Tartu Ülikool
Loodus- ja täppisteaduste valdkond
Matemaatika ja statistika instituut

Triinu Veeorg

Delta- ja Daugaveti-punktid Banachi ruumide otsesummades

Matemaatika eriala
Bakalaureusetöö (9 EAP)

Juhendajad: Rainis Haller
Katriin Pirk

Tartu 2019

Delta- ja Daugaveti-punktid Banachi ruumide otsesummades
Bakalaureusetöö
Triinu Veeorg

Lühikokkuvõte. Bakalaurusetöös selgitatakse välja Banachi ruumide summaruumide ja nende liidetavate nii Daugaveti-punktide kui Δ-punktide olemasolu vaheline seos ning nende punktide kuju summaruumides. Töö on terviklik teoreetiline uurimus, mis jätkab ja täiendab T. A. Abrahamseni, R. Halleri, V. Lima ja K. Pirki ühisartikli *„Delta- and Daugavet-points in Banach spaces“* (arXiv:1812.02450 [math.FA]) tulemusi ning annab vastuse kahele seal püstitatud küsimusele.

Märksõnad: Banachi ruum, viil, Daugaveti omadus, Daugaveti-punkt, Δ-punkt
CERCS teaduseriala: P140 Jadad, Fourier analüüs, funktsionaalanalüüs

Delta- and Daugavet-points in direct sums of Banach spaces
Bachelor's thesis
Triinu Veeorg

Abstract. In this Bachelor's thesis we clarify the relation between the existence of Daugavet-points/Δ-points in Banach spaces and the existence of such points in the direct sum of these Banach spaces as well as the shape of these points. The theses is a complete theoretical study that complements the preliminary stability results of the article *„Delta- and Daugavet-points in Banach spaces“* (arXiv:1812.02450 [math.FA]) by T. A. Abrahamsen, R. Haller, V. Lima ja K. Pirk and gives an answer to two problems raised in that article.

Key words: Banach space, slice, Daugavet property, Daugavet-point, Δ-point
CERCS research specialisation: P140 Series, Fourier analysis, functional analysis

Sisukord

Sissejuhatus

Käesolev bakalaureusetöö on Banachi ruumide geomeetria alane teoreetiline uurimus funktsionaalanalüüsi valdkonnast. Bakalaurusetöös selgitatakse välja Banachi ruumide summaruumide ja nende liidetavate nii Daugaveti-punktide kui Δ-punktide olemasolu vaheline seos ning nende punktide kuju summaruumides. Tegemist on värske suunaga diameeter-2 omaduste valdkonnas, Daugaveti- ja Δ-punkti mõiste toodi sisse hiljuti artiklis [1]. Selle uurimissuuna lähtepunktiks võib pidada D. Werneri 2001. aastal ilmunud artiklit [7], kus anti tuntud Daugaveti omadusele kirjeldus viilude keeles.

Artiklis [1] näidati, et Daugaveti- ja Δ-punkti mõisted erinevad üksteisest, kuigi iga Daugaveti-punkt on ilmselt ka Δ-punkt, siis leidub Δ-punkte, mis ei ole Daugaveti-punktid. Selle tulemuseni jõuti, uurides Daugaveti- ja Δ-punktide olemasolu summaruumides. Artiklis [1] anti piisavad tingimused selleks, et summaruumides leiduks Daugaveti- ja Δ-punkte. Täpsemalt, näidati et Banachi ruumide X ja Y korral kehtivad järgmised väited.

- Kui x ja y on Δ-punktid vastavalt Banachi ruumides X ja Y, siis (ax, by) on Δ-punkt otsesummas $X \oplus Y$ absoluutse normaliseeritud normiga $\|\cdot\|$, kus $\|(ax, by)\| = 1$.
- Kui x ja y on Daugaveti-punktid vastavalt Banachi ruumides X ja Y, siis (ax, by) on Daugaveti-punkt otsesummas $X \oplus Y$ positiivselt oktaeedrilise normiga $\|\cdot\|$, kus (a, b) on määratud positiivse oktaeedrilisuse mõistega.
- Kui otsesumma $X \oplus Y$ normil on teatud omadus (α), siis otsesummal $X \oplus Y$ ei ole ühtegi Daugaveti-punkti.

Artiklis [1] tekkisid järgmised küsimused Daugaveti- ja Δ-punktide kohta, mis jäid vastuseta.

- Kas summaruumi komponentruumides leidub Daugaveti-punkte/Δ-punkte, kui sellel otsesummal leidub Daugaveti-punkte/Δ-punkte?
- Otsesummal leidub absoluutseid normaliseeritud norme, mis ei ole positiivselt oktaeedrilised ega omadusega (α). Kas sellise normiga otsesummal leidub Daugaveti-punkte?
- Kas summaruumis leidub Daugaveti-punkte, kui vaid ühes komponentruumidest leidub Daugaveti-punkte?

Bakalaureusetöö eesmärk oli anda nendele küsimustele vastus.

Töö põhiosa on jaotatud kolmeks peatükiks. Esimeses peatükis toome sisse vajalikud põhimõisted ja olulised abitulemused. Näiteks anname Daugaveti- ja Δ-punktide kriteeriumid viilude keeles, mida edaspidi sageli rakendame.

Teises peatükis anname Daugaveti-punktide kohta käivad tulemused. Esitame artiklis [1] saadud teoreemid ning täiendame neid. Esimeses alapunktis näitame, et Daugaveti-punkti leidumisest mõlemas Banachi ruumis järeldub Daugaveti-punkti leidumine nende summaruumis kõikide omadust (α) mitterahuldavate normide korral. Lisaks selgitame, milliseid tingimusi peab norm rahuldama, et Daugaveti-punkti leidumisest ühes Banachi ruumis järelduks Daugaveti-punkti leidumine summaruumis. Peatüki teises alapunktis anname täieliku ülevaate Banachi ruumides Daugaveti-punktide leidumise kohta nende summaruumide Daugaveti-punktide abil. Ühtlasi näitame, et kui summaruumis leidub Daugaveti-punkte, siis vähemalt ühes komponentruumis leidub Daugaveti-punkte.

Kolmandas peatükis uurime Δ-punkte. Esimeses alapunktis näitame, et Δ-punktid päranduvad komponentruumidelt summaruumidesse iga absoluutse normaliseeritud normi korral. See tulemus on tõestuseta antud artiklis [1]. Peatüki teises alapunktis selgitame Δ-punktide olemasolu komponentruumides, kui summaruumis leidub Δ-punkte. Näitame, et kui summaruumi norm erineb ∞-normist ja summaruumis leidub Δ-punkte, siis vähemalt ühes komponentruumis leidub Δ-punkte. Meie algne hüpotees oli, et analoogiline väide kehtib ka ∞-normi korral, kusjuures, kui (x, y) on Δ-punkt, siis ka x või y on Δ-punkt, kuid leidsime hoopis kontranäite Δ-punktist ∞-normiga summaruumis, mille kumbki komponent ei ole Δ-punkt.

Bakalaureusetöös vaatleme ainult mittetriviaalseid reaalseid Banachi ruume. Kasutame Banachi ruumide teooria tavalisi tähistusi. Banachi ruumi X puhul tähistame tema kinnist ühikkera sümboliga B_X, ühiksfääri sümboliga S_X ning kaasruumi sümboliga X^*.

1 Vajalikud eelteadmised

Selles peatükis toome sisse vajalikud mõisted ning abitulemused.

Definitsioon 1.1. Olgu N norm vektorruumil $\mathbb{R}^2$. Öeldakse, et norm N on **absoluutne**, kui $N(a,b) = N(|a|,|b|)$ iga $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ korral. Öeldakse, et norm N on **normaliseeritud**, kui $N(1,0) = N(0,1) = 1$.

Näide 1.2. Iga $p \geq 1$ korral on vektorruumi $\mathbb{R}^2$ p**-norm**

$$\|(a,b)\| = \begin{cases} (|a|^p + |b|^p)^{1/p}, & \text{kui } p < \infty, \\ \max\{|a|,|b|\}, & \text{kui } p = \infty, \end{cases}$$

absoluutne ja normaliseeritud.

Kui X ja Y on Banachi ruumid ning N absoluutne normaliseeritud norm vektorruumil $\mathbb{R}^2$, siis otsesummat $X \oplus Y$ koos normiga

$$\|(x,y)\|_N = N(\|x\|,\|y\|)$$

tähistame $X \oplus_N Y$.

Kui N on p-norm mingi $p \geq 1$ korral, siis kirjutame $\|\cdot\|_N$ asemel $\|\cdot\|_p$ ja $X \oplus_N Y$ asemel $X \oplus_p Y$.

Toome välja olulisemad absoluutsete normaliseeritud normide omadused.

Lause 1.3 (vt [2, lk 36, lemmad 1 ja 2], [3, lk. 317])**.** *Olgu X ja Y Banachi ruumid ning N absoluutne normaliseeritud norm vektorruumil $\mathbb{R}^2$. Kehtivad järgmised väited.*

- *$X \oplus_N Y$ on Banachi ruum, kusjuures iga $(x,y) \in X \oplus_N Y$ korral*

$$\max\{\|x\|,\|y\|\} = \|(x,y)\|_\infty \leq \|(x,y)\|_N \leq \|(x,y)\|_1 = \|x\| + \|y\|.$$

- *Kui $x_1, x_2 \in X$ ja $y_1, y_2 \in Y$ on sellised, et $\|x_1\| \leq \|x_2\|$ ja $\|y_1\| \leq \|y_2\|$, siis*

$$\|(x_1,y_1)\|_N \leq \|(x_2,y_2)\|_N.$$

- *Vektorruumi $\mathbb{R}^2$ teatud absoluutse normaliseeritud normi N^* korral $(X \oplus_N Y)^* = X^* \oplus_{N^*} Y^*$, kusjuures iga $(x^*,y^*) \in X^* \oplus_{N^*} Y^*$ puhul*

$$\|(x^*,y^*)\|_{N^*} = \max_{N(a,b)\leq 1} (|a|\|x^*\| + |b|\|y^*\|)$$

ja iga $(x,y) \in X \oplus_N Y$ korral

$$(x^*,y^*)(x,y) = x^*(x) + y^*(y).$$

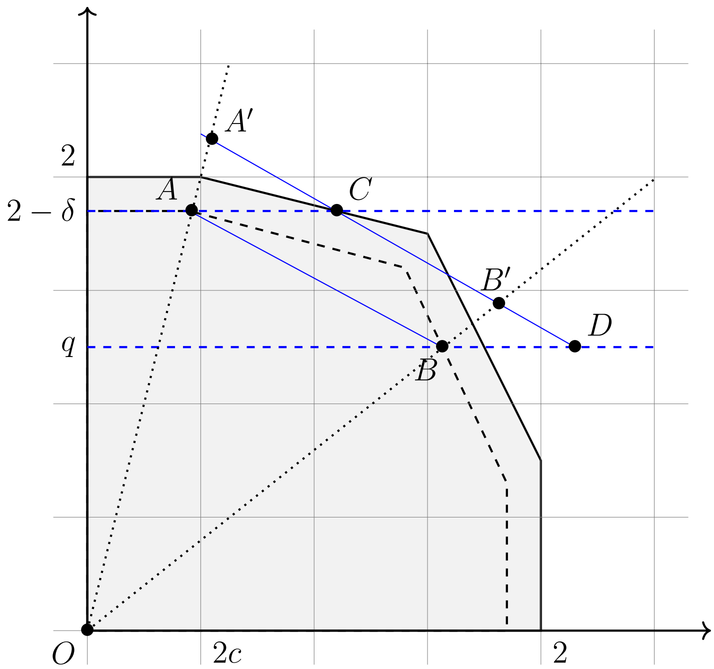
On teada, et $N = N^{**}$.

