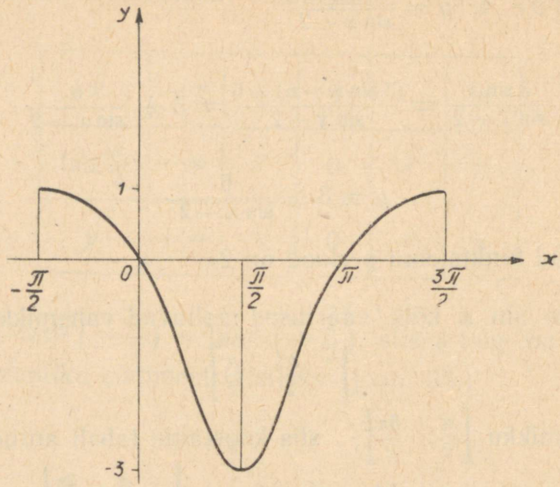
ning et antud funktsiooni graafikul on sümmeetriatelg, mis läbib punkti $\frac{\pi}{2}$, ehitame antud graafiku (joon. 36).

Näide 5.

$$y = \sin^2 x + \sin x - 2.$$

Täiendades antud avaldise $\sin x$ suhtes täisruuduks (nii nagu seda tehakse algebras) ja saame:

$$y = \left(\sin x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}.$$



Joon. 36.

Selgelt on näha, et selle funktsiooni periood on 2π. Sellepärast koostame tabeli selle funktsiooni muutumisest vahemikus $[0, 2\pi]$. Arvestades seda, et kaksliige $\sin x + \frac{1}{2}$ muutub nulliks, kui $x = -\frac{1}{2}$, s. o. kui

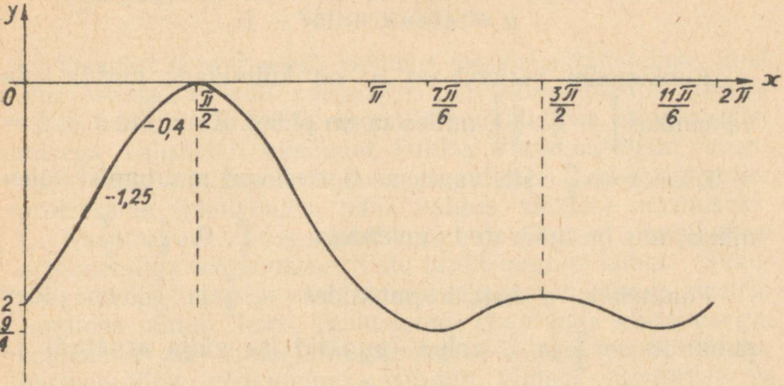
$$x_1 = \frac{7\pi}{6} \text{ ja } x_2 = \frac{11\pi}{6},$$

peenestame vahemiku $[0, 2\pi]$ kuueks vahemikuks punktidega

$$\frac{\pi}{2}, \ \pi, \ \frac{7\pi}{6}, \ \frac{3\pi}{2}, \ \frac{11\pi}{6}:$$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{7\pi}{6}$		$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{11\pi}{6}$		2π
$\sin x + \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	↗	$\frac{3}{2}$	↘	$\frac{1}{2}$	↘	0	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	0	↗	$\frac{1}{2}$
y	-2	↗	0	↘	-2	↘	$-\frac{9}{4}$	↗	-2	↘	$-\frac{9}{4}$	↗	-2

Ehitame funktsiooni y graafiku (joon. 37):



Joon. 37.

Funktsioonil y on 2 maksimumi $\left(x \text{ väärtustel } \frac{\pi}{2} \text{ ja } \frac{3\pi}{2}\right)$ ja 2 miinimumi $\left(x \text{ väärtustel } \frac{7\pi}{6} \text{ ja } \frac{11\pi}{6}\right)$.

Harjutused.[1]

1. $$y = \frac{1}{3 + 2\cos x}.$$

Juhis. Funktsiooni y periood on 2π, tema sümmeetriateljeks on ordinaattelg; seepärast on küllaldane vaadelda vahemikku $[0, \pi]$; selles vahemikus $\cos x$ kahaneb 1-st kuni -1-ni, järelikult y kasvab $\frac{1}{5}$-st kuni 1-ni.

2. $$y = \frac{\sin^2 x - \sin 2x}{\cos^2 x}.$$

Juhis. Funktsiooni perioodi leidmiseks funktsiooni graafiku ehitamiseks anname funktsioonile järgmise kuju:

$$y = \frac{\sin^2 x - 2\sin x \cos x}{\cos^2 x} = \tan^2 x - 2\tan x.$$

[1] Harjutused 1—3 on võetud V. L. Gontšarovi artiklist „Элементарные функций действительного переменного" teoses „Энциклопедия элементарной математики" III köide II pt. § 31.

Nii nagu näites 5 täiendame avaldise täisruuduks:

$$y = (\tan x - 1)^2 - 1.$$

Funktsiooni periood on π; on küllaldane uurida teda vahemikus $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, milles ta on pidev. Kuna $\tan x - 1 = 0$, kui $x = \frac{\pi}{4}$, siis vaatleme funktsiooni muutumist vahemikes, mis on määratud punktidega $-\frac{\pi}{2}$, 0, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$.

Funktsioon y katkeb punktides $-\frac{\pi}{2}$ ja $\frac{\pi}{2}$, on pidev punktide $-\frac{\pi}{2}$ ja $\frac{\pi}{2}$ vahel (punktid ise välja arvatud) ja tema miinimum asub punktis $\frac{\pi}{4}$ ning on võrdne arvuga -1.

3. $$y = \frac{\cos 2x}{\sin x}.$$

J u h i s. Perioodi leidmiseks ja graafiku ehitamiseks teisendame avaldist järgmiselt:

$$y = \frac{1 - 2\sin^2 x}{\sin x} = \frac{1}{\sin x} - 2\sin x.$$

Funktsiooni y periood on 2π, tema sümmeetriakeskpunktiks on koordinaatide alguspunkt. Funktsioonil on ka sümmeetriatelg, milleks on punkti $\frac{\pi}{2}$ läbiv y-teljega paralleelne sirge; sellepärast on küllaldane vaadelda funktsiooni muutumist vahemikus $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Funktsioon katkeb punktides 0, π, 2π, ning on pidev vahemikes $[0, \pi]$ ja $[\pi, 2\pi]$; saavutab punktides $\frac{\pi}{2}$ ja $\frac{3\pi}{2}$ vastavalt miinimumi ja maksimumi.

4. $$y = \sin^2 x - 3\sin x + 2.$$

J u h i s. Vaata näide 2.

5. $$y = 2\cos^2 x - 3\cos x + 1.$$

J u h i s. Vaata näide 5.

6. $$y = \sin^2 x + \cos x + 3.$$

7. $$y = 2\tan^2 x - \tan x - 1.$$

NUMBRILISE ARGUMENDIGA TRIGONOMEETRILISED FUNKTSIOONID.