Märkus 1.4. Kui N on ∞-norm, siis N^* on 1-norm ja vastupidi, kui N on 1-norm, siis N^* on ∞-norm.

Lemma 1.5. *Olgu N absoluutne normaliseeritud norm vektorruumis $\mathbb{R}^2$. Iga $\varepsilon > 0$ jaoks leidub $\delta > 0$ nii, et iga $p, q, r \geq 0$ korral, kui*

$$2 - \delta \leq N(p,q) \leq N(r,q) \leq 2 \quad \textit{ja} \quad q < 2 - \delta,$$

siis $|p - r| < \varepsilon$.



Joonis 1: Lemma 1.5 tõestuse abijoonis.

Lemma 1.5 tõestus. Tähistame $c = \max_{N(s,1)=1} s$. Fikseerime $\varepsilon \in (0, 2)$. Iga $k \in [0, 2]$ korral olgu $s_k \geq 0$ selline, et $N(s_k, k) = 2$. Valime $t \in [0, 2)$ nii, et $|ct - s_t| = \varepsilon$. Olgu $\delta = 2 - t$. Eeldame, et mingite $p, q, r \geq 0$ jaoks on rahuldatud võrratused

$$2 - \delta \leq N(p,q) \leq N(r,q) \leq 2 \quad \text{ja} \quad q < 2 - \delta.$$

Olgu $a > 0$ selline, et $N(a, q) = 2 - \delta$. Tähistame $O = (0, 0)$, $A = (2c - \delta c, 2 - \delta)$, $B = (a, q)$, $C = (2c - \delta c + \varepsilon, 2 - \delta)$ ning $D = (a + \varepsilon, q)$. Ilmselt sirged AB ja CD on paralleelsed. Olgu A' kiire OA lõikepunkt sirgega CD

ning B' kiire OB lõikepunkt sirgega CD. Siis punktides A' ja B' on normid võrdsed, sest punktides A ja B on normid võrdsed. Samas kuna $q < 2 - \delta$, siis normi kumeruse tõttu (sirgel $A'B'$) saame, et punkti D norm ei saa olla väiksem kui punkti C norm ehk

$$N(a + \varepsilon, q) \geq N(2c - \delta c + \varepsilon, 2 - \delta) = 2.$$

Nüüd saame

$$N(a, q) = 2 - \delta \leq N(p, q) \leq N(r, q) \leq 2 \leq N(a + \varepsilon, q)$$

ning $q < 2 - \delta$ tõttu saame $a \leq p \leq r \leq a + \varepsilon$, millest järeldub

$$|p - r| < \varepsilon.$$

□

Daugaveti- ja Δ-punktide defineerimiseks on tarvis teada kumera katte mõistet.

Definitsioon 1.6. Banachi ruumi X osahulga A **kumeraks katteks** nimetatakse hulka

$$\operatorname{conv} A = \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \colon n \in \mathbb{N}, x_1, \dots, x_n \in A, \lambda_1, \dots, \lambda_n > 0, \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1\}.$$

Hulga A **kinnine kumer kate** $\overline{\operatorname{conv}}\, A$ on hulga A kumera katte sulund.

Järgnevalt toome sisse Daugaveti omaduse mõiste. See omadus on tuntud ja küllaltki hästi uuritud. Märgime, et antav definitsioon ei ole Daugaveti omaduse tavaline definitsioon, kuid on sellega samaväärne ja esitatud kujul aitab motiveerida bakalaureusetöö põhimõisteid (Daugaveti-punkt ja Δ-punkt).

Definitsioon 1.7 (vt [7, järeldus 2.3])**.** Banachi ruumil X on **Daugaveti omadus**, kui $B_X = \overline{\operatorname{conv}}\, \Delta_\varepsilon(x)$ iga $x \in S_X$ ja iga $\varepsilon > 0$ korral, kus

$$\Delta_\varepsilon(x) = \{y \in B_X \colon \|x - y\| \geq 2 - \varepsilon\}.$$

Definitsioon 1.8 (vt [1, lk 1–2])**.** Banachi ruumi X ühiksfääri S_X punkti x nimetatakse **Daugaveti-punktiks**, kui iga $\varepsilon > 0$ korral $B_X = \overline{\operatorname{conv}}\, \Delta_\varepsilon(x)$.

Banachi ruumi X ühiksfääri S_X punkti x nimetatakse **Δ-punktiks**, kui iga $\varepsilon > 0$ korral $x \in \overline{\operatorname{conv}}\, \Delta_\varepsilon(x)$.

Märkus 1.9. Pole raske näidata, et Daugaveti- ja Δ-punktide mõisted jäävad samaks, kui $\Delta_\varepsilon(x) = \{y \in S_X \colon \|x - y\| \geq 2 - \varepsilon\}$.

Kui Banachi ruumil on Daugaveti omadus, siis ilmselt kõik tema ühiksfääri punktid on Daugaveti-punktid.

Näide 1.10. Klassikalistel Banachi ruumidel $C[0,1]$ ja $L_1[0,1]$ on Daugaveti omadus (vt [7]), seega nendes Banachi ruumides on kõik ühiksfääri punktid Daugaveti-punktid.

Lihtne on näha, et iga Daugaveti-punkt on ka Δ-punkt. Vastupidi üldiselt ei kehti ehk suvaline Δ-punkt ei tarvitse olla Daugaveti-punkt, vt [1, näide 4.7].

Enamik selle bakalaureusetöö tõestustest kasutavad Daugaveti- või Δ-punkti kirteeriumit viilude keeles. Nende kriteeriumite sissetoomiseks ja põhjendamiseks vajame viilu mõistet ja Hahn–Banachi eraldamisteoreemi.

Definitsioon 1.11. Olgu X Banachi ruum. Ühikkera B_X **viiludeks** nimetatakse hulki

$$S(B_X, x^*, \alpha) = \{y \in B_X : x^*(y) > 1 - \alpha\},$$

kus $x^* \in X^*$ ja $\alpha > 0$.

Teoreem 1.12 (Hahn–Banachi eraldamisteoreem, vt näiteks [6, teoreem 3.4])**.** *Olgu X Banachi ruum ning $A \subset X$ ja $B \subset X$ lõikumatud, kumerad ning kinnised, kusjuures B kompaktne. Leiduvad $x^* \in X^*$ ja $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ nii, et iga $a \in A$ ja $b \in B$ korral*

$$x^*(a) < \alpha < \beta < x^*(b).$$

Lause 1.13 (vt [1, lemma 2.2])**.** *Olgu X Banachi ruum ja $x \in S_X$. Element x on Daugaveti-punkt parajasti siis, kui iga viilu $S(B_X, x^*, \alpha)$ ja iga $\varepsilon > 0$ korral leidub selline $y \in S(B_X, x^*, \alpha)$, et $\|x - y\| \geq 2 - \varepsilon$, st*

$$S(B_X, x^*, \alpha) \cap \Delta_\varepsilon(x) \neq \varnothing.$$

Tõestus. ($\Rightarrow$). Eeldame, et $x \in S_X$ on Daugaveti-punkt. Oletame vastuväiteliselt, et leiduvad viil $S(B_X, x^*, \alpha)$ ja $\varepsilon > 0$ nii, et

$$S(B_X, x^*, \alpha) \cap \Delta_\varepsilon(x) = \varnothing.$$

Eelduse kohaselt $S(B_X, x^*, \alpha) \subset \overline{\mathrm{conv}}\, \Delta_\varepsilon(x)$. Fikseerime vabalt $y \in S(B_X, x^*, \alpha)$ ja $\delta > 0$ nii, et $1 - \alpha < x^*(y) - \delta$. Kuna $y \in \overline{\mathrm{conv}}\, \Delta_\varepsilon(x)$, siis leiduvad $y_1, \ldots, y_n \in \Delta_\varepsilon(x)$ ja $\lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$ nii, et $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$ ja

$$\|y - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i\| < \delta.$$

Kuna

$$x^*(y) - \sum_{i=1}^n \lambda_i x^*(y_i) = x^*\Big(y - \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i\Big) \leq \|x^*\| \Big\|y - \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i\Big\| < \delta,$$

siis

$$1 - \alpha < x^*(y) - \delta < \sum_{i=1}^n \lambda_i x^*(y_i) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i (1-\alpha) = 1 - \alpha.$$

Saime $1 - \alpha < 1 - \alpha$, mis on ilmne vastuolu.

($\Leftarrow$). Eeldame, et iga ühkkera B_X viilu $S(B_X, x^*, \alpha)$ ja iga $\varepsilon > 0$ korral leidub selline $y \in S(B_X, x^*, \alpha)$, et $\|x - y\| \geq 2 - \varepsilon$ st $S(B_X, x^*, \alpha) \cap \Delta_\varepsilon(x) \neq \emptyset$. Oletame vastuväiteliselt, et x ei ole Daugaveti-punkt. Siis leidub $y \in S_X \setminus \overline{\mathrm{conv}}\, \Delta_\varepsilon(x)$. Ilmselt on hulgad $A = \overline{\mathrm{conv}}\, \Delta_\varepsilon(x)$ ja $B = \{y\}$ lõikumatud, kumerad ja kinnised ning lisaks on hulk B kompaktne. Seega saame rakendada Hahn–Banachi eraldamisteoreemi (teoreem 1.12), mille kohaselt leiduvad sellised $x^* \in S_{X^*}$ ja $\beta \in \mathbb{R}$, et iga $a \in A$ korral

$$x^*(a) < \beta < x^*(y) \leq \|x^*\| \|y\| = 1.$$

Seega $S(B_X, x^*, 1 - \beta) \cap \overline{\mathrm{conv}}\, \Delta_\varepsilon(x) = \varnothing$, mis on aga vastuolus eeldusega. Järelikult x on Daugaveti-punkt. $\square$

Lausega 1.13 sarnase kriteeriumi Δ-punktide kohta saab tõestada analoogiliselt.

Lause 1.14 (vt [1, lemma 2.1]). *Olgu X Banachi ruum ja $x \in S_X$. Element x on Δ-punkt parajasti siis, kui iga punkti x sisaldava viilu $S(B_X, x^*, \alpha)$ ja iga $\varepsilon > 0$ korral leidub selline $y \in S(B_X, x^*, \alpha)$, et $\|x - y\| \geq 2 - \varepsilon$, st*

$$S(B_X, x^*, \alpha) \cap \Delta_\varepsilon(x) \neq \varnothing.$$

2 Daugaveti-punktid summaruumides

Selles peatükis uurime, kuidas komponentruumide Daugaveti-punktide abil saame leida summaruumide Daugaveti-punktid ja vastupidi, kuidas summaruumide Daugaveti-punktide abil saame leida komponentruumide Daugaveti-punktid.

Kõigepealt toome sisse A-oktaeedrilisuse mõiste, mis on oluline Daugaveti-punktide uurimisel summaruumides.

Definitsioon 2.1. Olgu $(X, \|\cdot\|)$ Banachi ruum ja $A \subset S_X$. Ütleme, et norm $\|\cdot\|$ on **A-oktaeedriline**, kui iga $x_1, \ldots, x_n \in A$ ja iga $\varepsilon > 0$ korral leidub $y \in S_X$ nii, et iga $i \in \{1, \ldots, n\}$ puhul $\|x_i + y\| \geq 2 - \varepsilon$.

Näide 2.2. Banachi ruumi X normi S_X-oktaeedrilisus tähendab tema (tavalist) **oktaeedrilisust** (vt [5, lause 2.2]). Oktaeedriline on näiteks Banachi ruumide ℓ_1 ja $C[0,1]$ norm.

Lõplikumõõtmelise mittetriviaalse Banachi ruumi norm ei saa olla oktaeedriline, kuid saab olla A-oktaeedriline mingi $A \subset S_X$ korral.

Näide 2.3. Absoluutne normaliseeritud norm N vektorruumil $\mathbb{R}^2$ on **positiivselt oktaeedriline**, kui leidub $(a,b) \in S_{(\mathbb{R}^2, N)}$ nii, et $N\big((a,b)+(0,1)\big) = N\big((a,b)+(1,0)\big) = 2$ (vt [4, lk 232]), st N on A-oktaeedriline juhul $A = \{(0,1),(1,0)\}$.

Lause 2.4. *Lõplikumõõtmelise Banachi ruumi X norm $\|\cdot\|$ on A-oktaeedriline parajasti siis, kui iga $x_1, \ldots, x_n \in A$ korral leidub $y \in S_X$ nii, et iga $i \in \{1, \ldots, n\}$ puhul*

$$\|x_i + y\| = 2.$$

Tõestus. Fikseerime $x_1, \ldots, x_n \in A$ ning leiame A-oktaeedrilisuse definitsiooni kohaselt S_X elementide jada (y_m) nii, et iga $i \in \{1, \ldots, n\}$ ja iga $m \in \mathbb{N}$ puhul $\|x_i + y_m\| \geq 2 - 1/m$. Ruumi X lõplikumõõtmelisuse tõttu on S_X kompaktne hulk, mistõttu jada (y_m) mingil osajadal leidub piirelement $y \in S_X$. Iga $i \in \{1, \ldots, n\}$ korral $\|x_i + y\| = 2$, sest

$$2 \geq \|x_i + y\| = \lim_{m\to\infty} \|x_i + y_m\| \geq \lim_{m\to\infty} \left(2 - \frac{1}{m}\right) = 2.$$

$\square$

Artiklis [1] on näidatud, et kui absoluutne normaliseeritud norm N vektorruumil $\mathbb{R}^2$ rahuldab teatud tingimust (α), siis Banachi ruumide X ja Y otsesummas $X \oplus_N Y$ ei leidu ühtegi Daugaveti-punkti.

Definitsioon 2.5 (vt [1, definitsioon 4.4]). Öeldakse, et vektorruumi $\mathbb{R}^2$ absoluutsel normaliseeritud normil N on **omadus (α)**, kui iga $a, b \geq 0$ korral, mille puhul $N(a,b) = 1$, on täidetud järgmine tingimus:

($\bullet$) leiduvad $\varepsilon > 0$ ja selline (a,b) ümbrus $W \subset \mathbb{R}^2$, et

1) kui $e, f \geq 0$ rahuldavad tingimusi $N(e,f) = 1$ ja
$$N\big((a,b) + (e,f)\big) \geq 2 - \varepsilon,$$
siis $(e,f) \in W$;

2) $\sup_{(e,f)\in W} e < 1$ või $\sup_{(e,f)\in W} f < 1$.

Näitame, et iga absoluutne nomaliseeritud norm N vektorruumil $\mathbb{R}^2$ rahuldab omadust (α) või on $\{(c,1),(1,d)\}$-oktaeedriline $c = \max_{N(e,1)=1} e$ ja $d = \max_{N(1,f)=1} f$ korral, kuid mitte mõlemat. Kõigepealt esitame omadus (α) mõiste lihtsamal kujul.

Lemma 2.6. *Olgu N absoluutne normaliseeritud norm vektorruumil $\mathbb{R}^2$ ja $a, b \geq 0$ sellised, et $N(a,b) = 1$. Omadus (α) tingimus ($\bullet$) on samaväärne tingimusega*

($\circ$) *leidub selline (a,b) ümbrus $W \subset \mathbb{R}^2$, et*

1) *kui $e, f \geq 0$ rahuldavad tingimusi $N(e,f) = 1$ ja*
$$N\big((a,b) + (e,f)\big) = 2,$$
siis $(e,f) \in W$;

2) $\sup_{(e,f)\in W} e < 1$ *või* $\sup_{(e,f)\in W} f < 1$.

Tõestus. ($\Rightarrow$). Eeldame, et omaduse (α) tingimus ($\bullet$) kehtib paari (a,b) jaoks. Siis leidub $\varepsilon > 0$ ja (a,b) ümbrus W nii, et $\sup_{(e,f)\in W} e < 1$ või $\sup_{(e,f)\in W} f < 1$ ja iga $e, f \geq 0$ jaoks, mis rahuldavad tingimusi $N(e,f) = 1$ ja $N\big((a,b) + (e,f)\big) \geq 2 - \varepsilon$ kehtib $(e,f) \in W$.

Valime vabalt $e, f \geq 0$ nii, et $N(e,f) = 1$ ja $N\big((a,b) + (e,f)\big) = 2$. Siis me näeme, et $N\big((a,b) + (e,f)\big) \geq 2 - \varepsilon$, millest saame $(e,f) \in W$. Seega (a,b) ümbrus W rahuldab ($\circ$) tingimusi 1) ja 2), mistõttu ($\circ$) kehtib.

($\Leftarrow$). Eeldame, et ($\circ$) kehtib. Valime sellise (a,b) ümbruse W, et $\sup_{(e,f)\in W} e < 1$ (juht $\sup_{(e,f)\in W} f < 1$ on analoogiline) ja iga $e, f \geq 0$ korral, kui $N(e,f) = 1$ ja $N\big((a,b) + (e,f)\big) = 2$, siis $(e,f) \in W$. Olgu $c \in (\sup_{(e,f)\in W} e, 1)$ ja olgu $d \geq 0$ selline, et $N(c,d) = 1$. Siis $N\big((a,b) + (c,d)\big) < 2$. Olgu $\varepsilon = 2 - N\big((a,b) + (c,d)\big)$ ja $\widetilde{W} = \{(x,y) \colon x \leq c\}$. Iga $x, y \geq 0$ korral, kui

$N(x,y)=1$ ja $N\big((a,b)+(x,y)\big)\geq 2-\varepsilon$, siis $x\leq c$ ehk $(x,y)\in\widetilde{W}$. Sellega oleme leidnud sobivad $\varepsilon>0$ ja (a,b) ümbrus $\widetilde{W}$ ning järelikult on omadus (α) tingimus $(\bullet)$ täidetud. $\square$

Nüüd näeme, et kui omaduse (α) eitus kirja panna lemma 2.6 abil, siis saame hõlpsasti näidata selle samaväärsuse $\{(c,1),(1,d)\}$-oktaeedrilisusega.

Lause 2.7. *Olgu N absoluutne normaliseeritud norm vektorruumil $\mathbb{R}^2$, $c=\max_{N(e,1)=1} e$ ja $d=\max_{N(1,f)=1} f$ ning $A=\{(c,1),(1,d)\}$. Järgnevad väited on samaväärsed:*

(i) normil N ei ole omadust (α);

(ii) N on A-oktaeedriline.

Tõestus. Kõigepealt sõnastame lemma 2.6 kaudu omadus (α) eituse.

$\neg(\alpha)$: leiduvad $a,b\geq 0$ nii, et $N(a,b)=1$ ja iga (a,b) ümbruse W korral, kui $\sup_{(e,f)\in W} e<1$ või $\sup_{(e,f)\in W} f<1$, siis leiduvad $e,f\geq 0$ nii, et $N(e,f)=1$, $(e,f)\notin W$ ja $N\big((a,b)+(e,f)\big)=2$.

$(\Rightarrow)$. Kehtigu $\neg(\alpha)$ ning olgu (a,b) vastav paar. Näitame, et $N\big((a,b)+(1,d)\big)=2$. Kui $a=1$, siis $(a,b)=(1,d)$ ning väide ilmselt kehtib. Olgu $a\neq 1$. Siis iga $n\in\mathbb{N}$ jaoks, mis rahuldab $a<1-1/n$, valime $W_n=\{(x,y)\colon x\leq 1-1/n\}$ ning leiame sellised $c_n,d_n\geq 0$, et $N(c_n,d_n)=1$, $(c_n,d_n)\notin W_n$ ja $N\big((a,b)+(c_n,d_n)\big)=2$. Kuna ühikkera $B_{(\mathbb{R}^2,N)}$ on kompaktne, siis leidub koonduv alamjada $(c_{n_k},d_{n_k})\to(1,f)$. Ilmselt $N(1,f)=1$ ja $N\big((a,b)+(1,f)\big)=2$ ning seetõttu

$$2=N\big((a,b)+(1,f)\big)\leq N\big((a,b)+(1,d)\big)\leq 2.$$

Nüüd saime $N\big((a,b)+(1,d)\big)=2$ ning võrduse $N\big((a,b)+(c,1)\big)=2$ saab näidata analoogiliselt, seega N on A-oktaeedriline.