Osadest 6 ja 7 omab esimene iseseisva tähenduse, kuid siin esitatakse teda peajoontes kui ettevalmistust teisele osale, milline lihtsa harmoonilise võnkumise näite vaatlemisega valgustab küsimust, kuidas trigonomeetriat rakendada väga laialdaselt looduse ja mitmesuguste võnkumisprotsesside (mehaanika, hääl, valgus, elekter) uurimiseks. Kasutatavas programmis ei ole teemat numbrilise argumendiga trigonomeetriliste funktsioonide kohta. Sellepärast võib kuuenda osa materjali kasutada trigonomeetria tundides ainult koos funktsiooni graafikute ehitamisega, seitsmenda osa materjali aga ringi töös, kus teema «Lihtne harmooniline võnkumine» kujutab endast huvitavat ja tunnetamise suhtes tänuväärt materjali. Siiski võib õpetaja õpilasi tutvustada lihtsa harmoonilise võnkumise võrrandiga, mitte tuletades seda, vaid ainult selgitades tema mõtet.

Juhime tähelepanu sellele, et funktsiooni

$$y = k \sin (ax + b)$$

graafiku ehitamine, mille metoodika on üldkujul antud osas 6, tuleb õpilastega läbi viia eranditult arvuliste näidete abil ja peamiselt iseseisvalt p r a k t i l i s t e t e g e v u s t e korras. Millimeetripaberile hoolikalt tehtud graafikuid tuleb õpetajale esitada parandamiseks ja hindamiseks.

6. Funktsiooni $y = k \sin (ax + b)$ graafik.

Samuti nagu funktsiooni $y = ax^2 + bx + c$ graafiku ehitamisel VIII klassis õpilased eelnevalt ehitasid funktsioonide $y = x^2$; $y = x^2 + h$; $y = (x + m)^2$; $y = kx^2$ jne. ja seejuures igal korral selgitasid koefitsientide h, m, k tähendust, peavad õpilased ka funktsiooni $y = k \sin (ax + b)$ graafiku ehitamisel mõistma koefitsientide b, a, k tähendust. Selleks on vaja lasta neil järk-järgult ehitada graafikuid

$$y = \sin (x + c), \text{ kui } c \gtreqless 0;$$
$$y = \sin ax, \text{ kui } a \gtreqless 1;$$
$$y = \sin (ax + b);$$
$$y = k \sin (x + c);$$
$$y = k \sin (ax + b),$$

mille tulemusena nad tulevad järeldustele, et:

1) funktsiooni $y = \sin(x + c)$ graafik kujutab endast sinusoidi $y = \sin x$, mis on nihkunud vasakule (kui $c > 0$) või paremale (kui $c < 0$) c ühiku võrra;

2) funktsiooni $y = \sin ax$ graafik kujutab endast sinusoidi $y = \sin x$, mis on venitatud (kui $a < 1$) või kokku surutud (kui $a > 1$) x-telje suunas suhtes $1 : a$;

3) funktsiooni $y = \sin(ax + b) = \sin a\left(x + \frac{b}{a}\right)$ graafik kujutab endast sinusoidi $y = \sin\left(x + \frac{b}{a}\right)$, mis on x-telje suunas venitatud või kokku surutud suhtes $1 : a$;

4) funktsiooni $y = k \sin x$ graafik kujutab endast sinusoidi $y = \sin x$, mis on venitatud (kui $k < 1$) või kokku surutud (kui $k > 1$) y-telje suunas suhtes $k : 1$;

5) funktsiooni $y = k \sin(ax + b)$ graafik kujutab endast sinusoidi $y = \sin(ax + b)$, mis on venitatud või kokku surutud y-telje suunas suhtes $k : 1$.

Nendele järeldustele võib õpilasi viia järgmiste arutluste teel:

1) Funktsiooni $y = \sin(x - 2)$ graafiku ehitamiseks koostame tabeli:

x	$x-2$	y
$2+0$	0	0
$2+\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	1
$2+\pi$	π	0
$2+\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	1
$2+2\pi$	2π	0

Sellest tabelist on näha, et funktsioon $\sin(x - 2)$ omab samad ja ainult samad väärtused, mis funktsioon $\sin x$, kuid see väärtus, mis funktsioonil $\sin x$ on punktis x_0, on funktsioonil $\sin(x - 2)$ punktis $x_0 + 2$, s. o. kõik funktsiooni $\sin(x - 2)$ väärtused nagu «hilinevad» paremalt liikudes 2 ühiku võrra, nii et funktsiooni $\sin(x - 2)$ graafiku võib saada lihtsalt funktsiooni $y = \sin x$ graafiku 2 ühiku võrra paremale nihutamisega. Õpetaja muudab selle fakti eriti näitlikuks, kui ta kasutab sinusoidi $y = \sin x$ mudelit, mille nihutamisel c ühiku võrra paremale või vasakule tekitatakse funktsiooni $y = \sin(x + c)$ graafik.

2) Funktsiooni $y = \sin 3x$ graafiku ehitamiseks koostame tabeli.

Sellest tabelist on näha, et funktsioon $\sin 3x$ omab samad ja ainult samad väärtused, mis funktsioon $\sin x$, kuid väärtus, mille funktsioon $\sin x$ saab punktis x_0, funktsioon $\sin 3x$

saab punktis $\frac{x_0}{3}$, nii et funktsiooni sin $3x$ graafiku võib saada funktsiooni $y = \sin x$ graafikut x-telge mööda kolm korda lühemaks surudes.

Analoogiline arutlus viib järeldusele, et funktsiooni $y = \sin \frac{x}{3}$ graafiku võib saada funktsiooni $y = \sin x$ graafikut x-telje suunas 3 korda pikemaks venitades.

x	$3x$	y
0	0	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	π	1
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	-1
$\frac{2\pi}{3}$	2π	1

3) Nüüd on juba selge, et funktsiooni $y = \sin(ax + b)$, s. o. funktsiooni $y = \sin a\left(x + \frac{b}{a}\right)$ graafiku ehitamiseks on küllaldane funktsiooni $y = \sin x$ kaks korda järgimööda deformeerida:

1) nihutada teda $\left|\frac{b}{a}\right|$ ühiku võrra ja

2) kokku suruda või venitada $|a|$ korda.

Täieliku näitlikkuse saavutamiseks laseb õpetaja õpilasi ehitada funktsiooni $y = \sin 3(x - 2)$ graafiku punktide kaudu ning tähelepaneliku uurimise tulemusena veendutakse selles, et selle väärtuse, mille funktsioon $\sin x$ saab punktis x_0, funktsioon $\sin 3(x - 2)$ saab punktis $2 + \frac{x_0}{3}$. Seega kõik need väärtused, mis funktsioonil $\sin x$ on vahemikus $[0, 2\pi]$, on funktsioonil $\sin 3(x-2)$ vahemikus $\left[2, 3 + \frac{2\pi}{3}\right]$.

4) Funktsiooni $y = \frac{1}{2} \sin x$ ehitamiseks koostame tabeli:

x	$\sin x$	y
0	0	0
$\frac{\pi}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
π	0	0
$\frac{3\pi}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$
2π	0	0

On ilmselt näha, et graafiku igale funktsiooni $y = \sin x$ punktile abstsissiga x_0 ja ordinaadiga y_0 vastab funktsiooni $y = \frac{1}{2} \sin x$ graafiku punkt abstsissiga x_0 ja ordinaadiga $\frac{1}{2} y_0$, seega funktsiooni $y = \frac{1}{2} \sin x$ graafiku võib saada funktsiooni $y = \sin x$ graafiku kahekordsel kokkusurumisel y-telje sihis.