$(\Leftarrow)$. Olgu N A-oktaeedriline. Siis lause 2.4 põhjal leidub $(a,b)\in S_{(\mathbb{R}^2,N)}$ nii, et $N\big((c,1)+(a,b)\big)=N\big((1,d)+(a,b)\big)=2$ ja $a,b\geq 0$. Siit näeme, et iga (a,b) ümbruse W korral kui $\sup_{(e,f)\in W} e<1$ (juht $\sup_{(c,d)\in W} d<1$, analoogiline), siis $(c,1)\notin W$. Järelikult kehtib $\neg(\alpha)$. $\square$

Lause 2.8 (vt [1, lause 4.6] ja selle tõestus)**.** *Olgu X ja Y Banachi ruumid ning N vektorruumi $\mathbb{R}^2$ absoluutne normaliseeritud norm. Kui normil N on omadus (α), siis vektorruumis $X\oplus_N Y$ ei leidu ühtegi Daugaveti-punkti. Täpsemalt, kui $a,b\geq 0$ puhul $N(a,b)=1$ ja on täidetud definitsiooni 2.5 tingimus $(\bullet)$, siis (ax,by) ei ole Daugaveti-punkt mitte ühegi $x\in S_X$ ja $y\in S_Y$ korral.*

Järeldus 2.9. *Olgu X ja Y Banachi ruumid, $x \in S_X$ ja $y \in S_Y$ ning N vektorruumi $\mathbb{R}^2$ absoluutne normaliseeritud norm. Olgu $c = \max_{N(e,1)=1} e$ ja $d = \max_{N(1,f)=1} f$. Kui $a, b \geq 0$ on sellised, et $N(a,b) = 1$ ja $N\big((a,b) + (c,1)\big) < 2$ või $N\big((a,b)+(1,d)\big) < 2$, siis (ax, by) ei saa olla Daugaveti-punkt.*

Tõestus. Olgu $a, b \geq 0$ sellised, et $N(a,b) = 1$ ja $N\big((a,b) + (c,1)\big) < 2$ (juht $N\big((a,b) + (1,d)\big) < 2$ on analoogiline). Märkame, et sellisel juhul $c < 1$. Tähistame $W = \{(e,f) \in \mathbb{R}^2 \colon e < c\}$. Siis ilmselt iga $e, f \geq 0$ korral, kui $N(e,f) = 1$ ja $N\big((a,b) + (e,f)\big) = 2$, siis $e < c$ ning seega $(e,f) \in W$. Järelikult (a,b) ümbrus W rahuldab lemma 2.6 tingimusi 1) ja 2) ning seega lause 2.8 kohaselt ei saa (ax, by) olla Daugaveti-punkt.

$\square$

Sellega oleme näidanud, et Banachi ruumis $X \oplus_N Y$ saab leiduda Daugaveti-punkt vaid siis, kui N on $\{(c,1),(1,d)\}$-oktaeedriline, kus $c = \max_{N(e,1)=1} e$ ja $d = \max_{N(1,f)=1} f$. Peatüki järgmistes alapunktides uurime ainult selliseid norme ning kõikjal selle peatüki alljärgnevas osas:

- norm N on absoluutne normaliseeritud A-oktaeedriline norm vektorruumil $\mathbb{R}^2$, kus $A = \{(c,1),(1,d)\}$ ning $c = \max_{N(e,1)=1} e$ ja $d = \max_{N(1,f)=1} f$;
- norm N^* on lause 1.3 kohaselt leiduv absoluutne normaliseeritud norm vektorruumil $\mathbb{R}^2$, mille korral $(X \oplus_N Y)^* = X^* \oplus_{N^*} Y^*$;
- punkt (a,b) on lause 2.4 kohaselt leiduv punkt, mis rahuldab tingimusi $N\big((a,b) + (c,1)\big) = N\big((a,b) + (1,d)\big) = 2$ ja $a, b \geq 0$.

2.1 Daugaveti-punktide pärandumine summaruumidesse

Selles alapeatükis tõestame, et kui mõlemas komponentruumis leidub Daugaveti-punkt, siis ka otsesummas koos (A-oktaeedrilise) normiga N leidub Daugaveti-punkt. Lisaks selgitame, millal summaruumis leidub Daugaveti-punkt, kui vaid ühes komponentruumidest leidub Daugaveti-punkt.

Artiklis [1] tõestati, et kui norm N on positiivselt oktaeedriline st N on $\{(1,0),(0,1)\}$-oktaeedriline, ja mõlemas Banachi ruumis X ja Y leidub Daugaveti-punkt, siis ka Banachi ruumis $X \oplus_N Y$ leidub Daugaveti-punkt (vt [1, lause 4.3]). Siin alapunktis anname üldisema tulemuse A-oktaeedriliste normide jaoks.

Alustuseks tõestame kolm abilemmat.

Lemma 2.10. *Olgu X ja Y Banachi ruumid ning $f = (x^*, y^*) \in S_{(X\oplus_N Y)^*}$. Leiduvad $k, l \geq 0$ nii, et $N(k,l) = 1$, $N\big((a,b)+(k,l)\big) = 2$ ja $k\|x^*\|+l\|y^*\| = 1$.*

Tõestus. Tähistame $Z = (\mathbb{R}^2, N)$. Lause 1.3 põhjal

$$1 = \|f\| = \|(x^*, y^*)\|_{N^*} = \max_{N(k,l)\leq 1} (|k|\|x^*\| + |l|\|y^*\|),$$

seega leidub paar $(k,l) \in S_Z$ nii, et $|k|\|x^*\| + |l|\|y^*\| = 1$. Üldisust kitsendamata võime eeldada, et $k, l \geq 0$. Järgnevalt uurime kolme juhtu.

1) Kui $k \geq c$ ja $l \geq d$, siis $N\big((a,b)+(k,l)\big) = 2$. Seega (k,l) on sobiv paar.

2) Kui $k < c$, siis $l = 1$ ja $N(k,1) = 1$, mistõttu $1 \geq c\|x^*\| + 1\|y^*\| \geq k\|x^*\| + 1\|y^*\| = 1$. Seega $c\|x^*\| + 1\|y^*\| = 1$ ja muidugi $N\big((a,b) + (c,1)\big) = 2$.

3) Kui $l < d$, siis saab analoogiliselt juhuga 2) näidata, et $1\|x^*\|+d\|y^*\| = 1$ ja muidugi $N(1,d) = 1$ ning $N\big((a,b) + (1,d)\big) = 2$.

□

Lemma 2.11. *Olgu X Banachi ruum, $x, u \in B_X$ ja $\varepsilon > 0$. Kui $\|x - u\| \geq 2 - \varepsilon$, siis $\|kx - lu\| \geq k + l - \varepsilon$ iga $k, l \in [0,1]$ korral.*

Tõestus. Olgu $k, l \in [0,1]$ ning $\|x - u\| \geq 2 - \varepsilon$. Kui $k \leq l$, siis

$$\begin{aligned}\|kx - lu\| &\geq \|lx - lu\| - \|kx - lx\| = l\|x - u\| - (l - k)\|x\| \\ &\geq l(2 - \varepsilon) - l + k = k + l - l\varepsilon \geq k + l - \varepsilon.\end{aligned}$$

Kui $k \geq l$, siis

$$\begin{aligned}\|kx - lu\| &\geq \|kx - ku\| - \|ku - lu\| = k\|x - u\| - (k - l)\|u\| \\ &\geq k(2 - \varepsilon) - k + l = k + l - k\varepsilon \geq k + l - \varepsilon.\end{aligned}$$

□

Lemma 2.12. *Olgu X Banachi ruum ning $x \in S_X$ Daugaveti-punkt. Iga $\alpha > 0$, $x^* \in X^*$ ja $\varepsilon > 0$ korral leidub selline $u \in B_X$, et $x^*(u) \geq (1-\alpha)\|x^*\|$ ja $\|x - u\| \geq 2 - \varepsilon$.*

Tõestus. Fikseerime $x^* \in X^*$, $\alpha > 0$ ja $\varepsilon > 0$. Soovime näidata, et leidub selline $u \in B_X$, et $x^*(u) \geq (1 - \alpha)\|x^*\|$ ja $\|x - u\| \geq 2 - \varepsilon$. Paneme tähele, et kui $x^* = 0$, siis ilmselt sobib $u = -x$.

Kui $x^* \neq 0$, siis lause 1.13 kohaselt leidub $u \in S(B_X, x^*/\|x^*\|, \alpha)$ nii, et $\|x - u\| \geq 2 - \varepsilon$. Siis aga ilmselt $x^*(u) > (1 - \alpha)\|x^*\|$ ehk oleme leidnud sobiva u. □

Nüüd toome tulemuse, mis on üldistab artikli [1] lauset 4.3.

Lause 2.13. *Olgu X ja Y Banachi ruumid ning $x \in S_X$ ja $y \in S_Y$. Kui x ja y on Daugaveti-punktid, siis (ax, by) on Daugaveti-punkt Banachi ruumis $X \oplus_N Y$.*

Tõestus. Olgu x ja y Daugaveti-punktid. Tähistame $Z = X \oplus_N Y$. Soovime tõestada, et (ax, by) on Daugaveti-punkt Banachi ruumis Z. Selleks piisab lause 1.13 kohaselt näidata, et iga viilu $S(B_Z, f, \alpha)$ ja iga $\varepsilon > 0$ korral leidub $(u, v) \in S(B_Z, f, \alpha)$ nii, et $\|(ax, by) - (u, v)\|_N \geq 2 - \varepsilon$.

Fikseerime $f = (x^*, y^*) \in S_{Z^*}$, $\alpha > 0$ ja $\varepsilon > 0$. Olgu $\delta > 0$ selline, et $\delta N(1, 1) < \varepsilon$. Lemma 2.12 põhjal leiduvad $u \in B_X$ ja $v \in B_Y$ nii, et $x^*(u) \geq (1 - \alpha/2)\|x^*\|$ ja $y^*(v) \geq (1 - \alpha/2)\|y^*\|$ ning $\|x - u\| \geq 2 - \delta$ ja $\|y - v\| \geq 2 - \delta$.

Siis lemma 2.10 põhjal leiduvad $k, l \geq 0$ nii, et $N(k, l) = 1$, $N\big((a, b) + (k, l)\big) = 2$ ja $k\|x^*\| + l\|y^*\| = 1$. Siis $(ku, lv) \in B_Z$ ning

$$f(ku, lv) = kx^*(u) + ly^*(v) \geq \Big(1 - \frac{\alpha}{2}\Big)(k\|x^*\| + l\|y^*\|) > 1 - \alpha.$$

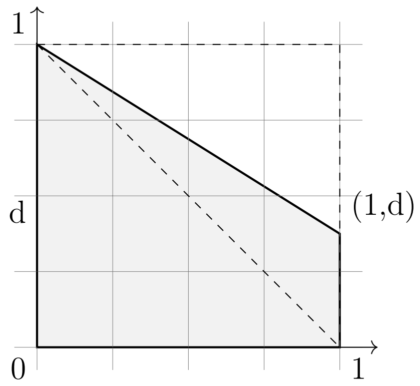
Lisaks märkame, et lemma 2.11 tõttu

$$\begin{aligned}
\|(ax, by) - (ku, lv)\|_N &= N(\|ax - ku\|, \|by - lv\|) \\
&\geq N(a + k - \delta, b + l - \delta) \\
&\geq N(a + k, b + l) - N(\delta, \delta) \\
&= N\big((a, b) + (k, l)\big) - \delta N(1, 1) > 2 - \varepsilon.
\end{aligned}$$

Järelikult oleme leidnud punkti $(ku, lv) \in S(B_Z, f, \alpha)$ nii, et $\|(ax, by) - (ku, lv)\|_N \geq 2 - \varepsilon$, seega lause 1.13 põhjal (ax, by) on Daugaveti-punkt. $\square$

Oleme tõestanud, et kui mõlemas Banachi ruumis X ja Y leidub Daugaveti-punkt, siis ka Banachi ruumis $X \oplus_N Y$ leidub Daugaveti-punkt. Järgnevad neli lauset näitavad, et teatud tüüpi normide N korral, leidub Banachi ruumis $X \oplus_N Y$ Daugaveti-punkt, kui vaid ühes komponentruumidest X ja Y leidub Daugaveti-punkt.