Analoogiline arutlus toob järeldusele, et funktsiooni $y = 2 \sin x$ graafiku võib saada funktsiooni $y = \sin x$ graafiku kaks korda y-telje sihis pikemaks venitamisel.

5) Peale seda ettevalmistustööd peab iga õpilane olema aru saanud sellest, et funktsiooni $y = \frac{5}{2} \sin (3x - 4)$ graafik kujutab endast funktsiooni $y = \sin x$ graafikut, mille juures on teostatud 1) nihutamine paremale $\frac{4}{3}$ ühiku võrra; 2) kokku surumine x-telje sihis 3 korda; 3) venitamine y-telje sihis $2\frac{1}{2}$ korda. Õpilased ehitavad selle graafiku koostatud tabeli punktide järgi:

x	$x - \frac{4}{3}$	$3\left(x - \frac{4}{3}\right)$	$\sin(3x - 4)$	y
$\frac{4}{3} + 0$	0	0	0	0
$\frac{4}{3} + \frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	1	$\frac{5}{2}$
$\frac{4}{3} + \frac{2\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	π	0	0
$\frac{4}{3} + \frac{3\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	-1	$-\frac{5}{2}$
$\frac{4}{3} + \frac{4\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{3}$	2π	0	0

Üldse tuleb funktsiooni $y = k \sin (ax + b)$ graafiku ehitamisel kõigepealt märkida x-teljel punkt $-\frac{b}{a}$, milles funktsioon y muutub nulliks ja siis punktid

$$-\frac{b}{a} + \frac{\pi}{2a}; \quad -\frac{b}{a} + \frac{\pi}{a}; \quad \frac{b}{a} + \frac{3\pi}{a}; \quad -\frac{b}{a} + \frac{2\pi}{a},$$

milles funktsiooni y väärtused on vastavalt k, 0, $-k$, 0.

H a r j u t u s e d.

Ehitada järgmiste funktsioonide graafikud:

$$y = \sin(2x + 3); \quad y = \frac{2}{3} \sin\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{4}\right);$$

$$y = \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right).$$

7. Harmooniline lihtvõnkumine.

Deformeeritud sinusoid, mida endast kujutab funktsiooni $y = k \sin(ax + b)$ graafik, väljendab seadust, mille järgi toimub h a r m o o n i l i n e l i h t v õ n k u m i n e. Selle mõiste olemuse võib õpetaja väljendada järgmisel skemaatilisel kujul.

Oletame, et mingi punkt M liigub ringjoont mööda vastupäeva jääva kiirusega, mis on võrdne $\omega \frac{\text{radiaani}}{\text{sek.}}$ (joon. 38). On arusaadav, et selle kiiruse juures punkt M oma liikumisel läbib t sekundiga vahemaa ωt radiaani ning teeb täisringi $\frac{2\pi}{\omega}$ sekundiga.

Igale punkti P asendile, mis on ringjoone võrdsete pikkuste võrra edasi asetunud, vastab selle punkti projektsioon P' teljel $B'B$.

Seejuures sama ajaga kui punkt P, väljudes punktist A, käib ära terve ringi, tema projektsioon P', väljudes asendist O liigub kuni äärmise asendini B, siis pöördub tagasi asendisse O ning jätkates oma teed jõuab vastupidisesse äärmisse asendisse B', peale seda pöördub jällegi tagasi algasendisse O. Sellise punkti P' liikumise kohta öeldakse, et ta võngub harmooniliselt. Jooniselt on näha (seda võib ka tõestada), et ringjoonel punkti P võrdsetele edasinihkumistele vastavad diameetril $B'B$ punkti P' mittevõrdsed edasinihkumised, seega punkti P' liikumine diameetril $B'B$ ei ole enam ühtlane, vaid toimub mingi teise seaduse alusel.

Püüame leida selle seaduse. On arusaadav, et seadus on kindlaks tehtud, kui meil õnnestub leida valem, mis määrab kindlaks punkti P' asukoha diameetril $B'B$ igal antud ajamomendil. Punkti P' asend diameetril $B'B$ on täielikult määratud tema hälbega OP' algasendist O, see hälve OP'

kujutab endast suunatud sirglõiku, mille algebralist väärtust $\overline{OP'}$ võib kergesti leida järgmisest definitsioonist:

$$\frac{OP'}{R} = \sin \smile \overline{AP} = \sin \omega t,$$

kus R on ringi raadius; seega märkides punkti P' hälbe OP' algpunktist O algebralise väärtuse OP' y-ga, saame:

$$y = R \sin \omega t. \qquad (1)$$

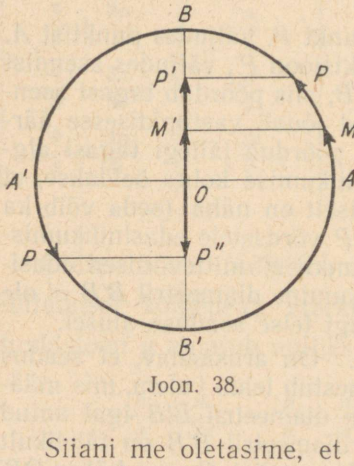
See on valem, mis väljendab seadust, mille järgi toimub punkti P' harmooniline võnkumine $OBOB'O$.

Suurust R nimetatakse võnkumise amplituudiks.

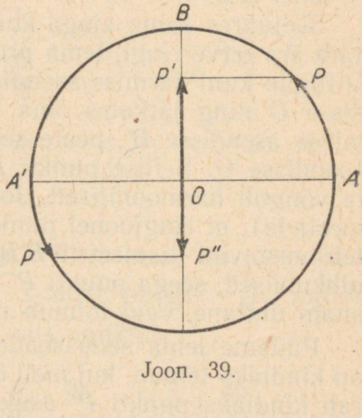
Funktsiooni y periood $\frac{2\pi}{\omega}$, mis on märgitud tähega T, näitab mitme sekundiga teeb punkt P täisringi ja järelikult, mitme sekundiga teeb punkt P' ühe võnke; seepärast funktsiooni y perioodi T nimetatakse ka harmoonilise võnkumise perioodiks.

Kuna $$T = \frac{2\pi}{\omega},$$

siis $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Kui oletame, et $T = 0{,}1$ sek., siis $\omega = 20\pi$, s. o. punkt P teeb 1 sekundis 10 täisringi ja järelikult punkt P' teeb 1 sekundis 10 võnget; seepärast nimetatakse suurust ω s a g e d u s e k s.



Joon. 38.



Joon. 39.

Siiani me oletasime, et punkt P alustab oma liikumist ringjoonel punktist A (joon. 38 ja 39). Kuid oletame, et see liikumine algab mingisugusest punktist M (joon. 38), mille asend on määratud võrdusega

$$\smile \overline{AM} = \alpha,$$

kus α on positiivse kaare AM väärtus radiaanides. On näha, et säilitades kõik eelmised tähistused, saame me valemi

$$y = R \sin (\omega t + \alpha),$$

kus $\smile \overline{MP} = \omega t$.

Muutuvat suurust $\omega t + \alpha$ nimetatakse v õ n k e f a a s i k s, jäävat suurust α nimetatakse võnkumise a l g f a a s i k s, sest ta määrab kindlaks ühtlase kiirusega ringjoonel liikuva punkti P algasendi M ja harmooniliselt mööda diameetrit BB' võnkuva punkti P' algasendi M'.