Lause 2.14. *Olgu X ja Y Banachi ruumid ning $y \in S_Y$. Kui $N\big((0, 1) + (1, d)\big) = 2$ ja y on Daugaveti-punkt, siis $(0, y)$ on Daugaveti-punkt Banachi ruumis $X \oplus_N Y$. Kui $N\big((0, 1) + (1, d)\big) < 2$, siis $(0, y)$ ei saa olla Daugaveti-punkt.*



Joonis 2: Lause 2.14 tingimustele vastava normi N ühikkera vektorruumi $\mathbb{R}^2$ esimeses veerandis.

Lause 2.14 tõestus. Olgu y Daugaveti-punkt. Tähistame $Z = X \oplus_N Y$. Lause 1.13 kohaselt on $(0,y)$ Daugaveti-punkt Banachi ruumis Z, kui iga viilu $S(B_Z, f, \alpha)$ ja iga $\varepsilon > 0$ korral leidub $(u,v) \in S(B_Z, f, \alpha)$ nii, et $\|(0,y) - (u,v)\|_N \geq 2 - \varepsilon$.

Fikseerime $f = (x^*, y^*) \in S_{Z^*}$, $\alpha > 0$ ja $\varepsilon > 0$. Lemma 2.12 põhjal leidub $v \in B_Y$ nii, et $y^*(v) \geq (1-\alpha/2)\|y^*\|$ ja $\|y - v\| \geq 2 - \varepsilon$. Olgu $u \in S_X$ selline, et $x^*(u) \geq (1-\alpha/2)\|x^*\|$.

Kuna $N\big((0,1)+(c,1)\big) = N\big((0,1)+(1,d)\big) = 2$, siis punkt $(0,1)$ rahuldab lauses 2.4 punktile (a,b) seatud tingimusi, seega lemma 2.10 põhjal leiduvad $k, l \geq 0$ nii, et $N(k,l) = 1$, $N\big((k,l)+(0,1)\big) = 2$ ja $k\|x^*\| + l\|y^*\|\| = 1$. Siis $(ku, lv) \in B_Z$ ning

$$f(ku, lv) = kx^*(u) + ly^*(v) \geq \Big(1 - \frac{\alpha}{2}\Big)(k\|x^*\| + l\|y^*\|) > 1 - \alpha.$$

Samas märkame, et lemma 2.11 tõttu

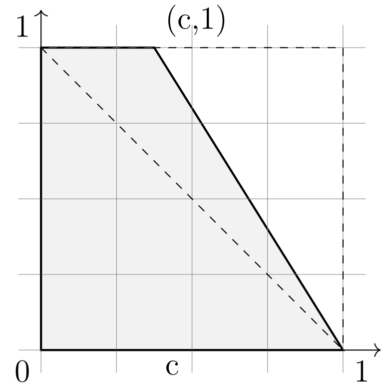
$$\begin{aligned}\|(0,y) - (ku, lv)\|_N &= N(k\|u\|, \|y - lv\|) \geq N(k, 1 + l - \varepsilon) \\ &\geq N\big((k,l) + (0,1)\big) - N(0, \varepsilon) = 2 - \varepsilon.\end{aligned}$$

Järelikult oleme leidnud punkti $(ku, lv) \in S(B_Z, f, \alpha)$ nii, et $\|(0,y) - (ku, lv)\|_N \geq 2 - \varepsilon$, seega lause 1.13 põhjal $(0,y)$ on Daugaveti-punkt.

Teine väide kehtib järelduse 2.9 kohaselt. $\square$

Analoogiliselt lausega 2.14 saab tõestada järgmise tulemuse.

Lause 2.15. *Olgu X ja Y Banachi ruumid ning $x \in S_X$. Kui $N\big((1,0) + (c,1)\big) = 2$ ja x on Daugaveti-punkt, siis $(x,0)$ on Daugaveti-punkt Banachi* *ruumis $X \oplus_N Y$. Kui $N\big((1,0)+(c,1)\big) < 2$, siis $(x,0)$ ei saa olla Daugaveti-punkt.*



Joonis 3: Lause 2.15 tingimustele vastava normi N ühikkera vektorruumi $\mathbb{R}^2$ esimeses veerandis.

Lause 2.16. *Olgu X ja Y Banachi ruumid ning $x \in S_X$. Kui x on Daugaveti-punkt, siis (x,y) on Daugaveti-punkt Banachi ruumis $X \oplus_\infty Y$ iga $y \in B_Y$ korral.*

Tõestus. Olgu x Daugaveti-punkt Banachi ruumis X ja $y \in B_Y$. Tähistame $Z = X \oplus_\infty Y$. Selleks, et $(x,y) \in S_Z$ oleks Daugaveti-punkt piisab lause 1.13 kohaselt näidata, et iga viilu $S(B_Z, f, \alpha)$ ja iga $\varepsilon > 0$ korral leidub $(u,v) \in S(B_Z, f, \alpha)$ nii, et $\|(x,y)-(u,v)\|_\infty \geq 2-\varepsilon$.

Fikseerime $f = (x^*, y^*) \in S_{Z^*}$, $\alpha > 0$ ja $\varepsilon > 0$. Lemma 2.12 põhjal leidub $u \in B_X$ nii, et $x^*(u) \geq (1-\alpha/2)\|x^*\|$ ja $\|x-u\| \geq 2-\varepsilon$.

Märkuse 1.4 kohaselt $\|x^*\| + \|y^*\| = 1$. Olgu $v \in B_Y$ selline, et $y^*(v) \geq (1-\alpha/2)\|y^*\|$. Ilmselt $(u,v) \in B_Z$. Nüüd näeme, et

$$f(u,v) = x^*(u) + y^*(v) \geq \Big(1 - \frac{\alpha}{2}\Big)(\|x^*\| + \|y^*\|) > 1-\alpha$$

ja

$$\|(x,y)-(u,v)\|_\infty = \max\{\|x-u\|, \|y-v\|\} \geq \|x-u\| \geq 2-\varepsilon.$$

Seega oleme leidnud sellise punkti $(u,v) \in S(B_Z, f, \alpha)$, et $\|(x,y)-(u,v)\|_\infty \geq 2-\varepsilon$. Järelikult lause 1.13 põhjal (x,y) on Daugaveti-punkt. $\square$

Analoogiliselt lausega 2.16 saab tõestada järgmise tulemuse.

Lause 2.17. *Olgu X ja Y Banachi ruumid ning $y \in S_Y$. Kui y on Daugaveti-punkt, siis (x,y) on Daugaveti-punkt Banachi ruumis $X \oplus_\infty Y$ iga $x \in B_X$ korral.*

2.2 Daugaveti-punktide pärandumine komponentruumidesse

Selles peatükis vaatleme olukorda, kus Banachi ruumide X ja Y otsesummas $X \oplus_N Y$ leidub Daugaveti-punkt ning uurime, millised tingimused seab see Banachi ruumidele X ja Y.

Esimesena uurime ∞-norme. Eelmisest alapunktist teame, et kui ühes Banachi ruumidest X ja Y leidub Daugaveti-punkt, siis ka Banachi ruumis $X \oplus_\infty Y$ leidub Daugaveti-punkt. Kolm järgmist tulemust näitavad, et kehtib ka vastupidine.

Lause 2.18. *Olgu X ja Y Banachi ruumid ning $(x, y) \in S_{X \oplus_\infty Y}$. Kui (x, y) on Daugaveti-punkt ja $\|y\| \neq 1$, siis x on Daugaveti-punkt Banachi ruumis X.*

Tõestus. Olgu (x, y) Daugaveti-punkt ja $\|y\| \neq 1$. Tähistame $Z = X \oplus_\infty Y$. Kuna $\|(x, y)\|_\infty = 1$, siis $\|x\| = 1$ ja $\|y\| < 1$. Näitame, et x on Daugaveti-punkt ruumis X. Lause 1.13 kohaselt piisab näidata, et iga viilu $S(B_X, x^*, \alpha)$ ja iga $\varepsilon > 0$ korral leidub $u \in S(B_X, x^*, \alpha)$ nii, et $\|x - u\| \geq 2 - \varepsilon$.

Fikseerime $x^* \in S_{X^*}$, $\alpha > 0$ ja $\varepsilon > 0$. Olgu $f = (x^*, 0)$ ja olgu $\gamma > 0$ selline, et $\gamma \leq \varepsilon$ ja $\|y\| < 1 - \gamma$. Kuna $\|f\| = \|x^*\| = 1$, siis lause 1.13 kohaselt leidub $(u, v) \in S(B_Z, f, \alpha)$ nii, et $\|(x, y) - (u, v)\|_\infty \geq 2 - \gamma$. Järelikult $x^*(u) = f(u, v) > 1 - \alpha$ ehk $u \in S(B_X, x^*, \alpha)$. Kuna

$$\|y - v\| \leq \|y\| + \|v\| < 1 - \gamma + 1 = 2 - \gamma,$$

siis $\|x - u\| \geq 2 - \gamma \geq 2 - \varepsilon$, sest

$$2 - \gamma \leq \|(x, y) - (u, v)\|_\infty = \max\{\|x - u\|, \|y - v\|\}.$$

Sellega oleme leidnud elemendi $u \in S(B_X, x^*, \alpha)$, mis rahuldab võrratust $\|x - u\| \geq 2 - \varepsilon$ ning järelikult lause 1.13 põhjal x on Daugaveti-punkt Banachi ruumis X. $\square$

Analoogiliselt lausega 2.18 saab tõestada järgmise tulemuse.

Lause 2.19. *Olgu X ja Y Banachi ruumid ning $(x, y) \in S_{X \oplus_\infty Y}$. Kui (x, y) on Daugaveti-punkt ja $\|x\| \neq 1$, siis y on Daugaveti-punkt Banachi ruumis Y.*

Lause 2.20. *Olgu X ja Y Banachi ruumid ning $x \in S_X$, $y \in S_Y$. Kui (x, y) on Daugaveti-punkt Banachi ruumis $X \oplus_\infty Y$, siis kas x või y on Daugaveti-punkt.*

Tõestus. Ärgu olgu x ja y Daugaveti-punktid. Tähistame $Z = X \oplus_\infty Y$. Soovime näidata, et $(x,y) \in Z$ ei ole Daugaveti-punkt. Lause 1.13 põhjal piisab näidata, et leidub viil $S(B_Z, f, \alpha)$ ja $\varepsilon > 0$ nii, et iga $(u,v) \in S(B_Z, f, \alpha)$ korral kehtib $\|(x,y)-(u,v)\|_\infty < 2-\varepsilon$.

Kuna x ja y ei ole Daugaveti-punktid, siis lause 1.13 põhjal leiduvad sellised viilud $S(B_X, x^*, \alpha_1)$ ja $S(B_Y, y^*, \alpha_2)$ ning $\varepsilon_1 > 0$ ja $\varepsilon_2 > 0$ nii, et iga $u \in S(B_X, x^*, \alpha_1)$ ja $v \in S(B_Y, y^*, \alpha_2)$ korral $\|x-u\| < 2-\varepsilon_1$ ja $\|y-v\| < 2-\varepsilon_2$. Olgu $\alpha = 1/2 \min\{\alpha_1, \alpha_2\}$, $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ ja $f = 1/2(x^*, y^*)$.

Järgnevalt näitame, et iga $(u,v) \in S(B_Z, f, \alpha)$ korral kehtib $\|(x,y)-(u,v)\|_\infty < 2-\varepsilon$. Fikseerime $(u,v) \in S(B_Z, f, \alpha)$. Siis $(x^*(u)+y^*(v))/2 = f(u,v) > 1-\alpha$, millest saame

$$x^*(u) > 2(1-\alpha) - y^*(v) > 2 - 2\alpha - 1 \geq 1 - \alpha_1$$

ja

$$y^*(v) > 2(1-\alpha) - x^*(u) > 2 - 2\alpha - 1 \geq 1 - \alpha_2.$$

Seega $u \in S(B_X, x^*, \alpha_1)$ ja $v \in S(B_Y, y^*, \alpha_2)$, millest saame, et $\|x-u\| < 2-\varepsilon_1$ ja $\|y-v\| < 2-\varepsilon_2$ ehk

$$\|(x,y)-(u,v)\|_\infty = \max\{\|x-u\|, \|y-v\|\} < 2-\varepsilon.$$

Seetõttu lause 1.13 põhjal (x,y) ei ole Daugaveti-punkt. Järelikult, kui (x,y) on Daugaveti-punkt, siis kas x või y on Daugaveti-punkt. $\square$

Nüüd jääb veel üle vaadelda juhtu, kus N on ∞-normist erinev. Selle saame kokku võtta kahe järgmise tulemusega.

Lause 2.21. *Olgu X ja Y Banachi ruumid, $(x,y) \in S_{X\oplus_N Y}$ ning norm N ∞-normist erinev. Kui (x,y) on Daugaveti-punkt ja $x \neq 0$, siis $x/\|x\|$ on Daugaveti-punkt Banachi ruumis X.*

Tõestus. Olgu (x,y) Daugaveti-punkt ja $x \neq 0$. Tähistame $Z = X \oplus_N Y$. Meie eesmärk on tõestada, et $x/\|x\|$ on Daugaveti-punkt Banachi ruumis X. Lause 1.13 põhjal piisab näidata, et iga viilu $S(B_X, x^*, \alpha)$ ja iga $\varepsilon > 0$ korral leidub $u \in S(B_X, x^*\alpha)$ nii, et $\big\|x/\|x\| - u\big\| \geq 2-\varepsilon$.

Fikseerime $x^* \in X^*$, $\alpha > 0$ ja $\varepsilon > 0$. Olgu $f = (x^*, 0)$. Lemma 1.5 kohaselt leidub selline $\delta > 0$, et kui $p, q, r \geq 0$ on sellised, et $2-\delta \leq N(p,q) \leq N(r,q) \leq 2$ ja $q < 2-\delta$, siis $|p-r| < \varepsilon$. Lisaks eeldame üldisust kitsendamata, et $\delta \leq \varepsilon/2$, $\delta \leq \alpha$ ja $(1-\delta)N(1,1) > 1$. Kuna (x,y) on Daugaveti-punkt, siis lause 1.13 kohaselt leidub $(u,v) \in S(B_Z, f, \delta)$ nii, et $\|(x,y)-(u,v)\|_N \geq 2-\delta$. Seega

$$\|u\| \geq x^*(u) = f(u,v) > 1 - \delta \geq 1 - \alpha,$$

millest järeldub, et $u \in S(B_X, x^*, \alpha)$ ja $\|u\| > 1 - \delta$. Seetõttu saame $\|v\| < 1 - \delta$, sest $N(\|u\|, \|v\|) = 1$ ja $(1 - \delta)N(1, 1) > 1$. Järgnevalt näitame, et $\|x/\|x\| - u\| \geq 2 - \varepsilon$. Me teame, et

$$2 - \delta < N\big(\|x - u\|, \|y - v\|\big) \leq N\big(\|x\| + \|u\|, \|y - v\|\big) \leq 2,$$

ja $\|y - v\| \leq \|y\| + \|v\| < 2 - \delta$, millest saame järeldada

$$\big|\|x - u\| - (\|x\| + \|u\|)\big| < \|x\|\varepsilon/2$$

ehk $\|x\| + \|u\| - \|x\|\varepsilon/2 < \|x - u\|$. Seega

$$\begin{aligned}
\Big\|\frac{1}{\|x\|}x - u\Big\| &= \Big\|\frac{1}{\|x\|}(x - u) - \Big(u - \frac{1}{\|x\|}u\Big)\Big\| \\
&\geq \frac{1}{\|x\|}\|x - u\| - \Big(\frac{1}{\|x\|} - 1\Big)\|u\| \\
&> \frac{1}{\|x\|}\big(\|x\| + \|u\| - \|x\|\frac{\varepsilon}{2}\big) - \frac{\|u\|}{\|x\|} + \|u\| \\
&= 1 + \|u\| - \frac{\varepsilon}{2} \geq 1 + 1 - \delta - \frac{\varepsilon}{2} \\
&\geq 2 - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = 2 - \varepsilon.
\end{aligned}$$

Järelikult lause 1.13 põhjal $x/\|x\|$ on Daugaveti-punkt Banachi ruumis X. □

Analoogiliselt lausega 2.21 saab tõestada järgmise tulemuse.

Lause 2.22. *Olgu X ja Y Banachi ruumid, $(x, y) \in S_{X \oplus_N Y}$ ning norm N ∞-normist erinev. Kui (x, y) on Daugaveti-punkt ja $y \neq 0$, siis $y/\|y\|$ on Daugaveti-punkt Banachi ruumis Y.*

Nüüd võtame saadud tulemused kokku tabeli abil. Olgu X ja Y Banachi ruumid ning $x \in S_X$ ja $y \in S_Y$. Siis ilmselt $(ax, by) \in S_{X \oplus_N Y}$ ning saame esitada ülevaatliku tabeli selles peatükis tõestatud tulemuste kohta.

$N \neq \infty$, $a \neq 0$ ja $b \neq 0$	x ja y on Daugaveti-punktid $\Leftrightarrow$ (ax, by) on Daugaveti-punkt
$N \neq \infty$ ja $a = 0$, $N\big((a,b) + (1,d)\big) = 2$	y on Daugaveti-punkt $\Leftrightarrow$ (ax, by) on Daugaveti-punkt
$N \neq \infty$ ja $b = 0$, $N\big((a,b) + (c,1)\big) = 2$	x on Daugaveti-punkt $\Leftrightarrow$ (ax, by) on Daugaveti-punkt
$b = 0$ ja $N\big((a,b) + (1,d)\big) < 2$ või $a = 0$ ja $N\big((a,b) + (c,1)\big) < 2$	(ax, by) ei ole Daugaveti-punkt
$N = \infty$	x või y on Daugaveti-punkt $\Leftrightarrow$ (ax, by) on Daugaveti-punkt

Tabel 1: Ülevaade Daugaveti-punktide olemasolu seostest Banachi ruumide X ja Y ning nende summaruumi $X \oplus_N Y$ vahel.

3 Delta-punktid summaruumides

Kõikjal selles peatükis olgu N absoluutne normaliseeritud norm vektorruumis $\mathbb{R}^2$.

3.1 Delta-punktide pärandumine summaruumidesse

Selles alapunktis näitame, et kui ühes Banachi ruumidest X ja Y leidub Δ-punkt, siis ka otsesummas $X \oplus_N Y$ leidub Δ-punkt ning toome välja ka selle punkti kuju. Lisaks uurime Δ-punktide kuju Banachi ruumis $X \oplus_N Y$ juhul, kui mõlemas Banachi ruumis X ja Y leidub Δ-punkt.

Lemma 3.1 (vt [1, lemma 4.1])**.** *Olgu $m \in \mathbb{N}$. Iga $\varepsilon > 0$ ja iga $\lambda_1, \ldots, \lambda_m > 0$ korral, mis rahuldavad tingimust $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$, leiduvad $n \in \mathbb{N}$ ja $k_1, \ldots, k_m \in \mathbb{N}$ nii, et*

$$\sum_{i=1}^{m} \left|\lambda_i - \frac{k_i}{n}\right| < \varepsilon \quad \text{ja} \quad \sum_{i=1}^{m} k_i = n.$$

Täpsemalt, iga normeeritud ruumi elementide kumerat kombinatsiooni saab lähendada kuitahes täpselt nende samade elementide kordsete aritmeetiliste keskmistega. Veelgi enam, kahe sellise kumera kombinatsiooni korral saame mõlemat lähendada sama arvu elementide aritmeetilise keskmisega.

Lause 3.2 (vt [1, lk 14])**.** *Olgu X ja Y Banachi ruumid, $x \in S_X$ ja $y \in S_Y$ ning $a, b \geq 0$ sellised, et $N(a, b) = 1$. Kui x ja y on Δ-punktid, siis (ax, by) on Δ-punkt Banachi ruumis $X \oplus_N Y$.*

Tõestus. Olgu x ja y Δ-punktid. Tähistame $Z = X \oplus_N Y$. Soovime näidata, et (ax, by) on Δ-punkt Banachi ruumis Z ehk iga $\varepsilon > 0$ korral $(ax, by) \in \overline{\mathrm{conv}}\, \Delta_\varepsilon(ax, by)$. Selleks piisab lemma 3.1 kohaselt näidata, et iga $\gamma, \varepsilon > 0$ korral leiduvad $n \in \mathbb{N}$ ja $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n) \in \Delta_\varepsilon(ax, by)$ nii, et

$$\|(ax, by) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i, y_i)\|_N < \gamma.$$

Fikseerime $\gamma, \varepsilon > 0$. Kuna x ja y on Δ-punktid, siis lemma 3.1 kohaselt leiduvad $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n \in \Delta_\varepsilon(x)$ ja $y_1, \ldots, y_n \in \Delta_\varepsilon(y)$ nii, et

$$\|x - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\| < \frac{\gamma}{2} \quad \text{ja} \quad \|y - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i\| < \frac{\gamma}{2}.$$

Lihtne on näha, et siis iga $i \in \{1, \ldots, n\}$ korral $(ax_i, by_i) \in B_Z$ ja

$$\begin{aligned}\|(ax, by) - (ax_i, by_i)\|_N &= N(a\|x - x_i\|, b\|y - y_i\|) \\ &\geq (2 - \varepsilon)N(a, b) = 2 - \varepsilon\end{aligned}$$

ehk $(ax_i, by_i) \in \Delta_\varepsilon(ax, by)$. Lisaks näeme, et

$$\begin{aligned}\|(ax, by) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(ax_i, by_i)\|_N &\leq a\|x - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\| + b\|y - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i\| \\ &< a\frac{\gamma}{2} + b\frac{\gamma}{2} \leq \gamma.\end{aligned}$$

Sellega oleme leidnud sobivad $n \in \mathbb{N}$ ja $(ax_1, by_1), \ldots, (ax_n, by_n) \in \Delta_\varepsilon(ax, by)$ ning lemma 3.1 kohaselt (ax, by) on Δ-punkt.