On selgesti mõistetav, et me tuleme samadele järeldustele, kui me projekteerime liikuva punkti mitte diameetrile $B'B$, vaid mingile meelevaldsele vaadeldava ringjoone diameetrile, liikuva punkti projekteerimine teostatakse piki diameetrit, mis on projektsioonteljeks, harmooniliste võnkumiste seadusepärasus väljendub valemina

$$s = A \sin (\omega t + \alpha), \quad s_0 = A \sin \alpha,$$

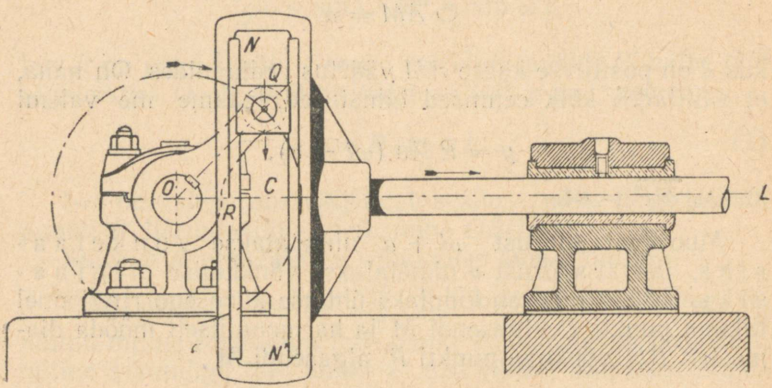
kus A, ω ja α on vastavalt amplituud, sagedus ja võnkumiste algfaas, s_0-võnkuva punkti hälve tsentrist O momendil $t = 0$, s — võnkuva punkti asend momendil t.

N ä i t e i d.

1. Harmooniline võnkumine teostub praktikas mehhanismi juures, mida nimetatakse v ä n d a k s i l m a k e p s u t a (joon. 40). Vända otsa Q on kinnitatud liugur, mis võib libiseda nuudis NN', mis on tehtud raami R. Pöörlemisel tõmbab vänt kaasa endaga raami ja koos sellega varras L hakkab võnkuma harmooniliselt, kuna see liikumine toimub raami tsentriga C, mis kujutab endast punkti Q projektsiooni, horisontaalsuunal.

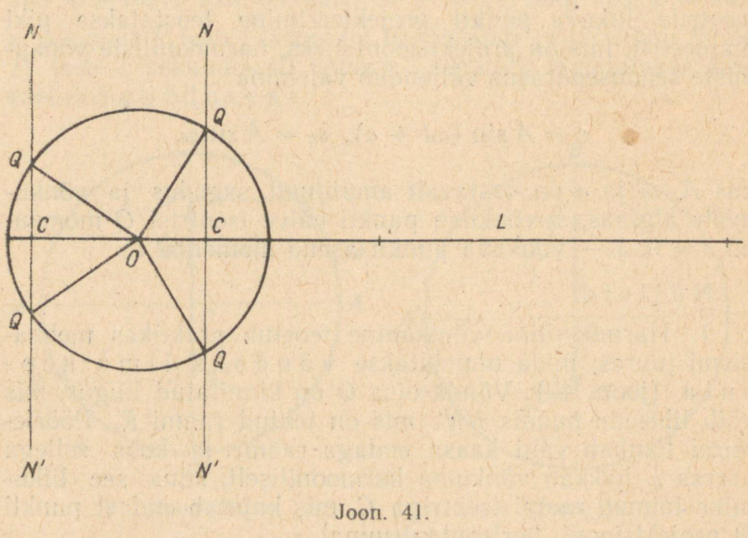
Skemaatiliselt võib vänta ilma kepsuta kujutada nii nagu näidatud joonisel 41.

Vänt OQ on joonisel antud neljas asendis; nendele vastab raami nuudi NN' kaks asendit, mõlema sellise asendi saab raam kaks korda, nimelt raami liikumisel paremalt



Joon. 40.

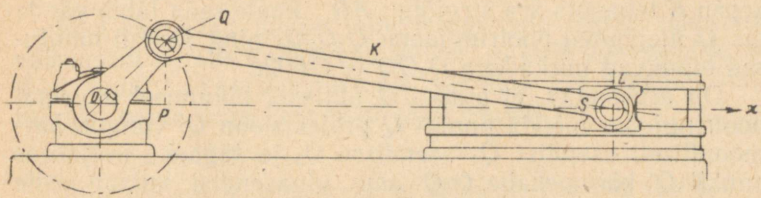
vasakule ja vasakult paremale; raami võnkuv liikumine kutsub esile ka varda L samasuguse liikumise.



Joon. 41.

2. Tavaline väntmehhanism (joon. 42), mille juures vänt OQ on seotud liuguriga L kepsu K abil.

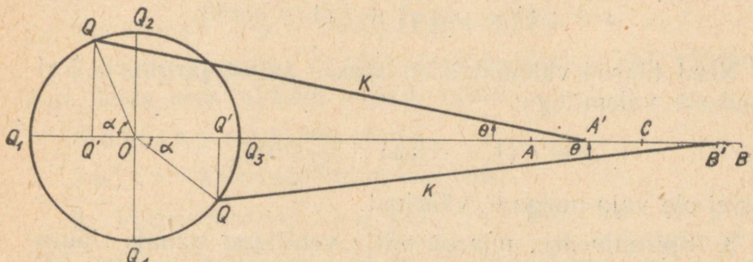
Vända ühtlasel pöörlemisel on liuguri liikumine selline, mis erineb harmoonilisest võnkliikumisest. Kuid liuguri liikumine on seda lähedasem harmoonilisele võnkumisele,



Joon. 42.

mida pikem on keps K. Seejuures, mida pikem on keps K, seda vähem kaldub ta kõrvale horisontaalasendist, kuna nurk, mille keps moodustab teljega Ox, on kepsu suure pikkuse korral väga väike. Kui aga kepsu kõrvalekaldumist horisontaalasendist mitte arvestada, siis võib ligikaudselt võtta, et kepsu ots S, aga ka liugur L liiguvad nii nagu punkti Q projektsioon P, s. o. võnguvad harmooniliselt.

Skemaatiliselt võib väntmehhanismi kujutada nii nagu on näidatud joonisel 43.



Joon. 43.

Vänt OQ on antud kahes asendis, nendele asenditele vastavad kepsu otsa K kaks asendit: A' ja B'. Kepsu ots K võngub surnud punktide A ja B vahel, kaugust AB surnud punktide vahel nimetatakse käiguks (varda käiguks). On ilmselt näha, et käik AB on võrdne ringjoone diameetriga.

Selle ajaga, kui vända OQ ots Q käib ära pool ringjoonest Q_1 Q_2 Q_3, muutub nurk vända ja vända algasendi OQ_1

vahel, s. o. nurk Q_1OQ, 0°-st kuni 180°-ni, nurk θ aga, mis jääb kepsu K ja telje Ox vahele, s. o. nurk $OA'Q$ kasvab algul 0°-st kuni oma maksimaalse väärtuseni (kui $\alpha = 90°$) ja väheneb siis jälle kuni 0°-ni. Selle aja jooksul käib kepsu K teine ots ära sirglõigu AB. Peale seda läbib vända ots Q ülejäänud poolringjoone $Q_3Q_2Q_1$ ning samad muutused toimuvad nurkadega Q_3OQ ja $OB'Q$.

On arusaadav, et punkti Q ühtlasel liikumisel mõlemat poolringjoont mööda punkti Q projektsioon Q' võngub harmooniliselt asendist Q_1 asendisse Q_3 ja tagasi. Seejuures punkti Q' kõrvalekalle Q_1Q' oma algasendist kutsub esile punkti A' kõrvalekalde AA' oma algasendist A (ühtlase liikumise juures). Tähistades kepsu K pikkuse l-ga, vända OQ pikkuse r-ga ja kõrvalekalde AA' s-ga, saame järkjärgult:

$$Q'O + OA + AA' = Q'A';$$

$$Q'O = r\cos\alpha;\ OA = l - r;\ AA' = s;\ Q'A' = l\cos\theta$$

$$r\cos\alpha + l - r + s = l\cos\theta;$$

$$s = r\,(1 - \cos\alpha) - l\,(1 - \cos\theta).$$

Analoogilise arvutamise teel veendume, et punkti B kõrvalekalle $B'B$ algasendist B (tagasiliikumisel) on võrdne:

$$s = r\,(1 - \cos\alpha) + l\,(1 - \cos\theta).$$

Need täpsed valemid asendatakse sageli järgmiste ligikaudsete valemitega:

$$s = r\,(1 - \cos\alpha) \pm \frac{r^2}{2l}\sin^2\alpha,$$

kus ei ole vaja nurga θ väärtust.

3. Spiraalvedru, mis on välja venitatud temale riputatud koorma mõjul, võib hakata üles-alla võnkuma. Koorma asendit mistahes momendil võib väljendada võrrandiga, nimelt, kui täisvõnge toimub $\frac{1}{2}$ sekundiga, suurim nihe on aga 10 cm (tasakaaluasendi suhtes), siis vedru võnkumine väljendub järgmiselt:

$$y = 10\sin 4\pi t,$$

kus y on koorma kõrvalekalle kas üles või alla tema tasakaaluasendist. Seejuures on arvestatud, et vedru on täiesti elastne.

4. Pinge ja voolutugevuse muutumine kõige sagedamini toimub (ligikaudselt) sinusoidaalse seaduse järgi:

$$y = A \sin (\omega t + \alpha). \qquad (1)$$

Nad kasvavad nullist kuni mingi oma kõige suurema väärtuseni A, siis kahanevad nullini ja jälle kasvavad kuni A-ni, kuid teises suunas (avaldis (1) muudab oma märki), peale seda kasvavad jälle nullini jne.

Võrrandid:

$$E = 156 \sin \theta; \; I = 4 \sin \theta; \; W = E \cdot I = 642 \sin^2 \theta,$$

kus $\theta = \frac{2\pi}{T} t + \alpha$, väljendavad vastavalt vahelduvvoolu pinget (elektromotoorset jõudu) E voltides, voolutugevust I amprites ja võimsust W vattides.

Harjutused.

1. Vänt OQ pikkusega 15 cm pöörleb vertikaaltasapinnas kellaosuti liikumise suunale vastupidises suunas kiirusega 120 $\frac{\text{pööret}}{\text{minutis}}$, kusjuures liikumise alguses oli vända ja telje Ox vaheline nurk 55°. Leida punkti Q projektsiooni P liikumine vertikaalsuunas. Aega mõõta sekunditega.

Vastus: $y = 15 \sin (4\pi t + 0{,}96)$.

2. Võttes joonisel 14 OQ võrdseks r-ga ja QA' võrdseks l-ga, leida seos nurkade α ja θ vahel.

Näiteks: $l = 4{,}8$; $r = 1$.

Juhis: Kasutada siinusteoreemi.

3. Võttes joonisel 13 $\alpha = 0°$; 10°; 20°; 30°; 60°; 90°; 120°; 150° ja 180°, leida vastavate nurga θ väärtused ja punkti A' kõrvalekalle s algasendist A, väljendades seda kõrvalekallet täiskäigu sajandikes. Võtta $l = 4{,}8$ ja $r = 1$.

4. Harmooniline võnkumine on antud võrrandiga

$$x = 10 \sin (4t - 0{,}3) \text{ cm},$$

kus t on aeg sekundites.

Leida:

1) võnkumise amplituud;
2) võnkeperiood;

3) esimene moment peale võnkumise algust, millal x väärtus on suurim;

4) esimene moment, millal $x = 45$ cm.

Vastus: 10; $\frac{\pi}{2}$; $\approx 0{,}47$ sek.; $\approx 0{,}086$ sek.

5. Vahelduvvoolu võrgus on voolutugevuse I ja aja t vahel seos

$$I = 3{,}5 \sin 800\, t.$$

Leida voolutugevuse maksimaalne väärtus, perioodide arv sekundis ja algfaas. Ehitada graafik.

Vastus: 3,5; 127; 0.

6. Ehitada võrrandi $y = \sin 256\, \pi t$ graafik.

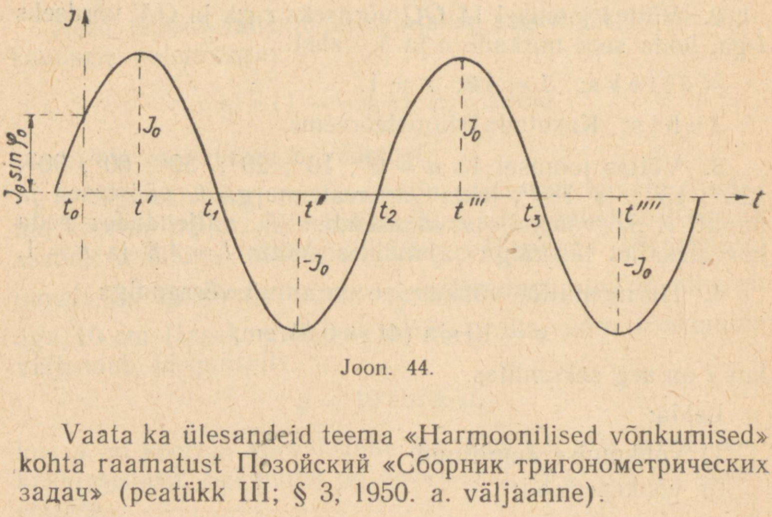
Juhis: Ordinaatteljel võtta ühiku pikkuseks 1 cm, abstsissteljel aga võtta iga $\frac{1}{128}$ sek. kohta 6 cm.

7. Ehitada sinusoidaalse voolu

$$I = I_0 \sin \left(\frac{2\varphi}{T} t + \varphi\right)$$

graafik, kusjuures I_0 on voolutugevuse maksimaalne väärtus, T — periood ja φ — algfaas.

Juhis. Vt. lk. 121 ja joon. 44.



Joon. 44.

Vaata ka ülesandeid teema «Harmoonilised võnkumised» kohta raamatust Позойский «Сборник тригонометрических задач» (peatükk III; § 3, 1950. a. väljaanne).

Osadest 8 ja 9 on esimene sisse toodud ainult selleks, et kasutada teda teises osas tehtavate kokkuvõtete aluseks. Teema «Harmooniliste lihtvõnkumiste liitmine» on lõppetapiks teemale «Harmoonilised lihtvõnkumised»; ta jätab õpilastele võimaluse rakendada vastõpitud liitmisteoreemi tähtsa füüsikalise fakti analüütiliseks tõestuseks.