□

Lause 3.3 (vt [1, lk 14]). *Olgu X ja Y Banachi ruumid, $x \in B_X$ ja $y \in S_Y$ ning $a \geq 0$ selline, et $N(a, 1) = 1$. Kui y on Δ-punkt, siis (ax, y) on Δ-punkt Banachi ruumis $X \oplus_N Y$.*

Tõestus. Olgu y Δ-punkt. Tähistame $Z = X \oplus_N Y$. Soovime näidata, et (ax, y) on Δ-punkt. Selleks piisab lemma 3.1 kohaselt näidata, et iga $\gamma, \varepsilon > 0$ korral leiduvad $n \in \mathbb{N}$ ja $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n) \in \Delta_\varepsilon(ax, y)$ nii, et

$$\Big\|(ax, y) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i, y_i)\Big\|_N < \gamma.$$

Fikseerime $\gamma, \varepsilon > 0$. Kuna y on Δ-punkt, siis lemma 3.1 kohaselt leiduvad $n \in \mathbb{N}$ ja $y_1, \ldots, y_n \in \Delta_\varepsilon(y)$ nii, et

$$\Big\|y - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i\Big\| < \gamma.$$

Iga $i \in \{1, \ldots, n\}$ korral ilmselt $(ax, y_i) \in B_Z$ ja

$$\|(ax, y) - (ax, y_i)\|_N = N(0, \|y - y_i\|) \geq (2 - \varepsilon),$$

mistõttu $(ax, y_i) \in \Delta_\varepsilon(ax, y)$. Lisaks näeme, et

$$\Big\|(ax, y) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(ax, y_i)\Big\|_N = \Big\|y - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i\Big\| < \gamma.$$

Sellega oleme leidnud sobivad $n \in \mathbb{N}$ ja $(ax, y_1), \ldots, (ax, y_n) \in \Delta_\varepsilon(ax, y)$ ning lemma 3.1 kohaselt (ax, y) on Δ-punkt. □

Lausega 3.3 sarnaselt saab tõestada järgmise tulemuse.

Lause 3.4 (vt [1, lk 14]). *Olgu X ja Y Banachi ruumid, $x \in S_X$ ja $y \in B_Y$ ning $b \geq 0$ selline, et $N(1, b) = 1$. Kui x on Δ-punkt, siis (x, by) on Δ-punkt Banachi ruumis $X \oplus_N Y$.*

3.2 Delta-punktide pärandumine komponentruumidesse

Selles alapunktis uurime, et kui Banachi ruumide X ja Y korral Banachi ruumis $X \oplus_N Y$ leidub Δ-punkt (x, y), kas siis ka Banachi ruumides X ja Y leidub Δ-punkt. Kõigepealt uurime juhte, kus ei kehti $\|x\| = \|y\| = 1$.

Lemma 3.5. *Olgu X Banachi ruum, $x \in S_X$, $\alpha > 0$ ja rahuldagu funktsioon $x^* \in B_{X^*}$ tingimust $x^*(x) > 1 - \alpha$. Kui x on Δ-punkt, siis iga $\varepsilon > 0$ korral leidub $u \in B_X$ nii, et $x^*(u) > 1 - \alpha$ ja $\|x - u\| \geq 2 - \varepsilon$.*

Tõestus. Fikseerime $\varepsilon > 0$. Siis

$$\frac{x^*(x)}{\|x^*\|} > \frac{1-\alpha}{\|x^*\|} = 1 - \Big(\frac{\alpha - 1}{\|x^*\|} + 1\Big)$$

ning lause 1.14 kohaselt leidub selline $u \in S(B_X, x^*/\|x^*\|, (\alpha - 1)/\|x^*\| + 1)$, et $\|x - u\| \geq 2 - \varepsilon$. Lisaks

$$x^*(u) > \|x^*\| - \Big(\frac{\alpha - 1}{\|x^*\|} + 1\Big)\|x^*\| = 1 - \alpha.$$

$\square$

Lause 3.6. *Olgu X ja Y Banachi ruumid, $x \in S_X$ ja $y \in S_Y$ ning $a, b \geq 0$ sellised, et $N(a, b) = 1$ ja $b \neq 1$. Kui (ax, by) on Δ-punkt Banachi ruumis $X \oplus_N Y$, siis x on Δ-punkt Banachi ruumis X.*

Tõestus. Olgu (ax, by) Δ-punkt Banachi ruumis $X \oplus_N Y$. Tähistame $Z = X \oplus_N Y$. Eeldame vastuväiteliselt, et x ei ole Δ-punkt. Siis lause 1.14 kohaselt leiduvad $x^* \in S_{X^*}$, $\alpha > 0$ ja $\varepsilon > 0$ nii, et $x \in S(B_X, x^*, \alpha)$ ning iga $u \in S(B_X, x^*, \alpha)$ korral $\|x - u\| < 2 - \varepsilon$. Olgu $y^* \in S_{Y^*}$ selline, et $y^*(y) = 1$.

Lause 1.3 kohaselt leiduvad $c, d \geq 0$ nii, et $N^*(c, d) = 1$ ja $ac + bd = 1$. Olgu $f = (cx^*, (1 - \alpha)dy^*)$. Kuna $b < 1$, siis $ac \neq 0$ ning järelikult saame

$$f(ax, by) = acx^*(x) + (1 - \alpha)bdy^*(y) > (1 - \alpha)(ac + bd) = 1 - \alpha.$$

Kuna $f(ax, by) > 1 - \alpha$, siis leidub $\gamma > 0$ nii, et

$$f(ax, by) > 1 - \alpha + \gamma.$$

Olgu $\delta > 0$ selline, et $\delta < a\varepsilon$ ja $\delta < \gamma\varepsilon$. Lemma 1.5 põhjal leidub $\beta > 0$ nii, et iga $p, q, r \geq 0$, mille korral $2 - \beta \leq N(p, q) \leq N(r, q) \leq 2$ ja $q < 2 - \beta$, kehtib $|p - r| < \delta$. Lisaks eeldame $b < 1 - \beta$. Kuna $f(ax, by) > 1 - \alpha + \gamma$, siis lemma 3.5 kohaselt leidub $(u,v) \in B_Z$ nii, et $f(u,v) > 1-\alpha+\gamma$ ja $\|(ax,by)-(u,v)\|_N \geq 2-\delta$. Seega

$$\begin{aligned} cx^*(u) + (1-\alpha)d\|v\| \geq cx^*(u) + (1-\alpha)dy^*(v) = f(u,v) > 1-\alpha+\gamma \\ > 1-\alpha \geq (1-\alpha)(c\|u\| + d\|v\|), \end{aligned}$$

millest saame $cx^*(u) > (1-\alpha)c\|u\|$. Järelikult

$$x^*\Big(\frac{u}{\|u\|}\Big) > 1-\alpha$$

ehk $u/\|u\| \in S(B_X, x^*, \alpha)$, mistõttu $\big\|x - u/\|u\|\big\| < 2-\varepsilon$. Järgnevalt näitame, et sellest järeldub $\|ax-u\| < a + \|u\| - \delta$. Kui $a \leq \|u\|$, siis

$$\begin{aligned} \|ax-u\| &\leq \Big\|ax - a\frac{u}{\|u\|}\Big\| + \Big\|a\frac{u}{\|u\|} - u\Big\| = a\Big\|x - \frac{u}{\|u\|}\Big\| + |a - \|u\|| \\ &< a(2-\varepsilon) - a + \|u\| = a + \|u\| - a\varepsilon < a + \|u\| - \delta. \end{aligned}$$

Kui $a \geq \|u\|$, siis märkame kõigepealt, et

$$\begin{aligned} c\|u\| + (1-\alpha)d\|v\| &\geq cx^*(u) + (1-\alpha)dy^*(v) = f(u,v) \\ &> 1-\alpha+\gamma \geq (1-\alpha)d\|v\| + \gamma, \end{aligned}$$

millest saame $\|u\| \geq c\|u\| > \gamma$. Nüüd saame

$$\begin{aligned} \|ax-u\| &\leq \big\|ax - \|u\|x\big\| + \big\|\|u\|x - u\big\| = |a - \|u\|| + \|u\|\Big\|x - \frac{u}{\|u\|}\Big\| \\ &< a - \|u\| + \|u\|(2-\varepsilon) = a + \|u\| - \|u\|\varepsilon \\ &< a + \|u\| - \gamma\varepsilon < a + \|u\| - \delta. \end{aligned}$$

Edasi paneme tähele, et

$$\begin{aligned} 2-\beta \leq \|(ax,by)-(u,v)\|_N &= N(\|ax-u\|, \|by-v\|) \\ &\leq N(a + \|u\| - \delta, b + \|v\|) \end{aligned}$$

ning seetõttu

$$2-\beta \leq N(a+\|u\|-\delta, b+\|v\|) \leq N(a+\|u\|, b+\|v\|) \leq 2.$$

Kuna $b + \|v\| < 2-\beta$, siis peab kehtima $|a+\|u\|-\delta-(a+\|u\|)| < \delta$ ehk $\delta < \delta$. Oleme saanud vastuolu. □

Lausega 3.6 sarnaselt saab tõestada järgmise tulemuse.

Lause 3.7. *Olgu X ja Y Banachi ruumid, $x \in S_X$ ja $y \in S_Y$ ning $a, b \geq 0$ sellised, et $N(a, b) = 1$ ja $a \neq 1$. Kui (ax, by) on Δ-punkt Banachi ruumis $X \oplus_N Y$, siis y on Δ-punkt Banachi ruumis Y.*

Nüüd on ainsana vaatlemata juht, kus Banachi ruumide X ja Y korral Banachi ruumis $X \oplus_N Y$ leidub selline Δ-punkt (x, y), et $\|x\| = \|y\| = 1$. Sel juhul on N ∞-norm. Me anname näite olukoorast, kus x ja y ei ole Δ-punktid, kuid (x, y) on. Lisaks tõestame ka eelnevast erineva tingimuse, mille korral peab (x, y) olema Δ-punkt.

Lause 3.8. *Olgu X ja Y Banachi ruumid, $x \in S_X$, $y \in S_Y$ ning $\lambda = (1 + \sqrt{5})/2$. Eeldame, et*

- *iga viilu $S(B_X, x^*, \alpha)$ ja iga $\varepsilon > 0$ korral, kui $x \in S(B_X, x^*, \alpha)$, siis leidub $u \in S(B_X, x^*, \lambda\alpha)$ nii, et $\|x - u\| \geq 2 - \varepsilon$,*
- *iga viilu $S(B_Y, y^*, \alpha)$ ja iga $\varepsilon > 0$ korral, kui $y \in S(B_Y, y^*, \alpha)$, siis leidub $v \in S(B_Y, y^*, \lambda\alpha)$ nii, et $\|y - v\| \geq 2 - \varepsilon$.*

Siis (x, y) on Δ-punkt Banachi ruumis $X \oplus_\infty Y$.