Kui õpetaja selgitas õpilastele võrrandi $s = A \sin(\omega t + \alpha)$ ja parameetrite A, ω, α füüsikalist mõtet, siis on tal küllaldane alus nendega teema «Harmooniliste lihtvõnkumiste liitmine» käsitlemiseks.

8. Summa ja vahe teisendamine korrutiseks abiargumendi sissetoomise teel.

1. Rõbkin. Tasapinnaline trigonomeetria, § 69.

2. Bermant ja Lüsternick. Trigonomeetria[1], § 67 (Teisendused abiargumendi abil). Esitame selle paragrahvi teksti.

Ülalnimetatud liiki teisenduste näitena vaatleme avaldise $a \sin \alpha + b \cos \alpha$ teisendamist logaritmitavaks. Me valime niisuguse argumendi φ ja niisuguse positiivse kordaja ρ, et kehtiksid võrdused:

$$\rho \cos \varphi = a\,; \quad \rho \sin \varphi = b.$$

Niisuguste ρ ja φ leidmiseks tõstame mõlemad avaldised ruutu ja liidame. Saame:

$$\rho^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = a^2 + b^2, \text{ s. o. } \rho^2 = a^2 + b^2,$$

kust leiame, et

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Seega

$$\cos \varphi = \frac{a}{\rho} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\,; \quad \sin \varphi = \frac{b}{\rho} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Nendest võrdustest võib leida abiargumendi φ.

Järelikult

$$a \sin \alpha + b \cos \alpha = \rho \cos \varphi \sin \alpha + \rho \sin \varphi \cos \alpha = \rho \sin (\alpha + \varphi).$$

---

[1] Бермант и Люстерник. «Тригонометрия».

*9. Harmooniliste lihtvõnkumiste liitmine.

Kui panna helisema kammertoon, mis annab alumise «do», siis kammertooni harude vabad otsad teevad 128 täisvõnget (edasi ja tagasi) sekundis. Kui harude otste külge kinnitada teravikud ja vedada siis võnkuvatest otstest üle tahmatud paberit jääva kiirusega, siis joonistavad teravikud paberile sinusoidaalse kõvera.

Kui ühes sekundis tehakse 50 täisvõnget, siis võnkeperiood on $\frac{1}{50}$ sekundit, võnkesagedus on $50 \cdot 2\pi$.

Kui kammertooni haru üheaegselt võnkumisega oma liikumatu otsa ümber võngub veel haru keskkoha ümber, siis annab ta põhitooni kõrval veel oma esimese ülemtooni. Helisevad keeled samuti võtavad osa üheaegselt mitmesugustest võnkumistest, andes ülemtoone ja teisi hääli. Neil juhtudel kammertooni või keele juures toimub võnkumine, mis kujutab endast kahe või mitme üheaegse harmoonilise lihtvõnkumise resultaati.

Pole raske veenduda selles, et kui punkt, millele mõjub kaks mingisugust jõudu peab üheaegselt osa võtma kahest ü h e j a s a m a sagedusega ω harmoonilisest lihtvõnkumisest, siis selle resultaadina tekib harmooniline lihtvõnkumine sama sagedusega ω.

Seda võib tõestada järgmiste lihtsate arvutustega:

$$s = A_1 \sin(\omega t + \alpha_1) + A_2 \sin(\omega t + \alpha_2) = A_1 \sin \omega t \cos \alpha_1 +$$
$$+ A_1 \cos \omega t \sin \alpha_1 + A_2 \sin \omega t \cos \alpha_2 + A_2 \cos \omega t \sin \alpha_2 =$$
$$= (A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2) \sin \omega t + (A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2) \cos \omega t =$$
$$= a \sin \omega t + b \cos \omega t,$$

kus

$$a = A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2; \quad b = A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2.$$

Seega

$$s = a \sin \omega t + b \cos \omega t.$$

Me saime avalduse, mida me võime abinurga φ sissetoomise teel avaldada kujul (vt. § 5 osa 7 punkti 2).

$$s = A \sin(\omega t + \varphi),$$

kus

$$A = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \cos \varphi = \frac{a}{A}, \quad \sin \varphi = \frac{b}{A}.$$

Seega vaadeldav punkt võngub tõesti harmooniliselt, temal on sama võnkesagedus ω, amplituud A ja algfaas φ. [1]

N ä i d e.

Kaks vahelduvvoolu tugevust

$$I_1 = I_0 \sin(\omega t + \varphi_1) = I_2 = I_0 \sin(\omega t + \varphi_2), \qquad (1)$$

mis erinevad teineteisest ainult faaside poolest, nimetatakse «faasilt nihkunud» vooludeks. Kui kahte või mitut vahelduvvoolu antakse edasi ühte ja sama juhti mööda, siis igal momendil üksikute voolude tugevused liituvad ning annavad selle tulemusena nn. «summaarse» voolu vastavad väärtused.

Teostades harmooniliste lihtvõnkumiste (1) liitmise, leiame me, et nende summa väljendub võrrandiga

$$I = 2 I_0 \cos \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \sin\left(\omega t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right).$$

Siit teeme järelduse, et summaarne vool on samuti sinusoidaalne ja sama perioodiga, kuid uue amplituudiga I'_0, mis on võrdne avaldisega

$$2 I_0 \cos \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2},$$

ja uue faasiga φ, mis on võrdne avaldisega

$$\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}.$$

Kui $\cos \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} = 0$, s. o. kui $\varphi_1 - \varphi_2 = \pi$, siis amplituud I'_0 saab nulliks, s. o. vool kaob.

J u h i s. Voolutugevuste I_1 ja I_2 liitmise peavad teostama õpilased.

H a r j u t u s. Leida voolu võrrand, mis on saadud voolude

$$I_1 = I_0 \sin(\omega t + \varphi_1);\ I_2 = I_0 \sin\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{2\pi}{3}\right);$$

$$I_0 = I_0 \sin\left(\omega t + \omega_0 + \frac{4\pi}{3}\right)$$

[1] Бермант и Люстерник «Тригонометрия» 3. väljaanne § 68.

liitmisel, kui nende faasid erinevad üksteisest $\frac{2\pi}{3}$ võrra. (Faaside niisuguse paigutuse korral nimetatakse summaarset voolu kolmefaasiliseks vooluks.)

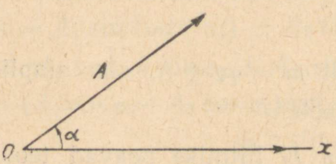
V a s t u s: $I_1 + I_2 + I_0 = 0$.

Nüüd esitame harmooniliste lihtvõnkumiste geomeetrilise liitmise võtte.

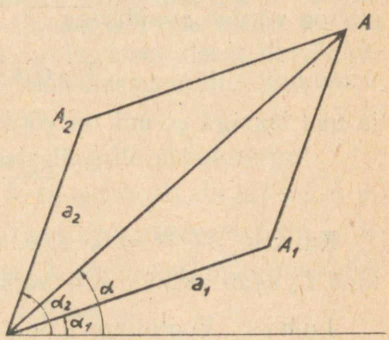
Kui vaadeldakse ühe ja sama sagedusega ω harmoonilisi lihtvõnkumisi, siis on nende täielikuks kindlaksmääramiseks küllalt, kui teada nende amplituude A ja algfaasi α. Sellega seoses võrrandiga

$$s = A \sin (\omega t + \alpha)$$

määratud harmoonilist võnkumist iseloomustab harilikult vektor pikkusega A ja algusega punktis O, ning mis moodustab x-teljega nurga α (joon. 16). Arusaamatuste ära-



Joon. 45.



Joon. 46.

hoidmiseks juhime tähelepanu sellele, et siin m u u t u v a t suurust s, mis on seotud ajaga t, kujutatakse tingivalt j ä ä v a vektoriga, mis esitab ainult amplituudi ja algfaasi (sagedus esitatakse varem kindlaksmääratuna).

Nüüd, pidades silmas edaspidist, lahendame järgmise ülesande, millel on ka iseseisev väärtus.

Ülesanne. Punkti O, mis asub x-teljel, on rakendatud vektor OA_1 pikkusega a_1, mis moodustab x-teljega nurga α

ja vektor OA_2 pikkusega a_2, mis moodustab x-teljega nurga α_2.

Leida vektori OA pikkus, mis kujutab endast vektorite OA_1 ja OA_2 summat (joon. 17).

L a h e n d u s. Kolmnurgast OA_1A (koosinusteoreemi alusel) leiame:

$$\overline{OA^2} = \overline{OA_1}^2 + A_1A^2 - 2\,\overline{OA_1}\cdot\overline{A_1A}\cos \angle OA_1A =$$
$$= \overline{OA_1}^2 + \overline{OA_2}^2 - 2\,\overline{OA_1}\,.\,\overline{OA_2}\,\cos\,(180^\circ - \angle A_2OA_1) =$$
$$= a_1^2 + a_2^2 + 2\,a_1a_2\cos(\alpha_2 - \alpha_1). \qquad (1)$$

Kasutame seda järeldust harmooniliste lihtvõnkumiste geomeetriliseks liitmiseks.

Kui harmoonilised võnkumised $s_1 = A_1 \sin(\omega t + \alpha_1)$ ja $s_2 = A_2 \sin(\omega t + \alpha_2)$ liituvad, siis, nagu näidatud lk. 132, nende summaks on harmooniline võnkumine

$$s = A \sin(\omega t + \varphi),$$

kus

$$A = \sqrt{(A_1\cos\alpha_1 + A_2\cos\alpha_2)^2 + (A_1\sin\alpha_1 + A_2\sin\alpha_2)^2} =$$
$$= \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2\,A_1A_2\cos(\alpha_2 - \alpha_1)}. \qquad (2)$$

Võrreldes valemit (2) valemiga (1), mis saadi ülaltoodud ülesande lahendamisel, näeme, et vektor A, mis kujutab endast võnkumiste summat, on leitud vektorite A_1 ja A_2 liitmisel parallelogrammi reegli järgi, kusjuures vektorite ja x-telje vahelised nurgad α_1 ja α_2 on vastavalt võrdsed võnkumiste faasidega s_1 ja s_2.

Mis aga puutub nurka α, mis jääb x-telje ja resultantvektori A vahele, siis võib tõestada (vt. Бермант и Люстерник «Тригонометрия» § 65), et ta on täpselt võrdne resultantvõnkumise algfaasiga, mille me leidsime analüütilisel teel (lk. 132.).

TRIGONOMEETRILISED VÕRRANDID.

Nendel juhtudel, kui trigonomeetrilised võrrandid muutuvad kolmanda või neljanda astme algebralisteks võrranditeks, mis ei ole elementaarmatemaatika võtetega lahendatavad, õnnestub kergesti lahendada neid trigonomeetrilisi võrrandeid mitte algebralise, vaid g r a a f i l i s e m e e t o d i g a.

10. Trigonomeetriliste võrrandite graafiline lahendamine.

N ä i d e 1.

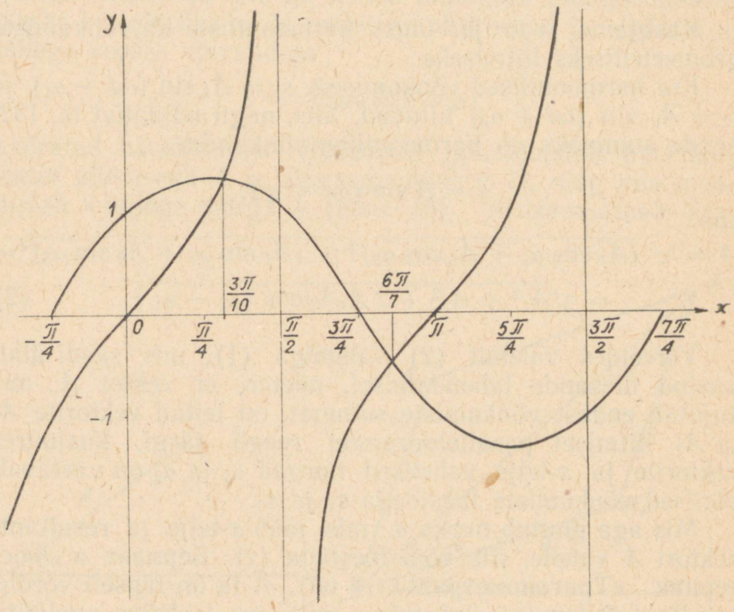
Lahenda võrrand: $\sin x + \cos x = \tan x$.

L a h e n d u s.

1) Teisendame võrrandi vasakut poolt:

$$\sin x + \cos x = \sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) =$$

$$= 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$



Joon. 47.

2) On näha, et funktsioonide $\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ ja $\tan x$ ühine periood on 2π.

3) Ehitame vahemikus $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right]$, mille pikkus on võrdne perioodiga 2π, võrrandite

$$y = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \text{ ja } y = \tan x$$

graafikud (joon. 18).

4) Graafikud näitavad, et vahemikus $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right]$ võrrandil on 2 juurt: x_1 ja x_2, kusjuures

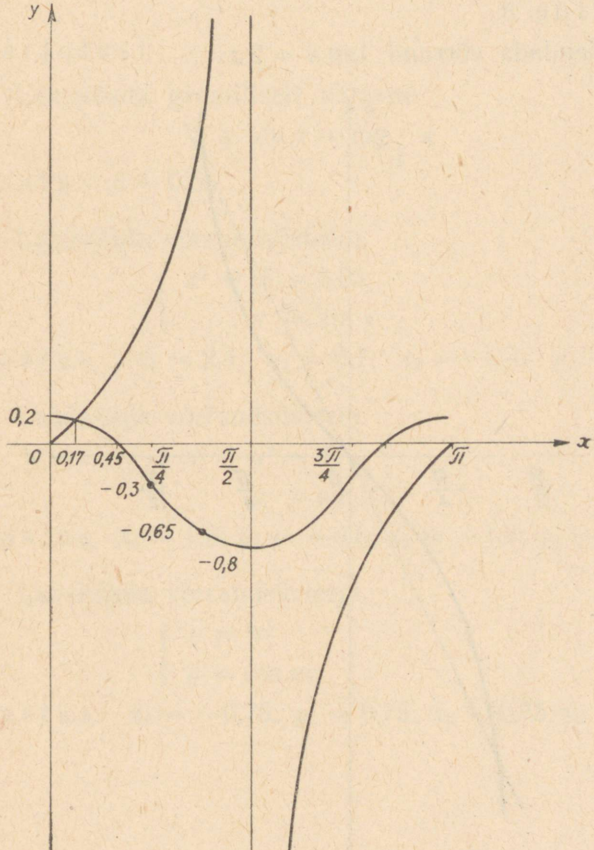
$$\frac{\pi}{4} < x_1 < \frac{\pi}{2} \text{ ja } \frac{3\pi}{4} < x_2 < \pi.$$

Ligikaudu $x_1 = 54°20'$; $x_2 = 154°30'$.