Tõestus. Tähistame $Z = X \oplus_\infty Y$. Näitame, et (x, y) on Δ-punkt Banachi ruumis Z. Selleks piisab lause 1.14 kohaselt näidata, et iga punkti (x, y) sisaldava viilu $S(B_Z, f, \alpha)$ ja iga $\varepsilon > 0$ korral leidub $(u, v) \in S(B_Z, f, \alpha)$ nii, et $\|(x, y) - (u, v)\|_\infty \geq 2 - \varepsilon$.

Fikseerime $f = (x^*, y^*) \in S_{Z^*}$, $\alpha > 0$ ja $\varepsilon > 0$ nii, et $f(x, y) > 1 - \alpha$. Ilmselt ei saa korraga kehtida

$$x^*(x) \leq (1 - \alpha)\|x^*\| \quad \text{ja} \quad y^*(y) \leq (1 - \alpha)\|y^*\|,$$

sest siis

$$1 - \alpha < f(x, y) = x^*(x) + y^*(y) \leq (1 - \alpha)(\|x^*\| + \|y^*\|) = 1 - \alpha.$$

Üldisust kitsendamata eeldame, et $x^*(x) > (1 - \alpha)\|x^*\|$ (juht $y^*(y) > (1 - \alpha)\|y^*\|$ on analoogiline). Vaatleme nelja juhtu.

1) Kui $\|x^*\| = 1$, siis ilmselt $y^* = 0$ ja seetõttu $(x, -y) \in S(B_Z, f, \alpha)$ ning kuna $\|(x, y) - (x, -y)\|_\infty = 2$, siis oleme leidnud sobiva punkti.

2) Kui $\|x^*\| \leq 1/\lambda$, siis $x \in S(B_X, x^*/\|x^*\|, \alpha)$ ning eelduse kohaselt leidub $u \in S(B_X, x^*/\|x^*\|, \lambda\alpha)$ nii, et $\|x - u\| \geq 2 - \varepsilon$. Olgu $v \in B_Y$ selline, et

$$f(u, v) = x^*(u) + y^*(v) > (1 - \lambda\alpha)\|x^*\| + \|y^*\| = 1 - \lambda\alpha\|x^*\| \geq 1 - \alpha.$$

Siis $\|(x, y) - (u, v)\|_\infty \geq 2 - \varepsilon$ ning seega oleme leidnud sobiva punkti.

3) Kui $x^*(x) > (1-\alpha/\lambda)\|x^*\|$, siis $x \in S(B_X, x^*/\|x^*\|, \alpha/\lambda)$ ning seega leidub $u \in S(B_X, x^*/\|x^*\|, \alpha)$ nii, et $\|x-u\| \geq 2-\varepsilon$. Olgu $v \in B_Y$ selline, et

$$f(u,v) = x^*(u) + y^*(v) > (1-\alpha)\|x^*\| + \|y^*\| = 1 - \alpha\|x^*\| \geq 1-\alpha.$$

Siis $\|(x,y)-(u,v)\|_\infty \geq 2-\varepsilon$ ning seega oleme leidnud sobiva punkti.

4) Kui $1 > \|x^*\| > 1/\lambda$ ja $x^*(x) \leq (1-\alpha/\lambda)\|x^*\|$, siis

$$\begin{aligned} y^*(y) &> 1-\alpha-x^*(x) \geq 1-\alpha-(1-\alpha/\lambda)\|x^*\| \\ &= \|y^*\| - \alpha + \alpha/\lambda\|x^*\| \geq \|y^*\| - \alpha(1-1/\lambda^2) = \|y^*\| - \alpha/\lambda. \end{aligned}$$

Seetõttu $y \in S(B_Y, y^*/\|y^*\|, \alpha/(\lambda\|y^*\|))$ ning eelduse põhjal leidub $v \in S(B_Y, y^*/\|y^*\|, \alpha/\|y^*\|)$ nii, et $\|y-v\| \geq 2-\varepsilon$. Olgu $u \in B_X$ selline, et

$$f(u,v) = x^*(u) + y^*(v) > \|x^*\| + \|y^*\| - \alpha = 1-\alpha.$$

Lisaks $\|(x,y)-(u,v)\|_\infty = \max\{\|x-u\|, \|y-v\|\} \geq 2-\varepsilon$.

Nüüd oleme kõigil juhtudel leidnud punkti $(u,v) \in S(B_Z, f, \alpha)$ nii, et $\|(x,y)-(u,v)\|_\infty \geq 2-\varepsilon$ ning lause 1.14 põhjal on (x,y) Δ-punkt. □

Järgnevalt anname näite Banachi ruumist Z ja punktist $z \in S_Z$, mis ei ole Δ-punkt, kuid

- iga viilu $S(B_Z, f, \alpha)$ ja iga $\varepsilon > 0$ korral, kui $z \in S(B_Z, f, \alpha)$, siis leidub $w \in S(B_Z, f, \lambda\alpha)$ nii, et $\|z-w\| \geq 2-\varepsilon$.

Näide 3.9. Olgu X ja Y Banachi ruumid, $1 < \lambda \leq (1+\sqrt{5})/2$, $Z = X \oplus_1 Y$ ning $x \in S_X$, $y \in S_Y$ ja $z = ((1-1/\lambda)x, y/\lambda)$. Eeldame, et x ei ole Δ-punkt ja y on Δ-punkt. Siis lause 3.6 kohaselt z ei ole Δ-punkt Banachi ruumis Z. Näitame, et iga punkti z sisaldava viilu $S(B_Z, f, \alpha)$ ja iga $\varepsilon > 0$ korral leidub $w \in S(B_Z, f, \lambda\alpha)$ nii, et $\|z-w\| \geq 2-\varepsilon$.

Fikseerime $f = (x^*, y^*) \in S_{Z^*}$, $\alpha > 0$ ja $\varepsilon > 0$ nii, et $f(z) > 1-\alpha$. Siis

$$1 - \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}y^*(y) \geq \Big(1-\frac{1}{\lambda}\Big)x^*(x) + \frac{1}{\lambda}y^*(y) > 1-\alpha,$$

millest $y^*(y) > 1-\alpha\lambda$. Lemma 3.5 kohaselt leidub selline $v \in B_Y$, et $y^*(v) > 1-\alpha\lambda$ ja $\|y-v\| \geq 2-\varepsilon$. Siis $f(0,v) = y^*(v) > 1-\alpha\lambda$ ehk $(0,v) \in S(B_Z, f, \alpha\lambda)$. Lisaks

$$\begin{aligned} \Big\|\Big(\Big(1-\frac{1}{\lambda}\Big)x, \frac{1}{\lambda}y\Big) - (0,v)\Big\|_1 &= \Big(1-\frac{1}{\lambda}\Big)\|x\| + \Big\|\frac{1}{\lambda}y - v\Big\| \\ &\geq \Big(1-\frac{1}{\lambda}\Big) + \|y-v\| - \Big(1-\frac{1}{\lambda}\Big)\|y\| \geq 2-\varepsilon. \end{aligned}$$

Sellega oleme leidnud sellise $(0, v) \in S(B_Z, f, \lambda\alpha) \subset S(B_Z, f, \alpha(1+\sqrt{5})/2)$, et $\|z-(0,v)\|_1 \geq 2-\varepsilon$. Lause 3.8 kohaselt (z, z) on Δ-punkt ruumis $Z \oplus_\infty Z$, kuid lause 3.6 põhjal z ei ole Δ-punkt ruumis Z.

Esitame kolmanda peatüki tulemused järgmises tabelis. Olgu X ja Y Banachi ruumid, N absoluutne normaliseeritud norm, $x \in S_X$ ja $y \in S_Y$ ning $a, b \geq 0$ sellised, et $N(a, b) = 1$ ning seetõttu $(ax, by) \in S_{X \oplus_N Y}$.

$a \neq 1$ ja $b \neq 1$	x ja y on Δ-punktid $\Leftrightarrow$ (ax, by) on Δ-punkt
$a = 1$ ja $b \neq 1$	x on Δ-punkt $\Leftrightarrow$ (ax, by) on Δ-punkt
$a \neq 1$ ja $b = 1$	y on Δ-punkt $\Leftrightarrow$ (ax, by) on Δ-punkt
$a = 1$ ja $b = 1$	x või y on Δ-punkt $\Rightarrow$ (ax, by) on Δ-punkt

Tabel 2: Ülevaade Δ-punktide olemasolu seostest Banachi ruumide X ja Y ning nende summaruumi $X \oplus_N Y$ vahel.

Kasutatud kirjandus

[1] T. A. Abrahamsen, R. Haller, V. Lima ja K. Pirk, *Delta- and Daugavet-points in Banach spaces*, arXiv:1812.02450 [math.FA].

[2] F. F. Bonsall ja J. Duncan, *Numerical Ranges II*, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 10, Syndics of the Cambridge University Press, Cambridge, 1973.

[3] J.-D. Hardtke, *Absolute sums of Banach spaces and some geometric properties related to rotundity and smoothness*, Banach J. Math. Anal. **8** (2014), 295–334.

[4] R. Haller, J. Langemets ja R. Nadel, *Stability of average roughness, octahedrality, and strong diameter 2 properties of Banach spaces with respect to absolute sums*, Banach J. Math. Anal. **12** (2018), 222–239.

[5] R. Haller, J. Langemets ja M. Põldvere, *On duality of diameter 2 properties*, J. Convex Anal. **22** (2015), 465–483.

[6] W. Rudin, *Functional Analysis. Second Edition*, International Series in Pure and Applied Mathematics, McGraw-Hill Inc., New York, 1991.

[7] D. Werner, *Recent progress on the Daugavet property*, Irish Math. Soc. Bull. **46** (2001), 77–97.

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Triinu Veeorg,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) minu loodud teose

„Delta- ja Daugaveti-punktid Banachi ruumide otsesummades“,

mille juhendajad on Rainis Haller ja Katriin Pirk,

reprodutseerimiseks eesmärgiga seda säilitada, sealhulgas lisada digitaalarhiivi DSpace kuni autoriõiguste kehtivuse lõppemiseni.

2. Annan Tartu Ülikoolile loa teha punktis 1 nimetatud teos üldsusele kättesaadavaks Tartu Ülikooli veebikeskkonna, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace kaudu Creative Commonsi litsentsiga CC BY NC ND 3.0, mis lubab autorile viidates teost reprodutseerida, levitada ja üldsusele suunata ning keelab luua tuletatud teost ja kasutada teost ärieesmärgil, kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni

3. Olen teadlik, et punktides 1 ja 2 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

4. Kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei riku ma teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse õigusaktidest tulenevaid õigusi.

Triinu Veeorg
08.05.2019