N ä i d e 2.

Lahendada võrrand

$$\tan x - \cos^2 x + 0{,}8 = 0.$$



Joon. 48.

Lahendus.

1) Korraldame võrrandit: $\tan x = \cos^2 x - 0{,}8$.

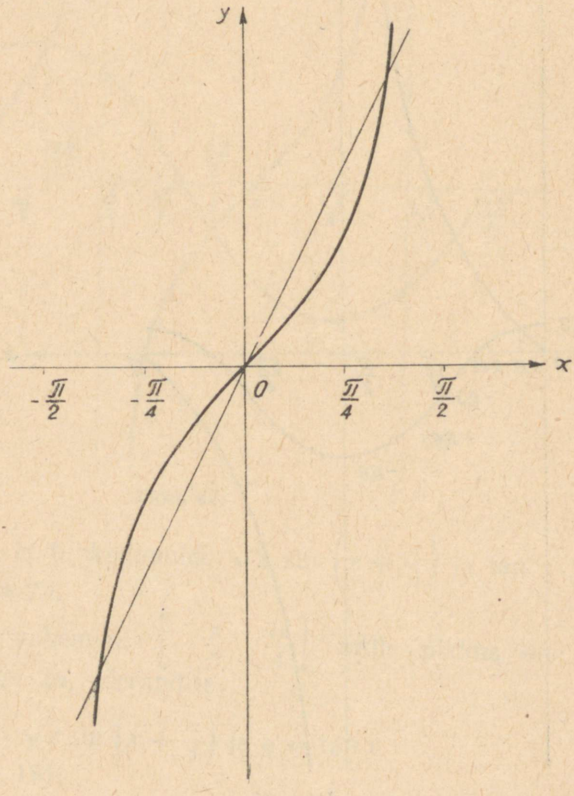
2) Funktsioonide $\tan x$ ja $\cos^2 x - 0{,}8$ ühine periood on π.

3) Ehitame funktsioonide $y = \tan x$ ja $y = \cos^2 x - 0{,}8$ graafikud vahemikus $[0, \pi]$ (joon. 48).

4) Graafikult on näha, et vahemikus $[0, \pi]$ graafikud lõikuvad punktis, mille abstsiss x_1 langeb vahemikku $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. Ligikaudu $x_1 = 0{,}17$ radiaani $= 9°40'$.

Näide 3.

Lahendada võrrand $\tan x = 2x$.



Joon. 49.

L a h e n d u s: Ehitades funktsiooni $y = \tan x$ graafiku vahemikus $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ja funktsiooni $y = 2x$ graafiku (joon. 49), näeme, et need graafikud lõikuvad punktis [0, 0] ja ligikaudselt punktides [–1, 2; –2, 4] ja [1, 2; 2, 4].

Teisi ühiseid punkte neil graafikutel ei ole, sest tangenskõver jääb punktidest $-\frac{\pi}{2}$ ja $\frac{\pi}{2}$ y-teljega paralleelselt tõmmatud sirgete vahele, sirge $y = 2x$ lõikab neid sirgeid punktides $\left[-\frac{\pi}{2}; -\pi\right]$ ja $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ ning siis väljub nende vahelt.

H a r j u t u s i.

1. Lahendada graafiliselt võrrand

$$x + \sin x = \log_{\frac{1}{2}} x$$

V a s t u s: $x \approx 0{,}5$.

2. Lahendada võrrandsüsteem:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 6{,}25 \\ y = \sin x \end{cases}$$

V a s t u s: $x_1 = 2{,}4$; $y_1 = 0{,}7$; $x_2 = -2{,}4$; $y_2 = -0{,}7$.

3. Lahendada võrrandsüsteem:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = \sin 2x \end{cases}$$

V a s t u s: $x_1 = 1{,}9$; $y_1 = -0{,}6$; $x_2 = -1{,}9$; $y_2 = 0{,}6$.

4. Lahendada võrrandsüsteem

$$\begin{cases} y = |x| \\ y = \cos x \end{cases}$$

V a s t u s: $x_1 = -0{,}75$; $y_1 = 0{,}75$; $x_2 = 0{,}75$; $y_2 = 0{,}75$.

11. Täisnurksete kolmnurkade lahendamine (VIII ja IX kl. kursuses).

Suure arvu praktilise sisuga ülesandeid, mis kuuluvad sellesse osasse, sisaldab Rõbkini «Trigonomeetriliste ülesannete kogu» (§ 6, 15 a — 22), aga ka teos Позойский «Сборник задач по тригонометрий» (pt. I § 1; pt. VI § 2).

Puhtgeomeetrilise sisuga ülesanded peaksid kuuluma geomeetria harjutuste juurde, mida käsitletakse VIII—X klassides. Teisi polütehnilise sisuga ülesandeid, mis on teostatavad täisnurkse kolmnurga lahendamisega, vaadeldakse VIII ja IX klasside trigonomeetria kursuse selles osas.

12. Kaldnurksete kolmnurkade lahendamine X klassis.

Pärast selle osa teooria ja Rõbkini «Tasapinnalise trigonomeetria» XI peatüki (Mõõtmistest maastikul) õppimist lahendatakse ülesanded nr. 2—5, 8, 21, 26, 29, 30 Rõbkini «Trigonomeetria ülesannete kogu» § 7-st.

Täiendavalt võib kasutada: Бермант и Люстерник «Тригонометрия» 3. väljaanne § 92 (Pikkuste ja nurkade mõõtmine maastikul).

Позойский. «Сборник задач по тригонометрии» pt. VI § 3 ülesanded 74, 77, 90—93, 123, 155—158.

Puhtgeomeetrilise sisuga ülesanded, mis leiduvad mõlema teose nimetatud paragrahvides, peaksid kuuluma VIII—X kl. käsitletavasse geomeetria kursusesse.

SISUKORD.

Toimetaja G. Külaots.
Tehniline toimetaja H. Kohu.
Korrektorid A. Kiho ja R. Eliste.

Ladumisele antud 21. XI 1953. Trükkimisele antud 16. II 1954. Trükiarv 2000. Paber 54×84, $^1/_{16}$. Trükipoognaid 8,25. Formaadile 60×92 kohaldatud trükipoognaid 6,76. Arvutuspoognaid 6,64. MB-00562. Trükikoda „Pioneer", Tartu, Kastani 38. Tellimise nr. 2652.

На эстонском языке.

Hind rbl. 1.80

6—5

Trükivigu

Lk.	Rida	On trükitud	Peab olema
12	1. ülalt	12	11
17	2. „	*neid nulle*	*peale nullide*
50	2. alt	49	46
62	3. ülalt	piltidel	piltidel,

Vead on tekkinud toimetaja süü tõttu.

Rbl. 1.80